La desigualdad de Hardy

Daniel Ceperuelo Pamplona
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Luciano Abadías Ullod

Summary

Hardy's inequality is a mathematical inequality of great relevance in Mathematical Analysis, named in honour of Godfrey Harold Hardy. Formulated at the beginning of the twentieth century, it states that given $p > 1$, and $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a sequence of non-negative real numbers such that the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ converges, is fulfilled

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p, \tag{1}$$

being $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. The integral version of this inequality affirms that for $p > 1$, and $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$, a non-negative measurable function such that f^p is integrable, then f is integrable in $(0,x)$ for $x > 0$, and

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\,dx, \tag{2}$$

where $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. On the following, we will refer to them as discret and continuous version of Hardy's inequality (respectively). In both cases, the constant $(p/(p-1))^p$ is optimal, that is to say, it is the minor constant that verifies such inequalities with the established hypothesis.

As a consequence, the inequalities (1) and (2) imply their respective weak forms: if $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$, and $a_n \ge 0$, so

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \infty,$$

and if $\int_0^{\infty} f^p(x)dx < \infty$, and $f(x) \ge 0$, it is fulfilled that

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \infty.$$

This results can be observed from the point of view of Operator Theory and Functional Analysis. They state that the discret Cesàro's operator, $\mathcal{C}$, and the continuous Cesàro's operator, $\mathscr{C}$, defined by

$$(\mathcal{C}a)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{and} \quad (\mathscr{C}f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

are bounded in the l_p and L_p spaces, respectively, both with norm $p/(p-1)$.

The aim of this essay is to revisit the proof of Hardy's inequality in the discret and continuous case in a historical context, through diverse proofs of the result, as well as related results, and to prove generalizations with weights in both cases.

The first chapter is focused to the results and concepts that we will need and we will apply throughout the essay. In it, we will state Young's inequality, Bernoulli's inequality and Hölder's inequality. We will introduce the ℓ^p and L^p spaces, which have a strong relation with Hardy's inequality, we will define what is the essential supremum of a function, we will state the Monotone Convergence Theorem, the

Tonelli-Fubini's theorem, the Fundamental Theorem of Calculus and the Barrow's rule, and we will end the chapter introducing the step functions and giving some properties of them.

In the second chapter we will overview Hardy's motivation to start his study, as well as the most important contributions given by different mathematicians to the formulation and proof of the inequality.

The third chapter has as a main result the proof of the Hardy's continuous inequality with weights. Using this result, we will observe that the continuous version of Hardy's inequality, (2), is fulfilled and we will prove the inequality with x^{α} weights. We will conclude the chapter getting the norm of the continuous Cesàro's operator.

Analogously to the previous chapter, in the fourth and last chapter we will state and prove the discreet Hardy's inequality with weights in order to observe that the discreet version of Hardy's inequality, (1), is fulfilled as a consequence.

Resumen

La desigualdad de Hardy es una desigualdad matemática de gran relevancia en el Análisis Matemático, llamada así en honor a Godfrey Harold Hardy. Formulada a principios del siglo XX, afirma que dados $p > 1$, y $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, una sucesión de números reales no negativos tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ converge, se cumple

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p,$$

siendo $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$. La versión integral de esta desigualdad afirma que para $p > 1$, y $f : (0,\infty) \to (0,\infty)$ una función medible no negativa tal que f^p es integrable, entonces f es integrable en $(0,x)$ para $x > 0$, y se tiene que

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} f^p(x)\,dx,$$

donde $F(x) := \int_0^x f(t)dt$. En lo siguiente, nos referiremos a ellas como versión discreta y continua de la desigualdad de Hardy (respectivamente). En ambos casos, la constante $(p/(p-1))^p$ es óptima, es decir, es la menor constante que cumple tales desigualdades con las hipótesis establecidas.

Como consecuencia, las desigualdades (1) y (2) implican sus respectivas formas débiles: si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p < \infty$, y $a_n \geq 0$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \infty,$$

y si $\int_0^{\infty} f^p(x)dx < \infty$, y $f(x) \geq 0$, se cumple que

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx < \infty.$$

Estos resultados se pueden ver desde el punto de vista de la Teoria de Operadores y Análisis Funcional. Afirman que el operador discreto de Cesàro, $\mathcal{C}$, y el operador continuo de Cesàro, $\mathscr{C}$, definidos por

$$(\mathcal{C}a)_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{y} \quad (\mathscr{C}f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt,$$

son acotados en los espacios ℓ_p y L_p respectivamente, ambos con norma $p/(p-1)$.

El objetivo de este trabajo es revisitar la demostración de la desigualdad de Hardy en el caso discreto y continuo desde un contexto histórico, pasando por diversas pruebas del resultado, así como resultados relacionados, y demostrar generalizaciones con pesos en ambos casos.

El primer capítulo está dedicado a los resultados y conceptos que necesitaremos y aplicaremos a lo largo del trabajo. En él enunciaremos la desigualdad de Young, la desigualdad de Bernoulli y la desigualdad de Hölder. Introduciremos los espacios ℓ^p y L^p, los cuales tienen una gran relación con la

desigualdad de Hardy, definiremos qué es el supremo esencial de una función, enunciaremos el Teorema de la Convergencia Monótona, el Teorema de Tonelli-Fubini, el Teorema Fundamental del Cálculo y la regla de Barrow, y finalizaremos definiendo las funciones step y dando algunas de sus propiedades.

En el segundo capítulo repasaremos la motivación de Hardy para comenzar su estudio, así como las aportaciones más importantes que dieron distintos matemáticos para la formulación y demostración de la desigualdad.

El tercer capítulo tiene como resultado principal la demostración de la desigualdad continua de Hardy con pesos. Haciendo uso de este resultado, observaremos que se cumple la versión continua de la desigualdad de Hardy, (2), y demostraremos la desigualdad en el caso de pesos x^{α}. Concluiremos el capítulo obteniendo la norma del operador continuo de Cesàro.

Análogamente al capítulo anterior, en el cuarto y último capítulo enunciaremos y demostraremos la desigualdad discreta con pesos de Hardy, para así observar que se cumple la versión discreta de la desigualdad de Hardy, (1), como consecuencia.

Índice general

Capítulo 1

Resultados Previos

En esta sección vamos a recordar algunos conceptos y resultados conocidos que serán usados a lo largo del trabajo. Comenzamos enunciando dos desigualdades clásicas de números reales.

Teorema 1.1 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $x, y > 1$, cumpliendo $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$. Entonces, para cualquier par de números reales no negativos a y b, se cumple que*

$$ab \leq \frac{a^x}{x} + \frac{b^y}{y}.$$

Teorema 1.2 (Desigualdad de Bernoulli)**.** *Sean $x \in \mathbb{R}$, tal que $x \geq -1$, y $n \in \mathbb{N}$, entonces se cumple que*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

A continuación, vamos a denotar los espacios de funciones de potencia p integrables sobre espacios de medida.

Definición 1.1. *Sean $p \geq 1$, y $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida. Recordar que podemos definir una clase de equivalencia $[f]$ sobre las funciones con valores complejos que coinciden en casi todo punto de X. Luego, se definen los espacios sobre las clases de funciones de la siguiente forma:*

$$L^p(X, \nu) = \left\{ [f] : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(X,\nu)} = \left(\int_X |f|^p d\nu \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}.$$

Para $p = \infty$ se define

$$L^\infty(X, \nu) = \left\{ [f] : f \text{ medible y } \|f\|_{L^\infty(X,\nu)} = \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty \right\}.$$

Recordar que se dice que $b \in \mathbb{R}_+ := (0, \infty)$, es una cota esencial de $|f|$ si $\nu(\{x \in X : |f(x)| > b\}) = 0$, y se define el supremo esencial de f como el ínfimo de las cotas esenciales de f, es decir, $\operatorname{ess\,sup} |f| = \inf\{b > 0 : \nu(\{x \in X : |f(x)| > b\}) = 0\}$. Por comodidad, se escribe f en lugar de $[f]$ en lo que sigue.

Para los casos particulares que nos atañen en este trabajo, $\mathbb{R}_+$ con la medida de Lebesgue, m, y $\mathbb{N}$ con la medida de contar, escribiremos L^p y ℓ^p respectivamente, con $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(X,\nu)}$.

Nota 1.1. *Los conjuntos $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ y $(L^p, \|\cdot\|_p)$ son espacios de Banach.*

Veamos ahora algunos resultados relacionados con estos espacios de funciones (ver por ejemplo, [11, Pág. 62–65, pág. 21, pág. 140, pág. 165 y pág. 166] y [12, Pág. 19])

Teorema 1.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $(X, \mathcal{A}, \nu)$ un espacio de medida, f y g funciones medibles y $1 \leq p, q \leq \infty$, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, se cumple*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.4 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea E conjunto medible sobre X, y $f_n : E \longrightarrow [0,\infty)$, una sucesión de funciones medibles, con $n \in \mathbb{N}$, que cumplen*

$$0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f_n(x) \leq \cdots \leq +\infty, \quad \text{para todo } x \in E.$$

Entonces, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, para todo $x \in E$, se tiene que f es una función medible no negativa cuya integral verifica

$$\int_E f d\nu = \lim_n \int_E f_n d\nu.$$

Teorema 1.5 (Teorema de Tonelli-Fubini para funciones no negativas). *Sean $(X,\mathcal{X},\mu_1)$ e $(Y,\mathcal{Y},\mu_2)$ espacios de medida y $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$, una funcion medible. Entonces,*

$$\int_{X\times Y} f(x,y) d\mu_1 d\mu_2 = \int_X \left[\int_Y f(x,y) d\mu_2 \right] d\mu_1 = \int_Y \left[\int_X f(x,y) d\mu_1 \right] d\mu_2.$$

Teorema 1.6. *Sean $(X,\mathcal{X},\mu_1)$ e $(Y,\mathcal{Y},\mu_2)$ espacios de medida, $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$, una funcion medible y $p > 1$. Entonces,*

$$\left(\int_X \left| \int_Y f(x,y) d\mu_2 \right|^p d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|^p d\mu_1 \right)^{\frac{1}{p}} d\mu_2.$$

Definición 1.2. *Una función F definida sobre $\mathbb{R}_+$ se llama absolutamente continua si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que para toda familia $\{(a_i,b_i)\}$ de intervalos disjuntos en $\mathbb{R}_+$, tales que $\sum_{k=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, se cumple la desigualdad*

$$\sum_{i=1}^n |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

Teorema 1.7. *[Teorema Fundamental del Cálculo] Sea $f \in L^1$, y dado $a \in [0,+\infty]$, se considera $F(x) = \int_a^x f dm$, para $x \in \mathbb{R}_+$. Se tiene que F es absolutamente continua y*

$$F'(x) = f(x), \quad m\text{-c.t.p. } x \in \mathbb{R}_+.$$

Teorema 1.8. *[Regla de Barrow] Sea $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua, se cumple*

$$F(x) - F(a) = \int_a^x F' dm, \quad a, x \in \mathbb{R}_+.$$

Finalmente daremos la definición de funciones step que nos permitirá deducir los resultados principales del trabajo para el caso de sucesiones, usando los que hayamos obtenido para funciones en $\mathbb{R}_+$.

Definición 1.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión. Se denomina función step asociada a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a la función $\tilde{a}$, definida sobre $\mathbb{R}_+$, tal que $\tilde{a}(x) = a_n$, cuando $x \in (n-1,n]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Nota 1.2. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones y $\tilde{a}(x)$ y $\tilde{b}(x)$ sus correspondientes funciones step, entonces las funciones step de $a_n b_n$ y a_n^m son $\tilde{a}(x)\tilde{b}(x)$ y $\tilde{a}^m(x)$ respectivamente. Además, para cada $N \geq r$, con $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, y $r \in \mathbb{N}$, se sigue que*

$$\sum_{n=r}^N a_n = \int_{r-1}^N \tilde{a} dm, \qquad \sup_{r\leq n\leq N} a_n = \operatorname*{ess\,sup}_{r-1<x\leq N} \tilde{a}(x).$$

Capítulo 2

Historia de la desigualdad de Hardy

En este capítulo se hace un recorrido histórico acerca de la desigualdad de Hardy, donde repasaremos las aportaciones más importantes de distintos matemáticos en este resultado. Para más información puede verse [7, Pág. 715–732] y las referencias que allí aparecen.

Los inicios del estudio de la desigualdad de Hardy pueden ser enmarcados entre los años 1906 y 1928, años en los que algunos matemáticos, como G. H. Hardy, E. Landau, G. Pólya, I. Schur o M. Riesz, aportaron importantes resultados que ayudaron a su desarrollo y formulación.

El punto de partida de la investigación se puede situar con la desigualdad de Hilbert, probada a principios del siglo XX por David Hilbert y publicada en [6, Pág. 157–227].

Teorema 2.1 (Desigualdad de Hilbert)**.** *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones de números reales no negativos pertenecientes al espacio ℓ^2, entonces*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m b_n}{m+n} \leq \pi\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2\right)^{1/2} = \pi\|a_n\|_2\|b_n\|_2, \tag{2.1}$$

de forma que la serie doble converge y π es la constante óptima que cumple la desigualdad.

Esta desigualdad posee la siguiente forma débil:

Teorema 2.2. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real en ℓ^2, entonces la serie doble*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m a_n}{m+n}$$

converge.

El resultado anterior fue la principal motivación de Hardy en el comienzo de su estudio en la desigualdad que lleva su nombre, ya que, aunque otros matemáticos habían dado diferentes demostraciones, Hardy quería llegar a una demostración más simple de tal resultado.

Posteriormente a estos resultados, Hardy publicó en 1915 un artículo [2, Pág. 163–166] en el que enunció el siguiente teorema:

Teorema 2.3. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real no negativa, la convergencia de cualquiera de las siguientes tres series es equivalente a la de las otras:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n A_n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_n a_m}{n+m}.$$

Recordar que $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Notemos que este último teorema tiene una gran conexión con la desigualdad de Hilbert (2.1) y con la desigualdad discreta de Hardy (1), cuando $p=2$. Aunque Hardy no demostró el resultado en ese artículo, ya que fue en un artículo posterior cuando retomó su demostración, si que observó que era similar a la demostración de su versión integral:

Teorema 2.4. *Sea f una función no negativa e integrable en (a,∞), con $a>0$, y $G(x)=\int_a^x f(t)dt$. La convergencia de cualquiera de las siguientes tres integrales es equivalente a la de las otras:*

$$I_1=\int_a^\infty \frac{f(x)G(x)}{x}dx, \quad I_2=\int_a^\infty \left(\frac{G(x)}{x}\right)^2 dx, \quad I_3=\int_a^\infty\int_a^\infty \frac{f(x)f(y)}{x+y}dxdy.$$

De hecho, para su demostración observó que se cumple

$$I_2\le I_1\le I_2+4\int_x^{2x}\left(\frac{G(t)}{t}\right)dt \quad e \quad I_1\le I_3\le 2I_1.$$

Además de estos teoremas, Hardy también enunció y demostró otros resultados en el artículo de 1915 [2, Pág. 163–166], entre ellos una forma débil de la desigualdad (1) en el caso $p=2$:

Teorema 2.5. *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión real no negativa en ℓ^2, entonces la sucesión $(A_n/n)_{n\in\mathbb{N}}\in\ell^2$.*

Omitimos la demostración que dio en este artículo para dar una más simple, publicada posteriormente por Hardy en un artículo en 1919 [3, Pág. 107–112].

Demostración. Partiendo de

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^2=\left(a_n+\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2\le 2a_n^2+2\left(\frac{A_n}{n}-a_n\right)^2=4a_n^2+2\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-4\frac{a_nA_n}{n},$$

para todo $n\ge 1$, se sigue que para todo $N\in\mathbb{N}$, se cumple

$$\sum_{n=1}^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\le 4\sum_{n=1}^N a_n^2+2\sum_{n=1}^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-4\sum_{n=1}^N\frac{a_nA_n}{n}. \tag{2.2}$$

Además, observemos que

$$-2a_nA_n=-(A_n^2-A_{n-1}^2)-a_n^2\le-(A_n^2-A_{n-1}^2),$$

considerando $A_0=0$, por lo tanto,

$$-2\sum_{n=1}^N\frac{a_nA_n}{n}\le-\sum_{n=1}^N\frac{A_n^2-A_{n-1}^2}{n}=-\frac{A_1^2}{1\cdot 2}-\frac{A_2^2}{2\cdot 3}-\dots-\frac{A_{N-1}^2}{(N-1)N}-\frac{A_N^2}{N}\le-\sum_{n=1}^N\frac{A_n^2}{n(n+1)}.$$

Sustituyendo la anterior acotación en (2.2) obtenemos

$$\sum_{n=1}^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\le 4\sum_{n=1}^N a_n^2+2\sum_{n=1}^N\left(\frac{A_n}{n}\right)^2-2\sum_{n=1}^N\frac{A_n^2}{n(n+1)}=4\sum_{n=1}^N a_n^2+2\sum_{n=1}^N\frac{A_n^2}{n^2(n+1)},$$

y simplificando llegamos a

$$\sum_{n=1}^N\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2\le 4\sum_{n=1}^N a_n^2.$$

Por tanto, utilizando esta última desigualdad y haciendo $N\to\infty$, comprobamos que $A_n/n\in\ell^2$ de la siguiente forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \le \left(\frac{A_1}{1}\right)^2 + 3\sum_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(\frac{A_n}{n}\right)^2 \le \left(\frac{A_1}{1}\right)^2 + 12\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < +\infty.$$

□

Hardy también enunció y demostró la versión continua de este último teorema en el artículo de 1915 [2, Pág. 163–166], la cual, como en el caso del Teorema 2.4, formuló para las integrales $\int_a^\infty$ ó $\int_a^x$, con $a > 0$. Hardy continuó utilizando esta formulación en sus trabajos posteriores hasta la publicación de un artículo en 1925, donde formuló sus resultados para las integrales $\int_0^\infty$ ó $\int_0^x$, y explicó la relación con las integrales que anteriormente había utilizado.

En el artículo de 1919 [3, Pág. 107–112], anteriormente mencionado, Hardy también enunció algunos resultados en el caso continuo, uno de los más importantes fue el siguiente:

$$\int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\int_a^\infty f(t)\,dt\right)^2 dx \le 4\int_a^\infty f^2(x)\,dx,$$

con $a > 0$, $f \in \ell^2(a,\infty)$, y siendo 4 la constante óptima en la desigualdad anterior. Notemos que este resultado implica la desigualdad (2) cuando $p = 2$.

Fue en un artículo publicado en 1920 [1, Pág. 314–317] cuando Hardy compartió por primera vez, gracias a la ayuda de Marcel Riesz, una demostración de la desigualdad (1) con la constante $(p^2/(p-1))^p$, en lugar de $(p/(p-1))^p$. Sin embargo, el objetivo de la demostración era probar la siguiente forma débil de la desigualdad cuando $p > 1$:

Teorema 2.6 (M. Riesz)**.** *Sean $p > 1$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión no negativa en ℓ^p, entonces, la sucesión $(A_n/n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^p$.*

Demostración. Sea $\Phi_n = \sum_{k=n}^{\infty} k^{-p}$. Tenemos que, para todo $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p = \sum_{n=1}^{N} A_n^p(\Phi_n - \Phi_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N}(A_n^p - A_{n-1}^p)\Phi_n - A_N^p\Phi_{N+1} \le \sum_{n=1}^{N}(A_n^p - A_{n-1}^p)\Phi_n \le p\sum_{n=1}^{N} a_n A_n^{p-1}\Phi_n,$$

definiendo $A_0 = 0$. Además,

$$\Phi_n = n^{-p} + \sum_{k=n+1}^{\infty} k^{-p} \le n^{-p} + \sum_{k=n+1}^{\infty}\int_{k-1}^{k} x^{-p}dx = n^{-p} + \int_n^\infty x^{-p}dx = n^{-p} + \frac{n^{-(p-1)}}{p-1} \le \frac{p}{p-1}n^{-(p-1)}.$$

De forma que, con estas desigualdades y aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3), tenemos

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \le \frac{p^2}{p-1}\sum_{n=1}^{N} a_n\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} \le \frac{p^2}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

Por lo tanto, simplificando y elevando a p, llegamos a

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \le \left(\frac{p^2}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N} a_n^p.$$

□

Hardy no solo recibió ayuda de Riesz. Junto a Issai Schur observó, en el mismo artículo, que la constante $(p^2/(p-1))^p$ podía ser mejorada al ser reemplazada por la constante $(p\zeta(p))^p$, siendo ζ la función zeta de Riemann. Además, Hardy formuló la siguiente versión preliminar de la desigualdad (2): sean $p>1$, $a>0$, y f una función no negativa en $L^p(a,\infty)$, entonces se verifica

$$\int_a^\infty \left(\frac{\int_a^x f(t)\,dt}{x}\right)^p dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_a^\infty f^p(x)\,dx, \tag{2.3}$$

siendo $(p/(p-1))^p$ la constante óptima. Aunque no la demostró, señaló que a partir de considerar la función $f(x)=x^{-(1/p)-\varepsilon}$, con ε constante positiva suficientemente pequeña, se sigue que $(p/(p-1))^p$ es la constante óptima.

En una carta que data de 1921, publicada 5 años más tarde en [9, Pág. 38–39], Edmund Landau le escribió a Hardy una demostración de la desigualdad (1) con la constante óptima $(p/(p-1))^p$:

Demostración. Haciendo uso de la desigualdad de Bernoulli (1.2) y dados $y_1,y_2>0$, llegamos a

$$y_1^p - py_1y_2^{p-1} + (p-1)y_2^p \ge 0. \tag{2.4}$$

De esta forma, sean $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no negativa y $B_n=\sum_{k=1}^n b_k$, denotando

$$y_1 = b_n, \quad \text{e} \quad y_2 = \frac{p-1}{p}\frac{B_n}{n},$$

y sustituyendo en (2.4), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$b_n^p - pb_n\left(\frac{(p-1)B_n}{pn}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{(p-1)B_n}{pn}\right)^p \ge 0.$$

Entonces, para todo $N\ge 1$ se sigue

$$\sum_{n=1}^N b_n^p - \left(\frac{p-1}{p}\right)^{p-1}\sum_{n=1}^N pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} + (p-1)\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1}^N\left(\frac{B_n}{n}\right)^p \ge 0. \tag{2.5}$$

Por otro lado, observemos que

$$pb_nB_n^{p-1} = p(B_n-B_{n-1})B_n^{p-1} \ge B_n^p - B_{n-1}^p,$$

luego,

$$\sum_{n=1}^N pb_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^{p-1} \ge \sum_{n=1}^N (B_n^p - B_{n-1}^p)\frac{1}{n^{p-1}} \ge \sum_{n=1}^N B_n^p\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) \ge (p-1)\sum_{n=1}^N B_n^p\frac{1}{(n+1)^p}.$$

Por lo tanto, aplicando la anterior desigualdad a (2.5), llegamos a

$$\sum_{n=1}^N b_n^p \ge \left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1}^N B_n^p\left(\frac{p}{(n+1)^p} - \frac{p-1}{n^p}\right) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^p\sum_{n=1}^N c_n\left(\frac{B_n}{n}\right)^p, \tag{2.6}$$

con $c_n = p(1+1/n)^{-p} - p + 1$ (notemos que $c_n\to 1$ cuando $n\to\infty$). Ahora, sea $m\ge 1$, definamos

$$b_1 = b_2 = \ldots = b_m = a_1, \quad b_{m+1} = b_{m+2} = \ldots = b_{2m} = a_2, \quad \ldots \quad b_{(N-1)m+1} = b_{(N-1)m+2} = \ldots = b_{Nm} = a_N,$$

y, reemplazando N por Nm en (2.6), llegamos a

$$m\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n^p \geq (c_1+c_2+\ldots+c_m)\left(\frac{A_1}{1}\right)+(c_{m+1}+c_{m+2}+\ldots+c_{2m})\left(\frac{A_2}{2}\right)$$
$$+\ldots+(c_{(N-1)m+1}+c_{(N-1)m+2}+\ldots+c_{Nm})\left(\frac{A_N}{N}\right)^p.$$

Dividiendo por m ambos lados de esta última desigualdad y observando que

$$\frac{c_1+c_2+\ldots+c_m}{m}\to 1,\quad \frac{c_{m+1}+c_{m+2}+\ldots+c_{2m}}{m}\to 1,\quad \ldots\quad \frac{c_{(N-1)m+1}+c_{(N-1)m+2}+\ldots+c_{Nm}}{m}\to 1,$$

cuando $m\to\infty$, obtenemos

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^{N}a_n^p \geq \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p. \tag{2.7}$$

De forma que, si $N\to\infty$, llegamos a (1).

Para probar que $(p/(p-1))^p$ es la constante óptima, consideremos la sucesión $a_{n,\varepsilon}=n^{-1/p-\varepsilon}$, siendo $0<\varepsilon<1-1/p$. Observemos que para cada $n\in\mathbb{N}$, se cumple

$$A_{n,\varepsilon}=\sum_{k=1}^{n}k^{-1/p-\varepsilon} > \int_1^n x^{-1/p-\varepsilon}dx=\frac{1}{1-1/p-\varepsilon}(n^{1-1/p-\varepsilon}-1) > \frac{p}{p-1}(n^{1-1/p-\varepsilon}-1),$$

luego,

$$\left(\frac{A_{n,\varepsilon}}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1-\frac{1}{n^{1-1/p-\varepsilon}}\right)^p.$$

Aplicando otra vez la desigualdad de Bernoulli (1.2), obtenemos

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1-\frac{1}{n^{1-1/p-\varepsilon}}\right)^p \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p n^{-1-\varepsilon p}\left(1-\frac{p}{n^{1-1/p-\varepsilon}}\right)$$
$$=\left(\frac{p}{p-1}\right)^p(n^{-1-\varepsilon p}-pn^{-2+1/p+\varepsilon-\varepsilon p}),$$

y, por lo tanto, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_{n,\varepsilon}}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\left(\sum_{n=1}^{N}a_{n,\varepsilon}^p-p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2-1/p-\varepsilon+\varepsilon p}}\right),$$

siendo $N\in\mathbb{N}$. Dividiendo a cada lado de la anterior desigualdad por $\sum_{n=1}^{N}a_{n,\varepsilon}^p$, obtenemos la siguiente desigualdad

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_{n,\varepsilon}}{n}\right)^p \Bigg/ \sum_{n=1}^{N}a_{n,\varepsilon}^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p K_{N,\varepsilon}, \tag{2.8}$$

con $K_{N,\varepsilon}=1-p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{2-1/p-\varepsilon+\varepsilon p}}/\sum_{n=1}^{N}a_{n,\varepsilon}^p$.

Ahora, supongamos que existe una constante C, con $C<(\frac{p}{p-1})^p$, de forma que se cumple la desigualdad (2.7) con dicha constante. Como $K_{N,\varepsilon}\nearrow 1$, cuando $\varepsilon\to 0^+$, y $N\to\infty$, existiría ε y N, tal que

$$C<(\frac{p}{p-1})^pK_{N,\varepsilon}<(\frac{p}{p-1})^p.$$

Entonces, gracias a (2.8), tendríamos que

$$\left(\frac{p}{p-1}\right)^p K_{N,\varepsilon} < \sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \Big/ \sum_{n=1}^{N} a_n^p \leq C.$$

Llegando así a una contradicción y, por tanto, probando la optimalidad de la constante $(\frac{p}{p-1})^p$.

□

Además de esta demostración, Landau informó a Hardy que la igualdad en (1) se cumple si y solo si $a_n = 0$, para todo n, y afirmó que si la desigualdad (2.3) se extiende al caso $a = 0$, entonces la desigualdad (1), con el valor óptimo de la constante, se puede deducir tomando funciones step:

Demostración. Sea a_n una sucesión positiva en ℓ^p, entonces, es fácil observar que su función step correspondiente, $\tilde{a}$, pertenece a L^p. Además, podemos asumir sin pérdida de generalidad que a_n es una sucesión decreciente (reordenando sus términos si fuera necesario). Por lo tanto, podemos definir la función

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \tilde{a}(t)dt.$$

Dicha función puede expresarse de la siguiente forma:

$$g(x) = \frac{\sum_{k=1}^{n-1} a_k + a_n(x-n+1)}{x},$$

para $x \in (n-1, n]$ con $n \in \mathbb{N}$. Observemos que en este intervalo la función es decreciente, luego

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n}\right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} g^p(n) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n} g^p(x)dx = \int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \tilde{a}(t)dt\right)^p dx.$$

Haciendo uso de la desigualdad (2.3), con $a = 0$, llegamos a

$$\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x \tilde{a}(t)dt\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^{\infty} \tilde{a}^p(x)dx = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

□

En 1925, Hardy publicó un artículo [4, Pág. 150–156] en el que enunció y demostró la desigualdad (2) y añadió una nota en la que comentaba la relación que tenía con otro resultado anterior: si tomamos en la desigualdad (2) la función f con $f(x) = 0$ cuando $x < a$, entonces llegamos a la desigualdad (2.3).

Nota 2.1. *La demostración original que dio Hardy de la desigualdad* (2) *contenía muchos detalles y explicaciones muy técnicas, por lo que incluyó una nota en la que mostró una simplificación aportada por George Pólya. La demostración que vamos a dar a continuación sigue las ideas originales de Hardy pero utiliza la simplificación anteriormente mencionada.*

Demostración. Asumiendo que f^p es integrable en $(0,\infty)$, entonces se sigue que f integrable en cada intervalo de la forma $(0,x)$. Luego, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 1.7) sobre la función $f\chi_{(0,x)}$ se sigue que $F'(x) = f(x)$, m-c.t.p. $x \in \mathbb{R}_+$, y, por consiguiente,

$$\frac{d}{dx}F^p(x) = pF^{p-1}(x)f(x), \quad m\text{-c.t.p. } x \in \mathbb{R}_+.$$

De forma que tomando α y A, con $0 < \alpha < A < \infty$, tenemos

$$\int_\alpha^A \left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx = -\frac{1}{p-1}\int_\alpha^A F^p(x)\frac{d}{dx}(x^{1-p})\,dx,$$

e, integrando por partes, llegamos a

$$\begin{aligned}-\frac{1}{p-1}\int_\alpha^A F^p(x)\frac{d}{dx}(x^{1-p})\,dx &= \frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F^p(\alpha)-\frac{A^{1-p}}{p-1}F^p(A)+\frac{1}{p-1}\int_\alpha^A x^{1-p}\frac{d}{dx}(F(x)^p)\,dx\\ &\leq \frac{\alpha^{1-p}}{p-1}F^p(\alpha)+\frac{p}{p-1}\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Veamos ahora que, aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3), tenemos

$$\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\,dx \leq \left(\int_\alpha^A f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{(p-1)q}dx\right)^{1/q}.$$

Observemos que $q=\frac{p}{p-1}$, por lo tanto, llegamos a

$$\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p-1}f(x)\,dx \leq \left(\int_\alpha^A f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^{p}dx\right)^{(p-1)p}.$$

Por lo anterior, sustituyendo $F(x)$ por $F(x)-F(\alpha)$, llegamos a

$$\begin{aligned}\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx &\leq \frac{p}{p-1}\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p-1}f(x)\,dx\leq\\ &\leq \frac{p}{p-1}\left(\int_\alpha^A f^p(x)\,dx\right)^{1/p}\left(\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^{p}dx\right)^{(p-1)/p},\end{aligned}$$

de forma que,

$$\left(\int_\alpha^A\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_\alpha^A f^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Tomando β tal que $\alpha\leq\beta\leq A$, se tiene

$$\left(\int_\beta^A\left(\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right)^{1/p}. \tag{2.9}$$

Observemos que

$$\frac{F(x)-F(\alpha)}{x}\nearrow\frac{F(x)}{x},$$

cuando $\alpha\to 0^+$. Por tanto, si tomamos límite cuando $\alpha\to 0^+$ a cada lado de la desigualdad (2.9) podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monotona (Teorema(1.4)), llegando así a

$$\left(\int_\beta^A\left(\frac{F(x)}{x}\right)^p dx\right)^{1/p} \leq \frac{p}{p-1}\left(\int_0^\infty f^p(x)\,dx\right)^{1/p}.$$

Por último, realizando los límites $A\to\infty$ y $\beta\to 0^+$ en esta última desigualdad llegamos al resultado.

□

Además, en el artículo de 1925 [4, Pág. 150–156], Hardy probó una variación de la desigualdad (1) cambiando la media aritmética, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$, por una más general con pesos:

Teorema 2.7. *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no negativa y $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión positiva cumpliendo que para $p>1$, la sucesión $(\lambda_n^{1/p}a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pertenece al espacio ℓ^p. Entonces*

$$\left\|\lambda_n^{1/p}\frac{A_n}{\Lambda_n}\right\|_p^p=\sum_{n=1}^\infty\lambda_n\left(\frac{A_n}{\Lambda_n}\right)^p\leq\left(\frac{p}{p-1}\right)^p\sum_{n=1}^\infty\lambda_n a_n^p=\left(\frac{p}{p-1}\|\lambda_n^{1/p}a_n\|_p\right)^p,$$

con $A_n=\sum_{k=1}^n\lambda_k a_k$, y $\Lambda_n=\sum_{k=1}^n\lambda_k$.

Omitimos esta demostración, pero vamos a ver a continuación otras demostraciones de la desigualdad de Hardy dadas por otros matemáticos posterioremente, y que merecen ser revisitadas por su elegancia y simplicidad.

En 1926, Edwin Bailey Elliot dió la siguiente demostración de la versión discreta de la desigualdad de Hardy (véase [5, Pág. 240–242]) :

Demostración. Sean $p>1$, y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión no negativa en ℓ^p. Tomamos la sucesión $\alpha_n = A_n/n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, para $n\geq 1$, y $\alpha_0 = 0$. Observemos que

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1},$$

por lo tanto,

$$\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n = \alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\left[n\alpha_n - (n-1)\alpha_{n-1}\right] = \left(1-\frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1}.$$

Ahora, por la desigualdad de Young (Teorema 1.1), tenemos que

$$\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \leq \frac{p-1}{p}(\alpha_n^{p-1})^{p/(p-1)} + \frac{1}{p}\alpha_{n-1}^p.$$

Luego

$$\begin{aligned}
&\left(1-\frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\alpha_n^{p-1}\alpha_{n-1} \leq \left(1-\frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{(n-1)p}{p-1}\left[\frac{p-1}{p}\alpha_n^p + \frac{1}{p}\alpha_{n-1}^p\right] \\
&= \left(1-\frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + (n-1)\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p = \left(n-\frac{np}{p-1}\right)\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p \\
&= \frac{-n}{p-1}\alpha_n^p + \frac{n-1}{p-1}\alpha_{n-1}^p = \frac{1}{p-1}\left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right].
\end{aligned}$$

Así hemos visto que

$$\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n \leq \frac{1}{p-1}\left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right]. \tag{2.10}$$

Por otro lado, sea $N>1$, notemos que

$$\sum_{n=1}^{N}\left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right]$$

es una suma con valor $-N\alpha_N^p$, por lo tanto, aplicando sumatorio desde $n=1$, a $n=N$, a cada lado de la desigualdad (2.10), obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\alpha_n^p - \frac{p}{p-1}\alpha_n^{p-1}a_n\right) \leq \frac{1}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left[(n-1)\alpha_{n-1}^p - n\alpha_n^p\right] = -\frac{N\alpha_N^p}{p-1} \leq 0.$$

Así se llega a la siguiente desigualdad:

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\alpha_n^{p-1}a_n,$$

es decir,

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} a_n.$$

Sea $q > 0$, tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Aplicamos la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3) al segundo miembro de la desigualdad anterior:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \leq \frac{p}{p-1}\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{p-1} a_n \leq \frac{p}{p-1}\left(\sum_{n=1}^{N} a_n^p\right)^{1/p}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^{(p-1)q}\right)^{1/q}.$$

Notemos que $(p-1)q = p$, por lo que dividiendo por el útlimo factor de la desigualdad y elevando a p cada lado obtenemos

$$\left(\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p\right)^{p(1-1/q)} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{N} a_n^p.$$

Como $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$, cuando $N\to\infty$, llegamos a (1).

Ahora probemos que la constante es óptima. Para ello tomemos la sucesión en ℓ^p:

$$a_n = \begin{cases} n^{-1/p} & si \quad n \leq M \\ 0 & si \quad n > M \end{cases}$$

con M un número natural fijado. Observemos que, por un lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \sum_{n=1}^{M} a_n^p = \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n},$$

y, por otro lado,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{1/p}} > \int_1^n x^{-1/p}dx = \frac{p}{p-1}(n^{1-1/p}-1),$$

para $n \leq M$, por lo que

$$\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1}{n^p}(n^{1-1/p}-1)^p = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1-\varepsilon_n}{n},$$

donde

$$\varepsilon_n = 1 - n\left(\frac{n^{1-1/p}-1}{n}\right)^p = 1 - \frac{(n-n^{1/p})^p}{n^p} \to 0, \quad \text{cuando} \quad n\to\infty.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $n_0 \geq 1$, tal que $\varepsilon_n < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Tomamos $M \geq n_0$, de modo que se cumpla

$$\varepsilon\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{1}{n}.$$

Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_{n=n_0}^{M}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p > \sum_{n=n_0}^{M}\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{1-\varepsilon_n}{n} = \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{M}\frac{1-\varepsilon_n}{n} > \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{M}\frac{1-\varepsilon}{n}$$
$$= (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=n_0}^{M}\frac{1}{n} = (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{1}{n}\right) > (1-\varepsilon)\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \left(\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} - \varepsilon\sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n}\right)$$
$$= (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{M}\frac{1}{n} = (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{M} a_n^p = (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p.$$

Así hemos visto que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p > (1-\varepsilon)^2\left(\frac{p}{p-1}\right)^p.$$

Supongamos que existe una constante C con $C < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p$, verificando la desigualdad (1), es decir,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A_n}{n}\right)^p \Big/ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^p \le C.$$

Por tanto, hemos llegado a ver que $(1-\varepsilon)^p\left(\frac{p}{p-1}\right)^p < C$. Tomando $\varepsilon \to 0$ se llega a contradicción, y se prueba la optimalidad de la constante $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$. □

En [5, Pág. 243], puede encontrarse una demostración de la versión continua de la desigualdad de Hardy, (2), dada por el matemático Albert Edward Ingham usando el operador de Cesàro:

Demostración. Partiendo del operador de Cesàro continuo y realizando un cambio de variable $(s = tx)$ tenemos

$$(\mathscr{C}f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(s)\,ds = \int_0^1 f(tx)\,dt,$$

de forma que, aplicando el Teorema 1.6, llegamos a

$$\left(\int_0^{\infty}(\mathscr{C}f(x))^p dx\right)^{1/p} = \|\mathscr{C}f\|_p = \left\|\int_0^1 f(tx)\,dt\right\|_p = \left(\int_0^{\infty}\left(\int_0^1 f(tx)\,dt\right)^p dx\right)^{1/p}$$
$$\le \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f^p(tx)\,dx\right)^{1/p} dt = \int_0^1\left(\int_0^{\infty} f^p(s)\frac{ds}{t}\right)^{1/p} dt = \frac{p}{p-1}\left(\int_0^{\infty} f^p(s)\,ds\right)^{1/p}.$$

Finalmente, elevando a p cada lado de la desigualdad anterior llegamos al resultado. □

Nota 2.2. *Para finalizar la sección queremos comentar que Hardy no consideró el caso $p = \infty$ puesto que su trabajo se centró en series y no en supremos. Sin embargo, cabe añadir que para dicho valor de p la desigualdad también se verifica. En cambio, no ocurre lo mismo para $p = 1$, ya que los operadores de Cesàro, $\mathscr{C}$ y C, no son acotados de L^1 en L^1 ni de ℓ^1 en ℓ^1, respectivamente; basta tomar $f(x) = \chi_{(0,1)}$, en el caso continuo, y $a_n = \delta_1(n)$, en el caso discreto, para comprobar que la desigualdad no es cierta.*

Capítulo 3

Desigualdad de Hardy continua con pesos

En este capítulo vamos a probar la versión continua de la desigualdad de Hardy con pesos y veremos algunos resultados que se siguen de ella. Para ello, vamos a introducir el concepto de peso.

Definición 3.1. *Llamaremos función peso a cualquier función* $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *continua.*

A continuación enunciamos el resultado principal de este capítulo. Véase [10, Pág. 31–38].

Teorema 3.1. *Sean* u *y* v *dos funciones peso y* $1 \leq p \leq \infty$, *con* q *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Entonces, para* $1 \leq p < \infty$, *existe* $C > 0$, *tal que*

$$\|\mathscr{C} f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \leq C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\nu)}, \quad f \in L^p(\mathbb{R}_+,\nu), \tag{3.1}$$

con $d\mu(x) = u(x)\,dx$ *y* $d\nu(x) = v(x)\,dx$, *si y solo si*

$$B = \sup_{r>0} \left\|\chi_{(r,\infty)} U\right\|_p \left\|\chi_{(0,r)} V^{-1}\right\|_q < \infty, \tag{3.2}$$

siendo

$$U(x) = \frac{u^{1/p}(x)}{x}, \quad V(x) = v^{1/p}(x), \quad x > 0.$$

Para el caso $p = \infty$, *existe* $C > 0$, *tal que*

$$\|u \cdot \mathscr{C} f\|_\infty \leq C\|vf\|_\infty, \quad vf \in L^\infty, \tag{3.3}$$

si y solo si

$$B = \sup_{r>0} \left\|\chi_{(r,\infty)} U\right\|_\infty \left\|\chi_{(0,r)} V^{-1}\right\|_1 < \infty, \tag{3.4}$$

con

$$U(x) = \frac{u(x)}{x}, \quad V(x) = v(x).$$

Además, si C *es la constante óptima para* (3.1), *ésta cumple*

$$B \leq C \leq p^{\frac{1}{p}} q^{\frac{1}{q}} B, \quad si \quad 1 < p < \infty \quad y \quad C = B, \quad si \quad p = 1 \quad ó \quad p = \infty.$$

Demostración. Supongamos que se cumple (3.2) para $1 < p < \infty$ y veamos que para estos valores de p existe una constante finita que verifica la desigualdad (3.1). Para ello, observemos que

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{C} f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} &= \int_0^\infty (\mathscr{C} f(x))^p\, u(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{u(x)}{x^p} \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx \\
&= \int_0^\infty \left(U(x)\int_0^x f(t)\,dt\right)^p dx = \int_0^\infty \left(\int_0^x U(x) f(t) \frac{V(t)h(t)}{V(t)h(t)}\,dt\right)^p dx,
\end{aligned}$$

con $h(x) = (\int_0^x V^{-q}(t)\,dt)^{\frac{1}{pq}}$. Aplicando la desigualdad de Hölder (Teorema 1.3), tenemos que

$$\int_0^\infty \left(\int_0^x U(x)f(t)\frac{V(t)h(t)}{V(t)h(t)}\,dt\right)^p dx \leq \int_0^\infty \left(\int_0^x (U(x)f(t)V(t)h(t))^p\,dt\right)\left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{\frac{p}{q}} dx,$$

y, a continuación, aplicando el Teorema de Tonelli-Fubini (Teorema 1.5) al término de la derecha de la última desigualdad, vemos que

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(\int_0^x (U(x)f(t)V(t)h(t))^p dt\right)\left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\\ &= \int_0^\infty \left(\int_t^\infty (U(x)f(t)V(t)h(t))^p \left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right) dt.\end{aligned}$$

Notemos que $\frac{p}{q} = p-1$, por tanto,

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(\int_t^\infty (U(x)f(t)V(t)h(t))^p \left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{\frac{p}{q}} dx\right) dt\\ &= \int_0^\infty (f(t)V(t)h(t))^p \left(\int_t^\infty U(x)^p \left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{p-1} dx\right) dt.\end{aligned}$$

De forma que hemos probado la siguiente desigualdad:

$$\|\mathscr{C}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \leq \int_0^\infty (f(t)V(t)h(t))^p \left(\int_t^\infty U(x)^p \left(\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds\right)^{p-1} dx\right) dt. \tag{3.5}$$

Por otro lado, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo (Teorema 1.7), tenemos que

$$\frac{d}{ds}\left(\int_0^s V^{-q}(t)\,dt\right) = V^{-q}(s), \quad s > 0,$$

luego, $V^{-q}(s)\,(\int_0^s V^{-q}(t)\,dt)^{-1/p}$ es la derivada de $q\,(\int_0^s V^{-q}(t)\,dt)^{1/q}$ y, por la regla de Barrow (Teorema 1.8), llegamos a

$$\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds = \int_0^x V^{-q}(s)\left(\int_0^s V^{-q}(t)\,dt\right)^{\frac{-1}{p}} ds = q\left[\left(\int_0^s V^{-q}(t)\,dt\right)^{\frac{1}{q}}\right]_0^x = q\left(\int_0^x V^{-q}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Además, por (3.2), tenemos que se cumple

$$\left(\int_0^x V^{-q}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{q}} \leq B\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{-1}{p}}, \quad x > 0. \tag{3.6}$$

Por tanto, hemos visto que

$$\int_0^x (V(s)h(s))^{-q} ds \leq Bq\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{-1}{p}}, \quad x > 0.$$

Aplicando la desigualdad anterior a (3.5) llegamos a

$$\|\mathscr{C}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \leq (Bq)^{p-1}\int_0^\infty (f(t)V(t)h(t))^p \left(\int_t^\infty U^p(x)\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1-p}{p}} dx\right) dt. \tag{3.7}$$

Ahora, por el Teorema Fundamental de Calculo (Teorema 1.7), tenemos que

$$\frac{d}{dx}\int_x^\infty U^p(s) = -U^p(x), \quad x>0,$$

por lo tanto, $U^p(x)\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1-p}{p}}$ es la derivada de $-p\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}$. Aplicando la regla de Barrow (Teorema 1.8), vemos que

$$\int_t^\infty U^p(x)\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1-p}{p}} dx = \left[-p\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}\right]_t^\infty = p\left(\int_t^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Utilizando la desigualdad (3.6) en la identidad anterior, llegamos a

$$\int_t^\infty U^p(x)\left(\int_x^\infty U^p(s)\,ds\right)^{\frac{1-p}{p}} dx \le Bp\left(\int_0^t V^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{-1}{q}}, \quad t>0,$$

y, sustituyendo esto último en (3.7), llegamos a

$$\|\mathscr{C}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \le B^p p q^{p-1}\int_0^\infty (f(t)V(t)h(t))^p\left(\int_0^t V^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{-1}{q}} dt. \tag{3.8}$$

Notando que $\left(\int_0^t V^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{-1}{q}} = h^{-p}(x)$, y que $V(t)=v^{1/p}(t)$, la desigualdad (3.8) puede expresarse de la siguiente forma:

$$\|\mathscr{C}f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \le B^p p q^{p-1}\int_0^\infty f^p(t)v(t)\,dt = B^p p q^{p-1}\|f\|^p_{L^p(\mathbb{R}_+,\nu)}.$$

Elevando a $1/p$ cada lado de este útlimo resultado, llegamos a

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \le Bp^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\nu)}, \tag{3.9}$$

puesto que $\frac{p-1}{p}=\frac{1}{q}$. Así hemos visto que se cumple la desigualdad (3.1) con la constante finita $Bp^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}$.

Ahora, supongamos que se cumple (3.2) para $p=1$ ($q=\infty$). Observemos que

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\mu)} = \int_0^\infty \mathscr{C}f(x)u(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{u(x)}{x}\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)dx = \int_0^\infty\left(\int_0^x U(x)f(t)\,dt\right)dx,$$

con $U(x)=\frac{u(x)}{x}$. Aplicando el Teorema de Tonelli-Fubini (Teorema 1.5), obtenemos

$$\int_0^\infty\left(\int_0^x U(x)f(t)\,dt\right)dx = \int_0^\infty f(t)\left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right)dt.$$

De esta forma, llegamos a la siguiente igualdad:

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\mu)} = \int_0^\infty f(t)\left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right)dt. \tag{3.10}$$

Por otro lado, puesto que se cumple (3.2), tenemos que para $t>0$,

$$B \ge \left\|\chi_{(t,\infty)}U\right\|_1\left\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\right\|_\infty = \left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} V^{-1}(x)\right).$$

con $V(x)=v(x)$. Luego

$$\int_t^\infty U(x)\,dx \le B\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} V^{-1}(x)\right)^{-1}.$$

Sustituyendo lo anterior en (3.10), tenemos que

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\mu)} \leq B\int_0^\infty f(t)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} V^{-1}(x)\right)^{-1} dt. \tag{3.11}$$

Por último, por ser $V(x)$ continua y por la definición de supremo esencial, se cumple que para todo $t>0$,

$$V^{-1}(t) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} V^{-1}(x),$$

es decir,

$$V(t) \geq \left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} V^{-1}(x)\right)^{-1},$$

y, aplicando esta desigualdad a (3.11), llegamos a

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\mu)} \leq B\int_0^\infty f(t)V(t)\,dt = B\|f\|_{L^1(\mathbb{R}_+,\nu)}. \tag{3.12}$$

De esta forma hemos demostrado que se cumple la desigualdad (3.1) con la constante finita B.

Sea ahora $p=\infty$ ($q=1$), supongamos que se cumple (3.4). Veamos que

$$\|u\cdot\mathscr{C}f\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\mathscr{C}f(t)u(t) = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\frac{u(t)}{t}\int_0^t f(s)\,ds = \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}U(t)\int_0^t f(s)\frac{V(s)}{V(s)}\,ds,$$

con $U(t)=\frac{u(t)}{t}$ y $V(s)=v(s)$. Por ser $U(x)$ continua y por la definición de supremo esencial es fácil observar que para todo $t>0$ y $0<s<t$, se tiene que

$$f(s)V(s) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t} f(x)V(x),$$

y

$$U(t) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{t<x} U(x).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\operatorname*{ess\,sup}_{0<t}U(t)\int_0^t f(s)\frac{V(s)}{V(s)}\,ds &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x}U(x)\right)\int_0^t\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t}f(x)V(x)\right)V(s)^{-1}\,ds\\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t}f(x)V(x)\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x}U(x)\right)\int_0^t V(s)^{-1}\,ds.\end{aligned}$$

De forma que hemos visto que

$$\|u\cdot\mathscr{C}f\|_\infty \leq \operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t}f(x)V(x)\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x}U(x)\right)\int_0^t V^{-1}(s)\,ds. \tag{3.13}$$

Además, por la definición de B, tenemos que para todo $t>0$, se verifica la siguiente desigualdad:

$$B \geq \|\chi_{(t,\infty)}U\|_\infty\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\|_1 = \left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x}U(x)\right)\int_0^t V^{-1}(s)\,ds.$$

Luego

$$\begin{gathered}\operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t}f(x)V(x)\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x}U(x)\right)\int_0^t V^{-1}(s)\,ds\\ \leq B\operatorname*{ess\,sup}_{0<t}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<t}f(x)V(x)\right) = B\operatorname*{ess\,sup}_{0<x}f(x)V(x) = B\|vf\|_\infty.\end{gathered}$$

Sustituyendo este último resultado en (3.13), llegamos a

$$\|u\cdot\mathscr{C}f\|_\infty \le B\|vf\|_\infty. \tag{3.14}$$

Hemos probado la desigualdad (3.1) y (3.3) con la constante positiva B y, por tanto, hemos visto que (3.2) y (3.4) implica la existencia de una constante positiva que verifica las desigualdades (3.1) y (3.3) respectivamente.

Ahora, probemos el recíproco. Para ello, queremos ver que se cumple

$$C \ge \|\chi_{(t,\infty)}U\|_p\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\|_q, \tag{3.15}$$

para todo $t>0$, siendo C la constante finita que verifica la desigualdad (3.1) y (3.3), lo que implicará (3.2), y (3.4) respectivamente, ya que el supremo de un conjunto de valores acotados siempre existe.

Primero observemos que para $1\le p<\infty$ y para todo $t>0$, tenemos que

$$\left(\int_t^\infty U^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^t f(s)\,ds = \left(\int_t^\infty\left(U(x)\int_0^t f(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\le \left(\int_t^\infty\left(U(x)\int_0^x f(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_0^\infty\left(U(x)\int_0^x f(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \|\mathscr{C}f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)}.$$

Tomando como $f(x)$ la función $f(x)\chi_{(0,t)}$, se sigue

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\mu)} \le C\|f\|_{L^p(\mathbb{R}_+,\nu)} = C\left(\int_0^t (f(x)V(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De esta forma hemos comprobado la siguiente desigualdad:

$$\left(\int_t^\infty U^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^t f(x)\,dx \le C\left(\int_0^t (f(x)V(x))^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.16}$$

Si $1<p<\infty$, y $0<\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\|_q<\infty$, podemos tomar en la desigualdad anterior $f(x)=V^{-q}(x)$, llegando así a

$$\left(\int_t^\infty U^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\int_0^t V^{-q}(x)\,dx \le C\left(\int_0^t V^{p-pq}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} = C\left(\int_0^t V^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

ya que, $p-pq=-q$. Dividiendo a cada lado del anterior resultado por $\left(\int_0^t V^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$, llegamos a (3.15).

Para el caso $p=1$ ($q=\infty$) y $0<\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\|_\infty<\infty$, tomemos como $f(x)$ la función $\chi_{A_n}(x)$, función característica del conjunto

$$A_n=\left\{x : V(x)\le\frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t}V^{-1}(x)}\right\},\quad n\in\mathbb{N},$$

que cumple $\operatorname{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t}V^{-1}(x)\neq 0$. Por tanto, la desigualdad (3.16) afirma que se cumple lo siguiente:

$$\left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right)\int_0^t \chi_{A_n}(x)\,dx \le C\int_0^t V(x)\chi_{A_n}(x)\,dx \le C\frac{1}{\operatorname{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t}V^{-1}(x)}\int_0^t \chi_{A_n}(x)\,dx.$$

Así hemos llegado a

$$\left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t}V^{-1}(x)\right)\le C,$$

de forma que cuando $n \to \infty$, llegamos a (3.15).

Sea ahora $p = \infty$ ($q = 1$) y $0 < \|\chi_{(0,t)} V^{-1}\|_1 < \infty$, se sigue

$$\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x} U(x)\right) \int_0^t f(s)\,ds \le \operatorname*{ess\,sup}_{t<x} U(x) \int_0^x f(s)\,ds \le \operatorname*{ess\,sup}_{0<x} U(x) \int_0^x f(s)\,ds = \|u \cdot \mathscr{C} f\|_\infty,$$

con $U(x) = \frac{u(x)}{x}$. Puesto que se cumple (3.1), tenemos que

$$\|u \cdot \mathscr{C} f\|_\infty \le C \|vf\|_\infty = C \operatorname*{ess\,sup}_{0<x} f(x) V(x),$$

con $V(x) = v(x)$. De esta forma, hemos visto que

$$\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x} U(x)\right) \int_0^t f(s)\,ds \le C \operatorname*{ess\,sup}_{0<x} f(x) V(x). \tag{3.17}$$

Por lo tanto, si tomamos en la anterior desigualdad $f(x) = V^{-1}(x)$, llegamos a (3.15).

Ahora, veamos que se cumple la desigualdad (3.15) para todo $p > 1$, cuando $\|\chi_{(0,t)} V^{-1}\|_q = \infty$. Para $1 < p < \infty$ y $\|\chi_{(0,t)} V^{-1}\|_q = \infty$, podemos considerar la sucesión de funciones

$$f_n(x) = V^{-q}(x) \chi_{B_n}(x),$$

con $B_n = \{0 < x : \frac{1}{n} \le V^{-q}(x) \le n\}$, siendo $n \in \mathbb{N}$. De forma que, sustituyendo en (3.16), obtenemos la siguiente desigualdad:

$$\left(\int_t^\infty U^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t V^{-q}(x) \chi_{B_n}(x)\,dx\right) \le C \left(\int_0^t V^{(1-q)p}(x) \chi_{B_n}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Como $(1-q)p = -q$, a partir de la anterior desigualdad llegamos a

$$\left(\int_t^\infty U^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^t V^{-q}(x) \chi_{B_n}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C.$$

Por último, notemos que

$$\chi_{B_n}(x) \nearrow 1$$

cuando $n \to \infty$. Por tanto, aplicando el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 1.4) a la ultima desigualdad, llegamos a (3.15).

Análogamente, para el caso $p = \infty$ $(q = 1)$ y $\|\chi_{(0,t)} V^{-1}\|_1 = \infty$, tomamos la sucesión de funciones

$$f_n(x) = V^{-1}(x) \chi_{B_n}(x),$$

en (3.17), llegando a

$$\left(\operatorname*{ess\,sup}_{t<x} U(x)\right) \int_0^t V^{-1}(x) \chi_{B_n}(x)\,dx \le C \operatorname*{ess\,sup}_{0<x} \chi_{B_n}(x) = C.$$

Con la misma argumentación que hemos dado antes, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Monótona (Teorema 1.4) a este último resultado, comprobando así que se cumple (3.15).

Si $p = 1$ y $\|\chi_{(0,t)} V^{-1}\|_\infty = \infty$, tomemos $f(x) = \chi_{A_n}$, con A_n el conjunto anteriormente definido. Por (3.16), tenemos que

$$\int_t^\infty U(x)\,dx \int_0^t \chi_{A_n}(x)\,dx \le C \int_0^t \chi_{A_n} V(x)\,dx \le \frac{C}{\operatorname{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t} V^{-1}(x)} \int_0^t \chi_{A_n}(x)\,dx.$$

Luego

$$\left(\int_t^\infty U(x)\,dx\right) \operatorname*{ess\,sup}_{\frac{1}{n}<x<t} V^{-1}(x) \le C.$$

Por tanto, si tomamos en esta última desigualdad el límite $n \to \infty$, observamos que se cumple (3.15).

Por último, observemos que para $p \in [1,\infty]$, si $\|\chi_{(0,t)}V^{-1}\|_q = 0$, la desigualdad (3.15) es inmediata.

Así hemos visto que si se cumple la desigualdad (3.1) o (3.3) con una constante C finita, entonces, se cumple (3.2) o (3.4) respectivamente.

Además, si C es la constante óptima que satisface la desigualdad (3.1) y (3.3). Para $1 < p < \infty$, hemos visto, gracias a (3.9), que

$$C \leq Bp^{\frac{1}{p}}q^{\frac{1}{q}}.$$

Para estos valores de p también hemos comprobado que se cumple (3.15), luego

$$B \leq C.$$

De la misma forma, hemos visto que para $p = 1$ ó $p = \infty$, se cumple (3.15), por tanto, para estos valores se tiene que

$$B \leq C,$$

y, gracias a (3.12) y (3.14), hemos visto que

$$C \leq B.$$

Luego para $p = 1$ ó $p = \infty$, se tiene que $B = C$. □

Veamos que tomando en el teorema anterior las funciones peso $u(x) = v(x) = x^\alpha$, llegamos a la siguiente generalización de la desigualdad de Hardy continua con pesos, la cual vamos a probar de forma sencilla usando cambios de variable.

Corolario 3.1. *Sea f una función no negativa, $1 \leq p < \infty$ y $\alpha < p-1$, entonces, se cumple*

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Demostración. Realizando el cambio de varible $t = xs$, obtenemos

$$\left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)\,ds\right)^p x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)x^{\frac{\alpha}{p}}ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

De forma que, aplicando el Teorema 1.6 y realizando otro cambio de variable, en este caso $y = xs$, llegamos al resultado:

$$\left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 f(xs)x^{\frac{\alpha}{p}}ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(xs)x^\alpha dx\right)^{\frac{1}{p}} ds = \int_0^1 \left(\int_0^\infty f^p(y)\left(\frac{y}{s}\right)^\alpha \frac{dy}{s}\right)^{\frac{1}{p}} ds$$
$$= \left(\int_0^1 s^{-\frac{1}{p}(\alpha+1)}ds\right)\left(\int_0^\infty f^p(y)y^\alpha dy\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-\alpha-1}\left(\int_0^\infty f^p(y)y^\alpha dy\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Nota 3.1. *En el caso del Teorema 3.1, si tomamos las funciones peso*

$$u(x) = 1, \quad v(x) = 1, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}_+,$$

o, lo que es lo mismo, tomando en el Corolario 3.1 $\alpha = 0$, llegamos a la versión continua de la desigualdad de Hardy con $p > 1$.

Teorema 3.2. *La norma del operador de Cesàro, $\|\mathscr{C}\|_{L^p \to L^p} := \sup_{f \in L^p} \frac{\|\mathscr{C}f\|_p}{\|f\|_p}$, es $\frac{p}{p-1}$, con $1 < p < \infty$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$, y $a > 0$, tomemos la función $f_\varepsilon(t) = t^{\frac{-1}{p}+\varepsilon}\chi_{(0,a)}(t)$. Observemos que

$$\|f_\varepsilon\|_p = \left(\int_0^a t^{-1+p\varepsilon}dt\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\left[\frac{x^{p\varepsilon}}{p\varepsilon}\right]_0^a\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^\varepsilon}{(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}}.$$

Ahora, calculemos la norma de $\mathscr{C}f_\varepsilon$. Para ello, realizamos el cambio de variable $s = \frac{t}{x}$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{C}f_\varepsilon\|_p &= \left(\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x t^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\chi_{(0,a)}(t)\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_0^\infty \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}\chi_{(0,\frac{a}{x})}(s)\,ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^a \left(\int_0^1 (sx)^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}ds\right)^p dx + \int_a^\infty \left(\int_0^{\frac{a}{x}} (sx)^{-\frac{1}{p}+\varepsilon}ds\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_0^a \left(\frac{1}{x}\frac{x^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}}{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}\right)^p dx + \int_a^\infty \left(\frac{1}{x}\frac{a^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}}{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\frac{1}{(1-\frac{1}{p}+\varepsilon)^p}\left[\frac{x^{\varepsilon p}}{\varepsilon p}\right]_{x=0}^a + \frac{(a^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon})^p}{(1-\frac{1}{p}+\varepsilon)^p}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_{x=a}^\infty\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{a^\varepsilon}{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon p}+\frac{1}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

De forma que,

$$\|\mathscr{C}\|_{L^p\to L^p} = \sup_{f\in L^p}\frac{\|\mathscr{C}f\|_p}{\|f\|_p} \geq \frac{\|\mathscr{C}f_\varepsilon\|_p}{\|f_\varepsilon\|_p} = \frac{1}{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}\left(1+\varepsilon\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p}} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \frac{p}{p-1}.$$

Por otro lado, observemos que la desigualdad del Corolario 3.1 con $\alpha = 0$, se puede expresar como

$$\|\mathscr{C}f\|_{L^p\to L^p} \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Luego

$$\|\mathscr{C}\|_{L^p\to L^p} = \sup_{f\in L^p}\frac{\|\mathscr{C}f\|_p}{\|f\|_p} \leq \frac{p}{p-1}.$$

Asi, hemos llegado a lo que queríamos probar:

$$\|\mathscr{C}\|_{L^p\to L^p} = \frac{p}{p-1}.$$

$\square$

Capítulo 4

Desigualdad de Hardy discreta con pesos

En este capítulo vamos a enunciar y demostrar la versión discreta de la desigualdad de Hardy con pesos (siguiendo la idea que aparece en [8, Pág. 51–52]) y veremos la relación que tiene con (1).

Teorema 4.1. *Sean $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sucesiones de números reales positivos y $1 \le p \le \infty$, con q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para $1 \le p < \infty$, existe $C > 0$, tal que*

$$\|\mathcal{C}a\|_{L^p(\mathbb{N},\mu)} \le C\|a\|_{L^p(\mathbb{N},\nu)}, \quad a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p(\mathbb{N},\nu), \tag{4.1}$$

siendo $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} u_n\delta_n$ y $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} v_n\delta_n$ con δ_n la delta de Dirac en $n \in \mathbb{N}$, si y solo si

$$B = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\chi_{[k,\infty)}U\|_p \|\chi_{[1,k]}V^{-1}\|_q < \infty, \tag{4.2}$$

siendo

$$U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{u_n^{1/p}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n^{1/p})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Para el caso $p = \infty$, existe $C > 0$, tal que

$$\|u\cdot\mathcal{C}a\|_\infty \le C\|va\|_\infty, \quad va = (v_na_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty, \tag{4.3}$$

si y solo si

$$B = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\chi_{[k,\infty)}U\|_\infty \|\chi_{[1,k]}V^{-1}\|_1 < \infty, \tag{4.4}$$

con

$$U = (U_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \quad V = (V_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Demostración. Sean $\tilde{a}(x)$, $\tilde{U}(x)$, $\tilde{V}(x)$, $\tilde{u}(x)$ y $\tilde{v}(x)$ las funciones step correspondientes a las sucesiones $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, respectivamente. Para $1 < p < \infty$, supongamos que se cumple (4.1) con C una constante finita, es decir,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n^p a_n^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Aplicando las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) llegamos a

$$\left(\int_0^\infty \tilde{U}^p(x)\left(\int_0^x \tilde{a}(t)\,dt\right)^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le C\left(\int_0^\infty \tilde{V}^p(x)\tilde{a}^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Notemos que $\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{u}^{1/p}(x)}{x}$ y $\tilde{V}(x) = \tilde{v}^{1/p}(x)$, con $\tilde{u}(x)$ y $\tilde{v}(x)$ funciones peso, por tanto, por el Teorema 3.1 tenemos que

$$\sup_{r>0}\left(\int_r^\infty \tilde{U}^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^r \tilde{V}^{-q}(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

En particular, cuando $r = k - 1/2$, con $k \in \mathbb{N}$, se tiene por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{k-1/2}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{k-1/2} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(U_k^p/2 + \sum_{n=k+1}^{\infty} U_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(V_k^{-q}/2 + \sum_{n=1}^{k-1} V_n^{-q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

de lo que se sigue

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=k}^{\infty} U_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{k} V_n^{-q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

llegando así a la desigualdad (4.2).

Ahora supongamos que para $1 < p < \infty$, se cumple (4.2), es decir,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{n=k}^{\infty} U_n^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{k} V_n^{-q} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Aplicando las propiedades de las funciones step (Nota 1.2), tenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{k-1}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{k} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Notemos que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $r \in (k-1, k]$, se cumple que

$$\left(\int_{r}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{r} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \left(\int_{k-1}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{k} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Entonces, es fácil observar que

$$\sup_{r>0} \left(\int_{r}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{r} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \le \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\int_{k-1}^{\infty} \tilde{U}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{k} \tilde{V}^{-q}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Por tanto, por el Teorema 3.1, sabemos que se cumple

$$\left(\int_0^{\infty} \tilde{U}^p(x) \left(\int_0^{x} \tilde{a}(t)\,dt \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le C \left(\int_0^{\infty} \tilde{V}^p(x)\,\tilde{a}^p(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

con C constante finita. Haciendo uso de las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) en esta última desigualdad, llegamos a

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} U_n^p \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \le C \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n^p a_n^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Así, hemos visto que se cumple la desigualdad (4.1) con una constante finita.

Comprobemos ahora que el teorema es cierto cuando $p = 1$. Supongamos que se cumple (4.1) con C constante finita. Tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} U_n \sum_{k=1}^{n} a_k \le C \sum_{n=1}^{\infty} V_n a_n.$$

Por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2), podemos ver que

$$\int_0^{\infty} \tilde{U}(x) \left(\int_0^{x} \tilde{a}(s)\,ds \right) dx \le C \int_0^{\infty} \tilde{V}(x)\,\tilde{a}(x)\,dx.$$

Como $\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{u}(x)}{x}$ y $\tilde{V}(x) = \tilde{v}(x)$ y además $\tilde{u}(x)$ y $\tilde{v}(x)$ son funciones peso, por el Teorema 3.1 tenemos que

$$\sup_{0<r}\left(\int_r^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<r}\tilde{V}^{-1}(x)\right) < \infty.$$

En particular, cuando $r = k-1/2$, con $k \in \mathbb{N}$, se tiene por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_{k-1/2}^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<k-1/2}\tilde{V}^{-1}(x)\right) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(U_k/2+\sum_{n=k+1}^{\infty}U_n\right)\left(\sup_{1\le n\le k}V_n^{-1}\right) < \infty,$$

de lo que se sigue que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}U_n\right)\left(\sup_{1\le n\le k}V_n^{-1}\right) < \infty,$$

es decir, se cumple (4.2).

Supongamos ahora que se cumple (4.2) para $p = 1$. Tenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sum_{n=k}^{\infty}U_n\right)\left(\sup_{1\le n\le k}V_n^{-1}\right) < \infty.$$

Luego

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_{k-1}^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x\le k}\tilde{V}^{-1}(x)\right) < \infty.$$

Notar que para todo $k \in \mathbb{N}$ y $r \in (k-1,k]$, se cumple

$$\left(\int_r^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<r}\tilde{V}^{-1}(x)\right) \le \left(\int_{k-1}^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x\le k}\tilde{V}^{-1}(x)\right).$$

Por tanto, es fácil observar que

$$\sup_{0<r}\left(\int_r^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x<r}\tilde{V}^{-1}(x)\right) \le \sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\int_{k-1}^\infty \tilde{U}(x)\,dx\right)\left(\operatorname*{ess\,sup}_{0<x\le k}\tilde{V}^{-1}(x)\right),$$

y, por el Teorema 3.1, vemos que se cumple la siguiente desigualdad:

$$\int_0^\infty \tilde{U}(x)\left(\int_0^x \tilde{a}(s)\,ds\right)dx \le C\int_0^\infty \tilde{V}(x)\,\tilde{a}(x)\,dx,$$

con C constante finita. De forma que, por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) llegamos a ver que se cumple la desigualdad (4.1) con una constante finita.

Ahora vamos a demostrar el teorema para el caso $p = \infty$. Supongamos que se cumple la desigualdad (4.3) con C una constante finita, por tanto, tenemos que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}U_n\sum_{k=1}^{n}a_k \le C\sup_{n\in\mathbb{N}}V_na_n.$$

Por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2), vemos que se cumple

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x}\tilde{U}(x)\int_0^x \tilde{a}(s)\,ds \le C\operatorname*{ess\,sup}_{0<x}\tilde{V}(x)\,\tilde{a}(x).$$

Puesto que $\tilde{U}(x) = \frac{\tilde{u}(x)}{x}$ y $\tilde{V}(x) = \tilde{v}(x)$ con $\tilde{u}(x)$ y $\tilde{v}(x)$ funciones peso, tenemos por el Teorema 3.1 que se cumple

$$\sup_{r>0}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{r<x}\tilde{U}(x)\right)\left(\int_0^r \tilde{V}^{-1}(x)dx\right)<\infty.$$

En particular, cuando $r=k-1/2$, con $k\in\mathbb{N}$, se tiene por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{k-1/2<x}\tilde{U}(x)\right)\left(\int_0^{k-1/2}\tilde{V}^{-1}(x)\,dx\right)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\le n}U_n\right)\left(V_k^{-1}/2+\sum_{n=1}^{k-1}V_n^{-1}\right)<\infty,$$

de forma que se sigue

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\le n}U_n\right)\left(\sum_{n=1}^{k}V_n^{-1}\right)<\infty.$$

De esta forma, hemos visto que se cumple la desigualdad (4.4).

Por último, supongamos que se cumple (4.4), es decir,

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\sup_{k\le n}U_n\right)\sum_{n=1}^{k}V_n^{-1}<\infty.$$

Por las propiedades de las funciones step (Nota 1.2) tenemos que

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{k-1<x}\tilde{U}(x)\right)\int_0^k\tilde{V}^{-1}(x)\,dx<\infty.$$

Observemos que para todo $k\in\mathbb{N}$ y $r\in(k-1,k]$, se cumple la siguiente desigualdad

$$\sup_{0<r}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{r<x}\tilde{U}(x)\right)\int_0^r\tilde{V}^{-1}(x)\,dx\le\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\operatorname*{ess\,sup}_{k-1<x}\tilde{U}(x)\right)\int_0^k\tilde{V}^{-1}(x)\,dx<\infty.$$

Por tanto, por el Teorema 3.1, tenemos que

$$\operatorname*{ess\,sup}_{0<x}\tilde{U}(x)\int_0^x\tilde{a}(s)\,ds\le C\operatorname*{ess\,sup}_{0<x}\tilde{V}(x)\,\tilde{a}(x),$$

con C constante finita. Aplicando las propiedades de las funciones step (Nota 1.2), llegamos a

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}U_n\sum_{k=1}^{n}a_k\le C\sup_{n\in\mathbb{N}}V_na_n,$$

es decir, se cumple (4.3) con C constante finita.

□

Nota 4.1. *En el caso que tomemos en el Teorema 4.1 las funciones*

$$u_n=1,\quad v_n=1,\quad \textit{para todo }\ n\in\mathbb{N},$$

llegaremos a la desigualdad de Hardy discreta (1).

Bibliografía

[1] **G. H. Hardy**, *Notes on a theorem of Hilbert*, MathZ, Vol. VI, (1920).

[2] **G. H. Hardy**, *Notes on some points in the integral calculus XLI: On the convergence of certain integrals and series*, Messenger of Math Vol. XLV, (1915).

[3] **G. H. Hardy**, *Notes on some points in the integral calculus LI: On Hilbert's double-series theorem, and some connected theorems concerning the convergence of infinite series and integrals*, Messenger of Math, Vol. XLVIII, (1919).

[4] **G. H. Hardy**, *Notes on some points in the integral calculus LX: An inequality between integrals*, Messenger of Math, Vol. LIV, (1925).

[5] **G. Hardy, J.E. Littlewood, G.Pólya**, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[6] **D. Hilbert**, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen*, Göttingen Nachr, (1906).

[7] **A. Kufner, L. Maligranda, L. E. Persson**, *The prehistory of the Hardy inequality*, The American Mathematical Monthly, Vol. CXIII, nº 8, (2006).

[8] **A. Kufner, L. E. Persson**, *Weighted inequalities of Hardy type,* World Scientific Book, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2003.

[9] **E. Landau**, *A note on a theorem concerning series of positive terms: Extract from a letter of Prof. E. Landau to Prof. I. Schur*, J. London Math. Soc., Vol. I, (1926).

[10] **B. Muckenhoupt**, *Hardy's inequality with weights*, Studia Mathematica, Vol. XLIV, nº 1, (1972).

[11] **W. Rudin**, *Real and Complex Analysis,* 3ª Ed., McGraw-Hill Inc., New York, 1987.

[12] **A. Zygmund**, *Trigonometric Series,* 3ª Ed. Vols. I, II, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.