TRABAJO FIN DE MASTER

Geometría analítica del espacio

2º DE BACHILLERATO

Opción Científico-Tecnológica

Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas.

ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS.

Autor: JESUS BERDÚN HERRERA
Tutor: ALBERTO ARNAL BAILERA

INDICE:

A. SOBRE LA DEFINICION DEL OBJETO MATEMATICO A ENSEÑAR.

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

Geometría analítica en el espacio.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

2º curso de Bachillerato. Matemáticas, opción científico-tecnológica.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Pretendemos dar respuesta a los siguientes problemas:

- Cómo hallar distancias o ángulos entre elementos del espacio, o construir nuevos elementos que se encuentren a una distancia determinada o formen un determinado ángulo con un elemento dado.

- Cómo resolver construcciones espaciales diversas utilizando la geometría analítica.

Las técnicas para resolver este tipo de problemas no son únicas. Fundamentalmente, serán definidas partiendo de tres caminos:

1- Resolución del problema puramente algebraico mediante el planteamiento de sistemas de ecuaciones.
2- Utilización de las propiedades y el significado del producto escalar.
3- Utilización de las propiedades y el significado del producto vectorial.

Uno de los objetivos más importantes al desarrollar esta unidad didáctica consistirá en hacer comprender al alumno la utilidad de cada herramienta en cada caso, lo que le permitirá, en último término, escoger la más adecuada a la hora de enfrentarse a un problema métrico.

La tecnología que justifica estas técnicas es en este caso de mayor importancia que el resultado obtenido. Será el uso adecuado de cada herramienta el que nos permita obtener expresiones sencillas, pero la enseñanza ha de incidir precisamente en el valor y el manejo de dichas herramientas a la hora de relacionar los elementos del espacio, huyendo del mero aprendizaje de unas fórmulas que nos permiten resolver rápidamente un conjunto de situaciones concretas.

Otro aspecto relevante a la hora de instaurar una técnica será potenciar la visión espacial del problema métrico. Cada desarrollo y cada demostración deben ir acompañados, en su punto de partida, de una expresión gráfica que permita al alumno visualizar las condiciones que configuran cada situación. La complejidad que presenta el dibujo en tres dimensiones puede paliarse, en gran medida, con el uso de medios materiales artesanales para construir figuras y configuraciones espaciales.

Finalmente, ha de incluirse como un medio de incuestionable valía el uso del actual software disponible, con programas como Geogebra, que nos permitirán una visualización y resolución eficaz del problema.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

Una primera justificación consiste en presentar la necesidad de ampliar al espacio (tres dimensiones) lo que ya se conoce en el plano, o de generalizar una situación partiendo de un caso más simple que sí sabríamos resolver.

Veamos cómo lo hacen algunas editoras:

> *"Determina la ecuación de la recta perpendicular al plano horizontal z=1 que pasa por el punto (-1,3,2). Como ves, este problema es sencillo. Pero, ¿cómo se haría si fuese el plano inclinado 2x-y+z=1?*

(Ed. Santillana, 2009)

La presentación de un problema contextualizado o de una fotografía llamativa suele ser también una forma de introducir la geometría en el espacio.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

El campo de problemas que incluyen los libros de texto da respuesta a las exigencias del currículo:

- Expresiones de la ecuación de la recta y del plano.
- Posiciones relativas entre elementos.
- Cálculo de distancias y de ángulos.

Cada uno de estos tres tipos de problemas puede enmarcarse en una unidad didáctica, pues las técnicas a utilizar para resolverlos requieren tiempo para su explicación, su compresión y su ejercitación. En este caso, nos centramos en el estudio del último de ellos, *cálculo de distancias y ángulos* y, por extensión, *problemas métricos*.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Fundamentalmente, el alumno adquiere unas técnicas que le permiten resolver un conjunto de situaciones.

Antes de comenzar este bloque de geometría analítica, el alumno posee unos conocimientos que le permitirían resolver muchas de las situaciones que se van a plantear. Durante estas sesiones, el alumno va a trabajar con esas herramientas para conseguir otras que le permitan resolver el problema de una forma más rápida.

Además de incorporar esas nuevas técnicas, el trabajo realizado afianzará la comprensión del cálculo vectorial que previamente ha estudiado, fortaleciendo el uso de operaciones como el producto escalar y vectorial.

Los nuevos contenidos constituyen también un complemento estrechamente vinculado a otros dos campos: la resolución de sistemas de ecuaciones y la geometría descriptiva que se estudia en la asignatura de Dibujo Técnico. En relación al primero, la geometría objeto de estudio aporta su expresión gráfica, clarificando eficazmente conceptos como *solución del sistema*, *incompatibilidad* o *indeterminación*. Respecto al segundo, el alumno comprobará que un mismo problema puede resolverlo gráfica o analíticamente, descubriendo que los razonamientos y caminos son semejantes.

Finalmente, podemos afirmar que muchas de las situaciones que anteriormente hubieran constituido un *problema* a partir de ahora se habrán convertido en un *ejercicio*.

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para enfrentarse a los problemas planteados, el alumno ha de manejar con soltura conceptos de la geometría estudiados en cursos anteriores. Por un lado, será necesario haber comprendido la geometría en el plano y trabajarla con suficiente agilidad y dominio:

- Cálculo de distancias entre dos puntos.
- Operaciones con vectores en R^2.
- El concepto de *vector director* como generador de un elemento.
- La ecuación de la recta en sus distintas expresiones.
- Los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, y su expresión en dos dimensiones.
- Las técnicas y razonamientos que permiten hallar distancias y ángulos en el plano.
- El significado algebraico de las posiciones relativas entre dos rectas (sistemas de dos ecuaciones).

También ha de conocer las operaciones con vectores. A las ya conocidas del curso anterior (suma, multiplicación por un escalar y producto escalar en R^2), se añaden los conocimientos adquiridos en unidades anteriores de este curso: vectores en R^3, producto vectorial, utilización de la expresión matricial en el cálculo vectorial, etc.). En este aspecto, es especialmente importante el sentido geométrico de los productos escalar y vectorial, y sus consecuencias.

Y en concreto, en las unidades anteriores del propio curso se habrán estudiado los conceptos previos necesarios de la geometría euclídea en el espacio:

- Ecuaciones del plano y de la recta.
- Posiciones relativas del plano y de la recta.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Veamos en primer lugar los contenidos que el Currículo Aragonés incluye en el curso anterior:

> *—Geometría analítica del plano. Vectores en el plano. Producto escalar de vectores: definición, propiedades e interpretación geométrica. Ecuaciones de la recta en el plano: vector de dirección y pendiente. Intersección de dos rectas. Caracterización del paralelismo y perpendicularidad. Cálculo de la medida del ángulo determinado por dos rectas. Cálculo de distancias entre dos puntos, un punto y una recta y dos rectas.*

Respecto a los conocimientos necesarios de geometría en el espacio, su aprendizaje tiene lugar durante el mismo curso académico, por lo que será responsabilidad del equipo docente su correcta secuenciación. Veamos los contenidos prescritos en el Currículo:

> *—Vectores. Vectores en el espacio tridimensional. Dependencia e independencia lineal. Bases. Producto escalar: definición e interpretación. Ángulo entre dos vectores. Vectores ortogonales. Producto vectorial: definición e interpretación geométrica. Producto mixto: definición e interpretación geométrica. Aplicación de los productos escalar, vectorial y mixto al cálculo de áreas de triángulos y paralelogramos y volúmenes.*
>
> *—Geometría analítica del espacio. Sistemas de referencia. Ecuaciones vectoriales de la recta y el plano. Deducción de otras formas de la ecuación de la recta y el plano a partir de las ecuaciones vectoriales. Posiciones relativas de rectas y planos. Haces de planos. Resolución de problemas de incidencia, paralelismo y perpendicularidad entre rectas y planos.* ***Distancia. Distancia entre puntos, rectas y planos. Ángulos entre rectas y planos. Resolución de problemas métricos relacionados con el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes.***

La secuencia de la enseñanza podemos afirmar, por consiguiente, que está bien estructurada para encarar los nuevos aprendizajes. En general, si el alumno ha asimilado la geometría en dos dimensiones, tendrá buenas garantías de comprender su extensión al espacio.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Respecto a la geometría estudiada el curso anterior, en dos dimensiones, puede plantearse un breve ejercicio de evaluación inicial antes de comenzar el bloque de *geometría analítica en el espacio*.

En cuanto a los contenidos que se han estudiado durante las semanas previas dentro del mismo curso –tanto el álgebra como las propias unidades previas de geometría- no debería necesitarse ninguna actividad especial, pues acabará de ser evaluada.

En todo caso, al introducir los nuevos objetos tendremos que hacer pequeños recordatorios, estableciendo las analogías y las diferencias que surgen al ampliar la dimensión del espacio. Es bueno que sean los propios alumnos quienes vayan recordando estos conceptos para intentar sobre ellos edificar los nuevos; así, por ejemplo, si recuerda cómo expresaba la distancia entre dos puntos en el plano, fácilmente podrá deducir cómo habrá de expresarse en el espacio.

Optaremos pues, en lo posible, por una didáctica constructivista que paulatinamente vaya propiciando el avance de la zona de desarrollo próximo del alumno.

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO.

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Consideremos algunas reflexiones sobre la geometría que pueden dar bastante luz para comprender la razón de ser de este objeto.

Roberto Samuells, en su libro La geometría euclídea como teoría del conocimiento, afirma: "*Habría espíritu geométrico allí donde el pensamiento matemático entra en actividad movido por la seducción inteligible que ejerce sobre él una imagen previa, una configuración espacial intuitiva*". (R. Samuells, 1971).
Más adelante refuerza esta idea del objeto preexistente: "*La geometría se origina como una manera de razonar, de acuerdo con un cierto ideal metódico, unos teoremas preexistentes. Basta con que el lector, provisto de una regla y un compás, trace sobre el papel figuras sencillas; que dibuje, por ejemplo, un triángulo y trace las rectas que unen los vértices con los puntos medios de los lados opuestos; observará con sorpresa y admiración que dichas rectas concurren en un punto. El teorema aparece por sí mismo,*

previamente con respecto al método que lo considera […]. Preexistencia que, a su vez, va acompañada de una solicitación a la comprensión, de una reclamación a la inteligencia. […]Así pues, la geometría construye deductivamente las proposiciones que constituyen sus teoremas."

Los ingredientes de toda síntesis geométrica son *elementos* y *relaciones* entre ellos: *Entendemos pues que entre estos puntos, rectas y planos hay relaciones mutuas, que indicamos mediante palabras tales como 'está situado', 'entre', 'paralela', 'congruente', 'continuo', etc.* (Hilbert. Op. cit. Los cinco grupos de axiomas. & 1.)

El matemático Josep Gascón, en su artículo de la revista especializada SUMA, nos habla del paso de una geometría puramente intuitiva a la geometría analítica con la que se pretende dar respuesta a problemas más complicados:

> ***Tesis de la continuidad entre las geometrías sintética y analítica:***
> *Si partimos de un campo de problemas considerados por la comunidad matemática como representantes genuinos de la geometría sintética (o «pura») –como son, por ejemplo, los problemas de construcción geométrica con regla y compás– y utilizamos las técnicas sintéticas clásicas de estudio de este campo, puede mostrarse que el desarrollo de estas técnicas (paralelo a la ampliación progresiva del campo de problemas) provoca rápidamente la aparición de las técnicas analíticas características de la geometría cartesiana.*
>
> *Lo anterior significa que, cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética aparece la necesidad (como en cualquier proceso de estudio de un campo de problemas) de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y, muy rápidamente, nos encontramos con problemas para los cuales la técnica inicial presenta determinadas limitaciones. Se produce entonces la necesidad epistemológica y didáctica de variar la técnica inicial y esta variación suele desembocar en la producción de técnicas denominadas «analíticas» «cartesianas» o «algebraicas» porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra.*
>
> *Tenemos, en resumen, que la presunta alternativa entre geometría sintética y geometría analítica es una falsa alternativa, dada la continuidad y hasta complementariedad que existe entre ambas. Queremos acabar reivindicando la necesidad imperiosa de seguir investigando cómo deberían conectarse, en la geometría de Secundaria, las técnicas sintéticas con las analíticas. Dado que son precisamente las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las razones de ser) a las técnicas analíticas no tiene ningún tipo de justificación hacer aparecer éstas en el Bachillerato, como por arte de magia, sin ningún tipo de continuidad con la problemática de la geometría sintética estudiada en la ESO.*
>
> (J. Gascón, 2002).

Podemos concluir que la razón de ser del objeto es la resolución de problemas geométricos cuya complejidad supera el alcance de la geometría que podemos dibujar y visualizar. Para el nivel de enseñanza concreto de 2º de Bachillerato, esto lo podemos concretar en el siguiente campo de problemas, siendo el último de ellos el objeto de nuestro estudio:

- ¿Cómo podemos expresar elementos en tres dimensiones?
- ¿Cómo podemos conocer las posiciones relativas entre estos elementos?
- ¿Cómo poder calcular distancias o ángulos entre elementos del espacio?

Como ya hemos visto según los contenidos curriculares, vamos a dar el salto del plano al espacio. La dificultad que presenta la nueva situación para trasladarla al campo del dibujo es otro de los motivos que se presentarán para justificar la aparición de unas herramientas más avanzadas.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Los inicios de la geometría responden a necesidades elementales, a problemas que nos encontramos en la vida real o preguntas que nos hacemos en el contexto de esa realidad en que vivimos. La altura de las pirámides, el radio de la Tierra, el cálculo de superficies, etc. La antigua geometría que Euclides recoge en *Los Elementos* ha tenido vigencia en la enseñanza hasta el siglo XIX, por lo que podemos creer que da respuesta a ese tipo de problemas.

La geometría analítica tal como la conocemos hoy comienza a ser desarrollada por Descartes y Fermat con el objeto de confeccionar un modelo matemático mucho más sólido y que permitirá, por lo tanto, hacer frente a situaciones más complejas.

Encontramos por lo tanto una doble coincidencia entre la razón de ser histórica y la que presentamos en nuestra enseñanza:

a) Si bien el campo de problemas existe como trasfondo, éstos ya no se refieren a unas necesidades tan vitales como las que aparecen en la geometría sintética: se trata a menudo de situaciones ficticias.

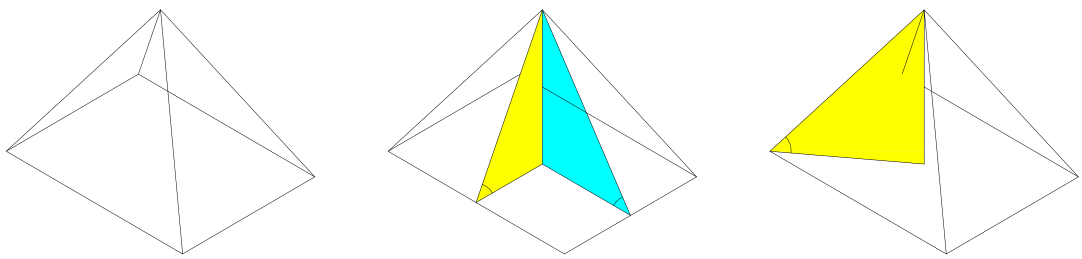
b) El motivo de su abordaje es la consciencia de que dichas situaciones no pueden ser resueltas con las herramientas de que disponíamos, por lo que necesitamos un modelo más sofisticado y más completo.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

Los siguientes problemas contextualizados pueden servir de ejemplo. El alumno comprobará que los medios de que dispone para resolverlos le conducen a complicadas operaciones gráficas para poder, en primer lugar, visualizarlos y, posteriormente, resolverlos.

PROBLEMA 1: Los mayas y las pirámides.

Una tribu de la península del Yucatán proyectó construir para dar culto a sus antepasados una ostentosa pirámide. Para ello, prepararon un terreno rectangular de 60x80 metros. Ninguna de las paredes debía superar una pendiente de 60º, pero deseaban alcanzar la mayor altura posible y terminar además la pirámide en un único vértice. ¿Podrías ayudarles a diseñar la pirámide con más detalle?
Si quisiéramos colocar una escalera para subir por el exterior, ¿dónde la ubicaríamos?



La geometría del plano que conocemos hasta el momento nos permitiría resolver el problema, si bien precisamos una buena comprensión del espacio para configurar cada elemento. ¿Pero, qué ocurriría si queremos construir las cuatro caras formando 60º con el suelo? ¿Cuál será la altura de la pirámide? ¿Qué pendiente tendrá la escalera de la arista? ¿Y si la base no fuera horizontal?

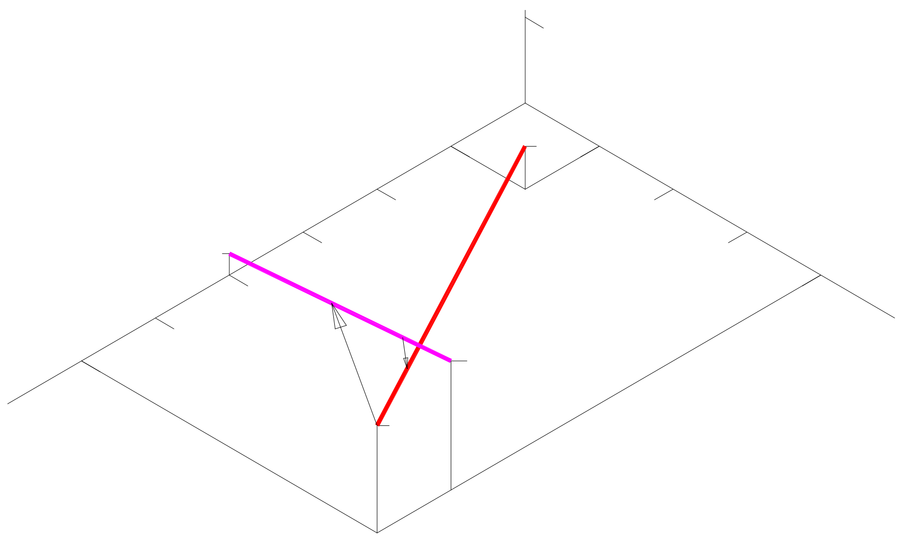
Con el problema comprobamos que tenemos suficientes argumentos para resolver una configuración sencilla, pero conforme se incrementa su complejidad nos exige un alto dominio de las técnicas de dibujo, y un largo proceso de desarrollo.

El uso de las ecuaciones de recta y plano, y en general de la geometría analítica, nos permitirá un camino más rápido y más seguro.

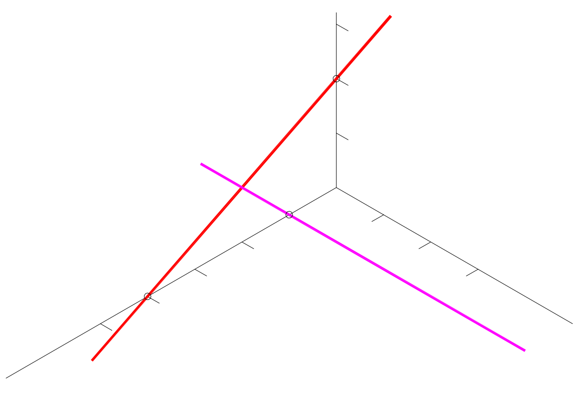
PROBLEMA 2: Comunicación entre dos canales de conducción de agua.

Se quiere comunicar dos canalizaciones de agua de manera que se asegure el suministro en caso de déficit en el caudal de cualquiera de ellas. El primer canal parte de unos depósitos ubicados en el punto de coordenadas (6000, 4000, 1250) y traza una línea recta hasta la ciudad A, de coordenadas (1000, 1000, 500). El segundo parte de un torrente en el punto (5000, 4000, 1500) y se dirige a la ciudad B, de coordenadas (4000, 0, 250). ¿Dónde habremos de realizar la conexión si pretendemos emplear el mínimo material posible?

¿Cómo sería el diseño si queremos conectar los depósitos con el segundo canal mediante un conducto con el 5% de pendiente?



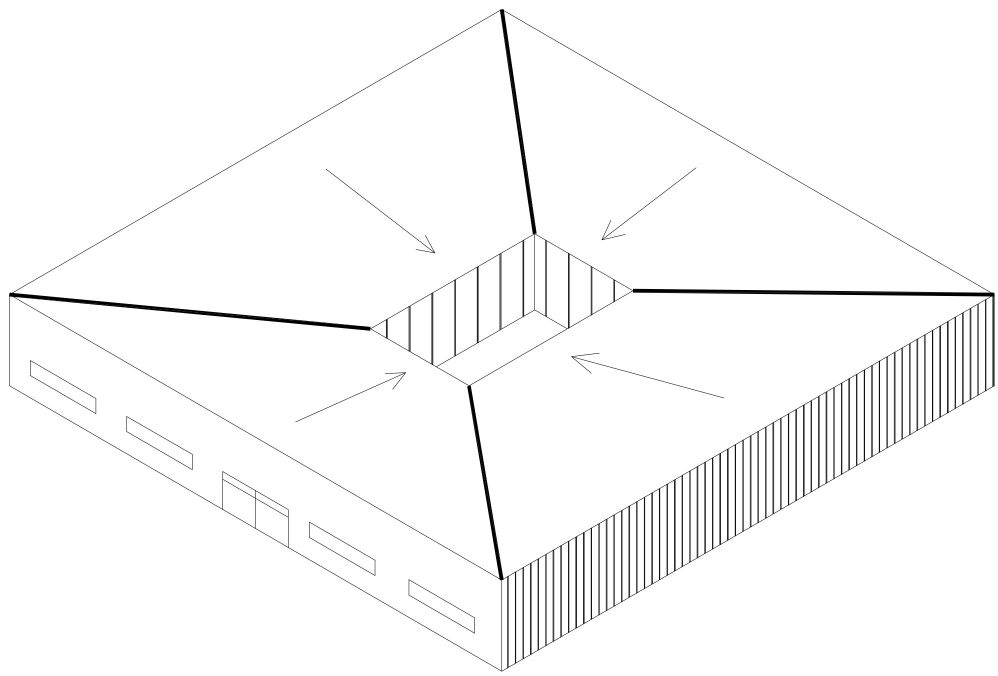
En este problema verificamos que cuando las condiciones geométricas no son elementales, el argumento gráfico nos resulta insuficiente para resolver la situación. Será necesario pues incorporar nuevos conocimientos y nuevas técnicas, lo que justifica el quehacer algebraico y el uso de la geometría analítica.

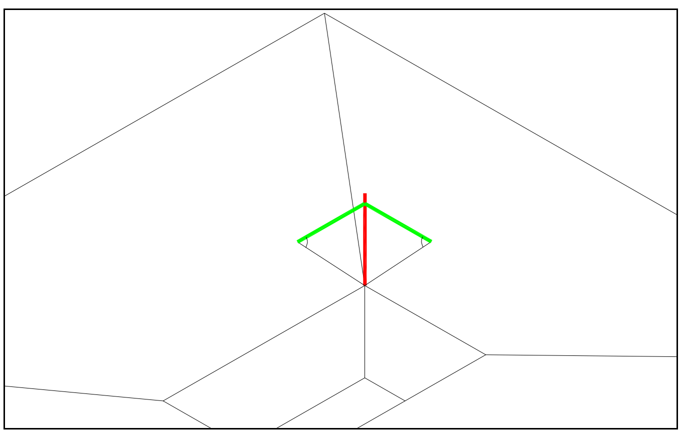


(caso cuya resolución gráfica resulta factible)

PROBLEMA 3: Ejecución de un tejado inclinado.

El tejado de un complejo deportivo de planta rectangular 75x75 m. vierte las aguas al interior, donde se recogen en un patio de medidas interiores 25x15 m. La fachada exterior se eleva hasta 12 m. de altura, mientras la cota de la interior se sitúa a 10,80 m. ¿Podrías calcular la pendiente de las aristas de unión entre las vertientes de la cubierta?
Si queremos instalar una antena de 5 m. de altura en una de las esquinas interiores del complejo, ¿podrías definir la longitud y punto de anclaje de 2 tensores a 45º con el plano de amarre? ¿Existe más de una posibilidad?





4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología para el desarrollo completo de la Unidad Didáctica ha de seguir los siguientes pasos:

1) Plantear los diferentes tipos de problema desde una situación contextualizada.
2) Modelizar cada situación y estudiar las diferentes formas de resolverla, trabajando por parejas o pequeños grupos con posterior puesta en común. Partiendo de la metodología y las técnicas conocidas en la geometría del plano, desarrollar la construcción de los elementos del espacio desde el cálculo vectorial, y analizar las ecuaciones resultantes y el significado de sus términos, para posteriormente consolidar el manejo de sus diferentes expresiones
3) Ejercitar mediante el trabajo individual los conocimientos que se van adquiriendo, trabajando la casuística de cada tipo de problemas e institucionalizando las técnicas. Reconocer los distintos caminos que nos permiten realizar dichas construcciones aplicando el significado de los productos escalar y vectorial y el significado de las relaciones entre los elementos.
4) Plantear nuevos problemas que requieran la aplicación de lo aprendido, modelizando las situaciones reales según los nuevos códigos.

Aunque muchos de los siguientes conceptos pertenezcan a los conocimientos previos con los que el alumno afronta ya esta Unidad, conviene tener en cuenta algunas consideraciones:

- Es importante insistir permanentemente en el significado que tienen sobre el cálculo algebraico las relaciones entre los elementos. Identificar resultados como *solución única del sistema de ecuaciones* con *punto único de corte*, o *sistema compatible indeterminado* con *infinitos puntos de corte* (una recta o un plano), por poner algunos ejemplos.

- El uso de la geometría descriptiva debe ayudar a la comprensión de muchas situaciones. Dada la complejidad del dibujo en muchas de ellas, se debe optar por simplificar al principio algunas disposiciones para facilitar su comprensión, pasando posteriormente a generalizar la situación.

- El profesor ha de fomentar que sean los propios alumnos quienes vayan descubriendo las nuevas técnicas a partir de los conocimientos de que disponen. Preguntas como *¿qué operación te permite hallar un vector que es perpendicular a otros dos?*, o *¿qué le ocurre a un punto que pertenece a un plano*, etc., harán que sea el propio alumno quien pueda ir demostrando y construyendo los nuevos caminos.

- Debe también aclararse que en muchas ocasiones la manera de encontrar una solución no es única, pero el empleo de la técnica más adecuada puede producir una notable economía en el proceso.

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS.

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Tomando como punto de partida el problema inicial de la pirámide maya, se irán planteando sucesivas cuestiones referidas al diseño de la pirámide, que nos sirven para contextualizar el tipo de situaciones que más adelante se abordarán de forma genérica.

Tipo 1: CALCULO DE DISTANCIAS

Desde la cámara central en el interior de la pirámide se desea perforar un túnel de salida por la cala sur. ¿Cuál será la trayectoria a seguir, y cuántos metros habrá que perforar si se quiere llegar por el camino más corto?

Tipo 2: CALCULO DE ANGULOS.

¿Podrías calcular el ángulo que forman las caras Norte y Este de la pirámide? ¿Y la pendiente de la arista Noreste?

Tipo 3: APLICACIONES Y GENERACION DE ELEMENTOS.

Queremos habilitar una comunicación entre los pasadizos principales de las caras Norte y Sur. ¿Podrías averiguar los puntos óptimos para empezar a perforar en cada pasadizo y la dirección a seguir para que se encuentren los dos equipos de perforación?

Tipo 4: CALCULO DE AREAS Y VOLÚMENES.

Conociendo las esquinas de la base y el vértice de la pirámide, calcula el volumen interior y la cantidad de bloques –en metros cuadrados- que hacen falta para construirla.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Las técnicas iniciales que resuelven cada tipo de problema se van a reforzar en algunos casos con nuevas técnicas derivadas de un enfoque distinto, dando lugar a nuevas fórmulas que resuelven de forma más rápida el problema. El trabajo consistirá en comprender la validez de esas nuevas técnicas, conocer los conceptos que permiten su construcción y propiciar que el alumno sea capaz de deducirlas y desarrollarlas por sí solo.

En los apartados de *Técnicas* y *Tecnologías* y en los anexos correspondientes se detalla cómo la consecución de un objetivo (encontrar, por ejemplo, la distancia de un punto a una recta), puede lograrse pasando por sucesivos pasos intermedios, o mediante nuevas fórmulas procedentes de un análisis vectorial de la geometría del problema.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Concretando para cada tipo de situación la metodología general planteada en el apartado anterior, el proceso de enseñanza seguiría el siguiente recorrido:

1) Presentación del problema contextualizado, planteando diferentes preguntas que nos obliguen a buscar una técnica para resolverlas. Al introducir el nuevo problema, el profesor puede dejar un tiempo prudencial (diez o quince minutos) para que los alumnos, por parejas, investiguen posibles caminos.
2) Modelización del problema: continuando con una puesta en común el trabajo anterior, se han de identificar los elementos que lo componen (puntos, rectas, planos, ángulos que se forman, superficies, volúmenes…). Utilizando las sugerencias que brotarán de aquellos alumnos que hayan *investigado* el problema, el profesor ha de conducir al grupo a la identificación de los elementos.
3) Visualización y expresión gráfica de la situación. En este punto, será de gran utilidad la analogía con una situación semejante en dos dimensiones, cuyo grafiado sea de menor dificultad. También será importante comenzar con disposiciones geométricas "fáciles" (los planos y los ejes cartesianos, por ejemplo) que permitan una mejor visualización. Es el espacio en el que el profesor aporta la solución definitiva al problema, resumiendo y utilizando lo que se ha observado.
4) Resolver el problema a través de la técnica inicial. Se tratará ahora de practicar sobre los conceptos aprendidos en las unidades anteriores; definido el procedimiento y los pasos a seguir, será trabajo individual del alumno su desarrollo –si bien el primer ejemplo puede ser más recomendable realizarlo en la pizarra, para que todos dispongan de un material de referencia con garantías-.
5) Plantear, cuando existan, la construcción de otros métodos alternativos, enfatizando en el proceso que nos permita, a la postre, la institucionalización de una nueva fórmula. Dichos métodos difícilmente serán descubiertos por los alumnos, a no ser que el profesor sugiera el empleo de alguna herramienta concreta. Nuevamente, y siempre con alguna pista, puede ser un tiempo de interesante investigación por parejas, que no ha prolongarse tampoco en exceso, pues a menudo estos experimentos sólo son útiles para los alumnos que menos lo necesitan.
6) Ejercitar los conceptos y técnicas adquiridas –trabajo individual-. Este proceso se dividirá en dos: en un primer tiempo, el profesor acompaña al alumno en la realización completa de un ejemplo; el trabajo se ha de completar con algo de tarea personal a realizar en casa.

F. SOBRE LAS TÉCNICAS.

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Los ejercicios que se van a plantear responderán a la práctica de las técnicas necesarias para resolver de forma genérica los tipos de problemas descritos en el apartado E.1.

En la siguiente tabla se resumen los distintos tipos:

Tipo	**EJERCICIO A RESOLVER**
	CALCULO DE DISTANCIAS:
Tipo 1.1	Distancia punto-recta
Tipo 1.2	Distancia punto-plano
Tipo 1.3	Distancia recta-plano.
Tipo 1.4	Distancia entre 2 planos
Tipo 1.5	Distancia entre 2 rectas
	CALCULO DE ANGULOS:
Tipo 2.1	Angulo entre 2 planos
Tipo 2.2	Angulo recta-plano
Tipo 2.3	Angulo entre 2 rectas
	CONSTRUCCION DE ELEMENTOS:
Tipo 3.1	Plano a una distancia de otro plano
Tipo 3.2	Plano formando un ángulo dado
Tipo 3.3	Recta formando un ángulo dado
Tipo 3.4	Perpendicular común a 2 rectas
	AREAS Y VOLUMENES:
Tipo 4.1	Area del paralelogramo y del triángulo
Tipo 4.2	Volumen del prisma y del tetraedro

A lo largo de las sesiones se irán planteando los siguientes ejercicios u otros similares, correspondientes a los *tipos* recogidos en la tabla anterior:

TIPO 1: CALCULO DE DISTANCIAS:

E.1.1. Hallar la distancia del punto P(1,0,-2) a la recta r: $\frac{x-5}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

E.1.2. Hallar la distancia del punto P(1,1,2) al plano Π, de ecuación: $x + 2y - z = 3$

E.1.3. Hallar la distancia entre los planos Π_1: $2x + y + 2z = 1$ *y* Π_2: $2x + y + 2z = 6$

E.1.4. Hallar la distancia de la recta r: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ *al plano* Π: $x + 3y + z = 3$

E.1.5. Hallar la distancia entre las rectas "r" y "s":

r: $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{5}$ *s*: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$

TIPO 2: CALCULO DE ANGULOS.

E.2.1. Calcula el ángulo formado por los planos

Π_1 : $x + y + z = 1$ Π_2: $x - y - 2z = -3$

E.2.2. Calcula el ángulo formado por la recta "r" y el plano Π_1*:*

r: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ Π_1 : $x + y + z = 1$

E.2.3. Calcula el ángulo formado por las rectas

r: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ s: $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{-1}$

TIPO 3: CONSTRUCCION DE ELEMENTOS.

E.3.1. Hallar el plano B*, paralelo a* Π*:* $x + y + z = 1$ *y situado a una distancia de 2 ud.*

E.3.2. Hallar el conjunto de planos que pasan por el vértice A (5,5,5) y forman 60º con el plano z = 0.

E.3.3. Hallar la ecuación de la recta contenida en el plano x + y = 5 y que forma un ángulo de 30º con el plano z = 1.

E.3.4. Hallar la perpendicular común a las rectas:

r: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ s: $\frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{-1}$

TIPO 4: CALCULO DE AREAS Y VOLÚMENES.

E.4.1.a. Calcula el área del paralelogramo cuyos lados no paralelos vienen determinados por los puntos A(0,0,0), B(0,1,2) y C(2,1,5).

E.4.1.b. Calcula el área del triángulo de vértices A(0,0,0), B(0,1,2) y C(2,1,5).

E.4.2.a. Calcula el volumen del prisma que tiene como base el paralelogramo del ejercicio 4.1.a. y cuya generatriz es paralela a la recta r:

$$\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

E.4.2.b. Calcula el volumen del tetraedro de vértices A(0,0,0), B(0,1,2), C(2,1,5) y D(3,5,-1).

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

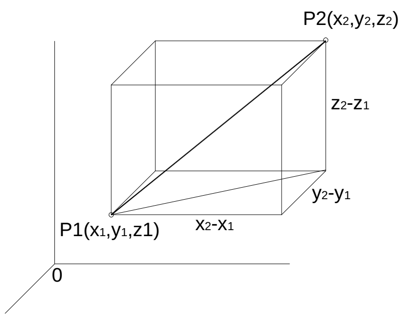
(describiremos en este apartado las diferentes técnicas para resolver los tipos de problemas enumerados: planteando sistemas de ecuaciones, utilizando el producto escalar, utilizando el producto vectorial, utilizando un parámetro desconocido, etc.)

Consideración previa.

Antes de comenzar la descripción de las técnicas correspondientes a los diferentes tipos de problemas, habremos de resolver el problema inicial que supone la *distancia entre dos puntos en el* espacio. La distancia entre dos puntos, $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$, será la longitud del segmento P_1P_2.

$$d(P_1P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Una sencilla construcción sobre un paralelepípedo permitirá demostrarlo utilizando el *teorema de Pitágoras.*



En la siguiente tabla se recoge la tipología de problemas y las técnicas que utilizaremos para resolverlos:

Tipo	**SITUACION A RESOLVER**	**TÉCNICA**
	CALCULO DE DISTANCIAS:	
Tipo 1.1	Distancia punto-recta	**Inicial**: construcción geométrica. **Mod.1**: producto vectorial. **Mod.2**: punto genérico.
Tipo 1.2	Distancia punto-plano	**Inicial**: construcción geométrica. **Mod.1**: producto escalar.
Tipo 1.3	Distancia recta-plano.	**Inicial**: construcción geométrica + Mod.1 del Tipo 1.2
Tipo 1.4	Distancia entre 2 planos	**Inicial**: construcción geométrica. + Mod.1 del Tipo 1.2 **Mod.1**: desarrollo de fórmula.
Tipo 1.5	Distancia entre 2 rectas	Inicial: construcción geométrica. **Mod.1**: puntos genéricos. **Mod.2**: producto mixto.
	CALCULO DE ANGULOS:	
Tipo 2.1	Angulo entre 2 planos	**Inicial**: producto escalar.
Tipo 2.2	Angulo recta-plano	**Inicial**: producto escalar.
Tipo 2.3	Angulo entre 2 rectas	**Inicial**: producto escalar.
	CONSTRUCCION DE ELEMENTOS:	
Tipo 3.1	Plano a una distancia de otro plano	**Inicial**: aplicación de Tipo 1.4.
Tipo 3.2	Plano formando un ángulo dado	**Inicial**: aplicación de Tipo 2.1.
Tipo 3.3	Recta formando un ángulo dado	**Inicial**: aplicación de Tipo 2.2.
Tipo 3.4	Perpendicular común a 2 rectas	**Inicial**: construcción geométrica. **Mod.1**: puntos genéricos.
	AREAS Y VOLUMENES:	
Tipo 4.1	Area del paralelogramo y del triángulo	**Inicial**: producto vectorial
Tipo 4.2	Volumen del prisma y del tetraedro	**Inicial**: producto mixto

CALCULO DE DISTANCIAS.

Tipo 1.1. Distancia de un punto a una recta.

La distancia de un punto P a una recta "r" será la longitud del segmento más corto posible que podamos trazar desde P hasta la recta. Para ser el "más corto", dicho segmento tendrá que ser perpendicular a la recta "r".

Técnica inicial:

1- Hallar el plano perpendicular a la recta "r" que contenga al punto P.
2- Hallar la intersección del plano α con la recta "r". Punto Q.
3- Calcular la distancia entre P y Q.

Modificación 1: utilizando el producto vectorial.

Tomando un punto cualquiera Q de la recta "r", el vector QP será la suma vectorial de QP' + P'P, siendo P' la proyección perpendicular de P sobre la recta "r". Multiplicando vectorialmente por el vector director de la recta, obtendremos una expresión para el módulo del vector PP', que es la distancia que buscamos.

Modificación 2: utilizando un *punto genérico*.

Si el punto P' pertenece a la recta "r", podremos expresarlo en función de un punto cualquiera Q y el vector director de la recta: $P'=(x_1+\lambda v_x, y_1+\lambda v_y, z_1+\lambda v_z)$. El punto P' con el que obtendremos la mínima distancia de P a la recta formará el vector PP', que tendrá que ser perpendicular a la recta –para que la distancia sea la mínima-. Luego el producto escalar de PP' por el vector director de la recta ha de ser cero, pues forman 90º.

Tipo 1.2. Distancia de un punto a un plano.

La distancia de un punto P a un plano Π será la longitud del segmento más corto que podamos trazar desde el punto al plano; es decir, perpendicular al plano.

Técnica inicial:

1- Hallar la recta "s", perpendicular al plano Π que pasa por el punto P.
2- Hallar la intersección de la recta "s" con el plano Π. (punto Q).
3- Calcular la distancia entre P y Q.

Modificación 1: utilizando el producto escalar.

Tomando un punto cualquiera Q del plano Π, el vector QP será la suma vectorial de QP' + P'P, siendo P' la proyección perpendicular de P sobre el plano Π. Multiplicando escalarmente por el vector normal del plano, obtendremos una expresión para el módulo del vector PP', que es la distancia que buscamos.

Tipo 1.3. Distancia entre una recta y un plano.

Si la recta y el plano no son paralelos, se cortarán en un punto, por lo que la distancia será nula. En caso contrario, la distancia de la recta al plano será la de cualquier punto de la recta a dicho plano.

Técnica inicial:

1- Hallar la distancia de un punto P, perteneciente a la recta "r", al plano Π.
   (apartado 1.2, distancia de un punto a un plano).

Tipo 1.4. Distancia entre dos planos.

Si los planos no son paralelos, se cortarán en una recta, por lo que su distancia será nula. En caso contrario, la distancia que los separa será la de cualquier punto de uno ellos al otro plano.

Técnica inicial:

1- Hallar la distancia de un punto P, perteneciente al plano Π, al plano B.
   (apartado 1.2, distancia de un punto a un plano).

Modificación 1: utilizando la fórmula que nos da la *distancia Punto-Plano*.
(modificación 1 del tipo 1.2).

Operando en la fórmula que nos proporciona la distancia de un punto a un plano, podemos obtener una expresión directa para hallar la distancia entre dos planos paralelos.

Tipo 1.5. Distancia entre dos rectas.

Dadas dos rectas que se cruzan, "r" y "s", podremos calcular la distancia entre ellas con los siguientes razonamientos:

Técnica inicial:

La distancia de "r" a "s" será la distancia desde "r" al plano Π formado por "s" y una recta paralela a "r" que cruce a "s". Hemos generado, pues, un plano Π que es paralelo a la recta "r". Ahora el problema se reducirá a calcular la distancia entre "r" y Π.

1- Hallar el plano Π, formado por la recta "s" y una paralela a la recta "r".
2- Hallar la distancia de la recta "r" al plano Π.
   (apartado 1.3, distancia entre una recta y un plano).

Modificación 1: utilizando puntos genéricos.

Un punto P' perteneciente a la recta "r", podremos expresarlo en función de un punto cualquiera P (perteneciente a "r") y el vector director de la recta: P'=($x_1+\lambda v_x$, $y_1+\lambda v_y$, $z_1+\lambda v_z$). Idénticamente, un punto Q' perteneciente a la recta "s", podremos expresarlo en función de un punto cualquiera Q (perteneciente a "s") y el vector director de la recta: Q'=($x_2+\gamma v_2$, $y_2+\gamma v_2$, $z_2+\gamma v_2$). Los puntos P' y Q' forman el vector P'Q', que para definir la mínima distancia entre las rectas deberá ser perpendicular a dichas rectas. Luego el producto escalar de P'Q' por cada uno de los vectores directores de las rectas ha de ser cero, pues forman 90º.

Modificación 2: utilizando el producto mixto.

La distancia entre dos rectas es la altura del paralelogramo que forman los vectores directores de las rectas (base) y un vector cualquiera PQ que una dos puntos de "r" y "s" respectivamente (generatriz). Luego será el cociente entre el volumen del paralelogramo (producto mixto de los tres vectores) y el área del paralelepípedo que forman los vectores directores de las rectas.

CALCULO DE ANGULOS.

El cálculo del ángulo formado por dos elementos geométricos del espacio no va a suponer grandes dificultades, tanto por la simplicidad de las técnicas como por la facilidad en la interpretación gráfica.

Tipo 2.1. Angulo entre dos planos.

El ángulo formado por dos planos será el mismo que el formado por sus *vectores normales*.

Técnica inicial (y única): Aplicación del producto escalar.

Tipo 2.2. Angulo entre una recta y un plano.

El ángulo formado por un plano y una recta –que no sea paralela al plano- será el complementario del formado por el *vector director* de la recta y el *vector normal* del plano.

Técnica inicial (y única): Aplicación del producto escalar.

Tipo 2.3. Angulo entre dos rectas que se cortan.

El ángulo formado por dos rectas que se cortan será el formado por sus *vectores directores*.

Técnica inicial (y única): Aplicación del producto escalar.

CONSTRUCCION DE ELEMENTOS.

La construcción de nuevos elementos condicionados por una distancia o un ángulo se basa en las técnicas aportadas para los apartados 1 y 2 (*cálculo de distancias* y *cálculo de ángulos*). En este caso, nuestros datos serán la distancia o el ángulo, y nuestra incógnita será el parámetro o parámetros del elemento que queremos construir.

Utilizando dichas técnicas y sus fórmulas correspondientes podremos generar los siguientes elementos:

Tipo 3.1: Plano situado a una distancia "d" de otro plano.
Tipo 3.2. Plano/s formando un ángulo α con otro plano.
Tipo 3.3: Recta/s formando un ángulo α con un plano.

Merece especial mención la construcción de la *perpendicular común* a dos rectas que se cruzan, tanto por la importancia de su significado –resuelve el problema del camino más corto entre dos alineaciones que se cruzan- como por la variedad de técnicas que nos permiten su cálculo:

Tipo 3.4. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

Sin duda nos enfrentamos al problema de mayor complejidad geométrica, cuya visualización no resulta evidente; para abordarlo hemos de disponer ya de cierto dominio en la generación de planos y rectas, así como de los conceptos de perpendicularidad y paralelismo.

Proponemos como técnica inicial la siguiente:

1- Cálculo del vector "u" perpendicular a las rectas "r" y "s".
2- Generación de los planos P1 (determinado por "r" y "u") y P2 (determinado por "s" y "u").
3- La perpendicular común es la intersección de los planos P1 y P2.

Modificación 1: utilizando puntos genéricos.

La técnica es la misma que la utilizada para esa misma modificación en el cálculo de la distancia entre dos rectas.

CALCULO DE AREAS Y VOLÚMENES.

Tipo 4.1. Área del paralelogramo y del triángulo.

Técnica inicial (y única): Aplicación del producto vectorial.

El área del paralelogramo formado por dos vectores –y sus correspondientes paralelos- es igual al módulo del producto vectorial de dichos vectores. Consecuentemente se deduce también que en el caso de un triángulo será la mitad.

Tipo 4.2. Volumen del prisma y del tetraedro.

Técnica inicial (y única): Aplicación del producto mixto.

El volumen de un paralelepípedo es el producto mixto de los vectores que lo definen. En consecuencia, el volumen del tetraedro formado por dichos vectores será la sexta parte.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas utilizadas aportan una metodología general que nos permite resolver este tipo de problemas de una forma analítica. En muchos casos, la geometría del problema permitirá ciertas simplificaciones, como pudieran ser la generación de planos con los que trabajar en dos dimensiones, etc. Por ello, resulta importante trabajar en cada situación los condicionantes geométricos y suscitar el desarrollo de la visión espacial.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

En la *secuencia didáctica* se indica el momento en que se van introduciendo las diferentes técnicas para resolver los problemas planteados.

La metodología de implantación seguirá en general los siguientes pasos:

1- Planteamiento de la situación a resolver.
2- Explicación gráfica. Mediante el uso de herramientas informáticas como el programa Geogebra3D o por el método tradicional utilizando la pizarra, el profesor ha de facilitar la visualización espacial del problema, de forma que se aprecien las condiciones de perpendicularidad, paralelismo, etc. que definan la situación.
3- Aplicación de los conocimientos previos para resolver los sucesivos pasos del proceso, con la construcción de los elementos que podamos ir necesitando.
4- Conclusión de la resolución, institucionalizando en los casos oportunos las nuevas fórmulas que hayamos podido obtener.

Dicha secuencia se repetirá para cada modificación de la técnica que planteemos.

G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS)

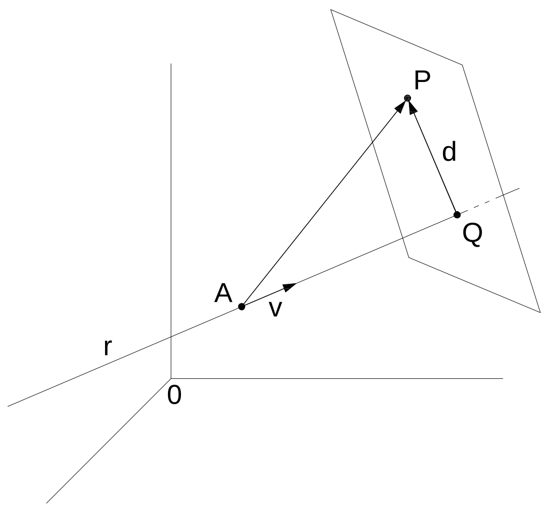
1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

Pasamos a continuación a detallar la justificación de las técnicas enumeradas en el apartado anterior para cada uno de los casos objeto de estudio. La mejor forma de desarrollar cada técnica será acompañar la generalización del caso con un ejercicio concreto.

1. CALCULO DE DISTANCIAS.

Tipo 1.1 Distancia entre un punto y una recta.

Ej.: *Hallar la distancia del punto P(1,0,-2) a la recta r:* $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{-1}$



Donde: $P = (x_1, y_1, z_1)$ $Q = (x_0, y_0, z_0)$ $v = (v_x, v_y, v_z)$

Técnica inicial:

1.- Hallamos el plano Π, perpendicular a la recta r, que pasa por P.

El vector normal del plano será el (3,2,-1), por lo que su ecuación será:

$3x + 2y - z + d = 0.$

Para hallar "d", imponemos la condición de que el punto P ha de pertenecer al plano y, por lo tanto, cumplir su ecuación:

$3(1) + 2(0) -1(-2) + d = 0.$ Por tanto: $d = -5.$

Plano Π: $3x + 2y - z - 5 = 0$.

2.- Hallamos el punto de intersección del plano Π con la recta r, resolviendo el sistema:

$$
\begin{aligned}
&3x + 2y - z - 5 = 0\\
&2x - 10 = 3y + 9\\
&-y - 3 = 2z - 4
\end{aligned}
$$

Cuya solución es el punto Q (2, 1, 3).

3.- Hallamos la distancia entre los puntos P y Q, con la fórmula ya conocida:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Modificación 1: Utilizando el producto vectorial.

En el gráfico podemos observar que: $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$

Si multiplicamos vectorialmente por $\vec{v}$: $\overrightarrow{AP} x \vec{v} = \overrightarrow{AQ} x \vec{v} + \overrightarrow{QP} x \vec{v}$

Pero el vector $\overrightarrow{AQ}$ es paralelo a $\vec{v}$, y el vector $\overrightarrow{QP}$ es perpendicular a $\vec{v}$. Luego nos quedará la expresión:

$\overrightarrow{AP} x \vec{u} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| . \left|\vec{v}\right|$ de donde extraemos la conclusión:

$$d = \left|\overrightarrow{QP}\right| = \frac{\overrightarrow{AP} x \vec{v}}{\left|\vec{v}\right|}$$

Esta expresión la podemos justificar también observando el triángulo que forman los puntos A, Q y P.

Podemos afirmar que: **senα = d / AP** (siendo a el ángulo de $\overrightarrow{AP}$ con $\overrightarrow{AQ}$)

Y por la definición del producto vectorial:

$$sen\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{AP} x \vec{v}\right|}{\left|\overrightarrow{AP}\right| x \left|\vec{v}\right|}$$ de donde concluimos igualmente la expresión anterior.

Modificación 2: Utilizando un *punto genérico* y aplicando el producto escalar.

Cualquier punto R perteneciente a la recta "r" se podrá expresar en función de un punto conocido de la recta y su vector director:

$R = (x_0+\lambda v_x,\ y_0+\lambda v_y,\ z_0+\lambda v_z)$

Cuando el punto R coincida con el punto buscado, Q, los vectores $\vec{v}$ y $\overrightarrow{RP}$ serán perpendiculares, pues $\vec{v}$ es perpendicular a cualquier vector del plano Π. Por consiguiente, su producto escalar será nulo. Así pues:

$\overrightarrow{RP}.\vec{v} = (x_1-(x_0+\lambda v_x),\ y_1-(y_0+\lambda v_y),\ z_1-(z_0+\lambda v_z)).(v_x,\ v_y,\ v_z) = 0$

que es una ecuación en la que nuestra única incógnita es λ.

En el ejemplo: P=(1, 0, -2). A=(5, -3, 2). v = (3, 2, -1).

$R = (5+3\lambda,\ -3+2\lambda,\ 2-\lambda)$.

$\overrightarrow{RP} = (-4-3\lambda,\ 3-2\lambda,\ -4+\lambda)$.

$\overrightarrow{RP}.\vec{v} = (-4-3\lambda,\ 3-2\lambda,\ -4+\lambda) . (3, 2, -1) = -12 - 9\lambda + 6 - 4\lambda + 4 - \lambda = 0$

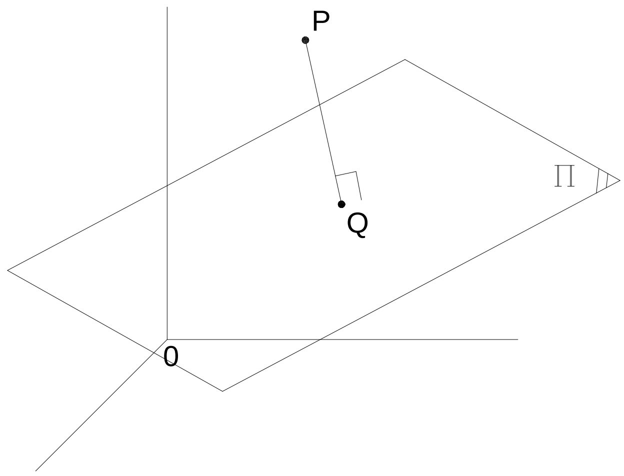
obtenemos que $\lambda = -1/7$

con lo que calculamos el punto R = Q, y con él la distancia entre P y Q.

Tipo 1.2 Distancia de un punto y un plano.

Técnica inicial:

Para conseguir la distancia mínima entre un punto P $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ y un plano Π, de ecuación ax + by + cz + d = 0, tendremos que recorrer el camino más corto del punto hasta el plano, es decir, desplazarnos por la recta perpendicular. Alcanzaremos el plano en un punto Q. La distancia entre esos dos puntos es la distancia mínima entre el punto P y el plano Π.



El primer paso será hallar la recta que define el camino más corto; como es perpendicular al plano, su vector director será el vector normal del plano.

Ejemplo: distancia del punto P(3,3,3) al plano Π: x + y + z = 6

- El vector normal del plano, $\vec{n}$, será el (1, 1, 1).
- La recta "r", definida por P y $\vec{n}$, será:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-3}{1}$$

El segundo paso consistirá en hallar el punto Q, intersección de la recta "r" con el plano Π. Se tratará de hallar la solución del sistema:

x – 3 = y - 3
x – 3 = z - 3
x + y + z = 6

Que nos da como solución el punto Q = (2, 2, 2).

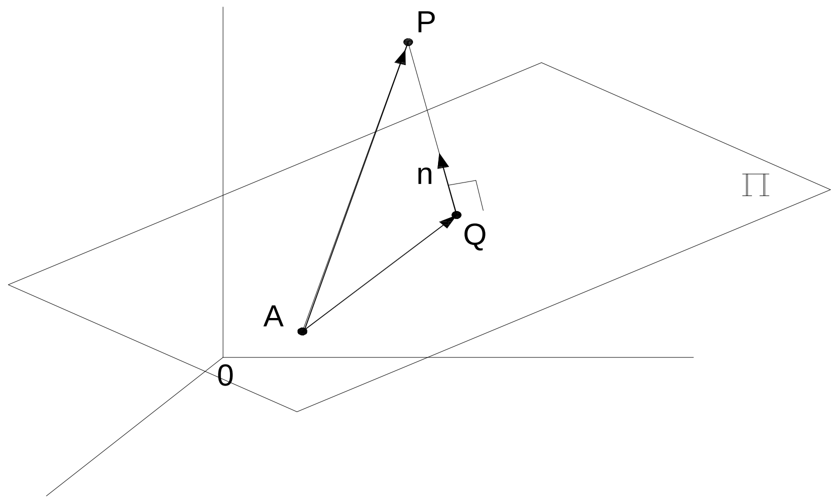
Finalmente, hallaremos la distancia entre P y Q:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

en nuestro ejemplo: $d = \sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2+(3-2)^2} = \sqrt{3}$

Modificación 1: utilizando el producto escalar.

Esta modificación nos suministrará una fórmula que agilizará notablemente la resolución de este problema y que utilizaremos en adelante para resolver otros casos.



Si cogemos un punto cualquiera del plano, A (x_1, y_1, z_1), podemos decir que:

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{QP}$$

Multiplicamos escalarmente ambos miembros de la igualdad por el vector $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{AP}.\vec{n} = \overrightarrow{AQ}.\vec{n} + \overrightarrow{QP}.\vec{n}$$

Como los vectores $\overrightarrow{AQ}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, su producto escalar es nulo.

Además, los vectores $\overrightarrow{QP}$ y $\vec{n}$ son paralelos, luego:

$$\overrightarrow{QP}.\vec{n} = \left|\overrightarrow{QP}\right|.\left|\vec{n}\right| = d.\left|\vec{n}\right|$$

Sustituyendo en la ecuación vectorial:

$$d = \frac{\overrightarrow{AP}\ .\vec{n}}{\left|\vec{n}\right|}$$ (fórmula vectorial)

Pero si efectuamos las operaciones encontramos que:

$$d = \frac{((x_0 - x_1), (y_0 - y_1), (z_0 - z_1)).(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 - ax_1 - ay_1 - az_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Pero si A(x_1, y_1, z_1) pertenece al plano, cumple su ecuación, luego $-ax_1 - ay_1 - az_1 = d$

Y obtenemos la fórmula que nos da la distancia de un punto a un plano:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Tipo 1.3. Distancia de una recta a un plano.

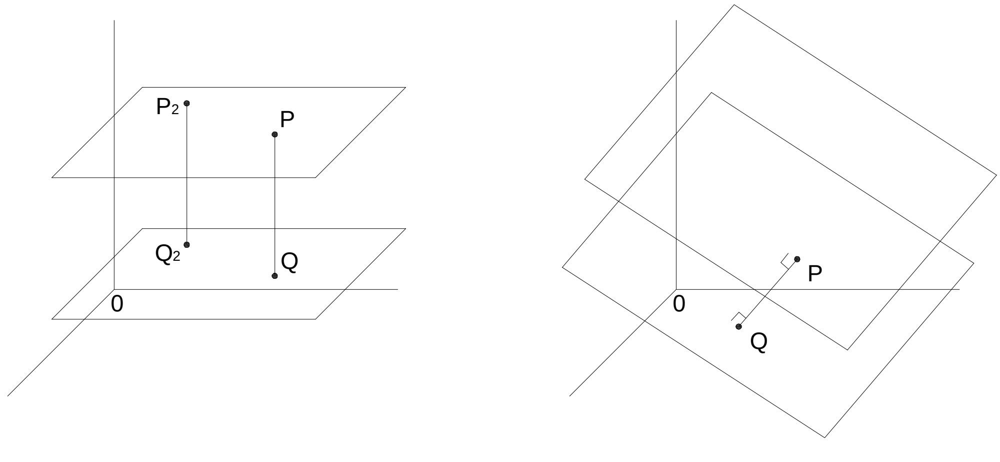
En primer lugar, se habrá de observar la condición bajo la que tiene sentido hablar de *distancia de una recta a un plano*: la única forma de que la recta no corte al plano es que dicha recta sea *paralela al plano*. El otro caso, existirá un punto de corte, por lo que la distancia será nula.

Pero si la recta es paralela al plano, todos los puntos de la recta se encuentran a la misma distancia del plano.

Por lo tanto, **el problema se resuelve calculando la distancia de cualquier punto de la recta al plano**.

Tipo 1.4. Distancia entre dos planos.

Con un razonamiento análogo al del punto anterior, observamos que si dos planos son paralelos, la distancia entre ellos será la de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.



Así pues, bastará con elegir un punto del primer plano y hallar su distancia al otro plano.

Habiendo institucionalizado la fórmula que nos da la *distancia de un punto a un plano*, resultará ya fuera de lugar la justificación de un procedimiento más laborioso.

Modificación 1: desarrollo de la fórmula *distancia de un punto a un plano*.

Los dos planos, si son paralelos, responderán a ecuaciones de la forma:

Π_1: $ax + by + cz + d_1 = 0$
Π_2 $ax + by + cz + d_2 = 0$

puesto que comparten el mismo vector normal, $\vec{n}$ = (a,b,c,).

Si escogemos un punto cualquiera del primer plano, A = (x_0, y_0, z_0), podemos expresar su distancia al plano Π_2 como:

$$d = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Pero si el punto A pertenece al plano Π_1, inexcusablemente cumplirá su ecuación:

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d_1 = 0$ luego: $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d_1$

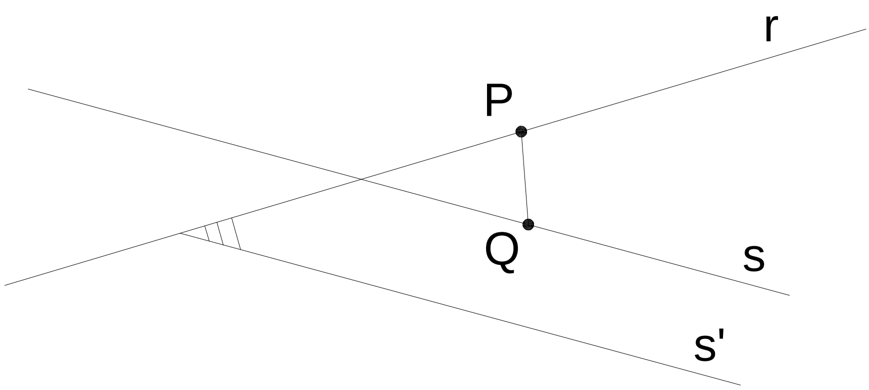
Volviendo a la ecuación anterior obtenemos una sencilla expresión para la distancia entre dos planos paralelos:

$$d = \frac{d_2 - d_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Tipo 1.5. Distancia entre dos rectas.

Nos enfrentamos al caso que conlleva una mayor dificultad de visualización. En primer lugar se incidirá en que la distancia entre dos rectas será distinta de cero a siempre que las rectas no se corten.

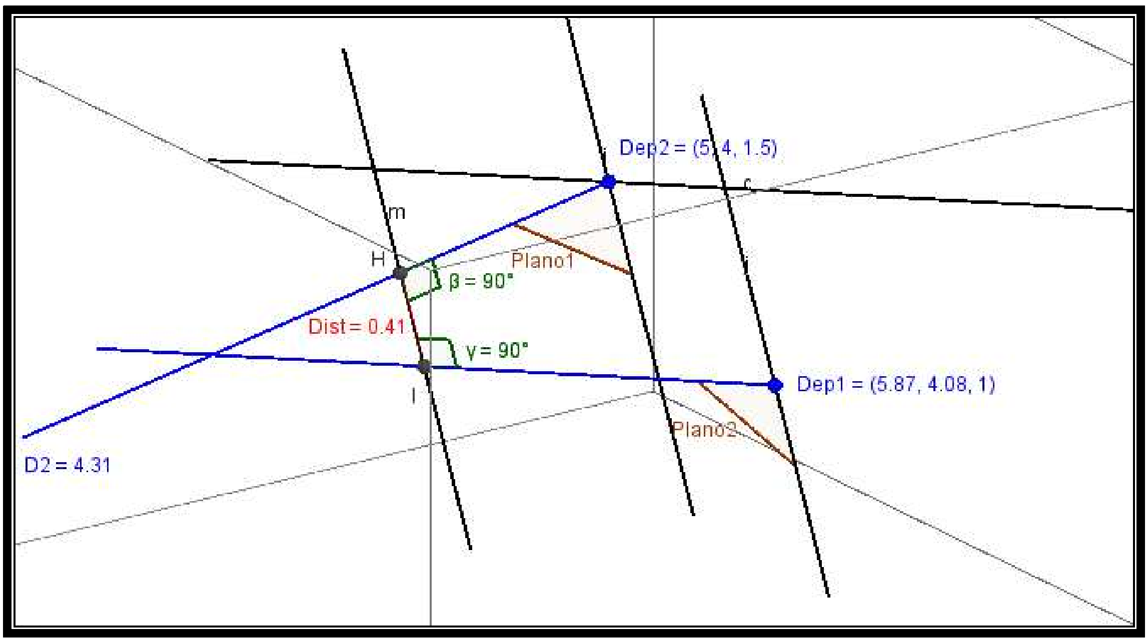
Imaginemos el plano que se formaría por la recta “r” y una recta “t” cualquiera que cortara a “r”. Dicho plano cortaría a la recta “s” en un punto… a no ser que “t” fuera paralela a “s”. En ese caso, la recta “s” sería paralela al plano, por lo que estaría situada a una distancia constante de él. Esa distancia será la mínima posible que podremos encontrar entre las rectas “r” y “s”.



Será conveniente plantear inicialmente el caso con dos rectas paralelas, por ejemplo, al plano z = 0; girando posteriormente una de ellas se puede observar que el planteamiento inicial se mantiene, llegando a generalizarlo para cualquier posición.

Generado el plano Π, formado por un punto de “r” y los vectores directores de “r” y “s”, el proceso continuará con el cálculo de la distancia de una recta a un plano.

Dada la dificultad de este caso, puede resultar útil presentar la construcción por medio de Geogebra3D, con lo que el alumno podrá comprobar cómo se van generando paso a paso los elementos.



En el gráfico se utiliza el cálculo de la perpendicular común; podremos comprobar que la distancia del segmento coincide con la de una de las rectas, “r”, al plano que forman “s” y una paralela de “r”, según la técnica inicial.

Modificación 1: utilizando puntos genéricos.

Sobre los mismos gráficos, se observará que la distancia entre las dos rectas, para que sea mínima, habrá de medirse sobre la dirección perpendicular a cada una de las rectas. Habremos de encontrar, por consiguiente, los extremos del segmento PQ, perpendicular a las dos rectas.

Definimos los puntos P y Q, como puntos que son de las rectas "s" y "r":

$P = (x_0+\lambda u_x, y_0+\lambda u_y, z_0+\lambda u_z)$ (u_x, u_y, u_z), vector director de "r".
$Q = (x_1+\gamma v_x, y_1+\gamma v_y, z_1+\gamma v_z)$ (v_x, v_y, v_z), vector director de "s".

Como el vector $\overrightarrow{PQ}$ es perpendicular a cada una de las rectas, se deberá cumplir el sistema de ecuaciones:

$$\overrightarrow{PQ}.\vec{u} = 0$$
$$\overrightarrow{PQ}.\vec{v} = 0$$

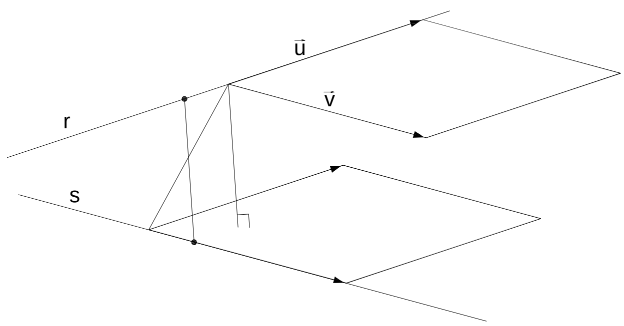
cuyas únicas incógnitas son los parámetros λ y γ mediante los que definíamos los *puntos genéricos* P y Q.

Modificación 2: utilizando el producto mixto

En las unidades anteriores se ha estudiado la interpretación geométrica del *producto mixto* de tres vectores.

Bastará incidir nuevamente en que la distancia entre las dos rectas es la misma que la que hay entre los planos paralelos que forman los vectores directores de dichas rectas.

Situando los vectores sobre sendos puntos cualesquiera de las rectas "r" y "s", habremos colocado las bases de un paralelepípedo, cuya generatriz será precisamente el segmento que resulta de la unión de esos puntos. Y cuya altura será la distancia que separa los planos en los que se encuentran las bases (la altura del paralelepípedo).



2. CALCULO DE ANGULOS.

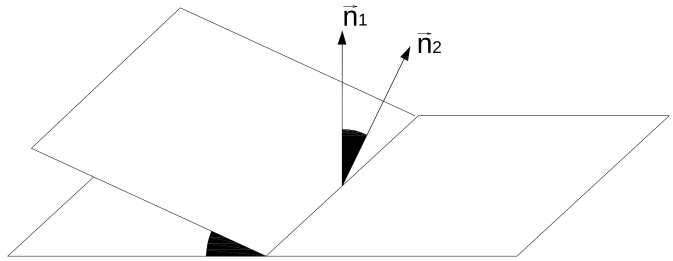
La justificación del procedimiento para hallar el ángulo que forman dos elementos, sean éstos dos planos, dos rectas que se cortan, o un plano y una recta, tiene como punto de partida la expresión gráfica de esos elementos.

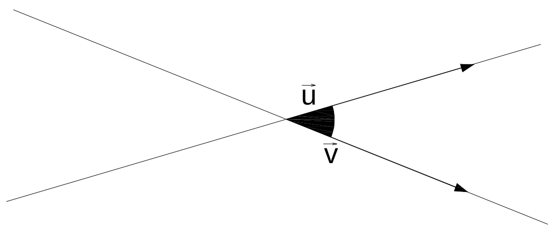
En el caso de dos planos, rápidamente se observa que el ángulo que forman es el mismo que el formado por sus *vectores normales*.

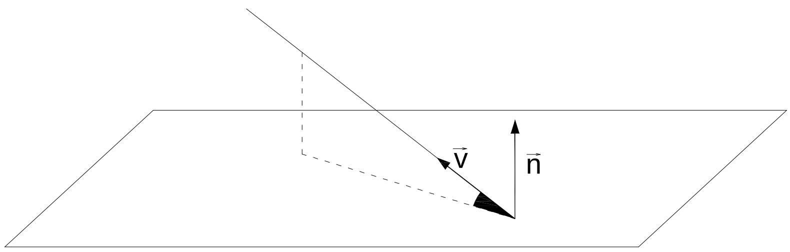
En el caso de dos rectas, todavía es más obvio que vienen representadas por sus *vectores directores*.

Finalmente, una sencilla construcción permite comprobar que el ángulo entre recta y plano es *complementario* al que forman los vectores *director* y *normal*, respectivamente.

El problema se reduce pues al cálculo del ángulo entre dos vectores, resuelto por su *producto escalar*.





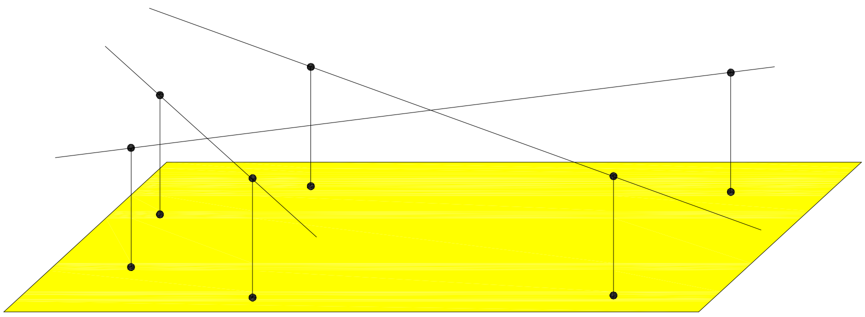


3. CONSTRUCCION DE ELEMENTOS.

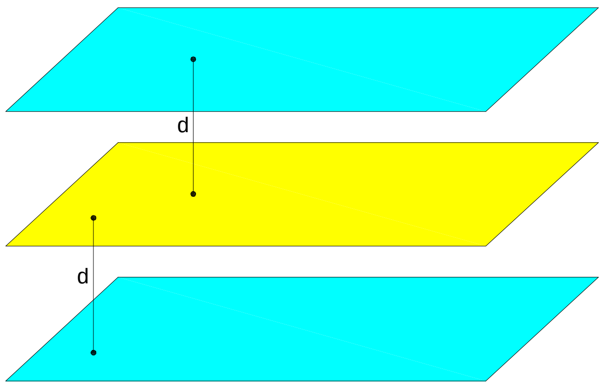
Para construir nuevos elementos que cumplan una determinada condición con respecto a otro elemento, habrá previamente que comprender las posibilidades de su construcción, y si la solución es única o múltiple.

Tipo 3.1. Elementos situados a una distancia determinada de un plano.

¿Cuántas rectas se pueden trazar a una distancia "d" de un plano? Evidentemente, infinitas. Sin embargo, planos sólo se pueden construir uno. ¿…o dos? La mejor forma de justificarlo será nuevamente un gráfico:



Sin embargo, únicamente podremos construir dos planos:



¿Cuáles serán los planos paralelos al plano Π, de ecuación $\mathbf{ax + by + cz + d_1 = 0}$?

1- Serán planos paralelos, por lo tanto, sus ecuaciones serán de la forma:

$$ax + by + cz + d_2 = 0$$
$$ax + by + cz + d_3 = 0$$

2- Su distancia al plano Π ha de ser "d", luego, aplicando la fórmula de la *distancia entre dos planos*:

$$d = \frac{d_1 - d_2}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{d_3 - d_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Modificación 1: construcción gráfica.

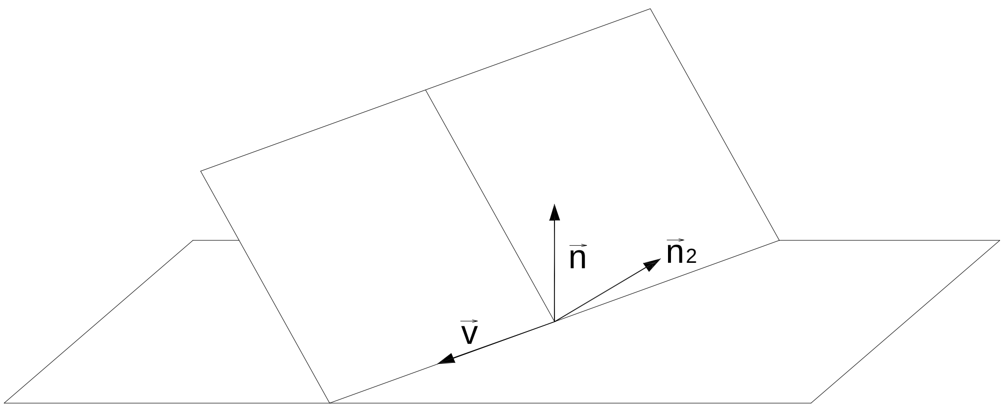
Otra forma de hallar las ecuaciones de estos planos, aunque más laboriosa, sería:

1- Desde un punto P del plano Π, trazar la recta "r" perpendicular al plano. Su vector director será el vector normal del plano.
2- Encontrar dos puntos genéricos, P_1 y P_2, de la recta "r", y cuya distancia a P sea la que deseamos.
3- Los planos que buscamos contendrán respectivamente a los puntos P_1 y P_2, condición con la que determinaremos el coeficiente "d" de sus ecuaciones.

Tipo 3.2. Plano que forme un ángulo α con un plano Π.

Para completar la definición del problema, será necesaria una condición adicional, pues podemos comprobar que existen infinitos planos que formen un ángulo determinado con otro plano: la solución será única cuando impongamos la condición de que el nuevo plano contenga además a una determinada recta.

Generar, por ejemplo, el plano B, que comparte la recta "r" con el plano Π y forma con él un ángulo α:



El vector normal del plano buscado, $\overrightarrow{n_2}$, formará un ángulo α con el vector $\vec{n}$, y además será perpendicular al vector director de la recta, $\vec{v}$. Por lo tanto:

$$\overrightarrow{n_2}.\vec{v} = 0 \quad \text{y} \quad \overrightarrow{n_2}.\vec{n} = \left|\overrightarrow{n_2}\right|.\left|\vec{n}\right|.\cos\alpha$$

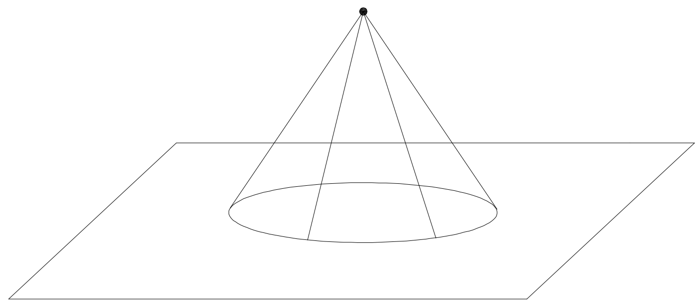
(sistema que nos permitirá encontrar las componentes del vector $\overrightarrow{n_2}$).

Otra forma de enfocar el problema sería utilizando la expresión del *haz de planos* que se generan por una determinada recta "r". En todo caso, los procedimientos siempre nos llevarán a plantear el **producto escalar** de los vectores implicados, lo que nos dará lugar a sistemas de ecuaciones relativamente laboriosos de resolver.

En general, la problemática del curso se reducirá a situaciones de paralelismo o perpendicularidad.

Tipo 3.3. Recta que forme un ángulo α con un plano Π.

En este caso, nuevamente lo más interesante es comprobar el lugar geométrico al que conduce la premisa, puesto que el cálculo analítico supera ligeramente los objetivos de esta etapa.



Las condiciones que podemos establecer son las siguientes:

- El vector director $\vec{v}$ de la recta, (v_x, v_y, v_z), forma un ángulo de $90-\alpha$ con el vector normal del plano, (a, b, c).
- La recta pasa por un punto dado.

Al realizar el producto escalar obtendremos que la solución no es única, pues sólo disponemos de una ecuación. Con lo cual verificamos lo que hemos visualizado previamente.

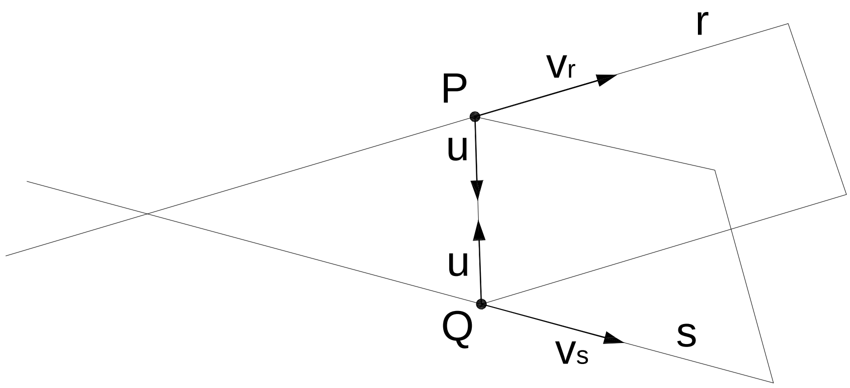
Tipo 3.4. Perpendicular común a dos rectas que se cruzan.

Situación relacionada con el cálculo de la distancia entre dos rectas, pero que nos obliga a situar ese segmento de *mínima distancia*, por lo que hemos de desarrollar un método inicial.

Si la recta buscada es perpendicular a las otras dos, también lo será su vector director. Por ello se propone como técnica inicial la siguiente:

1- Cálculo del vector "u" perpendicular a las rectas "r" y "s".
2- Generación de los planos Π_1 (determinado por "r" y "u") y Π_2 (determinado por "s" y "u").

3- La perpendicular común es la intersección de los planos Π_1 y Π_2.



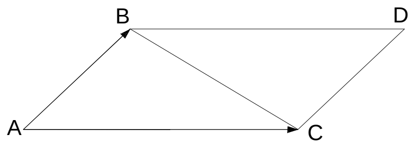
Siendo de relativa dificultar visualizar la construcción geométrica, puede ser de utilidad plantear la situación inicialmente con rectas "sencillas", como pudieran ser paralelas a los ejes de coordenadas, para a continuación generalizar el caso observando que las condiciones se mantienen.

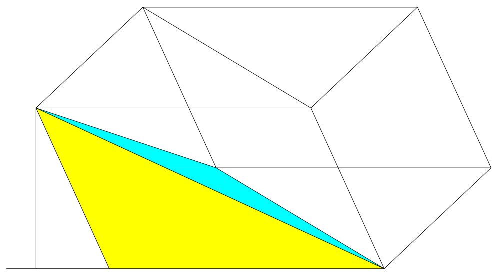
La modificación presentada para el cálculo de la *distancia* (puntos genéricos) es otro método para hallar la perpendicular común.

4. CALCULO DE AREAS Y VOLUMENES.

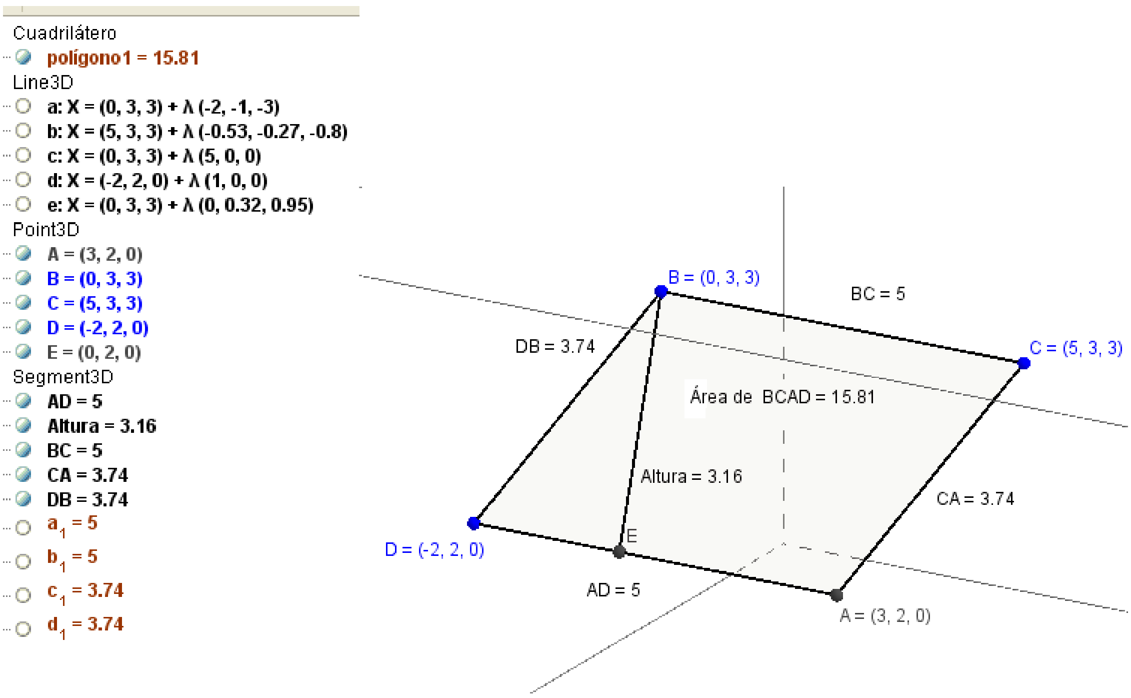
El significado geométrico del producto vectorial y del producto mixto ha sido objeto de estudio en las unidades previas. En este caso, se trata de aplicar lo ya conocido para el cálculo de áreas o volúmenes de otros cuerpos.

Tanto para el área del triángulo como para el volumen del tetraedro se utilizarán los gráficos oportunos para la deducción de sus fórmulas, que resultan inmediatas.





Es también una buena ocasión para comprobar los resultados obtenidos con el programa Geogebra:



finalmente, resulta interesante el desarrollo de la expresión para hallar el volumen del tetraedro definido por sus cuatro vértices:

$$V = \frac{1}{6}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right] = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix}$$

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La justificación de las técnicas correrá a cargo del profesor fundamentalmente, puesto que se trata de razonamientos que se quedan bastante alejados del alcance del alumno medio.
Tanto la visión espacial como la práctica en el manejo de las operaciones con vectores son herramientas todavía poco utilizadas.
Precisamente por esta razón, uno de los objetivos de esta unidad es adiestrar en el manejo y utilidad de estas operaciones. El profesor ha de promover, a base de preguntas, que sea el propio alumno quien vaya deduciendo las consecuencias de cada operación.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

En la Unidad Didáctica precedente han debido quedar institucionalizados varios procedimientos cuya aplicación resulta ahora elemental, tales como:

- Ecuación de una recta paralela a otra.
- Ecuación de un plano paralelo a otro.
- Recta perpendicular a un plano que pasa por un punto.
- Etc.

Es decir, disponemos ya de un conjunto sistematizado de fórmulas, relaciones y pautas que nos permiten trabajar los conceptos de paralelismo, perpendicularidad, vector director o vector normal, etc.

En esta Unidad, el resultado último será la institucionalización de un conjunto de fórmulas y métodos que nos permiten resolver algunos problemas métricos de forma más económica. Igualmente, se institucionalizan las propiedades del producto escalar y producto vectorial.

La fórmula o método queda institucionalizado cuando, habiendo sido justificada la técnica mediante la demostración o razonamiento correspondiente, se corrobora su validez a través de la realización de algunos ejercicios, comprobándose en su caso las ventajas que proporciona su uso.

El caso más visible es la fórmula que nos calcula la distancia de un punto a un plano; pero también nos encontramos algunos métodos, como el empleo de puntos genéricos y el uso de los productos escalar y vectorial, que en cierto modo se *institucionalizan* como herramientas.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

(ver apartados F, *sobre las técnicas*, y H, *secuencia didáctica*).

H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

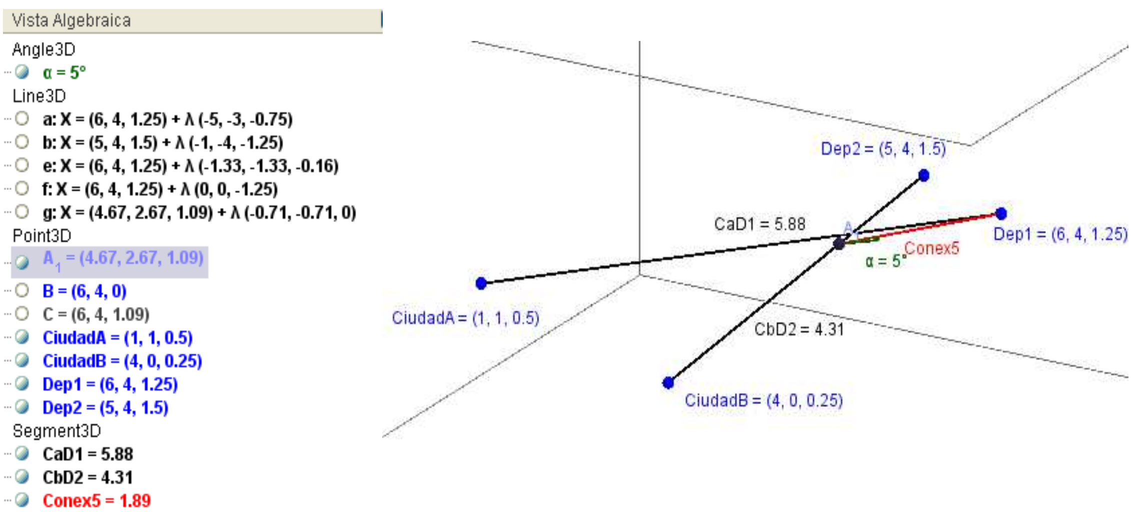
1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

SESION 1ª.

Repaso de las operaciones de cálculo de distancias y ángulos en el plano.

Planteamiento de los problemas métricos en el espacio. Presentación de los problemas "razón de ser", comprobando que necesitamos herramientas más potentes para resolver las geometrías no elementales: la geometría analítica.
Introducción al espacio de tres dimensiones y cálculo de la distancia entre 2 puntos en el espacio. Partiendo de la configuración geométrica en el espacio, el propio alumno podrá deducir la fórmula de la *distancia entre dos puntos*. Puede plantearse inicialmente el cálculo de la distancia de un punto al Origen, y ampliarse a continuación a dos puntos cualesquiera.

Para presentar los problemas que constituyen la razón de ser del objeto matemático podemos utilizar el soporte gráfico que nos proporciona Geogebra3D, que por su carácter dinámico nos permite plantear diferentes situaciones de manera muy económica para el profesor. Por ejemplo, en el caso de las *conducciones de agua* que se cruzan:



Se sugiere una sesión dinámica mediante la discusión por parejas y posterior puesta en común, animada por el profesor, acerca de las situaciones planteadas.

SESION 2ª.

Planteamiento del problema *Distancia de un punto a una recta*.
Expresión gráfica. Identificación de elementos y de sus relaciones.

Podemos retomar para empezar el problema de las *conducciones de agua*. ¿Cómo construiríamos una tubería para sacar agua del canal a una pequeña borda? Después de comprobar que el modo más económico es acercarse perpendicularmente, se plantea calcular la distancia de un punto a una recta.

Puede tomarse como ejemplo el ejercicio 1.1 u otro similar.

E.1.1. Hallar la distancia del punto P(1,0,-2) a la recta r: $\frac{x-5}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-2}{-1}$

El profesor ha de acompañar cada paso del proceso analítico con la visualización sobre el dibujo en el espacio, de manera que el alumno pueda comprender a lo largo del recorrido dónde se sitúa en cada momento hasta llegar a la resolución final del problema.

Ahora podemos resolver nuestro problema inicial; sólo tendremos que expresar el canal con la ecuación de una recta, y la borda según sus coordenadas. ¿Cuántos metros de tubería tenemos que poner finalmente?

Estos primeros ejercicios han de realizarse pausadamente, intentando evitar que el alumno se "pierda" en el proceso. Se trata de generar una forma de razonar basada en los criterios de perpendicularidad, paralelismo o distancia mínima, que habrán de servirnos para el resto de los casos planteados a lo largo de la Unidad.

SESION 3ª.

Otros métodos para calcular la distancia de un punto a una recta. (utilización del producto vectorial y método de puntos genéricos).

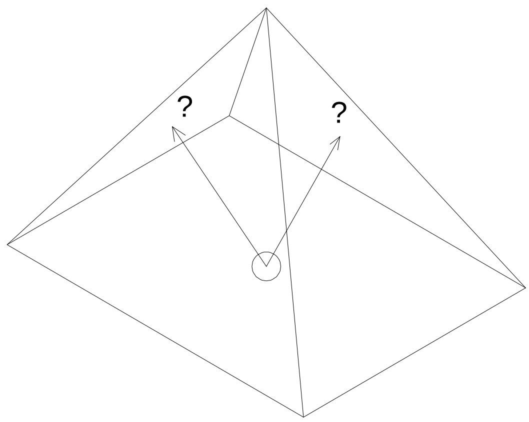
La primera técnica alternativa se puede presentar con una sencilla figura sobre el plano. Es muy aventurado esperar que sea el propio alumno el que descubra y desarrolle el método, pero sí que es factible que lo vaya descubriendo respondiendo a sucesivas preguntas que el profesor puede plantear.
La segunda técnica alternativa (puntos genéricos) requiere de una cierta capacidad de abstracción: habrá que remontarse a las ecuaciones paramétricas, que los alumnos ya manejan, para presentar el planteamiento.
Todo ello se completará con la realización de un ejercicio completo utilizando los diferentes métodos.

SESION 4ª.

Planteamiento del problema *Distancia de un punto a un plano*. Expresión gráfica y métodos de resolución.

Volvamos a las pirámides:

> *Desde la cámara central en el interior de la pirámide se desea perforar un túnel de salida por la cala sur. ¿Cuál será la trayectoria a seguir, y cuántos metros habrá que perforar si se quiere llegar por el camino más corto?*

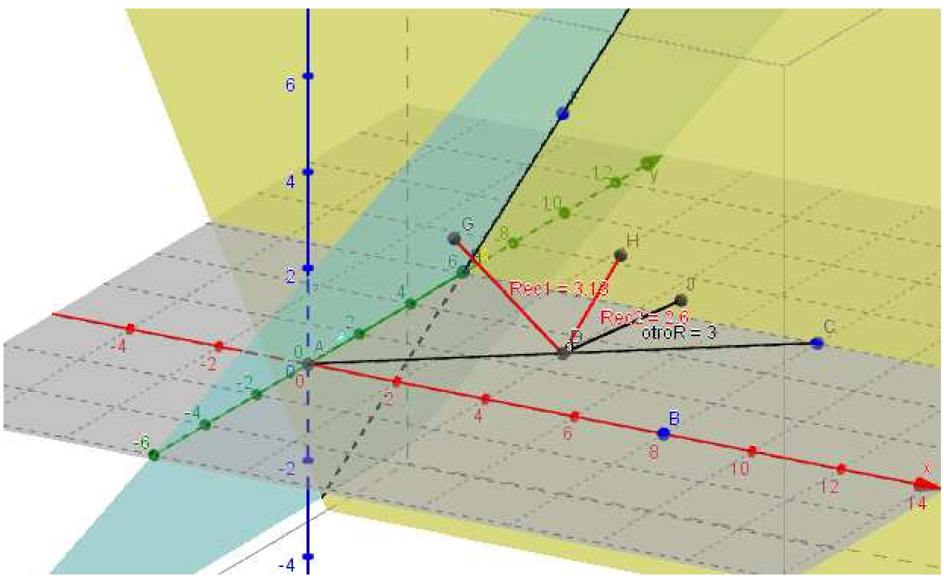


Con el trabajo de los días precedentes y un planteamiento gráfico claro, el procedimiento inicial resultará de fácil comprensión. Nuevamente se puede recurrir al plano en dos dimensiones para que el alumno visualice el método alternativo –el uso del producto escalar-. Es el momento de institucionalizar una fórmula con la que conseguimos una economía sustancial en las operaciones, por lo que se ha de hacer especial hincapié en su proceso de obtención.

El trabajo del día debe concluir con un ejercicio de aplicación realizado por ambos métodos:

E.1.2. Hallar la distancia del punto P(1,1,2) al plano Π, de ecuación: x + 2y - z = 3

Ahora los alumnos pueden intentar el diseño del túnel en la pirámide –trabajo personal-.



SESION 5ª.

Distancia entre dos planos y entre recta y plano. Técnicas y ejercicios.

A estas alturas de la Unidad, la deducción de la técnica genérica ha de resultar sencilla para el estudiante.

El trabajo ha de enfocarse al desarrollo del procedimiento que nos permite encontrar una fórmula directa en el caso de la distancia entre planos.
Previamente, deben consolidarse mediante las explicaciones gráficas correspondientes los conceptos de equidistancia que se derivan del paralelismo entre los elementos.
Conviene nuevamente proponer la realización de un ejercicio con métodos alternativos para comprobar la eficacia de las modificaciones respecto a la técnica inicial. Se pueden realizar, a modo de ejemplo, los siguientes ejercicios u otros similares:

E.1.3. Hallar la distancia entre los planos Π_1: $2x + y + 2z = 1$ *y* Π_2: $2x + y + 2z = 6$

E.1.4. Hallar la distancia de la recta r: $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2}$ *al plano* Π: $x + 3y + z = 3$

La sesión puede concluir planteando una situación que bien podría haberse constituido como *razón de ser*:

> *¿Cuál será la altura máxima de un vehículo si quiere entrar a un parking de 2,80 m. de distancia entre plantas cuyas rampas, construidas en la misma vertical, tienen una pendiente del 15%?*

SESION 6ª.

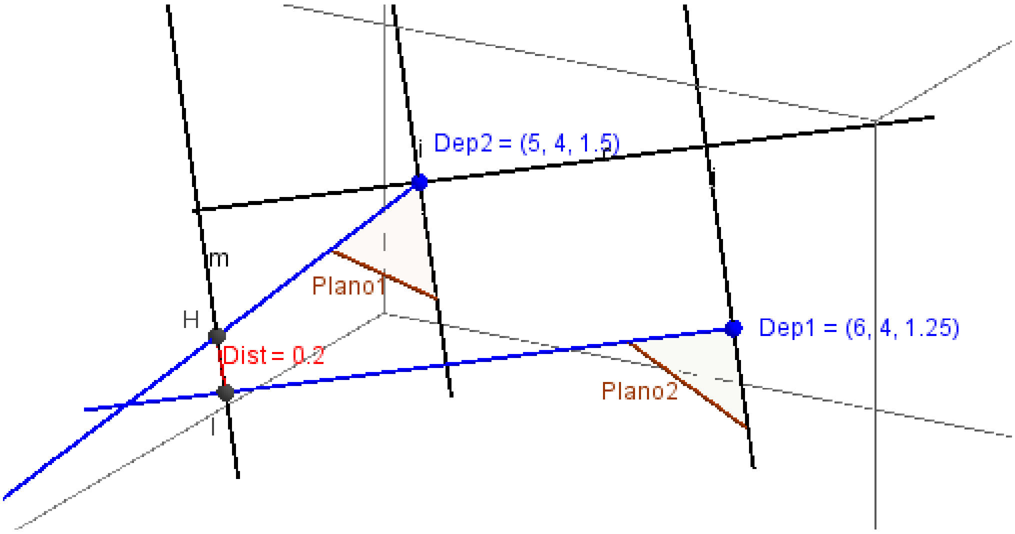
Distancia entre rectas que se cruzan y perpendicular común.

Retomamos las conducciones de agua para resolver uno de los problemas más difíciles.

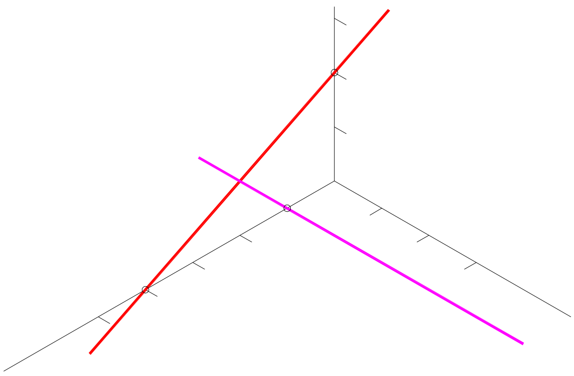
> *Se quiere comunicar dos canalizaciones [...] ¿Dónde habremos de realizar la conexión si pretendemos emplear el mínimo material posible?*

La visión espacial del problema puede resultar complicada, por lo que antes de comenzar el desarrollo de las técnicas, ha de dedicarse el tiempo suficiente para la comprensión de la geometría del problema.

La práctica con herramientas informáticas no ha de sustituir la propia construcción manual por parte del alumno; pero en este caso puede ser de gran ayuda, por lo que el profesor, en caso de considerarlo oportuno, puede aprovechar la agilidad de Geogebra.



Una buena forma de comenzar será plantear la situación con rectas paralelas a los ejes de coordenadas o contenidas en uno de los planos cartesianos, donde la visualización de la situación resulta sencilla, para generalizarla comprobando que el giro de cualquiera de las rectas mantiene las condiciones establecidas.



El planteamiento de los diferentes métodos tampoco resultará sencillo para el alumno, por lo que será al profesor a quien corresponda su proposición y razonamiento.
La jornada se completa con la realización de un ejercicio por los diferentes métodos:

E.1.5. Hallar la distancia entre las rectas "r" y "s":

$$r\!: \frac{x+1}{-2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{5} \qquad\qquad s\!: \frac{x}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

Y para trabajar en casa, podemos intentar dar un paso más en la construcción de la pirámide (concretando algunos datos más…):

> *Queremos habilitar una comunicación entre los pasadizos principales de las caras Norte y Sur. ¿Podrías averiguar los puntos óptimos para empezar a perforar en cada pasadizo y la dirección a seguir para que se encuentren los dos equipos de perforación?*

SESION 7ª.

Angulos entre dos planos. Angulos entre recta y plano. Angulo entre dos rectas que se cortan.

¿Podrías calcular el ángulo que forman las caras Norte y Este de la pirámide? ¿Y la pendiente de la arista Noreste?

El profesor puede promover en este caso la deducción de las fórmulas correspondientes, sugiriendo en todo caso la utilización de la operación vectorial correspondiente.
Pueden realizarse un par de ejercicios de cada tipo, pues en este caso resultan relativamente rápidos:

E.2.1. Calcula el ángulo formado por los planos

$\Pi_1: \quad x + y + z = 1 \qquad\qquad \Pi_2: \quad x - y - 2z = -3$

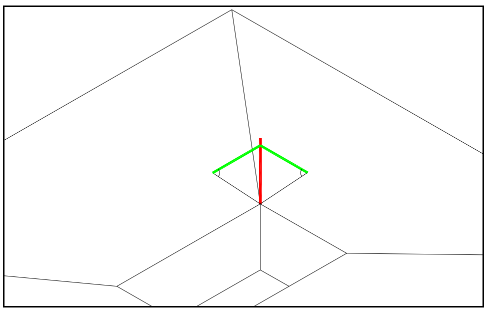
E.2.2. Calcula el ángulo formado por la recta "r" y el plano Π_1*:*

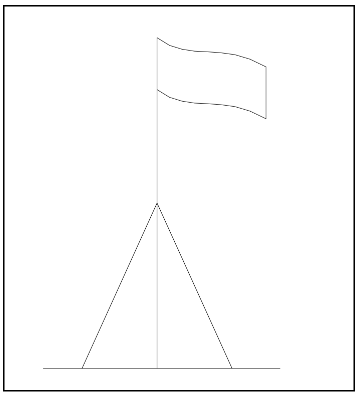
$r: \quad \frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{2} \qquad\qquad \Pi_1: \quad x + y + z = 1$

SESION 8ª.

Problemas de aplicación.
Generación de planos o rectas que cumplan una determinada condición.

Es el momento de consolidar la *utilidad constructiva* de lo aprendido hasta ahora.
Se puede comenzar con la generación de un plano paralelo, y continuar planteando situaciones como *el tensor de una bandera* o el problema 3 de "razón de ser":





Se puede introducir también, sin más intención que la comprensión geométrica, la generación de superficies de revolución. Para practicar, se plantean algunos ejercicios:

E.3.1. Hallar el plano B*, paralelo a* Π*:* $x + y + z = 1$ *y situado a una distancia de 2 ud.*

E.3.2. Hallar el conjunto de planos que pasan por el vértice A (5,5,5) y forman 60º con el plano z = 0.

E.3.3. Hallar la ecuación de la recta contenida en el plano x + y = 5 y que forma un ángulo de 30º con el plano z = 1.

SESION 9ª.

Aplicación de las operaciones vectoriales para el cálculo del volumen de un paralelepípedo y un tetraedro. Aplicación del producto vectorial para el cálculo de áreas –paralelogramo, triángulo-.

El objetivo fundamental es que el alumno compruebe la utilidad de las operaciones vectoriales para realizar determinados cálculos, sin necesidad de buscar complicadas proyecciones.
En unidades anteriores ya han estudiado el significado geométrico del producto vectorial o del producto mixto, por lo que se tratará simplemente de recordarlo y aplicarlo, incrementando progresivamente la dificultad del *enunciado* del ejercicio. Los siguientes ejercicios pueden utilizarse como ejemplo, para a continuación aplicar lo aprendido a un caso real, como el volumen de la pirámide y la superficie de sus caras.

E.4.1.b. Calcula el área del triángulo de vértices A(0,0,0), B(0,1,2) y C(2,1,5).

E.4.2.b. Calcula el volumen del tetraedro de vértices A(0,0,0), B(0,1,2), C(2,1,5) y D(3,5,-1).

SESION 10ª.

Planteamiento de problemas contextualizados y repaso general.

Los problemas que se constituyen en *razón de ser* se han ido resolviendo a lo largo de las sesiones anteriores. En esta última, se pueden plantear algunas variaciones, nuevas preguntas a partir de distintas situaciones.

No es ya el momento de desarrollar procedimientos, sino de identificar el caso objeto de la pregunta y buscar la forma más económica de resolverlo.

Será también el momento de resolver dudas y resumir la metodología.

SESION 11ª.

Prueba escrita de evaluación.

SESION 12ª.

Resolución de la prueba de evaluación.

2. Establece una duración temporal aproximada.

La Unidad Didáctica que nos ocupa presenta una cantidad de contenidos y, especialmente, de casuística, que obligan a dedicar un tiempo considerable para impartirla con garantías. Por añadidura, el tipo de problemas que se van a plantear requieren a menudo que haya que emplear toda una hora para un único problema.

Con esta consideración, estimamos una duración aproximada de 3 semanas, que a cuatro horas semanales suponen un total de 12 horas lectivas. De las cuales, la penúltima hora se dedicará a la prueba escrita de evaluación y la última a la resolución de dicha prueba.

I. SOBRE LA EVALUACIÓN

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Planteamos los siguientes ejercicios:

GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMAS MÉTRICOS.
2º de BACHILLERATO.

1.- Hallar la distancia de la recta

r: $x = 3z + 3$
$y = 4z - 1$

a los ejes coordenados, y la ecuación de la recta que nos define el camino más corto entre "r" y el eje OX. Razonar en cada caso el procedimiento elegido.
(4 puntos).

2.- Encontrar, razonando el procedimiento, la ecuación del plano paralelo al de la ecuación $x + y + z = 1$, con la condición de que el punto A (3, 2, 1) equidiste de ambos.
(2 puntos)

3.- Calcular el volumen y la superficie del tetraedro definido por los planos
$y = 0$
$z = 0$
$x - y = 0$
$3x + 2y + z - 15 = 0$

y el ángulo que forman las caras incluidas en los dos últimos planos.
(4 puntos)

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Con la primera pregunta se pretende evaluar el manejo de los diferentes procedimientos aprendidos. Siendo un ejercicio que permite distintos caminos para resolverlo, el alumno se ve obligado a elegir y razonar su elección. En el ejercicio se comprueba además el conocimiento de las técnicas para construir nuevos elementos *–construcción* de planos y rectas a partir de una determinada condición-. El hecho de enunciar el segundo punto como *camino más corto* trata de reforzar el propio concepto de *perpendicular común*.

La segunda pregunta trata de comprobar si el alumno es capaz de plantear y modelizar una determinada situación, en este caso sencilla, y aplicar los conocimientos adquiridos para resolverla. Desvelará quién no ha comprendido realmente los conceptos de paralelismo y equidistancia.

El tercero es un ejercicio variado que nos indicará si el alumno conoce la utilidad de las operaciones del producto vectorial y mixto, así como la técnica para calcular ángulos entre elementos. Requiere además un trabajo previo de *construcción* de aristas y vértices, donde se evaluará la agilidad para manejar los procedimientos aprendidos en las unidades anteriores.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

En la **primera pregunta**, espero que los alumnos que han seguido el desarrollo de la unidad con buen aprovechamiento planteen desde el principio el problema para resolver las dos cuestiones a la vez. Es decir, que hallen la perpendicular común, los puntos de corte con cada una de las rectas y la distancia entre ellos, de acuerdo a esa secuencia.

El método de puntos genéricos me parece un poco abstracto para esta etapa, puesto que los alumnos apenas han trabajado las combinaciones lineales. Tengo la impresión de que será elegido de forma excepcional.

Sin embargo, sí que es muy posible que se pretenda resolver primero la cuestión inicial –la distancia- mediante el método de *planos paralelos*.

La **segunda pregunta**, aun siendo un ejercicio de rápida realización, será la que plantee mayores problemas, y previsiblemente sólo será resuelta por los alumnos que han comprendido globalmente los conocimientos del tema. Requiere una expresión gráfica previa que, quien no visualice, no podrá culminar con la resolución analítica.

Es de suponer que varios alumnos hallarán un plano paralelo al dado y conteniendo al punto dado. También es posible la construcción del plano paralelo al buscado, pero en la región contraria del espacio.

La **tercera pregunta** no ha de suponer grandes dificultades, pero requiere de la ejecución de muchas operaciones, por lo que puede dar lugar a errores operacionales o de atención. Quien no haya aprendido las fórmulas adecuadas difícilmente podrá pasar de hallar los vértices del tetraedro, pues se verá desbordado por la complicada geometría del cuerpo.

El alumno que "descubra" la situación de algunos de los vértices en los ejes de coordenadas y en el origen comprobará la no necesidad de aplicar el producto vectorial para el cálculo del área de la cara; pero la mayoría de ellos no descubrirán esta simplificación del ejercicio.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Los criterios de calificación, comunes a todas las preguntas, serán los siguientes:

20%: Planteamiento del problema.
80%: Desarrollo del procedimiento y obtención del resultado.

La experiencia indica que resulta casi imposible establecer un listado de errores previsibles; de igual modo, y en concreto en ejercicios cuyo modo de resolución no es único, es aventurado preestablecer unas puntuaciones parciales para cada paso.
Por dichos motivos se fijan unos criterios con una flexibilidad que permita valorar el *trabajo realizado* sobre el ejercicio.

En el *planteamiento del problema* se valorará la comprensión por parte del alumno de la situación a resolver, que podrá expresar verbal o gráficamente; es decir, si se ha entendido lo que buscamos y sabemos cómo buscarlo.

No se esperan, por parte del alumno, razonamientos como los que siguen, pero sí que de alguna forma exprese dichos razonamientos:

> *"Para encontrar la perpendicular común podemos utilizar dos puntos cualesquiera de las rectas; cuando el vector que forman esos dos puntos sea perpendicular a cada una de las rectas, ese será el vector director de la recta que buscamos; la condición de "ser perpendicular" la imponemos con el producto escalar igual a cero…"*

> *"Para hallar el volumen del tetraedro tendremos que calcular primero sus vértices, que serán la intersección de los planos dados, y luego aplicar la fórmula…"*

El planteamiento puede indicarse también de forma gráfica.

En el *desarrollo del procedimiento* se valoran las operaciones que se han de realizar en el camino hacia la solución del problema: la puntuación será proporcional a la consecución total o parcial de los puntos a averiguar. Por ejemplo, en el caso de *la distancia entre dos rectas*, si el alumno elige el método de la distancia entre una de las rectas y el plano formado por los vectores de ambas conteniendo a la segunda recta, la puntuación iría sumando según se fueran construyendo el plano y se calculara posteriormente la distancia recta-plano (para lo cual, tendría nuevamente varias posibilidades).

La totalidad de la puntuación sólo se obtendrá si además se ha ejecutado todo el procedimiento sin errores de cálculo y se obtiene por tanto la respuesta correcta. Los errores, entendiéndose como tales las operaciones aritméticas sencillas, fallos de atención, etc., podrán penalizar hasta un 20%. Las operaciones vectoriales no entran en este grupo, pues si bien forman parte de las unidades anteriores, su consideración como herramienta expresa para resolver los problemas de geometría analítica le otorga un carácter de mayor importancia.

J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

1. Indica los libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

- R. Samuells (1971). *La Geometría Euclídea como Teoría del Conocimiento*. Madrid: Ediciones Rialp.

- J.R. Vizmanos y M. Anzola. *Matemáticas I.* Madrid. Ediciones SM.

- M.D. Gómez (2009). *Matemáticas II. Bachillerato.* Ediciones SANTILLANA.

- Cólera, Oliveira y Fernández. (1997). *Matemáticas II Bachillerato Ciencias*. ANAYA.

- J. Gascón. (2002). *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?* Zaragoza. Revista SUMA, art.39.