ISSN: 1576-7914 - e-ISSN: 2341-1902
DOI: https://dx.doi.org/10.14201/cuadieci2021224988

IN METHODUM FLUXIONUM

The Method of Fluxions

Elena AUSEJO
Universidad de Zaragoza
ichs@unizar.es

Fecha de recepción: 27/09/2020
Fecha de aceptación definitiva: 07/04/2021

RESUMEN: *In Methodum Fluxionum* es un manuscrito anónimo del siglo XVIII que se conserva en la llamada Biblioteca de Cortes de la Real Academia de la Historia, una colección que contiene una importante cantidad de manuscritos matemáticos procedentes del Colegio Imperial regentado por los jesuitas. La primera mitad del texto es una introducción que trata de la composición de fuerzas, de la caída de los graves y de las potencias y sus índices. La mitad restante del manuscrito está dedicada al algoritmo de las fluxiones y su aplicación al trazado de tangentes a curvas y a la determinación de máximos y mínimos. Este trabajo presenta el análisis de contenidos y la transcripción del texto que han resultado en la identificación de la fuente impresa que el manuscrito traduce fielmente del inglés al latín, esto es, las treinta y cuatro primeras páginas del tratado titulado *The method of fluxions applied to a select number of useful problems* de Nicholas Saunderson (1682-1739).

Palabras clave: cálculo fluxional; Colegio Imperial; España; Reino Unido; siglo XVIII; Nicholas Saunderson (1682-1739).

ABSTRACT: *In Methodum Fluxionum* is an 18th century anonymous manuscript belonging to the so-called Biblioteca de Cortes at the Royal Academy of History, a collection that contains a significant number of mathematical manuscripts from the Imperial College run by the Jesuits. The first half of the manuscript is an introduction dealing with the composition of forces, the fall of heavy bodies, and powers and their indexes. The remaining half is devoted to the algorithm of fluxions and its application to drawing tangents and finding maxima and minima.

This paper presents the contents analysis and the transcription of the text that led to the identification of the printed source that the manuscript faithfully translates from English to Latin, namely, the first thirty-four pages of the treatise entitled *The method of fluxions applied to a select number of useful problems* by Nicholas Saunderson (1682-1739).

Key words: fluxional calculus; Jesuit Imperial College; Spain; United Kingdom; 18th century; Nicholas Saunderson (1682-1739).

1. Introducción

In Methodum Fluxionum es un manuscrito anónimo de treinta y una páginas en latín que expone el cálculo de fluxiones newtoniano, antecedente de lo que actualmente se conoce como cálculo diferencial[1]. Este trabajo presenta el análisis de contenidos y la transcripción de los textos que han resultado en la identificación de la fuente impresa que el manuscrito traduce fielmente del inglés al latín, correspondiente a las treinta y cuatro primeras páginas del tratado titulado *The method of fluxions applied to a select number of useful problems* de Nicholas Saunderson (1682-1739)[2].

En el segundo apartado se sitúa el manuscrito en el marco de los estudios sobre la introducción del cálculo diferencial e integral en España y en el contexto de la contribución de los jesuitas a la actualización de la enseñanza de las matemáticas y sus aplicaciones, en consonancia con las corrientes ilustradas. También se considera la actividad matemática de Nicholas Saunderson y la difusión de sus obras a fin de caracterizar la singularidad del original inglés traducido en el manuscrito.

El tercer apartado analiza los aspectos matemáticos más relevantes de los contenidos del manuscrito no solo en cuanto a conceptualización y metodología, sino también en lo que se refiere a su aplicación en el ámbito de la mecánica. Este análisis se sustenta en la transcripción de la segunda parte del manuscrito, dedicada al algoritmo de las fluxiones y su aplicación al trazado de tangentes a curvas

1. M-RAH, 9/2806. *In Methodum Fluxionum*. Forma parte del legajo de manuscritos (22 cm.) titulado *Tratado de aritmética, álgebra y logarítmica* en el Catálogo de la Colección Cortes, Real Academia de la Historia, véase Rodríguez Villamil, A. «Índice de los manuscritos que poseyó la Biblioteca de San Isidro y fueron trasladados a la de las Cortes». *Revista de Archivos, Bibliotecas y Museos*, 1876, VI(17), p. 296, n.º 693. Su descripción detallada puede verse en el catálogo informatizado de la Real Academia de la Historia, con título *Tratado de aritmética, álgebra y logarítmica*.

2. Saunderson, Nicholas. *The method of fluxions applied to a select number of useful problems, together with the Demonstration of Mr.* Cotes*'s Forms of Fluents in the Second Part of his Logometria, the Analysis of the Problems in his Scholium Generale, and an Explanation of the principal Propositions of Sir Isaac* Newton*'s Philosophy*. London: printed for A. Millar, in the Strand; J. Whiston and B. White, in Fleetstreet; L. Davis and C. Reymers, in Fleetstreet, and against Gray's-Inn. Holborn, 1756, xxiv + 309 pp., 21 cm.

y a la determinación de máximos y mínimos, junto a la transcripción del original de Saunderson en inglés que se traduce. Ambos textos se recogen en la Tabla de contenidos[3], a fin de mostrar fehacientemente la fidelidad de la traducción manuscrita, con el detalle de los desarrollos algebraicos.

2. *In Methodum Fluxionum* en contexto

Los estudios sobre la introducción del cálculo diferencial e integral en España se remontan al año 1985, cuando Norberto Cuesta Dutari publicó su reputada *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*[4], una obra que sacó a la luz obras, autores e instituciones científicas con actividad en este campo y que todavía es referencia válida y, por tanto, consultada.

Por lo que respecta a los jesuitas su mayor contribución se encuentra en el capítulo decimosexto, íntegramente dedicado a la vida y obra de Tomás Cerdá (1715-1791), en el que publicó los resultados obtenidos junto con Eulogio Hernández Alonso sobre el *Tratado de Fluxiones* de Cerdá y su conexión con *The Doctrine and Application of Fluxions* de Simpson[5]. Las hipótesis de Cuesta Dutari y Hernández Alonso pudieron ser confirmadas[6] y el *Tratado de fluxiones* de Cerdá se encuentra ya publicado[7].

También en la década de los ochenta del pasado siglo Santiago Garma halló, también en la Real Academia de la Historia, un manuscrito de cálculo fluxional confusamente mezclado con el curso completo de matemáticas atribuido a Christian Rieger (1714-1780)[8]. Este curso contiene un manuscrito titulado *Introduccion*

3. Subapartado 3.4. Se omite la transcripción de los textos de la Introducción del tratado de Saunderson porque sus contenidos se sitúan en el ámbito de la mecánica, no en el del cálculo fluxional. Véase Saunderson (1756), *op. cit.*, pp. ix-xxiv; M-RAH, 9/2806 *op. cit.*, pp. 2-15.

4. Cuesta Dutari, Norberto. *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 1985.

5. Cuesta Dutari (1985), *op. cit.*, pp. 249-252; Simpson, Thomas. *The Doctrine and Application of Fluxions*. Londres: John Nourse, 1750.

6. Ausejo, Elena y Medrano Sánchez, Francisco Javier. «Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del Cálculo Infinitesimal en España (1717-1787)». *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 2010, 33(71), pp. 39-40, 49-53.

La confirmación fue posible gracias al uso del inventario que Agustín Udías Vallina dejó a disposición de los investigadores en la Real Academia de la Historia: *Manuscritos Matemáticos del Colegio Imperial de Madrid. Biblioteca de la Real Academia de Historia – Colección de Cortes*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2000. Posteriormente este inventario fue publicado, véase Udías, Agustín. «Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del Colegio Imperial de Madrid, 1627-1767». *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 2005, 74, pp. 369-448.

7. Cerdà, Tomàs. *Tratado de fluxiones, 1757-1759*. Transcripció, notes i introducció editorial a cura de Joaquim Berenguer Clarià. Barcelona: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, 2015.

8. Garma, Santiago. «Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX». En Sánchez Ron, José Manuel (ed.). *Ciencia y Sociedad en España*. Madrid: Ediciones El Arquero/CSIC, 1988, pp. 105-110.

fácil al Algorithmo de las fluxiones[9], un texto básico de veintinueve páginas en siete capítulos de orientación íntegramente fluxional con los siguientes contenidos[10]:

> De la naturaleza è investigacion de las fluxiones (§1-13)
> Del modo de sacar las fluxiones de las cantidades que se propongan (§14-27)
> Uso de las fluxiones para tirar las tangentes (§28-35)
> Aplicacion de las fluxiones à la solucion de problemas de maximis et minimis (§36-60)
> Del methodo inverso de las fluxiones ó de la manera de determinar las fluentes de la fluxiones dadas (§61-63)
> Uso de la fluxiones para hallar las Areas de la Curbas (§64-68)
> De la aplicación de las fluxiones para hallar el contenido de los solidos (§69-73).

Adicionalmente, la autoría material de este curso apunta al padre Miguel Benavente (n. 1726), si bien sobre la base de los cursos dictados por Rieger[11]. Desde 1761 ambos fueron profesores de matemáticas en el Colegio Imperial junto a Johann Wendlingen (1715-1790) –que ejercía desde 1750–. Cerdá se incorporó, en sustitución de Rieger, en 1765[12].

De la década de los cincuenta solo se conoce hasta el momento una obra de matemáticas procedente del Colegio Imperial, a saber, los cuatro volúmenes de los *Elementos de la Mathematica, escritos para la utilidad de los Principiantes* de Wendlingen[13]. Seis años después, en 1761, los *Diálogos de Chindulza* cuestionaban anónima pero públicamente a Wendlingen y al Colegio Imperial, el nivel y la calidad de su enseñanza de las matemáticas, la ausencia de conclusiones públicas y la carencia de manuales[14].

Las críticas se extendían también al Real Seminario de Nobles, donde la impartición de docencia relativa al cálculo diferencial e integral pudo constatarse en 1751, cuando un único estudiante participó en las primeras *Conclusiones*

9. M-RAH, 9/2792. *Introduccion fácil al Algorithmo de las fluxiones*. Forma parte del legajo de manuscritos titulado *Curso completo de matemáticas* en el Catálogo de la Colección Cortes, Real Academia de la Historia. Atribuido a Rieger en: RODRÍGUEZ VILLAMIL, 1876, VI(17), *op. cit.,* p. 296, n.º 680.

10. AUSEJO y MEDRANO SÁNCHEZ (2010), *op. cit*., p. 39.

11. AUSEJO y MEDRANO SÁNCHEZ (2010), *op. cit*., pp. 38-39; BERENGUER CLARIÀ, Joaquim. *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*. Tesi doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 2015, p. 144. No obstante, Udías cuestiona la autoría de Rieger –al que considera leibniciano por su condición de austríaco y seguidor de Christian Wolff (1679-1754)– en favor de Cerdá. Extrañamente, no aplica este criterio cuando conjetura sobre la adscripción a Rieger –o a Wendlingen– de la autoría de *In Methodum Fluxionum,* en detrimento de Cerdá –sobre el que argumenta, erróneamente, que no se le conocen textos en latín–. Véase UDÍAS (2005), *op. cit*., pp. 410, 412, 440, 417.

12. UDÍAS, Agustín. «Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía en España, 1620-1767». *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 2010, 79, p. 26.

13. WENDLINGEN, Juan. *Elementos de la mathematica, escritos para la utilidad de los principiantes*. 4 vols. Madrid: en la Oficina de Joachin Ibarra, calle de las Urosas, 1753-1756.

14. AUSEJO y MEDRANO SÁNCHEZ (2010), *op. cit*., pp. 35-36.

Matemáticas que incluyeron temas de esta materia[15], bajo la dirección del padre Esteban Terreros (1707-1782), profesor entre 1746 y 1754[16]. No obstante, el cálculo diferencial no reapareció hasta los certámenes publicados en 1760[17], en los que participaron dos únicos seminaristas bajo la dirección del padre Esteban Bramieri (n. 1720), profesor de matemáticas de dicha institución entre 1757 y 1767[18].

Es posible que Terreros trasladara la tendencia leibniciana del Seminario de Nobles al Colegio Imperial en su condición de profesor de matemáticas en esta institución (1755-1760)[19], que colaborara con Wendlingen en la culminación de sus *Elementos de la Mathematica* e incluso que trajera consigo sus propios materiales docentes[20]. No obstante, la incorporación de Rieger y Benavente parece haber mutado la tendencia leibniciana en sentido newtoniano.

Es en este contexto ilustrado de modernización académica y renovación docente y discente donde cabe situar *In Methodum Fluxionum*[21]. Los profesores de matemáticas del Colegio Imperial y del Real Seminario de Nobles necesitaban estudiar, comprender y asimilar nuevas disciplinas matemáticas para poder actualizar sus enseñanzas conforme a las expectativas sociales. Con esta finalidad exploraron diferentes fuentes –más o menos avanzadas–, tradujeron unas y se apropiaron de otras[22]. De hecho, en el manuscrito *Introduccion fácil al Algorithmo de las fluxiones*[23] se han detectado contenidos procedentes del manuscrito *In Methodum Fluxionum*, además de los tomados de Simpson[24]. De la inequívoca identificación de *The method of fluxions applied to a select number of useful problems* de Saunderson[25] como fuente del manuscrito en latín –que se estudia en este trabajo– se desprende que el manuscrito *Introduccion fácil al Algorithmo de las fluxiones* expone contenidos directamente procedentes de un texto inglés

15. Se trata de once proposiciones, de las cuales seis son de cálculo diferencial (proposiciones 30-35) y cinco de cálculo integral (proposiciones 36-40) en el §IV. Algebra. Véase *Conclusiones Mathemáticas* (1751), p. 9. En la segunda página de las *Advertencias acerca de la Funcion*, al principio del libro –sin paginar–, se menciona el «Curso Mathematico» de Christian Wolff, tal vez como referencia de las enseñanzas impartidas.

16. Udías (2010), *op. cit.*, p. 26.

17. Se trata de veinticuatro proposiciones bajo la rúbrica *Del calculo diferencial* en el capítulo dedicado al álgebra. Véase *Conclusiones Mathematicas* (1760), pp. 92-95.

18. Udías (2010), *op. cit.*, p. 26

19. Udías (2005), *op. cit.*, p. 328.

20. En la Real Academia de la Historia se conservan tres manuscritos anónimos de cálculo diferencial –de diferente mano– atribuidos a Wendlingen (M-RAH, 9/2812; M-RAH, 9/3811) y Bramieri (M-RAH, 9/2816). Véase Berenguer Clarià (2015), *op. cit.*, p. 352.

21. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*

22. Actualmente el uso del término *apropiación* en el ámbito de la historia de las matemáticas no tiene carácter peyorativo, simplemente describe una modalidad de circulación del conocimiento científico que existe desde la Edad del Bronce.

23. M-RAH, 9/2792, *op. cit.*

24. Berenguer Clarià (2015), *op. cit.*, pp. 144, 317-318; Simpson (1750), *op. cit.*

25. Saunderson (1756), *op. cit.*

junto a otros procedentes de la traducción al latín de otro texto inglés, con lo cual queda abierta la posibilidad de analizar con conocimiento de causa el resultado de la fusión de estas tres fuentes en español en cuanto a terminología, conceptos y métodos.

2.1. Nicholas Saunderson y *The method of fluxions applied to a select number of useful problems*

Nicholas Saunderson quedó ciego a la edad de un año como consecuencia de la viruela. Su formación matemática fue posible gracias al apoyo familiar, a las obras que diferentes tutores y compañeros le leyeron y a su propia destreza. En 1707, a los veinticinco años, se instaló en Christ's College, Cambridge, de la mano de su compañero Joshua Dunn y, aunque no fue admitido en el colegio, obtuvo alojamiento, acceso a la biblioteca y fue autorizado a impartir clases y ejercer como tutor de matemáticas. Tras cuatro años de éxito docente, en 1711 sucedió a William Whiston (1667-1752) en la Cátedra Lucasiana de Matemáticas hasta su muerte en 1739[26]. Saunderson fue el primer profesor que enseñó sistemáticamente el cálculo de fluxiones en la Universidad de Cambridge, una materia que llegó para quedarse[27]. Es reconocido –junto a Robert Smith (1689-1768)– por haber establecido el estudio de las matemáticas de un modo que resultó fructífero en cuanto a la formación de matemáticos en Cambridge durante la segunda mitad del siglo XVIII[28]. A este respecto cabe mencionar la preferencia de Saunderson por los métodos analíticos a los geométricos, tal vez a causa de su ceguera[29]. De hecho, en su tratado de álgebra declara que dicho tratado no solo es un curso de álgebra, sino que aspira a promover el estudio de la geometría suprimiendo o explicando todas las dificultades que, por su larga experiencia, sabe que pueden retrasar, cuando no desalentar, a los estudiantes en su progreso mediante los *Elementos*[30].

26. Los datos biográficos de Saunderson proceden de TATTERSALL, James J. «Nicholas Saunderson: The blind Lucasian professor». *Historia Mathematica*, 1992, 19(4), pp. 341-464. Una biografía escrita por sus amigos más íntimos se encuentra en SAUNDERSON, Nicholas. *The Elements of Algebra, in Ten Books: By Nicholas Saunderson LL.D. Late Lucasian Professor of the Mathematics in the University of Cambridge, and Fellow of the Royal Society. To which is prefixed, An Account of the Author's Life and Character, Collected from his oldest and most intimate Acquaintance.* 2 vols. Cambridge: Printed at the University-Press And Sold by Mrs. Saunderson at Cambridge, by John Whiston Bookseller at Boylés Head in Fleetstreet London, and Thomas Hammond Bookseller in York, 1740, vol. 1, pp. i-xix.

27. En la década de 1740 la materia fue incorporada a los exámenes de graduación *(Tripos Exam)*. Véase GUICCIARDINI, Niccolò. *The development of Newtonian calculus in Britain 1700-1800.* Cambridge: Cambridge, University Press, 1989, pp. 25, 63.

28. GUICCIARDINI (1989), *op. cit.*, pp. 23, 27.

29. GUICCIARDINI (1989), *op. cit.*, p. 24.

30. La redacción es –acaso deliberadamente– ambigua, de manera que es interpretable en términos de confrontación del aprendizaje de la geometría mediante la aplicación de sus *Elements of Algebra* con el aprendizaje de la geometría mediante los *Elementos* de Euclides. Véase SAUNDERSON

No obstante, la intensa dedicación de Saunderson a la docencia –en jornadas de 7 a 8 horas– no le dejó tiempo para publicar sus cursos. Solo cuando enfermó, en 1733, pudo su entorno convencerle de que publicara sus notas de álgebra, que consiguió culminar justo antes de su muerte en 1739 y fueron publicadas en 1740 –gracias a los esfuerzos de su mujer, su hijo y John Colson (1680-1760), su sucesor en la Cátedra Lucasiana–[31]. La circulación de la obra fue de amplio alcance geográfico y temporal: la versión abreviada publicada en 1756 fue reeditada por tercera vez en 1771[32]; también en 1756 se publicó una traducción francesa de la edición original en Ámsterdam y Leipzig[33]; en España consta la presencia de la edición original en el inventario de libros adquiridos por la Sociedad Matemática Militar de 1760, en el inventario de libros pertenecientes a la Academia militar de Barcelona (*ca*. 1760)[34] y en un documento manuscrito titulado *Estado de los libros de Marsella* redactado por Cerdá[35].

La publicación del método de fluxiones se demoró hasta 1756. Entre tanto se habían publicado, desde el fallecimiento de Saunderson, cinco manuales de cálculo de fluxiones[36] –cuatro en Londres y uno en Edimburgo–, un hecho que parece haber sido determinante para la culminación de la edición: la obra comenzaba mencionando cómo contenidos de manuscritos de Saunderson, que habían circulado prolongadamente –una práctica habitual en la época–, habían sido copiados y publicados bajo otros nombres[37].

Así pues, a diferencia del tratado de álgebra, la edición del tratado de fluxiones no fue preparada por Saunderson. No obstante, actualmente se conservan copias de estudiantes de las clases de Saunderson que permiten validar la

(1740), *op. cit.*, cuarto párrafo de la cuarta página del *Advertisement* (sin numerar) que precede al texto del tratado propiamente dicho.

31. SAUNDERSON (1740), *op. cit.* La obra fue publicada por suscripción. La lista de suscriptores ocupa ocho páginas (sin numerar) al principio de la obra, lo que indica un interés individual e institucional nada desdeñable.

32. SAUNDERSON, Nicholas. *Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra. For the use of Students at the Universities*. London: Kippax, 1756. SAUNDERSON, Nicholas. *Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra. For the use of Students at the Universities.* 3.ª ed. London: Whiston, Bowyer, & Nichols, 1771. El privilegio real y la licencia de impresión y publicación de los manuscritos de Saunderson fue concedida el 25 de mayo de 1740 a su viuda e hijos, con carácter exclusivo, por un periodo de catorce años. Véase SAUNDERSON (1740), *op. cit.*, tras la lista de suscriptores anteriormente citada.

33. SAUNDERSON, Nicholas. *Élemens d'algebre de MR Saunderson […] Traduits de l'anglois et augmentés de quelques remarques, par MR de Joncourt*. 2 vols. A Amsterdam et A Leipzig: Chez Arkstee et Merkus, 1756.

34. CUESTA DUTARI (1985), *op. cit.*, pp. 225, 236.

35. M-RAH, 9/2806, *op. cit.* Véase UDÍAS (2005), *op. cit.*, p. 399.

36. GUICCIARDINI (1989), *op. cit.*, p. 24.

37. SAUNDERSON (1756), *op. cit.*, *Advertisement* (sin numerar) que precede al texto del tratado propiamente dicho.

correspondencia del texto impreso con el curso impartido por Saunderson[38]. La obra está estructurada en tres partes: introducción al cálculo de fluxiones, integrales de Cotes y, por último y en latín, un análisis de algunas de las proposiciones de los *Principia* de Newton. La primera parte abarca, probablemente, los contenidos del curso sobre fluxiones impartido por Saunderson a estudiantes de nivel avanzado[39], cuya traducción al latín solo cubre el primer cuarto del original impreso.

3. *In Methodum Fluxionum*: análisis de contenidos

In Methodum Fluxionum comienza con una primera página, a modo de portada, que muestra la estructura del manuscrito[40]:

De Compositione et Resolutione Virium
De Descensu Corporum Gravium
De Potentijs, Earumque Indicibus
De Algorithmo Fluxionum

Las tres primeras rúbricas se corresponden con la «Introducción» con la que Saunderson comienza su método de las fluxiones propiamente dicho[41].

En la primera explica la composición y determinación de las fuerzas –remitiéndose expresamente al primer corolario de las leyes del movimiento de Newton–[42] mediante una única proposición, ilustrada con el paralelogramo de fuerzas[43] y seguida de tres corolarios.

La segunda rúbrica expone en siete proposiciones, dos escolios y un total de diecisiete corolarios la caída de los graves a partir de la segunda ley de Newton. Define los conceptos de fuerza motriz y aceleración; establece las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme y del movimiento uniformemente acelerado, y, por último, aborda específicamente la atracción terrestre, el movimiento de caída libre de los cuerpos y el descenso sobre un plano inclinado[44].

38. Guicciardini (1989), *op. cit.,* pp. 24, 170, 181; Tattersall (1992), *op. cit.*, pp. 163, 367.

39. Guicciardini (1989), *op. cit.*, pp. 24-25, 170; Tattersall (1992), *op. cit.*, pp. 364, 367. Tomando como referencia el manuscrito MS Add 3444 de la Universidad de Cambridge, datado en 1738, esta primera parte se encuentra impresa en Saunderson (1756), *op. cit.*, pp. vii-128.

40. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 1. A falta de paginación del manuscrito, las páginas referenciadas en este artículo se han numerado desde esta «portada».

41. Véase el subapartado 3.4. Tabla de contenidos. No se transcriben los textos de estas rúbricas porque sus contenidos se sitúan en el ámbito de la mecánica, no en el del cálculo fluxional. No obstante, la fidelidad de la versión latina al texto inglés es total.

42. Actualmente conocido como ley de composición de fuerzas.

43. Véase Lámina I, Fig. Q. Se trata de una construcción geométrica que se resuelve mediante la proposición cuarta del primer libro de los *Elementos* de Euclides.

44. Véase Lámina I, Fig. R. Esta figura reaparece como parte de la figura 5 en el último ejemplo resuelto en el manuscrito, véase M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 29; Saunderson (1756, pp. 13-17).

La «Introducción» finaliza con una breve presentación de la notación y operativa algebraica con potencias, cuyas fluxiones calculará en *De Algorithmo Fluxionum*.

3.1. De Algorithmo Fluxionum

Bajo esta rúbrica el manuscrito incluye, además de las páginas que Saunderson dedica a la exposición del algoritmo de las fluxiones –con encabezado de página *Of the Algorithm of Fluxions*–, las dedicadas a dos de los tres apartados que el tratado de Saunderson aborda bajo el encabezado de página *The Direct Method of Fluxions exemplified*, a saber, *Of the Method of drawing Tangents* y *Of the Doctrine de Maximis et Minimis*. El manuscrito no solo omite el tercer apartado –dedicado a las series infinitas–, sino que además se interrumpe bruscamente al principio de la demostración del sexto y último ejemplo planteado en la sección de máximos y mínimos, con lo cual el cálculo integral y sus aplicaciones no fueron abordados[45].

La exposición del algoritmo comienza, como no podría ser de otra manera, con la definición del concepto de fluxión de una cantidad que fluye o aumenta en un intervalo de tiempo cualquiera –finito o infinitamente pequeño–, como el aumento de dicha cantidad en el instante inicial. Inmediatamente después un escolio aclara que si la cantidad fluye con velocidad uniforme, el incremento de la cantidad en el intervalo de tiempo dado será igual a la fluxión anteriormente definida. Pero si la cantidad no fluye uniformemente, es decir, en el caso de que la velocidad en el instante final del tiempo no sea igual a la del instante inicial, el incremento adquirido en el intervalo de tiempo no será igual a su fluxión anteriormente definida, sino que variará más o menos según sea el intervalo de tiempo mayor o menor. No obstante, si el intervalo de tiempo es infinitamente pequeño, aunque las velocidades al principio y al final del intervalo de tiempo no serán iguales en términos matemáticos, la diferencia entre ellas será infinitamente pequeña en comparación con la velocidad total y, por tanto, puede ser ignorada en virtud de su insignificancia cuantitativa considerando solo las razones finitas entre fluxiones. En consecuencia, este incremento y la fluxión anteriormente definida pueden ser considerados equivalentes y el movimiento de la cantidad en un tiempo tan pequeño puede ser considerado uniforme[46].

Este inicio del manuscrito explica la necesidad de iniciar el método de las fluxiones con una introducción principalmente dedicada a la exposición de las

45. El manuscrito traduce fielmente al latín un 10 % de los contenidos del tratado de Saunderson. El análisis del texto que se desarrolla a continuación puede seguirse con la transcripción del tratado de Saunderson en inglés y del manuscrito en latín en el subapartado 3.4. Tabla de contenidos, que muestra fehacientemente no solo la fidelidad de la traducción manuscrita, sino también el detalle de los desarrollos algebraicos.

46. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 16-17.

bases de la mecánica: el movimiento y la velocidad son conceptos intuitivos y penetrantes para abordar desde un punto de vista docente el cálculo infinitesimal, un nuevo instrumento matemático que daba acceso a la mecánica y astronomía del universo newtoniano y permitía resolver problemas difíciles sobre curvas, superficies y volúmenes. No obstante, los matemáticos más avanzados eran conscientes de que el concepto de infinitamente pequeño era más que dudoso desde el punto de vista matemático, pero no por ello dejó de ser utilizado durante los más de ciento cincuenta años que transcurrieron hasta la correcta formulación del concepto de límite. Este es el caso de Saunderson, un newtoniano firmemente convencido e intensamente dedicado a la actividad docente que, una vez definido el concepto de fluxión, opta por una exposición algebraica del cálculo de fluxiones tras enunciar en dos corolarios la fluxión de una constante y la fluxión de la suma y la resta.

Así, ofrece una sencilla demostración algebraica como prueba convincente del lema que establece que el producto de cantidades que fluyen uniformemente fluye con velocidad uniformemente acelerada. No obstante, la demostración vuelve a poner en escena la insignificancia cuantitativa del último término de los incrementos que crecen en progresión aritmética en intervalos de tiempo infinitamente pequeños ($\dot{v}\dot{x}$, $3\dot{v}\dot{x}$, $5\dot{v}\dot{x}$)[47].

Este resultado se aplica a la determinación de la fluxión del producto, que establece por comparación del incremento del producto de las fluentes en un momento inmediatamente anterior al instante inicial con el incremento del producto de las fluentes en un momento inmediatamente posterior al instante inicial, de donde infiere que la fluxión del producto vx en el instante dado debe ser precisamente $v\dot{x} + x\dot{v}$. A mayor abundamiento, insiste de nuevo en la insignificancia cuantitativa del término $\dot{v}\dot{x}$ en el incremento adquirido por el producto de dos cantidades fluentes en un tiempo infinitamente pequeño, de manera que tanto el incremento como la fluxión del producto serán $v\dot{x} + x\dot{v}$. Incrementando entonces el tiempo de un infinitamente pequeño a un momento finito, $v\dot{x}$ y $x\dot{v}$ aumentarán con el tiempo conforme a la definición de fluxión y, por tanto, $v\dot{x} + x\dot{v}$ seguirá siendo la fluxión del producto vx.

Este es el primer caso del primer problema, al que siguen los casos segundo y tercero para el producto de tres y cuatro variables y un corolario para el producto de una constante por una variable[48].

A partir de la fluxión del producto el segundo problema obtiene algebraicamente la fluxión de la potencia x^n para cualquier cantidad fluente x cuyo índice n

47. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 17-18. El concepto de infinitamente pequeño aplicado a estos incrementos instantáneos es asimilable intuitivamente, en un contexto algebraico, en términos de aritmética decimal: el producto de una cantidad cualquiera por una cantidad comprendida entre cero y uno disminuye la cantidad inicial.

48. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 18-20.

sea entero o fraccionario, positivo o negativo –entero positivo en el primer caso, entero positivo o negativo en el segundo caso, fraccional en el tercer caso–[49]. Como corolario de estos resultados halla la fluxión de cualquier cociente o fracción $\frac{x}{y}$, con lo que finaliza la exposición del algoritmo de las fluxiones[50].

3.2. De Methodo Ducendi Tangentes

Esta sección presenta el método de trazado de las tangentes mediante la resolución de un único problema[51] general, a saber, el trazado de la tangente a cualquier punto de una curva dada con un determinado eje. Con ello se adentra *de facto* en el terreno de la geometría analítica con toda naturalidad, iniciando la explicación de la solución del problema con la construcción de una figura con un eje horizontal[52] y dos líneas ordenadas[53] paralelas. Seguidamente expresa en términos algebraicos la determinación del segmento PT, resultante de la prolongación de la cuerda *Mm*, que obtiene mediante un razonamiento geométrico clásico, basado en la proporcionalidad entre los dos triángulos semejantes que se forman en la figura (RM*m*, PMT)[54]. Por último, introduce una concepción figurativa del movimiento continuo y paralelo a sí mismo de la ordenada *mp* hasta llegar a MP –o al menos a una distancia infinitamente pequeña de MP– al tiempo que la línea MT gira sobre el punto M de manera que siempre pasa por el punto *m*. Entonces es evidente que la recta MT será la tangente a la curva en el punto M y la recta PT la subtangente. Por tanto, expresando las magnitudes geométricas en términos analíticos, AP = x, MP = y implica Pp = $\dot{x}$, RM = $\dot{y}$, siendo la subtangente TP = $y\dot{x}$ / $\dot{y}$.

En conjunto, una base geométrica clásica, un uso adecuado de las herramientas algebraicas en un entorno geométrico y una visión cinemática de los elementos geométricos –curvas, rectas y puntos– permitían adentrarse en el nuevo campo de las aplicaciones del método de las fluxiones. Los tres ejemplos expuestos en esta sección tratan las secciones cónicas –parábola, hipérbola y elipse–, cuyas respectivas subtangentes se obtienen aplicando el algoritmo explicado con un grado creciente de complejidad[55]. De hecho, cabe destacar que las cónicas eran un tema históricamente considerado en el nivel de la matemática superior, sobre el que en 1707 se había publicado un novedoso tratado póstumo[56] que es citado en los dos

49. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 20-21.
50. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 21-22.
51. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 22-23. La numeración de este problema continúa del apartado anterior.
52. El eje de las abscisas (x) en terminología actual, véase Lámina I, Fig. 1.
53. Obviamente paralelas, se trata de las coordenadas cartesianas verticales.
54. RM es a R*m* (o P*p*) como MP a PT, luego $PT = MP \times \frac{Pp}{RM}$.
55. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 23-24.
56. L'HÔSPITAL, Guillaume François Antoine de. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez*. Paris: Chez

primeros ejemplos. Consecuentemente, los ejemplos segundo y tercero[57] ponen de manifiesto la necesidad de estar familiarizado con el tratamiento analítico de las secciones cónicas para interpretar correctamente los resultados obtenidos de la aplicación del algoritmo.

3.3. De Doctrina Maximorum et Minimorum

Se establece en esta sección la obtención de máximos y mínimos también mediante un problema[58] general que indica cómo determinar cuándo una fluente alcanza un máximo o un mínimo. Partiendo del hecho de que una fluxión es afirmativa[59] o negativa según esté la cantidad en aumento o disminución, se deduce que cuando la cantidad deviene un máximo o un mínimo su fluxión será nula[60]. Por tanto, el procedimiento para determinar los máximos y mínimos consiste en hallar la fluxión de la cantidad en general y suponer que es nula –igualándola a cero–, de manera que la solución de esta ecuación establecerá el valor de la variable en el que la fluente alcanzará un valor máximo o mínimo. Los seis ejemplos que siguen se suceden con un grado creciente de complejidad que muestra que este procedimiento algebraico no exime del conocimiento geométrico o mecánico de los casos que se estudian[61].

El primer ejemplo[62] resuelve la división de un número en dos partes cuyo producto sea máximo mediante el planteamiento algebraico del producto de las dos partes como $x(a - x) = ax - x^2$, donde a es la cantidad que se quiere dividir en dos partes y x la parte que se resta de a. El resultado de la aplicación del procedimiento expuesto determina que es la mitad del número a la cantidad que maximiza el producto de su división en dos partes. Este ejemplo admite una interpretación en términos de geometría clásica, puesto que el producto $x(a - x)$ representa la superficie de un rectángulo, de manera que el resultado obtenido indica que el mayor rectángulo que puede construirse cortando un segmento a en dos partes es el cuadrado cuyo lado es la mitad de a. Este resultado es también

la veuve de Jean Boudet et Jean Boudet Fils, 1707. 2.ª ed. Paris: Chez Montalant, 1720. Traducción al inglés en L'Hospital (1723).

57. Véase Lámina I, Fig. 3, Fig. 2.

58. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 25. De nuevo la numeración de este problema continúa la iniciada en el apartado anterior.

59. Se utiliza el término *afirmativa*, no *positiva*. Véase M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 25; Saunderson (1756, p. 11).

60. Se utiliza la expresión *igual a nada*. Véase M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 25; Saunderson (1756, p. 11).

61. Así ocurre todavía actualmente: la dificultad docente y discente del cálculo diferencial –y sobre todo del integral– no reside tanto en el ámbito de los algoritmos como en el de la capacidad para plantear los problemas.

62. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 25.

solución propia de la ecuación $x(a - x) = x^2$, lo cual indica que el segmento a queda dividido en *media y extrema razón* en su punto medio.

La construcción geométrica del concepto de media y extrema razón, cuya definición es la tercera del libro sexto de los *Elementos* de Euclides, se muestra en la undécima proposición del segundo libro de dichos *Elementos* y también en la trigésima del sexto. Definición y construcciones se utilizan en el cuarto libro para construir el pentágono regular y el polígono regular de quince lados[63]; también en el libro decimotercero para construir la cara pentagonal del dodecaedro regular[64] y para analizar los lados del icosaedro y el dodecaedro[65].

De este modo, un sencillo ejemplo de aplicación del algoritmo de las fluxiones muestra la fiabilidad del nuevo método en cuanto a compatibilidad con el rigor de la geometría euclídea junto a la facilidad operativa que el uso del nuevo algoritmo proporcionaba a la resolución de problemas.

En el segundo ejemplo[66] la fluxión del producto $x^2(a - x)$ es $2ax\dot{x}^2 - 3x^2\dot{x}$, cuyas raíces $x = \frac{2}{3}a$, $x = 0$ maximizan y minimizan el producto respectivamente. En el tercer ejemplo[67] las raíces de la fluxión de $x^3 - 18x^2 + 96x$ son $x = 4$, $x = 8$. En este caso se explica que la fluxión $xx = 12x - 32$ es afirmativa para $x = 0$, por lo que la cantidad inicialmente planteada irá en aumento hasta $x = 4$ –donde alcanzará un máximo–, para disminuir posteriormente hasta $x = 8$ –donde será un mínimo– y luego aumentará *ad infinitum*.

Una vez explicado el uso del algoritmo de las fluxiones para el cálculo de máximos y mínimos, los siguientes ejemplos muestran su aplicación en el ámbito de la mecánica. Así, el cuarto ejemplo[68] presenta un problema de balística, a saber, hallar el máximo alcance del tiro de una bala –o bola–[69] con una velocidad dada. Para ello se representa la dirección del proyectil ABC lanzado desde A con una fuerza que por sí sola hubiera llevado de A hasta B (AB = r) mientras el proyectil hubiera descendido desde A, por su sola gravedad, un espacio s conocido; tanto r como s son cantidades constantes, puesto que la velocidad del proyectil en A y la fuerza de la gravedad se suponen iguales para cualquier dirección ABC. Sea la línea horizontal AD el alcance del proyectil, trácense las perpendiculares DC y BE y complétese el paralelogramo ACDF. Entonces es evidente que mientras el proyectil describe la curva AGD, solo por su propia fuerza se habría desplazado de A a

63. Proposiciones 10 a 12 y 16.
64. Proposición 17.
65. Estos dos sólidos platónicos se construyen en las proposiciones decimosexta y decimoséptima de este mismo libro tras mostrar en la primera proposición una caracterización adicional de la división de un segmento en media y extrema razón, a saber, que el cuadrado del segmento mayor sumado a la mitad del segmento total es cinco veces el cuadrado de la mitad [del segmento total].
66. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 25-26.
67. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 26.
68. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 27-28. Véase Lámina I, Fig. 4.
69. *Globus* en el texto latino.

C y solo por su propia gravedad de A a F, porque la gravedad actuando sobre una línea paralela a CD ni favorece ni impide el movimiento de A hacia la línea CD, y lo mismo ocurre con la fuerza del proyectil y la línea DF. Y como espacios por los que caen los graves partiendo del reposo son proporcionales a los cuadrados de los tiempos, CD = $s \times \frac{AD^2}{AE^2}$. Pero por semejanza de triángulos CD = $BE \times \frac{AD}{AE}$, luego igualando ambos productos se obtiene el alcance AD = $\frac{AE \times BE}{s}$, que será máximo cuando $AE \times BE$ sea un máximo. Haciendo BE = x, AE = y, la fluxión del producto xy a resolver igualando a 0 es $\dot{x}y + \dot{y}x$, para lo cual es necesario expresar $\dot{y}$ en función de las variables restantes. A tal efecto recurre al teorema de Pitágoras, $xx + yy = rr$; donde r es una cantidad constante, de manera que la fluxión es $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$, $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$, $\dot{x}y + \dot{y}x = \frac{rr\dot{x} - 2xx\dot{x}}{y}$. Finalmente, de $\frac{rr\dot{x} - 2xx\dot{x}}{y} = 0$ obtiene $xx = \frac{1}{2}rr$, $yy = \frac{1}{2}rr$, $x = y$. El alcance será máximo para un ángulo de tiro de 45°, y ciertamente se obtiene el mismo alcance para un ángulo de tiro dado y para su complementario[70].

El quinto ejemplo[71] propone hallar la situación más cómoda de un plano que gira alrededor de un eje por un viento cuyo rumbo está en la dirección de dicho eje. En términos modernos, su solución se basa, correctamente, en el hecho de que la fuerza producida por la acción del viento es proporcional al cuadrado de la velocidad del viento y depende del ángulo que forman el vector AE, normal a la superficie del plano oblicuo CD, y el vector AB, que representa la velocidad del viento[72]. Aplicado al caso de un viento cuyo rumbo esté en la dirección del eje en torno al que gira el plano, obtiene el coseno del ángulo de la inclinación del plano respecto de su eje que maximiza el efecto del viento, de donde resulta un ángulo de inclinación igual a 54°44'.

En este ejemplo se utiliza –sin previa definición– el término *conatus*, uno de los conceptos que tanto newtonianos como leibnizianos utilizaron con diferentes significados. En el caso que aquí se plantea la solución se obtiene determinando AE^2 x EB como el *conatus* del plano para girar sobre su eje, que es la cantidad que se debe maximizar. Por tanto, el término se ubica en la órbita de Newton, que concibe el *conatus* como un caso particular de fuerza, a saber, «una fuerza impedida o una fuerza en tanto en cuanto es resistida»[73].

70. Porque $2(90° - \alpha) = sen\ 2\alpha$.

71. M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, pp. 29-30.

72. Siendo la fuerza absoluta del viento sobre el plano CD cuando está directamente expuesto a su corriente, la fuerza del mismo viento sobre el plano oblicuo CD disminuirá en la proporción de AB a AE o AB^3 a AE x AB^2; y como el número de partículas que actúan sobre el plano oblicuo CD disminuye por la oblicuidad en la proporción de DC a DG, o AB a AE, o AE x AB^2 a AE^2 x AB, la fuerza del viento sobre el plano oblicuo CD debe representarse por AE^2 x AB. Véase M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 30; SAUNDERSON (1756, p. 16); Lámina I, Fig. 5.

73. Véase SELLÉS GARCÍA, Manuel A. «Impacto instantáneo y acción continua en la mecánica de Newton». *ÉNDOXA: Series Filosóficas*, 1999, 11, pp. 9-80, p. 21. Este artículo es una excelente muestra

Hasta aquí llega el manuscrito, que se interrumpe bruscamente en la décima línea del sexto y último ejemplo[74], en el que se plantea la construcción de un tronco de cono de base y altura dada cuyo movimiento en la dirección de su eje, con su extremo menor contra las partes de un fluido uniforme, sufra la menor resistencia de él. Como corolario resulta que el tronco BFGC[75] de un cono encuentra menos resistencia que un cono con la misma base y altura.

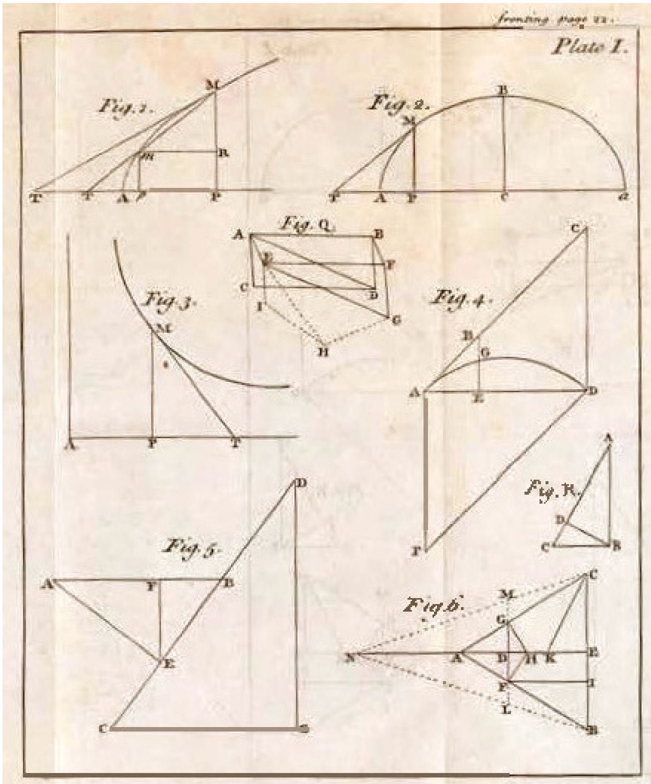

Lámina I[76].

de las dificultades conceptuales a las que se enfrentaron los creadores de la mecánica newtoniana, de las que se derivan los esfuerzos de comprensión que afronta la historia de la ciencia en este ámbito.

74. SAUNDERSON (1756), *op. cit.*, pp. 17-18; M-RAH, 9/2806, *op. cit.*, p. 31.

75. Véase Lámina I, Fig. 6.

76. SAUNDERSON (1756), *op. cit.*, entre pp. 22 y 23. Téngase en cuenta que en el texto en latín las figuras –idénticas a las que aquí se muestran– no se encuentran en una lámina aparte –sino en el margen derecho del texto en el que se usan– y solo están numeradas consecutivamente las cuatro primeras del 1 (*i* en el manuscrito) al 4. Por otra parte, la figura 3 se cita antes de la 2 en SAUNDERSON

3.4. Tabla de contenidos[77]

SAUNDERSON (1756)	*IN METHODUM FLUXIONUM* (M-RAH, 9/2806)
An Introduction (pp. ix-xxiv).	Introductio (pp. 2-15).
I. *Of the* COMPOSITION *and* RESOLUTION *of* FORCES (pp. ix-xi) [Lámina I, Fig. Q].	I. De Compositione et Resolutione Virium (pp. 2-4, *Fig. i*) [Lámina I, Fig. Q].
II. *Of the* DESCENT *of* HEAVY BODIES (pp. xii-xxi) [Lámina I, Fig. R].	II. De Descensu Corporum Gravium (pp. 4-13, *Fig. 2*) [Lámina I, Fig. R].
III. *Of* POWERS *and their* INDEXES (pp. xxii-xxiv).	III. De Potentijs, earumque Indicibus (pp. 14-15).
Of the ALGORITHM of FLUXIONS (pp. 1-8).	De Algorithmo Fluxionum (pp. 16-21).
• DEFINITION. Let A B represent any moment of time, whether finite or infinitely small it matters not, terminated by the two instants A and B: Let x be the value of any flowing or growing quantity at the instant A, whose velocity at that instant is such, that if it was to flow during the whole moment A B with this velocity, it would gain a certain increment	• DEFINITIO. Repræsentet AB momentum temporis sive finite sive infinite parvum, nihil refert, terminatum duobus instantibus A, et B: Sit x valor alicujus fluentis aut crescentis quantitatis in instanti A, cujus ea sit pro hoc instanti velocitas, ut, si flueret durante integro momento AB hac ipsa velocitate, acquireret certum incrementum expressum per $\dot{x}$; erit tum

(1756), *op. cit.*, p. 10. Por tanto, la correspondencia entre las ocho figuras del texto inglés con el latino es: Q = 1, R = 2, 1 = 3, 3 = 4, 2 = fig. p. 24, 4 = fig. p. 27, 5 = fig. p. 29, 6 = fig. p. 31.

77. Para facilitar la lectura, en la transcripción de los textos la letra ese larga –también conocida como s alta– ha sido sustituida por la s redonda. En la transcripción del texto inglés se ha omitido además el uso de inicial mayúscula en los sustantivos. La transcripción del texto latino es totalmente literal –erratas incluidas–, por su valor para el estudio del uso del latín en la enseñanza de las matemáticas en España en el siglo XVIII. En este texto se usa *i* minúscula para escribir el número 1.

represented by $\dot{x}$; then is this quantity $\dot{x}$ called the *Fluxion* of x at the instant A, when the value of the flowing quantity was x (p. 1).	hæc quantitas $\dot{x}$ dicta Fluxio de x in instanti A, quando valor fluentis quantitatis erat x (p. 16).
• SCHOLIUM. From this definition it appears, that if x flows uniformly, its increment gained in the time A B will be the same as its fluxion above defined: But if x does not flow uniformly, i.e. if its velocity at the instant B be not the same as its velocity at the instant A, then its increment gained in the time A B will not be the same with its fluxion above defined, but will differ more or less from it, according as the time A B is greater or less: But if the time A B be infinitely small, then though the velocity of x at the instant B be not the same, mathematically speaking, with the velocity at the instant A; yet the difference being infinitely small in respect of the whole velocity, it may safely be neglected, where the finite ratios of fluxions are only considered; and so this increment and the fluxion above defined may be taken for one another, i.e. the quantity x, for so small a time, may be looked upon as flowing uniformly (pp. 1-2).	• SCHOLIUM. Ex hac definitione apparet, incrementum ipsius x tempore AB acquisitum, si x fluat uniformiter, esse id ipsum ac ejus fluxionem supra definitam: sin x non fluat uniformiter, id est, si ejus velocitas in instanti B non sit eadem, ac ejus velocitas in instant A, tum ejus incrementum acquisitum tempore AB non erit idem cum ejus fluxione supra definita, sed differet plus minusve ab ea, prout tempus AB maius, minusve erit: quodsi tamen tempus AB sit infinite parvum, tum, licet velocitas ipsius x in instanti B non sit eadem, mathematice loquendo, cum velocitate in instanti A, differentia tamen infinita parva existente respectu totius velocitatis, ea tuto negligi potest quando finite rationes fluxionum solummodo considerantur. Atque hoc sensu incrementum et fluxio superius descripta unum pro altero accipi potest, id est, quantitas x, in tam parvo tempore considerari potest tanquam fluens uniformiter (pp. 16-17).
• COROLL. I. The fluxion of a constant quantity is nothing (p. 2).	• COROL. I. Fluxio quantitatis constantis est nulla (p. 17).
	• COROL. II. Fluxio totius æquat fluxionem

- COROLL. II. The fluxion of the whole equals the fluxion of all its parts. Thus if r be a constant quantity, and x, y, z flowing ones, the fluxion of $r + x + y - z$ will be $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z}$.

  N.B. When different fluxions are compared, they are all supposed to be generated uniformly in the same time.

  Note also, that a constant equality of fluents always implies an equality of fluxions, but not vice versa, unless the fluents be generated in equal times (p. 2).

- LEMMA. If two quantities v and x, arithmetically expressed, be supposed to flow uniformly, the product of their multiplication will not flow uniformly, but with a velocity equally accelerated; that is, its continual increments gained in successive equal times will not be equal, but in arithmetical progression (p. 3).

  DEMONSTRATION. Let the time AD be divided into the equal parts A B, B C, C D, and let v and x be the values of the flowing quantities at the instant A; then because these quantities are supposed to flow uniformly, their values will be at the instant B, $v + \dot{v}$ and $x + \dot{x}$; at the instant C, $v + 2\dot{v}$ and $x + 2\dot{x}$; at the instant D, $v + 3\dot{v}$, and $x + 3\dot{x}$: Therefore their product will

omnium suarum partium. Ita, ut si r sit constans quantitas, et x, y, z fluentes, fluxio $r + x + y - z$ sit $\dot{x} + \dot{y} - \dot{z}$.

N.B. Quando diversa fluxiones comparantur, supponuntur omnes esse productæ uniformiter eodem tempore.

Nota etiam, a constanti æqualitate fluentium involvi semper æqualitatem fluxionum, sed no vice versa, licet fluentes gignantur æqualib. temporibus (p. 17).

- LEMMA. Si dua quantitates v et x, arithmetice expressa, suponantur fluere uniformiter, productum ex earum multiplicatione non fluet uniformiter, sed cum velocitate æqualiter accelerata; id est, ejus incrementa continua acquisita in successivis æqualibus temporibus non erunt æqualia, sed in progressione arithmetica (p. 17).

  DEMONSTRATIO. Concipiatur tempus AD divisum in partes æquales AB, BC, CD, sintque v et x valores quantitatum fluentium in instanti A; erunt tum earum valores, eoquod hae quantitates supponantur fluere uniformiter, in instanti B sequentes $v + \dot{v}$ et $x + \dot{x}$; in instanti C, $v + 2\dot{v}$ et $x + 2\dot{x}$; in instanti D, $v + 3\dot{v}$, et $x + 3\dot{x}$: adeoque earum productum erit, pro be, at the instant A, vx; at the instant B, $vx + v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$; at the instant C, $vx + 2v\dot{x} + 2\dot{v}x + 4\dot{v}\dot{x}$; at the instant D, $vx + 3v\dot{x} + 3\dot{v}x + 9\dot{v}\dot{x}$. Subtract now the product at the instant A from the product at the instant B, and there will remain $v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$ for the increment gained by the product in the time A B. Subtract again the product at the instant B from the product at the instant C, and there will remain $v\dot{x} + \dot{v}x + 3\dot{v}\dot{x}$ for the increment gained in the time B C: Lastly, subtract the product at the instant C from the product at the instant D, and there will remain $v\dot{x} + \dot{v}x + 5\dot{v}\dot{x}$ for the increment gained in the time C D: Therefore the continual increments, gained by the products in the successive equal times A B, B C, C D, will not be equal, but in arithmetical progression[78] (pp. 3-4).

N.B. If the times A B, B C, C D, be infinitely small, the quantities $\dot{v}\,\dot{x}$, $3\,\dot{v}\,\dot{x}$, $5\,\dot{v}\,\dot{x}$ will be infinitely less than other parts of the increments; as will easily appear by comparing them[79] (p. 4).

instanti A, vx; pro instanti B, $vx + v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$; pro instanti C, $vx + 2v\dot{x} + 2\dot{v}x + 4\dot{v}\dot{x}$; pro instanti D, $vx + 3v\dot{x} + 3\dot{v}x + 9\dot{v}\dot{x}$. Subtrahatur jam productum instantis A a producto instantis B, remanebit tum $v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$ pro incremento acquisito per productum in tempore AB. Subtrahatur rursum productum instantis B a producto instantis C, et remanebit huc $v\dot{x} + \dot{v}x + 3\dot{v}\dot{x}$ pro incremento acquisito in tempore BC: tandem subtrahatur productum instantis C a producto instantis D, et remanebit $v\dot{x} + \dot{v}x + 5\dot{v}\dot{x}$ pro incremento acquisito in tempore CD; quapropter continua incrementa acquisita per producta in successivis æqualibus temporibus AB, BC, CD non erunt æqualia, sed in progressione arithmetica (pp. 17-18).

N.B. Si tempora AB, BC, CD fuerint infinite parva, quantitates $\dot{v}\,\dot{x}$, $3\,\dot{v}\,\dot{x}$, $5\,\dot{v}\,\dot{x}$ erunt infinite minora, quam cetera partes incrementorum; ut facile apparebit, si comparentur inter se (pp. 17-18).

78. Efectivamente, los incrementos crecen en progresión aritmética de diferencia $d = 2$.

79. Esta nota llama la atención sobre la insignificancia cuantitativa de los incrementos respecto de la suma de los dos términos precedentes ($v\dot{x} + x$) a fin de utilizar a continuación este lema para determinar la fluxión del producto.

- PROBLEM I. To find the fluxion of the product arising from the continual multiplication of any number of flowing quantities (p. 4).

CASE I. Let v and x be the values of two flowing quantities at any given instant of time, and let these quantities be supposed to flow uniformly as in the last Lemma; then it is plain that a moment before the given instant, their values were $v - \dot{v}$, and $x - \dot{x}$, and their product $vx - v\dot{x} - \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$; and therefore the increment gained by the product in that moment was $v\dot{x} + \dot{v}x - \dot{v}\dot{x}$: But the increment gained by the product in an equal moment immediately following the given instant was found to be $v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$ and this latter increment, by the above-quoted *Lemma*, exceeds as much the true fluxion of the product as the other wants of it; therefore the true fluxion of the product vx at the instant of time that the factors are v and x is $v\dot{x} + \dot{v}x$. Q. E. I. (p. 4).

Otherwise thus. The increment gained by the product in the time A B (see the *Lemma*) is $v\dot{x} + x\dot{v} + \dot{v}\,\dot{x}$. Let this time A B be infinitely small;

- PROBLEMA I. <u>Invenire fluxionem producti orti ex continua multiplicatione alicuius numeri fluentium quantitatum quarumcumque</u> (p. 18).

CASUS I. Sint v et x valores duarum fluentium quantitatum pro dato instante temporis, supponantur que hae quantitates fluere uniformiter, ut in superior lemmate; erit tum manifestum, esse uno momento ante datum instans earum valores $v - \dot{v}$, et $x - \dot{x}$, earumque productum $vx - v\dot{x} - \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$: sed incrementum acquisitum per productum in æquali momento immediate sequenti ad datum instans deprehendebatur esse $v\dot{x} + \dot{v}x + \dot{v}\dot{x}$; et hoc posterius incrementum, per supra positum <u>Lemma</u> tantum excedi veram fluxionem producti, quantum alterum ab ea deficit; quare vera fluxio producti vx pro instanti temporis, quo factores sont v et x, est $v\dot{x} + x\dot{v}$. q.e.i. (pp. 18-19).

<u>Aliter Sic</u>. Incrementum acquisitum per productum in tempore AB /vide <u>Lemma</u>/ est $v\dot{x} + x\dot{v} + \dot{x}\,\dot{v}$. Sit hoc tempus AB inifinite parvum; evidens hinc est, quantitatem $\dot{v}\,\dot{x}$, utpote

then it is evident that the quantity $\dot{v}\,\dot{x}$, being infinitely less than the rest, may be neglected for its insignificancy; so that both the increment and the fluxion of the product will be $v\dot{x} + x\dot{v}$. Increase now again the time A B from an infinitely small to a finite moment, and $v\dot{x}$ and $x\dot{v}$ will increase with the time, as is evident from the definition already given of a fluxion: Therefore $v\dot{x} + x\dot{v}$ will still be the fluxion of the product vx (p. 5).

CASE II. Let there now be three flowing quantities, v, x and y, and the fluxion of the product vxy, or of the product vx x y will be the fluxion of v multiplied into y together with the fluxion of y multiplied into vx, by the last case: But the fluxion of vx was there found to be $v\dot{x} + x\dot{v}$, and this multiplied into y gives $vy\dot{x} + xy\dot{v}$; and the fluxion of y being multiplied into vx gives $vx\dot{y}$; therefore the whole fluxion of the product vxy is $vx\dot{y} + vy\dot{x} + xy\dot{v}$ (p. 5).

CASE III. In like manner, if there be four flowing quantities, the whole fluxion of the product $vxyz$, or the product vxy x z will be found to be $vxy\dot{z} + vxz\dot{y} + vyz\dot{x} + xyz\dot{v}$ Q. E. I. (p. 5).

infinite minorem quam reliquum, posse negligi propter suam inutilitatem, ita, ut ambo, incrementum et fluxio producti sint $v\dot{x} + x\dot{v}$. Increscat nunc rursus tempus AB ab infinite parvo ad finitum momentum, et $v\dot{x}$ et $x\dot{v}$ accrescent cum tempore, uti manifestum est ex definitione fluxionis jam data: quare $v\dot{x} + x\dot{v}$ erit adhuc fluxio producti vx (p. 19).

CASUS II. Sit jam 3 fluentes quantitates v, x, et y, et fluxio producti vxy, sive producti vx x y erit fluxio de vx multiplicata per y una cum fluxione de y multiplicata per vx, per ultimum casum: Sed fluxion de vx erat ibi inventa $v\dot{x} + x\dot{v}$, quod multiplicatum per y dat $vy\dot{x} + xy\dot{v}$, et fluxio de y multiplicata per vx dat $vx\dot{y}$; ergo tota fluxio producti vxy est $vx\dot{y} + vy\dot{x} + xy\dot{v}$ (p. 19).

CASUS III. Simili modo, si fuerint 4 fluentes quantitates, tota fluxio producti $vxyz$, sive producti vxy x z deprehendetur esse $vx\dot{y} + vy\dot{x} + xy\dot{v}$. q.e.i. (pp. 19-20).

COROLL. Si a fuerit constans quantitas, et v variabilis, fluxio producti av erit $a\dot{v}$ (p. 20).

- PROBLEMA II. Invenire fluxionem potentia

CC BY-NC-ND

COROLL. If *a* be a standing quantity, and *v* a variable one, the fluxion of the product *av* will be $a\dot{v}$ (p. 6).

- PROBLEM II. To find the fluxion of any power of any flowing quantity, whether the index of the power be integral or fractional, affirmative or negative (p. 6).

CASE I. Let *v*, *x*, *y* and *z*, in the last problem, be supposed all equal to one another; then will $vx = x^2$, and its fluxion $v\dot{x} + x\dot{v}$ will be $2\dot{x} \times x$; therefore the fluxion of x^2 will be $2\dot{x} \times x$, or $2\dot{x} \times x^{2-1}$. Again, $vxy = x^3$, and its fluxion $vx\dot{y} + vy\dot{x} + xy\dot{v}$ will be $3\dot{x} \times x^2$; therefore the fluxion of x^3 will be $3\dot{x} \times x^2$, or $3\dot{x} \times x^{3-1}$. Again, $vxyz = x^4$; therefore the fluxion of x^4 will be $4\dot{x} \times x^{4-1}$. And *universally*, the fluxion of x^m will be $m\dot{x} \times x^{m-1}$, provided the index *m* be integral and affirmative (p. 6)

CASE II. Let it now be required to find the fluxion of x^{-m} or $\frac{1}{x^m}$: In order to which make $\frac{1}{x^m} = z$; then will $z \times x^m = 1$; and taking the fluxions on both sides, we have $\dot{z} \times x^m + zm\dot{x} \times x^{m-1} = 0$, (for the fluxion of 1 is

quantitatis fluentis, sive index hujus potentia sit integralis, sive fractionalis, affirmativus, sive negativus (p. 20).

CASUS I. Sint *v*, *x*, *y* et *z*, ex priori problemate supposita æqualis inter se; erit tum $vx = x^2$, et ejus fluxio $v\dot{x} + x\dot{v}$ erit $2\dot{x} \times x$; quamobrem fluxio de x^2 erit $2\dot{x} \times x$, seu $2\dot{x} \times x^{2-i}$. Rursus $vxy = x^3$, ejusque fluxio $vx\dot{y} + vy\dot{x} + xy\dot{v}$ erit $3\dot{x} \times x^2$; quamobrem fluxio de x^3 erit $3\dot{x} \times x^2$, sive $3\dot{x} \times x^{3-i}$. Rursus $vxyz = x^4$; quamobrem fluxio de x^4 erit $4\dot{x} \times x^{4-i}$. Et universaliter fluxio ipsius x^m erit $m\dot{x} \times x^{m-i}$, ex supposito, quod index *m* sit integralis et affirmativus (p. 20).

CASUS II. Esto nunc invenienda fluxio de x^{-m} seu $\frac{1}{x^m}$. In ordine ad hoc fiat $\frac{1}{x^m} = z$; erit tum $z \times x^m = 1$; atque fluxionem ex utraque parte constituendo habemus $\dot{z} \times x^m + zm\dot{x} \times x^{m-i} = 0$, (est enim fluxio de i = 0); quamobrem $\dot{z} \times x^m = -zm\dot{x} \times x^{m-i} = \frac{-m\dot{x}xx^{m-i}}{x^m} = -m\dot{x} \times x^{-i}$; proinde $\dot{z} = -m\dot{x} \times \frac{x^{-i}}{x^m} = -m\dot{x} \times x^{-m-i}$. Ut facile pateat ex his 2 ultimis casibus, si index

0); therefore

$\dot{z} \times x^m = -zm\dot{x} \times x^{m-1} = \frac{-m\dot{x}\times x^{m-1}}{x^m} = -m\dot{x} \times x^{-1}$;

therefore $\dot{z} = -m\dot{x} \times \frac{x^{-1}}{x^m} = -m\dot{x} \times x^{-m-1}$. So that from these two last cases it is easy to perceive, that if the index *m* be a whole number, whether affirmative or negative, the fluxion of x^m will be $m\dot{x} \times x^{m-1}$ (pp. 6-7).

CASE III. Let it now be required to find the fluxion of $x^{\frac{m}{n}}$. To do this, let $x^{\frac{m}{n}} = z$; then will $z^n = x^m$, from the fifth Observation of *Powers* and their *Indexes*; therefore $n\dot{z} \times z^{n-1} = m\dot{x} \times x^{m-1}$, from the two foregoing cases; therefore (dividing equals by equals) we have $n\dot{z} \times z^{-1} = m\dot{x} \times x^{-1}$, and $\dot{z} \times z^{-1} = \frac{m}{n}\dot{x} \times x^{-1}$. Multiply both sides by *z*, and we have $\dot{z}$ (or the fluxion sought) $= \frac{m}{n}\dot{x} \times z\, x^{-1} = \frac{m}{n}\dot{x} \times x^{\left(\frac{m}{n}\right)-1}$. So that at last it appears whether the index be affirmative or negative, integral or fractional, the fluxion[80] of x^m will be $m\dot{x}$ x x^{m-1} (p. 7).

m sit numerus integer, sive affirmativus sive negativus, esse tum fluxionem de x^m sequentem $m\dot{x}$ x x^{m-i} (pp. 20-21).

CASUS III. Sit nunc invenienda fluxio de $x^{\frac{m}{n}}$. Ad hoc præstandum, sit $x^{\frac{m}{n}} = z$; erit tum $z^n = x^m$, per 5[tam] observationem potentiarum, et indicum earum; quapropter $n\dot{z} \times z^{n-i} = m\dot{x} \times x^{m-i}$, per 2 casus precedentes; quapropter (dividendo æqualia per æqualia) habemus $n\dot{z} \times z^{-i} = m\dot{x} \times x^{-i}$, et $\dot{z} \times z^{-i} = \frac{m}{n}\dot{x} \times x^{-i}$. Multiplicetur utrumque membrum per *z*, et habemus $\dot{z}$ (sive fluxionem quæsitam) $= \frac{m}{n}\dot{x} \times z\, x^{-i} = \frac{m}{n}\dot{x} \times x^{\left(\frac{m}{n}\right)-i}$. Ita ut in fine appareat fluxionem, sive index fuerit affirmativus, sive negativus, integralis aut fractionalis, esse, inquam, fluxionem de x^m sequentem $m\dot{x} \times x^{m-i}$ (p. 21).

COROL. I. Fluxio hujus quantitatis $\frac{x^m \times y^n}{z^p}$, seu $x^m \times y^n \times z^{-p}$, per duo præcedentia problemate erit $m\dot{x}$

80. Errata: *xm* en lugar de *xm* en ambos textos.

Coroll. I. The fluxion of this quantity $\frac{x^m \times y^n}{z^p}$, or $x^m \times y^n \times z^{-p}$, by the two foregoing problems, will be $m\dot{x}$ $\times\, x^{m-1} \times y^n \times z^{-p} + n\dot{y} \times y^{n-1} \times x^m \times z^{-p} - p\dot{z} \times z^{-p-1} \times x$ (p. 7).	$\times\, x^{m-i} \times y^n \times z^{-p} + n\dot{y} \times y^{n-i} \times x^m \times z^{-p} - p\dot{z} \times z^{-p-i} \times$ (p. 21).
Coroll. II. The fluxion of any fraction $\frac{x}{y}$ will be $\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{yy}$; as will appear, either from the foregoing *Corollary*, by considering $\frac{x}{y}$ as $x^{-1} \times y^{-1}$; or rather thus: Make $\frac{x}{y} = z$; then will $yz = x$, and $y\dot{z} + z\dot{y} = \dot{x}$; therefore $y\dot{z} = \dot{x} - z\dot{y} = \dot{x} - \frac{x\dot{y}}{y} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y}$; therefore $\dot{z}$ (or the fluxion sought) $\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{yy}$ (p. 8).	Corol. II. Fluxio fractionis $\frac{x}{y}$ erit $\frac{\dot{x}y - \dot{y}x}{yy}$; quemadmodum hoc apparet vel ex præcedenti <u>corollario</u>, considerando $\frac{x}{y}$ tanquam $x^{-i} \times y^{-i}$; vel potius sic: pone $\frac{x}{y} = z$; erit tunc $yz = x$, et $y\dot{z} + z\dot{y} = \dot{x}$; quare $y\dot{z} = \dot{x} - z\dot{y} = \dot{x} - \frac{x\dot{y}}{y} = \frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{y}$; quare $\dot{z}$ (sive fluxio quæsita) $\frac{y\dot{x} - x\dot{y}}{yy}$ (pp. 21-22).
The Direct Method of Fluxions exemplified (pp. 8-25).	
Of the Method of drawing Tangents (pp. 8-11).	<u>De Methodo Ducendi</u> Tangentes (pp. 22-24).
• Prob. III. Fig. 1. It is required to draw a *Tangent* to any given point M as of any given curve, as A M, whose axis is A P (p. 8)[81].	• Prob. III. Fig. 3. <u>Quæritur</u> Tangens <u>ducenda ad datum punctua M data curva, ut AM, cujus axis</u>

81. Véanse las figuras citadas en ambos textos en Lámina I.

SOLUTION. Draw two parallel ordinates M P, *m p*; draw also the chord M *m*, and produce it till it meets the axis (produced also if need be) in T, and complete the parallelogram P *p m* R; then will the triang1e R M *m* be similar to the triangle P M T, and we shall have R M to R *m* (or P*p*) as M P to P T; whence P T = M P$\times \frac{\mathrm{P}\,p}{\mathrm{R\,M}}$. Let now the ordinate *m p* be conceived to move always parallel to itself, till at last it arrives at M P, or at least to come infinitely near it; and during this whole motion, let the line M T be supposed to turn so upon the point M, as always to pass through *m*; then it is plain that the line M T will at last become a tangent to the curve in the point M, and the line P T a *Subtangent*; and if we call A P, x, MP, y; we shall have at last P$p = \dot{x}$, R M = $\dot{y}$, and the subtangent T P = $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$. Compute therefore, from the nature of the curve, the quantity $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, and you will have the subtangent P T: As in the following examples (pp. 8-9).

EXAMPLE I. Supposing all things as before, let A M be the common parabola, whose parameter let be p; then we shall have $px = y^2$, and $p\dot{x} = 2y\dot{y}$,

sit AP (p. 22).

SOLUTIO. Duc duas parallelas ordinatas MP, *mp*; duc etiam chordam M*m*, eamque produc, usque dum occurrat axi (huic quoque producto, si necessum fuerit) in T, et comple parallelogrammum P*pm*R; erit tunc triamgulum RM*m* be simile triangulo PMT, et habebimus RM ad R*m* (vel P*p*) sicut MP ad PT; unde PT = MP $\times \frac{\mathrm{P}\,p}{\mathrm{R\,M}}$. Concipiatur nunc ordinata *mp* moveri semper parallele ad se ipsam; usque dum tandem pertingat in MP, vel tandem infinite prope accedat illuc; et durante hoc toto motu supponatur linea MT ita verti circa punctum M, ut semper transeat per *m*; erit hinc manifestum, lineam MT fore tandem tangentem curva in puncto M, et lineam PT fore Subtangentem; Atque si dicamus AP, x, MP, y; habebimus denique P$p = \dot{x}$, RM = $\dot{y}$, et subtangentem T P = $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$. Computa proinde ex natura curva, quantitatem $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, et habetis Subtangentem PT: ut in sequentibus exemplis (pp. 22-23).

and $\dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{p}$, and $y\dot{x} = \frac{2y^2\dot{y}}{p}$, and $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ or the subtangent PT, $= \frac{2yy}{p} = \frac{2px}{p} = 2x = 2$ AP; as we find in the *Conic Sections* (p. 9).

EXAMPLE II. Let the nature of the curve be expressed by this equation $px^m = y^n$; Then we shall have $pm\dot{x} \times x^{m-1} = n\dot{y} \times y^{n-1}$; and $m\dot{x} \times x^{-1} = n\dot{y} \times y^{-1}$, or $\frac{m\dot{x}}{x} = \frac{n\dot{y}}{y}$: Hence $m\dot{x} = \frac{nx\dot{y}}{y}$, and $my\dot{x} = nx\dot{y}$, and $\frac{my\dot{x}}{\dot{y}} = nx$, and $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, or PT, $= \frac{nx}{m} = \frac{n}{m} \times$ AP. If $px = y$; then will P T = A P, and A M will be a right line, because $x : y :: 1 : p$.

Call the *Power* of the *Hyperbola* p, and (by *L' Hospital's* Conic Sect. *Art*. 101.) $\frac{p}{x} = y$; but $\frac{p}{x} = p \times \frac{1}{x} = p \times x^{-1}$; therefore[82] $px^{-1} = y^1$. Then will P T (Fig. 3.) = − A P, the sign − signifying that P T the subtangent does not lie on the same side the ordinate P M with the abscisse (sic) A P. This is agreeable to *Conic Sections* Art. 107, where C answers to our A, H to our P, D to our

EXAMPLUM I. Supponendo ommia ut ante, sit AM vulgaris Parabola, cujus parameter dicatur p; habebimus tunc $px = y^2$, et $p\dot{x} = 2y\dot{y}$, et $\dot{x} = \frac{2y\dot{y}}{p}$, et $y\dot{x} = \frac{2y^2\dot{y}}{p}$, et $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$ seu subtangens PT, $= \frac{2yy}{p} = \frac{2px}{p} = 2x = 2$ AP; sicut habemus in Conicis Sectionibus (p. 23).

EXAMPLUM II. Exprimatur natura curva hac æquatione $px^m = y^n$; erit tum $pm\dot{x} \times x^{m-i} = n\dot{y} \times y^{n-i}$; et $m\dot{x} \times x^{-i} = n\dot{y} \times y^{-i}$, or $\frac{m\dot{x}}{x} = \frac{n\dot{y}}{y}$, seu $\frac{m\dot{x}}{x} = \frac{n\dot{y}}{y}$: Hinc $m\dot{x} = \frac{nx\dot{y}}{y}$, et $my\dot{x} = nx\dot{y}$, et $\frac{my\dot{x}}{\dot{y}} = nx$ et $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, seu PT, $= \frac{nx}{m} = \frac{n}{m} \times$ AP. Si $px = y$; erit tunc PT = AP, et AM erit linea recta, eo quod x: $y :: i : p$.

Dic potentiam Hyperbolæ p, et (per Hospitalij Conic. Sect. Art. 101.) $\frac{p}{x} = y$; but $\frac{p}{x} = p \times \frac{1}{x} = p \times x^{-i}$; quare $px^{-i} = y^i$. Erit PT = − AP (Fig. 4.), intelligendo per signum −, Subtangentem P T non sitam esse ex eodem

82. Errata: y_1 en lugar de y^1 en el texto inglés; no se reproduce en el texto en latín.

T. If $\frac{p}{x^3} = y^4$; then $p \times x^{-3} = y^4$, and P T = $-\frac{4}{3}$ A P (pp. 9-10).

EXAMPLE III. Fig. 2. Let A M B a be an ellipse: Call A C, t; C B, c; C P, x; M P, y: Then we shall have, from the the (sic) nature of the ellipse, $cc - \frac{ccxx}{tt} = yy$, and consequently $\frac{-2c^2x\dot{x}}{tt} = 2y\dot{y}$; therefore $\dot{x} = -\frac{tt}{c^2x} \times y\dot{y}$, and $y\dot{x} = \frac{tt}{c^2x} \times y^2\dot{y}$, and $\frac{y\dot{x}}{\dot{y}}$, or PT, = $-\frac{tt}{c^2x} \times y^2$; the sign $-$signifying only that the subtangent P T is not now to be on the same side of the ordinate with P C or x, but on the contrary side. Further, since $y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{c^2t^2 - c^2x^2}{t^2} = \frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2}$, if instead of y^2 in the former value of P T, we substitute its equal $\frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2}$, and we shall now have P T = $\frac{tt}{c^2x} \times \frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2} = \frac{tt - xx}{x}$; and if to this value of P T we add C P or x, we shall have C T = $\frac{tt}{x}$; whence we shall have the following proportion for finding the point T, *viz.* C P : CA :: CA : CT

latere, ordinatæ PM cum abscissa AP. Est hoc conforme *Conic: Sectionum* Articulo i07, ubi C respondet nostro A, H nostror P, D nostro T. Si $\frac{p}{x^3} = y^4$; erit tum[83] $p \times x^{-i} = y^4$, et P T = $-\frac{4}{3}$ AP (pp. 23-24).

EXAMPLUM III. Sit AMB Ellipsis: dicatur AC, t; CB, c; CP, x; MP, y; erit tum ex natura Ellipsis, $cc - \frac{ccxx}{tt} = yy$, et per consequens $\frac{-2c^2x\dot{x}}{tt} = 2y\dot{y}$; unde[84] $\dot{x} = -\frac{tt}{c^2x} \times y^2$; intelligendo per signum $-$ solum hoc, subtangentem PT jam non esse sitam ex eadem parte Ordinatæ, cum PC, seu x, sed in parte contraria. Ulterius, quia $y^2 = c^2 - \frac{c^2x^2}{t^2} = \frac{c^2t^2 - c^2x^2}{t^2} = \frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2}$, si loco y^2 in priori valore de PT substituamus ei æqualem $\frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2}$, et habebimus jam PT = $\frac{tt}{c^2x} \times \frac{c^2}{t^2} \times \overline{t^2 - x^2} = \frac{tt - xx}{x}$; atque si huic valori de PT addamus CP, seu x, habebimus C T = $\frac{tt}{x}$; Ex quo inferre licet per sequentem

83. Errata en texto en latín: x^{-i} en vez de x^{2}
84. Errata en texto en latín: y^2 en lugar de $y\dot{y}$ en el último factor de la ecuación.

(pp. 10-11).	propotionem, ad inveniendum punctumT, videlicet. CP : CA :: CA : CT (p. 24, contiene figura sin numerar idéntica a la del texto en inglés).
Of the Doctrine de MAXIMIS et MINIMIS (pp. 11-18).	De Doctrina Maximorum et Minimorum (pp. 25-31).
• PROB. IV. To determine when a flowing quantity becomes a *Maximum* or a *Minimum* (p. 11). SOLUTION. As the fluxion of every flowing quantity is *affirmative* or *negative*, according as that quantity is upon the *Increase* or *Decrease*, it follows, that when a quantity becomes a *Maximum* or a *Minimum*, its Fluxion will be equal to nothing. Take therefore the fluxion of such a quantity in general, and then suppose it equal to nothing, and the equation will determine the case wherein it is a *Maximum* or a *Minimum* (p. 11). EXAMPLE I. Let it be required to divide a given number, as *a*, into two such parts that the product of the multiplication of those parts may be the greatest possible (p. 12).	• PROB. IV. Determinare, quando fluens quantitas siat Maximum aut Minimum (p. 25). SOLUTIO. Cum fluxio cujusvis quantitatis fluentis sit affirmativa vel negativa, pront ea quantitas fuerit in incremento vel decremento, sequitur, dum quantitas sit Maximum vel Minimum, fluxionem ejus sieri æqualem nihilo. Accipe igitur fluxionem talis quantitatis in genere, eamque pone æqualem nihilo, et æquatio determinabit casum, quo ea erit Maximum, vel Minimum (p. 25). EXAMPLUM I. Petatur numerus datus a ita dividi in 2 partes, ut productum ex multiplicatione earum partium sit possibilium maximum (p. 25).

Here putting x and $a - x$ for the two parts, their product will be $ax - xx$, whose fluxion[85] $a\dot{x} - 2x\dot{x}$ (I suppose) = *, and find $x = \frac{1}{2}a$; which shews that the product of the two parts will be greatest when they are equal to each other (p. 12).

EXAMPLE II. Let it be required to divide a given number, as a, into two such parts, that one part being multiplied into the square of the other may make the greatest product possible (p. 12).

Here I put x for one part, and xx for its square, and consequently $a - x$ for the other part; then will the product be $ax^2 - x^3$ whose fluxion $2ax\dot{x} - 3x^2\dot{x}$ (I suppose) = *; and then find x = * or $\frac{2}{3}a$, which shews that if the part to be squared be $\frac{2}{3}$ of the whole, and consequently the other part $\frac{1}{3}$, the product will be the *greatest* possible: And since in the foregoing equation, x was also found = *, that shews, that if x be less than $\frac{2}{3}a$, the product will be *least* when x (or the part to be squared) =

Ponendo hic x et $a - x$ pro istis duabus partibus, erit earum productum $ax - xx$, cujus fluxionem $a\dot{x} - 2x\dot{x}$ (pono) = *, et reperio $x = \frac{1}{2}a$; id quod ostendit, productum duarum partium fore maximum, quando hæ fuerint inter se æquales (p. 25).

EXAMPLUM II. <u>Sit dividendus numerus datus, ut a, in tales duas partes, ut si una pars ducatur in alterius quadratum det productum possibilium maximum</u> (p. 25).

Hic pono x for pro una parte, et xx pro ejus quadrato, et per consequens $a - x$ pro parte altera; erit igitur productum $ax^2 - x^3$ cujus fluxionem $2ax\dot{x} - 3x^2\dot{x}$ (pono) = *; atque tum invenio x = * vel $\frac{2}{3}a$, unde videmus productum fore possibilium <u>maximum</u>, si pars quadranda fuerit $\frac{2}{3}$ part totius, proinde pars altera $\frac{1}{3}$: Cumque præcedens æquatio dederit etiam, x = *, indicis id erit, si x fuerit minus quam $\frac{2}{3}a$, productum fore <u>minimum</u>, quando x (vel pars quadranda) = * (pp. 25-26).

85. El asterisco equivale a un cero en ambos textos.

* (p. 12).

EXAMPLE III. It is required to determine when the following quantity becomes a *Maximum* or a *Minimum*, viz. $x^3 - 18\,x^2 + 96x$ (p. 12).

Here we have $3x^2\dot{x} - 36x\dot{x} + 96\dot{x}$ = *, and consequently $xx - 12x + 32$ = *, whence $x = 4$ or 8; therefore the quantity proposed is a *Maximum* in one case, and a *Minimum* in the other. But to determine distinctly to which case the *Maximum* belongs, it must be observed, that the fluxion of the quantity proposed is either affirmative or negative, according as the quantity $xx - 12x + 32$ is so: But this quantity when x = * is affirmative; therefore the quantity proposed is upon the increase till $x = 4$, when it becomes a *Maximum*; after this it decreases till $x = 8$, in which case it becomes a *Minimum*, then it increases *ad infinitum* (p. 13).

EXAMPLE IV. To find the greatest random of a ball shot with a given velocity. Fig. 4. (pp. 13-15).

Let A B C be the direction of the ball, and let the force given it at A be such as alone would have carried it from A to B, whilst the ball by its gravity alone would have descended from A through a known space as *s*; then will A B and *s*

EXAMPLUM III. <u>Esto determinandum, quando sequens quantitas siat</u> Maximum vel Minimum, <u>videlicet</u> $x^3 - 18\,x^2 + 96x$ (p. 26).

Hic habemus $3x^2\dot{x} - 36x\dot{x} + 96\dot{x}$ = *, et per consequens $xx - i2x + 32$ = *, unde $x = 4$ vel 8; quamobrem quantitas proposita in uno casu est <u>maximum</u>, et in altero <u>minimum</u>. Ad determinandum autem distincte, ad quem casum <u>Maximum</u> referatur, observari debet, fluxionem quantitatis proposita esse vel affirmativam, vel negativam, prout ut talis fuerit quantitas $xx - i2x + 32$: Sed hoc quantitas est affirmativa, quando x = *; propterea quantitas proposita est in incremento usque dum $x = 4$, quando id sit <u>maximum</u>; post hoc decrescit usque in $x = 8$, quo casu sit <u>Minimum</u>, et dehinc cresat <u>ad infinitum</u> (p. 26).

EXAMPLUM IV. <u>Invenire amplitudinem maximam globi data velocitate projecti</u> (pp. 27-28, fig. p. 27 sin numerar idéntica a la del texto en inglés).

Sit ABC directio globi, sitque vis ei impressa in A talis, ut sola eum deferret ex A in B, dum globus sola sua gravitate descenderet ex A per spatium cognitum, ut *s*; erunt adeo AB et *s* be constant quantities, because the velocity of the ball at A, and the force of gravity are supposed the same, whatever be the direction A B C. Let the horizontal line A D be the random of the ball, and draw D C and B E perpendiculars to A D. Lastly compleat the parallelogram A C D F. This done, it is evident that whilst the ball describes the curve line A G D, it would, by its projectile force alone have been carried from A to C, and by its gravity alone from A to F: For the force of gravity acting in a line parallel to C D will neither help nor hinder the motion of the ball towards that line C D; and the same may also be said with respect to the projectile force, and the line D F; whence it follows, that whilst the ball by its projectile force alone would have passed through the space A C, by its gravity alone it would have descended through the space A F or C D; and since the spaces through which heavy bodies fall from rest are as the squares of the times, it follows that as the square of the time wherein the ball by its projectile force alone would have described the space A B, is to the square of the time wherein the same would have described the space A C (i.e. as $\overline{AB}^2$ is to $\overline{AC}^2$ or as $\overline{AE}^2$ to $\overline{AD}^2$) so is *s* to C D; therefore C D = $s \times \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2}$.

But as A E is to A D so is B E to C D; therefore

constantes quantitates, eo quod velocitas globi in A, et vis gravitatis supponantur eadem, quecunque fuerit directio ABC. Esto Horizontalis linea AD amplitudo globi, ducanturque DC et BE perpendiculares ad AD. Tandem compleatur Parallelogrammum ACDF. Quo præstito manifestum erit, eo tempore, quo globus describit curvam lineam AGD, eundem sola sua vi projectili delatum fuisse ab A in C, et sola gravitate sua delatum fuisse ab A in F: Vis eruia gravitatis agens in linea parallela ad CD nec juvat, nec impedit motum globi versus lineam CD; idemque dici potest in ordine ad vim projectilem, et lineam DF; unde sequitur globum cum is sola sua vi projectili percurrisset spatium AC, sola sua vi gravitis spatium AF vel CD decursurum fuisse; cumque spatia, per quæ gravia corpora labuntur aliunde sint ut quadrata temporum, sequitur, esse: ut quadratum temporis, quo globus sola vi sua projectili descripsisset spatium AB, ad quadratum temporis, quo idem descripsisset spatium AC (<u>id est</u> as $\overline{AB}^2$ ad $\overline{AC}^2$, vel ut $\overline{AE}^2$ ad $\overline{AD}^2$) ita *s* ad CD; Quare CD = $s \times \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2}$.

Verum ut AE ad AD ita BE ad CD; igitur CD etiam = $BE \times \frac{AD}{AE}$; ergo $BE \times \frac{AD}{AE} = s \times \frac{\overline{AD}^2}{\overline{AE}^2}$; ergo

C D is also equal to $BE \times \frac{AD}{AE}$; therefore $BE \times \frac{AD}{AE} = s \times \frac{AD^2}{AE^2}$; therefore AD = $\frac{AE \times BE}{s}$; therefore the random AD will be the greatest when $\frac{AE \times EB}{s}$ becomes a *Maximum*, i.e. when $AE \times EB$ becomes a *Maximum*.

Call[86] A B, *r*; B E, *x*; A E, *y*; and in the present case we shall have $\dot{x} \times y + \dot{y} \times x = *$·But $xx + yy = rr$ a constant quantity; therefore $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = *$; therefore $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$; therefore $\dot{y} \times x = -\frac{xx\dot{x}}{y}$; therefore $\dot{x} \times y + \dot{y} \times x = \dot{x} \times y - \frac{xx\dot{x}}{y} = \frac{yy\dot{x} - xx\dot{x}}{y} = \frac{rr\dot{x} - 2xx\dot{x}}{y} = *$; therefore[87] $rr - 2x^2 = *$; therefore $xx = \frac{1}{2}rr$, and $yy = \frac{1}{2}rr$; therefore $x = y$: Therefore to give the ball the greatest random possible, the piece must be elevated to an angle whose sine and co-sine are equal, i.e. to an angle of forty-five degrees. Q. E. I.

SCHOLIUM. If the piece be elevated to an angle

AD = $\frac{AE \times BE}{s}$; ergo amplitudo AD erit maxima, quando $\frac{AE \times EB}{s}$ sit Maximum, id est. quando $AE \times EB$ sit Maximum.

Dic AB, *r*; BE, *x*; AE, *y*; eritque pro casu præsenti $\dot{x} \times y + \dot{y} \times x = *$·Sed $xx + yy = rr$ est constans quantitas, igitur; $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = *$; igitur $\dot{y} = -\frac{x\dot{x}}{y}$; igitur $\dot{y} \times x = -\frac{xx\dot{x}}{y}$; igitur $\dot{x} \times y + \dot{y} \times x = \dot{x} \times y - \frac{xx\dot{x}}{y} = \frac{yy\dot{x} - xx\dot{x}}{y} = \frac{rr\dot{x} - 2xx\dot{x}}{y} = *$; igitur $rr - 2x^2 = *$; igitur $xx = \frac{1}{2}rr$, et $yy = \frac{1}{2}rr$; igitur $x = y$. ad procurandam igitur globo amplitudinem maximam possibilem, machina elevari debet ad angulum, cujus sinus et cosinus sunt æquales, id est, ad angulum 45 graduum. q.e.i.

SCHOLIUM. Si machina elevetur ad angulum supra 45 , amplitudo globi erit eadem, quam si elevata fuisset sub angulo tanto inferiore infra

86. Nótese que en este caso ambos textos toman la letra *x* para designar la ordenada, para la abscisa la letra *y*.
87. Errata: x_2 en lugar de x^2 en el texto inglés; no se reproduce en el texto en latín.

of above 45 degrees, the random of the ball will be the same as if it was elevated to an angle as much less than 45 degrees; because the quantity $\frac{AE \times EB}{s}$ will be the same in both cases (p. 15).

EXAMPLE V. Fig. 5. To find the most commodicus situation of a plane to be turned about an axis by a wind whose course is in the direction of that axis (pp. 13-17).

Let both the plane of this page, and the axis of motion, supposed at some distance under it, be imagined in an horizontal position. Let the line A B be parallel to the axis, and let C B D be the plane in question, in a position perpendicular to the horizon, insisting with its lower edge upon the axis of its motion, and represented by its intersection with the plane of the paper in the line C D. Let A E be perpendicular to C D, so that the angle A B E may be the inclination of the plane to its axis. Let E F be perpendicular, and C G be parallel to the line A F B; and let D G be perpendicular to G C. Let $\overline{AB}^3$or the cube of AB represent the absolute force of the wind upon the plane CD, when directly exposed to its current; then will the force of the same wind upon the oblique plane C D be diminished in the proportion of A B to A E or of to $\overline{AB}^3$ to

45 , qua quantitas $\frac{AE \times EB}{s}$ in utro q [utroque] casu eadem erit (p. 28).

EXAMPLUM V. Invenire situm maxime commodum plani convertendi circa axem, ope venti, cujus fluxus est in directione ejus axis (pp. 29-30, fig. p. 29 sin numerar idéntica a la del texto en inglés).

Concipiatur utrumque, et planum hujus pagina, et axis motus, quem supponamus ad aliquam distantiam infra illud, esse in positione horizontali. Sit linea AB parallela ad axium, sitque CBD planum in quæstione, in positione perpendicular ad horizontem, insistens inferiori sua acie axi sua motionis, atque repræsentatum in sua interesectione cum plano chartæ in linea CD. Sit AE perpendicularis ad CD ita ut angulus ABE sit inclinatio plani ad suum axim. Sit EF perpendicularis, et CG parallela ad lineam AFB; sitque DG perpendicularis ad GC. Repræsentet $\overline{AB}^3$, seu cubus de AB vim absolutam venti adversus planum CD, dum ejus currenti expositur directe; erit tum vis ejusdem venti adversus planum obliquum CD diminuta, in proportione ipsius AB ad AE vel ad $\overline{AB}^3$ to $AE \times \overline{AB}^2$; dico <u>ejusdem venti</u>: Cum vero numerus

$AE \times \overline{AB}^2$; I say of the *same* wind: But the number of particles now acting upon the oblique plane C D will by its obliquity be diminished in the proportion of D C to D G, or of A B to A E, or of to $AE \times \overline{AB}^2$ to $\overline{AE}^2 \times AB$; wherefore upon the whole matter, the force of the wind upon the oblique plane C D must be represented by $\overline{AE}^2 \times AB$. By this force the plane C D, if left to itself would move not directly before the wind, as when directly exposed to its current, but in the direction of the line AE: This, I say, will be the case if the plane was absolutely at liberty; but, in the present case, the plane is restrained from being moved in any other direction but that of F E perpendicular to A B, by which motion it carries round its axis; and the *conatus* of the plane to move in the direction A E will be to its *conatus* to move in the direction F E, as A E to E F, or as A B to B E, or as $\overline{AE}^2 \times AB$ to $\overline{AE}^2 \times EB$: Therefore the *conatus* of the plane to move round its axis must be represented by $\overline{AE}^2 \times EB$, and will be a *Maximum* when, supposing A B constant, the quantity $\overline{AE}^2 \times EB$ is so.

particularum nunc agat adversus obliquam planum CD, diminuetur is ob suam obliquitatem in proportione ipsius DC ad DG, vel AB ad AE, vel to ad $\overline{AE}^2 \times AB$ ad $\overline{AE}^2 \times AB$; quamobrem quoad totam materiam, vis venti adversus obliqum planum CD debet exprimi per $\overline{AE}^2 \times AB$. Hoc vi planum CD sibi met relictum non moveretur directe a vento, nisi quando ejus currenti direct expositum esset, sed in directione linea AE: erit is, dico, casus quo planum erat absolute liberam: sed in casu presenti planum retinetur, neque moveri potest in alia directione quam FE, perpendiculari ad AB, qua motione circa axem suum defertur; eritque <u>conatus</u> plani ad motum secundum directionem AE, ad suum <u>conatum</u> ad motum secundum directionem FE, sicut AE ad EF, vel sicut AB ad BE, vel sicut $\overline{AE}^2 \times AB$ ad $\overline{AE}^2 \times EB$: Quare <u>conatus</u> plani ad motum circa suum axim exprimi debet per $\overline{AE}^2 \times EB$, eritque <u>Maximum</u>, quando supposita AB constante, et quantitas $\overline{AE}^2 \times EB$ talis fuerit.

Call A B, r; B E, x; and we shall have[88] $\overline{AE}^2 \times EB = r^2x - x^3$; whose fluxion $rr\dot{x} - 3xx\dot{x}$ (in this case) $=*$; whence $rr - 3xx = *$, and $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$: Therefore the effect of the wind will be the greatest when the plane is inclined to its axis in an angle whose co-sine is to the radius as 1 to $\sqrt{3}$; i.e. in an angle of 54 *Deg*. 44. *Min*. This is the case when the plane is in a situation perpendicular to the horizon; and it will be the same in all others, provided that the angle which the plane makes with its axis be the same. Q.E.I.

EXAMPLE VI. Fig. 6. To construct the frustum of a cone, of a given base and altitude, which moving according to the direction of its axis, with its smaller end against the parts of an uniform fluid shall suffer the least resistance possible from it (pp. 17-21).

Let the isosceles triangle A B C represent a cone generated by its revolution about its axis AD E. Let F D G be parallel to the base; let F H and G H be perpendiculars to the sides A B and A C respectively; and let F I be parallel to A E

Dic A B, r; B E, x; et erit $\overline{AE}^2 \times EB = r^2x - x^3$; cujus fluxio $rr\dot{x} - 3xx\dot{x}$ (hoc casu) $=*$; Unde $rr - 3xx = *$, et $x = \frac{r}{\sqrt{3}}$: Quare effectus venti maximus erit, quando planum inclinatur ad suum axim sub angulo, cujus cosinus est ad radium ut *i* ad $\sqrt{3}$; id est, sub angulo 54 gradum, 44 min. Est is casus, quando planum est in situ perpendiculari ad Horizontem; idemque valebit pro omnibus alijs, modo angulus, quem efficit planum cum suo axi, idem fuerit. q.e.i.

EXAMPLUM VI. Construere frustum conicum data basis et altitudinis, quod, si moveatur secundum directionem sui axis, parte sui termine adversus partes fluidi uniformis, minimam ab eo resistentiam patiatur (p. 31, contiene figura sin numerar idéntica a la del texto en inglés).

Sit ABC triangulum Isosceles, quod repræsentet conum generatum sua revolutione

88. La ecuación que sigue –en ambos textos– se deriva de la perpendicularidad del segmento AE al CD, de modo que AE es uno de los catetos del triángulo rectángulo AEB; por tanto $\overline{AE}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{EB}^2 = r^2 - x^2$.

cutting the base B C in I. This supposed, let us first inquire what effect a set of particles moving in the direction A E would have upon the cone when at rest: In order to which, let the point F be supposed to be struck by one of those particles, and let A H represent the absolute … (pp. 17-18).

circa axem suum ADE. Sit FDG basi parallela, et FH, item GH perpendiculares respective ad latera AB et AC; et sit FI parallela ad AE, secans basim BC in I. Hoc supposito inquiratur primo, quem effectum habiturus sit cumulus particularum motus directiones AE adversus conum ---: Hac consideratione supponatur punctum F impeti ab una harum particularum, et repræsentet AH vim absolutam (p. 31).

4. Conclusiones

In Methodum Fluxionum, una traducción fidedigna de un tratado de fluxiones en inglés publicado en 1756, acota documentalmente la antigüedad de la introducción de la enseñanza del cálculo infinitesimal de tendencia newtoniana en el Colegio Imperial. Aunque el manuscrito no contiene información alguna –ajena al texto traducido– que permita especular sobre su procedencia y autoría, su influencia en *Introduccion fácil al Algorithmo de las fluxiones* señala a Rieger y Benavente. Por otra parte, la identificación de la fuente de este manuscrito amplía el horizonte de estudio de los manuscritos matemáticos de álgebra y mecánica que se conservan en la Real Academia de la Historia. De hecho, no es descartable que el legajo que contiene el manuscrito estudiado pueda aportar información adicional en cuanto a la influencia de Saunderson en España.

En cualquier caso, cabe destacar que el interés de los profesores del Colegio Imperial por la obra de Saunderson, cuyas habilidades docentes fueron conocidas en diferentes países europeos póstumamente, muestra su compromiso con la renovación y ampliación de sus enseñanzas. No obstante, sus esfuerzos se vieron truncados por su expulsión en 1767, sin que ello tuviera consecuencias desastrosas en el proceso de modernización de las matemáticas en España[89]: la puesta en marcha de los colegios y seminarios forzosamente abandonados por los jesuitas favoreció la entrada en escena de una serie de profesores e instituciones que dieron un nuevo aire a la enseñanza de las ciencias en España y que permitieron un cierto florecimiento de las matemáticas hasta la guerra de la Independencia.

5. Agradecimientos

Este trabajo ha sido auspiciado por el Grupo de Investigación Interdisciplinar de Historia Intelectual e Institucional de la Universidad de Zaragoza (H26_17R).

6. Bibliografía

6.1. Fuentes manuscritas

M-RAH, 9/2806. *In methodum fluxionum*. Forma parte del legajo de manuscritos titulado *Tratado de aritmética, álgebra y logarítmica* en el Catálogo de la Colección Cortes, Real Academia de la Historia.

89. Ausejo, Elena y Medrano Sánchez, Francisco Javier. «Jorge Juan y la consolidación del cálculo infinitesimal en España (1750-1814)». En Alberola Romá, A.; Die Maculé, R. y Mas Galvañ, C. (eds.). *Jorge Juan Santacilia en la España de la Ilustración*. Alicante: Casa de Velázquez/Publicacions de la Universitat d'Alacant, 2015, pp. 155-178.

M-RAH, 9/2792. *Introduccion fácil al Algorithmo de las fluxiones*. Forma parte del legajo de manuscritos titulado *Curso completo de matemáticas* en el Catálogo de la Colección Cortes, Real Academia de la Historia.

6.2. Referencias bibliográficas

AUSEJO, Elena y MEDRANO SÁNCHEZ, Francisco Javier. «Construyendo la modernidad: nuevos datos y enfoques sobre la introducción del Cálculo Infinitesimal en España (1717-1787)». *LLULL, Revista de la Sociedad Española de Historia de las Ciencias y de las Técnicas*, 2010, 33(71), pp. 25-56.
https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3353401.pdf

AUSEJO, Elena y MEDRANO SÁNCHEZ, Francisco Javier. «Jorge Juan y la consolidación del cálculo infinitesimal en España (1750-1814)». En ALBEROLA ROMÁ, A.; DIE MACULÉ, R. y MAS GALVAÑ, C. (eds.). *Jorge Juan Santacilia en la España de la Ilustración.* Alicante: Casa de Velázquez/Publicacions de la Universitat d'Alacant, 2015, pp. 155-178.
http://www.cervantesvirtual.com/obra/jorge-juan-y-la-consolidacion-del-calculo-infinitesimal-en-espana-1750-1814-849094/

BERENGUER CLARIÀ, Joaquim. *La recepció del càlcul diferencial a l'Espanya del segle XVIII. Tomàs Cerdà: introductor de la teoria de fluxions*. Tesis doctoral. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 2015.
http://hdl.handle.net/10803/367217

CERDÀ, Tomàs. *Tratado de fluxiones, 1757-1759*. Transcripció, notes i introducció editorial a cura de Joaquim Berenguer Clarià. Barcelona: Reial Acadèmia de Ciències i Arts de Barcelona, 2015.

Conclusiones Mathemáticas, *prácticas y especulativas, defendidas en el Real Seminario de Nobles en presencia de sus Majestades Católicas los Reyes nuestros señores (que Dios guarde) por Don Juan Pesenti, Marqués de Montecorto, seminarista en dicho Real Seminario bajo la instrucción y magisterio del R. P. Estevan de Terreros y Pando de la Compañía de Jesús, dedicadas al Rey Nuestro Señor D. Fernando el sexto por el Seminario como a su único patrono*. Día 13 del mes de Abril de 1751. Madrid: Imprenta del Supremo Consejo de la Inquisición y Rvda Cámara Apostólica, 1751.
https://books.google.es/books?id=RK01DTkusxcC&lpg=RA1-PP1&ots=mzpXpXh9-a&dq=terreros%20conclusiones%20mathematicas%201751&hl=es&pg=RA1-PP1#v=onepage&q&f=false

Conclusiones Mathematicas, *defendidas en el Real Seminario de Nobles, en presencia de sus Magestades Catholicas, los Reyes, Ntros. Señores, (que Dios guarde) por don Leandro Carrillo, Cadete de Reales Guardias Españolas, y don Edmundo Sarsfield, Conde de Kilmalock, Seminaristas en dicho Real Seminario: presididas por el padre Estevan Bramieri de la Compañía de Jesús, dedicadas al Rey Nuestro Señor Don Carlos III por el Seminario como a su único patrono*. Madrid: por Joachin Ibarra, calle de las Urosas, 1760. Biblioteca Digital Hispánica.

CUESTA DUTARI, Norberto. *Historia de la invención del análisis infinitesimal y de su introducción en España*. Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca, 1985.

GARMA, Santiago. «Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX». En SÁNCHEZ RON, José Manuel (ed.). *Ciencia y Sociedad en España*. Madrid: Ediciones El Arquero/CSIC, 1998, pp. 93-127.

GUICCIARDINI, Niccolò. *The development of Newtonian calculus in Britain 1700-1800*. Cambridge: Cambridge, University Press, 1989.

L'HOSPITAL, Guillaume François Antoine de. *Traité analytique des sections coniques et de leur usage pour la résolution des équations dans les problêmes tant déterminez qu'indéterminez*. Paris: Chez la veuve de Jean Boudet et Jean Bodet Fils, 1707. https://books.google.es/books?id=Cze2okcZzPsC&hl=es&pg=PP4#v=onepage&q&f=false

L'HÔSPITAL, Guillaume François Antoine de. *An analytick treatise of conick sections, and their use for resolving of equations in determinate and indeterminate problems... Made English by E. Stone*. London: J. Senex, 1723.

RODRÍGUEZ VILLAMIL, A. «Índice de los manuscritos que poseyó la Biblioteca de San Isidro y fueron trasladados a la de las Cortes». *Revista de Archivos, Bibliotecas y Museos*, 1876, VI(17).

SAUNDERSON, Nicholas. *The Elements of Algebra, in Ten Books: By Nicholas Saunderson LL.D. Late Lucasian Professor of the Mathematics in the University of Cambridge, and Fellow of the Royal Society. To which is prefixed, An Account of the Author's Life and Character, Collected from his oldest and most intimate Acquaintance*. 2 vols. Cambridge: Printed at the University-Press And Sold by Mrs. Saunderson at Cambridge, by John Whiston Bookseller at Boylés Head in Fleetstreet London, and Thomas Hammond Bookseller in York, 1740. https://books.google.es/books?id=xq8rAQAAMAAJ&hl=es&pg=PP11#v=onepage&q&f=false

SAUNDERSON, Nicholas. *Élemens d'algebre de MR Saunderson [...] Traduits de l'anglois et augmentés de quelques remarques, par MR de Joncourt*. 2 vols. A Amsterdam et A Leipzig: Chez Arkstee et Merkus, 1756. https://archive.org/details/lemensdalgebred00joncgoog/page/n7/mode/2up

SAUNDERSON, Nicholas. *The Method of Fluxions applied to a select Number of Useful Problems, together with the Demonstration of Mr. Cotes's Forms of Fluents in the Second Part of his Logometria, the Analysis of the Problems in his Scholium Generale, and an Explanation of the principal Propositions of Sir Isaac Newton's Philosophy*. London: printed for A. Millar, in the Strand; J. Whiston and B. White, in Fleetstreet; L. Davis and C. Reymers, in Fleetstreet, and against Gray's-Inn. Holborn, 1756, xxiv + 309 pp., 21 cm.

SAUNDERSON, Nicholas. *Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra. For the use of Students at the Universities*. London: Kippax, 1756.

SAUNDERSON, Nicholas. *Select parts of Professor Saunderson's Elements of Algebra. For the use of Students at the Universities*. 3.ª ed. London: Whiston, Bowyer, & Nichols, 1771.

SELLÉS GARCÍA, Manuel A. «Impacto instantáneo y acción continua en la mecánica de Newton». ÉNDOXA: *Series Filosóficas*, 1999, 11, pp. 9-80. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=178086&orden=169884&info=link

SIMPSON, Thomas. *The Doctrine and Application of Fluxions. Containing (Besides what is common on the Subject) a Number of New Improvements in the Theory. And The Solution of a Variety of New, and very Interesting, Problems in different Branches of the Mathematicks*. 2.ª ed. revisada y corregida. London: John Nourse, 1750. https://books.google.es/books?id=NA45AAAAcAAJ&hl=es&pg=PR1#v=onepage&q&f=false

TATTERSALL, James J. «Nicholas Saunderson: The blind Lucasian professor». *Historia Mathematica*, 1992, 19(4), pp. 341-464.

https://www.google.com/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&source=web&cd=&cad=rja&uact=8&ved=2ahUKEwj_oaSCgLfrAhWRBGMBHZW-AngQFjAAegQIBBAC&url=https%3A%2F%2Fcore.ac.uk%2Fdownload%2Fpdf%2F82454029.pdf&usg=AOvVaw0Tyr_SPp30W9BlRj2saeXM

UDÍAS, Agustín. «Los libros y manuscritos de los profesores de matemáticas del Colegio Imperial de Madrid, 1627-1767». *Archivum Historicum Societatis Iesu,* 2005, 74, pp. 369-448.

UDÍAS, Agustín. «Profesores de matemáticas en los colegios de la Compañía en España, 1620-1767». *Archivum Historicum Societatis Iesu*, 2010, 79, pp. 3-27.

WENDLINGEN, Juan. *Elementos de la mathematica, escritos para la utilidad de los principiantes*. 4 vols. Madrid: en la Oficina de Joachin Ibarra, calle de las Urosas, 1753-1756. Biblioteca Digital Hispánica.