



Universidad de Zaragoza

GRADO EN FÍSICA

TRABAJO DE FIN DE GRADO:

TRANSICIONES EXPLOSIVAS EN MODELOS
SOCIALES DE CORRUPCIÓN

Autor:

Rubén Manero Buey

Directores:

Dr. Mario Floría Peralta

Dr. Francisco Juan Bauzá Mingueza

Junio 2021

Índice

1. Introducción	1
2. Modelo	3
3. Análisis de estabilidad lineal (MMCA)	5
3.1. Umbral de presión social	6
3.2. Umbral de denuncia	7
4. Iteración de ecuaciones y aproximación de Campo Medio	8
5. Análisis de estabilidad lineal (Mean Field)	11
5.1. Punto fijo de honestidad total	11
5.2. Punto fijo de corrupción total	12
5.3. Diagramas de fase	12
5.4. Retratos de fase	14
6. Simulación de Monte Carlo	15
7. Modelo con parámetros de presión social e intimidación	17
7.1. Umbral de presión social	18
7.2. Umbral de intimidación	18
7.3. Dinámica Mean Field	19
7.4. Diagramas y retratos de fase	22
8. Conclusiones	24
Bibliografía	25

1. Introducción

La corrupción, como comportamiento social consistente en el abuso de poder dentro de una organización para obtener un beneficio, económico o de otra índole, puede modelizarse como un proceso de contagio entre pares [1]. Los agentes pertenecientes a la organización o sociedad en cuestión pueden encontrarse en uno de los siguientes estados: honestos, corruptos y en el ostracismo (modelo HCO). El proceso de expansión de la corrupción, al igual que en un modelo epidemiológico, se debe al contacto con los agentes corruptos, los cuales pueden ser denunciados y pasar al ostracismo por contacto con los agentes honestos. A su vez, los agentes apartados de la organización pueden reincorporarse a ésta como agentes honestos, definiendo así tres flujos entre estados como en un modelo SIRS (Susceptible-Infectado-Recuperado-Susceptible)[2, 3].

Con este tipo de modelo se simplifica la multitud de variables que intervienen a nivel individual en la interacción entre agentes, utilizando parámetros globales que tienen en cuenta la diversidad de comportamientos mediante un tratamiento probabilístico. Con la intención de acercar el modelo teórico a la realidad, se ha considerado un cuarto flujo, denominado *warning-to-wrongdoers* [1], desde la población corrupta hacia la población honesta que tiene en cuenta el miedo que puede sentir un agente corrupto por la posibilidad de ser denunciado, y que depende de la cantidad de agentes que se encuentran en el ostracismo, sin mediación de otro parámetro para mantener la simplicidad del modelo.

En la figura 1 se representan los flujos considerados, cuyo control se establece a través de los parámetros α , β , r y $\langle O \rangle$, donde $\langle O \rangle$ representa la fracción de población de agentes en el ostracismo. Además, en el artículo *Fear induced explosive transitions in the dynamics of corruption*, F. Bauzá et al. (2020) [4], se introduce un nuevo parámetro γ que regula la probabilidad de denuncia por parte de los agentes honestos, simulando el efecto de intimidación que pueden ejercer los agentes corruptos sobre ellos. Del mismo modo, en este trabajo se va a considerar el efecto antagónico, es decir, la presión social que se ejerce sobre los agentes corruptos cuando la organización se concientiza para impedir la propagación de la corrupción. Éste puede modelizarse mediante un parámetro δ que regule la probabilidad de corrupción sobre un agente honesto.

En primer lugar se va a presentar el modelo HCO, cuyas funciones de probabilidad son similares a las utilizadas en los modelos epidemiológicos [2, 3], introduciendo en éstas el nuevo parámetro de presión social. Se definirán posteriormente las probabilidades de cambio de estado para todos los flujos, con las que se pueden realizar dos aproximaciones importantes: la aproximación microscópica de cadenas de Markov y la aproximación de campo medio. Con ambas se realizará un análisis de estabilidad lineal que dará como resultado unos valores críticos para los parámetros del modelo con los que poder predecir los estados (fracciones de población en cada estado) alcanzados por el sistema cuando llega al equilibrio.

Tras este estudio previo, se presentarán resultados de las simulaciones realizadas mediante el método de Monte Carlo en un programa de agentes, de estados bien definidos, con las funciones de probabilidad originales del modelo. La comparación entre estas simulaciones y las realizadas mediante las aproximaciones comentadas más arriba se ajusta convenientemente y permite realizar todo el análisis del modelo con la aproximación de campo medio (Mean Field), que resulta más esclarecedora a la hora de estudiar el comportamiento del sistema.

Posteriormente, se realizará el mismo tipo de desarrollo sobre el modelo añadiendo el parámetro de intimidación γ , uniendo así el estudio realizado por F. Bauzá et al. (2020) [4] y el aquí expuesto. Algo novedoso de esta fusión de modelos es que aparece una región en la que los macroestados de población completamente honesta, completamente corrupta y mixta son los tres estables, lo que se explicará en los últimos apartados de esta memoria.

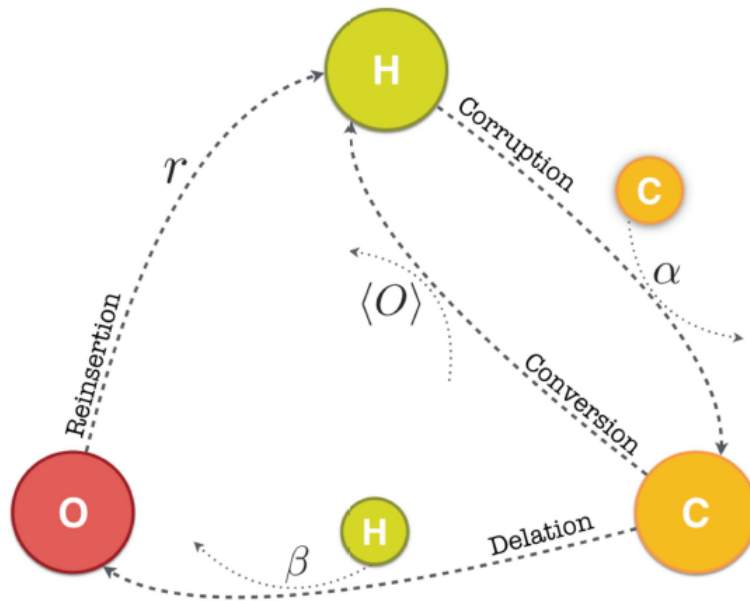


Figura 1: Flujos del modelo HCO [4]. Se han considerado cuatro flujos: corrupción ($H \rightarrow C$), denuncia ($C \rightarrow O$), conversión ($C \rightarrow H$) y reinsertión ($O \rightarrow H$).

2. Modelo

La sociedad u organización se puede representar mediante una red compleja donde los nodos serían los agentes y los enlaces de la red representarían interacciones entre estos agentes. La red compleja estaría codificada matemáticamente por una matriz de adyacencia \mathbf{A} cuyas componentes serían $A_{ij} = 0$ si no hay conexión entre los agentes i y j o $A_{ij} = 1$ si hay conexión entre ellos. En este trabajo se van a utilizar siempre redes de N individuos, no pesadas, no dirigidas y que no varían en el tiempo. El tipo de red que representa la organización puede ser una red regular del tipo Random Regular Network (RRN), donde todos los nodos tienen el mismo grado (número de conexiones con otros nodos) o una red heterogénea del tipo Erdős-Rényi (ER) o Scale Free (SF), donde el grado puede ser distinto para cada nodo [5, 6, 7].

Recopilando las ecuaciones originales del modelo HCO [1], la función de probabilidad para que un agente honesto se vuelva corrupto es

$$f_{\alpha}^{HC}(i, \{\sigma_j\}) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \alpha A_{ij} \delta_{\sigma_j, C}) \quad (1)$$

Y la de que un agente corrupto sea denunciado y pase al ostracismo

$$f_{\beta}^{CO}(i, \{\sigma_j\}) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \beta A_{ij} \delta_{\sigma_j, H}) \quad (2)$$

Estas expresiones son similares a las utilizadas en modelos compartimentales epidémicos [3], donde los parámetros α y β representan las probabilidades de que un agente i cambie de estado al interactuar con otro agente j . Éstos van multiplicados por la componente de la matriz de adyacencia A_{ij} que indica si el agente está en contacto con el agente j , y por la delta de Kronecker, que marca si este último se encuentra en el estado $\sigma_j = H, C, O$ adecuado para influir sobre el cambio del agente i . De esta forma, el productorio marca la probabilidad de que el agente permanezca inalterado y las funciones $f_{\alpha}^{HC}(i, \{\sigma_j\})$ y $f_{\beta}^{CO}(i, \{\sigma_j\})$ la de que cambie de estado. En éstas, $\{\sigma_j\}$ es la notación comúnmente utilizada en los formalismos de Mecánica Estadística que representa la sucesión de 1 a N para los estados de cada uno de los elementos del conjunto, es decir, un microestado del sistema.

Sobre la ecuación (1) se introduce entonces el parámetro δ de presión social que modula la probabilidad de corrupción ejercida por los agentes corruptos sobre los honestos

$$f_{\alpha}^{HC}(i, \{\sigma_j\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta \langle H \rangle) A_{ij} \delta_{\sigma_j, C}] \quad (3)$$

La influencia de este parámetro depende además de la fracción de población de agentes honestos en la organización y, al igual que los parámetros α y β , su valor es $0 \leq \delta \leq 1$. Se puede observar como al tomar $\delta = 0$ se recupera el modelo HCO original.

Definidas las funciones de probabilidad de los flujos $H \rightarrow C$ y $C \rightarrow O$, y con el parámetro r y el valor de $\langle O \rangle$ presentados en la figura 1 que marcan las probabilidades de cambio de estado para los flujos $O \rightarrow H$ y $C \rightarrow H$, respectivamente, se establecen así los posibles cambios de estado para cada agente [4]. Sea $\sigma_i(t)$ el estado del agente i en el instante t :

1. Si $\sigma_i(t) = H$, el agente honesto puede cambiar al estado de corrupción tras un paso temporal, es decir, $\sigma_i(t+1) = C$, con probabilidad f_α^{HC} . Y permanecerá en el estado honesto con probabilidad $1 - f_\alpha^{HC}$.
2. Si $\sigma_i(t) = C$, por el efecto *warning-to-wrongdoers* el agente corrupto puede convertirse en honesto, $\sigma_i(t+1) = H$, con probabilidad $\langle O \rangle$, la fracción de población de agentes en el ostracismo. En el caso de que no se vuelva honesto puede ser denunciado, $\sigma_i(t+1) = O$, con probabilidad $f_\beta^{HC}(1 - \langle O \rangle)$. Esta elección del orden de probabilidades es arbitraria, se podría optar por considerar la probabilidad de denuncia previa a la de conversión. Por último, el agente permanece corrupto con probabilidad $(1 - f_\beta^{HC})(1 - \langle O \rangle)$.
3. Si $\sigma_i(t) = O$, el agente en el ostracismo puede pasar a ser honesto, $\sigma_i(t+1) = H$, con probabilidad r y, consecuentemente, puede permanecer apartado de la organización con probabilidad $1 - r$.

Una vez presentado el modelo y sus probabilidades de transición entre estados, se pueden realizar simulaciones de Monte Carlo (MC) a partir de una configuración inicial de la red y comprobar la evolución de las poblaciones honesta, corrupta y en el ostracismo para distintos valores de cada uno de los parámetros. También se puede desarrollar una Aproximación Microscópica de Cadenas de Markov (MMCA) [8, 9, 10], donde a cada agente i en un instante t se le asigna un vector real $\vec{\rho}(i; t)$ cuyas componentes son las probabilidades de que el agente se encuentre en cada uno de los posibles estados,

$$\vec{\rho}(i; t) \equiv (\rho_h(i; t), \rho_c(i; t), \rho_o(i; t))$$

Con las transiciones 1-3 establecidas anteriormente se define entonces un proceso de Markov no lineal para la evolución temporal de estas probabilidades $\vec{\rho}(i; t+1) = \mathbf{Q}_i \vec{\rho}(i; t)$, donde

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} 1 - f_\alpha(i) & \langle \rho_o \rangle & r \\ f_\alpha(i) & [1 - f_\beta(i)][1 - \langle \rho_o \rangle] & 0 \\ 0 & f_\beta(i)[1 - \langle \rho_o \rangle] & 1 - r \end{pmatrix}$$

Ahora la fracción de población en el ostracismo en el instante t es

$$\langle \rho_o \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \rho_o(i; t)$$

Y dentro de este marco, las tasas dadas por las ecuaciones (3) y (2) para los flujos de corrupción y denuncia, determinados por las interacciones entre pares, se transforman respectivamente en

$$f_\alpha(i, \{\bar{\rho}(j; t)\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta\langle\rho_h\rangle)A_{ij}\rho_c(j; t)] \quad (4)$$

$$f_\beta(i, \{\bar{\rho}(j; t)\}) = 1 - \prod_{j=1}^N (1 - \beta A_{ij}\rho_h(j; t)) \quad (5)$$

donde $\langle\rho_h\rangle = N^{-1} \sum_i \rho_h(i; t)$ es la fracción de población honesta en el instante t . Desarrollando la expresión para la evolución temporal, con la matriz \mathbf{Q} , sobre cada una de las componentes, se obtienen las siguientes ecuaciones del modelo para la aproximación MMCA:

$$\rho_h(i; t+1) = [1 - f_\alpha(i)]\rho_h(i; t) + \langle\rho_o\rangle\rho_c(i; t) + r\rho_o(i; t) \quad (6)$$

$$\rho_c(i; t+1) = f_\alpha(i)\rho_h(i; t) + [1 - f_\beta(i)][1 - \langle\rho_o\rangle]\rho_c(i; t) \quad (7)$$

$$\rho_o(i; t+1) = f_\beta(i)[1 - \langle\rho_o\rangle]\rho_c(i; t) + [1 - r]\rho_o(i; t) \quad (8)$$

Se tiene un sistema de $3N$ ecuaciones diferenciales acopladas, pero considerando que las probabilidades de los tres estados en un instante determinado han de cumplir la condición de normalización $\sum_m \rho_m(i; t) = 1$ ($m = h, c, o$), se queda en $2N$ ecuaciones diferenciales y se puede elegir cualquiera de las componentes como variable dependiente.

3. Análisis de estabilidad lineal (MMCA)

Una característica de los sistemas dinámicos es la aparición de puntos fijos [11]: las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = f(x)$ conforman un campo vectorial que determina el vector velocidad \dot{x} en cada punto x y las soluciones de equilibrio donde $\dot{x} = 0$ se denominan puntos fijos del sistema. La estabilidad de los mismos se determina con el flujo del campo vectorial (direcciones de los vectores velocidad), siendo estables cuando el flujo es entrante en su entorno e inestables cuando el flujo es saliente. Esto permite hacerse una idea de los estados de equilibrio a los que irá a parar el sistema dependiendo de las condiciones iniciales de las que se parta.

En este modelo, los puntos fijos son aquellos puntos que cumplen la condición $\dot{\rho}_h = \dot{\rho}_c = 0$, donde

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_h &= \rho_h(t+1) - \rho_h(t) = -[f_\alpha + r + \rho_c(t)]\rho_h(t) + [r + \rho_c(t)][1 - \rho_c(t)] \\ \dot{\rho}_c &= \rho_c(t+1) - \rho_c(t) = [f_\alpha + (1 - f_\beta)\rho_c(t)]\rho_h(t) + [(1 - f_\beta)\rho_c(t) - 1]\rho_c(t) \end{aligned} \quad (9)$$

tomando como variable dependiente ρ_o . Es fácil comprobar que los estados en los que la población es completamente honesta o completamente corrupta son siempre puntos fijos del sistema, aparte

de que pueda haber otros que satisfagan dicha condición, aunque estos últimos son desconocidos sin unos valores definidos de los parámetros del modelo. Es interesante realizar el análisis de los puntos fijos que sí se conocen porque éste determina los rangos de parámetros que definen su estabilidad. Asumiendo que el sistema ha alcanzado su estado estacionario, se tiene que

$$\rho_h(i; t + 1) = \rho_h(i; t) = \rho_h^*(i)$$

$$\rho_c(i; t + 1) = \rho_c(i; t) = \rho_c^*(i)$$

$$\rho_o(i; t + 1) = \rho_o(i; t) = \rho_o^*(i)$$

3.1. Umbral de presión social

Se empieza estudiando la estabilidad del estado de honestidad total, con la intención de obtener una condición o desigualdad entre los distintos parámetros del modelo que siempre que se cumpla, dicho estado será estable. Tomando como variables independientes las componentes $\rho_c^*(i)$ y $\rho_o^*(i)$, lo que implica que $\rho_h^*(i) = 1 - \rho_c^*(i) - \rho_o^*(i)$ por la condición de normalización y aplicando que $\rho_m(i; t + 1) = \rho_m(i; t) = \rho_m^*(i)$, las ecuaciones (7) y (8) quedan como

$$f_\beta(i)\rho_c^*(i) = f_\alpha(i)[1 - \rho_c^*(i) - \rho_o^*(i)] - [1 - f_\beta(i)]\langle\rho_o^*\rangle\rho_c^*(i) \quad (10)$$

$$r\rho_o^*(i) = f_\beta(i)[1 - \langle\rho_o^*\rangle]\rho_c^*(i) \quad (11)$$

Cerca del estado de honestidad total se puede asumir que $\rho_c^*(i) = \varepsilon_c^i \ll 1$ y $\rho_o^*(i) = \varepsilon_o^i \ll 1$, por lo que despreciando los términos cuadráticos $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ las ecuaciones anteriores se reducen a

$$f_\beta(i)\varepsilon_c^i = f_\alpha(i)(1 - \varepsilon_c^i - \varepsilon_o^i) \quad (12)$$

$$r\varepsilon_o^i = f_\beta(i)\varepsilon_c^i \quad (13)$$

Las probabilidades de ser corrompido o denunciado, con $\langle\rho_h^*\rangle \approx 1$, se pueden aproximar a

$$f_\alpha(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta\langle\rho_h^*\rangle)A_{ij}\varepsilon_c^j] \simeq \alpha(1 - \delta) \sum_{j=1}^N A_{ij}\varepsilon_c^j \quad (14)$$

$$f_\beta(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta A_{ij}\rho_h^*(j)] \simeq 1 - (1 - \beta)^{k_i} \quad (15)$$

donde k_i denota el grado del nodo i . Introduciendo estas expresiones en la ecuación (12) y conservando únicamente los términos lineales se llega a

$$\varepsilon_c^i = \alpha(1 - \delta) \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{A_{ij}}{1 - (1 - \beta)^{k_i}}}_{M_{ij}} \varepsilon_c^j \quad (16)$$

Por lo tanto, obtener la expresión para el umbral de presión social se reduce a resolver un problema de autovalores y el valor mínimo de δ por debajo del cual se desestabiliza una población completamente honesta es

$$\delta \geq \delta_c = 1 - \frac{1}{\alpha \Lambda_{max}(\mathbf{M})} \quad (17)$$

donde $\Lambda_{max}(\mathbf{M})$ representa el radio espectral de la matriz \mathbf{M} , es decir, el supremo de entre los valores absolutos de sus autovalores.

3.2. Umbral de denuncia

Se toman ahora las componentes $\rho_h^*(i)$ y $\rho_o^*(i)$ como variables independientes, y en este caso $\rho_c^*(i) = 1 - \rho_h^*(i) - \rho_o^*(i)$. Entonces las ecuaciones (6) y (8) cambian a

$$f_\alpha(i) \rho_h^*(i) = [1 - \rho_h^*(i) - \rho_o^*(i)] \langle \rho_o^* \rangle + r \rho_o^*(i) \quad (18)$$

$$r \rho_o^*(i) = f_\beta(i) [1 - \langle \rho_o^* \rangle] [1 - \rho_h^*(i) - \rho_o^*(i)] \quad (19)$$

Para una población casi completamente corrupta $\rho_h^*(i) = \varepsilon_h^i \ll 1$ y $\rho_o^*(i) = \varepsilon_o^i \ll 1$, y conservando solo los términos lineales se llega a

$$f_\alpha(i) \varepsilon_h^i = \langle \varepsilon_o \rangle + r \varepsilon_o^i \quad (20)$$

$$r \varepsilon_o^i = f_\beta(i) (1 - \langle \varepsilon_o \rangle - \varepsilon_h^i - \varepsilon_o^i) \quad (21)$$

donde las funciones $f_\alpha(i)$ y $f_\beta(i)$ son

$$f_\alpha(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta \langle \varepsilon_h \rangle) A_{ij} \rho_c^j] \simeq 1 - (1 - \alpha)^{k_i} \quad (22)$$

$$f_\beta(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta A_{ij} \varepsilon_h^j] \simeq \beta \sum_{j=1}^N A_{ij} \varepsilon_h^j \quad (23)$$

En la ecuación (21) se pueden despreciar los términos $\langle \varepsilon_o \rangle$, ε_h^i y ε_o^i frente a 1, y sustituyendo $r \varepsilon_o^i = f_\beta(i)$ en la ecuación (20)

$$f_\alpha(i) \varepsilon_h^i = \langle \varepsilon_o \rangle + f_\beta(i) \quad (24)$$

A su vez, como $r \varepsilon_o^j = f_\beta(i) = \beta k_j \varepsilon_h^j$, con k_j el grado del nodo j ,

$$\langle \varepsilon_o \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varepsilon_o^j = \frac{\beta}{Nr} \sum_{j=1}^N k_j \varepsilon_h^j \quad (25)$$

De este modo, a partir de la ecuación (24) se tiene que

$$\varepsilon_h^i = \beta \sum_{j=1}^N \frac{\frac{k_j}{Nr} + A_{ij}}{\underbrace{1 - (1 - \alpha)^{k_i}}_{\tilde{M}_{ij}}} \varepsilon_h^j \quad (26)$$

Y el umbral de denuncia que desestabiliza la población totalmente corrupta es

$$\beta \leq \beta_c = \frac{1}{\Lambda_{max}(\tilde{\mathbf{M}})} \quad (27)$$

De nuevo un problema de autovalores, pero esta vez con el radio espectral de la matriz $\tilde{\mathbf{M}}$.

4. Iteración de ecuaciones y aproximación de Campo Medio

En la aproximación de campo medio o *mean field* (MF) se asume la homogeneidad del campo (i.e., estado de los agentes) y de la estructura de los contactos (i.e., matriz de adyacencia). Se considera entonces el comportamiento de cada agente como el comportamiento medio de toda la población para el proceso de Markov asociado, $\vec{\rho}(i) = \langle \vec{\rho} \rangle \equiv \vec{\rho}$, y el vecindario de grado k seleccionado aleatoriamente entre la población en cada instante (asunción de población bien mezclada). Entonces, las dinámicas temporales discretas de campo medio forman un mapa bidimensional del simplex \mathcal{S}_2 sobre sí mismo, representado en la figura 2, donde se observa el flujo de conversión añadido en el modelo HCO respecto al modelo SIRS.

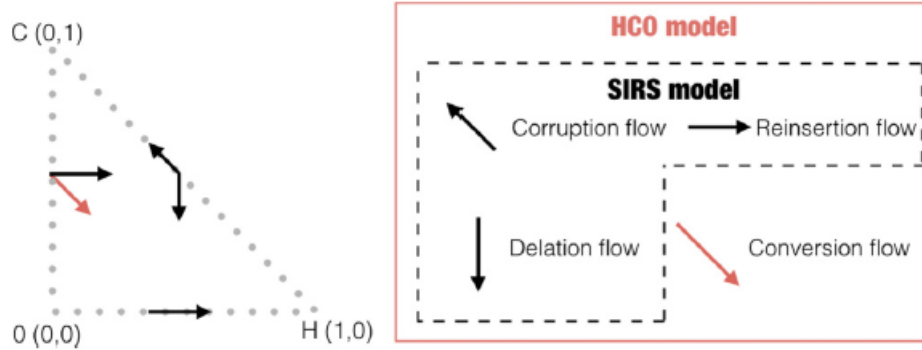


Figura 2: Visualización esquemática del simplex \mathcal{S}_2 , con $0 \leq \rho_h, \rho_c \leq 1$ y $\rho_h + \rho_c \leq 1$, (izquierda) y direcciones de las contribuciones al campo \vec{F} de cada uno de los cuatro flujos compartimentales (derecha).

Tomando como variables independientes las poblaciones honesta y corrupta, a este mapa se le asocia un flujo bidimensional definido por el campo de velocidades (figura 2) sobre el simplex, $\vec{F}(\vec{\rho}) = \dot{\vec{\rho}} \equiv (\dot{\rho}_h, \dot{\rho}_c)$, cuyas componentes son

$$F_h(\vec{\rho}) = \rho_h(t+1) - \rho_h(t) = -[f_\alpha + r + \rho_c(t)]\rho_h(t) + [r + \rho_c(t)][1 - \rho_c(t)] \quad (28)$$

$$F_c(\vec{\rho}) = \rho_c(t+1) - \rho_c(t) = [f_\alpha + (1 - f_\beta)\rho_c(t)]\rho_h(t) + [(1 - f_\beta)\rho_c(t) - 1]\rho_c(t) \quad (29)$$

Obtenidas a partir de las ecuaciones (6) y (7), con $\rho_o = 1 - \rho_h - \rho_c$ por la condición de normalización, donde las funciones de probabilidad de corrupción y denuncia, aplicando la aproximación de Campo Medio, pasan a ser

$$f_\alpha(\rho_h, \rho_c) = 1 - [1 - \alpha(1 - \delta\rho_h)\rho_c]^k \quad (30)$$

$$f_\beta(\rho_h) = 1 - (1 - \beta\rho_h)^k \quad (31)$$

Simulando la evolución del sistema mediante la iteración de las ecuaciones (6), (7) y (8) se puede observar el comportamiento del mismo, definido por su estado estacionario (variable dependiente) en función de los parámetros, fijando el valor de todos ellos menos uno, que se deja variar (variable independiente, normalmente α o β). Con la aproximación de campo medio no se considera una estructura de red al asumir que todos los nodos de la misma se comportan como el nodo promedio. Para las funciones de probabilidad (30) y (31) se ha seleccionado un grado $k = 4$ que indica las conexiones de cada agente.

Sin embargo, para el proceso de Markov se requiere darle estructura a la red y asignar una configuración inicial para los vectores $\vec{\rho}_i$ que determinan las probabilidades de que el agente i se encuentre en cada uno de los tres estados. Para ello, se ha utilizado una red homogénea (todos los nodos tienen el mismo grado) de grado $k = 4$ conexa, es decir, que existe siempre un camino de enlaces que conecta un nodo con cualquier otro, del tipo Random Regular Network (RRN). Este tipo de redes se construyen estableciendo tantos enlaces por nodo como el grado que se desee, distribuidos de forma aleatoria. Es decir, para un grado k constante, cada nodo tendrá k enlaces con el resto de nodos elegidos al azar. La configuración inicial se puede establecer por elección pero se ha de tener en cuenta que las poblaciones completamente honesta y completamente corrupta son puntos donde el sistema se queda anclado. De este modo, la evolución del sistema se realiza por iteración de las ecuaciones (6), (7) y (8) pero con las funciones de probabilidad de corrupción y denuncia (4) y (5) definidas para MMCA, donde en cada instante de tiempo se evalúa el estado del vecindario para cada agente de la red.

La comparación entre las simulaciones realizadas con los programas *Mean Field* y *Markov* puede verse en la figura 3, donde se observan distintos comportamientos del sistema según la elección de valores para los distintos parámetros. En el panel izquierdo, donde se ha representado la fracción de población corrupta, se aprecia como, con $\delta = 0.4$ y $\beta = 0.25$, para valores pequeños de α el sistema se queda anclado en el punto fijo de honestidad total hasta que para un valor $\alpha \sim 0.3$ se desestabiliza hacia una población mixta, que va ganando agentes corruptos para valores mayores de este parámetro. En el panel derecho se observa un comportamiento muy diferente cuando los parámetros fijos son $\delta = 0.8$ y $\alpha = 0.5$ y la fracción de población representada es la de agentes honestos. En éste, se parte de una población completamente corrupta cuando β es pequeño y en un rango estrecho de valores se pasa a una población completamente honesta, además de mostrar un ciclo de histéresis cuando los valores de este parámetro se iteran en sentido inverso, lo que indica una zona de biestabilidad entre los puntos fijos de honestidad total y población mixta (coexistencia de estados en la población).

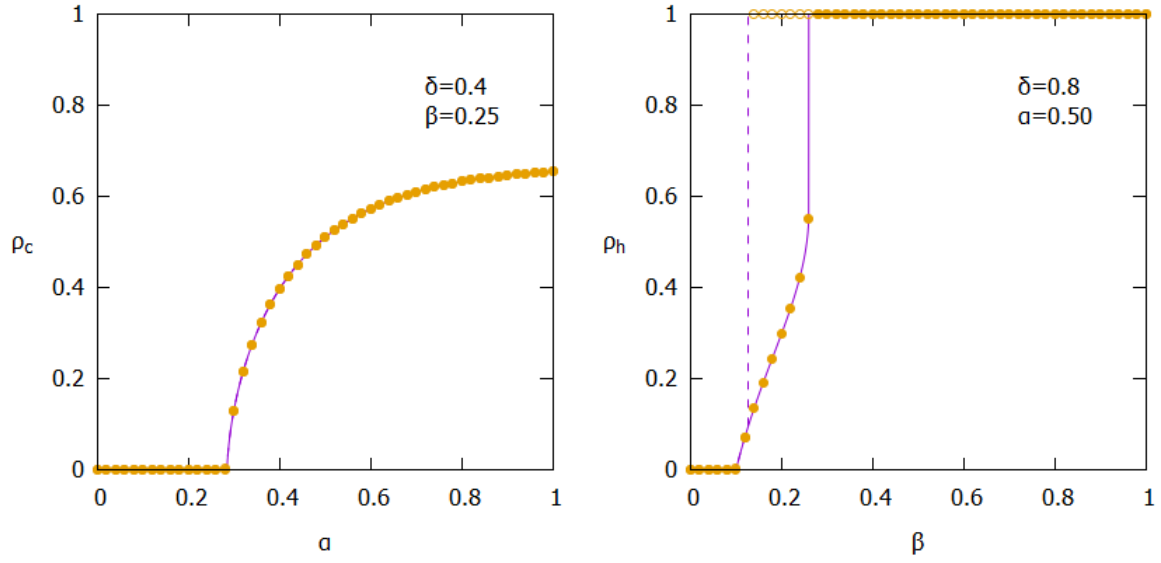


Figura 3: Mean Field (línea morada) versus Markov (puntos naranjas). Población corrupta frente a α , con β y δ fijos (izquierda), y población honesta frente a β , con α y δ fijos (derecha). La línea discontinua y los puntos huecos representan el sentido descendente de β en las simulaciones.

Lo más destacado de estas representaciones es la coincidencia de las aproximaciones de campo medio y de cadenas de Markov, debido a que estamos trabajando con redes homogéneas (el mismo grado para todos los nodos). Esta concordancia entre ambas aproximaciones permite realizar el análisis del sistema mediante la aproximación de campo medio sin pérdida de generalidad.

5. Análisis de estabilidad lineal (Mean Field)

A partir del campo de velocidades definido anteriormente, cuyas componentes vienen dadas por las ecuaciones (28) y (29), se puede obtener la matriz Jacobiana

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \partial F_h / \partial \rho_h & \partial F_h / \partial \rho_c \\ \partial F_c / \partial \rho_h & \partial F_c / \partial \rho_c \end{pmatrix}$$

La traza de esta matriz ha de ser negativa, $tr(\mathbf{J}) < 0$. Los elementos $J_{ml} = \partial F_m / \partial \rho_l$, aligerando la notación con $\rho_l \equiv \rho_l(i, t)$, son entonces

$$\frac{\partial F_h}{\partial \rho_h} = -(f_\alpha + r + \rho_c) - \rho_h \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_h} \quad (32)$$

$$\frac{\partial F_h}{\partial \rho_c} = -\rho_h + 1 - r - 2\rho_c - \rho_h \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} \quad (33)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \rho_h} = f_\alpha + (1 - f_\beta)\rho_c - \rho_h \rho_c \frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h} + \rho_h \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_h} - \rho_c^2 \frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h} \quad (34)$$

$$\frac{\partial F_c}{\partial \rho_c} = \rho_h \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} + \rho_h - \rho_h f_\beta + 2\rho_c - 2\rho_c f_\beta - 1 \quad (35)$$

Y las derivadas de las funciones de probabilidad $f_\alpha(\rho_h, \rho_c)$ y $f_\beta(\rho_h)$,

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_h} = -k\alpha\delta\rho_c[1 - \alpha(1 - \delta\rho_h)\rho_c]^{k-1} \quad (36)$$

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} = k\alpha(1 - \delta\rho_h)[1 - \alpha(1 - \delta\rho_h)\rho_c]^{k-1} \quad (37)$$

$$\frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h} = k\beta(1 - \beta\rho_h)^{k-1} \quad (38)$$

5.1. Punto fijo de honestidad total

Para una población totalmente honesta, $(\rho_h, \rho_c) = (1, 0)$, y con las derivadas parciales anteriores evaluadas en este punto, se tiene que la matriz Jacobiana es

$$\mathbf{J}|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -r & -r - \left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} \right|_{(1,0)} \\ 0 & \left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} \right|_{(1,0)} - f_\beta(1) \end{pmatrix} \quad (39)$$

La condición que determina la estabilidad de este punto, $tr(\mathbf{J}) < 0 \Rightarrow det(\mathbf{J}) > 0$, proporciona la relación entre los distintos parámetros que marca la emergencia de la corrupción en una sociedad totalmente honesta. Desarrollando el determinante de la matriz, dicha condición es

$$\left. \frac{\partial f_\alpha}{\partial \rho_c} \right|_{(1,0)} < f_\beta(1) \Rightarrow k\alpha(1 - \delta) < 1 - (1 - \beta)^k \quad (40)$$

Luego los valores críticos de α y δ que indican la estabilidad del macroestado de honestidad total son

$$\alpha \leq \alpha_c(\beta, \delta, r) = \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k(1 - \delta)} \quad (41)$$

$$\delta \geq \delta_c(\alpha, \beta, r) = 1 - \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k\alpha} \quad (42)$$

Esta última expresión para δ_c se puede comparar con la obtenida en el apartado del umbral de presión social para la aproximación microscópica de cadenas de Markov,

$$\delta_c = 1 - \frac{1}{\alpha \Lambda_{max}(\mathbf{M})} \quad (43)$$

La aproximación de campo medio permite simplificar el problema de autovalores al que se llegaba con MMCA y obtener una expresión analítica para estos valores críticos de parámetros.

5.2. Punto fijo de corrupción total

Para una población totalmente corrupta, $(\rho_h, \rho_c) = (0, 1)$, la matriz Jacobiana se reduce a

$$\mathbf{J}|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} -f_\alpha(0, 1) - r - 1 & -r - 1 \\ 1 + f_\alpha(0, 1) - \frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h}|_{(0,1)} & 1 \end{pmatrix} \quad (44)$$

En este caso, la condición de estabilidad, $\det(\mathbf{J}) > 0$, se traduce en

$$r f_\alpha(0, 1) > (r + 1) \frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h}|_{(0,1)} \Rightarrow r[1 - (1 - \alpha)^k] > (r + 1)k\beta \quad (45)$$

Y el valor crítico de β que desestabiliza el macroestado de corrupción total es

$$\beta \leq \beta_c(\alpha, r) = \frac{r}{r + 1} \frac{1 - (1 - \alpha)^k}{k} \quad (46)$$

De nuevo, se puede comparar esta expresión con la obtenida en el apartado del umbral de denuncia para la aproximación microscópica de cadenas de Markov,

$$\beta_c = \frac{1}{\Lambda_{max}(\tilde{\mathbf{M}})} \quad (47)$$

Este umbral no muestra dependencia con δ , lo que indica que el efecto de presión social no influye en el desarrollo de fluctuaciones de honestidad sobre una sociedad completamente corrupta.

5.3. Diagramas de fase

Mediante las expresiones (42) y (46) se pueden representar los diagramas de fases de los parámetros del modelo, lo que provee una imagen global del comportamiento del sistema. En la figura 4 se representa la variación de los valores críticos β_c y δ_c respecto a los parámetros de los que dependen, habiendo fijado el grado de los agentes a $k = 4$ y el valor del parámetro de

reinserción a $r = 0.75$. Las condiciones de estabilidad predicen que por debajo de β_c todos los agentes serán corruptos mientras que por encima de δ_c todos serán honestos.

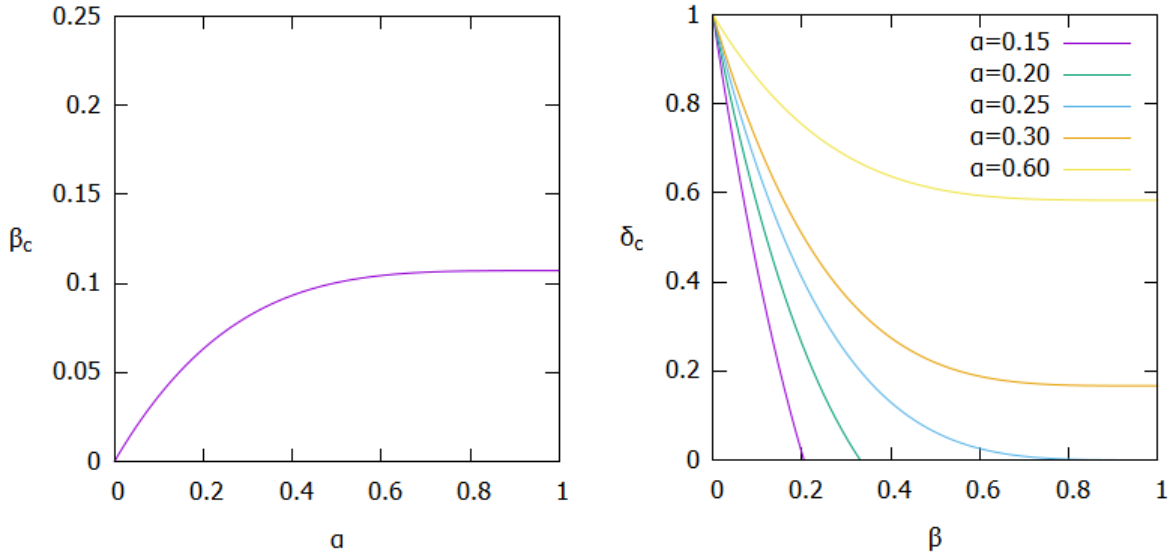


Figura 4: Representación de β_c frente a α (izquierda) y representación de δ_c frente a β para distintos valores de α (derecha), con $(k, r) = (4, 0.75)$.

El diagrama de fases $\alpha - \beta$ se puede observar en la figura 5, donde se distinguen las regiones del espacio de fases donde el sistema muestra diversos comportamientos. Las zonas sombreadas en verde indican que el sistema se encuentra en un macroestado de honestidad total, mientras que las zonas sombreadas en rojo indican el macroestado de corrupción total. En las regiones amarillas la población está mezclada y la estabilidad se da en algún punto fijo intermedio, y en las zonas sombreadas en morado existe un comportamiento biestable entre los puntos fijos de las poblaciones completamente honesta y completamente corrupta.

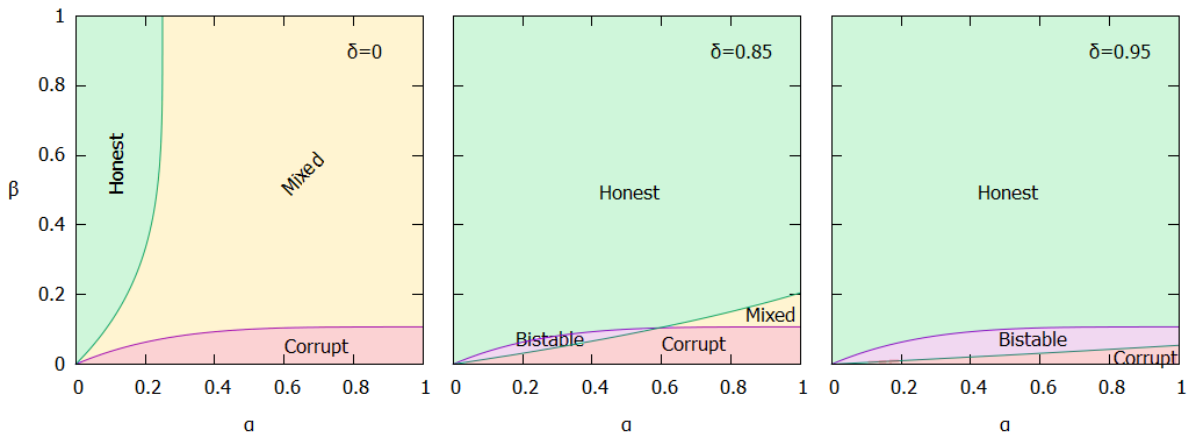


Figura 5: Secuencia de diagramas de fases para distintos valores del parámetro de presión social. El panel izquierdo, con $\delta = 0$, representa el modelo HCO original.

Es interesante visualizar el nivel de población de los estados junto con las condiciones de estabilidad. Para ello, en la figura 6 se ha representado con un mapa de color el nivel de población honesta en el diagrama de fases $\beta - \delta$. Por encima del valor δ_c (línea verde) se debe cumplir la condición del umbral de presión social por la que la población es completamente honesta. Sin embargo, por debajo de un determinado valor de β (a la altura del punto morado), por encima de δ_c se observa una transición desde la población completamente honesta (en amarillo) a una población mixta (colores intermedios) o incluso, para valores más bajos del valor crítico β_c (línea roja), a una completamente corrupta (en negro). Esto indica la zona de biestabilidad comentada anteriormente (zona rayada en morado). El punto morado sobre la línea verde que marca la desestabilización del punto fijo de honestidad total es el punto crítico (β_c, δ_c) donde empieza la región de biestabilidad. Los resultados mostrados para las poblaciones en el equilibrio mediante el mapa de color se han obtenido partiendo de una configuración inicial con las tres fracciones de población iguales, es decir, siendo cada una un tercio de la población total.

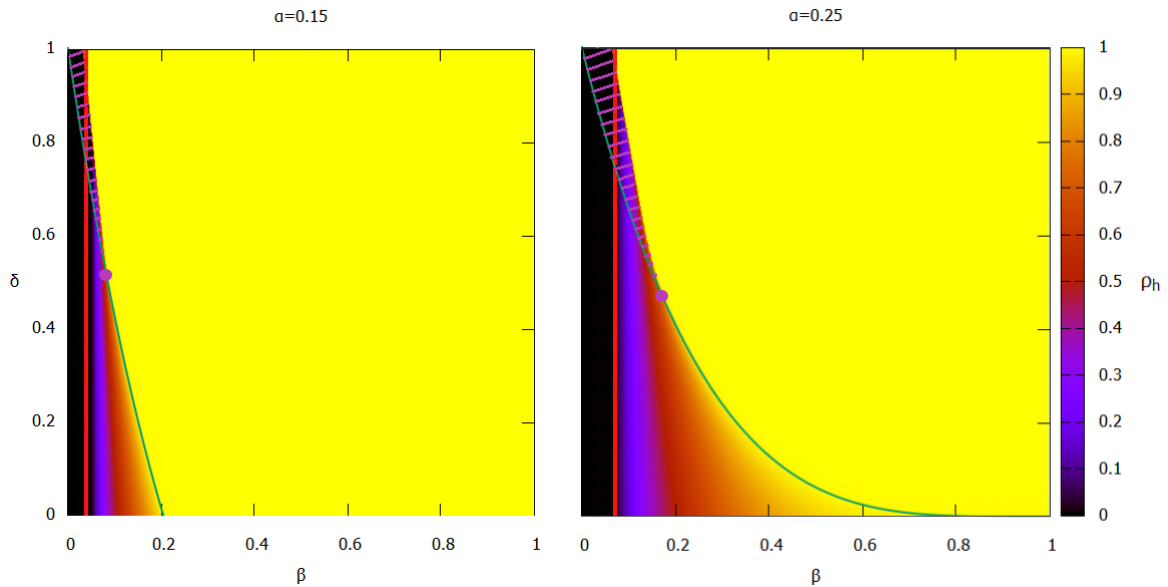


Figura 6: Nivel de honestidad ρ_h^* (código de color) en el diagrama de fases $\beta - \delta$ para $\alpha = 0.15$ (izquierda) y $\alpha = 0.25$ (derecha). La línea verde indica el valor δ_c , la recta roja vertical β_c y la zona rayada en morado la región de biestabilidad del sistema.

5.4. Retratos de fase

Para comprobar la existencia de puntos fijos y su estabilidad, se recurre al cálculo de las nulclinas [11], es decir, aquellas curvas que cumplen la condición $F_h(\vec{\rho}) = 0$ y $F_c(\vec{\rho}) = 0$ en las ecuaciones (28) y (29). Los cortes entre estas curvas establecen los puntos fijos del sistema y la estabilidad de los mismos se puede comprobar con el campo de velocidades, que indica cuales de ellos son atractores, como se ve en la figura 7. La nulclina F_h está representada en verde, mientras que la nulclina F_c , que tiene dos ramas, está en amarillo. Se puede apreciar que las poblaciones completamente corrupta y completamente honesta son siempre puntos fijos del sistema.

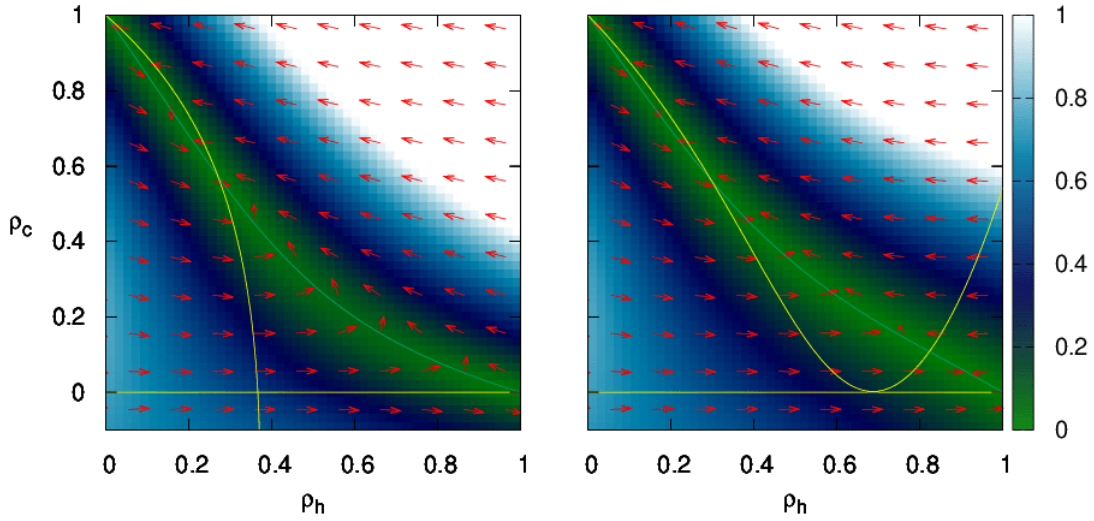


Figura 7: Retrato de fases y campo de velocidades con nulclinas F_h (verde) y F_c (amarillo). Valores de parámetros (α, β, δ) : $(0.6, 0.25, 0.4)$ a la izquierda y $(0.5, 0.2, 0.8)$ a la derecha. El resto de parámetros se han fijado a $(k, r) = (4, 0.75)$ en ambas y el mapa de color representa el modulo del campo de velocidades.

Se han tomado los mismos valores de parámetros que en la figura 3 en las zonas de interés del sistema. En el panel izquierdo se ha elegido un valor $\alpha = 0.6$ porque en la gráfica izquierda de la figura 3 dicho valor se encuentra en una zona de población mixta, lo que quiere decir que el punto estable es un punto intermedio. En efecto, en la representación de las nulclinas de la figura 7 existe un corte de F_h con F_c entre los puntos fijos que es un atractor. En el panel derecho se ha optado por tomar un valor $\beta = 0.2$ que se encuentra en la zona de biestabilidad entre la población completamente honesta y una población mixta, a la vista de la gráfica derecha de la figura 3. En el retrato de fases se coteja que hay cuatro puntos fijos, de los cuales dos han de ser estables (región de biestabilidad).

6. Simulación de Monte Carlo

Hasta ahora se ha estudiado el sistema desde las aproximaciones de campo medio y cadenas de Markov, pero para comprobar la validez de las mismas, se debe analizar el modelo directamente con un programa de agentes mediante simulaciones de Monte Carlo. Esto es, utilizar las ecuaciones (2) y (3) sobre una estructura de red y una configuración inicial en la que a cada agente se le asigna un estado bien definido entre los tres posibles: honesto, corrupto o en el ostracismo.

Valiéndose de la matriz de adyacencia utilizada para el proceso de Markov, que define una Random Regular Network de grado $k = 4$, en cada paso temporal se comprueba el estado del vecindario de cada agente y se aplica la probabilidad de cambio correspondiente. Para los agentes corruptos se ha seguido el mismo criterio que en MMCA, donde primero se aplica la probabilidad de seguir el flujo de conversión, previa a la de seguir el flujo de denuncia. Antes de aplicar la transformación de cada agente, se calculan todos los cambios en la red con la configuración previa y, una vez obtenidos, se aplican todos a la vez confeccionando la configuración para el siguiente

paso. De este modo, se deja evolucionar el sistema hacia el equilibrio hasta que la diferencia entre el estado macroscópico de dos pasos consecutivos cumpla un criterio de precisión suficiente para considerarlo estacionario. Además, este proceso se ha promediado sobre 50 realizaciones para minimizar la naturaleza estocástica de este tipo de sistemas complejos.

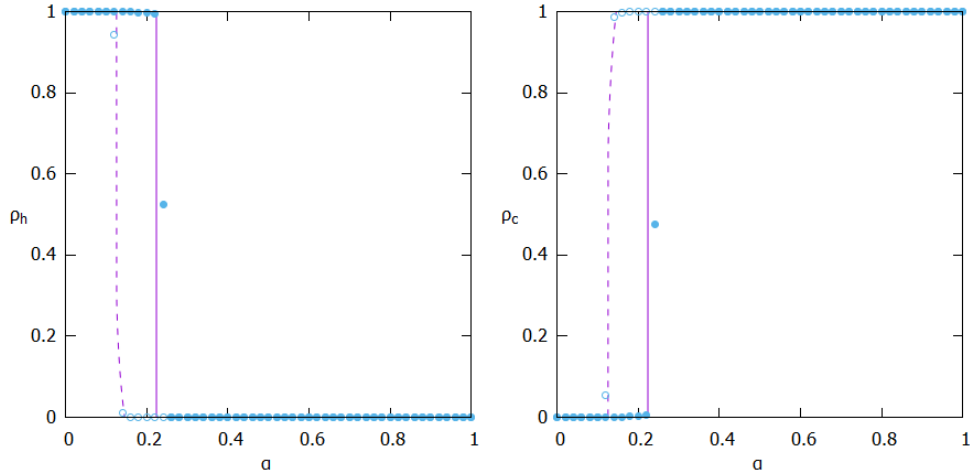


Figura 8: Mean Field (línea morada) versus Monte Carlo (puntos azules). Poblaciones honesta y corrupta frente a α para $(\beta, \delta, r, k) = (0.05, 0.8, 0.75, 4)$, siendo los puntos huecos y la línea discontinua el sentido inverso de la variación del parámetro α .

Como la comparación entre las aproximaciones de *Markov* y *Mean Field* (MF) ya mostraba la coincidencia entre ambas, las simulaciones de Monte Carlo (MC) se han superpuesto a las curvas obtenidas con MF. En la figura 8 se pueden ver los datos obtenidos en una simulación para las poblaciones honesta y corrupta, con los valores de los parámetros $(\beta, \delta, r, k) = (0.05, 0.8, 0.75, 4)$. En la simulación, para valores ascendentes de α , el punto fijo de honestidad total se desestabiliza en torno a $\alpha \sim 0.22$, mientras que en sentido descendente, el punto fijo de corrupción total se desestabiliza para $\alpha \sim 0.12$. En este rango de valores de los parámetros se delimita la región de biestabilidad.

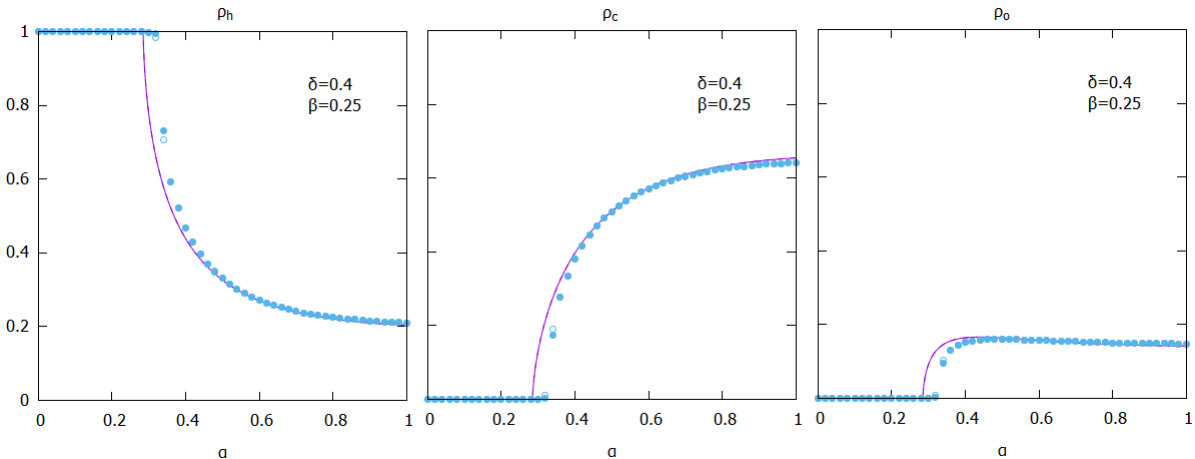


Figura 9: Poblaciones honesta, corrupta y en el ostracismo frente al parámetro α para $(\beta, \delta, r, k) = (0.25, 0.4, 0.75, 4)$.

En la figura 9 se muestra la evolución de los tres tipos de poblaciones variando el valor del parámetro α . En la simulación del programa de agentes, la desestabilización del punto fijo de honestidad total se retrasa respecto a Mean Field. Según el artículo *Norm violation versus punishment risk in a social model of corruption*, Dan Lu et al. (2020) [1]: “Estas discrepancias están principalmente basadas en dos hechos: el llamado efecto de cámara de eco y la influencia de correlaciones estructurales”. El primero se refiere al hecho de que los agentes corruptos que cambian de estado pueden volver a ser corruptos debido a los vecinos que ellos mismos corrompieron. El segundo tiene que ver con las posibles correlaciones que surgen naturalmente en una red de contactos y que en el formalismo aquí desarrollado se han despreciado. Sin embargo, se puede concluir que la aproximación de campo medio y, por ende, la de cadenas de Markov reflejan acertadamente el comportamiento del sistema.

7. Modelo con parámetros de presión social e intimidación

Como ya se ha comentado en la introducción, en el artículo *Fear induced explosive transitions in the dynamics of corruption*, F. Bauzá et al. (2020) [4] se introdujo en el modelo HCO original un parámetro γ que reflejaba la intimidación que pueden ejercer los agentes corruptos sobre los honestos para evitar ser denunciados. Al igual que el parámetro δ de presión social tratado en este trabajo lo hacía con f_α^{HC} , éste es un parámetro que modula la probabilidad de ser denunciado f_β^{CO} reduciendo la influencia del parámetro β en dicha expresión. Si tenemos en cuenta ambos efectos sobre el modelo HCO, las ecuaciones (1) y (2) se transforman en

$$f_\alpha^{HC}(i, \{\sigma_j\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta\langle H \rangle) A_{ij} \delta_{\sigma_j, C}] \quad (48)$$

$$f_\beta^{CO}(i, \{\sigma_j\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta(1 - \gamma\langle C \rangle) A_{ij} \delta_{\sigma_j, H}] \quad (49)$$

El desarrollo de las aproximaciones de cadenas de Markov y campo medio es similar al realizado en los apartados anteriores donde el único cambio destacable es la modificación de las ecuaciones (48) y (49), que para MMCA quedan como

$$f_\alpha(i, \{\vec{\rho}(j; t)\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta\langle \rho_h \rangle) A_{ij} \rho_c(j; t)] \quad (50)$$

$$f_\beta(i, \{\vec{\rho}(j; t)\}) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta(1 - \gamma\langle \rho_c \rangle) A_{ij} \rho_h(j; t)] \quad (51)$$

Mientras que para Mean Field son

$$f_\alpha(\rho_h, \rho_c) = 1 - [1 - \alpha(1 - \delta\rho_h)\rho_c]^k \quad (52)$$

$$f_\beta(\rho_h, \rho_c) = 1 - [1 - \beta(1 - \gamma\rho_c)\rho_h]^k \quad (53)$$

7.1. Umbral de presión social

Cerca del estado de honestidad total, tomando como variables independientes las fracciones de población corrupta y población en el ostracismo en MMCA, $\rho_c^* = \varepsilon_c^i \ll 1$ y $\rho_o^* = \varepsilon_o^i \ll 1$, se llega a las mismas expresiones que en el modelo anterior, (16) y (17),

$$\varepsilon_c^i = \alpha(1 - \delta) \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{A_{ij}}{1 - (1 - \beta)^{k_i}}}_{M_{ij}} \varepsilon_c^j \quad \Rightarrow \quad \delta_c = 1 - \frac{1}{\alpha \Lambda_{max}(\mathbf{M})}$$

Y del mismo modo, con Mean Field se llega a las expresiones (41) y (42),

$$\alpha \leq \alpha_c(\beta, \delta, r) = \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k(1 - \delta)}$$

$$\delta \geq \delta_c(\alpha, \beta, r) = 1 - \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k\alpha}$$

Es decir, el parámetro γ no afecta a la desestabilización del macroestado de honestidad total porque en esta situación la intimidación es un efecto de segundo orden.

7.2. Umbral de intimidación

El efecto de la intimidación sobre los agentes honestos se va a hacer notar para el estado de corrupción total. Tomando como variables independientes en MMCA las poblaciones honesta y en el ostracismo, $\rho_h^* = \varepsilon_h^i \ll 1$ y $\rho_o^* = \varepsilon_o^i \ll 1$, se llega a las ecuaciones (20) y (21), pero esta vez las expresiones para las probabilidades de corrupción y denuncia son

$$f_\alpha(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \alpha(1 - \delta \langle \varepsilon_h \rangle) A_{ij} \rho_c^j] \simeq 1 - (1 - \alpha)^{k_i} \quad (54)$$

$$f_\beta(i) = 1 - \prod_{j=1}^N [1 - \beta(1 - \gamma \langle \rho_c \rangle) A_{ij} \varepsilon_h^j] \simeq \beta(1 - \gamma) \sum_{j=1}^N A_{ij} \varepsilon_h^j \quad (55)$$

Lo que supone que la ecuación (26) se transforme en

$$\varepsilon_h^i = \beta(1 - \gamma) \sum_{j=1}^N \underbrace{\frac{\frac{k_j}{Nr} + A_{ij}}{1 - (1 - \alpha)^{k_i}}}_{\tilde{M}_{ij}} \varepsilon_h^j \quad (56)$$

Luego estas expresiones solo difieren en el factor $(1 - \gamma)$ que modula el parámetro β de denuncia. Si realizamos el análisis de estabilidad de este punto fijo con Mean Field, con $(\rho_h, \rho_c) = (0, 1)$, la matriz Jacobiana es la misma que la obtenida en el apartado 5.2,

$$\mathbf{J}|_{(0,1)} = \begin{pmatrix} -f_\alpha(0, 1) - r - 1 & -r - 1 \\ 1 + f_\alpha(0, 1) - \left. \frac{\partial f_\beta}{\partial \rho_h} \right|_{(0,1)} & 1 \end{pmatrix}$$

Salvo que en esta ocasión, con la probabilidad de ser denunciado, $f_\beta(\rho_h, \rho_c)$, dada por la ecuación (53), se llega a los valores críticos

$$\beta \leq \beta_c(\alpha, \gamma, r) = \frac{r}{r+1} \frac{1 - (1-\alpha)^k}{k(1-\gamma)} \quad (57)$$

$$\gamma \geq \gamma_c(\alpha, \beta, r) = 1 - \frac{r}{r+1} \frac{1 - (1-\alpha)^k}{k\beta} \quad (58)$$

De la misma forma que γ no influye en la desestabilización del punto fijo de honestidad total, el parámetro δ de presión social no desestabiliza una población completamente corrupta.

7.3. Dinámica Mean Field

Las simulaciones realizadas con el programa de agentes de Monte Carlo y con el programa de Markov, dotando de estructura a la red, vuelven a ajustarse bastante bien a las representaciones obtenidas mediante la aproximación de campo medio. Esto puede comprobarse en la figura 10, donde se muestran ambas comparaciones para la evolución de la población corrupta cuando α varía en sentidos ascendente y descendente, y con el resto de parámetros fijos en los valores $(\beta, \delta, \gamma, r, k) = (0.2, 0.2, 0.8, 0.75, 4)$. Dicha coincidencia permite obtener resultados con la iteración de Mean Field más ágilmente y evaluar por tanto un rango más amplio de valores para los distintos parámetros.

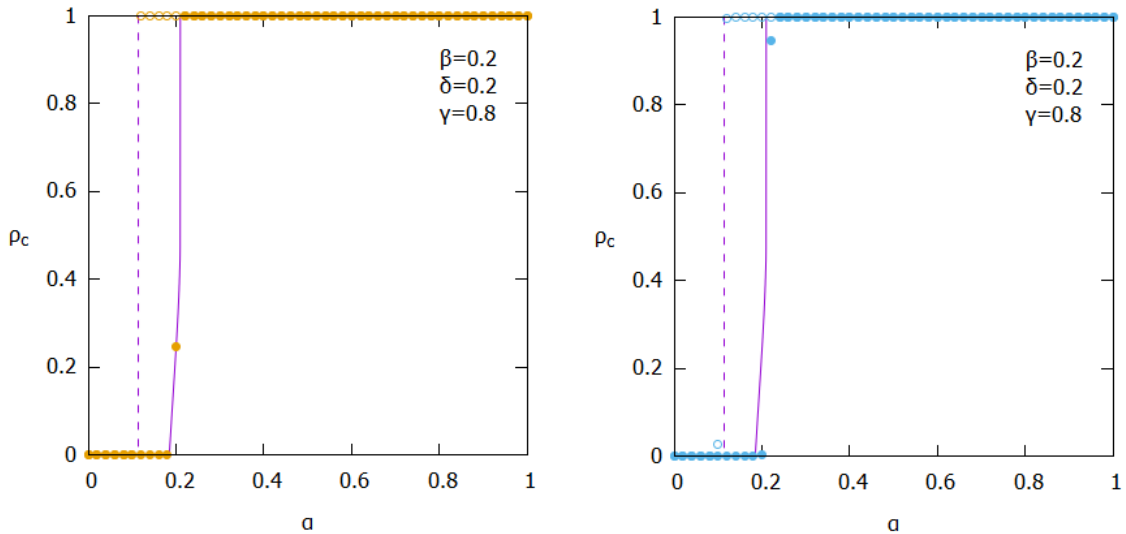


Figura 10: Población corrupta frente a α con $(\beta, \delta, \gamma, r, k) = (0.2, 0.2, 0.8, 0.75, 4)$. Las líneas moradas corresponden a la simulación de Mean Field mientras que los puntos naranjas y azules se han obtenido con Markov y Monte Carlo, respectivamente. Las líneas discontinuas y los puntos huecos indican el sentido descendente de α .

El sistema se comporta de manera similar a los modelos ya estudiados con los parámetros de presión social y de intimidación por separado, incluyendo regiones de biestabilidad entre puntos fijos, ya sean para poblaciones completamente honestas, completamente corruptas o mixtas. Sin embargo, existe un rango de parámetros en el que el sistema muestra triestabilidad. En concreto, para diferentes combinaciones de valores de los parámetros se obtiene la figura 11, donde la combinación $(\alpha, \delta, \gamma, r, k) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.75, 4)$ da lugar a una región triestable.

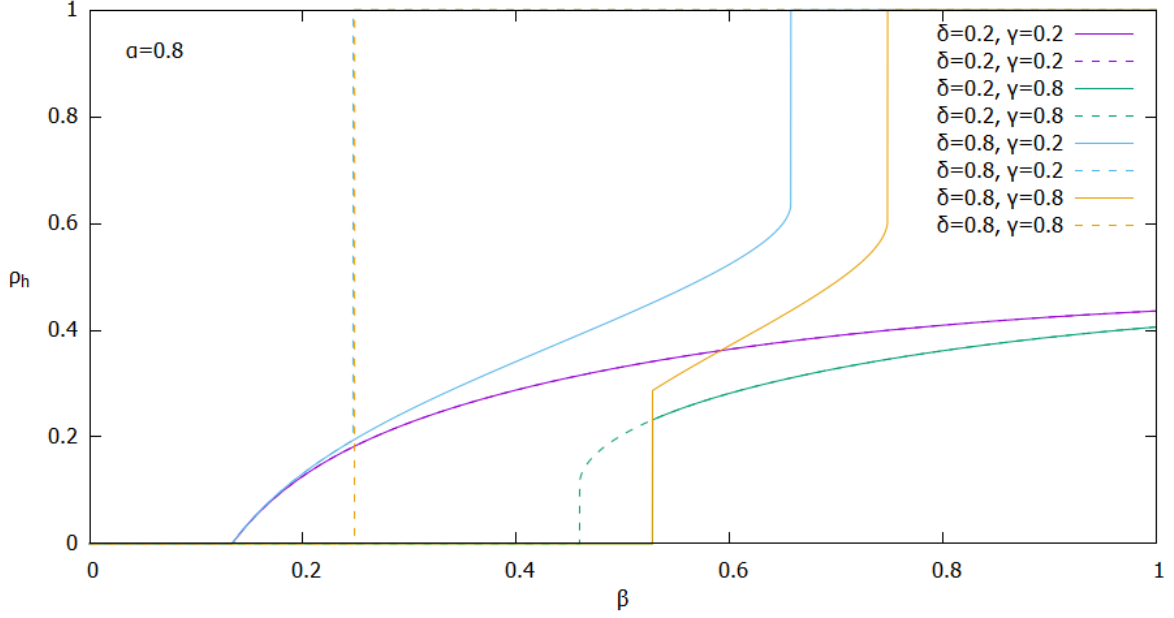


Figura 11: Mean Field: Representación de la fracción de población honesta frente a la variación de β para distintos valores del resto de parámetros. El parámetro de reinserción se ha fijado a $r = 0.75$ y el grado de los agentes a $k = 4$.

Estudiando en detalle esta región mediante la figura 12, se puede identificar claramente el rango de valores de β para los que existe triestabilidad (zona sombreada en azul). De hecho, en la figura 11 no se puede apreciar adecuadamente porque la desestabilización del punto fijo de corrupción total en el sentido ascendente de β se da precisamente al final de la región triestable (línea amarilla continua). Además, en sentido descendente, la población permanece completamente honesta hasta un valor $\beta = 0.248$ donde realiza un salto abrupto hacia el punto fijo de corrupción total (línea amarilla discontinua). Es necesario entonces realizar una simulación que se detenga en la segunda región de biestabilidad en el sentido ascendente de β y realice la trayectoria descendente desde ese punto (línea verde discontinua en la figura 12). Con los archivos de datos obtenidos se determinan los intervalos de las regiones biestables (zonas sombreadas en rosa), $\beta \in [0.248, 0.454]$ en la primera (1) y $\beta \in [0.528, 0.748]$ en la segunda (3), y de la región triestable (2), $\beta \in [0.454, 0.528]$. En esta última, dependiendo de la configuración inicial en la que se encuentre el sistema, éste evolucionará hasta alcanzar el equilibrio en una de las tres cuencas atractoras: puntos fijos estables de honestidad total, corrupción total y población mixta.

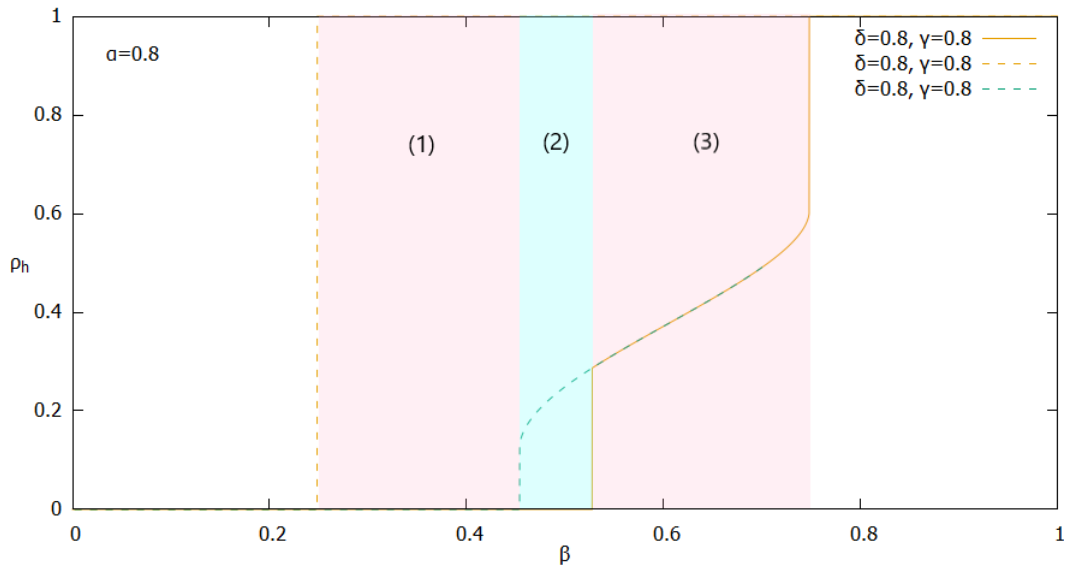


Figura 12: Región de triestabilidad para $(\alpha, \delta, \gamma, r, k) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.75, 4)$ en el intervalo $\beta \in [0.454, 0.528]$.

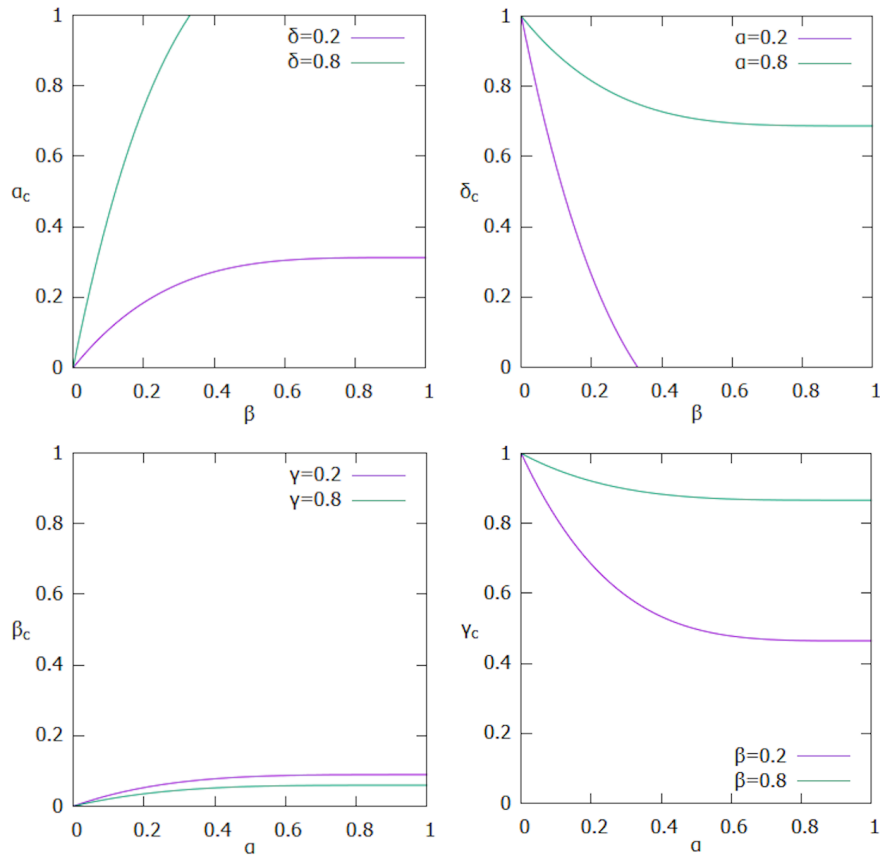


Figura 13: Parámetros críticos para los umbrales de corrupción (panel superior izquierdo), presión social (panel superior derecho), denuncia (panel inferior izquierdo) e intimidación (panel inferior derecho), con $(r, k) = (0.75, 4)$.

7.4. Diagramas y retratos de fase

Con los valores críticos obtenidos en las expresiones (41), (42), (57) y (58) para los umbrales de corrupción, presión social, denuncia e intimidación, respectivamente, se pueden representar los diagramas de fase de los diversos parámetros, como se muestra en la figura 13. Se ha fijado el parámetro de reinsertión a $r = 0.75$ y el grado de los agentes a $k = 4$, y en cada uno de ellos se han tomado dos valores del segundo parámetro del que dependen.

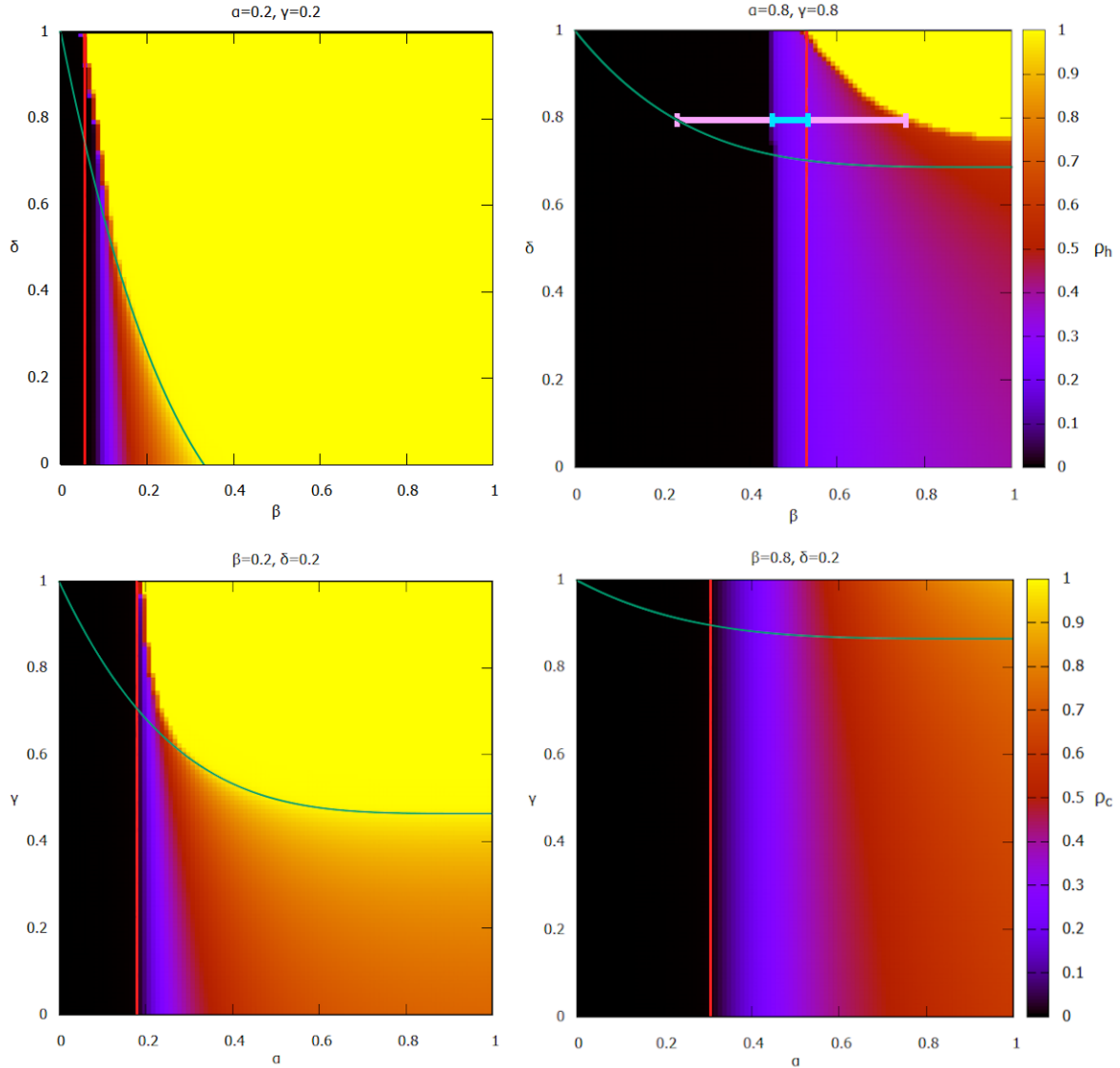


Figura 14: Fracción de población honesta sobre el diagrama de fases $\beta - \delta$ para distintos valores de α y γ , donde la línea verde representa el valor δ_c y la línea roja vertical el valor β_c (paneles superiores), y fracción de población corrupta sobre el diagrama de fases $\alpha - \gamma$ para distintos valores de β y δ , donde la línea verde representa el valor γ_c y la línea roja vertical el valor α_c (paneles inferiores).

Sobre el diagrama $\beta - \delta$ se puede incluir un mapa de color que indique el nivel de población honesta del sistema en cada punto, al igual que en el diagrama $\alpha - \gamma$ se puede incluir el de población corrupta (figura 14). Se ha pintado un segmento de color azul en el panel superior

derecho que indica el rango de valores de β de la región de triestabilidad y dos segmentos rosas para los de las regiones biestables contiguas, mostrando la coincidencia con los intervalos reflejados en la figura 12. La región triestable está delimitada por la transición abrupta desde la población completamente corrupta a la población mixta y por el valor de β_c que desestabiliza el punto fijo de corrupción total (recta vertical roja). En los paneles superiores, las zonas donde la población no es completamente honesta (colores diferentes al amarillo) por encima de la curva verde que marca el valor δ_c , son regiones de biestabilidad. En los paneles inferiores ocurre lo mismo por encima del valor γ_c para las poblaciones que no son completamente corruptas. Este comportamiento es igual que el observado anteriormente en el modelo con el parámetro de presión social únicamente (figura 6).

En la figura 15 se presentan los retratos de fase para las nulclinas F_h y F_c de este modelo junto al campo vectorial que representa el flujo del sistema en cada punto, donde el mapa de color indica su módulo. La secuencia muestra las tres ramas de la nulclina F_c en amarillo y cómo, para valores ascendentes de β , las dos curvas izquierda y derecha se van acercando hasta que colapsan y se convierten en dos curvas superior e inferior. Se han elegido los valores $(\alpha, \delta, \gamma, r, k) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.75, 4)$ que engloban la región de triestabilidad para el intervalo $\beta \in [0.454, 0.528]$ de la figura 12. El panel izquierdo representa la primera región biestable del sistema con tres puntos fijos, de los cuales son estables los de honestidad total y corrupción total. El panel central muestra la región triestable con cinco puntos fijos, tres de ellos estables. Aunque no se distinguen todos, del archivo de datos utilizado para realizar la gráfica de la figura 12 se puede extraer que las fracciones de población para el valor $\beta = 0.5$ son $(\rho_h, \rho_c, \rho_o) = (0.25, 0.59, 0.16)$. Los valores de población corrupta y población honesta de este punto coinciden con el corte (punto naranja en la gráfica) de la nulclina F_h (verde) con la rama izquierda de la nulclina F_c (amarilla), indicando que es un punto fijo estable. Los otros dos puntos fijos ya sabemos que son el de honestidad total y el de corrupción total, e intercalados a estos tres hay dos puntos fijos inestables que corresponden al corte de la rama derecha de F_c con la nulclina F_h y al corte de la rama izquierda con F_h (punto morado). Por último, en el panel derecho, una vez sobrepasada la segunda región de biestabilidad para $\beta = 0.8$, se tienen los dos puntos fijos constantes, de los cuales es estable el de honestidad total.

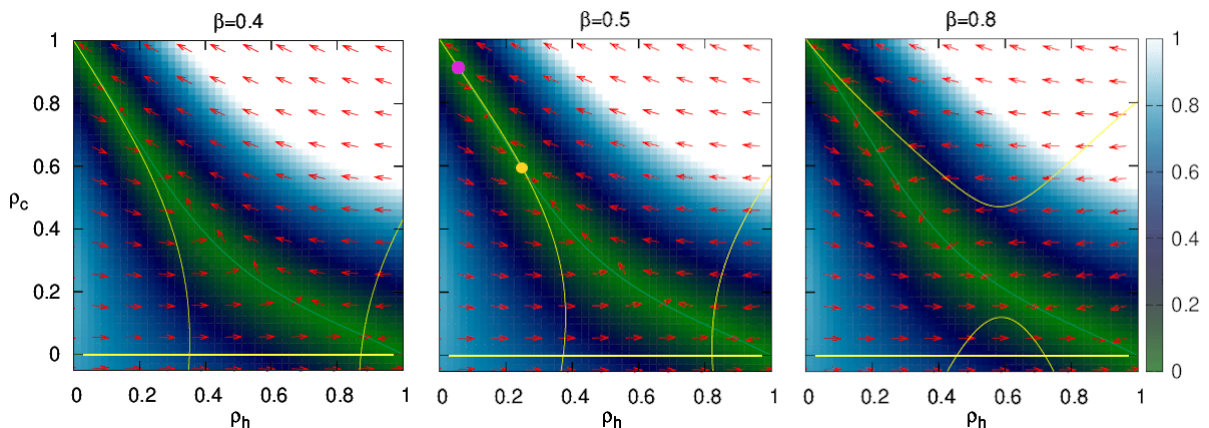


Figura 15: Secuencia de nulclinas F_h (verde) y F_c (amarillo) para el conjunto de valores de parámetros $(\alpha, \delta, \gamma, r, k) = (0.8, 0.8, 0.8, 0.75, 4)$ donde se genera triestabilidad.

8. Conclusiones

En este trabajo se ha expuesto un modelo teórico compartimental que predice la propagación de la corrupción dentro de una sociedad u organización. Se han recreado los efectos globales de presión social, intimidación [4] y conversión (*warning-to-wrongdoers* [1]) que afectan a la dinámica del sistema. Se han desarrollado las aproximaciones pertinentes para simplificar el análisis de la misma, justificando convenientemente su aplicación con el ajuste de su comportamiento a las simulaciones de Monte Carlo que emulan la dinámica real de la red. Y por último, se ha realizado un análisis exhaustivo de la evolución del sistema para los conjuntos de valores de parámetros que resultan de interés.

En el primer modelo presentado, donde se ha introducido el parámetro de presión social δ , se ha observado la desestabilización de puntos fijos por la variación de determinados parámetros, así como regiones de biestabilidad en las que se dan transiciones abruptas entre ambos estados estables. En el segundo, recreando la dinámica de la red con los efectos de presión social e intimidación, aparte de los comportamientos predichos con el modelo anterior, se ha obtenido una región de triestabilidad que permite al sistema caer en tres posibles estados cuando alcanza el equilibrio dependiendo de las condiciones iniciales.

Esto último es novedoso en este tipo de modelos y podría tener su utilidad extrapolando la caracterización que aquí se ha hecho a otros ámbitos. Por ejemplo, volviendo a los modelos epidemiológicos, se podría establecer una equivalencia de los parámetros de presión social e intimidación con los efectos de una vacuna, que regularía la tasa de infección (\equiv corrupción), y de la mutabilidad de un virus, que regularía la tasa de recuperación (\equiv denuncia), respectivamente. Del mismo modo, se podrían plantear otros escenarios de comportamiento antropológico como la propagación de rumores, el condicionamiento conductual o las tendencias en determinados aspectos sociales.

Es importante comentar lo difícil que resulta modelizar aspectos del comportamiento humano a escalas de organizaciones o sociedades desestimando la multitud de variables que intervinen a nivel individual. La solución aquí planteada es la del uso de parámetros que engloben características comunes a todos los individuos o al menos mayoritarias. Pero si se quisieran emular comportamientos personales, se podrían utilizar redes pesadas o añadir nuevos parámetros que le dieran cierto peso a los aquí planteados sobre cada uno de los agentes. No obstante, cada nivel de complejidad añadido aumenta considerablemente los requerimientos computacionales necesarios a la hora de realizar las simulaciones.

Por último, todos los resultados expuestos en esta memoria se han obtenido a partir de una red tipo Random Regular Network, la cual es una aproximación muy simple de la estructura de interacción social de una sociedad u organización. Es por eso que resultaría interesante repetir este mismo estudio sobre redes heterogéneas, tipo Erdős-Rényi o Scale Free, que lo doten de un mayor grado de realismo.

Bibliografía

- [1] D. Lu, F. Bauzá, D. Soriano-Paños, J. Gómex-Gardeñes, and L. M. Floría. *Norm violation versus punishment risk in a social model of corruption*. Phys. Rev. E **101**, 022306, (2020).
- [2] W. O. Kermack and A. G. McKendrick. *A contribution to the mathematical theory of epidemics*. Proc. Roy. Soc. Lond. Mat. A **115**, 700–721, (1927).
- [3] R. M. Anderson, R. M. May, and B. Anderson. *Infectious Diseases of Humans: Dynamics and Control*. (Oxford University Press, Oxford, 1992).
- [4] F. Bauzá, D. Soriano-Paños, J. Gómex-Gardeñes, and L. M. Floría. *Fear induced explosive transitions in the dynamics of corruption*. Chaos **30**, 063107, (2020).
- [5] M. E. J. Newman. *Networks: An Introduction*. (Oxford University Press, 2010).
- [6] V. Latora, V. Nicosia, and G. Russo. *Complex Networks: Principles, Methods and Applications*. (Cambridge University Press, 2017).
- [7] E. Estrada. *The Structure of Complex Networks: Theory and Applications*. (Oxford University Press, 2016).
- [8] S. Gómez, A. Arenas, J. Borge-Holthoefer, S. Meloni, and Y. Moreno. *Discrete-time Markov chain approach to contact-based disease spreading in complex networks*. Europhys. Lett. **89**, 38009, (2010).
- [9] B. Guerra and J. Gómez-Gardeñes. *Annealed and mean-field formulations of disease dynamics on static and adaptive networks*. Phys. Rev. E **82**, 035101, (2010).
- [10] S. Gómez, J. Gómez-Gardeñes, Y. Moreno, and A. Arenas. *Nonperturbative heterogeneous mean-field approach to epidemic spreading in complex networks*. Phys. Rev. E **84**, 036105, (2011).
- [11] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering*. (Perseus Books Publishing, L.L.C., 1994).