La desigualdad de Brascamp-Lieb en geometría convexa

Javier Vicente Sabroso

Trabajo de fin de grado en Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez

20 de junio de 2021

Prólogo

La convexidad es una noción básica en geometría que aparece en más ramas de las matemáticas. Una de la ramas en las que aparece es en el análisis funcional. Esta relación se debe a que la bola unidad cerrada de cualquier norma en $\mathbb{R}^n$ define un cuerpo convexo simétrico, es decir, un conjunto convexo simétrico de interior no vacío y, recíprocamente, todo cuerpo convexo simétrico es la bola unidad cerrada de una norma en $\mathbb{R}^n$.

Además, un cuerpo convexo simétrico K puede ser incluido dentro de algunas clases de funciones integrables vía su función característica χ_K o vía la función $e^{-\|\cdot\|_K}$, donde $\|\cdot\|_K$ denota la norma cuya bola unidad es K. De esta manera el volumen n-dimensional de K está determinado por la integral de estas funciones, hecho que provoca que ciertas desigualdades funcionales proporcionen desigualdades geométricas y, recíprocamente, algunas desigualdades geométricas tengan una versión funcional.

En el año 1976, Brascamp y Lieb demostraron una desigualdad funcional que afirma que, para unos vectores $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ y unos escalares $(p_j)_{j=1}^m \subseteq [1,\infty)$ que cumplen ciertas condiciones, se puede encontrar una constante D, que depende únicamente de los vectores y de los escalares, tal que la integral de $\mathbb{R}^n$ del producto de funciones $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$, evaluadas en los productos escalares de la variable contra los vectores está acotada por D veces el producto de las normas $\|f_j\|_{p_j}$. Esta desigualdad extiende, en cierto sentido, el teorema de Fubini, que nos proporciona el valor de dicha integral cuando los vectores forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y los escalares son 1.

La finalidad de este trabajo es demostrar la desigualdad de Brascamp-Lieb y estudiar alguna de sus aplicaciones para las estimaciones de volúmenes de cuerpos convexos en una posición particular, que es la posición de John.

El teorema de John afirma, para cualquier cuerpo convexo, la existencia de un único elipsoide de máximo volumen contenido en él. En caso de que dicho elipsoide sea la bola Eculídea se dice que dicho cuerpo convexo está en posición de John. Esta posición viene caracterizada por la existencia de unos vectores y unos escalares que proporcionan una descomposición de la identidad. La desigualdad de Brascamp-Lieb resulta especialmente conveniente en esta situación ya que para unos vectores y unos escalares que proporcionan una descomposición de la identidad es posible calcular el valor de la constante en la desigualdad de Brascamp-Lieb.

Como principal aplicación de la desigualdad de Brascamp-Lieb para el estudio de volúmenes de cuerpos en posición de John, en este trabajo demostraremos que, entre todos los cuerpos convexos simétricos en posición de John, el cubo n-dimensional es el de mayor volumen y, entre todos los cuerpos convexos no necesariamente simétricos en posición de John, el símplex regular n-dimensional (convenientemente reescalado) es el de mayor volumen.

Abstract

The aim of this work is the study of Brascamp-Lieb inequality and its applications in convex geometry. We will focus on its aplications related to the obtention of volume inequalities for convex bodies in the so-called John's position.

In the first chapter we are going to introduce some basic general concepts in convex geometry, which will be needed in the rest of the work. A special role will be played by two particular convex bodies, which will be the n-dimensional cube, B_∞^n, and the regular simplex Δ^n, which will be introduced in this chapter and whose volume will be computed.

In the second chapter we will prove Brascamp-Lieb inequality, which can be expressed in the following way: Given $(u_j)_{j=1}^m \subset \mathbb{R}^n$ a generating system and $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,1]$ such that $c_1 + \cdots + c_m = n$, let

$$F = \text{ínf}\left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j u_j^t)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \lambda_j > 0 \right\}.$$

Then, for every integrable functions $(f_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \frac{1}{\sqrt{F}} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(x) dx \right)^{c_j}.$$

A reverse version of this inequality will also be proved, showing that the constant that appears in both Brascamp-Lieb inequality and its reverse version is the constant that appears when only Gaussian functions are considered.

In the third chapter, we will focus on the study of convex bodies in John's position, which are those whose maximum volume ellipsoid contained in them is the Euclidean ball. Such convex bodies have some vectors and some scalars associated to them, for which we will prove that the constant F that appears in Brascamp-Lieb inequality is $F = 1$. We will also show in this chapter that the n-dimensional cube and the (appropriately rescalated) regular simplex are in John's position.

Finally, in the last chapter, we will make use of Brascamp-Lieb inequality to show that among all convex bodies in John's position, the (appropriately rescalated) regular simplex is the one with maximum volume and, among all symmetric convex bodies, the n-dimensional cube is the one with maximum volume.

Índice general

Capítulo 1

Cuerpos convexos. Generalidades.

Un cuerpo convexo es un conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que es convexo, compacto y tiene interior no vacío. Decimos que un cuerpo convexo es simétrico si para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $x \in K$ si y solo si $-x \in K$. Por ejemplo, dada una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$, su bola unidad cerrada $K = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\| \leq 1\}$ es un cuerpo convexo simétrico.
Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a 0 en su interior, se define el funcional de Minkowski asociado a K como

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda K\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Si K es un cuerpo convexo simétrico este funcional de Minkowski define una norma en $\mathbb{R}^n$ tal que su bola unidad cerrada es K. Observamos que para cualquier transformación lineal de determinante no nulo $T \in GL(n)$ se tiene que si K contiene a 0 en su interior entonces TK contiene a 0 en su interior y para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_{TK} &= \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda TK\} = \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in T(\lambda K)\} \\ &= \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ TT^{-1}x \in T(\lambda K)\right\} = \inf\left\{\lambda > 0 \ : \ T^{-1}x \in \lambda K\right\} \\ &= \|T^{-1}x\|_K. \end{aligned}$$

Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ que contiene a 0 en su interior, se define su cuerpo polar como

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, y\rangle \leq 1, \ \forall y \in K\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$. K° es un cuerpo convexo que contiene a 0 en su interior tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \|x\|_{K^\circ} &= \inf\{\lambda > 0 \ : \ x \in \lambda K^\circ\} = \inf\{\lambda > 0 \ : \ \frac{x}{\lambda} \in K^\circ\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 \ : \ \max_{y \in K} \left\langle \frac{x}{\lambda}, y \right\rangle \leq 1\} = \inf\{\lambda > 0 \ : \ \max_{y \in K} \langle x, y\rangle \leq \lambda\} \\ &= \max_{y \in K} \langle x, y \rangle. \end{aligned}$$

Además, si K es un cuerpo convexo simétrico se tiene que K° es un cuerpo convexo simétrico. Observamos que para cualquier transformación lineal $T \in GL(n)$, denotando T^t su matriz traspuesta y por T^{-t} la matriz traspuesta de su inversa,

$$\begin{aligned} (TK)^\circ &= \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, y\rangle \leq 1, \ \forall y \in TK\} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, Ty\rangle \leq 1, \ \forall y \in K\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle T^t x, y\rangle \leq 1, \ \forall y \in K\right\} = \left\{T^{-t}x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, y\rangle \leq 1, \ \forall y \in K\right\} \\ &= T^{-t}K^\circ. \end{aligned}$$

Además, si B_2^n denota la bola Euclídea $B_2^n = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2 \leq 1\}$, se tiene que $(B_2^n)^\circ = B_2^n$.
Dado un cuerpo convexo $K \subseteq \mathbb{R}^n$, su volumen, o medida de Lebesgue, se denotará por $|K|$. La frontera de

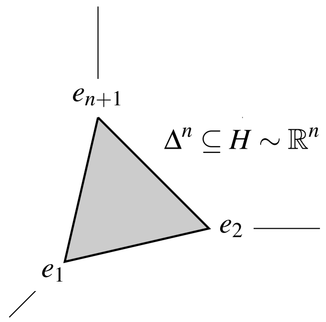
K la denotaremos por ∂K. La frontera de la bola Euclídea B_2^n se denotará por $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_2 = 1\}$. Denotaremos al cubo n-dimensional $B_\infty^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$, que es un cuerpo convexo simétrico y cuyo volumen es $|B_\infty^n| = 2^n$.
Se define el símplex regular n-dimensional como

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1, \ x_i \geq 0 \ \forall i = 1, \dots, n+1 \right\}.$$

Según esta definición Δ^n está contenido en el hiperplano afín $H \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \langle x, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\},$$

donde $v = (\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \in S^n$. Identificando H con $\mathbb{R}^n$ y $c = (\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1})$ con $0 \in \mathbb{R}^n$ consideramos Δ^n como un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$.



A continuación, calcularemos el volumen del símplex regular n-dimensional, $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$.

Teorema 1.1. *Sea $\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$ el símplex regular n-dimensional. Entonces,*

$$|\Delta^n| = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

Demostración. Para calcular el volumen de Δ^n, calcularemos la siguiente integral en $(\mathbb{R}^{n+1})^+ = [0, \infty)^{n+1}$:

$$\int_{(\mathbb{R}^{n+1})^+} e^{-\langle x, v \rangle} dx,$$

donde $v = (\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \in S^n$. Por un lado, aplicando el teorema de Fubini, tenemos,

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^+} e^{-\langle x, v \rangle} dx &= \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^+} \prod_{i=1}^{n+1} e^{\frac{-x_i}{\sqrt{n+1}}} dx = \left(\int_0^\infty e^{\frac{-t}{\sqrt{n+1}}} dt \right)^{n+1} \\ &= \left(\sqrt{n+1} \int_0^\infty e^{-s} ds \right)^{n+1} = (\sqrt{n+1})^{n+1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, observando que para cada $t > 0$ se tiene que

$$\left\{ x \in (\mathbb{R}^{n+1})^+ \ : \ \langle x, v \rangle = t \right\} = t\sqrt{n+1}\Delta^n \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \langle x, v \rangle = t \right\},$$

donde en la última ecuación hemos considerado $\Delta^n \subseteq H$ en vez de su identificación con un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se tiene por el teorema de Fubini que

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}^{n+1})^+} e^{-\langle x, v \rangle} dx &= \int_0^\infty e^{-t} \int_{t\sqrt{n+1}\Delta^n} dx dt = \int_0^\infty t^n (\sqrt{n+1})^n |\Delta^n| e^{-t} dt \\ &= (\sqrt{n+1})^n |\Delta^n| \Gamma(n+1). \end{aligned}$$

Luego, igualando las dos integrales calculadas, obtenemos que

$$(\sqrt{n+1})^{n+1} = (\sqrt{n+1})^n |\Delta^n| \Gamma(n+1) \Leftrightarrow |\Delta^n| = \frac{\sqrt{n+1}}{n!}.$$

□

Capítulo 2

La desigualdad de Brascamp-Lieb.

2.1. Introducción

Como consecuencia del teorema de Fubini, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se cumple que dadas n funciones $(f_i)_{i=1}^n : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables en $\mathbb{R}$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_1(x_1)f_2(x_2)\dots f_n(x_n)dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_i(x_i)dx_i.$$

Equivalentemente, si denotamos por $(e_i)_{i=1}^n$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{n} f_i(\langle x, e_i\rangle)dx = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} f_i(x)dx.$$

Cuando el vector x se enfrenta a un sistema generador de vectores $(u_j)_{j=1}^m$, que no es base ortonormal, no siempre se da esta igualdad.
En este contexto más general se plantea la siguiente cuestión:
Dado $m \geq n$, $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(p_j)_{j=1}^m$ con $p_j \geq 1$ para todo $1 \leq j \leq m$ y $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = n$, ¿Cuál es la mejor constante D, dependiente únicamente de los vectores $(u_j)_{j=1}^m$ y de los números $(p_j)_{j=1}^m$ tal que para cualesquiera $(f_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ con $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle x, u_j\rangle)dx \leq D \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j^{p_j}(x)dx \right)^{\frac{1}{p_j}}?$$

Equivalentemente, llamando $c_j = \frac{1}{p_j}$ y considerando que para $1 \leq j \leq m$ se tiene que $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$ si y solo si $f_j^{p_j} = f_j^{\frac{1}{c_j}}$ es integrable en $\mathbb{R}$, la cuestión es equivalente a la siguiente:
Dado $m \geq n$, $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0 \leq c_j \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq m$ y $c_1 + \dots + c_m = n$, ¿Cuál es la mejor constante D, dependiente únicamente de los vectores $(u_j)_{j=1}^m$ y de los números $(c_j)_{j=1}^m$ tal que para cualesquiera $(f_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(\langle x, u_j\rangle)dx \leq D \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx \right)^{c_j}?$$

Brascamp y Lieb demostraron en [5] que $D = \frac{1}{\sqrt{F}}$, siendo

$$F = \text{ínf} \left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j u_j^T)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \lambda_j > 0 \right\}, \tag{2.1}$$

era la mejor constante y dicha constante aparece como la mejor constante que se puede poner cuando se consideran únicamente funciones Gaussianas.

Además, Barthe planteó en [4] la siguiente desigualdad inversa:
Dado $m \geq n$, $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0 \leq c_j \leq 1$ y $c_1 + \cdots + c_m = n$, ¿Cuál es la mejor constante $\tilde{D}$, dependiente únicamente de los vectores $(u_j)_{j=1}^m$ y de los números $(c_j)_{j=1}^m$ tal que para cualesquiera $(h_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables y $h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ integrable tales que

$$h(x) \geq \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) \quad \text{si} \quad x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j$$

se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \tilde{D} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} h_j(x)dx \right)^{c_j} ?$$

Barthe demostró que $\tilde{D} = \sqrt{F}$, siendo la constante F definida en (2.1).
Estos dos resultados, de Brascamp-Lieb y de Barthe quedan recogidos en el siguiente teorema, que demostraremos en este capítulo:

Teorema 2.1 (Desigualdad de Brascamp-Lieb y Desigualdad de Brascamp-Lieb inversa)**.** *Sean $1 \leq n \leq m$. Dados $(u_j)_{j=1}^m$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0 \leq c_j \leq 1$ y $c_1 + \cdots + c_m = n$ definimos*

$$F = \text{ínf} \left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j u_j^t)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \lambda_j > 0 \right\}.$$

Entonces

1. *Para cualesquiera $(f_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables se cumple que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle)dx \leq \frac{1}{\sqrt{F}} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(x)dx \right)^{c_j}.$$

2. *Para cualesquiera $(h_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables y $h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ integrable tales que*

$$h(x) \geq \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) \quad si \quad x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j$$

   se cumple que

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geq \sqrt{F} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} h_j(x)dx \right)^{c_j}.$$

2.2. La desigualdad de Brascamp-Lieb

En esta sección vamos a demostrar el Teorema 2.1. Primero fijaremos alguna notación que iremos utilizando durante esta sección. Sean $(f_j)_{j=1}^m$, $(h_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ integrables definimos:

- $I(f_1, \ldots, f_m) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle)dx,$

- $K(h_1, \ldots, h_m) = \text{ínf} \left\{ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx : h(x) \geq \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\theta_j) \; si \; x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \;, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}.$

Además, observamos que

- $\sup \left\{ \dfrac{I(f_1, \ldots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_1^{c_j}}, \; f_j \in L^1(\mathbb{R}) \right\} = \sup \left\{ I(f_1, \ldots, f_m) \;:\; \|f_j\|_1 = 1 \right\},$

- $\inf\left\{\frac{K(h_1,\dots,h_m)}{\prod_{j=1}^m \|h_j\|_1^{c_j}},\ h_j\in L^1(\mathbb{R})\right\} = \inf\left\{K(h_1,\dots,h_m)\ :\ \|h_j\|_1=1\right\}.$

Demostraremos el Teorema 2.1 siguiendo la idea de Barthe, tal y como está expuesta en [6], demostrando las siguientes desigualdades:

$$\frac{1}{\sqrt{F}}\le \sup\left\{I(f_1,\dots,f_m)\ :\ \|f_j\|_1=1\right\}\le \frac{1}{F}\inf\left\{K(h_1,\dots,h_m)\ :\ \|h_j\|_1=1\right\}\le \frac{1}{\sqrt{F}}.$$

Así, demostraremos que todas las desigualdades son igualdades y tendremos que:

- $\sup\left\{\frac{I(f_1,\dots,f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_1^{c_j}},\ f_j\in L^1(\mathbb{R}),\ j=1,\dots,m\right\}=\frac{1}{\sqrt{F}}$
- $\inf\left\{\frac{K(h_1,\dots,h_m)}{\prod_{j=1}^m \|h_j\|_1^{c_j}},\ h_j\in L^1(\mathbb{R}),\ j=1,\dots,m\right\}=\sqrt{F}.$

Lema 2.2. *Sean $1\le n\le m$. Dados $(u_j)_{j=1}^m$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0\le c_j\le 1$ y $c_1+\cdots+c_m=n$, se tiene que*

$$\frac{1}{\sqrt{F}}\le \sup\left\{I(f_1,\dots,f_m)\ :\ \|f_j\|_1=1,\ j=1,\dots,m\right\},$$

donde el supremo se toma en las funciones integrables $(f_j)_{j=1}^m:\mathbb{R}\to[0,\infty)$.

Demostración. En esta demostración vamos a ver que si consideramos funciones gaussianas $g_j:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ de la forma $g_j(t)=e^{-\lambda_j t^2}$ con $\lambda_j>0$, $j=1,\dots,m$, entonces

$$\frac{1}{\sqrt{F}}=\sup_{g_1,\dots,g_m}\frac{I(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}}.$$

De esta forma tendremos que

$$\frac{1}{\sqrt{F}}=\sup_{g_1,\dots,g_m}\frac{I(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}}\le \sup_{f_1,\dots,f_m}\frac{I(f_1,\dots,f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_1^{c_j}},$$

donde el segundo supremo se toma entre todas las funciones $(f_j)_{j=1}^n:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ integrables. Dadas $g_j(t)=e^{-\lambda_j t^2}$ con $\lambda_j>0$ para todo $1\le j\le m$ tenemos entonces que

$$\frac{I(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}}=\frac{\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j\langle x,u_j\rangle^2}dx}{\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j t^2}dt\right)^{c_j}}.$$

Calculamos las integrales del denominador utilizando el cambio de variable $t=\frac{1}{\sqrt{2\lambda_j}}u$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda_j t^2}dt=\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{\frac{-u^2}{2}}du}{\sqrt{2\lambda_j}}=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\lambda_j}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}}.$$

Por tanto, el denominador queda:

$$\prod_{j=1}^m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}}\right)^{c_j}=\frac{\prod_{j=1}^m(\sqrt{\pi})^{c_j}}{\prod_{j=1}^m(\sqrt{\lambda_j})^{c_j}}=\frac{\pi^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m c_j}}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{\frac{c_j}{2}}}=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}}.$$

Calculemos ahora el numerador. Definimos la matriz A como $A=\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t$. Esta matriz A es simétrica y semidefinida positiva ya que si $1\le i,k\le n$

$$A_{i,k} \quad = \quad e_i^t A e_k=\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j e_i^t u_j u_j^t e_k=\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j\langle u_j,e_i\rangle\langle u_j,e_k\rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{m} c_j\lambda_j\langle u_j, e_k\rangle\langle u_j, e_i\rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j\lambda_j e_k^t u_j u_j^t e_i = e_k^t A e_i = A_{k,i}$$

y para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$\langle Ax, x\rangle = x^t A x = \sum_{j=1}^{m} c_j\lambda_j x^t u_j u_j^t x = \sum_{j=1}^{m} c_j\lambda_j \langle x, u_j\rangle^2 \geq 0.$$

Por lo tanto, existen una matriz ortogonal U y una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ con $\mu_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ tales que $A = U^t D U$.
Además, se tiene que para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j c_j \langle x, u_j\rangle^2 = \langle Ax, x\rangle = \langle U^t DUx, x\rangle = \langle DUx, Ux\rangle$$

y entonces la intregal del numerador es

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Ax,x\rangle} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle DUx,Ux\rangle} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle Dy,y\rangle} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \mu_i y_i^2} dy \\ &= \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu_i y^2} dy = \prod_{i=1}^{n} \sqrt{\frac{\pi}{\mu_i}} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t)}},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $\det A = \det D = \prod_{i=1}^{n} \mu_i$.
Entonces, ya calculados numerador y denominador, tenemos que, para las funciones de la forma $g_j = e^{-\lambda_j t^2}$, con $\lambda_j > 0$ para todo $j = 1, \ldots, m$:

$$\frac{I(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} = \frac{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^T)}}}{\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}}} = \sqrt{\frac{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}{\det(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t)}}.$$

Tomando supremos para estas funciones g_j, se tiene que:

$$\sup_{f_1,\ldots f_m} \frac{I(f_1, \ldots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_1^{c_j}} \geq \sup_{g_1,\ldots g_m} \frac{I(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} = \frac{1}{\inf\left\{\sqrt{\frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}} \,:\, \lambda_j > 0\right\}} = \frac{1}{\sqrt{F}}.$$

□

Lema 2.3. *Sean $1 \leq n \leq m$. Dados $(u_j)_{j=1}^m$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0 \leq c_j \leq 1$ y $c_1 + \cdots + c_m = n$, se tiene que*

$$\inf\left\{K(h_1, \ldots, h_m) \,:\, \|h_j\|_1 = 1,\ j = 1, \ldots, m\right\} \leq \sqrt{F},$$

donde el ínfimo se toma en las funciones integrables $(h_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0, \infty)$.

Demostración. Para esta demostración vamos a considerar las funciones gaussianas $g_j : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ de la forma $g_j = e^{-\frac{1}{\lambda_j}t^2}$ con $\lambda_j > 0,\ j = 1, \ldots, m$. Vamos a ver entonces que

$$\inf_{g_1,\ldots,g_m} \frac{K(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} \leq \sqrt{F}.$$

De esta forma, tendremos que:

$$\inf_{h_1,\ldots,h_m} \frac{K(h_1,\ldots,h_m)}{\prod_{j=1}^m \|h_j\|_1^{c_j}} \leq \inf_{g_1,\ldots,g_m} \frac{K(g_1,\ldots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} \leq \sqrt{F}.$$

Para calcular las integrales del denominador, aplicamos el cambio de variable $t = \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}}u$:

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{\lambda_j}t^2} dt = \int_{\mathbb{R}} e^{\frac{-u^2}{2}} \sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} du = \sqrt{2\pi}\sqrt{\frac{\lambda_j}{2}} = \sqrt{\pi\lambda_j}.$$

Entonces, sustituyendo el valor de esta integral en el denominador, este queda:

$$\prod_{j=1}^m \left(\sqrt{\pi\lambda_j}\right)^{c_j} = \pi^{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^m c_j} \sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} = \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}.$$

Calculamos ahora el numerador para estas funciones g_j con $j = 1,\ldots,m$. Recordamos que

$$\begin{aligned} K(g_1,\ldots,g_m) &= \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx : g(x) \geq \prod_{j=1}^m e^{-\frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2} \; si \; x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j \;, \theta_j \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx : g(x) \geq e^{-\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2} \; si \; x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j \;, \theta_j \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Buscamos una función g integrable en $\mathbb{R}^n$ tal que si descomponemos x como $x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j$ entonces se cumple la desigualdad $g(x) \geq e^{-\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2}$. De esta manera $K(g_1,\ldots,g_m)$ será menor o igual que la integral de la función g.

Definimos el elipsoide $\mathscr{E} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax,x\rangle \leq 1\}$ donde A es, como en el Lema 2.2, la matriz simétrica definida positiva $A = \sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t$.

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ con $x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j$ para algunos $\theta_j \in \mathbb{R}$ y sea $y \in \mathscr{E}$. Luego se tiene que $\langle Ay,y\rangle \leq 1$. Entonces aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz al producto escalar $\langle x,y\rangle$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle x,y\rangle &= \langle \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j, y\rangle = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j \langle u_j,y\rangle = \sum_{j=1}^m \frac{\sqrt{c_j}}{\sqrt{\lambda_j}}\theta_j \sqrt{c_j\lambda_j}\langle u_j,y\rangle \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j\langle u_j,y\rangle^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2\right)^{\frac{1}{2}} \langle Ay,y\rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Así, teniendo en cuenta que $\mathscr{E}$ es simétrico se tiene que $\|x\|_{\mathscr{E}^o}^2 = \max_{y\in\mathscr{E}} \langle x,y\rangle^2 \leq \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2$. De manera obvia, esto implica que si $x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j$ entonces

$$e^{-\|x\|_{\mathscr{E}^o}^2} \geq e^{-\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2}.$$

Por lo tanto,

$$\inf\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx : g(x) \geq e^{-\sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\theta_j^2} \; si \; x = \sum_{j=1}^m c_j\theta_j u_j \;, \theta_j \in \mathbb{R} \right\} \leq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_{\mathscr{E}^o}^2} dx. \tag{2.2}$$

Por otra parte, como existen U matriz ortogonal y una matriz diagonal $D = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$ con $\mu_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$ tales que $A = U^t D U$, el elipsoide $\mathscr{E}$ se puede escribir como

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= \{x \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, x\rangle \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle DUx, Ux\rangle \leq 1\} = \\ &= \left\{U^t z \in \mathbb{R}^n : \langle Dz, z\rangle \leq 1\right\} = U^t \{z \in \mathbb{R}^n : \langle Dz, z\rangle \leq 1\} = U^t \mathscr{E}_1, \end{aligned} \tag{2.3}$$

con

$$\begin{aligned} \mathscr{E}_1 &= \{z \in \mathbb{R}^n : \langle Dz, z\rangle \leq 1\} = \left\{z \in \mathbb{R}^n : \langle D^{\frac{1}{2}} z, D^{\frac{1}{2}} z\rangle \leq 1\right\} = \\ &= \left\{D^{-\frac{1}{2}} z \in \mathbb{R}^n : \langle z, z\rangle \leq 1\right\} = D^{-\frac{1}{2}} \{z \in \mathbb{R}^n : \|z\|_2 \leq 1\} = D^{-\frac{1}{2}} B_2^n, \end{aligned}$$

donde $D^{\frac{1}{2}}$ es la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son $\mu_i^{\frac{1}{2}}$ y $D^{-\frac{1}{2}}$ la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son $\mu_i^{-\frac{1}{2}}$ para todo $1 \leq i \leq n$.
Por lo tanto,

$$\mathscr{E}^\circ = (U^t \mathscr{E}_1)^\circ = U^t (\mathscr{E}_1)^\circ = U^t (D^{-\frac{1}{2}} B_2^n)^\circ = U^t D^{\frac{1}{2}} (B_2^n)^\circ = U^t D^{\frac{1}{2}} B_2^n. \tag{2.4}$$

Así, teniendo en cuenta (2.4), se tiene que $\|x\|_{\mathscr{E}^\circ} = \|x\|_{U^t D^{\frac{1}{2}} B_2^n} = \|Ux\|_{D^{\frac{1}{2}} B_2^n} = \|D^{-\frac{1}{2}} Ux\|_{B_2^n}$.
Visto esto y volviendo a la desigualdad (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|x\|_{\mathscr{E}^\circ}^2} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|D^{-\frac{1}{2}} Ux\|_2^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|D^{-\frac{1}{2}} y\|_2^2} dy = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\sum_{i=1}^n \frac{y_i^2}{\mu_i}} dy = \\ &= \prod_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{y_i^2}{\mu_i}} dy = \prod_{i=1}^n \sqrt{\mu_i \pi} = \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det\left(\sum_{i=1}^n c_j \lambda_j u_j u_j^t\right)}. \end{aligned}$$

Una vez calculados numerador y denominador tenemos que:

$$\frac{K(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} \leq \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\det\left(\sum_{i=1}^n c_j \lambda_j u_j u_j^t\right)}}{\pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}} = \sqrt{\frac{\det\left(\sum_{i=1}^n c_j \lambda_j u_j u_j^t\right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}}.$$

Por tanto,

$$\inf_{g_1, \ldots, g_m} \frac{K(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_1^{c_j}} \leq \inf \left\{ \sqrt{\frac{\det\left(\sum_{i=1}^n c_j \lambda_j u_j u_j^t\right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}},\ \lambda_j > 0 \right\} = \sqrt{F}.$$

□

Teorema 2.4. *Sean $1 \leq n \leq m$, $(u_j)_{j=1}^m$ un sistema generador de $\mathbb{R}^n$ y $(c_j)_{j=1}^m$ con $0 \leq c_j \leq 1$ y $c_1 + \cdots + c_m = 1$. Sean $(f_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ y $(h_j)_{j=1}^m : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ funciones integrables tales que*

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t) dt = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Entonces, se tiene:

$$F \cdot I(f_1, \ldots, f_m) \leq K(h_1 \ldots, h_m).$$

Demostración. Supongamos primero que las funciones $(f_j)_{j=1}^m$ y $(h_j)_{j=1}^m$ son estrictamentes positivas y continuas. Suponemos que la constante F es positiva y finita, ya que si $F = 0$ el enunciado es trivial y, claramente, de la definición de F tenemos que F es finita.
Definimos, para cada $1 \leq j \leq m$, la aplicación $T_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{-\infty}^{T_j(t)} h_j(s)ds \;=\; \int_{-\infty}^{t} f_j(s)ds.$$

Como hemos supuesto f_j y h_j son continuas y estrictamente positivas para todo $j = 1,\dots,m$ con $\|f_j\|_1 = \|h_j\|_1 = 1$, la aplicación T_j está bien definida para todo $j = 1,\dots,m$ y además es estrictamente creciente. Esta aplicación también es inyectiva, pues para $t,r \in \mathbb{R}$, suponiendo que $T_j(t) = T_j(r)$ en $\mathbb{R}$, se tiene que $\int_{-\infty}^{t} f_j(s)ds = \int_{-\infty}^{T_j(t)} h_j(s)ds = \int_{-\infty}^{T_j(r)} h_j(s)ds = \int_{-\infty}^{r} f_j(s)ds$, y entonces $t = r$ ya que estamos suponiendo f_j estrictamente positiva. La aplicación T_j es sobreyectiva, pues para cada $t' \in \mathbb{R}$ se tiene que $\int_{-\infty}^{t'} h_j(s)ds$ es un número en el intervalo $(0,1)$, ya que por el teroema fundamental del cálculo integral $H_j(t) = \int_{-\infty}^{t} h_j(s)ds$ es una función continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ que cumple que $\lim_{t\to-\infty} H_j(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} H_j(t) = 1$. Como por el teorema fundamental del cálculo integral $F_j(t) = \int_{-\infty}^{t} f_j(s)ds$ es una función continua y estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ que cumple que $\lim_{t\to-\infty} F_j(t) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} F_j(t) = 1$, se tiene que existe un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $F_j(t) = H_j(t')$ y así $T_j(t) = t'$.
Además, por el teorema fundamental del cálculo integral y por el teorema de derivación de la función inversa se tiene que T_j es derivable en $\mathbb{R}$ y

$$T_j'(t)h_j(T_j(t)) = f_j(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definimos $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por

$$W(y) = \sum_{j=1}^{m} c_j T_j(\langle y,u_j\rangle)u_j, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Podemos calcular la matriz jacobiana de W y obtenemos que $J_W(y) = \sum_{j=1}^{m} c_j T_j'(\langle y,u_j\rangle)u_j u_j^t$. Además, por la definición de F se tiene que

$$\det\left(\sum_{j=1}^{m} c_j T_j'(\langle y,u_j\rangle)u_j u_j^t\right) \geq F \cdot \prod_{j=1}^{m} (T_j'(\langle y,u_j\rangle))^{c_j} > 0.$$

Consideramos $h : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ una función integrable que cumple que

$$h(x) \geq \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(\theta_j) \;\; si \;\; x = \sum_{j=1}^{m} \theta_j c_j u_j.$$

Por tanto, se tiene que

$$h(W(y)) \geq \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(T_j(\langle y,u_j\rangle)), \quad \forall y \in \mathbb{R}^n,$$

y así:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \;&\geq\; \int_{W(\mathbb{R}^n)} h(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} h(W(y))|\det J_W(y)|dy \\
&\geq\; \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(T_j(\langle y,u_j\rangle)) \det\left(\sum_{j=1}^{m} c_j T_j'(\langle y,u_j\rangle)u_j u_j^t\right) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq F \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j \rangle))(T_j'(\langle y, u_j \rangle))^{c_j} dy \\ &= F \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(\langle y, u_j \rangle) dy = F \cdot I(f_1, \ldots f_m). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando ínfimo en h, tenemos que $F \cdot I(f_1, \ldots, f_m) \leq K(h_1 \ldots, h_m)$, como queríamos probar. Por un proceso de aproximación se puede demostrar este teorema para funciones integrables en general, tal y como está enunciado. $\square$

Capítulo 3

Cuerpos convexos en posición de John.

3.1. La posición de John y descomposición de la identidad

Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$. El teorema de John [7] afirma que existe un único elipsoide $\mathscr{E}$ de máximo volumen contenido en K . A dicho elipsoide se le denomina elipsoide de John de K.
Si tomamos una transformación lineal, $T \in GL(n)$, es claro que aplicando esta transformación al elipsoide y a K se tiene que $T(\mathscr{E}) \subseteq TK$. Por otra parte, si existiese un elipsoide $\mathscr{E}_1 \subseteq TK$ con volumen mayor que $T(\mathscr{E})$ entonces $|T^{-1}(\mathscr{E})| > |T^{-1}T(\mathscr{E})| = |\mathscr{E}|$ y $T^{-1}(\mathscr{E}_1) \subseteq T^{-1}TK = K$, lo que cual es una contradicción. Por tanto, $T(\mathscr{E})$ es el elipsoide de John de TK.
Decimos que un cuerpo $K \subseteq \mathbb{R}^n$ está en posición de John si su elipsoide de John es la bola Euclídea B_2^n. Es decir, si $B_2^n \subseteq K$ y para cualquier elipsoide $\mathscr{E}$ contenido en K se tiene que $|\mathscr{E}| \leq |B_2^n|$.
El siguiente teorema, que no vamos a demostrar en este trabajo, caracteriza el hecho de que un cuerpo convexo se encuentre en posición de John:

Teorema 3.1. *Sea K un cuerpo convexo en $\mathbb{R}^n$. K está en posición de John si y solo si $B_2^n \subseteq K$ y además existen $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \partial K \cap S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,\infty)$ tales que*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j u_j = 0$$

y

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t,$$

donde I_n denota la matriz identidad.

Demostración. La demostración se debe a John y a Ball. Se puede ver en [1] . □

El teorema anterior nos dice que todo cuerpo convexo en posición de John tiene asociados unos escalares y unos vectores. El siguiente lema nos muestra que dichos escalares satisfacen las condiciones que se han considerado en el Capítulo 2:

Lema 3.2. *Sean $(u_j)_{j=1}^m \in S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,\infty)$ y que satisfacen $I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t$ entonces:*

1) $0 < c_j \leq 1$ *para todo* $j = 1,\dots,m$

2) $\sum_{j=1}^{m} c_j = n$

Demostración. Vamos a demostrar ambos puntos:

1) Como estamos suponiendo que los c_j son mayores que cero, probaremos que cada c_j es menor o igual que 1 para todo $j = 1,\dots,m$.
   Como se satisface que $I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t$, entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene:
   $$x = I_n x = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, x\rangle u_j.$$
   Esto implica que
   $$\|x\|_2^2 = \langle x,x\rangle = \langle \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j,x\rangle u_j, x\rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x,u_j\rangle^2.$$
   En particular, como $u_j \in S^{n-1}$ para todo $j = 1,\dots,m$, entonces:
   $$1 = \|u_j\|_2^2 = \sum_{k=1}^{m} c_j \langle u_j,u_k\rangle^2 = c_j \|u_j\|_2^2 + \sum_{k\neq j} c_k \langle u_j,u_k\rangle^2 \geq c_j.$$
   Luego $c_j \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq m$.

2) Para demostrar la igualdad utilizaremos que la traza de la matriz identidad es n. Antes de eso calculamos la traza de la matriz $u_j u_j^t$ para cada $1 \leq j \leq m$:
   $$Tr(u_j u_j^t) = \sum_{i=1}^{m} (u_j)_i^2 = \langle u_j,u_j\rangle = 1.$$
   Por lo tanto,
   $$n = Tr(I_n) = Tr(\sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t) = \sum_{j=1}^{m} c_j Tr(u_j u_j^t) = \sum_{j=1}^{m} c_j \cdot 1 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

□

A continuación, en el siguiente lema, enunciaremos y demostraremos la fórmula de Cauchy-Binet, la cual utilizaremos más adelante:

Lema 3.3 (Fórmula de Cauchy-Binet)**.** *Sea A matriz $n \times m$ y B matriz $m \times n$ con $m \geq n$ y $n,m \in \mathbb{N}$. Si $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ con $|I| = n$, donde $|I|$ denota el cardinal de I, denotamos por A_I la matriz cuadrada formada por las i-ésimas columnas de A, con $i \in I$ y B_I la matriz cuadrada formada por las i-ésimas filas de B, con $i \in I$. Entonces:*
$$\det(AB) = \sum_{|I|=n} \det A_I \det B_I.$$

Demostración. La columna i-ésima de AB es $b_{1i}A_1 + \cdots + b_{mi}A_m$ donde A_j es la columna j-ésima de la matriz A con $j = 1,\dots,m$.
Entonces, aplicando la multilinealidad del determinante, se tiene:
$$\det(AB) = \det(b_{11}A_1 + \cdots + b_{m1}A_m, \dots, b_{1n}A_1 + \cdots + b_{mn}A_m) = \sum_{|I|=n} \det A_I \det B_I.$$

□

Después de haber visto esto, podemos plantearnos cuál será la constante F de la desigualdad de Brascamp-Lieb con las condiciones del Lema 3.2. En el siguiente lema veremos cuál es. Necesitaremos la fórmula de Cauchy-Binet para demostrar el lema.

Lema 3.4. *Sean* $(u_j)_{j=1}^m \in S^{n-1}$ *y* $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,\infty)$ *y que satisfacen* $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j u_j^t$. *Entonces,*

$$F = \text{ínf}\left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j u_j^T)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \lambda_j > 0 \right\} = 1.$$

Demostración. Sean $\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,m$. Para todo $I \subseteq \{1,\dots,m\}$ cuyo cardinal es $|I| = n$, definimos:

$$\lambda_I = \prod_{j\in I} \lambda_j \quad y \quad U_I = \left(\det\left(\sum_{j\in I} c_j u_j u_j^t\right)\right)^2.$$

Aplicamos la fórmula de Cauchy-Binet a $A = (\sqrt{c_1\lambda_1}u_1|\dots|\sqrt{c_m\lambda_m}u_m)$ y $B = (\sqrt{c_1\lambda_1}u_1|\dots|\sqrt{c_m\lambda_m}u_m)^t$ y obtenemos:

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t\right) = \det\left(\sum_{j=1}^m \sqrt{c_j\lambda_j}u_j(\sqrt{c_j\lambda_j}u_j)^t\right) = \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I. \tag{3.1}$$

Tomando los $\lambda_j = 1$ tenemos que $\sum_{|I|=n} U_I = 1$. Por la desigualdad aritmogeométrica de medias,

$$\sum_{|I|=n} \lambda_I U_I \geq \prod_{|I|=n} \lambda_I^{U_I} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{\{I:j\in I\}} U_I}. \tag{3.2}$$

Volvemos a aplicar la fórmula de Cauchy-Binet al exponente de la desigualdad anterior:

$$\begin{aligned}
\sum_{\{I:j\in I\}} U_I &= \sum_{|I|=n} U_I - \sum_{\{I:j\notin I\}} U_I = 1 - \det(I_n - \sqrt{c_j}u_j\sqrt{c_j}u_j^t) \\
&= 1 - \det(UU^t - c_j U e_1 e_1^t U^t) = 1 - \det(U(I_n - c_j e_1 e_1^t)U^t) \\
&= 1 - \det(U)\det(I_n - c_j e_1 e_1^t)\det(U^t) = 1 - (1 - c_j) = c_j,
\end{aligned}$$

donde $U \in O(n)$ es tal que $u_j = Ue_1$ con e_1 el primer vector de la base canónica.
Observamos que, volviendo a las ecuaciones (3.1) y (3.2), obtenemos

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j u_j^t\right) \geq \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}$$

y esto implica

$$F = \text{ínf}\left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j u_j^T)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}, \lambda_j > 0 \right\} \geq 1.$$

La igualdad se da en esta última igualdad por la elección de los $\lambda_j = 1$. Con esto terminamos la demostración del lema. □

3.2. El cubo y el símplex regular

En esta sección demostraremos que el cubo n-dimensional y un dilatado del símplex regular n-dimensional están en posición de John.
Primero demostremos que el cubo lo está.

Teorema 3.5. *El cubo n-dimensional* B_∞^n *se encuentra en posición de John.*

Demostración. Para esta demostración utilizaremos la caracterización de un cuerpo en posción de John del Teorema 3.1.
Tenemos que $B_2^n \subseteq B_\infty^n$. Además, cualquier punto $x \in \mathbb{R}^n$ podemos escribirlo de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \langle x, e_i \rangle e_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} \langle x, (-e_i) \rangle (-e_i),$$

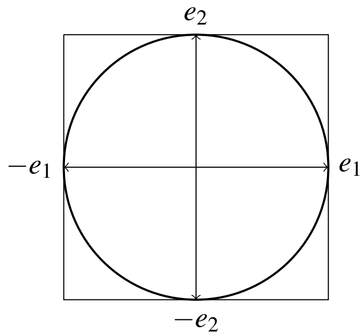
donde $(e_i)_{i=1}^n$ son los vectores de la base canónica.
Se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(-e_i) = 0$$

y

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} e_i e_i^t + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}(-e_i)(-e_i)^t.$$

También se cumple que $(\pm e_i)_{i=1}^n \subseteq \partial B_\infty^n \cap S^{n-1}$. Así se cumplen las condiciones del Teorema 3.1 y por tanto el cubo n-dimensional está en posición de John.



□

A continuación demostraremos que un dilatado del símplex regular n-dimensional está en posición de John.

Teorema 3.6. *El símplex regular n-dimensional reescalado $S_n = \sqrt{n(n+1)}\Delta^n \subseteq \mathbb{R}^n$ está en posición de John.*

Demostración. Sea $\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1,\ x_i \geq 0\ \forall i = 1, \ldots, n+1 \right\} \subseteq H$ donde H es el hiperplano afín en $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \langle x, v \rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right\},$$

siendo $v = (\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{n+1}}) \in S^n$. Identificamos H con $\mathbb{R}^n$ y $c = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$ con $0 \in \mathbb{R}^n$.
Definimos el hiperplano lineal $H_0 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$H_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \langle x, v \rangle = 0 \right\},$$

que es paralelo a H y que cumple que $P_{H_0} c = 0$. De esta manera el símplex regular en $\mathbb{R}^n$ se identifica con $P_{H_0}\Delta^n \subseteq H_0$. Vamos a demostrar que, identificando H_0 con $\mathbb{R}^n$, $S_n = \frac{P_{H_0}\Delta^n}{r(P_{H_0}\Delta^n)}$ está en posición de John, donde $r(P_{H_0}\Delta^n)$ denota el inradio de $P_{H_0}\Delta^n$ dentro de H_0. Es decir,

$$r(P_{H_0}\Delta^n) = \text{máx} \left\{ r \geq 0 \ : \ rB_2^{n+1} \cap H_0 \subseteq P_{H_0}\Delta^n \right\}.$$

Es claro que $B_2^{n+1} \cap H_0 \subseteq S_n$. Veamos que existen $(u_j)_{j=1}^m \subseteq \partial S_n \cap S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,\infty)$ que cumplan las condiciones del Teorema 3.1 para que S_n esté en posición de John. Visto en H_0, tomaremos u_j los opuestos de las proyecciones de e_j sobre H_0 normalizadas para todo $j = 1,\dots,n+1$, es decir, $u_j = -\dfrac{P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2} \in S_n \cap H_0$ para todo $j = 1,\dots,n+1$.
Queremos ver que existen $(c_j)_{j=1}^{n+1}$ tales que para $x \in H_0$ se verifica que

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \langle x, u_j \rangle u_j = \sum_{j=1}^{n+1} c_j \langle x, \frac{P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2} \rangle \frac{P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2}.$$

Sea $x \in H_0$, tenemos que

$$x = \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, e_j \rangle e_j$$

y por tanto

$$x = P_{H_0}x = \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, e_j \rangle P_{H_0}e_j = \sum_{j=1}^{n+1} \langle x, P_{H_0}e_j \rangle P_{H_0}e_j = \sum_{j=1}^{n+1} \|P_{H_0}e_j\|_2^2 \left\langle x, \frac{P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2} \right\rangle \frac{P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2};$$

tomando $c_j = \|P_{H_0}e_j\|_2^2$ para todo $j = 1,\dots,n+1$. Hemos demostrado que, identificando $\mathbb{R}^n$ con H_0, $I_n = \sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j u_j^t$ con I_n la matriz identidad.

Veamos ahora que se cumple que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j = 0$. Antes de comprobarlo, veamos que $\|P_{H_0}e_j\|_2$ es igual para todo $j = 1,\dots,n+1$. Sabemos que $P_{H_0}e_j = e_j - \langle e_j, v \rangle v = e_j - \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}v$, luego este vector tiene todas sus coordenadas iguales a $-\frac{1}{n+1}$ salvo una que será igual a $1 - \frac{1}{n+1}$. Así, para todo $j = 1,\dots,n+1$,

$$\|P_{H_0}e_j\|_2 = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Así se tiene que

$$\sum_{j=1}^{n+1} c_j u_j = \sum_{j=1}^{n+1} \|P_{H_0}e_j\|_2^2 \frac{-P_{H_0}e_j}{\|P_{H_0}e_j\|_2} = -\|P_{H_0}e_1\|_2 \sum_{j=1}^{n+1} P_{H_0}e_j = -\|P_{H_0}e_1\|_2 P_{H_0}(1,\dots,1) = 0,$$

ya que $(1,\dots,1)$ es proporcional a v.
Falta comprobar que $u_j \in \partial S_n$ para todo $j = 1,\dots,n+1$. Veamos que

$$r_j = \langle P_{H_0}e_j, u_1 \rangle = \left\langle P_{H_0}e_j, \frac{-P_{H_0}e_1}{\|P_{H_0}e_1\|_2} \right\rangle$$

tiene el mismo valor r_j para todo $j = 2,\dots,n+1$. Si esto ocurre, tendremos que la cara del símplex regular opuesta a $P_{H_0}e_1$ tiene vector normal u_1 y el punto más cercano de la cara es $r_j u_1$.
Calculamos r_j. Sabemos que

$$P_{H_0}e_1 = e_1 - \langle e_1, v \rangle v = \left(1 - \frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1} \dots, -\frac{1}{n+1}\right),$$

luego su norma es:

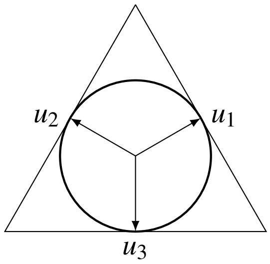
$$\|P_{H_0}e_1\|_2 = \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Por tanto, para todo $j = 2,\dots,n+1$

$$r_j = \left\langle P_{H_0}e_j, \frac{-P_{H_0}e_1}{\|P_{H_0}e_1\|_2} \right\rangle = \left\langle e_j, \frac{-P_{H_0}e_1}{\|P_{H_0}e_1\|_2} \right\rangle = \frac{1}{\|P_{H_0}e_1\|_2} \langle e_j, -P_{H_0}e_1 \rangle$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\|P_{H_0}e_1\|_2}\left\langle e_j, \left(\frac{1}{n+1}-1,\ldots,\frac{1}{n+1}\right)\right\rangle = \frac{1}{\|P_{H_0}e_1\|_2}\frac{1}{n+1}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}.
\end{aligned}
$$

De manera análoga se obtendría que punto más cercano al origen de la cara opuesta a $P_{H_0}e_k$ de $P_{H_0}\Delta^n$ es $\frac{u_k}{\sqrt{n(n+1)}}$. Por lo tanto $r(\Delta^n) = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ y $u_k \in \partial(\sqrt{n(n+1)}P_{H_0})\Delta^n = \partial S_n$.



$\square$

Capítulo 4

Aplicaciones de la desigualdad de Brascamp-Lieb en geometría convexa.

Según hemos visto en el Capítulo 3, K está en posición de John si y solo si K contiene a B_2^n y existen $(u_j)_{j=1}^m \in \partial K \cap S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,1]$ tales que $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j u_j^t$ y $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$. Además en tal caso la constante en la desigualdad de Brascamp-Lieb para los vectores $(u_j)_{j=1}^m$ y los escalares $(c_j)_{j=1}^m$ es $F = 1$. En este capítulo vamos a utilizar la desigualdad de Brascamp-Lieb para obtener propiedades geométricas de cuerpos convexos en posición de John. Demostraremos que, entre todos los cuerpos convexos simétricos en posición de John, el cubo n-dimensional B_∞^n es el de mayor volumen y que, entre todos los cuerpos (no necesariamente simétricos) en posición de John, el símplex regular en posición de John S_n es el de mayor volumen. Estos reultados fueron demostrados por Ball en [2] y [3].

Teorema 4.1. *Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cuerpo convexo en posición de John. Entonces*

$$|K| \leq |S_n|.$$

Además, si K es simétrico entonces

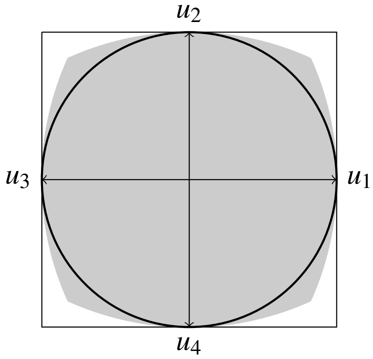
$$|K| \leq |B_\infty^n|.$$

Demostración. Supongamos primero que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo simétrico en posición de John. Entonces, por el Teorema 3.1 y el Lema 3.2 existen $(u_j)_{j=1}^m \in \partial K \cap S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,1]$ tales que $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j u_j^t$ y $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$. Sea

$$L_0 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ |\langle x, u_j \rangle| \leq 1 \ \forall 1 \leq j \leq m \right\}.$$

Se tiene entonces que, como K es simétrico, $K \subseteq L_0$ y entonces

$$|K| \leq |L_0| = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{L_0}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \chi_{[-1,1]}(\langle x, u_j \rangle)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \chi_{[-1,1]}^{c_j}(\langle x, u_j \rangle)dx.$$



Aplicando la desigualdad de Brascamp-Lieb (Teorema 2.1) y, teniendo en cuenta que por el Lema 3.4 se tiene que $F = 1$, obtenemos que

$$|K| \leq |L_0| = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} \chi_{[-1,1]}^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-1,1]}(t) dt \right)^{c_j}.$$

Por tanto, por el Lema 3.4

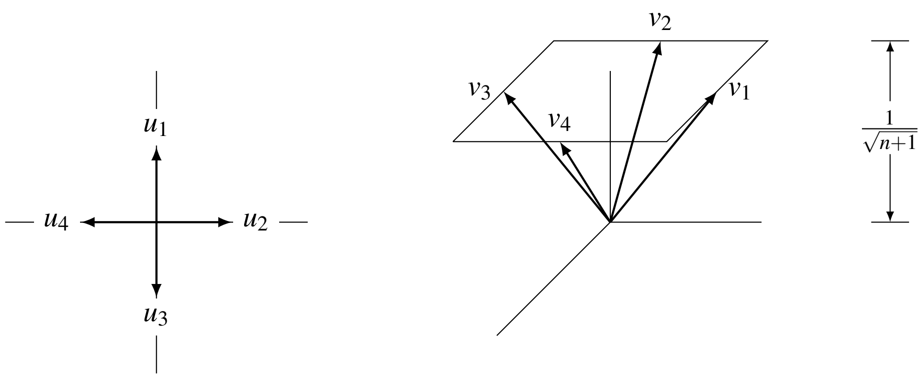
$$|K| \leq |L_0| \leq \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \chi_{[-1,1]}(t) dt \right)^{c_j} = \prod_{j=1}^{m} 2^{c_j} = 2^{\sum_{j=1}^{m} c_j} = 2^n = |B_\infty^n|.$$

Supongamos ahora que $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un cuerpo convexo no necesariamente simétrico en posición de John. De nuevo, por el Teorema 3.1 y el Lema 3.2 existen $(u_j)_{j=1}^m \in \partial K \cap S^{n-1}$ y $(c_j)_{j=1}^m \subseteq (0,1]$ tales que $I_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j u_j u_j^t$ y $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} c_j u_j = 0$.
Definimos el cuerpo convexo $L_1 \subseteq \mathbb{R}^n$

$$L_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \langle x, u_j \rangle \leq 1 \ \forall 1 \leq j \leq m \right\}.$$

Tenemos que $K \subseteq L_1$. Tomamos en $\mathbb{R}^{n+1}$, para todo $j = 1, \ldots, m$,

- $v_j = \sqrt{\dfrac{n}{n+1}} \left(-u_j, \dfrac{1}{\sqrt{n}} \right) \in S^n$,
- $d_j = \dfrac{n+1}{n} c_j$.



Estos vectores y escalares cumplen las siguientes propiedades:
Dado $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} d_j \langle (x,t), v_j \rangle v_j &= \sum_{j=1}^{m} d_j \frac{n}{n+1} \left(-\langle -u_j, x \rangle u_j - \frac{t u_j}{\sqrt{n}}, \langle -u_j, \frac{x}{\sqrt{n}} \rangle + \frac{t}{n} \right) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \left(-c_j \langle -u_j, x \rangle u_j - \frac{t c_j u_j}{\sqrt{n}}, c_j \langle -u_j, \frac{x}{\sqrt{n}} \rangle + \frac{t c_j}{n} \right) = (x,t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Por tanto, $I_{n+1} = \sum_{j=1}^{m} d_j v_j v_j^t$ donde I_{n+1} denota la matriz identidad en $\mathbb{R}^{n+1}$. Además, también cumplen que

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} d_j v_j &= \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\frac{n+1}{n}} c_j \left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \left(\sum_{j=1}^{m} -\sqrt{\frac{n+1}{n}} c_j u_j, \sum_{j=1}^{m} \frac{\sqrt{n+1}}{n} c_j \right) \\ &= (0, \sqrt{n+1}). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Por último, como consecuencia directa de $I_{n+1} = \sum_{j=1}^m d_j v_j v_j^t$ y del Lema 3.2 se tiene que

$$\sum_{j=1}^m d_j = n+1 \quad y \quad 0 < d_j \leq 1 \;\forall j = 1,\ldots,m.$$

Denotamos como C al cono

$$C = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; \langle (x,t), v_j\rangle \geq 0, \forall 1 \leq j \leq m\right\}.$$

Observamos que

$$C = \left\{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \;:\; t \geq 0, x \in \frac{t}{\sqrt{n}} L_1\right\}. \tag{4.3}$$

En efecto, sea $(x,t) \in C$. Supongamos que $t < 0$, entonces como $\langle (x,t), v_j\rangle \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq m$ tenemos

$$\langle (x,t), v_j\rangle = -\sqrt{\frac{n}{n+1}}\langle x, u_j\rangle + \frac{t}{\sqrt{n+1}} \geq 0 \quad \forall 1 \leq j \leq m$$

y obtenemos que $\langle x, u_j\rangle < 0$ para todo $1 \leq j \leq m$. Como consecuencia como $c_j \in (0,1]$ para todo $1 \leq j \leq m$, $\sum_{j=1}^m c_j \langle x, u_j\rangle < 0$, que contradice la hipótesis $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$. Por lo tanto, si $(x,t) \in C$ necesariamente debe ser $t \geq 0$ y entonces tenemos que $\langle (x,t), v_j\rangle \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq m$ si y solo si $\langle x, u_j\rangle \leq \frac{t}{\sqrt{n}}$ para todo $1 \leq j \leq m$. La última condición se cumple si y solo si $x \in \frac{t}{\sqrt{n}} L_1$.

Por otra parte, si (x,t) verifica que $t \geq 0$ y $x \in \frac{t}{\sqrt{n}} L_1$, lo cual ocurre si y solo si $\langle x, u_j\rangle \leq \frac{t}{\sqrt{n}}$ para todo $1 \leq j \leq m$, entonces se tiene que

$$\langle (x,t), v_j\rangle = -\sqrt{\frac{n}{n+1}}\langle x, u_j\rangle + \frac{t}{\sqrt{n+1}} \geq 0$$

para todo $1 \leq j \leq m$ y así $(x,t) \in C$.
Definimos para todo $1 \leq j \leq m$, $f_j : \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$f_j(s) = \begin{cases} e^{-s} & si \quad s \geq 0 \\ 0 & si \quad s < 0 \end{cases}$$

para todo $1 \leq j \leq m$.
Calculamos la siguiente integral en $\mathbb{R}^{n+1}$. Por (4.2) y por (4.3) se tiene que:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^m f_j(\langle (x,t), v_j\rangle)^{d_j} dt dx &= \int_C e^{-\sum_{j=1}^m d_j \langle (x,t), v_j\rangle} dt dx = \int_C e^{-\sqrt{n+1}t} dt dx = \int_0^\infty \int_{\frac{t}{\sqrt{n}}L_1} e^{-\sqrt{n+1}t} dx dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\sqrt{n+1}t} \left|\frac{t}{\sqrt{n}} L_1\right| dt = |L_1| \int_0^\infty \left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n e^{-\sqrt{n+1}t} dt \\
&= |L_1| \int_0^\infty \frac{s^n e^{-s} ds}{(\sqrt{n})^n (\sqrt{n+1})^{n+1}} = |L_1| \frac{\Gamma(n+1)}{(\sqrt{n})^n (\sqrt{n+1})^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^m f_j(\langle (x,t), v_j\rangle)^{d_j} dt dx = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j=1}^m \left(\chi_{[0,\infty]} \langle (x,t), v_j\rangle e^{-\langle (x,t), v_j\rangle}\right)^{d_j} dt dx.$$

Por la desigualdad de Brascamp-Lieb (Teorema 2.1) y, teniendo en cuenta (4.1) y que por el Lema 3.4 se tiene que la constante de Brascamp-Lieb es $F = 1$, esta integral es menor o igual que el siguiente producto de integrales,

$$\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,\infty]}(t)e^{-t}dt\right)^{d_j} = \prod_{j=1}^{m}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-t}dt\right)^{d_j} = \prod_{j=1}^{m} 1^{d_j} = 1.$$

Por lo tanto, como $K \subseteq L_1$, se tiene por el Teorema 1.1

$$|K| \leq |L_1| \leq \frac{(\sqrt{n})^n(\sqrt{n+1})^{n+1}}{\Gamma(n+1)} = (\sqrt{n(n+1)})^n \frac{\sqrt{n+1}}{\Gamma(n+1)} = (\sqrt{n(n+1)})^n|\Delta^n| = |S_n|.$$

$\square$

Bibliografía

[1] ARTSTEIN-AVIDAN S., GIANNOPOULOS A., MILMAN V.D.. *Asymptotic Geometric Analysis, Part 1*. C.R. Acad. Sci. Paris 324 (1997), pp. 885−888. Mathematical Surveys and Monographs 202, AMS, Providence Rhode, Island. ISBN 978-1-4704-2193-9.

[2] BALL K. *Volumes of sections of cubes and related problems,* Israel seminar on geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Mathematics **1376** (ed. J. Lindenstrauss and V. D. Milman; Springer, Berlin, 1989) 251-260

[3] BALL K. *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality.* J. London Math. Soc. **44** (2), (1991) 351-359

[4] BARTHE F. *Inegalités de Brascamp-Lieb et convexité.* C.R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), pp. 885-888.

[5] BRASCAMP H.J - LIEB E.H. *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization for more than three functions.* Adv. Math **20** (1976), pp. 151-173.

[6] BRAZITIKOS S., GIANNOPOULOS A., VALETTAS P., VRITSIOU B.-H. *Geometry of isotropic convex bodies.* Mathematical Surveys and Monographs **196**, AMS, Providence Rhode, Island. ISBN 978-1-4704-1456-6.

[7] JOHN F. *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions.* Courant. Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), pp. 187−204.