

Trabajo Fin de Máster

*Máster en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria,
Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas,
Artísticas y Deportivas*

(Curso 2012-2013)

Especialidad: Matemáticas

ESTADÍSTICA EN 3º DE ESO

Autor: *Carlos Sánchez Tapia*

Director: *Julio Sancho Rocher*



Universidad
Zaragoza

ÍNDICE

Introducción	1
A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar	2
B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.....	4
C. Sobre los conocimientos previos del alumno	6
D. Sobre las razones de ser del objeto matemático.....	9
E. Sobre el campo de problemas	13
F. Sobre las técnicas	17
G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas).....	21
H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma	25
I. Sobre la evaluación	29
J. Sobre la bibliografía y páginas web	39

INTRODUCCIÓN

Las estadísticas dicen que “nueve de cada diez dentistas recomiendan usar una pasta de dientes determinada”, que “el 25% de la población activa en España está en paro”, que “la esperanza de vida en España es de 80 años”... En la sociedad actual necesitamos conocer la Estadística que subyace en muchos ámbitos cotidianos, pero ¿qué es la Estadística? En la literatura se pueden encontrar numerosas definiciones igualmente válidas, aunque la más breve, clara y concisa la describe como “la ciencia de los datos” [1]. Desde un punto de vista humorístico, la estadística es la ciencia que dice que “si yo tengo dos vacas y tú no tienes ninguna ambos tenemos en promedio una vaca” o que “si meto al mismo tiempo la cabeza en la nevera y los pies en el horno mi temperatura media es normal” [5]. Dentro de la materia de Matemáticas, la rama de la Estadística es especialmente importante y su uso está muy extendido en cualquier información difundida por los medios de comunicación.

Por todo esto, comprender correctamente cualquier concepto estadístico es esencial para los alumnos en esta etapa de educación secundaria para poder interpretar datos, detectar errores, tomar decisiones y tener pensamiento crítico sobre cualquier tipo de información que se les presente. Además, el uso de la Estadística está estrechamente relacionado con el uso de las TIC (Tecnologías de la Información y Comunicaciones), lo que supone un aliciente más para ahondar en el estudio y aprendizaje de esta rama matemática.



A. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

El objeto matemático global a enseñar es la **Estadística**, y ésta a su vez engloba una serie de objetos matemáticos más concretos que habrá que trabajar en el aula y que se enumeran a continuación:

- Población y muestra. Tipos de muestreos.
- Variables cuantitativas y cualitativas.
- Intervalos. Marca de clases.
- Frecuencia absoluta y relativa.
- Diagramas y gráficos.
- Parámetros de centralización: media aritmética, mediana y moda.
- Parámetros de dispersión: recorrido, desviación media, desviación típica y varianza.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

El objeto matemático descrito en el punto anterior se sitúa en 3º de Educación Secundaria Obligatoria, dentro de la materia de Matemáticas. En el Currículo Aragonés de Educación Secundaria [2], dentro de la materia de Matemáticas, se agrupa el objeto de la Estadística con la Probabilidad en un mismo bloque ya que ambos están íntimamente relacionados entre sí. En el citado bloque, lo que refiere únicamente a Estadística es lo siguiente:

Bloque 6. Estadística (y probabilidad)

- Objetivos, elementos y fases de un estudio estadístico. Estadística unidimensional.*
- Análisis de las características de una población a partir de tablas y gráficos estadísticos.*
- Necesidad, conveniencia y representatividad de una muestra. Métodos de selección aleatoria y aplicaciones en situaciones reales. Atributos y variables discretas y continuas.*
- Recogida de información estadística usando distintas fuentes y procedimientos. Agrupación de datos en intervalos. Histogramas y polígonos de frecuencias. Construcción de la gráfica adecuada a la naturaleza de los datos y al objetivo deseado.*
- Media, moda, cuartiles y mediana. Significado, cálculo y aplicaciones. Estimación de la media y la desviación típica a partir de gráficos estadísticos.*

- Análisis de la dispersión: rango y desviación típica. Utilización de la media y desviación típica para interpretar las características de la población.*
- Utilización de las medidas de centralización y dispersión para realizar comparaciones y valoraciones. Actitud crítica ante la información de índole estadística.*
- Utilización de la calculadora y la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar cálculos y generar las gráficas más adecuadas.*

Los puntos anteriores marcan las competencias que deberían alcanzar los alumnos una vez superado el tema. Además, la programación y secuenciación didáctica propuestas en el presente trabajo, así como la naturaleza de las actividades que se prevén desarrollar en el aula, se centran en trabajar todos esos aspectos.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En este apartado, se resume brevemente y de manera enumerativa lo que se tratará con más detalle en posteriores capítulos del trabajo con el fin de dar una visión global del mismo y del objeto matemático en sí.

- **Campo de problemas:** principalmente, los problemas están enfocados al muestreo por estratificación, a la interpretación y diseño de diagramas y gráficos, al cálculo de medidas de centralización, al cálculo de medidas de dispersión o al cálculo de medidas de ambos tipos dentro de un mismo problema.
- **Técnicas:** todas aquéllas que lleven a clarificar los conceptos del objeto matemático en estudio, como diferenciar entre población y muestra, identificar si una variable es cuantitativa o cualitativa, obtener las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de un grupo de datos y representarlas en tablas, diseñar diagramas y gráficos, y calcular medias, medianas, modas, desviaciones medias, recorridos, varianzas y desviaciones típicas en conjuntos de datos. Cada una de las técnicas que se emplearán se enseñarán en función de los medios e instrumentos que pueda utilizar el alumno en cada momento (calculadora, papel, regla, hoja de cálculo...).
- **Tecnologías:** las tecnologías que justifiquen la introducción de las nuevas técnicas que los alumnos deben interiorizar vendrán dadas por la proposición y debate sobre actividades concretas en las que se necesiten los conceptos de estudio (estas actividades se explican con mayor detalle en el apartado G).

B. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

La introducción escolar del objeto matemático de la Estadística normalmente se justifica por la necesidad de interpretar correctamente el mundo que nos rodea, el cual sería impensable si no hubiese Estadística. Este objeto matemático está presente en la vida de los alumnos y la mayoría aprenden conceptos estadísticos “sin darse cuenta”, por ejemplo para saber la calificación final de una asignatura en la que han realizado varios exámenes necesitan calcular la nota media de todos ellos. Además, con conocimientos de estadística, los alumnos serán capaces de interpretar y ser críticos con muchas informaciones que se dan habitualmente en los medios de comunicación.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

La temática del campo de problemas suele ser de diversa índole siempre que se incluyan datos y variables estadísticas en ellos. Es típico el análisis y la comparación de las pirámides de población de distintos países, o el estudio de pictogramas donde los objetos representados, por ejemplo barriles de petróleo, cumplen una función de información doble: qué se analiza y cuán importante es en comparación con el resto de datos. Por otro lado, la temática del consumo energético es un tema recurrente que, además de ser adecuado para trabajar conceptos estadísticos puede concienciar a los alumnos sobre conductas más ecológicas. Por último, también destacan los problemas donde se tiene un gran número de medidas o datos de los que hay que obtener información relevante como su media, mediana o varianza.

Respecto a las técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente, se encuentran las técnicas de agrupación de datos en intervalos, las técnicas de muestreo partiendo de grupos de población con distinto número total de muestras, de representación de diagramas de barras utilizando una escala en el eje de ordenadas adecuada y teniendo en cuenta la posible futura inclusión de nuevos conjuntos de datos, o de sectores utilizando herramientas de dibujo técnico como el transportador de ángulos. Otros tipos de técnicas y tecnologías son las asociadas a la generación de tablas de frecuencias

partiendo de unos datos dados, y el cálculo de los parámetros de centralización y dispersión mediante las fórmulas correspondientes o previa ordenación ascendente de los datos.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

La enseñanza del objeto matemático puede resultar muy positiva y enriquecedora en la formación tanto personal como académica del alumno puesto que el objeto matemático y las actividades que se pueden desarrollar en torno a él fomentan la adquisición de criterios propios y la formación de un espíritu crítico ante la información o publicidad que se ofrece en los medios de comunicación. Además, dicha enseñanza sensibilizará y hará tomar conciencia a los alumnos de la utilidad del lenguaje estadístico para resolver problemas de la vida cotidiana, así como de la conveniencia y facilidad de uso de determinados tipos de tablas, diagramas o gráficas para representar diferentes tipos de información social, económica o de cualquier otra índole que el alumno pueda sentir cercana a su realidad.

C. Sobre los conocimientos previos del alumno

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

El objeto matemático de la Estadística ya aparece en cursos previos de secundaria, tal como se cita a continuación y según el Currículo Aragonés [2]:

Primer Curso de ESO:

Bloque 6. Estadística (y probabilidad)

—Utilización de tablas de valores para obtener información sobre fenómenos naturales y cotidianos. Construcción de tablas de valores, tanto a partir de una descripción verbal como de una gráfica.

—Población y muestra. Características cualitativas y cuantitativas de una población. Distribuciones discretas. Tablas de frecuencias absolutas y relativas. Diagramas de barras.

Segundo Curso de ESO:

Bloque 6. Estadística (y probabilidad)

—Diferentes formas de recogida de información. Organización de los datos en tablas. Frecuencias absolutas y relativas, ordinarias y acumuladas.

—Diagramas estadísticos. Lectura e interpretación de la información contenida en tablas y gráficos estadísticos.

—Elaboración e interpretación de tablas de frecuencia y de diagramas de barras correspondientes. Realización de diagramas de sectores a partir de tablas de frecuencias absolutas y relativas

—Medidas de centralización: media, mediana y moda. Significado, estimación y cálculo. Utilización de la media, la mediana y la moda para realizar comparaciones y valoraciones. Utilización de las propiedades de la media para resolver problemas.

—Utilización de la hoja de cálculo para organizar los datos, realizar los cálculos y generar los gráficos más adecuados.

Además de todos estos conceptos estadísticos de cursos anteriores, los cuales son también referidos y ampliados en el currículo del Tercer Curso de ESO en el que se enmarca este trabajo, el alumno debe poseer ciertas habilidades básicas para poder aprender correctamente a manejar el objeto matemático, como por ejemplo:

- Realizar operaciones con números enteros, decimales y fracciones.
- Utilizar adecuadamente la calculadora (operaciones con potencias, raíces cuadradas...)
- Tener nociones de trabajo con hojas de cálculo.
- Saber expresar intervalos mediante paréntesis y corchetes.
- Dominar el cálculo de porcentajes.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

De acuerdo con el Currículo Aragonés de Secundaria, se presupone que el alumno ha podido adquirir los conocimientos previos mencionados en el punto anterior y que el aprendizaje del objeto matemático será más bien una continuación de un tema ya conocido que algo completamente nuevo. Sin embargo, sería conveniente realizar un sondeo o actividad inicial, detallada en el siguiente apartado, para conocer realmente la amplitud de los conocimientos que el alumnado posee sobre este tema y, en función de los resultados, adecuar los ejercicios y problemas de las primeras sesiones para trabajar las principales carencias encontradas.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Como se ha nombrado en el apartado anterior, es conveniente realizar una actividad inicial a nivel de aula para que el profesor tenga una idea correcta de la realidad sobre los conocimientos de los alumnos y al mismo tiempo los alumnos observen la necesidad de estudiar el objeto matemático. La actividad que se propone a continuación puede ser adecuada para valorar los conocimientos previos e iniciar a los alumnos en el razonamiento de aspectos estadísticos:

- 1) El profesor describiría el siguiente enunciado: “*Los alumnos de esta clase han obtenido las siguientes calificaciones en la asignatura de Matemáticas (escribe una lista de números (puede poner puntos suspensivos después de escribir 4 o 5 para no escribir las notas de todos los alumnos)). ¿Cómo podríamos saber si tenemos mejores o peores resultados que el resto de alumnos de 3º de ESO de todo Aragón? ¿Iríamos comparando uno por uno? Tened en cuenta que hay miles de estudiantes en Aragón...*”

- 2) Se dejarían varios minutos de debate en el que expusiesen sus ideas, entre las que seguramente aparezca el concepto de “media aritmética” ya que es habitualmente el más intuitivo y fácil de interpretar. Además, durante el debate, el profesor empezaría a usar los términos de población y muestras para que se fuesen familiarizando con ellos.
- 3) A continuación, el profesor seguiría con el enunciado una vez descubierta la utilidad del concepto de media aritmética: *“La nota media de nuestra clase es 6,73. Supongamos que en todo Aragón hay 100 clases de 3º y que ordenándolas por nota media de mayor a menor, ocupamos la posición 20. ¿Qué porcentaje de clases tiene mejor calificación media que nosotros? ¿Qué puesto ocuparíamos si hubiésemos ordenado la nota de menor a mayor? ¿Y si hubiésemos ocupado el primer puesto?”*
- 4) Se volverían a dejar varios minutos de debate en el que se recuerden conceptos de cálculo de porcentajes y el profesor empiece introducir el concepto de “cuartil”.
- 5) Para finalizar la actividad, el profesor podría dibujar un gráfico de tres barras de diferente altura diciendo que corresponden a las notas medias de las tres clases de 3º del colegio y lanzaría las siguientes preguntas: *“¿Qué clase obtiene las mejores calificaciones? Si eligiésemos a Pepa (nota 9,5) y Pepe (nota 9), ¿serían una muestra representativa del nivel de Matemáticas de nuestra clase?”*
- 6) En este caso el debate sería cortito ya que únicamente tendrían que interpretar una gráfica sencilla y empezar a intuir el concepto de muestra de una población y representatividad.

D. Sobre las razones de ser del objeto matemático

1. Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático.

Como razón de ser del objeto matemático podemos nombrar datos reales que, conociendo conceptos estadísticos, pueden “sorprender” al alumno. Un ejemplo lo constituyen los siguientes fragmentos extraídos de la referencia “El hombre anumérico” [4], y, entre la lectura de uno y otro en clase, el profesor debería invitar a reflexionar a los alumnos añadiendo algo de contextualización previa sobre el pensamiento americano y el terrorismo (teniendo en cuenta que a esta edad habrá muchos alumnos que no tengan por qué saber nada de esto) para que puedan comprender los fragmentos adecuadamente:

“Yerry y yo no iremos a Europa con tantos terroristas...”

¿Creen los alumnos que la apreciación hecha por el interlocutor es acertada para minimizar riesgos? Los alumnos deberían tener unos pocos minutos para debatir sobre ello y, junto con el profesor, llegar a una conclusión previa a la lectura del siguiente fragmento comparativo con otras estadísticas correspondientes al año 1985:

“... los 17 norteamericanos muertos por terroristas en 1985 representan una pequeñísima parte de los 28 millones que salieron al extranjero ese año: una posibilidad de ser víctima en 1,6 millones, para ser precisos. Compárese esta cifra con las siguientes tasas anuales correspondientes a los Estados Unidos: una posibilidad entre 68.000 de morir asfixiado; una entre 75.000 de morir en accidente de bicicleta; una entre 20.000 de morir ahogado y una entre sólo 5.300 de morir en accidente de automóvil.”

Cabe destacar que este segundo párrafo valdría también para introducir temas de Probabilidad, estrechamente relacionados con Estadística. Con esta actividad, constituida como razón de ser del objeto matemático, se pretende despertar la curiosidad de los alumnos por el tratamiento, muchas veces poco acertado, que la sociedad en general hace de las estadísticas. Tomando como base esta actividad, el profesor debe comenzar a realizar la “evaluación” inicial de los conceptos de Estadística que ya

poseen los alumnos para poder valorar tanto su amplitud como si son correctos o erróneos.

Posteriormente, y adaptándose al tiempo restante de sesión que quede, se realizará una segunda actividad basada en el agrupamiento de los alumnos en función de algunas de sus características como género, altura, color de pelo, color de ropa, mano hábil, talla de pie...:

- 1) El profesor dirá en voz alta un criterio de clasificación, por ejemplo: “Clasificarlos por género”.
- 2) Los alumnos se dividirán en dos grupos fácilmente y el profesor hará preguntas como: “¿En qué grupo hay más miembros?” (concepto de ‘moda’). “¿Cuál es el ‘género medio’, entre comillas, de la clase? ¿Tiene sentido hablar de ‘género medio’? (debate y concepto de variable cualitativa).
- 3) El profesor dice un nuevo criterio, esta vez mejor cuantitativo, por ejemplo: “Clasificarlos por altura”.
- 4) Surgirán preguntas como: “¿Cómo lo hacemos? ¿En grupos de cuántos miembros?...”. Se debatirá sobre la forma más adecuada de agruparse y el profesor formulará preguntas al respecto: “¿Cuál es la altura media de cada grupo? Si cada grupo os ordenáis de menor a mayor altura, ¿quién está en la posición central?” (conceptos de ‘media’ y ‘mediana’).

Lo importante de esta actividad será la reflexión posterior que deben hacer los alumnos acerca de los tipos de variable estudiadas (cuantitativas o cualitativas), representatividad de un miembro o conjunto de ellos dentro de un grupo, variabilidad de las características de los miembros de un mismo grupo, etc. Finalmente, y si queda tiempo, se podrán calcular los parámetros de centralización como media, mediana y moda, y debatir acerca de los resultados obtenidos.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Los orígenes de la Estadística se remontan a la prehistoria ya que hoy día se conservan monumentos con grabados que servían a los Nuragás (civilización en la isla de Cerdeña) para llevar la cuenta del ganado y de la caza. Los siguientes pueblos de los que queda constancia que utilizaron métodos de recolección de información fueron los babilonios

hace unos 5000 años, que utilizaban tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y sobre los trueques de víveres que se llevaban a cabo. Por otro lado, la civilización egipcia hacia el año 3050 a. C. ya analizaba datos de población y renta del país, e incluso realizaba censos poblacionales continuamente [9].

Por todo lo anterior, las razones de ser históricas que dieron origen al objeto matemático de la Estadística no coinciden. El fin era el mismo que el pretendido por los gobiernos de los Estados, vocablo del que proviene la palabra Estadística, en el siglo XIX, cuando comenzó a utilizarse más ampliamente para tener un mayor control de las características de la población. Sin embargo, y a pesar de las diferentes razones de ser, el objetivo de analizar datos para la extracción de información relevante sí que es común entre la actualidad de la Estadística y su origen histórico.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

La actividad de lectura de los fragmentos de “el hombre anumérico” servirá para que el alumno se acerque a la lectura de textos de contenido principalmente matemático y, en particular para este caso, estadístico, y a su vez se constituirá en la razón de ser de los diferentes aspectos del objeto matemático.

La segunda actividad en la que los alumnos participarán de forma activa en el análisis de los datos que se puedan extraer de diferentes características dentro del grupo-clase también servirá como razón de ser del estudio del objeto matemático de la Estadística y, a su vez motivará a los alumnos en su aprendizaje.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

La metodología que se debe seguir en el aula para realizar las dos actividades previamente propuestas para constituir la razón de ser del objeto matemático será:

1. Se crearán pequeños grupos (de unas 4 o 5 personas como máximo).
2. El profesor contextualizará y leerá el primer fragmento de “El hombre anumérico” acerca de no viajar a Europa por el terrorismo.
3. Se dejarán 5 minutos de debate en cada grupo sobre la coherencia de la frase leída por el profesor.
4. Durante otros 5 minutos, un portavoz de cada grupo expondrá en voz alta al resto de la clase las ideas y pensamientos que hayan surgido.

5. El profesor repartirá una hoja a cada grupo con el segundo fragmento del texto para que la lean mientras él la lee en voz alta para toda la clase.
6. Finalmente, se hará una breve reflexión acerca de la utilidad del correcto conocimiento e interpretación de la Estadística en la sociedad.

En la actividad de análisis de datos del grupo-clase, será necesario apartar los pupitres y sillas para que haya más espacio en el que poder moverse y agruparse. Por ser una actividad dinámica, habrá que ser estricto con los alumnos para evitar posibles alborotos. La metodología que se aplicará será la siguiente (ya explicada de manera similar en el punto 1 de este apartado D):

1. El profesor dirá en voz alta un criterio de agrupamiento y los alumnos deberán colocarse de acuerdo al citado criterio.
2. Una vez reagrupados los alumnos, el profesor lanzará preguntas sobre las que los alumnos deberán reflexionar del tipo: “¿Cuál es la altura media de cada grupo?” “¿Qué alumno es la muestra mediana de cada grupo?” “¿Cuál es el color de ropa que más repite en cada grupo?” “Si se tuviesen que escoger dos miembros de cada grupo que representen la totalidad del grupo, ¿a quiénes escogeríais?”.
3. Se vuelve al punto 1 de esta metodología pero atendiendo a un nuevo criterio de agrupamiento (con 3 o 4 criterios diferentes puede resultar suficiente para que los alumnos tomen conciencia del uso de la Estadística).

E. Sobre el campo de problemas

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Dentro del objeto matemático de la Estadística, en el que se enmarca este trabajo, existen campos de problemas diferentes para cada concepto incluido dentro del tema. Así pues, se pueden distinguir los siguientes tipos de problemas y los objetivos que se pretenden alcanzar con ellos:

- **Muestreo por estratificación:** Tomar muestras o conjuntos de ellas cumpliendo requisitos de estratificación.

Un ejemplo de este tipo de problemas sería:

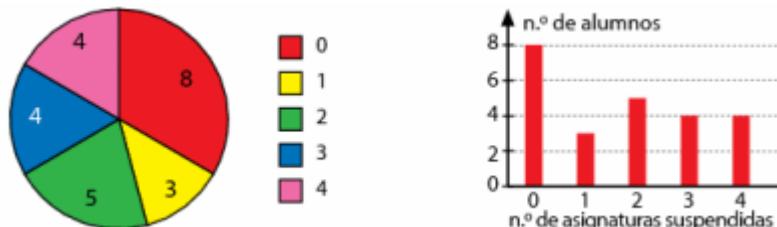
“Un agricultor posee unas tierras que divide de la siguiente manera según el tipo de cosecha: 14 hectáreas de trigo, 10 hectáreas de avena, 8 hectáreas de maíz, 7 hectáreas de árboles frutales y 17 hectáreas para hortalizas. Si un comprador desea adquirir el 20% de la superficie total cultivada, indica cuánta superficie le corresponderá de cada tipo de plantación si: a) desea tener la misma cantidad de terreno de cada una de ellas; b) desea tener una superficie proporcional a la superficie dedicada a cada producto.”

El objetivo será que los alumnos vean las diferencias entre ambos tipos de estratificación y razonen como resolverían cada una de las dos preguntas utilizando conceptos de porcentajes y fracciones.

- **Interpretación y diseño de diagramas y gráficos:** Comprender un problema partiendo de un gráfico y, viceversa, crear un gráfico partiendo de un problema.

Como ejemplo de este tipo se tendrían problemas como el siguiente:

“El número de asignaturas suspendidas en la primera evaluación en una clase de 3º de ESO viene dada por los siguientes gráficos:



¿Cuál de los anteriores gráficos representa mejor la situación? ¿El porcentaje del total de la clase que tiene dos o más asignaturas suspendidas es mayor o menor que el 50%?

La siguiente tabla muestra el número de asignaturas suspendidas en la segunda evaluación por la misma clase de 3º de ESO.

<i>Nº suspensos</i>	0	1	2	3	4
<i>Nº alumnos</i>	9	5	2	5	3

Dibuja un diagrama de sectores que represente los datos de la tabla anterior.”

El objetivo con este problema será doble: primero se tratará de interpretar correctamente cada gráfico y discutir las ventajas de cada uno razonando cuál de los dos podría ser más intuitivo para extraer información relevante; en segundo lugar se trabajará el proceso inverso de creación de un diagrama partiendo de una tabla de datos pensando razonadamente cómo formar los sectores del diagrama propuesto.

- **Cálculo de medidas de centralización:** Asimilar la utilidad de las medidas de centralización para resolver problemas de reparto o de representatividad de una población.

Ejemplos sencillos de este tipo problemas serían:

(continuando con el enunciado de los suspensos en la clase de 3º de ESO mostrado en el apartado anterior)... “*¿Crees que el nivel general de la clase ha mejorado o empeorado en la segunda evaluación respecto a la primera? Razona la respuesta. ¿Qué valor podemos tomar como referencia para realizar dicha valoración?*”

“*Luis tiene 10€, Lucía 8€, Francisco 7€, Julián 5€ y Mariano 1€. ¿Cuánto dinero tendrá cada uno si juntamos el dinero de todos y lo repartimos en partes iguales?*”

“*En una familia con 7 hijos se anota año a año la altura de cada uno de ellos. Este año se han obtenido las siguientes mediciones (en metros): 1,73; 1,42; 1,25; 1,42; 1,60; 1,82 y 1,51. ¿Cuál es la estatura promedio de los 7 hijos este año? ¿Y la estatura mediana? Si para representar al conjunto de los 7 hijos se escogen los 2 cuyas estaturas son 1,73 y 1,82, ¿constituirían ambos una muestra representativa de la familia? Razona la respuesta.*”

El objetivo buscado con estos problemas será conocer y valorar la utilidad del concepto de media como representativo de una población. Se discutirá también con los alumnos los conceptos de mediana, moda y representatividad de una muestra.

- **Cálculo de medidas de dispersión:** Entender la utilidad de las medidas de dispersión para valorar el alcance de las conclusiones extraíbles de una población de datos.

Algunos ejemplos serían:

“Luis y Paco tienen las siguientes notas en los exámenes de Matemáticas del curso:

Luis	1	9	8	2	10	2
Paco	3	5	6	4	5	6

“¿Cuál de los dos ha sido más regular a lo largo del curso? Calcula el recorrido y la varianza de las notas de cada uno.”

“Tenemos dos termómetros, uno analógico y otro digital que registran las siguientes temperaturas (en °C) a la misma hora durante 5 días seguidos:

Analógico	15,7	15,9	15,8	15,7	16
Digital	15,5	17	16	16,5	15

“Sabiendo que según el parte meteorológico la temperatura media de estos días ha sido de 16 °C, ¿cuál de los dos termómetros se ha aproximado más a esta medición?”

“¿Cuál de los dos utilizarías para tener una mayor precisión en la medida de la temperatura?”

Con estos problemas se pretende que los alumnos vean la utilidad de los parámetros de dispersión como la varianza y se discuta en el aula la representatividad de unos datos concretos por la aproximación a su media razonando cada caso concreto que, en general, a menor varianza mayor “fiabilidad” de los resultados o de las mediciones.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En principio, no se requerirán grandes modificaciones de la técnica inicial para resolver adecuadamente dichos problemas. La resolución de la mayoría de ellos estará basada inicialmente en el descubrimiento por parte de los alumnos de los conceptos que es

necesario utilizar en cada tipo de problema, como ocurría en el problema que se ha presentado como razón de ser del objeto matemático, y posteriormente en su correcta aplicación.

Las posibles modificaciones de las técnicas pueden derivarse de la necesidad de ampliar el campo de problemas, presentando poblaciones con diferente número de datos, diferentes formas de presentación de los datos (tablas, diagramas de sectores, diagramas de barras...), o incluso proponiendo problemas en los que se le dé libertad de resolución al alumno dentro de ciertos márgenes (por ejemplo en problemas en los que el alumno tenga que asociar un valor cuantitativo a una variable cualitativa para el posterior cálculo de los parámetros de centralización y de dispersión).

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología de implementación en el aula variará en función de la actividad o los tipos de problemas que se estén resolviendo. Así pues, en la introducción del objeto matemático se requerirá la formación de pequeños grupos para reflexionar sobre el objeto matemático, mientras que en la actividad dinámica subsiguiente participará el grupo al completo dentro del aula.

En el resto de sesiones de resolución de problemas se alternará entre el trabajo individual de los alumnos y el de pequeños grupos, ambos guiados sutilmente por el profesor facilitando la autonomía de trabajo.

El libro de texto se utilizará como apoyo para fortalecer las bases del conocimiento del objeto matemático ya que será una útil herramienta de la que se pueden extraer múltiples ejercicios, actividades y enunciados que incitan al alumno a razonar acerca de los diferentes contenidos. Además, servirá como base para que el profesor mande tareas que los alumnos tengan que resolver en casa.

Otras herramientas que pueden resultar útiles son la calculadora y las hojas de cálculo, por lo que el profesor deberá tratar de resolver las dudas que surjan a los alumnos acerca del uso de cualquiera de ellas.

F. Sobre las técnicas

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Siguiendo con los diferentes conceptos y tipos de problemas que se han mencionado previamente, los ejercicios y actividades que se propone realizar estarán enfocados al estudio de los siguientes aspectos:

- **Diferenciación población vs. muestra:**

“El director de una empresa de 1200 trabajadores, todos trabajando en una cadena de montaje, desea saber la satisfacción que éstos tienen en su puesto de trabajo. Para ello, pasa una encuesta a 100 trabajadores. ¿Por qué no la pasa a más gente? ¿Qué ventajas e inconvenientes tiene que sólo 100 respondan a la encuesta? ¿Y si hubiese pasado la encuesta a todos los trabajadores? ¿Y si la hubiese entregado sólo a 5 trabajadores?”

“En la cadena de producción del ejercicio anterior fabrican caramelos, a una velocidad de 1000 caramelos por hora, que luego venden a otras empresas. ¿Cuántos caramelos será necesario analizar para extraer información acerca de sus características? ¿Podremos asegurar si extraemos un único caramelo que el resto de caramelos son exactamente iguales? Razona la respuesta.”

- **Identificación del tipo de variable:**

“En una clase de primaria de 12 alumnos se pide a los alumnos que escriban su color preferido en un papel, obteniendo: rojo, azul, amarillo, azul, naranja, amarillo, azul, azul, rojo, verde, azul, rojo. ¿Qué tipo de variable es la variable “color preferido”? ¿Se puede extraer alguna conclusión acerca de las preferencias de los alumnos?”

“Las notas de final de curso de los alumnos de la clase de primaria del ejercicio anterior son las siguientes: notable, bien, suficiente, suficiente, insuficiente, sobresaliente, bien, suficiente, notable, sobresaliente, insuficiente, notable. ¿Cómo es la variable “nota final”? Diseña un método que transforme el tipo de variable de “nota final” (si es cualitativa en cuantitativa, o viceversa), mediante dos correspondencias diferentes y compara ambos resultados”.

- **Obtención de frecuencias absolutas, relativas y acumuladas:**

“En clase de gimnasia, los alumnos de una clase de 3º de ESO obtienen los siguientes tiempos en la prueba de 1000 metros lisos (en minutos): 3,1; 3,5; 3,6; 4,1; 3,0; 4,3; 3,7; 4,1; 3,3; 4,2; 3,1; 4,4; 3,6; 3,6; 3,4; 3,9; 4,0; 3,2; 3,8; 3,9; 3,6. Representa los resultados en una tabla de frecuencias. ¿Hay alguna forma de simplificar la tabla obtenida?”

“En la misma clase de 3º de ESO que en el apartado anterior, los alumnos realizan una encuesta sobre el número de libros que leen al año: 1, 4, 0, 5, 2, 4, 2, 0, 4, 1, 1, 2, 5, 7, 2, 3, 0, 1, 2, 4. Ayudándote de una tabla de frecuencias, ¿qué porcentaje de alumnos lee al menos 3 libros al año? ¿Cuál es el número de libros que tiene mayor frecuencia dentro de la clase?”

- **Diseñar diagramas y gráficos:**

“En la siguiente tabla se detalla el número de alumnos de una clase que tienen el pelo de un determinado color:

Negro	11
Castaño	9
Rubio	4
Pelirrojo	1
Otros	1

¿Qué diagrama representará mejor la distribución de los colores de pelo de la clase? Dibújalo.”

“En la siguiente tabla se muestra el consumo medio en litros por cada 100 km de varias marcas de automóviles:

Ferrari	24
Porsche	11
Ford	7
Audi	9
Seat	6

Representa el consumo de cada marca tanto con un diagrama de barras como con un pictograma. ¿Cuál de los dos consideras más intuitivo?”

- **Calcular la media, la mediana, la moda, el recorrido, la varianza y la desviación típica:**

“Con los mismos datos de la clase de gimnasia, donde los alumnos de una clase de 3º de ESO obtienen los siguientes tiempos en la prueba de 1000 metros lisos (en minutos): 3,1; 3,5; 3,6; 4,1; 3,0; 4,3; 3,7; 4,1; 3,3; 4,2; 3,1; 4,4; 3,6; 3,6; 3,4; 3,9; 4,0; 3,2; 3,8; 3,9; 3,6. ¿Cuál es el tiempo medio que utilizan los alumnos para realizar la prueba? ¿Cuánto tiempo tardó el alumno que llegó en la posición intermedia respecto a sus compañeros? Suponiendo que todos comenzaron la prueba al mismo tiempo, ¿en qué minuto llegó más gente a la meta?”

“El profesor de gimnasia del ejercicio anterior desearía que la desviación típica de los tiempos obtenidos por los alumnos respecto al tiempo medio no fuese superior a 0,4 minutos. Analizando los datos, ¿se ha cumplido su deseo?”

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

Las técnicas que se ejercitan con los ejercicios mostrados se pueden resumir en las siguientes: diferenciar entre población y muestra, identificar si una variable es cuantitativa o cualitativa, obtener las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas de un grupo de datos y representarlas en tablas, diseñar diagramas y gráficos, y calcular medias, medianas, modas, recorridos, varianzas y desviaciones típicas en conjuntos de datos (conociendo las fórmulas de cálculo de la media y de la varianza, detalladas en el apartado A del presente trabajo).

Además, el alumno deberá ser capaz de valorar la adecuación de usar un método u otro dependiendo del tipo de variable, del tipo y cantidad de datos, de la forma de representarlos...

Por otro lado, ejercitarse con hojas de cálculo será esencial para combinar el aprendizaje del objeto matemático de la Estadística con el desarrollo de la capacidad de manejo de las TIC. Mediante las funciones que permiten ejecutar las hojas de cálculo, los alumnos podrán observar la comodidad de obtener cualquier medida estadística (principalmente los parámetros de centralización y de dispersión) sin importar que el número de datos a analizar sea enorme y donde el uso de la calculadora podría llevar a errores si no se usa adecuadamente (esto requeriría modificar alguna técnica de uso de la calculadora).

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Las técnicas presentadas sí que están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático. En el apartado correspondiente al campo de problemas, se pueden combinar técnicas de varios tipos sin necesidad de implicar una mayor complejidad, como por ejemplo realizar tablas de frecuencias y después calcular los parámetros de centralización o dispersión necesarios. Además, las ligeras modificaciones de las técnicas comentadas previamente también son perfectamente adecuadas para la resolución del campo de problemas del objeto matemático de la Estadística.

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

A diferencia de los métodos empleados y descritos en el campo de problemas, las técnicas deberán ser principalmente presentadas y explicadas por el profesor, incluyendo ejemplos básicos de utilización que se detallarán en la pizarra del aula, sobre todo al principio de la unidad didáctica para que luego los alumnos sean capaces de utilizar cada técnica en los casos adecuados y de forma correcta. El profesor mandará a los alumnos ejercicios y actividades de ejercitación de cada técnica para que resuelvan de manera individual y que posteriormente se pondrán en común con el resto de la clase. Por otro lado, el libro de texto puede cumplir la función de ayudar en la presentación de las técnicas y servir como apoyo al alumno cuando no tenga disponible la figura del profesor, por ejemplo en la realización de tareas o estudio en casa.

Finalmente, el aula de informática debe jugar un papel importante en la enseñanza de este objeto matemático debido a la gran importancia ya remarcada de aprender a utilizar hojas de cálculo. En función del número de ordenadores disponibles, los alumnos se dispondrán o por parejas o por tríos para fomentar al mismo tiempo el aprendizaje cooperativo entre los alumnos.

G. Sobre las tecnologías (justificación de las técnicas)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

En general, la justificación de todas las técnicas estudiadas en la unidad didáctica se realizará mediante ejemplos, es decir, en las sesiones de clase primero se propondrán ejercicios en los que se necesite utilizar los conceptos a trabajar, y después las explicaciones puramente teóricas se basarán en esos mismos ejercicios. De manera particular, los razonamientos que se van a emplear para justificar cada una de las técnicas utilizadas en la unidad didáctica son los siguientes:

- **Definición de población, muestra e individuo:**

El profesor debe transmitir los conceptos de población, muestra e individuo dejando claro las diferencias entre ellos desde el inicio de la unidad didáctica. Para ello, lo más efectivo es proponer un ejercicio corto, como el propuesto a continuación, que haga a los alumnos reflexionar al respecto de cada concepto:

“Se desea conocer qué deportes practican los alumnos de 1º a 4º de ESO en un colegio. ¿Cuál será la población de estudio? Suponiendo que escogemos 50 alumnos para dicho estudio sabiendo que las clases tienen 30 alumnos cada una y hay 3 clases por curso, ¿cuántos individuos hay en la población? ¿Cuál es la muestra de la población?”

- **Representatividad de una muestra:**

Para trabajar y justificar la representatividad, el profesor debe proponer alguna actividad de reflexión y dejar a los alumnos que expresen sus razonamientos al respecto:

“En el estudio sobre el deporte del ejercicio anterior, ¿sería adecuado tomar una muestra de 3 alumnos para conocer las preferencias deportivas de los alumnos de secundaria? ¿Qué tamaño de muestra propondrías para tener suficiente representatividad? Comenta qué ventajas e inconvenientes ves entre utilizar un tamaño de muestra u otro.”

- **Diferenciación entre variables cualitativas y cuantitativas:**

La tecnología necesaria para comprender las diferencias entre una variable cualitativa y una cuantitativa puede ser sencilla e intuitiva si el profesor desde un principio pone ejemplos básicos y pide a los alumnos que piensen también en sus

propios ejemplos de variables de un tipo y otro. De este modo, los alumnos comprenderán que una variable cualitativa mide cualidades o características no cuantificables numéricamente mientras que una variable cuantitativa mide una magnitud que se puede expresar numéricamente. Además, el profesor, mediante ejemplos prácticos, podrá ahondar en la explicación de los dos subtipos de variable cuantitativa continua y cuantitativa discreta:

“Se quiere conocer las preferencias de lugar de veraneo de los alumnos de una clase de 3º de ESO, obteniendo que 12 alumnos prefieren playa, 9 prefieren montaña, 3 prefieren pueblo y 1 prefiere quedarse en casa. ¿Qué tipo de variable es la que estamos estudiando? ¿Podemos calcular algún parámetro sobre ella?”

“¿De qué tipo es la variable “temperatura medida cada hora en Zaragoza”? ¿Y la variable “número de personas que ven la tele cada día en España”? Razona las diferencias existentes entre ambos tipos de variables.”

- **Creación de tablas de frecuencia:**

En este caso, las tablas de frecuencias han sido, supuestamente, trabajadas ampliamente en cursos anteriores, por lo que no debería ser necesario explicar de nuevo ni la justificación de su utilización ni los métodos necesarios para su elaboración. De todas formas, puede ser bueno recordar todo lo relacionado con las tablas de frecuencias mediante la resolución de ejercicios cortos y básicos en clase:

“Las puntuaciones obtenidas por un grupo en una prueba han sido: 15, 20, 15, 18, 22, 13, 13, 16, 15, 19, 18, 15, 16, 20, 16, 15, 18, 16, 14, 13. Representa esta información en una tabla.”

- **Diseño y utilización de diagramas:**

El profesor debe dejar claro a los alumnos que en ocasiones no hay una regla 100% válida que determine qué tipo de diagrama o representación gráfica de los datos hay que usar en cada caso, sino que puede influir la subjetividad y experiencia previa de la persona o personas que realizan el estudio estadístico. Por otro lado, el alumno deberá tener claro el tipo de variable que está analizando y así elegir un diagrama que muestre la información adecuadamente:

(siguiendo con el ejemplo del apartado anterior) *“Representa gráficamente el número de alumnos que han obtenido cada puntuación utilizando intervalos de*

longitud igual a 2. ¿Cómo se llama este tipo de diagrama? ¿Qué otros gráficos se te ocurren que podrían ser útiles para representar la misma información?”

- **Uso de medidas de centralización y dispersión:**

Es importante que los alumnos no sólo sean capaces de obtener cualquier parámetro de centralización (media, mediana o moda) o de dispersión (recorrido, varianza o desviación típica) partiendo de una serie de datos dados, sino también de interpretar el significado y la validez de cada resultado estadístico extraído de la población estudiada. La correcta interpretación de los parámetros debe ser guiada por el profesor que, además, deberá hacer notar a los alumnos detalles como el cálculo de la mediana en poblaciones con un número par de elementos o el motivo de dividir por el número total de individuos para calcular la media.

(siguiendo con el ejemplo del apartado anterior) “*Una puntuación de 17 o mayor se considera sobresaliente, ¿cómo podríamos saber si el nivel general del grupo es sobresaliente? Ordenando las puntuaciones, ¿cuál se encuentra en la posición intermedia? Y cuál es la que más se repite?*

Comparando los resultados con los de otra clase para la misma prueba, mostrados a continuación, ¿podemos decir que unos son mejores que otros? En qué grupo el nivel de los alumnos es más parecido entre ellos? ¿Cuál es la diferencia entre las puntuaciones máxima y mínima en cada grupo?: 16, 17, 15, 17, 17, 16, 16, 17, 18, 18, 16, 17, 16, 15, 16, 15, 16, 17, 17, 15.”

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

La responsabilidad de justificar las técnicas recaerá tanto en la figura del profesor como en la de los alumnos puesto que son ellos los que deben ser capaces de construir su propio pensamiento y sacar las conclusiones necesarias para comprender cada concepto y técnica nuevos. El profesor debe utilizar los medios a su alcance y concentrarse en facilitar a los alumnos todo este proceso de asimilación fomentando la “no mecanicidad” del aprendizaje.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Los diferentes aspectos del objeto matemático se institucionalizarán progresivamente mediante la presentación de las soluciones en clase a los distintos ejercicios, actividades y problemas realizados previamente tanto de manera individual como en pequeños grupos. Durante estas resoluciones de los ejercicios, se propondrá a los alumnos que piensen en posibles soluciones o vías de resolución alternativas con el fin de crear un debate alumno-alumno o profesor-alumno que remarque la necesidad de estudiar y conocer el objeto matemático de la Estadística.

Aunque se debe evitar proceder de forma mecánica y automática sin razonamiento previo, el procedimiento de resolución de muchos problemas requerirá que los alumnos tengan que coger soltura en la realización del proceso repetitivo de recoger los datos, recontar los datos, crear una tabla de frecuencias absolutas y finalmente analizar la tabla (ya sea mediante una representación gráfica o mediante la extracción de parámetros de centralización o de dispersión).

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Como ya se ha citado anteriormente, la metodología a seguir para presentar en el aula las tecnologías que se emplean en el objeto matemático estará basada en el análisis de ejemplos estrechamente ligados a la presentación de los conceptos necesarios para el desarrollo de cada técnica, como son los de población, muestra, individuo, representatividad de una muestra dentro de una población, tipos de variables estadísticas, parámetros de centralización y parámetros de dispersión. Junto a cada ejemplo para cada técnica aquí enumerada, y después de haberlo analizado y discutido, se describirá cada concepto de forma más teórica para que los alumnos tengan la fundamentación formal de lo que han deducido con el ejemplo.

H. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

Las actividades que se van a realizar durante el desarrollo de la unidad didáctica seguirán el siguiente esquema habitual para cualquier objeto matemático:

1. Actividades de exploración.
2. Actividades de iniciación.
3. Actividades de desarrollo.
4. Actividades de asentamiento.
5. Actividades de evaluación.

En lo referente a sus secuenciación, creo que no es conveniente asignar cada uno de estos tipos de actividades a sesiones concretas puesto que en la mayoría de sesiones se trabajarán las actividades de forma combinada (exceptuando quizás la actividad de evaluación, presente principalmente al principio de la unidad didáctica para que el profesor valore el nivel de los alumnos, y al final para valorar si se han asimilado bien los contenidos de la unidad didáctica).

En los siguientes párrafos se detallan los contenidos didácticos específicos a trabajar en cada sesión (con las duraciones estimadas de cada actividad entre paréntesis), teniendo en cuenta que tanto el profesor como los contenidos deben ser adaptables en función de cualquier imprevisto que pueda surgir o simplemente del ritmo del grupo en clase:

- Sesión 1:

Introducción al objeto matemático mediante la reflexión en pequeños grupos de 4 o 5 personas sobre el texto de “El hombre anumérico” (20 minutos). Valoración inicial breve de conocimientos generales que poseen los alumnos e introducción a la Estadística con un ejemplo sobre las calificaciones de la clase en Matemáticas respecto a las calificaciones en Aragón (descrito en el apartado C.3 de este trabajo; 25 minutos). Actividad de formación de subgrupos en clase según ciertos criterios como altura, color de pelo... (15 minutos).

- Sesión 2:

Presentación de los conceptos de población y muestra mediante el análisis del problema de la encuesta de la empresa de fabricación de caramelos (descrito en el apartado F.1; 10 minutos). Observación de las definiciones dadas en el libro de texto

(5 minutos). Ejercicio sobre la adquisición proporcional de tierras de un agricultor (descrito en el apartado E.1; 20 minutos). Explicación teórica formal de los tipos de muestreo tomando como referencia el libro de texto (10 minutos). Actividades de refuerzo de este concepto propuestas en el libro de texto (resto de la clase, o como deberes para casa si no se acaba).

- **Sesión 3:**

Corrección de los ejercicios mandados para casa la sesión anterior (10 minutos). Actividades de color preferido en una clase de primaria y notas obtenidas por los alumnos (apartado F.1; 15 minutos). Descripción y definición formal de cada tipo con ejemplos del libro (5 minutos). Realización individual de ejercicios propuestos en el libro de separación de datos en intervalos (15 minutos). Definición formal de marca de clase con los ejercicios sobre intervalos realizados (10 minutos). Comienzo de las tareas sobre tipos de variables e intervalos para hacer en casa (5 minutos).

- **Sesión 4:**

Corrección de ejercicios mandados para casa (10 minutos). Trabajar el problema de las puntuaciones obtenidas por la clase en una prueba determinada para crear una tabla de frecuencias (10 minutos). Sobre ese problema, definir los conceptos de frecuencia relativa, frecuencia absoluta, y frecuencia acumulada, tomando como apoyo el libro de texto (10 minutos). Resolver por parejas dos problemas sobre tablas de frecuencias (propuestos en el apartado F.1; 20 minutos). Corregir en la pizarra dichos problemas (10 minutos). Mandar para casa individualmente dos problemas de generación e interpretación de tablas de frecuencias.

- **Sesión 5:**

Corrección de los problemas de tablas de frecuencias (10 minutos). Sobre el último de los problemas, trabajar su representación gráfica (15 minutos). Exposición de los gráficos estadísticos más comunes con ejemplos descritos en el libro para cada uno de ellos, debatiendo entre toda la clase la comodidad y adecuación de cada uno de ellos: diagrama de barras, diagrama de sectores, histograma, pictograma y pirámide de población (25 minutos). Realización de tres ejercicios individuales de interpretación y diseño de gráficos (10 minutos y como tarea para casa).

- **Sesión 6:**

Corrección de los ejercicios sobre gráficos estadísticos (15 minutos). Se propone el ejemplo de los tiempos de los alumnos en gimnasia para trabajar los parámetros de centralización: media, mediana y moda (10 minutos). Definición formal de cada uno y fórmula general de cálculo de la media (15 minutos). Realización en la pizarra de un ejemplo del libro donde el número de datos es par y piden calcular la mediana (10 minutos). Cinco ejercicios como deberes para terminar en clase o en casa sobre cálculo de parámetros de centralización (10 minutos).

- **Sesión 7:**

Corrección de ejercicios previos (10 minutos). Tomando como base el problema de los tiempos en educación física de la sesión anterior, se propone un nuevo problema con tiempos de otra clase de 3º de ESO, con una varianza menor a la original, para que los alumnos interpreten su significado (10 minutos). Sobre el mismo problema, presentación y definición de los parámetros de dispersión: recorrido, desviación media, desviación típica y varianza, incluyendo las fórmulas matemáticas de la desviación media y la varianza (20 minutos). Realización en la pizarra de ejercicios propuestos en el libro que combinen obtención de parámetros de centralización y de dispersión (20 minutos). Ejercicios para casa de refuerzo de cálculo e interpretación de los parámetros de centralización y de dispersión.

- **Sesión 8:**

Traslado al aula de informática (5 minutos). El profesor explicará las herramientas básicas de introducción de datos en una hoja de cálculo, generación de gráficos y diagramas, y cálculo de parámetros usando funciones (15 minutos). Se realizarán por parejas los mismos ejercicios, actividades y problemas (no todos, sólo los que indique el profesor) de tablas de frecuencias, representación de gráficos y cálculo de parámetros de centralización y dispersión, para poder comparar con los resultados que se obtuvieron sin herramientas informáticas, estando el profesor disponible para cualquier duda de utilización del software informático (40 minutos).

- **Sesión 9:**

Explicación a los alumnos acerca de las características del examen (5 minutos). Se dedicará el tiempo necesario de la sesión a resolver dudas que les hayan podido

quedar a los alumnos sobre cualquier apartado del tema (duración adaptable). Una vez resueltas, se realizarán ejercicios propuestos en el libro de texto al final de la unidad didáctica en los que se repase todo lo visto en el tema (duración adaptable).

- **Sesión 10:**

Prueba escrita de conocimientos sobre el objeto matemático de la Estadística (60 minutos).

- **Sesión 11:**

Corrección y revisión de los resultados de la prueba escrita (45 minutos). Cierre del tema con la resolución de las posibles dudas que puedan quedar (15 minutos).

2. Establece una duración temporal aproximada.

La enseñanza del objeto matemático se ha adaptado a un número total aproximado de 11 sesiones de clase de una hora de duración cada una. En caso de requerir alguna sesión más, el profesor valorará la posibilidad de añadirla dependiendo de si el temario y el calendario previsto para el resto de la asignatura lo permiten.

I. Sobre la evaluación

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

La siguiente prueba escrita se ha diseñado para una hora de duración, teniendo en cuenta que el tiempo de resolución de los alumnos suele triplicar al tiempo que le costaría realizar la prueba al profesor.

PRUEBA ESCRITA DE EVALUACIÓN DEL TEMA DE ESTADÍSTICA

Ejercicio 1.

Realiza la tabla de frecuencias absolutas y relativas correspondiente al siguiente conjunto de valores:

12, 12, 11, 15, 10, 14, 10, 11, 12, 12, 13, 15, 13, 12, 14, 10, 10, 13.

¿Consideras conveniente agrupar estos datos en intervalos? Razona la respuesta.

Ejercicio 2.

Para representar gráficamente los datos del Ejercicio 1, ¿qué tipo de gráfico sería el más adecuado: un diagrama de barras o un histograma? Represéntalo.

Ejercicio 3.

El número de veces que cada alumno de una clase de secundaria ha ido al cine durante el último año ha sido el siguiente:

5, 11, 7, 2, 0, 4, 5, 7, 18, 6, 0, 1, 15, 13, 3, 9, 6, 8, 17, 11, 20, 10, 13, 4, 22.

Realiza la tabla de frecuencias absolutas agrupando los datos en intervalos, razonando la utilización de los intervalos elegido. ¿Qué gráfico es el más adecuado para representar estos datos y por qué? Represéntalo.

Ejercicio 4.

Calcula los parámetros de centralización (3 parámetros) y de dispersión (4 parámetros) del siguiente conjunto de datos.

Valor	12	13	14	15	16	17
Frecuencia absoluta	3	5	6	5	4	2

Ejercicio 5.

El número de horas semanales que ven la televisión los alumnos de 3º de ESO de un centro es el siguiente:

7, 7, 8, 10, 10, 10, 10, 12, 15, 17, 18, 19, 21, 21, 21, 21, 21, 22, 24, 25, 26, 26, 28, 30, 31, 31, 32, 34, 34, 34.

Obtén la media, la mediana y la desviación típica. ¿Tendría sentido agrupar los datos en intervalos si no nos interesa representar gráficamente los datos? Razona la respuesta.

Ejercicio 6.

El siguiente gráfico representa el número de pasajeros de una compañía en dos años consecutivos. ¿Es adecuada la representación gráfica elegida? Si lo creyeses conveniente, ¿qué modificaciones introducirías en el gráfico? Razona la respuesta.



2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Con la prueba escrita presentada en el apartado anterior se pretende valorar la adquisición de destrezas adquiridas por los alumnos en la comprensión y el manejo de los conceptos y técnicas estudiados en la unidad didáctica.

En particular se evaluará:

- **Ejercicio 1:** saber crear una tabla de frecuencias y valorar la utilización de intervalos.
- **Ejercicio 2:** saber elegir un gráfico adecuado a un tipo de variable y representarlo.

- **Ejercicio 3:** saber realizar tablas de frecuencias con intervalos y representar los datos en un gráfico adecuado.
- **Ejercicio 4:** saber interpretar una tabla de frecuencias y utilizar las técnicas de cálculo u obtención de la media, la mediana, la moda, el recorrido, la varianza y la desviación típica.
- **Ejercicio 5:** saber obtener la media, la mediana y la desviación típica de un conjunto de datos y valorar la utilización de intervalos.
- **Ejercicio 6:** saber interpretar gráficos.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

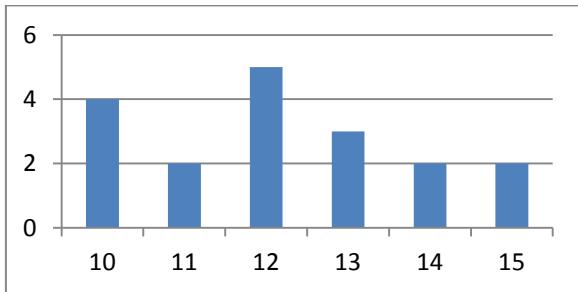
- **Ejercicio 1:**

Valor	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
10	4	2/9
11	2	1/9
12	5	5/18
13	3	1/6
14	2	1/9
15	2	1/9

No sería necesario agrupar los datos en intervalos porque no hay muchos individuos diferentes dentro de la población.

La tabla y explicación anteriores serían la resolución correcta del ejercicio, pero seguramente habrá alumnos que no sepan calcular correctamente las frecuencias relativas, que simplifiquen las fracciones, o que calculen su valor numérico en lugar de especificarlo como fracción. Considero que en el cálculo de frecuencias absolutas no habrá problemas porque únicamente implica contar cuántas veces se repite cada número. Sobre la utilización de intervalos, habrá alumnos que respondan que sí es conveniente y si lo razonan adecuadamente se les podría poner bien el ejercicio. También habrá alumnos que no razonen la respuesta o den un razonamiento nada explicativo, como por ejemplo: “no es necesario porque sería peor”.

- **Ejercicio 2:** será más adecuado un gráfico de barras por ser una variable cuantitativa discreta sin intervalos.

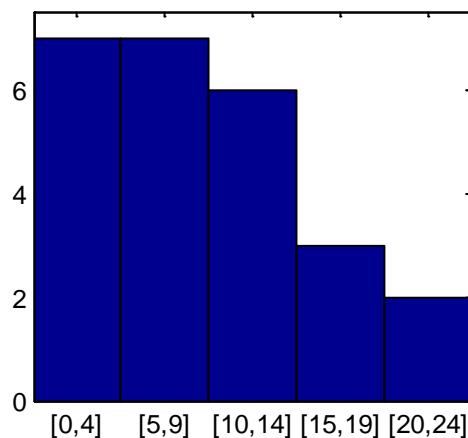


A parte de este diagrama, las respuestas que podrían dar los alumnos podrían variar desde dibujar un diagrama con tantas barras como muestras hay en la población hasta razonar la utilización de un histograma, pero entonces deberían tener en cuenta que las barras no pueden estar pegadas por ser valores discretos, no continuos (aspecto que es posible que no realicen correctamente).

- **Ejercicio 3:**

Veces al cine	Frecuencia absoluta
[0, 4]	7
[5, 9]	7
[10, 14]	6
[15, 19]	3
[20, 24]	2

Se representará mejor con un histograma.



Algún alumno podría tomar los intervalos de otra manera, por lo que le quedaría un mayor o menor número de barras en el histograma, por lo que se valoraría si el histograma obtenido da suficiente información (por ejemplo, tomando un intervalo

[0, 11] y otro [12, 23], únicamente tendríamos dos barras, que no estaría mal, pero no sería suficiente. También podría darse el caso contrario de tomar intervalos de longitud 2, lo que implicaría demasiadas barras de baja altura). Otra posible respuesta, sería dibujar un diagrama de barras separadas, lo cual sería aceptable por tener una variable discreta. Una opción de gráfico diferente podría venir al utilizar un diagrama de sectores, que no sería el más adecuado para esta situación pero, si está bien hecho y razonado, no estaría completamente mal el ejercicio.

- *Ejercicio 4: los parámetros que se calcularán son: media, mediana, moda, recorrido, desviación media, varianza y desviación típica. Para la media, la desviación media y la varianza usaremos las fórmulas:*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i f_i}{N}, D_{\bar{x}} = \frac{\sum_{i=1}^N |x_i - \bar{x}| f_i}{N}, \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 f_i}{N},$$

y obtendremos que la media (\bar{x}) es 14,32, que la desviación media ($D_{\bar{x}}$) es 1,24 y que la varianza (σ^2) es 2,14. Por tanto, tendremos que la desviación típica es la raíz cuadrada de la varianza, obteniendo 1,46. La moda es el valor que más repite, por tanto es 14. La mediana será el valor que ordenando los datos (25 datos, número impar) ocupe la posición central, por lo que también es 14. Y el recorrido es la resta del máximo valor menos el mínimo, por tanto igual a 5.

Algunos alumnos seguramente no recordarán las fórmulas de cálculo generales o, si las recuerdan, las aplicarán mal o se olvidarán del valor absoluto en la desviación media o de multiplicar por su frecuencia absoluta cada valor de los datos. Incluso puede haber fallos de manejo de la calculadora, haciendo que se obtengan resultados numéricos extraños. Los parámetros de moda, recorrido y mediana deberían ser bastante más sencillos de calcular para los alumnos, aunque en esta última habrá alumnos que teniendo 25 datos cojan, previo ordenamiento, el de la posición 12 en lugar del de la posición 13 (que en este caso sería el mismo valor), o directamente no sepan tomar esta posición a partir de las frecuencias absolutas.

- *Ejercicio 5: utilizando las fórmulas de media y varianza obtenemos que la media de los datos es 20,83, mientras que la varianza es 76,7, a partir de la cual obtenemos que la desviación típica es 8,76 haciendo la raíz cuadrada. La mediana de los datos es el valor 21 porque ocupa la posición central y ya están ordenados. No será necesario agrupar los datos en intervalos en este caso porque la información*

acerca de las características de los mismos las podemos extraer de los parámetros calculados previamente.

Igual que en el ejercicio 4, algunos alumnos no recordarán las fórmulas de cálculo generales o las aplicarán mal o se olvidarán de multiplicar por su frecuencia absoluta cada valor de los datos. También puede haber fallos de manejo de la calculadora, haciendo que se obtengan resultados numéricos no deseados. Algún alumno podría razonar que se pueden agrupar los datos en intervalos si queremos estudiar subgrupos más pequeños dentro de la clase, o simplemente podría no razonar la respuesta correctamente.

- *Ejercicio 6: el gráfico no es adecuado puesto que teniendo un aumento menor que el 5% da la impresión visual de que el número de pasajeros ha sido más del doble entre ambos años. Se podría solucionar esto ampliando el rango del eje de ordenadas.*

Algunos alumnos podrían decir que no tendría sentido dibujar los pictogramas desde el valor “0” para ahorrarnos alargar las barras innecesariamente, lo cual es cierto y estaría bien si justifican que por el contrario puede llevar a engaño tal cual está. Otros podrían simplemente decir que es un gráfico adecuado que representa bien la realidad que se quiere mostrar, lo cual no sería calificable como bien resuelto. Una de las mejoras que se les podría ocurrir sería precisamente la desde el valor cero en el eje vertical.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

La calificación de lo aprendido en la unidad didáctica atenderá principalmente a los resultados de la prueba escrita, aunque estos se podrán modificar ligeramente a criterio del profesor teniendo en cuenta el trabajo, el esfuerzo y el actitud de cada alumno en particular a lo largo del tema tratado.

La puntuación desglosada, y con valoración de las posibles respuestas de los alumnos, de la prueba escrita, con un total de 10 puntos máximos, será:

- **Ejercicio 1: (1 punto)**

- Crear la tabla de frecuencias (máximo 0,75 puntos):
 - Frecuencias absolutas correctas (máximo 0,35 puntos):
 - Todas las frecuencias absolutas bien → 0,35 puntos.

- Sólo una frecuencia absoluta mal → 0,2 puntos.
 - Más de una frecuencia absoluta mal → 0 puntos.
- Frecuencias relativas correctas (máximo 0,4 puntos):
 - Todas las frecuencias relativas bien calculadas → 0,4 puntos.
 - Sólo una frecuencia relativa mal calculada → 0,2 puntos.
 - Más de una frecuencia relativa mal calculada → 0 puntos.
- Razonar la no utilización de intervalos (máximo 0,25 puntos):
 - Si razonan adecuadamente no utilizar intervalos → 0,25 puntos.
 - Si razonan adecuadamente utilizar intervalos → 0,25 puntos.
 - Si dicen que mejor sin intervalos, pero el razonamiento es incompleto → 0,15 puntos.
 - Si no hay razonamiento alguno → 0 puntos.
- **Ejercicio 2: (1 punto)**
 - Elegir el gráfico de barras como adecuado (máximo 0,5 puntos).
 - Si eligen y razonan adecuadamente la utilización del gráfico de barras → 0,5 puntos.
 - Si eligen la utilización del gráfico de barras pero el razonamiento es incompleto → 0,25 puntos.
 - Si eligen y razonan coherentemente por qué y cómo utilizar un histograma → 0,3 puntos.
 - Si eligen la utilización del histograma pero el razonamiento es incompleto → 0,15 puntos.
 - Si no hay razonamiento para ninguno de los dos tipos de gráfico → 0 puntos.
 - Representar el gráfico elegido (0,5 puntos):
 - Si representan bien el gráfico elegido (de barras o histograma) con las barras separadas (máximo 0,5 puntos):
 - Si todas las barras tienen la altura adecuada → 0,5 puntos.
 - Si una barra no tiene la altura adecuada → 0,25 puntos.
 - Si dos o más barras no tienen la altura adecuada → 0 puntos.
 - Si representan el gráfico con barras juntas (máximo 0,3 puntos):

- Si todas las barras tienen la altura adecuada → 0,3 puntos.
 - Si una barra no tiene la altura adecuada → 0,15 puntos.
 - Si dos o más barras no tienen la altura adecuada → 0 puntos.
 - Si no representan el gráfico → 0 puntos.
- **Ejercicio 3: (2 puntos)**
- Crear la tabla de frecuencias con intervalos (máximo 1 punto):
 - Escoger los intervalos (máximo 0,5 puntos):
 - Intervalos de longitud 3, 4, 5, 6 o 7 razonando bien el motivo → 0,5 puntos.
 - Intervalos de otra longitud razonando el motivo → 0,3 puntos.
 - Intervalos de longitud 3, 4, 5, 6 o 7 sin razonamiento → 0,25 puntos.
 - Intervalos de otra longitud sin razonamiento → 0 puntos.
 - Escoger el gráfico adecuado (máximo 0,25 puntos):
 - Escoger el histograma razonándolo bien → 0,25 puntos.
 - Escoger otro diagrama razonándolo bien → 0,1 puntos.
 - Escoger el histograma sin razonar → 0,15 puntos.
 - Escoger otro diagrama sin razonar → 0 puntos.
 - Representar el gráfico elegido (máximo 0,75 puntos):
 - Si es el histograma o diagrama de barras:
 - Todas las barras tienen la altura adecuada → 0,75 puntos.
 - Una barra no tiene la altura adecuada → 0,35 puntos.
 - Dos o más barras no tienen la altura adecuada → 0 puntos.
 - Si es un diagrama de sectores:
 - El área de todos los sectores es proporcional a la frecuencia → 0,75 puntos.
 - El área de los sectores no es proporcional a la frecuencia → 0 puntos.

- **Ejercicio 4: (2 puntos)**

- Calcular bien la media → 0,5 puntos.
- Obtener bien la mediana → 0,25 puntos.
- Obtener bien la moda → 0,25 puntos.
- Calcular bien la desviación media → 0,25 puntos.
- Calcular bien la varianza → 0,25 puntos.
- Calcular bien la desviación típica → 0,25 puntos.
- Calcular bien el recorrido → 0,25 puntos.

- **Ejercicio 5: (2 puntos)**

- Calcular bien la media → 0,5 puntos.
- Calcular bien la desviación típica → 0,5 puntos.
- Obtener la mediana → 0,5 puntos.
- Razonar la no utilización de intervalos (máximo 0,5 puntos):
 - Si razonan adecuadamente no utilizar intervalos → 0,5 puntos.
 - Si dicen que mejor sin intervalos, pero no lo razonan adecuadamente → 0,25 puntos.
 - Si dicen que mejor con intervalos y lo razonan coherentemente → 0,25 puntos.
 - Si dicen que mejor con intervalos, pero no lo razonan coherentemente → 0,25 puntos.
 - Si no hay razonamiento alguno → 0 puntos.

- **Ejercicio 6: (1 punto)**

- Razonar la no adecuación del gráfico (máximo 0,5 puntos):
 - Si razonan que la diferencia entre ambas barras es enorme en comparación con su diferencia porcentual y llevaría a engaño → 0,5 puntos.
 - Si dicen que el gráfico no es adecuado pero no razonan el motivo → 0,2 puntos.
 - Si razonan que es adecuado porque llegar hasta el “0” implicaría pérdida de espacio y precisión de altura de las barras → 0,4 puntos.
 - Si dicen que representa bien la realidad sin razonarlo → 0 puntos.
- Proponer una o varias mejoras al gráfico (máximo 0,5 puntos):

- Si las mejoras propuestas son adecuadas y están bien razonadas → 0,5 puntos.
- Si las mejoras propuestas son adecuadas, pero no están bien razonadas → 0,3 puntos.
- Si las mejoras propuestas no son adecuadas → 0 puntos.

I. Sobre la bibliografía y páginas web

- [1] Moore, D. S. (1995). *The basic practice of statistics. 2nd edition.* New York: W. H. Freeman and Company.
 - [2] Currículo Aragonés de Educación Secundaria. BOA número 65 (1 de junio de 2007).
 - [3] Libro de texto Oxford University Press. Matemáticas 3º ESO. Proyecto Adarve.
 - [4] Paulos, J. A. (1988). *El hombre anumérico (Innumeracy: Mathematical Illiteracy and its Consequences). 1st edition.* New York: Hill and Wang.
-
- [5] <http://dta.utalca.cl/estadistica/ejercicios/formular/Hipotesis/Apuntes.pdf>
 - [6] <http://www.vadenumeros.es/sociales/estadistica-descriptiva.htm>
 - [7] http://www.ditutor.com/estadistica/intervalo_clase.html
 - [8] http://maralboran.org/wikipedia/index.php/Par%C3%A1metros_estad%C3%ADsticos
 - [9] http://www.estadisticaparatodos.es/historia/histo_esta.html
 - [10] http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/unidimension al_lbarrios/pcentralizacion_est.htm