Máster Universitario en Profesorado de

Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

Trabajo Fin de Máster

Especialidad de Matemáticas

"ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES EN 3º DE E.S.O."

Autor: **Isaac Cabañero Sueiro**

Tutora: **Dª. Pilar Bolea Catalán**

Zaragoza, Junio de 2013

ÍNDICE

A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar Pag. 3

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático Pag. 3

C. Sobre los conocimientos previos del alumno Pag. 10

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático Pag.14

E. Sobre el campo de problemas y sus respectivas técnicas y tecnologías Pag. 22

F. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma Pag. 35

G. Sobre la evaluación Pag. 40

H. Bibliografía Pag. 43

Anexo Pag. 44

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

El objeto matemático a enseñar comprende las Ecuaciones y los Sistemas de Ecuaciones en 3º de E.S.O. de la asignatura de Matemáticas y se pretende enseñar las técnicas de resolución de Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones y su aplicación a problemas con contexto real.

Tal como señala la normativa actual del BOA en la página 8992, según la ORDEN de 9 de mayo de 2007, el Currículo de Matemáticas de 3º de E.S.O. contiene entre otros apartados los siguientes:

-Uso del lenguaje algebraico para expresar relaciones numéricas en sucesiones, tablas o enunciados de problemas. Traducción de situaciones del lenguaje verbal al algebraico. Igualdades notables.

-Resolución algebraica de ecuaciones de primer grado. Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas. Interpretación de las soluciones. Ecuaciones de segundo grado.

-Resolución de problemas mediante la utilización de ecuaciones, sistemas y otros métodos personales.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

Para este punto he analizado las editoriales en papel de Anaya y SM, además de AnayaDigital.com desde su web, para apreciar cómo se justifica habitualmente la introducción escolar de las Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones en 3º de E.S.O.

Colera, García, Gaztelu y Oliveira (1998) [1] introducen en el libro de Matemáticas 3 de Anaya el tema de las ecuaciones con el epitafio de Diofanto y su traducción al lenguaje algebraico actual para ponernos en contexto y así recordar cómo se resuelve una ecuación de una incógnita con denominadores o con coeficientes racionales (que ya se ve en 2º de E.S.O.).

Los sistemas de ecuaciones los explican como dos balanzas en equilibrio (independientes entre sí) con elementos diferentes. Nos piden a qué equivale un objeto del brazo izquierdo de la balanza respecto del brazo derecho. Su técnica de resolución es la siguiente: crean otra balanza resultante de sumar los elementos del brazo izquierdo de la primera balanza con los elementos del brazo izquierdo de la segunda balanza y el mismo procedimiento para el brazo derecho. Luego eliminan elementos en común en ambos brazos y dividen cada brazo por el m.c.m. (mínimo común múltiplo) de las cantidades de objetos que aparecen en la balanza.

Otros autores como son Vizmanos, Anzola, Alcaide y Peralla (2007) [2], en su libro de Matemáticas 3 de SM Ábaco, introducen las ecuaciones desde la historia relatando que los egipcios ya resolvían ecuaciones de primer grado para obtener la incógnita sobre o antes del año 1650 a.C. según consta en el papiro de Rhind o de Ahmes. Luego recuerda los conceptos fundamentales del curso pasado (igualdad, identidad, ecuación, supresión de paréntesis, número de raíces cuadradas de un número y las identidades notables).

Finalmente plantea una serie de ejercicios de repaso para aplicar estos conocimientos de 2º de E.S.O. Una técnica de resolución de los sistemas de ecuaciones la introducen recordando la regla de la suma (resta) y la regla del producto (división) aplicados a una igualdad e indicando que cuando se suman o se restan dos igualdades se obtiene otra igualdad (como en el método de reducción). Se enuncian dos problemas para que el alumno escriba las dos ecuaciones con dos incógnitas y resuelva el sistema de cada uno de ellos.

El contenido de 3º de E.S.O. de los libros de texto de Colera et al. (1998) [1] y de Vizmanos et al. (2007) [2] respecto a lo que indica el BOA de 2007 sí coinciden. Sin embargo, se puede decir que los contenidos de 2º de E.S.O. y de 3º de E.S.O. son prácticamente los mismos al compararlos en un esquema que aparece en el libro de

Vizmanos, Anzola, Bujanda y Mansilla (2009) [3] titulado Matemáticas 2 de SM Esfera (es como si el Álgebra de 3º de E.S.O. fuese un refuerzo del Álgebra de 2º de E.S.O.). Ocurre lo mismo si se busca en AnayaDigital.com la parte de Álgebra de 2º y 3º de E.S.O.

No ocurre lo mismo si se comparan estos dos cursos en el BOA de 2007 (pp. 8990-8992): en 2º de E.S.O. (de 2007) aún no se veían los sistemas de ecuaciones, ahora por lo visto sí.

Respecto a los campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente no hay grandes diferencias en los textos contemplados y los podríamos agrupar en cuatro tipos:

I. De traducción

La tarea consiste en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico a través de técnicas de comprensión lectora y acciones propuestas en el problema, así como comprensión de la situación y de las magnitudes que aparecen. A continuación se indican algunos ejemplos de problemas de traducción propuestos:

El doble de la edad que tendré dentro de cinco años: 2*(x+5)

El quíntuplo del área de un cuadrado de lado x: $5x^2$

El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura: $\frac{h^2}{4}$

II. Resolución de ecuaciones sin contexto

La tarea es resolver ecuaciones de primer grado y de segundo grado mediante la técnica basada en los principios de las igualdades que forman parte del elemento tecnológico. Para las de primer grado se llevan a un miembro los términos en los que aparecen la incógnita y al segundo miembro todo lo demás; se opera y se despeja la incógnita. Para las de segundo grado, su técnica general consiste en llevar todos los términos al primer miembro; en el segundo miembro quedaría cero. Luego se opera y se aplica la fórmula general siguiente:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Donde a, b y c son los coeficientes de la expresión reducida $ax^2 + bx + c = 0$, con a ≠ 0. Estas técnicas se explicarán con más detalle en el Apartado E de esta memoria. Ejemplos de problemas de ecuaciones sin contexto son los siguientes:

$$2x - 3 = 6 + x \rightarrow 2x - x = 6 + 3 \rightarrow x = 9$$

$$\frac{3}{4}(2x + 4) = x + 19 \rightarrow \frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \rightarrow \frac{3}{2}x + 3 = x + 19 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x + 6 = 2x + 38 \rightarrow 3x - 2x = 38 - 6 \rightarrow x = 32$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\downarrow$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

$$x^2 - 5x = 0 \rightarrow x(x - 5) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x - 5 = 0 \quad x = 5 \end{cases}$$

$$4x^2 = 16 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm\sqrt{4} \begin{cases} \nearrow x_1 = 2 \\ \searrow x_2 = -2 \end{cases}$$

III. Resolución de sistemas de ecuaciones sin contexto

Se resuelven mediante alguna de las tres técnicas conocidas que son los métodos de igualación, sustitución y reducción, basados también en el principio de las igualdades como su tecnología. Estas técnicas se explicarán con más detalle en el Apartado E de esta memoria.

Un ejemplo de problema de sistemas de ecuaciones sin contexto es el siguiente:

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

IV. Problemas Verbales (sean de una ecuación o de un sistema de ecuaciones)

Su técnica consiste en la construcción del modelo matemático. Para ello es necesario traducir el enunciado del problema del lenguaje verbal al lenguaje matemático, definir la incógnita y saber qué nos pide el problema, relacionar magnitudes, plantear la ecuación o el sistema de ecuaciones, resolverla/o y finalmente comprobar la solución.

A continuación se indican algunos ejemplos propuestos de Problemas Verbales:

Ejemplo de problema verbal de ecuaciones de primer grado: Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

Ejemplo de problema verbal de ecuaciones de segundo grado: Para vallar una finca rectangular de 750 m² se han utilizado 110 m de cerca. Calcula las dimensiones de la finca.

Ejemplo de problema verbal de sistemas de ecuaciones lineales: Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

Las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones en sí mismos son ejercicios reiterativos sin contexto y abstractos. Las dificultades se centran más en pasar del lenguaje verbal al lenguaje algebraico en los Problemas tipo Traducción y tipo Verbales (con contexto) que en seguir pasos concretos para cada técnica. Estas dificultades se deben a que los alumnos utilizan las letras como objetos y no como variables, intentan traducir al lenguaje algebraico como si leyesen literalmente el enunciado del problema y tienen la necesidad de expresar el resultado de un problema mediante un número y no como una combinación de número y letra.

Una tecnología de resolución de Problemas Verbales nos lo muestra Polya (1966) en el texto de Puig y Cerdán (1990) [4], que reescribe las reglas cartesianas desde el punto de vista de la resolución de problemas de matemáticas, tratando de precisar las tareas que es preciso realizar para reducir un problema de matemáticas a la resolución de un sistema de ecuaciones.

1. En primer lugar, comprender bien el problema, luego convertirlo en la determinación de cierto número de cantidades desconocidas. (Reglas XIII a XVI)

2. Examinar el problema de la manera más natural considerándolo como resuelto y presentando en un orden conveniente todas las relaciones que deben verificarse entre las incógnitas y los datos según la condición planteada. (Regla XVII)

3. Separar una parte de la condición que permita expresar una misma cantidad de dos maneras diferentes y obtener así una ecuación entre las incógnitas (creación del modelo algebraico). Descomponer eventualmente la condición en varias partes. Obtendréis así un sistema con tantas ecuaciones como incógnitas. (Regla XIX)

4. Transformar el sistema de ecuaciones en una única ecuación. (Regla XXI)

También en el estudio de Bolea (2002) [5], en el capítulo 3, nos muestra los elementos más significativos de las actividades asociadas al álgebra escolar.

-Una primera etapa importante del trabajo algebraico (y también una de las más difíciles) radica en la construcción de modelos de sistemas extra o intramatemáticos.

-Los modelos algebraicos (ecuaciones y fórmulas) se construyen generalmente expresando de dos maneras diferentes una misma cantidad de magnitud del sistema estudiado.

-La potencia del instrumento algebraico se basa en su capacidad para no diferenciar los datos conocidos de las incógnitas (juego entre parámetros y variables).

-Un tipo importante de modelos algebraicos viene dado por determinadas funciones (modelos funcionales). Por ello, el álgebra escolar debe estar fuertemente vinculada al estudio de funciones elementales.

-Una fase importante del trabajo algebraico es la manipulación del modelo en sentido estricto (ecuación o fórmula) y su posterior interpretación y justificación en términos del sistema estudiado.

-La última fase del trabajo de modelización consiste en la formulación de nuevos problemas acerca del sistema estudiado, problemas que no se podían plantear antes de la construcción del modelo.

Las dificultades más destacadas en la realización de las actividades "algebraicas" son las siguientes:

-Una de las principales dificultades del álgebra escolar está ligada a la ausencia curricular de problemas abiertos de modelización, es decir, aquellos en los que se presenta el sistema que se debe estudiar y preguntas abiertas al respecto (debiéndose por ejemplo empezar por elegir las variables que determinan el sistema estudiado, aquellas que resultan más pertinentes para la cuestión planteada, etc.).

-Cuando se plantean problemas de planteo que requieren cierto trabajo de modelización (parcial e incompleto), aparecen otras dificultades ligadas al poco conocimiento de los sistemas que se quieren estudiar y a la falta de costumbre de considerarlos como sistemas problemáticos que pueden ser estudiados de nuevo.

-Otra de las principales dificultades del álgebra escolar está ligada a la ausencia institucional de cuestionamientos tecnológicos (necesidad de justificación, de definición, etc.) en la matemática de la enseñanza obligatoria.

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

Para poder afrontar la ampliación y profundización de la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones en 3º de E.S.O., el alumno deberá disponer de los siguientes conocimientos previos.

A continuación se indican los que deben saber de 1º de E.S.O. según AnayaDigital.com:

-Operar con números naturales, enteros y racionales y sus propiedades

-Traducir enunciados básicos al lenguaje algebraico

-Calcular el valor numérico de una expresión algebraica

-Reconocer los elementos de un monomio: coeficiente, parte literal y grado

-Operar con monomios

-Diferenciar el concepto de ecuación y de identidad

-Resolver ecuaciones por tanteo para que el alumno conozca el significado de ecuación e incógnita

-Conocer los principios de las igualdades (propiedad de la suma y del producto a ambos miembros de la ecuación)

-Resolver ecuaciones de primer grado con una sola incógnita

-Resolver Problemas Verbales con ayuda de ecuaciones

A continuación se indican los nuevos contenidos que se ven en 2º de E.S.O. según AnayaDigital.com:

-Operar con polinomios

-Conocer las tres identidades notables: cuadrado de la suma, cuadrado de la diferencia y suma por diferencia

-Extraer factor común de expresiones algebraicas

-Simplificar fracciones algebraicas teniendo en cuenta los productos notables y la extracción de factor común

-Resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita con denominadores

-Resolver ecuaciones de segundo grado completas e incompletas

-Representar gráficamente ecuaciones lineales (de primer grado con dos incógnitas)

-Representar gráficamente un sistema de ecuaciones lineales y su punto de corte (si es que lo tiene)

-Resolver sistemas de ecuaciones lineales por los siguientes tres métodos: sustitución, igualación y reducción

-Resolver problemas sencillos utilizando los sistemas de ecuaciones lineales

Finalmente se muestran los nuevos contenidos que se imparten en 3º de E.S.O. según AnayaDigital.com:

-Sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones algebraicas con letras en el denominador

Tras leer el capítulo 3 del estudio realizado por Bolea (2002) [5] podemos resumir que los conocimientos previos en los que se basa la construcción del álgebra escolar son los siguientes:

-Dado que el álgebra escolar surge inicialmente como herramienta de modelización de sistemas matemáticos o extramatemáticos, es necesario conocer mínimamente el sistema que se quiere modelizar y, en particular, las limitaciones del trabajo dentro de este sistema. Como ejemplo podemos citar fórmulas pertenecientes a campos científicos como son la Física o la Química y que a veces necesitaremos conocer y saber cuándo aplicarlas.

-Dado que la modelización algebraica destaca la existencia de diferentes tipos de magnitudes en un mismo sistema, así como las relaciones entre ellas, es necesario cierta familiaridad con estas magnitudes, familiaridad que no debe reducirse al simple cálculo aritmético (magnitudes equivalentes, magnitudes continuas y discretas, asignación de unidades, relación entre magnitudes, etc.). Como ejemplos podemos citar el sistema sexagesimal de la medida del tiempo y de los ángulos, así como las diferentes magnitudes utilizadas para medir longitud, masa, capacidad, superficie y volumen y magnitudes del ámbito de la física, tiempo, moneda, etc.

Sería deseable que la enseñanza anterior a 3º de E.S.O. haya ayudado a los alumnos a adquirir estos conocimientos previos. No obstante lo constataremos a través de algunas actividades que traten de asegurar que los alumnos posean dichos conocimientos, tales como:

-Traducción de enunciados sencillos al lenguaje algebraico

-Resolución de ecuaciones de primer grado resolviéndolas por tanteo, por la técnica de la balanza (principio de las igualdades) y por la técnica generalizada del cambio de operación al pasar un monomio o número de un miembro de la ecuación al otro (la suma por la resta y viceversa; la multiplicación por la división y viceversa).

-Resolución de ecuaciones de segundo grado completas e incompletas.

-Resolución de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

-Problemas algebraicos verbales de ecuaciones de primer y segundo grado y de sistemas de ecuaciones lineales

Una posible prueba de diagnóstico podría ser la siguiente:

1. Traduce los siguientes enunciados al lenguaje algebraico y reduce operando, cuando sea necesario, dichas expresiones:

La suma de tres números enteros consecutivos

El doble de la edad que tendré dentro de cinco años

El precio de una camisa rebajado en un 20%

2. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$2(2x-3)=6+x$$

$$\frac{x-1}{6}-\frac{x-3}{2}=-1$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x^2-5x=0$$

$$x^2-25=0$$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x-4y=-6 \\ 2x+4y=16 \end{cases}$$

4. Resuelve el siguiente problema:

Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

La principal razón de ser del álgebra creemos que es proporcionar un nuevo instrumento para resolver problemas que la aritmética no puede resolver por las limitaciones de la misma.

Para ver la potencia del álgebra respecto de la aritmética, se expone a continuación el problema verbal planteado por Gascón y analizado en el estudio de Bolea (2002) [5] desde dos perspectivas diferentes (aritmética y álgebra) de acuerdo a unos modificaciones ligeras de los datos del enunciado de dicho problema verbal.

Un grupo de 18 amigos cenan juntos y, a la hora de pagar la cuenta, resulta que algunos de ellos no tienen dinero por lo que cada uno de los restantes debe pagar 300 pesetas más de lo que le correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a un total de 27000 pesetas, ¿cuántos amigos no pagan porque no tienen dinero?

Un grupo de amigos cenan juntos y, a la hora de pagar la cuenta, resulta que 3 de ellos no tienen dinero por lo que cada uno de los restantes debe pagar 300 pesetas más de lo que le correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a un total de 27000 pesetas, calcular el número total de amigos que han cenado.

Aparentemente los enunciados son similares, la misma situación pero con informaciones diferentes. En uno la incógnita es el número de amigos que no pagan y en el otro el número total de amigos que han ido a cenar. Pero mientras en el primero la aritmética nos resuelve el problema, en el segundo no.

RESOLUCIÓN ARITMÉTICA	RESOLUCIÓN
$\frac{27000}{18}$ = 1500 pts. que debe pagar cada uno 1500 + 300 = 1800 pts. que pagan los que tienen dinero $\frac{27000}{1800}$ = 15 personas que tienen dinero 18 – 15 = 3 personas que no pagan	Número de amigos que cenan = x (INCÓGNITA) Número de amigos que pagan = x-3 Cantidad pagada por cada uno de los que pagan = $\frac{27000}{x} + 300$ Importe de la cuenta: Igualdad entre dos maneras de expresar la misma cantidad. $27000 = (\frac{27000}{x} + 300) * (x - 3)$

Según el estudio de Bolea (2002) [5], en concreto del capítulo 3, podemos resumir que las razones de ser en las que se basa la construcción del álgebra escolar son los siguientes:

-Algunas de las mejores situaciones para introducir el álgebra escolar son los “problemas inversos” como el de J. Gascón visto anteriormente, esto es, problemas en los que se invierten los datos e incógnitas y que, por ello, no pueden resolverse mediante técnicas directas aritméticas o geométricas. Un conocimiento previo importante es, por lo tanto, el dominio de estas técnicas directas (aritmética).

-El álgebra escolar es un instrumento para resolver problemas acerca de sistemas conocidos matemáticos o extramatemáticos: aritméticos, geométricos, físicos, comerciales, de la vida cotidiana, etc.

-El proceso de modelización algebraica es una herramienta potente para describir, generalizar y justificar procedimientos y propiedades de los sistemas estudiados (papel tecnológico del álgebra).

-El instrumento algebraico permite plantear y resolver problemas de diferentes ámbitos matemáticos (aritméticos, geométricos, combinatorios, comerciales, etc.) que son muy difíciles de plantear y de resolver sin álgebra.

-El álgebra escolar permite unificar tipos de problemas que aparecen aislados en cada bloque temático de la organización matemática escolar, e incluso entre diferentes bloques.

Pensamos que la razón de ser del álgebra (superar a la aritmética) que vamos a tener en cuenta para introducir las Ecuaciones y los Sistemas de Ecuaciones en 3º de E.S.O. sí que coincide con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto.

Según Carl B. Boyer (1987) [6], al hablar de la historia de los sistemas de ecuaciones, nos trasladamos a Mesopotamia. Ya los egipcios habían tratado con ecuaciones lineales, pero los babilonios casi no se centraron en ellas, tal vez por considerarlas muy elementales. Sin embargo, fueron los primeros en resolver sistemas de ecuaciones de hasta diez ecuaciones y diez incógnitas.

Aunque los matemáticos griegos se centraron mayormente en la geometría, la tradición aritmético-algebraica mesopotámica no fue nunca desechada en la matemática griega, ya que las fuentes muestran que fueron incorporados algunos resultados. Entre los matemáticos griegos que se dedicaron al álgebra, destacamos a Diofanto y Thymaridas. Thymaridas (400 a.C. – 350 a.C.) diseñó un método para resolver sistemas de n ecuaciones lineales y n incógnitas conocido como “La flor de Thymaridas”. Diofanto (s. III a.C.) resolvía problemas en los que aparecían sistemas de ecuaciones transformándolos en una ecuación lineal aunque nunca encontró un método general.

Los hindúes, a pesar de que no obtuvieron ningún método general de resolución también trabajaron con sistemas de ecuaciones como se muestra en sus documentos.

Al hablar de la matemática china, encontramos el libro “Nueve capítulos sobre el arte de las matemáticas” (Jiu Zhang Suan Shu, s. I y II a.C.), en el que aparece el primer ejemplo conocido de uso del método de matrices, equivalente al que hoy conocemos como método de Gauss, para resolver un sistema de ecuaciones simultaneas. El capítulo ocho tiene importancia por la resolución de problemas que conducen a un sistema de ecuaciones lineales utilizando números positivos y negativos; uno de los problemas de este capítulo, por ejemplo, plantea la resolución de un sistema de ecuaciones de cuatro ecuaciones y cinco incógnitas, tratando así por primera vez el tema de las ecuaciones indeterminadas.

El estudio de este objeto matemático en la matemática oriental se debe a la necesidad de resolver problemas económicos y administrativos tales como medición de campos, construcción de canales y diques, obras de fortificación, cálculo de impuestos, equivalencias entre diferentes especies de trigo, rendimientos de trabajo, medios de transporte, obras de irrigación…

Por otro lado, las ecuaciones cuadráticas aparecen ya con los babilonios. Por ejemplo, hay un problema en el que se pide hallar el lado de un cuadrado si su área menos el lado es igual a 14,30.

La geometría nos proporciona elementos tecnológicos que justifican las fórmulas algebraicas. Fue Euclides (s. III a.C.) quien demostró las igualdades notables geométricas en su libro II de los Elementos como ejemplos de ecuaciones cuadráticas. Este libro no trata el tema del álgebra, puesto que no resuelve problemas numéricos ni mucho menos de ecuaciones, por el contrario, el libro versa sobre la igualdad de áreas de rectángulos y cuadrados.

Como hemos podido apreciar el álgebra fue utilizada para resolver casos concretos, pero fueron los árabes los primeros que le dieron un uso más genérico: encontraron un método general de aplicación.

Estos contribuyeron en la creación, el crecimiento y la difusión del álgebra. Cabe recordar la gran importancia del álgebra al ser una herramienta útil en diferentes campos matemáticos como son la Geometría, la Trigonometría, el Cálculo (funciones y gráficas), la Estadística y la Probabilidad e incluso en la propia Aritmética (pueden aparecer junto a todos los números reales y complejos, en Proporcionalidad, Sucesiones y Progresiones, etc.).

Según Socas, Camacho, Palarea y Hernández (1989) [7], el álgebra se caracteriza por sus métodos, que conllevan al uso de letras y expresiones literales sobre las que se realizan operaciones. Está presente en toda la matemática, pues cualquier problema termina convirtiéndose en un cálculo más o menos algebraico.

La palabra <<ALGEBRA>> proviene del título de un libro *Al-jabr* (algunos usan *Al-gebr*) *w´al-muqabalah*, escrito en Bagdad, alrededor del año 825 por el matemático y astrónomo Mohammed ibn-Musa al-Khwarizmi (Mohammed hijo de Musa nativo de Khwarizmi), que muestra en sus trabajos la primera fórmula general para la resolución de ecuaciones de primer y segundo grados.

El título *Al-jabr w´al-muqabalah* significa <<ciencia de la restauración y oposición>> o <<transposición y eliminación>> o, como expresa Carl Boyer, la transferencia de términos al otro miembro de la ecuación (al-jabr) y la cancelación de términos en ambos miembros de la ecuación (w´al-muqabalah).

Así, dada la ecuación

$$x^2 + 3x + 7 = 7 - 2x + 4x^3$$

al-jabr da (transferencia de términos al otro miembro de la ecuación)

$$x^2 + 3x + 7 + 2x = 7 - 2x + 4x^3 + 2x$$

$$x^2 + 5x + 7 = 7 + 4x^3$$

w´al-muqabalah da (cancelación de términos en ambos miembros de la ecuación)

$$x^2 + 5x = 4x^3$$

Esta obra fue traducida al latín en los primeros años del siglo XII por Juan de Sevilla y Gerardo de Cremona, y con el tiempo se le llamó simplemente *Algebra*.

Para finalizar este apartado, indicamos varios problemas que pensamos que se constituyen en razones de ser del álgebra y que, por lo tanto, no pueden resolverse por aritmética.

Por un lado tenemos el problema ya visto de Gascón sobre una cena de amigos:

Un grupo de amigos cenan juntos y, a la hora de pagar la cuenta, resulta que 3 de ellos no tienen dinero por lo que cada uno de los restantes debe pagar 300 pesetas más de lo que le correspondía. Sabiendo que la cuenta ascendía a un total de 27000 pesetas, calcular el número total de amigos que han cenado.

Algunos textos como el de Yákovlevich Perelmán (1965) [8] incluyen problemas que hacen referencia a matemáticos ilustres como es el caso de La Vida de Diofanto:

La historia ha conservado pocos rasgos biográficos de Diofanto, notable matemático de la antigüedad. Todo lo que se conoce acerca de él ha sido tomado de la dedicatoria que figura en su sepulcro, inscripción compuesta en forma de ejercicio matemático. Reproducimos esta inscripción:

En la lengua vernácula	En el idioma del álgebra
¡Caminante! Aquí fueron sepultados los restos de Diofanto. Y los números pueden mostrar, ¡Oh milagro!, cuan larga fue su vida,	x
Cuya sexta parte constituyó su hermosa infancia.	$\frac{x}{6}$
Había transcurrido además una duodécima parte de su vida, cuando de vello cubrióse su barbilla	$\frac{x}{12}$
Y la séptima parte de su existencia transcurrió en un matrimonio estéril.	$\frac{x}{7}$

Pasó un quinquenio más y le hizo dichoso el nacimiento de su precioso primogénito,	5
Que entregó su cuerpo, su hermosa existencia, a la tierra, que duró tan solo la mitad de la de su padre	$\frac{x}{2}$
Y con profunda pena bajó a la sepultura, habiendo sobrevivido cuatro años al deceso de su hijo	4
Dime cuantos años había vivido Diofanto cuando le llegó la muerte.	

Ecuación: $\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$

Al resolver la ecuación y hallar el valor de la incógnita, 84, conocemos los siguientes datos biográficos de Diofanto: se casó a los 21 años, fue padre a los 38, perdió a su hijo a los 80 y murió a los 84.

Como curiosidad de problema algebraico de otras culturas como es la india es el de la manada de monos que puede ser presentado en verso tal y como fue traducido por Lebedev, autor del excelente libro ¿Quién inventó el álgebra?, y recogido en el texto de Yákovlevich Perelmán (1965) [8]:

Regocíjanse los monos
divididos en dos bandos:
su octava parte al cuadrado
en el bosque se solaza.
Con alegres gritos, doce
atronando el campo están.
¿Sabes cuántos monos hay
en la manada, en total?

Ecuación: $\left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 = x$

de donde $x_1 = 48$, $x_2 = 16$.

El problema tiene dos soluciones positivas: en la manada puede haber 48 y 16 monos. Las dos soluciones satisfacen las condiciones del problema.

Respecto a la metodología a seguir en el aula para su implementación será la siguiente: se hará leer a un alumno cada enunciado y se les hará pensar y se les pedirá que planteen la forma de resolver estos problemas de forma individual; luego se hará una puesta en común y se les ayudará a pasar del enunciado verbal al lenguaje algebraico según se vaya leyendo el enunciado de nuevo; finalmente se juntarán todas las expresiones algebraicas para formar la ecuación de cada problema, las cuales resolverán y comprobarán y razonarán las soluciones. Para acabar se preguntará a los alumnos dónde han tenido más dificultades.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

Como ya hemos indicado anteriormente en el apartado B sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje de las Ecuaciones y Sistemas de Ecuaciones en 3º de E.S.O., existen cuatro tipos de problemas algebraicos:

I. De traducción

II. Resolución de ecuaciones sin contexto

III. Resolución de sistemas de ecuaciones sin contexto

IV. Problemas Verbales (sean de una ecuación o de un sistema de ecuaciones)

A continuación vamos a presentar las técnicas y tecnologías asociadas a cada uno de ellos:

I. De traducción

-Técnica: traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico.

-Justificación: comprensión lectora y acciones propuestas en el problema.

Ejemplos de problemas de traducción sacados de la web www.amolasmates.es para 3º de E.S.O.:

El 30% de un número.

El área de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

El perímetro de un rectángulo de base 3 cm y altura desconocida.

El doble del resultado de sumarle a un número entero su siguiente.

El triple del resultado de sumar un número con su inverso.

El doble de la edad que tendré dentro de cinco años.

El quíntuplo del área de un cuadrado de lado x.

El área de un triángulo del que se sabe que su base es la mitad de su altura.

La mitad del resultado de sumarle 3 a un número.

La tercera parte del área de un rectángulo en el que la base mide el doble que la altura.

El cuadrado de la suma de dos números enteros consecutivos.

La media de un número y su cuádruplo.

La cuarta parte de un número entero más el cuadrado de su siguiente.

El perímetro de un triángulo isósceles del que sabemos que su lado desigual mide 4 cm menos que cada uno de los dos lados iguales.

La diagonal de un cuadrado de lado x.

El doble de la edad que tenía hace 7 años.

La suma de un número con el doble de otro.

El precio de una camisa rebajado en un 20%.

El área de un círculo de radio x.

La suma de tres números enteros consecutivos.

II. Resolución de ecuaciones sin contexto

-Técnicas: resolver ecuaciones de primer grado y de segundo grado

-Tecnología: principio de las igualdades

Ecuaciones de primer grado o lineales.

Son del tipo $ax + b = 0$, con $a \neq 0$, ó cualquier otra ecuación en la que al operar, trasponer términos y simplificar adoptan esa expresión.

$(x + 1)^2 = x^2 - 2$

$x^2 + 2x + 1 = x^2 - 2$

$2x + 1 = -2$

$2x + 3 = 0$

En general para resolver una ecuación de primer grado debemos seguir los siguientes pasos:

1º Quitar paréntesis.

2º Quitar denominadores.

3º Agrupar los términos en x en un miembro y los términos independientes en el otro.

4º Reducir los términos semejantes.

5º Despejar la incógnita.

Ejemplos:

- $2x = 6$

Despejamos la incógnita:

$x = \frac{6}{2}$ $x = 3$

- $2x - 3 = 6 + x$

Agrupamos los términos semejantes y los independientes, y sumamos:

$2x - x = 6 + 3$ $x = 9$

- $2(2x - 3) = 6 + x$

Quitamos paréntesis:

$4x - 6 = 6 + x$

Agrupamos términos y sumamos:

$4x - x = 6 + 6$ $3x = 12$

Despejamos la incógnita:

$$x = \frac{12}{3} \qquad x = 4$$

- $$\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$$

Quitamos denominadores, para ello en primer lugar hallamos el mínimo común múltiplo: m.c.m. (6,2) = 6

$$x - 1 - 3(x-3) = 6$$

Quitamos paréntesis, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$x - 1 - 3x + 9 = -6; \qquad x - 3x = -6 - 9 + 1; \qquad -2x = -14$$

Despejamos la incógnita:

$$2x = 14 \qquad x = \frac{14}{2} \qquad x = 7$$

- $$\frac{3}{4}(2x+4) = x + 19$$

Quitamos paréntesis y simplificamos:

$$\frac{6}{4}x + \frac{12}{4} = x + 19 \qquad \frac{3}{2}x + 3 = x + 19$$

Quitamos denominadores, agrupamos y sumamos los términos semejantes:

$$3x + 6 = 2x + 38 \qquad 3x - 2x = 38 - 6 \qquad x = 32$$

- $$2 - \left[-2 \cdot (x+1) - \frac{x-3}{2}\right] = \frac{2x}{3} - \frac{5x-3}{12} + 3x$$

Quitamos corchete:

$$2-\left(-2x-2-\frac{x-3}{2}\right)=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos paréntesis:

$$2+2x+2+\frac{x-3}{2}=\frac{2x}{3}-\frac{5x-3}{12}+3x$$

Quitamos denominadores:

$$24+24x+24+6\cdot(x-3)=8x-(5x-3)+36x$$

Quitamos paréntesis:

$$24+24x+24+6x-18=8x-5x+3+36x$$

Agrupamos términos:

$$24x+6x-8x+5x-36x=3-24-24+18$$

Sumamos:

$$-9x=-27$$

Dividimos los dos miembros por: -9

$$x=3$$

Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas.

Son ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Se resuelven mediante la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ejemplos:

- $x^2-5x+6=0$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 6}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{6}{2} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{4}{2} = 2 \end{cases}$$

- $2x^2 - 7x + 3 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} \nearrow x_1 = \frac{12}{4} = 3 \\ \searrow x_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

<u>Resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas</u>

Se dice que una ecuación de segundo grado es incompleta cuando alguno de los coeficientes, b o c, o ambos, son iguales a cero.

Ecuaciones de segundo grado incompletas:

$ax^2 = 0$

$ax^2 + b = 0$

$ax^2+bx=0$

A continuación se presentan ejemplos con resoluciones para cada caso:

$ax^2 = 0$

La solución es x = 0.

Ejemplos:

- $2x^2 = 0 \qquad x = 0$
- $\frac{2}{5}x^2 = 0 \qquad x = 0$

$ax^2 + bx = 0$

Extraemos factor común x:

$$x(ax+b)=0$$

$$x=0$$

$$ax+b=0 \qquad x=\frac{-b}{a}$$

Ejemplos:

- $x^2 - 5x = 0$

$$x(x-5)=0$$

$$x=0$$

$$x-5=0 \qquad x=5$$

- $2x^2 - 6x = 0$

$$2x(x-3)=0$$

$$2x=0 \qquad x=0$$

$$x-3=0 \qquad x=3$$

$ax^2 + c = 0$

Despejamos:

$$ax^2=-c \qquad x^2=\frac{-c}{a} \qquad x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \begin{cases} \nearrow x_1=\sqrt{\frac{-c}{a}} \\ \searrow x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}} \end{cases}$$

Ejemplos:

- $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 = 25 \qquad x = \pm\sqrt{25} \quad \begin{array}{l} \nearrow x_1 = \sqrt{25} = 5 \\ \searrow x_2 = -\sqrt{25} = -5 \end{array}$$

- $2x^2 + 8 = 0$

$$2x^2 = -8 \qquad x^2 = -4 \qquad x = \pm\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$$

III. Resolución de sistemas de ecuaciones sin contexto

-Técnicas: métodos de igualación, sustitución y reducción

-Tecnología: principio de las igualdades

Dos ecuaciones con dos incógnitas forman un sistema, cuando lo que pretendemos de ellas es encontrar su solución común.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

La solución de un sistema es un par de números x_1, y_1, tales que reemplazando x por x_1 e y por y_1, se satisfacen a la vez ambas ecuaciones.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

x = 2, y = 3

$$\begin{cases} 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 = -6 \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 16 \end{cases} \qquad \begin{cases} 6 - 12 = -6 \\ 4 + 12 = 16 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -6 = -6 \\ 16 = 16 \end{array}$$

Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución

1º Se despeja una incógnita en una de las ecuaciones.

2º Se sustituye la expresión de esta incógnita en la otra ecuación, obteniendo una ecuación con una sola incógnita.

3º Se resuelve la ecuación.

4º El valor obtenido se sustituye en la ecuación en la que aparecía la incógnita despejada.

5º Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

- $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Despejamos una de las incógnitas en una de las dos ecuaciones. Elegimos la incógnita que tenga el coeficiente más bajo.

$2x = 16 - 4y \qquad x = 8 - 2y$

Sustituimos en la otra ecuación la variable x, por el valor anterior:

$3(8 - 2y) - 4y = -6$

Resolvemos la ecuación obtenida:

$24 - 6y - 4y = -6 \qquad -10y = -30 \qquad y = 3$

Sustituimos el valor obtenido en la variable despejada.

$x = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 \qquad x = 2$

Solución:

$x = 2, \ y = 3$

<u>Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de igualación</u>

1º Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones.

2º Se igualan las expresiones, con lo que obtenemos una ecuación con una incógnita.

3º Se resuelve la ecuación.

4º El valor obtenido se sustituye en cualquiera de las dos expresiones en las que aparecía despejada la otra incógnita.

5º Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

Ejemplo:

- $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Despejamos, por ejemplo, la incógnita x de la primera y segunda ecuación:

$$3x = -6 + 4y \qquad x = \frac{-6 + 4y}{3}$$

$$2x = 16 - 4y \qquad x = \frac{16 - 4y}{2}$$

Igualamos ambas expresiones:

$$\frac{-6 + 4y}{3} = \frac{16 + 4y}{2}$$

Resolvemos la ecuación:

$$2(-6 + 4y) = 3(16 - 4y) \qquad -12 + 8y = 48 - 12y$$

$$8y + 12y = 48 + 12 \qquad 20y = 60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y, en una de las dos expresiones en las que tenemos despejada la x:

$$x = \frac{-6+4\cdot 3}{3} = \frac{-6+12}{3} \qquad x = 2$$

Solución:

$x = 2, \; y = 3$

Resolución de sistemas de ecuaciones por el método de reducción

1º Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por los números que convenga.

2º La restamos, y desaparece una de las incógnitas.

3º Se resuelve la ecuación resultante.

4º El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve.

5º Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema.

- $$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 & \xrightarrow{x2} \\ 2x + 4y = 16 & \xrightarrow{x(-3)} \end{cases} \begin{cases} 6x - 8y = -12 \\ -6x - 12y = -48 \end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases} \cancel{6x} - 8y = -12 \\ \cancel{-6x} - 12y = -48 \end{cases}$$
$$-20y = -60 \qquad y = 3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x + 4\cdot 3 = 16 \qquad 2x + 12 = 16 \qquad 2x = 4 \qquad x = 2$$

Solución: $x = 2, \; y = 3$

IV. Problemas Verbales (sean de una ecuación o de un sistema de ecuaciones)

-Técnica: construcción del modelo matemático. Para ello es necesario:

- Traducir
- Relacionar magnitudes
- Plantear la ecuación o el sistema de ecuaciones
- Resolverla/o
- Comprobar la solución

-A continuación adjuntamos Problemas Verbales interesantes que hemos sacado de la web www.vitutor.es sobre ecuaciones de primer grado, ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales:

Problemas Verbales de ecuaciones de primer grado

1. Un padre tiene 35 años y su hijo 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre tres veces mayor que la edad del hijo?

2. Si al doble de un número se le resta su mitad resulta 54. ¿Cuál es el número?

3. Halla el valor de los tres ángulos de un triángulo sabiendo que B mide 40° más que C y que A mide 40° más que B.

4. En una reunión hay doble número de mujeres que de hombres y triple número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántos hombres, mujeres y niños hay si la reunión la componen 96 personas?

5. Se han consumido 7/8 de un bidón de aceite. Reponemos 38 l y el bidón ha quedado lleno hasta sus 3/5 partes. Calcula la capacidad del bidón.

6. En una librería, Ana compra un libro con la tercera parte de su dinero y un cómic con las dos terceras partes de lo que le quedaba. Al salir de la librería tenía 12 €. ¿Cuánto dinero tenía Ana?

Problemas Verbales de ecuaciones de segundo grado:

1. Dentro de 11 años la edad de Pedro será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. Calcula la edad de Pedro.

2. Halla un número entero sabiendo que la suma con su inverso es 25/6

3. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medidas en centímetros tres números pares consecutivos. Halla los valores de dichos lados.

4. Un jardín rectangular de 50 m de largo por 34 m de ancho está rodeado por un camino de arena uniforme. Halla la anchura de dicho camino si se sabe que su área es 540 m^2.

5. Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6 cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Halla las dimensiones de la caja.

Problemas de sistemas de ecuaciones lineales:

1. ¿Cuál es el área de un rectángulo sabiendo que su perímetro mide 16 cm y que su base es el triple de su altura?

2. Una granja tiene pavos y cerdos, en total hay 58 cabezas y 168 patas. ¿Cuántos cerdos y pavos hay?

3. Antonio dice a Pedro: "el dinero que tengo es el doble del que tienes tú", y Pedro contesta: "si tú me das seis euros tendremos los dos igual cantidad". ¿Cuánto dinero tenía cada uno?

4. La cifra de las decenas de un número de dos cifras es el doble de la cifra de las unidades, y si a dicho número le restamos 27 se obtiene el número que resulta al invertir el orden de sus cifras. ¿Cuál es ese número?

5. En una empresa trabajan 60 personas. Usan gafas el 16% de los hombres y el 20% de las mujeres. Si el número total de personas que usan gafas es 11. ¿Cuántos hombres

y mujeres hay en la empresa?

6. Juan compró un ordenador y un televisor por 2000 € y los vendió por 2260 €. ¿Cuánto le costó cada objeto, sabiendo que en la venta del ordenador ganó el 10% y en la venta del televisor ganó el 15%?

7. Por la compra de dos electrodomésticos hemos pagado 3500 €. Si en el primero nos hubieran hecho un descuento del 10% y en el segundo un descuento del 8% hubiéramos pagado 3170 €. ¿Cuál es el precio de cada artículo?

F. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

En este apartado en primer lugar se va a mostrar un cronograma sobre la secuencia didáctica y luego la propia secuencia didáctica con la metodología a seguir en cada sesión y los tipos de problemas que se estudiarán en cada sesión.

SESIÓN	PROBLEMAS DE TRADUCCIÓN	PROBLEMAS DE ECUACIONES SIN CONTEXTO	PROBLEMAS DE SISTEMAS DE ECUACIONES SIN CONTEXTO	PROBLEMAS VERBALES DE ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES
1: PRUEBA PREVIOS	x	x	x	x
2: RAZÓN DE SER				x

3		x (de primer grado)		
4		x (de segundo grado)		
5				x (de primer y segundo grado)
6				x (de primer y segundo grado)
7			x	
8				x (de sistemas de ecuaciones lineales)
9				x (de sistemas de ecuaciones lineales)
10: REPASO	x	x	x	x
11: EXAMEN	x	x	x	x

Para calcular la duración temporal hemos utilizado como referencia el libro de texto de Martínez, Montesinos, González y López (2007) [9] sobre Matemáticas en 3º de E.S.O.

El contenido del libro que he tratado consta de las unidades 3 (Ecuaciones de primer y segundo grado) y 4 (Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas). La duración de las unidades 3 y 4 serían (según el libro) de 6 y 4 sesiones respectivamente, sin embargo, si se cree necesario, pueden modificarse dichas cantidades de sesiones.

Ecuaciones de primer y segundo grado (6 sesiones).

SESIÓN 1: En la primera sesión de inicio del álgebra en 3º de E.S.O. realizaríamos en clase una prueba de diagnóstico a los alumnos de forma individual para saber qué recuerdan y qué no recuerdan respecto a los contenidos de 1º y 2º de E.S.O. y así saber dónde hay que reforzar más este año. Esta prueba queda detallada en el Apartado C de Conocimientos Previos de esta memoria. Posteriormente, esta prueba se calificará en casa y se les entregará al día siguiente, pero sin correcciones (sólo calificada). Se les dice a los alumnos que durante este año deben corregirla correctamente porque podría ser un tipo de examen. De esta forma los alumnos se dan cuenta de lo que saben y de lo que no saben y, que por tanto, deben mejorar durante este curso.

SESIÓN 2: Durante esta sesión se proporciona a los alumnos en papel los enunciados de los cuatro problemas algebraicos que consideramos razones de ser y que quedan expuestos y resueltos en el Apartado D de Razones de ser de esta memoria. Estos son: la cena de los amigos de Gascón (enunciado aritmético y enunciado algebraico), el problema de la vida de Difunto y el problema de la manada de monos. La metodología a seguir será la siguiente: se hará leer a un alumno cada enunciado y se les hará pensar y se les pedirá que planteen la forma de resolver estos problemas de forma individual; luego se hará una puesta en común y se les ayudará a pasar del enunciado verbal al lenguaje algebraico según se vaya leyendo el enunciado de nuevo; finalmente se juntarán todas las expresiones algebraicas para formar la ecuación de cada problema, las cuales resolverán y comprobarán y razonarán las soluciones. Para acabar se preguntará a los alumnos dónde han tenido más dificultades. Si no da tiempo a resolverlas en clase, deberán hacerlo en casa.

SESIÓN 3: Explicaríamos a los alumnos, de forma institucional, los pasos para resolver una ecuación de primer grado (con denominadores y paréntesis) según se vio en el apartado E en la sección de Resolución de ecuaciones sin contexto de esta memoria y resolveríamos en la pizarra el ejemplo más complejo que hay en dicha sección recordando los pasos a seguir vistos anteriormente. Luego les haríamos realizar ejercicios de aplicación (que hay en dicha sección) en clase de forma individual y los que no diese tiempo los mandaríamos como tarea para casa.

SESIÓN 4: Corregiríamos algún ejercicio que no quedase claro del día anterior y hoy ya explicaríamos la resolución de ecuaciones de segundo grado como ya se vio en el apartado E en la sección de Resolución de ecuaciones sin contexto de forma institucional: primero mostraríamos de forma genérica con letras el aspecto que tienen las ecuaciones de segundo grado completas e incompletas y cómo se resuelven (con la fórmula general en el primer caso y con álgebra en el segundo caso) también con letras; para cada tipo pondríamos un ejemplo numérico a resolver. Finalmente los alumnos, de forma individual y en clase, harían ejercicios de aplicación como los que hay en dicha sección. Lo que no diese tiempo hacer en clase, se hará como tarea para casa.

SESIÓN 5: Corregiríamos, si ha habido alguna duda, algunos de los ejercicios mandados para casa del día anterior. Los alumnos empezarían a realizar de forma individual en grupos de cuatro personas Problemas Verbales sobre ecuaciones de primer grado y de segundo grado como los que aparecen en el apartado E de la sección de Problemas Verbales. El profesor estaría en el aula observando y disponible para ayudar en caso de que algún alumno lo requiera. Si es así, se le resolverá la duda en voz alta para el resto de los alumnos interactuando con ellos por si saben la respuesta.

SESIÓN 6: Seguiríamos realizando Problemas Verbales pero en grupos de cuatro personas.

Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas (4 sesiones contando con la de repaso).

SESIÓN 7: En la primera sesión de introducción del tema simplemente haríamos ver a los alumnos, gráficamente y sin insistir mucho en ello (ya las funciones lineales se ven en el tema siguiente), en qué consiste una ecuación de dos incógnitas (función: recta), un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (dos rectas dibujadas en la misma gráfica) y sus posibles soluciones: sistemas incompatibles (cuando las rectas son paralelas y no coincidentes) y sistemas compatibles determinados (cuando las rectas se cortan en un punto que es la solución del problema) e indeterminados (cuando las rectas son coincidentes). Luego les explicaríamos en la misma sesión los tres métodos posibles de resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (sustitución, igualación y reducción) con un mismo ejemplo para que vean las diferencias y los pasos a seguir tal como aparece en el Apartado E en la sección de Resolución de ecuaciones sin contexto. Les mandaríamos ejercicios para hacer en clase de aplicación y lo que no diese tiempo sería para hacer en casa.

SESIÓN 8: Corregiríamos algunos de los ejercicios mandados para casa del día anterior si ha habido alguna duda y plantearíamos a los alumnos Problemas Verbales de aplicación sobre sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas (como los que aparecen en el apartado E en la sección de Problemas Verbales) dejándoles la elección del método de resolución (trabajo de forma individual en grupos de cuatro personas). El profesor estaría en el aula observando y disponible para ayudar en caso de que algún alumno lo requiera. Si es así, se le resolverá la duda en voz alta para el resto de los alumnos interactuando con ellos por si saben la respuesta. Les avisaríamos con tiempo a los alumnos de las próximas tres sesiones: trabajo de más Problemas Verbales, clase de dudas para el examen y finalmente el examen.

SESIÓN 9: Seguiríamos realizando Problemas Verbales similares a los del día anterior en grupos de cuatro personas.

SESIÓN 10: Clase de resolución de dudas para el examen.

ÚLTIMA SESIÓN 11: EXAMEN

G. SOBRE LA EVALUACIÓN

A continuación se muestra la prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evaluará el aprendizaje realizado por los alumnos sobre el temario. El tipo de ejercicios en los que está inspirada la prueba han sido contemplados desde la Autoevaluación de AnayaDigital.com para 3º de E.S.O.

Advertencia: ningún ejercicio podrá resolverse por tanteo.

1. Resuelve:

a) $3(5 - x) + 2x = 8 - (1 + x)$

b) $3(x - 1) + 3 - x = 2x$

c) $\frac{(x+1)}{2} - 3\frac{(x+1)}{10} = \frac{(3-x)}{4} - \frac{9}{10}$

2. Resuelve:

a) $5x^2 - 2x = 0$

b) $4x^2 - 9 = 0$

c) $2x^2 - 3x + 2 = 0$

3. Con una cuerda de 24 m de longitud hacemos un triángulo rectángulo en el que uno de los catetos mide 6 m. ¿Cuánto miden el otro cateto y la hipotenusa?

4. Resuelve por cualquiera de los tres métodos aprendidos (sustitución, eliminación o reducción) los siguientes dos sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 3y = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{(x+1)}{2} + y = 1 \\ \dfrac{(x-3)}{4} + 2y = 1 \end{cases}$$

5. Un agricultor comprueba que en el segundo de sus dos depósitos de agua para riego hay 10 litros más que en el primero. Traspasa 18 litros del segundo al primero y así este se queda con el doble que el segundo. Calcula la cantidad de agua que tenía cada depósito.

A continuación se indican los aspectos del conocimiento de los alumnos que se pretenden evaluar con cada una de las preguntas del examen anterior ordenados tal y como aparecen en dicha prueba:

1. Resolver ecuaciones de primer grado (con paréntesis y con denominadores)

2. Resolver ecuaciones de segundo grado de los diferentes tipos

3. Planteamiento de un problema de segundo grado pero que al resolverlo queda reducido a uno de primer grado

4. Resolución de sistemas de ecuaciones por diferentes caminos

5. Planteamiento de un problema con un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas

Pienso que los alumnos realizarán correctamente la mayoría de los ejercicios, excepto en los dos problemas ya que representan casos concretos que no siempre saben plantear correctamente.

A continuación se indican los criterios de evaluación seguidos para calificar dicho examen:

Son cinco ejercicios de 2 puntos cada uno.

En los tres ejercicios de cálculo el proceso elegido debe ser coherente y estar todo bien para puntuar; si hay un fallo leve como puede ser un signo mal puesto pero el resto está bien desarrollado, sólo se contará la mitad del ejercicio. Respecto a los problemas, sus planteamientos de las ecuaciones se puntuarán con 1 punto, aunque su resolución sea errónea.

H. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

BOA (Boletín Oficial de Aragón) según la ORDEN de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

AnayaDigital.com. (2013) de www.anayadigital.com

Amolasmates de http://www.amolasmates.es/

Vitutor (2012) de http://www.vitutor.com/

[1] Colera, J., García, J.E., Gaztelu, I. y Oliveira, M.J. (1998). *Matemáticas 3*. Madrid: Anaya

[2] Vizmanos, J.R., Anzola, M., Alcaide, F. y Peralla, J. (2007). *Matemáticas 3*. Madrid: SM Ábaco

[3] Vizmanos, J.R., Anzola, M., Bujanda, M. P. y Mansilla, S. (2009). *Matemáticas 3*. Madrid: SM Esfera

[4] Puig, L. y Cerdán, F. (1990). .*Acerca del carácter aritmético o algebraico de los Problemas Verbales*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia.

[5] Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Universidad de Zaragoza, Facultad de Ciencias, España.

[6] Carl B. Boyer (1987). *Historia de las matemáticas*. Madrid: Alianza Universidad Textos.

[7] Socas, M.M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Editorial Síntesis

[8] Perelmán, Y. (1965): *Álgebra Recreativa*, Editorial Mir, Moscú

[9] Martínez B., Montesinos P., González F. y López C. (2007). *Matemáticas 3º E.S.O. Guía Didáctica*. Madrid: McGraw-Hill.

ANEXO: PROBLEMAS INTERESANTES DE YÁKOVLEVICH PERELMÁN (1965) [8]

CAPITULO SEGUNDO

El idioma del algebra

$$27=27$$

El arte de plantear ecuaciones

El idioma del álgebra es la ecuación. «Para resolver un problema referente a números o relaciones abstractas de cantidades, basta con traducir dicho problema, del inglés u otra lengua al idioma algebraico», escribió el gran Newton en su manual de álgebra titulado *Aritmética Universal*. Isaac Newton mostró con ejemplos cómo debía efectuarse la traducción. He aquí uno de ellos:

En la lengua vernácula:	En el idioma del álgebra:
Un comerciante tenía una determinada suma de dinero	x
El primer año se gastó 100 libras	$x-100$
Aumentó el resto con un tercio de éste	$(x-100)+\frac{x-100}{3}=\frac{4x-400}{3}$

44

En la lengua vernácula	En el idioma del álgebra
Al año siguiente volvió a gastar 100 libras	$\frac{4x-400}{3}-100=\frac{4x-700}{3}$
y aumentó la suma restante en un tercio de ella	$\frac{4x-700}{3}+\frac{4x-700}{9}=\frac{16x-2\,800}{9}$
El tercer año gastó de nuevo 100 libras	$\frac{16x-2800}{9}-100=\frac{16x-3\,700}{9}$
Después de que hubo agregado su tercera parte	$\frac{16x-3\,700}{9}+\frac{16x-3\,700}{27}=\frac{64x-14\,800}{27}$
el capital llegó al doble del inicial	$\frac{64x-14\,800}{27}=2x$

Para determinar cuál es el capital inicial del comerciante no queda más que resolver la última ecuación.

La solución de una ecuación es, con frecuencia, tarea fácil; en cambio, plantear la ecuación a base de los datos de un problema suele ser más difícil. Hemos visto que el arte de plantear ecuaciones consiste, efectivamente, en traducir «la lengua vernácula a la algebraica». Pero el idioma del álgebra es lacónico en extremo, por eso no todos los giros del idioma materno son de fácil traducción. Las traducciones pueden ser muy

45

La ecuación piensa por nosotros

Si no cree que las ecuaciones son a veces más previsoras que nosotros mismos resuelva este problema:

El padre tiene 32 años; el hijo, 5. ¿Al cabo de cuántos años será la edad del padre diez veces mayor que la del hijo?

Expresemos el tiempo buscado con x. Al cabo de x años el padre tendrá $32 + x$ años; y el hijo, $5 + x$ años. Y como el padre debe tener 10 veces más años que el hijo, se establece la ecuación

$$32 + x = 10\,(5 + x).$$

Al resolverla hallamos que $x = -2$.

«Al cabo de menos 2 años» significa «hace dos años». Al plantear la ecuación no pensábamos que en el futuro la edad del padre no sería nunca 10 veces superior a la del hijo; esa correlación pudo tener lugar sólo en el pasado. La ecuación ha sido más reflexiva que nosotros, y nos ha recordado nuestro descuido.

Curiosidades y sorpresas

Hay ocasiones en las que al resolver las ecuaciones tropezamos con soluciones que pueden desconcertar a un matemático poco ducho. Véamos algunos ejemplos:

I. Hallar un número de dos cifras que tenga las siguientes propiedades: La cifra de las decenas debe ser 4 unidades inferior a la cifra de las unidades. Si ese mismo número se escribe invirtiendo el lugar de sus cifras y se le sustrae el número buscado, se obtiene 27.

Expresando el guarismo de las decenas con la x, y el de las unidades con la y, formaremos fácilmente el siguiente sistema de ecuaciones para este problema:

$$\begin{cases} x = y - 4, \\ (10y + x) - (10x + y) = 27. \end{cases}$$

Si el valor que tiene x en la primera ecuación se coloca en la segunda, resultará que

$$10y + y - 4\,[10\,(y - 4) + y] = 27,$$

al operar tendremos que

$$36 = 27.$$

No se ha hallado el valor de las incógnitas, pero se ha visto que $36 = 27$... ¿qué quiere decir esto?

Esto significa que no existe ningún número compuesto de dos cifras que responda a las condiciones del problema, y que las ecuaciones planteadas se contradicen mutuamente.

II. Si cambiamos un tanto las condiciones del problema anterior recibiremos otra sorpresa. Supongamos que la cifra de las decenas es menor en 3 unidades que la cifra de las unidades. Las demás condiciones del problema permanecen invariables ¿Cuál será este número?

Planteemos la ecuación. Si expresamos la cifra de las decenas con la x, la de las unidades será $x + 3$. Traduzcamos el problema al idioma del álgebra:

$$10(x + 3) + x - [10x + (x + 3)] = 27.$$

Al reducir se obtiene:

$$27 = 27.$$

Esta igualdad es incuestionable, pero nada nos dice de la raíz de x ¿Significa esto que no existe ningún valor que responda a las condiciones del problema?

Por el contrario. Esto se debe a que la igualdad dada es una identidad, es decir, que es cierta cualquiera que sea la magnitud de la incógnita x. En efecto, las condiciones del problema son válidas para todo número compuesto de dos cifras siempre que el guarismo de las unidades sea mayor en 3 unidades que el de las decenas:

$$14 + 27 = 41, \qquad 47 + 27 = 74,$$
$$25 + 27 = 52, \qquad 58 + 27 = 85,$$
$$36 + 27 = 63, \qquad 69 + 27 = 96.$$

«si yo hubiera llevado la misma cantidad de huevos que tú, habría recibido 15 cruceros». La segunda contestó: «Y si yo hubiera vendido los huevos que tenías tú habría sacado de ellos $6^2/_3$ cruceros».

¿Cuántos huevos llevó cada una?

Supongamos que la primera campesina tenía x huevos. La segunda tendría $100 - x$. Si la primera hubiera tenido $100 - x$ habría sacado de ellos 15 cruceros. Eso quiere decir que la primera campesina vendió los huevos a $\frac{15}{100-x}$ cada uno.

De esta manera vemos que la segunda campesina vendió los huevos a $6\frac{2}{3} : x = \frac{20}{3x}$ cada uno.

Hallemos ahora la cantidad obtenida por cada campesina:

la primera:

$$x \cdot \frac{15}{100-x} = \frac{15x}{100-x},$$

la segunda:

$$(100-x) \cdot \frac{20}{3x} = \frac{20(100-x)}{3x}.$$

Y como ambas recibieron lo mismo, entonces

$$\frac{15x}{100-x} = \frac{20(100-x)}{3x},$$

que después de las correspondientes transformaciones resultará

$$x^2 + 160x - 8\,000 = 0,$$

de donde

$$x_1 = 40, \quad x_2 = -200.$$

La raíz negativa carece de sentido en el presente caso. El problema no tiene más que un resultado: la primera campesina llevó al mercado 40 huevos y la segunda 60.