INTRODUCCIÓN A LA DERIVADA (1º Bachillerato)

Autor: Marc Gómez López

Tutor: Rafael Escolano Vizcarra

Trabajo Fin de Máster

Máster en Educación del Profesorado

Especialidad de Matemáticas

Curso 2012-2013

ÍNDICE

I. EL OBJETO MATEMÁTICO

I.1 Delimitación del objeto matemático.

El objeto matemático a enseñar es la introducción a la derivada desde un punto de vista conceptual, abordando exclusivamente el cálculo de la derivada en funciones muy elementales.

I.2 Situación en el currículo.

La derivada está incluida en el currículo de primero de Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología, dentro de la asignatura de Matemáticas I.

En concreto, en la orden de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón (BOA 17/07/2008, pág. 14075), se dice:

Bloque 3. Análisis.

(…)

- Introducción a la derivada. Tasas de variación media e instantánea de una función. Derivada de una función en un punto. Interpretaciones geométrica y física de la derivada: aplicación de la derivada a la determinación de la tangente a una curva, a la obtención de sus extremos y al cálculo de la velocidad y la aceleración. La función derivada. Iniciación al cálculo de derivadas. Interpretación y análisis de funciones sencillas que describan situaciones reales, expresadas de manera analítica o gráfica.

I.3 Campos de problemas, técnicas y tecnologías.

Se pretende hacer una introducción a la derivada a partir de la tasa de variación media que conectará con el sentido físico de la derivada como velocidad instantánea (campo de problemas 1) y con el sentido geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente a una función en un punto (campo de problemas 2). Posteriormente, se plantean unos problemas de aproximación al cálculo de la derivada que llevan a la definición formal de la derivada como límite de un cociente incremental (campo de problemas 3) y seguidamente se introduce la definición formal de la función derivada (campo de problemas 4). Finalmente, se plantean unos problemas de relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada (campo de problemas 5).

II. ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA DERIVADA

II.1 Introducción escolar del objeto matemático.

Para estudiar la introducción escolar de la derivada he utilizado el libro de 1º de Bachillerato de la editorial Anaya (Cólera, J. et al., 2008) que la introduce en su tema 12 “Iniciación al cálculo de derivadas. Aplicaciones”. Este manual es el utilizado por el Centro Educativo donde he realizado mis prácticas escolares.

En un apartado de introducción, el libro presenta a la derivada como el resultado de varios siglos de investigación matemática dirigida a resolver dos tipos de problemas: determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos y encontrar velocidades instantáneas en movimientos no uniformes. Esta breve introducción es adecuada ya que estos dos tipos de problemas son efectivamente razones de ser del objeto matemático, como se explicará ampliamente en el apartado IV de la presente memoria.

Posteriormente, el libro plantea un par de situaciones donde intervienen las velocidades instantáneas, como son subirse a un autobús en marcha o una entrega de testigo entre dos relevistas de una prueba de velocidad.

Creo que esta introducción es acertada ya que presenta la razón de ser de la derivada más intuitiva para los alumnos, como es el cálculo de una velocidad instantánea. Sin embargo, el desarrollo de la unidad didáctica “olvida” estos problemas introductorios planteados cuando empieza su secuenciación didáctica, ya que empieza a trabajar el crecimiento de una función en un intervalo sin hacer ninguna conexión con lo planteado en la introducción.

La secuencia planteada por el libro es la siguiente: relacionar la tasa media de variación de una función en un intervalo con el crecimiento o decrecimiento de la misma en función de si su valor es positivo o negativo; seguidamente, estudiar el crecimiento en un punto, indicando que “el crecimiento de una función en un punto viene dado por el crecimiento (la pendiente) de la recta tangente a la curva en ese punto”; finalmente, se dice que dicha pendiente se obtiene mediante el siguiente límite, al que llamamos derivada de f en a:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to a} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

A continuación plantea unos ejercicios de cálculo de la derivada mediante la fórmula presentada, a los que sigue la definición de la función derivada como aquella función que asocia a cada abscisa x el valor de la derivada $f'(x)$ en ese punto, es decir, la pendiente de la curva en ese punto. Inmediatamente, presenta las reglas de derivación de las funciones más sencillas y habituales sin ninguna justificación ("lo dejaremos para el próximo curso") sobre las que propone nuevamente ejercicios de cálculo de derivadas. Posteriormente, la unidad prosigue con aplicaciones de la derivada y representación de funciones.

II.2 Problemas, técnicas y tecnologías enseñadas habitualmente.

Los problemas que se trabajan en la introducción de la derivada acostumbran a estar relacionados con el crecimiento y decrecimiento de funciones, de manera que son básicamente teóricos y suelen ser poco motivadores para los estudiantes. En el libro analizado de Anaya, sorprende que no se aprovechen los interesantes problemas planteados en la introducción para justificar las técnicas y tecnologías que se desarrollan a lo largo de la unidad ya que éstas se presentan de manera totalmente descontextualizada y puramente teórica.

Las técnicas que se enseñan son: la tasa de variación media (que en realidad es un repaso puesto que los alumnos ya la han trabajado en 4º de ESO); la derivada en un punto como el límite de la tasa de variación media en un intervalo infinitamente pequeño entorno a ese punto; la función derivada como el límite de la tasa de variación media en un punto de abscisa "x" cuando consideramos un entorno infinitesimal entorno a él.

En el libro estudiado, estas técnicas no están convenientemente justificadas, simplemente se presenta su definición y se realizan ejemplos sencillos en los que se verifica su funcionalidad en base a la validez de los resultados.

II.3 Efectos producidos por esta enseñanza en el aprendizaje del alumno.

Esta secuencia didáctica basada en una presentación sucesiva de definiciones y técnicas y en una colección de derivadas automáticas a modo de recetario sin ninguna justificación, suele provocar que haya "dificultades para que los jóvenes de estas edades logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático" (Artigue, 1995). Es importante construir adecuadamente este concepto ya que "la construcción de un significado parcial del concepto durante los primeros años puede generarles dificultades en su desempeño en los cursos de cálculo" (Sánchez-Matamoros, García, Llinares, 2008).

Algunos ejemplos de estas carencias se detectan en estudiantes que son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación pero sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente (Artigue, 1995).

Otro ejemplo de una mala comprensión del concepto es la "la confusión de la velocidad media con la instantánea en un punto" (Azcárate, 1992).

Para evitar estos problemas, la presente introducción de la derivada seguirá la idea de que "una de las formas para empezar a conocer un concepto es: a través de conexiones con otros conceptos (límites o funciones, en el caso de la derivada); a través de los diversos modos de representación (el gráfico y el analítico en la derivada) y a través de conocer sus diferentes propiedades y procesos" (Harel et al., 2006). Así, se conectará el lenguaje algebraico y funcional (propio del análisis) con el razonamiento aritmético y geométrico a través de la interpretación de la derivada como tasa de variación instantánea y como la pendiente de la recta tangente a la función, siguiendo la cronología marcada en el apartado I.3 de la presente memoria "Campos de problemas, técnicas y tecnologías".

III. LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DE LOS ALUMNOS

III.1 Conocimientos previos necesarios.

La derivada es un objeto nuevo para los alumnos y para introducirse en ella deben tener los siguientes conocimientos (Azcárate et al., 1996):

- Dependencia entre dos variables: función. Variable independiente y dependiente, dominio, imagen, gráfica, fórmula, crecimiento y decrecimiento, variación entre dos valores del dominio, tasa media de variación y extremos relativos y absolutos.
- Función lineal y afín.
- Pendiente de una recta.
- Velocidad media.
- Tangente y secante a una circunferencia.
- Velocidad medida por un velocímetro.
- Lectura de interpretación de gráficos (en especial de espacio-tiempo): Intervalos de crecimiento y extremos.
- Cálculo de variaciones y de tasas de variación media a partir de la gráfica o de la fórmula. En especial, del cálculo del espacio recorrido y de la velocidad media.
- Cálculo e interpretación de la pendiente de una recta a partir de la ecuación de la misma o de su representación gráfica.
- Conocer el concepto de límite y saber calcular límites de funciones elementales.
- Uso de la calculadora.
- Operaciones con expresiones algebraicas sencillas: suma, producto y cociente de polinomios.

III.2 La enseñanza anterior.

La enseñanza anterior ha propiciado la adquisición de estos conocimientos ya que se incluyen en los contenidos del 4º curso de la Educación Secundaria Obligatoria opción B, según el artículo 12 de la Orden de 9 de mayo de 2007 del Departamento de Educación, Cultura y Deporte (BOA de 01/06/2007, pág. 8996):

Bloque 4. Geometría

(…)

- Trigonometría. Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente. Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$; $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$. Razones trigonométricas de los ángulos de 30º, 45º, 60º, 90º. Cálculo gráfico de las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Resolución de problemas de triángulos rectángulos.

Bloque 5. Funciones y gráficas

(…)

- Funciones elementales. Noción de función y de gráfica de una función. Descripción de las gráficas: dominio y recorrido, cortes con los ejes, continuidad, simetrías, periodicidad, crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos, concavidad. Estudio de las propiedades y de las gráficas de las funciones elementales: función polinómica de primer grado; función valor absoluto; funciones xn; función; función de proporcionalidad inversa; funciones cuadráticas; crecimiento y decrecimiento exponencial; funciones definidas a trozos. Reconocimiento del tipo de función elemental que se ajusta mejor a la descripción de fenómenos naturales o cotidianos.

- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.

- Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

III.3 Verificación de conocimientos previos.

En la primera sesión se planteará un problema que sirva para repasar el cálculo de la tasa de variación media, haciendo especial hincapié en relacionarla con su sentido geométrico como la pendiente de una recta y con su sentido físico como la velocidad media.

Problema Inicial. Se observa la posición de un coche cada 5 s respecto de un punto de referencia P para comprobar su velocidad y conocer si en algún momento supera a la máxima autorizada que es de 80 km/h. Los datos obtenidos considerando que en el instante 0 s para por el punto P, son:

Tiempo (s)	0	5	10	15	20	25	30	35	40
Distancia a P (m)	0	100	200	290	370	430	510	610	720

a) Dibuja la gráfica espacio-tiempo del coche.

b) Calcula la velocidad media del coche durante el intervalo total de tiempo.

c) Calcula la velocidad media en cada uno de los intervalos de 5 s.

d) ¿Ha sido la velocidad constante entre 15 s y 25 s? ¿Y entre 15 y 20?

e) La velocidad máxima permitida es de 80 km/h, ¿se ha superado en algún momento? Razona la respuesta.

Discusión y solución

a) Se realiza la construcción de la gráfica con medios manuales o con Geogebra:

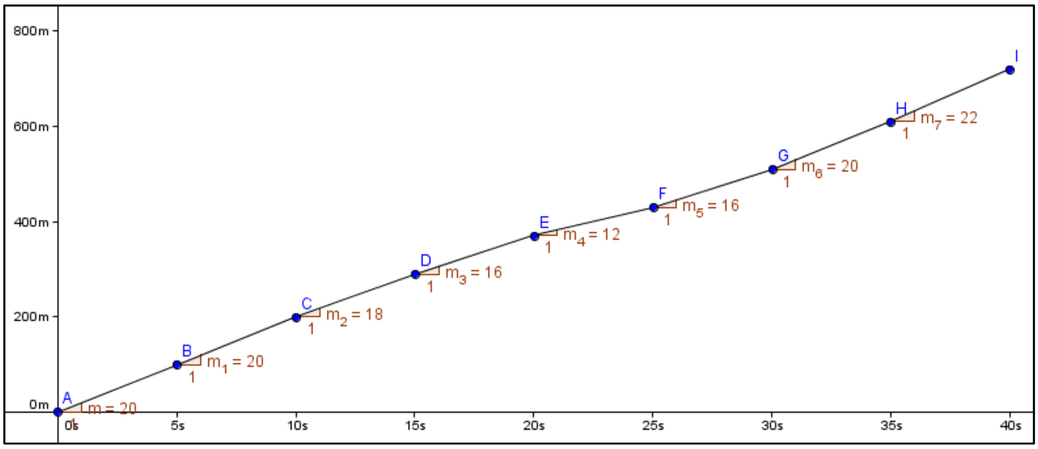


Figura 1. Gráfica espacio-tiempo.

b) Basta considerar las magnitudes totales al empezar en t = 0 s y d = 0 m:

$$\frac{720}{40}\frac{m}{s} = 18\frac{m}{s} = 64.8\ \frac{km}{h}$$

c) Recordando que la velocidad media coincide con la tasa media de variación, se realiza el cálculo para cada uno de los intervalos:

$$Tramo\ 1\text{:}\ \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{100-0}{5-0}\frac{m}{s} = \frac{100}{5}\frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s} = 72\ \frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 2\text{:}\ \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{200-100}{10-5}\frac{m}{s} = \frac{100}{5}\frac{m}{s} = 20\ \frac{m}{s} = 72\ \frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 3: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{290-200}{15-10}\frac{m}{s} = \frac{90}{5}\frac{m}{s} = 18\frac{m}{s} = 64.8\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 4: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{370-290}{20-15}\frac{m}{s} = \frac{80}{5}\frac{m}{s} = 16\frac{m}{s} = 57.6\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 5: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{430-370}{25-20}\frac{m}{s} = \frac{60}{5}\frac{m}{s} = 12\frac{m}{s} = 43.2\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 6: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{510-430}{30-25}\frac{m}{s} = \frac{80}{5}\frac{m}{s} = 16\frac{m}{s} = 57.6\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 7: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{610-510}{35-30}\frac{m}{s} = \frac{100}{5}\frac{m}{s} = 20\frac{m}{s} = 72\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 8: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{720-610}{40-35}\frac{m}{s} = \frac{110}{5}\frac{m}{s} = 22\frac{m}{s} = 79.2\frac{km}{h}$$

d) La velocidad media en todo el intervalo pedido es:

$$Tramo\ 15s - 25s: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{430-290}{25-15}\frac{m}{s} = 14\frac{m}{s} = 50.4\frac{km}{h}$$

De los apartados anteriores, se sabe que entre 15 s y 20 s, la velocidad es constante e igual a $16\frac{m}{s}$ ya que la relación entre espacio-tiempo es lineal. En el intervalo entre 20 s y 25 s, la velocidad es también constante e igual a $12\frac{m}{s}$. La velocidad en el intervalo 15 s y 25 s es claramente no constante ya que en los primeros segundos el coche va a más velocidad que en los segundos finales. Otra manera de verlo, es trazando una recta de 15 s a 25 s y ver que no pasa por el punto relativo a 20 s.

e) En ningún intervalo se ha superado la velocidad máxima permitida de $80\frac{km}{h}$ ya que la velocidad máxima alcanzada es de $79.2\frac{km}{h}$.

Este problema introductorio es de repaso ya que los alumnos conocen la tasa media de variación y sus sentidos físico y geométrico, pero es conveniente asegurarse que lo comprenden bien ya que será la base de la secuencia didáctica desarrollada en la presente memoria. Es importante hacer notar a los alumnos que los cálculos son exactos al ser todos los tramos lineales; el siguiente paso será plantear un problema similar con algún tramo no lineal que hará surgir la derivada.

IV. RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

IV.1 Razón de ser a tener en cuenta para la introducción del objeto matemático.

La razón de ser que se va a usar en el aula es el cálculo de la velocidad instantánea en un punto. Una vez introducida la derivada, se hará hincapié en su utilidad para dar respuesta a otras razones de ser como el cálculo de tangentes, el cálculo de variaciones de magnitudes que no sean dependientes del tiempo y para encontrar máximos y mínimos de una función.

IV.2 Razones de ser históricas del objeto matemático.

Las razones de ser históricas de la derivada son esencialmente el cálculo de la tangente, el cálculo de variaciones y el cálculo de máximos y mínimos. Estudios en profundidad para la reconstrucción de un significado global para la derivada, han resultado en la identificación de nueve sistemas de prácticas los cuales llevan asociados, cada uno a su vez, una configuración epistémica y constituyen un significado parcial de la derivada (Díaz, Font y Pino-Fan, 2011). Estas nueve configuraciones, son (ver figura 2): 1) *la tangente en la matemática griega (CE1)*; 2) *sobre la variación en la edad media (CE2)*; 3) *métodos algebraicos para hallar tangentes (CE3)*; 4) *concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes (CE4)*; 5) *las ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos (CE5)*; 6) *métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes (CE6)*; 7) *el cálculo de fluxiones (CE7)*; 8) *el cálculo de diferencias (CE8)* y, 9) *la derivada como límite (CE9).*

La mayoría de estos aspectos se han tenido en cuenta al organizar los campos de problemas de problemas que sustentan la propuesta didáctica que se plantea en el presente informe.

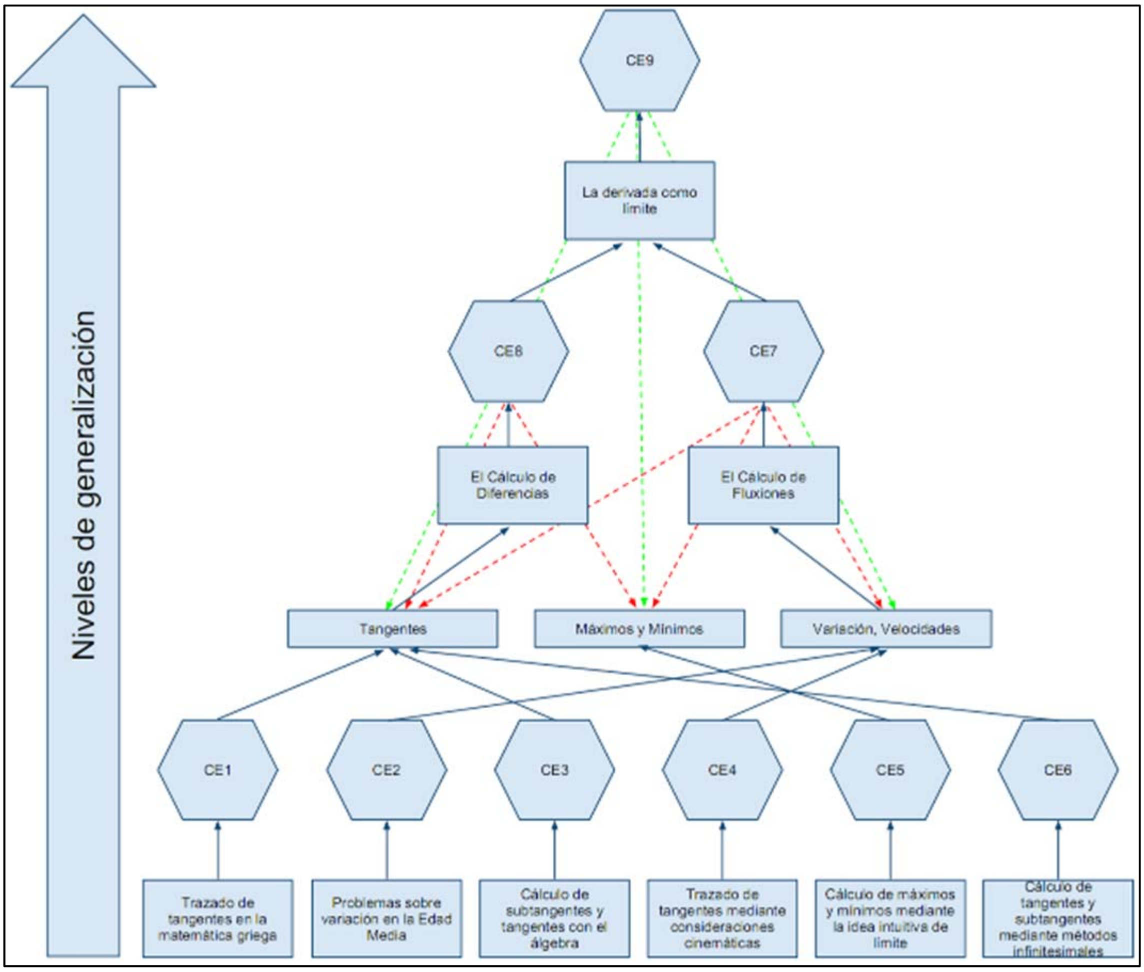


Figura 2. Significado epistémico global de la derivada (Díaz, Font y Pino-Fan, 2011).

IV.3 Problema que constituya una razón de ser del objeto matemático.

Se propondrá un problema que acerque a los alumnos a la derivada a partir de la representación gráfica de una función del tipo espacio-tiempo, que aproveche el concepto de velocidad que ya tienen los alumnos. Será un problema en que tengamos un móvil y la representación gráfica de su espacio recorrido en función del tiempo, con mezcla de tramos lineales y no lineales; las variables serán siempre positivas (excluyendo posibles retrocesos durante el recorrido) y el problema estará contextualizado en una situación posible en la vida real.

Las cuestiones planteadas tendrán sentido físico evitando así las cuestiones puramente teóricas para favorecer el interés de los alumnos en resolverlas y discutirlas.

Proponemos utilizar el problema que plantea el Grupo Cero (Grupo Cero, 1977):

Problema 1. La gráfica siguiente muestra la trayectoria recorrida por un coche desde Sabadell a Blanes. La distancia viene dada en km y el tiempo en minutos. La distancia es función del tiempo t.

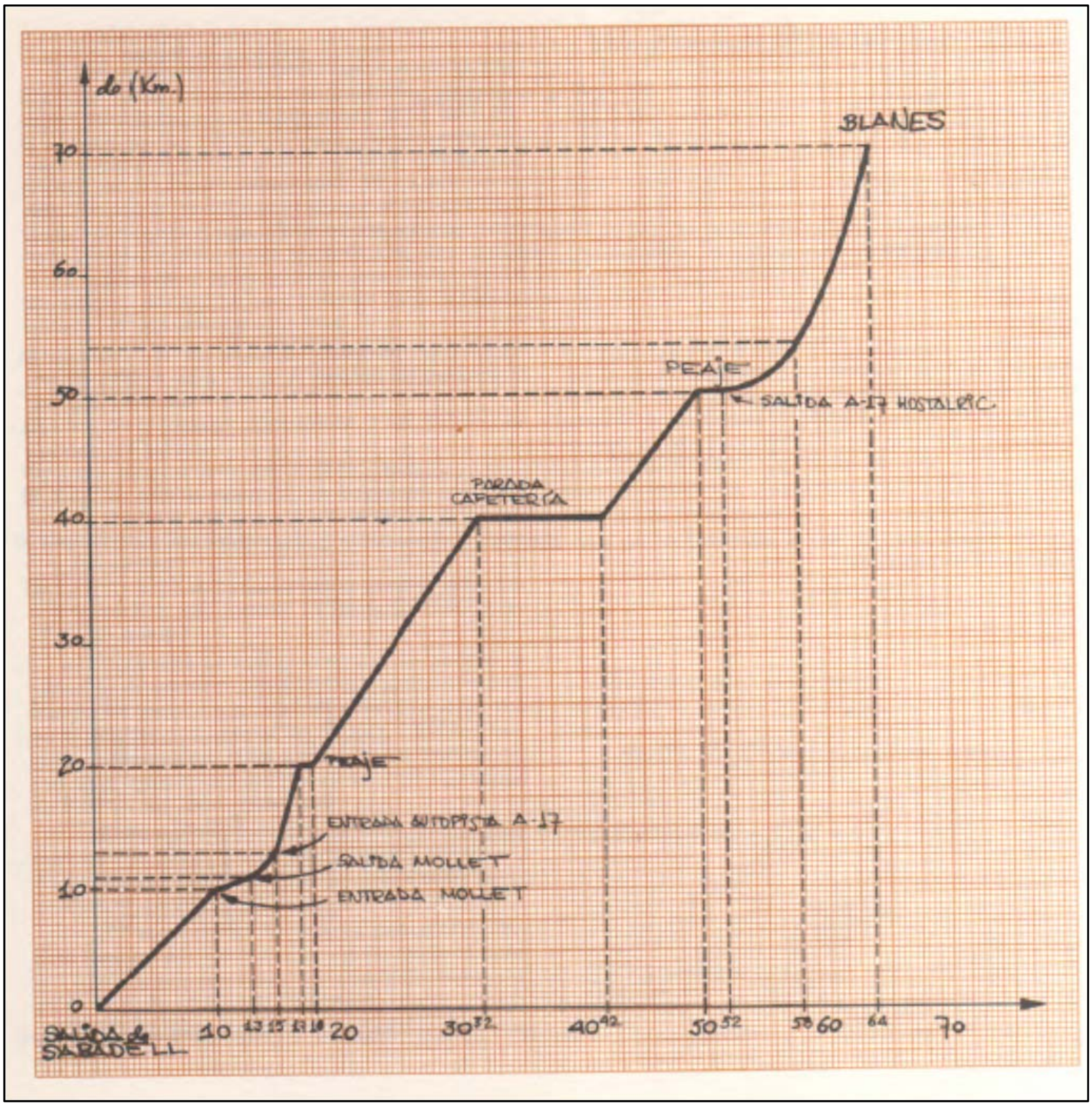


Figura 3. Gráfica espacio-tiempo problema 1 (Grupo Cero, 1977).

Con los datos conocidos, contesta a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál ha sido la velocidad media del coche durante el trayecto?.

b) ¿Cuál ha sido la velocidad media que ha llevado por la autopista? Si no tenemos en cuenta el tiempo perdido en las paradas en la autopista, ¿cuál es la velocidad media en ella?.

c) ¿Cuál es la velocidad media de Hostalric a Blanes?.

d) ¿Cuál es la velocidad media entre el instante t=52m y t=64m?.

e) ¿Cuánto marcará el velocímetro del coche cuando se llevan 45 minutos de viaje?.

f) ¿Cuánto marcará en el instante 58 minutos? Aunque no puedas saberlo con precisión indica un valor aproximado de la velocidad en el instante 58 minutos y justifica dicha aproximación.

Solución y discusión

Las primeras preguntas van encaminadas a repasar el concepto de tasa media de variación de una función, que en el contexto de una función de desplazamiento en función del tiempo resulta ser el cálculo de la velocidad media.

a) Basta considerar las magnitudes totales al empezar en t = 0 s y d = 0 km:

$$\frac{70}{64}\frac{km}{min} = 1.09375\frac{km}{min} = 65.625\ \frac{km}{h}$$

b.1) Para calcular la velocidad media en la autopista, consideramos los km totales recorridos en la autopista y el tiempo transcurrido en ella: entrada (13km y 15min) y salida (50km y 52min).

$$\frac{km\,final - km\,inicial}{\min final - \min inicial} = \frac{50-13}{52-15}\ \frac{km}{min} = \frac{37}{37}\ \frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

b.2) El tiempo que ha estado parado ha sido: peaje1 (1 min), parada (10 min) y peaje2 (2 min).

$$\frac{37}{37-13}\ \frac{km}{min} = \frac{37}{24}\ \frac{km}{min} = 92.5\ \frac{km}{h}$$

Las preguntas c) y d), que en realidad son la misma, van encaminadas a que el alumno vea los errores que conlleva el uso de la tasa de variación media en un intervalo demasiado amplio o cuando la relación entre las variables cambia muy rápidamente.

c) y d) Repetimos el proceso del apartado b), teniendo en cuenta ahora las condiciones de entrada (50km y 52min) y salida (70km y 64min).

$$\frac{km\,final - km\,inicial}{\min final - \min inicial} = \frac{70-50}{64-52}\ \frac{km}{min} = \frac{20}{12}\ \frac{km}{min} = 1.\hat{6}\ \frac{km}{min} = 100\ \frac{km}{h}$$

Las dos últimas preguntas e) y f) corresponden al cálculo de la derivada. En la primera, al ser la relación lineal entre las variables entre los instantes considerados, la tasa media de variación nos permite obtener el valor exacto de la velocidad instantánea, que en este contexto coincide con el valor de la derivada en ese punto. En cambio, gracias a lo visto en los apartados anteriores c) y d), en el apartado f) la relación ya no es lineal y hay que ajustar el uso de la técnica a un intervalo de tiempo suficientemente pequeño lo que nos lleva a una primera aproximación al concepto de derivada a partir de la tasa media de variación.

e) El instante 45 min corresponde a un tramo de autopista, con una relación lineal entre espacio y tiempo. Si lo consideramos en su totalidad:

$$\frac{km\, final - km\, inicial}{\min final - \min inicial} = \frac{50-40}{50-42}\,\frac{km}{min} = \frac{10}{8}\,\frac{km}{min} = 1.25\,\frac{km}{min} = 75\,\frac{km}{h}$$

f) El instante 58 min corresponde a un tramo de autopista en el que la relación espacio y tiempo no es lineal. En los apartados c) y d) hemos calculado la velocidad media en este tramo que es de $100\frac{km}{h}$. Observando el gráfico, se ve que a partir del min 58, la relación se asemeja bastante a una relación lineal; calculando la tasa de variación media, obtenemos:

$$\frac{km\, final - km\, inicial}{\min final - \min inicial} = \frac{70-54}{64-58}\,\frac{km}{min} = \frac{16}{6}\,\frac{km}{min} = 2.\widehat{6}\,\frac{km}{min} = 160\,\frac{km}{h}$$

Esta solución es aproximada y es fácil comprobar que para un intervalo distinto, por ejemplo 58 min y 60 min, el resultado no es exactamente el mismo. El valor exacto requiere del cálculo de la derivada.

V. CAMPOS DE PROBLEMAS

Para la introducción de la derivada se consideran cinco campos de problemas que permitan trabajar los distintos aspectos que conlleva la derivada. Estos campos son:

1. Tasa de variación media y velocidad media.

1.A Concepto de velocidad media (interpretación cinemática de la derivada).

1.B Tasa de variación media en fenómenos que no dependen del tiempo.

2. Tangente de una función en un punto (interpretación geométrica de la derivada).

3. Aproximación numérica y gráfica al cálculo de la derivada de una función en un punto.

4. Cálculo algebraico de la función derivada.

5. Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.

V.1. Tasa de variación media y velocidad media.

V.1.A Concepto de velocidad media (interpretación cinemática de la derivada).

Problemas de interpretación cinemática de la tasa de variación media y de la derivada a partir de una función espacio-tiempo que no sea lineal (Grupo Cero, 1977):

Problema 2. Si lanzamos una piedra verticalmente hacia arriba, la altura (en m) alcanzada al cabo de un determinado tiempo (en s) viene dada por la expresión: $f(t) = 40t - 5t^2$. Usa esta expresión para:

a) Obtener la velocidad media de la piedra durante los siguientes intervalos de t (en s): [0 , 2] , [1 , 4] , [4 , 7] y [1 , 7]. Comenta los resultados obtenidos.

b) Dibuja la gráfica cartesiana de la función (recuerda que por ser una función de 2º grado es una parábola). ¿Tienen sentido físico los valores f(t) cuando $t > 8$ s y cuando $t < 0$ s?. Razónalo.

c) Averiguar la altura máxima alcanzada por la piedra y en qué instante se alcanza.

d) La velocidad media obtenida en el intervalo [1, 7], ¿te da información para calcular el valor de la velocidad en el instante 2s?. Encuentra un valor aproximado.

e) Haz lo mismo para el instante 4s.

Solución y discusión

a) Calculamos la tasa media de variación en cada uno de los intervalos pedidos:

$$Tramo\ 0-2\ s\!: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{60-0}{2-0}\frac{m}{s} = 30\ \frac{m}{s} = 108\ \frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 1-4\ s\!: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{80-35}{4-1}\frac{m}{s} = 15\ \frac{m}{s} = 54\ \frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 4-7\ s\!: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{f(7)-f(4)}{7-4} = \frac{35-80}{7-4}\frac{m}{s} = \ -54\frac{km}{h}$$

$$Tramo\ 1-7\ s\!: \frac{m\,final - m\,inicial}{s\,final - s\,inicial} = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{35-35}{7-4}\frac{m}{s} = \ 0\ \frac{km}{h}$$

Se espera que los alumnos noten que la velocidad en los instantes iniciales es muy elevada ya que no se nota el efecto de la gravedad que actúa "frenando" a la piedra. Cuando consideramos un período de tiempo más elevado, la velocidad es menor. En los instantes finales, la velocidad es negativa, lo que indica que va en dirección contraria a la velocidad positiva que hemos considerado como ascendente, esto es, indica que la velocidad es descendente, la piedra baja.

b) La gráfica pedida puede realizarse fácilmente con Geogebra encontrando la imagen en distintos segundos de tiempo y usando la función parábola:

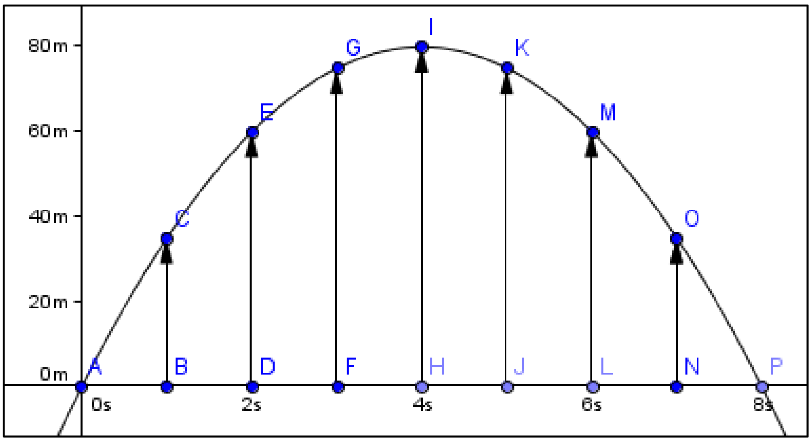


Figura 4. Parábola de la función f(t) = 40t – 5t^2.

Se pretende que los alumnos entiendan el sentido físico del problema y que vean que no tiene sentido estudiar el movimiento de la piedra antes de lanzarla (t = 0 s) ni cuando ya ha llegado al suelo (t = 8 s).

c) Como vemos en la representación gráfica, la altura máxima alcanzada es de 80 m que se alcanza a 4 s después del lanzamiento de la piedra.

d) En el intervalo de tiempo entre 1 s y 7 s, la altura es la misma, lo que da una velocidad media nula. No obstante, está claro que la piedra ha estado moviéndose todo este tiempo, lo que nos da una muestra de la limitación de la información que nos aporta la tasa media de variación. Se pone de manifiesto la necesidad de conocer la velocidad en un intervalo más "pequeño" o en un "instante", lo que servirá para poner de manifiesto el concepto físico de la derivada. Podemos esperar que los alumnos consideren un intervalo menor, por ejemplo:

$$Tramo\ 1-3\ \ s\colon \frac{m\,final - m\,inicial}{\mathrm{s}\,final - \mathrm{s}\,inicial} = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{75-35}{3-1}\,\frac{m}{s} = \ 20\ \frac{m}{s} = 72\ \frac{km}{h}$$

Destacaremos que cuando el intervalo es suficientemente pequeño, la función se comporta "aproximadamente" lineal.

e) Para el instante 4 s, consideramos de manera análoga un intervalo menor, por ejemplo:

$$Tramo\ 3{,}5-4{,}5\ \ s\colon \frac{m\,f - m\,i}{\mathrm{s}\,f - \mathrm{s}\,i} = \frac{f(4{,}5)-f(3{,}5)}{4{,}5-3{,}5} = \frac{78{,}75-78{,}75}{1}\,\frac{m}{s} = \ 0\ \frac{m}{s}$$

Por simetría, es fácil ver que cualquier intervalo centrado en 4 s dará como valor una velocidad nula en el instante 4 s; recordaremos a los alumnos que por lo visto en el apartado anterior, la derivada en 4 s valdrá cero. Este apartado puede ser un punto de partida para conectar con el sentido geométrico de la derivada (campo de problemas 2) puesto que la obtención de una recta tangente por ese punto y el cálculo de su pendiente son sencillos.

V.1.B Tasa de variación media en fenómenos que no dependen del tiempo.

Es conveniente así mismo plantear problemas en que la variable independiente no sea el tiempo para que los alumnos no restrinjan el concepto de variación exclusivamente a funciones que dependen del tiempo. Por ejemplo, se puede estudiar el volumen de llenado de un depósito en función de la altura de la lámina de agua si conocemos la forma del mismo. Se empieza por un problema sencillo para que el alumno se familiarice con la notación. (Azcárate et al., 1996):

Problema 3. Un depósito de agua de forma cilíndrica tiene un radio de 1 m y una altura de 4 m.

a) Dibuja la gráfica de la función del volumen total en función de la altura de la lámina de agua.

b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura del líquido cuando el nivel de agua sube de 2 m a 2,5 m. ¿Cuánto vale la tasa media de variación entre dos niveles de agua cualesquiera?. Razona la respuesta.

Solución y discusión

a) Recordando que el área de un círculo es igual a πr^2, el volumen en función de la lámina de agua es: $V(h) = \pi r^2 h$. En nuestro caso, el radio vale 1 así que la función a representar es: $V(h) = \pi h$.

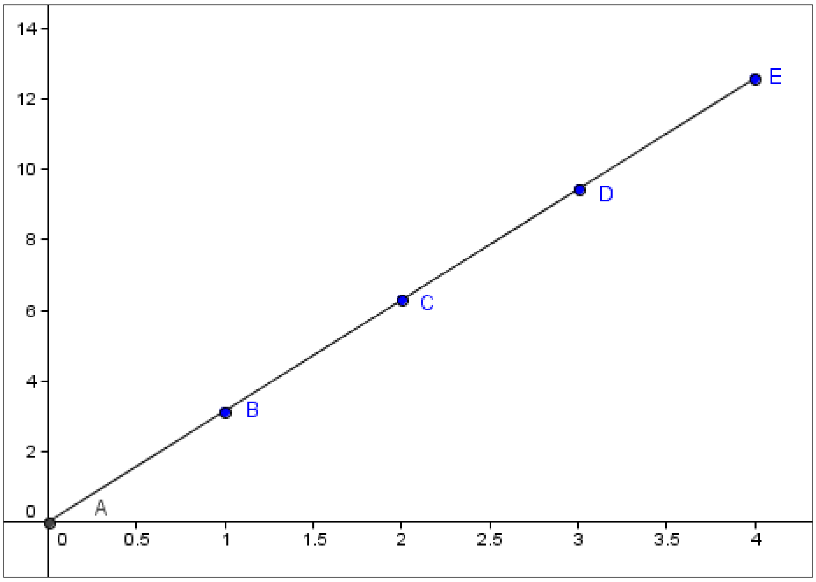


Figura 5. Gráfica volumen-altura del agua en el depósito.

b) Realizamos los cálculos realizados en los problemas anteriores considerando ahora que la variable es el nivel de agua:

$$Tramo\ 2\ m\ y\ 2{,}5\ m\text{:}\ \frac{V\,f - V\,i}{\mathrm{h}\,f - \mathrm{h}\,i} = \frac{2{,}5\pi - 2\pi}{2{,}5 - 2}\ \frac{m^3}{m} = \frac{0{,}5\pi}{0{,}5}\ \frac{m^3}{m} = \pi\ \frac{m^3}{m} = 10\pi\ \frac{l}{cm}$$

Entre dos niveles de agua cualesquiera, la tasa de variación media va a ser la misma ya que la relación entre el volumen y la variable altura es constante lo que conlleva que la tasa de variación media siempre tome el mismo valor.

Una vez el alumno se ha familiarizado con esta nueva manera de trabajar, pueden plantearse problemas de este estilo con una dificultad similar a los de espacio-tiempo. (Azcárate et al., 1996):

Problema 4. Un depósito tiene forma de cono invertido con unas dimensiones de 1 m de radio y 1 m de altura.

a) Haz la gráfica de la función que nos da el volumen de agua según la altura del líquido.

b) Calcula la tasa media de aumento de volumen en litros por centímetro de altura cuando el nivel sube desde los 20 cm a los 30 cm. ¿Y cuándo sube de los 80 cm a los 90 cm?.

c) Si el depósito está lleno y se vacía completamente, calcula la tasa media de variación de volumen de líquido al descender el primer centímetro y al descender el último centímetro.

Solución y discusión

a) La función que permite conocer el volumen en función de la altura es:

$$V(h) = \frac{\pi}{3}h^3;\ 0 \leq h \leq 1$$

Se realiza la gráfica pedida con la ayuda de Geogebra:

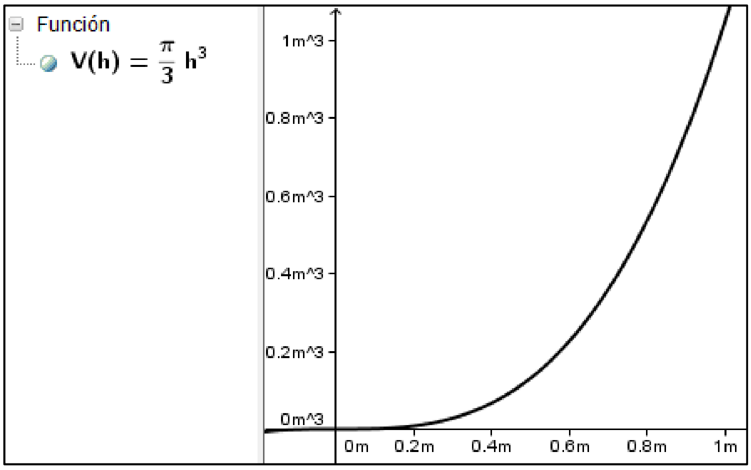


Figura 6. Gráfica volumen-altura del agua en el depósito.

b) Las tasas medias de variación en cada intervalo son:

$$Tramo\ 20-30\ cm\text{:}\ \frac{V\,f - V\,i}{h\,f - h\,i} = \frac{V(0{,}3) - V(0{,}2)}{0{,}3 - 0{,}2} = \frac{\frac{\pi}{3}0{,}3^3 - \frac{\pi}{3}0{,}2^3}{0{,}1}\ \frac{m^3}{m} = 0{,}199\ \frac{m^3}{m}$$

$$Tramo\ 80-90\ cm\text{: } \frac{V\ f - V\ i}{h\ f - h\ i} = \frac{V(0{,}9) - V(0{,}8)}{0{,}9 - 0{,}8} = \frac{\frac{\pi}{3}0{,}9^3 - \frac{\pi}{3}0{,}8^3}{0{,}1}\ \frac{m^3}{m} = 2{,}272\ \frac{m^3}{m}$$

c) Las tasas medias de variación en cada intervalo son:

$$Tramo\ 99-100\ cm\text{: } \frac{V\ f - V\ i}{h\ f - h\ i} = \frac{V(0{,}99) - V(1)}{0{,}99 - 1} = \frac{\frac{\pi}{3}0{,}99^3 - \frac{\pi}{3}1}{-0{,}01}\ \frac{m^3}{m} = 3{,}110\ \frac{m^3}{m}$$

$$Tramo\ 0-1\ cm\text{: } \frac{V\ f - V\ i}{h\ f - h\ i} = \frac{V(0) - V(0{,}01)}{0 - 0{,}01} = \frac{0 - \frac{\pi}{3}0{,}01^3}{-0{,}01}\ \frac{m^3}{m} = 0{,}0001\ \frac{m^3}{m}$$

Los resultados demuestran que la variación del volumen depende de la altura de la lámina de agua y que es mayor cuanto mayor es el nivel del agua; esto hecho se debe a la forma de cono invertido del depósito.

Con el apartado “c” nos hemos acercado nuevamente al concepto de tasa de variación instantánea ya que hemos calculado una aproximación al valor de la tasa de variación en los instantes iniciales y finales de vaciado del depósito.

Este campo de problemas 1 acaba planteando la necesidad de calcular la tasa media de variación en un punto, cuya técnica de cálculo vamos a encontrar partiendo de la tasa de variación media entre dos puntos y considerando que los dos puntos están “suficientemente próximos”. Así:

$$TVM\ en\ [a, a+h] = \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

donde a es el punto en el que queremos conocer la variación instantánea de la función y h un intervalo “suficientemente pequeño” entorno a él.

A esta tasa media de variación de una función en un punto, que permite conocer cuanto varía la función en un punto determinado, se le denomina *tasa instantánea de variación* o *derivada de la función en el punto*.

Cuando la función estudiada es del tipo espacio-tiempo, la derivada en un punto coincide con la velocidad instantánea en dicho punto.

V.2. Tangente de una función en un punto (interpretación geométrica de la derivada).

Proponemos empezar por situaciones en que la pendiente de la curva tenga un incremento fijo (que supondrá una aproximación rigurosa a la derivada) mezcladas con situaciones en que las curvas tengan alguna parte “localmente rectas” (que supondrá una aproximación intuitiva a la derivada).

Problema 5. Dos motocicletas A y B parten del mismo punto kilométrico. El espacio recorrido (en km) por cada una de ellas viene dado por las siguientes funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ respectivamente, siendo el tiempo expresado en minutos.

a) Representa las gráficas espacio-tiempo de las dos motocicletas.

b) ¿Cuántos km han recorrido las motocicletas después de 1 min, 2 min y 3 min?.

c) Calcula la velocidad media de las motocicletas en el intervalo [0, 1] minutos, en el intervalo [0,2] min, en el intervalo [0,3] min y en el intervalo [1, 2] min. Comenta los resultados obtenidos.

d) ¿Cuál es la velocidad de A y B en el instante 2 min?. ¿Y en el instante 1 min?.

e) Dibuja las rectas tangentes a la función $g(x)$ en los instantes 1 min y 2 min. Calcula sus pendientes, así como el pendiente de la recta de la función $f(x)$. Recuerda que la pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta y el eje de abscisas.

f) Encuentras alguna relación entre los resultados de d), y e). Razona tu respuesta.

Solución y discusión

a) Representamos las dos gráficas con la ayuda de Geogebra:

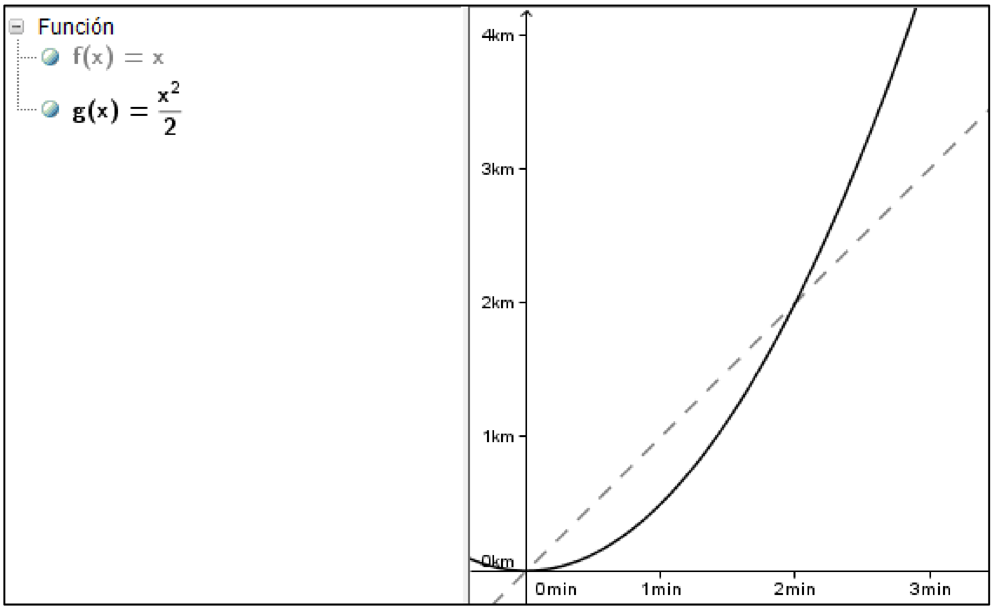


Figura 6. Gráfica espacio-tiempo de las motocicletas A (gris) y B (negro).

b) Calculamos los km fácilmente gracias a la expresión analítica de las funciones desplazamiento:

$$Moto\ A: f(1) = 1\ km\ ;\ Moto\ B: g(1) = \frac{1^2}{2} = 0{,}5\ km$$

$$Moto\ A: f(2) = 2\ km\ ;\ Moto\ B: g(2) = \frac{2^2}{2} = 2\ km$$

$$Moto\ A: g(3) = 3\ km\ ;\ Moto\ B: g(3) = \frac{3^2}{2} = 4{,}5\ km$$

c) Calculamos las velocidades medias con la tasa media de variación:

$$Moto\ A, tramo\ 0\ min\ y\ 1\ min: \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ B, tramo\ 0\ min\ y\ 1\ min: \frac{g(1)-g(0)}{1-0} = \frac{0{,}5-0}{1-0}\frac{km}{min} = 0{,}5\ \frac{km}{min} = 30\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ A, tramo\ 0\ min\ y\ 2\ min: \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2-0}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ B, tramo\ 0\ min\ y\ 2\ min: \frac{g(2)-g(0)}{2-0} = \frac{2-0}{2-0}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ A, tramo\ 0\ min\ y\ 3\ min: \frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{3-0}{3-0}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ B, tramo\ 0\ min\ y\ 3\ min: \frac{g(3)-g(0)}{3-0} = \frac{4{,}5-0}{3-0}\frac{km}{min} = 1{,}5\ \frac{km}{min} = 90\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ A, tramo\ 1\ min\ y\ 2\ min: \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{2-1}{2-1}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min} = 60\ \frac{km}{h}$$

$$Moto\ B, tramo\ 1\ min\ y\ 2\ min: \frac{g(2)-g(1)}{2-1} = \frac{2-0{,}5}{2-1}\frac{km}{min} = 1{,}5\ \frac{km}{min} = 90\ \frac{km}{h}$$

En los primeros segundos, la moto A tiene una velocidad media mayor, de manera que recorre más distancia que la moto B en el mismo intervalo de tiempo. En el minuto 2, las dos motos tienen la misma velocidad media desde el inicio así que han recorrido el mismo trayecto. A partir de ese instante, la moto B recorre más distancia ya que va a mayor velocidad. Pero si observamos el último resultado, vemos que la moto B tienen mayor velocidad que la moto A antes de llegar a los dos minutos; es un resultado lógico, ya que si inicialmente la moto A va a mayor velocidad y a los dos minutos van a la misma velocidad media, la moto B tiene que haber superado la velocidad media de A en algún momento para compensar su inicio que fue más lento.

d) Para la moto A, la relación espacio-tiempo es lineal, así que la velocidad es contante (como arrojan los resultados del apartado anterior); la velocidad media en cualquier intervalo es igual a la instantánea en cualquier momento y es de 1 $\frac{km}{min}$.

En la moto B, la relación espacio-tiempo ya no es lineal, la velocidad varía a cada instante de tiempo. Debemos calcular la tasa instantánea de variación considerando un intervalo de tiempo suficientemente próximo al momento de estudio. Por ejemplo:

$$Tramo\ 0{,}99 - 1{,}01\ min: \frac{g(1{,}01)-f(0{,}99)}{1{,}01-0{,}99} = \frac{0{,}51005-0{,}49005}{0{,}02}\frac{km}{min} = 1\ \frac{km}{min}$$

$$Tramo\ 1{,}99 - 2{,}01\ min: \frac{g(2{,}01)-f(1{,}99)}{2{,}01-1{,}99} = \frac{2{,}02005-1{,}98005}{0{,}02}\frac{km}{min} = 2\ \frac{km}{min}$$

e) La función $f(x)$ es una recta y es fácil obtener que su pendiente es 1 aplicando la definición de pendiente de una recta.

Para las rectas tangentes a la función $g(x)$, podemos utilizar medios manuales o apoyarnos en Geogebra:

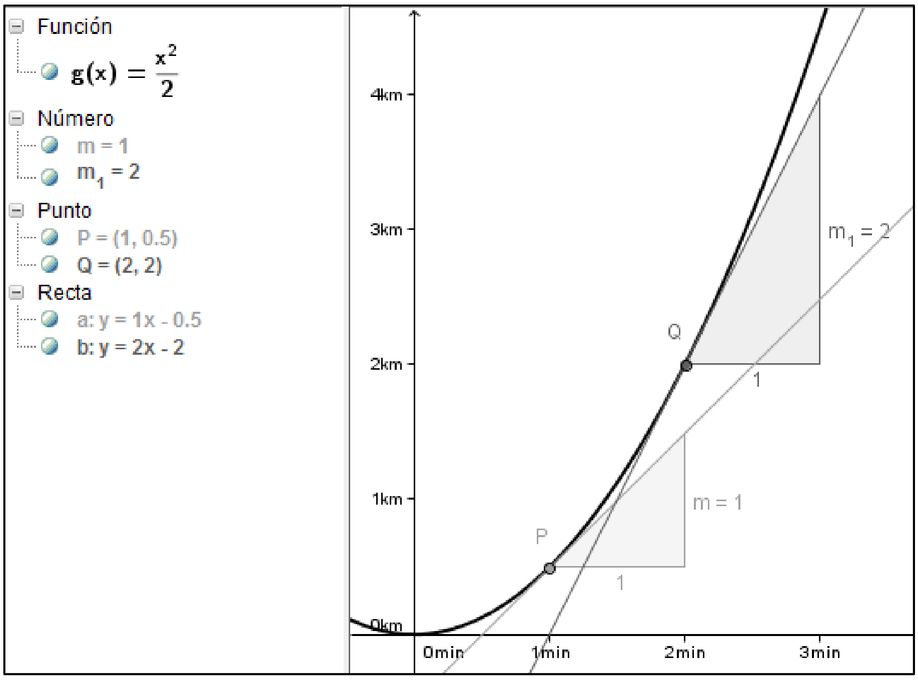


Figura 7. Tangentes de la función espacio-tiempo de la moto B.

Obtenemos que en el instante 1min (punto P) la pendiente es 1 y para el instante 2min (punto Q) la pendiente es 2.

f) Los valores obtenidos en los apartados d) y e) son los mismos, ya que en ambos casos estamos calculando el valor de la derivada en el punto. En el apartado d) la calculamos numéricamente a partir del sentido físico de la misma (la velocidad) y en el apartado e) la calculamos gráficamente a partir del sentido geométrico (la pendiente de la recta tangente).

Con este problema se pone de relevancia el sentido geométrico de la derivada, objetivo del campo de problemas 2. Es el momento de institucionalizar la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, entendiendo la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta tangente y el eje de abscisas.

Geométricamente, la derivada $f'(a)$ es la pendiente de la recta tangente a la función en el punto $P(a, f(a))$.

De cursos anteriores, los alumnos conocen que la tangente a una curva es una recta que la interseca en un único punto. En el contexto del cálculo de la derivada, otra definición alternativa de tangente de una curva en un punto “a” es aquella recta que más se aproxima a la curva en un entorno suficientemente pequeño alrededor de “a”. Es importante recalcar a los estudiantes que debemos considerar sólo el entorno de “a” ya que es frecuente que la tangente acabe cortando a la función en otros puntos en cuyo caso la afirmación ya no tiene porqué ser cierta.

V.3. Aproximación numérica y gráfica al cálculo de la derivada de una función en un punto.

En los campos de problemas anteriores, se han realizado sendos acercamientos a la derivada mediante la velocidad instantánea en un punto y la pendiente de la recta tangente en un punto. Sin embargo, a veces estas aproximaciones suelen acarrear errores de precisión, de manera que se debe incentivar en el alumnado la necesidad de realizar el cálculo de la derivada con exactitud. El cálculo preciso de la derivada requiere del concepto de límite y dado que es un concepto de elevada dificultad para los alumnos, resulta conveniente introducirlo de manera gráfica y numérica para intentar facilitar la comprensión al alumno. Retomamos el problema anterior y encaminamos a los alumnos a ello:

Problema 6. Calcula la velocidad instantánea de la moto B (cuyo recorrido viene dado por la función $g(x) = \frac{x^2}{2})$ en el instante 2 min. Para obtener su valor exacto, sigue los siguientes pasos:

a) Dibuja la gráfica de la función en el intervalo [0, 3], escogiendo la misma unidad para el eje de las abscisas y para el de ordenadas, procurando hacer la gráfica con la máxima precisión en el entorno del punto de abscisa 2.

b) Recuerda que la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto. Dibújala y calcula su pendiente. Compara el resultado con tu compañero/a. ¿Es posible conocer este valor de manera exacta? ¿Cuántos puntos de la recta tangente conoces con total precisión?.

c) Calcula la pendiente de la recta secante a la curva en el intervalo [1.5 , 2]. Hazlo gráficamente y numéricamente con los valores de las coordenadas de los dos puntos obtenidas mediante la fórmula de la función. ¿Ves alguna relación con lo ocurrido en el apartado b)?.

d) Haz una tabla de aproximaciones numéricas del valor de la derivada de la función en el punto de abscisa 2, tanto por la izquierda como por la derecha.

e) Observa las sucesiones de números de la última fila de las dos tablas: ¿hacia que número tienden estas sucesiones? ¿Cuál crees que es el valor exacto de la pendiente de la recta tangente en x = 2?.

Solución y discusión

a) y b) se realizarán por parte de los alumnos con medios manuales y esperemos que perciban la dificultad de dibujar manualmente superficies curvas así como rectas tangentes, puesto que para definir una recta se necesitan dos puntos y directamente sólo se dispone de un punto, el punto en el cual queremos dibujar la tangente. El dibujo "a mano" conllevará una variación de resultados aunque es de esperar que los alumnos puedan deducir el valor exacto a partir de la comparación de sus resultados. Finalmente, podemos hacer el problema con Geogebra y ver el valor exacto. El obtener un valor exacto gráficamente es posible ya que podemos encontrar un segundo punto de la recta tangente a través de una construcción auxiliar partiendo del foco de la parábola.

c) Calculamos numéricamente la pendiente de la recta secante:

$$m\,[1{,}5;2] = \frac{g(2)-g(1{,}5)}{2-1{,}5} = \frac{2-1{,}125}{0{,}5}\,\frac{km}{min} = 1{,}75\,\frac{km}{min} = 105\,\frac{km}{h}$$

Para el cálculo geométricamente, podemos utilizar Geogebra:

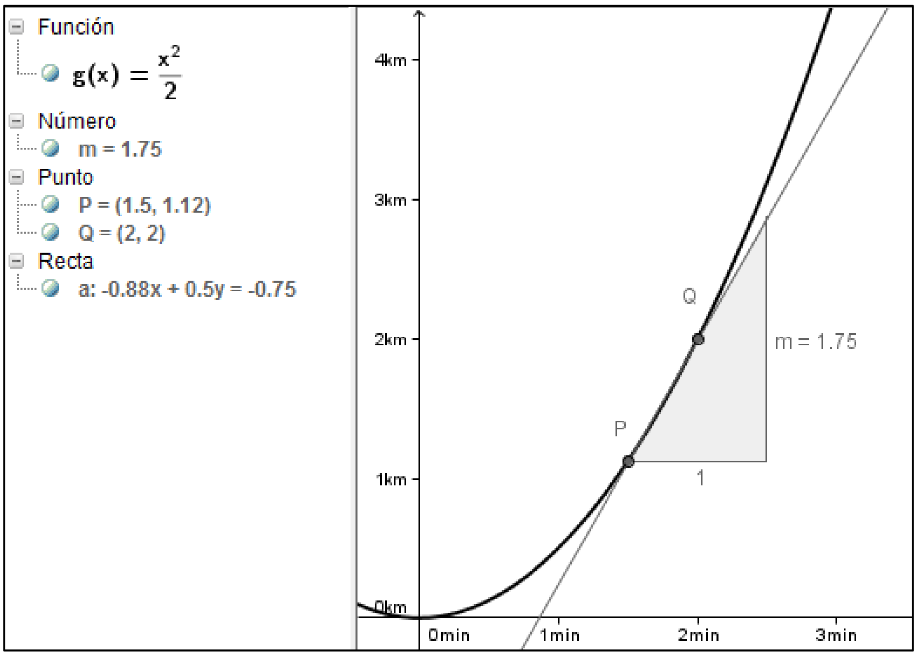


Figura 8. Pendiente de la recta tangente entre los puntos [1,5 ; 2].

Vemos que la tasa de variación media en el intervalo coincide con la pendiente de la recta secante entre los puntos del intervalo considerado. De manera análoga, la pendiente de la recta tangente en un punto va a coincidir con la tasa de variación instantánea en dicho punto.

d) Realizamos las aproximaciones por la derecha y por la izquierda:

x	2,5	2,1	2,01	2,001	2,0001
$g(x)$	3,125	2,205	2,02005	2,0020005	2,000200005
$\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$	2,25	2,05	2,005	2,0005	2,00005

x	1,5	1,9	1,99	1,999	1,9999
$g(x)$	1,125	1,805	1,98005	1,9980005	1,999800005
$\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$	1,75	1,95	1,995	1,9995	1,99995

e) De los valores anteriores es fácil deducir que la derivada en el punto de abscisa 2 es 2, lo que implica que la velocidad en ese instante es 2 y que la pendiente de la recta tangente a la función es también 2.

Es de esperar que los alumnos reconozcan este procedimiento de cálculo de sus enseñanzas anteriores y se den cuenta de que el cálculo de la derivada en un punto de manera algebraica es calcular el límite de la tasa de variación media en un entorno del punto que tiende a cero. Una vez que los estudiantes han relacionado el concepto de límite con el de la derivada, es momento de institucionalizar la definición formal de la derivada en un punto:

La derivada de una función contínua $f(x)$ en un punto de abscisa "a", se denota por $f'(a)$ y es el valor de este límite, si existe, y es finito.

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

Si en esta definición, hacemos $x = a + h$, la fórmula es equivalente a:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Si este límite no existe o es infinito, se dice que la derivada no está definida en ese punto. Esto sucede en aquellos puntos en los que la función $f(x)$ tiene una tangente vertical, una discontinuidad o un punto anguloso.

Se mostraran algunos ejemplos de funciones no derivables en un punto relativos a cada uno de los casos posibles.

V.4. Cálculo algebraico de la función derivada.

Una vez conocida la expresión algebraica del cálculo de la derivada en un punto, es momento de retomar el problema anterior y resolverlo de manera formal o algebraica (Azcárate et al., 1996):

Problema 7. En el ejercicio del cálculo de la derivada del apartado anterior de la función $g(x) = \frac{x^2}{2}$, has tenido que calcular las pendientes de las rectas secantes mediante la expresión $\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$ para distintos valores de x.

a) Sustituye en esta expresión, los valores de $g(x) = \frac{x^2}{2}$ y $g(2) = 2$ y obtendrás un cociente de dos polinomios. Haz la división de los dos polinomios.

b) Utiliza la expresión obtenida para comprobar si los valores de las tablas del ejercicio anterior son correctas.

c) Comprueba el valor de la derivada $g'(2)$ mediante la definición formal.

d) ¿Crees que es posible encontrar una expresión formal que nos permita conocer la derivada en cualquier punto?.

Solución y discusión

a) Realizamos las operaciones propuestas:

$$\frac{g(x)-g(2)}{x-2} = \frac{\frac{x^2}{2}-\frac{2^2}{2}}{x-2} = \frac{\frac{1}{2}(x^2-4)}{x-2} = \frac{\frac{1}{2}(x-2)(x+2)}{x-2} = \frac{1}{2}(x+2) = \frac{x}{2}+1$$

b) Es fácil comprobar que la fórmula permite obtener los valores de la tabla anterior.

c) La definición formal requiere el uso del límite:

$$g'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(2+h)^2}{2}-\frac{2^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4+4h+h^2-4}{2h} = 2$$

d) Es de esperar que los alumnos intuyan que es posible encontrar una expresión formal de la derivada de una función en cualquier punto de un intervalo donde ésta sea derivable, pero que tengan dificultades para encontrarla. Les invitaremos a que lo hagan con el argumento que para generalizar basta con considerar el punto donde queremos conocer la derivada como una variable en lugar de como un dato; esto es, calcular $g'(x)$ en lugar de $g'(2)$. Así:

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{(x+h)^2}{2}-\frac{x^2}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{2h} = x$$

Esta expresión general permite conocer el valor de la derivada en cualquier punto del dominio, y en este caso, el valor de la derivada coincide con el punto donde se estudia.

En este momento, debemos institucionalizar la definición formal de la función derivada con pleno rigor, partiendo de la expresión formal de la derivada en un punto que ya conocen los alumnos y generalizando para cualquier punto. Debemos añadir que al trabajar ahora con toda la función ésta debe ser continua para ser derivable.

Dada una función f(x) continua y derivable, su función derivada es una función que se denota como $f'(x)$ que asocia a cada punto x el valor de la derivada de $f(x)$ en ese punto.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

La condición de continuidad es necesaria pero no suficiente, ya que hay funciones continuas que no son derivables, por ejemplo, la función valor absoluto, que tiene un punto anguloso en $x = 0$.

El recíproco sí que es cierto. Si existe la función derivada de una función, podemos afirmar que ésta es continua.

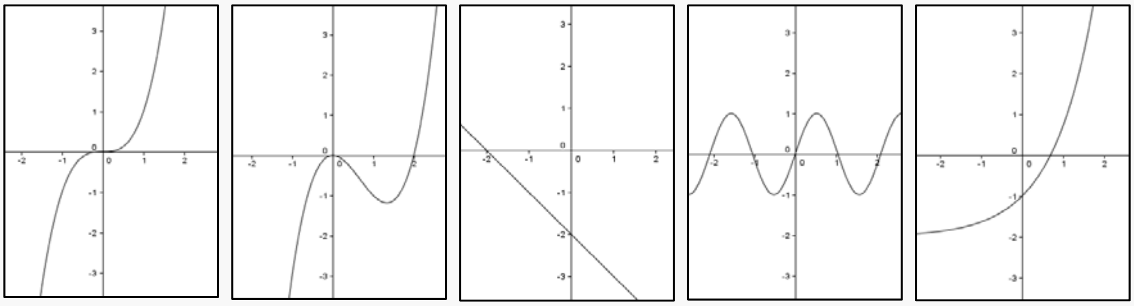
Se planteará la obtención de la función derivada de una función constante, de una función lineal y de una función cuadrática para introducir a los estudiantes en el cálculo de derivadas inmediatas. Se comentará así mismo como trabajar la derivada de una función polinómica, únicamente en términos de sumandos y sustraendos.

V.5. Relación entre la representación gráfica de una función y su función derivada.

Una de las mayores dificultades que se presentan a los alumnos en los comienzos del estudio de la derivada es relacionar una función y su función derivada a partir de sus representaciones gráficas. Es conveniente realizar números ejercicios de relacionar representaciones gráficas de funciones y de sus derivadas correspondientes, dada la riqueza conceptual que supone realizar una valoración global de dichas funciones.

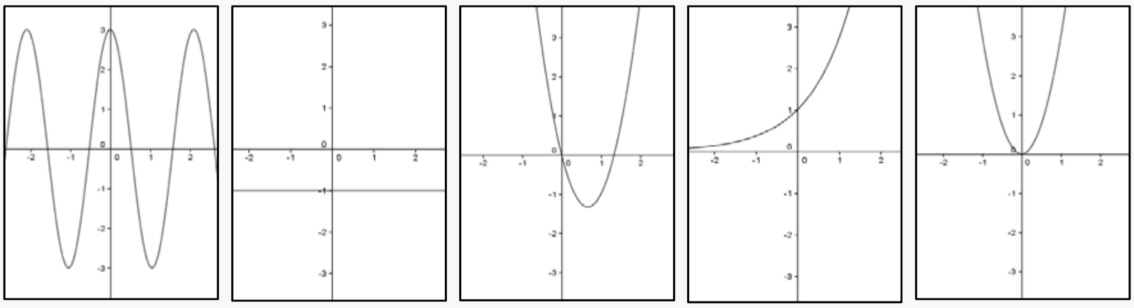
Problema 8. Relaciona cada una de las siguientes funciones con la representación gráfica de su función derivada.

FUNCIONES



f(x) g(x) h(x) i(x) j(x)

FUNCIONES DERIVADAS



f'(x) g'(x) h'(x) i'(x) j'(x)

Figura 9. Gráficas de funciones y sus derivadas.

Solución y discusión

La relación entre las distintas gráficas es la siguiente:

$f(x) \rightarrow j'(x)$; $g(x) \rightarrow h'(x)$; $h(x) \rightarrow g'(x)$; $i(x) \rightarrow f'(x)$; $j(x) \rightarrow i'(x)$

Con estos problemas se pretende que los alumnos se familiaricen con las características que definen las funciones y sus funciones derivadas, de manera cualitativa más que cuantitativa. Se pretende conseguir que los alumnos relacionen funciones lineales con funciones derivadas constantes, funciones cuadráticas con funciones derivadas lineales, funciones “en crecimiento” con funciones derivadas positivas, funciones “en decrecimiento” con funciones derivadas negativas, puntos máximos y mínimos relativos de la función con puntos nulos de la función derivada, etc.

V.2 Modificaciones de la técnica inicial.

En el campo de problemas 1 se trabajará el sentido físico de la tasa media de variación como velocidad media de variación entre dos instantes de tiempo y se hará una aproximación a la derivada como tasa media de variación entre dos instantes lo “suficientemente próximos”. Así mismo, también se extenderá el uso de la tasa media de variación entre variables que no sean dependientes del tiempo.

En el campo de problemas 2, se trabajará el sentido geométrico de la tasa media de variación como el valor de la pendiente de la recta secante a la función entre los puntos de estudio. Se hará notar que si dichos puntos se acercan a uno dado, la tasa de variación corresponde a la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto y equivale a la derivada de la función en dicho punto. En este contacto con la derivada, trabajaremos básicamente de manera gráfica.

En el campo de problemas 3, se plantea un acercamiento a la definición formal de la derivada como el límite de la tasa media de variación cuando los dos puntos del intervalo tienden a aproximarse infinitamente. Se trabajará numéricamente y gráficamente, haciendo sucesivos cálculos de la tasa media de variación y de la pendiente de una recta, considerando un intervalo entre los dos puntos de cálculo cada vez menor. Esto nos llevará a la definición formal de la derivada en un punto como el límite de la tasa de variación media en un entorno infinitamente pequeño entorno al punto estudiado.

En el campo de problemas 4, se pretende que los alumnos encuentren la generalización de la expresión de la derivada en un punto para obtener la expresión formal de la función derivada, objeto final de la secuenciación didáctica planteada.

Para mejorar el conocimiento de la función derivada después de su definición más formal, se proponen los problemas del campo 5, de correspondencia función-derivada, en los cuales se trabajará la relación entre la función y su función derivada de manera gráfica, atendiendo al crecimiento-decrecimiento, los puntos singulares, etc.

VI. TÉCNICAS

Las técnicas a ejercitar son las siguientes:

VI.1. Cálculo de la tasa media de variación.

Se propondrán problemas para ejercitar la técnica de cálculo de la tasa media de variación desde funciones representadas por medio de una tabla (problema inicial), por medio de una gráfica (problema 1) y por medio de una expresión algebraica (problemas 2, 3 y 4). En estos últimos problemas se trabajará la tasa de variación instantánea.

VI.2. Cálculo de la recta pendiente de una función en un punto.

Se realizarán ejercicios de representación gráfica de la recta tangente en un punto y de cálculo de su pendiente partiendo de la representación gráfica de la función (problema 5); se harán tanto de manera manual (con la ayuda de papel milimetrado) como de manera digital (mediante el uso de programa de dibujo gráfico tipo Geogebra). Se trabajará el sentido geométrico de la derivada como la pendiente de la recta tangente.

VI.3. Cálculo algebraico de la derivada en un punto.

Una vez conocida la definición formal de la derivada en un punto, se plantearán ejercicios de ejercitación de la técnica consistentes en calcular la derivada en un punto determinado de una función dada. Se aprovecharán las funciones de los problemas 2, 3 y 4 para robustecer la técnica de cálculo algebraico de la derivada en un punto.

D. Cálculo algebraico de la función derivada.

Se seguirá el planteamiento del apartado anterior. Se aprovecharán las funciones de los problemas 2, 3 y 4 para así constatar que la función derivada permite obtener el valor de la derivada en cualquier punto. Adicionalmente, se propondrá calcular la función derivada de una función constante, una lineal y una cuadrática, como introducción a las derivadas inmediatas que aunque fuera del contenido de la presente memoria, serían los siguientes contenidos a trabajar en la enseñanza de la derivada.

E. Relación entre gráfica de una función y gráfica de la función derivada.

Se trabajará la relación entre una función y su función derivada de manera gráfica, atendiendo al crecimiento-decrecimiento, la existencia de puntos singulares, etc. Este trabajo se hará mediante la relación entre varias gráficas de funciones y de funciones derivadas desordenadas, donde deberán justificarse adecuadamente dichas relaciones.

VII. TECNOLOGÍAS

VII.1 Razonamientos que justifican las técnicas.

La técnica de cálculo de la tasa media de variación de una función es ya conocida por los alumnos y será el punto de partida de toda la introducción a la derivada planteada en la presente memoria.

Se recordará a los estudiantes que esta tasa indica la variación de la función entre los puntos considerados y que dicha variación se corresponde con la velocidad en el caso de funciones espacio-tiempo. Esta justificación se hará desde un razonamiento aritmético basado en la definición de velocidad que conocen de física.

Paralelamente, mediante un razonamiento geométrico basado en la trigonometría, se les recordará que la tasa media de variación coincide con el valor de la pendiente de una recta secante a la función que pasa por dichos puntos.

Para justificar la técnica formal de cálculo de la derivada en un punto se realizará un razonamiento algebraico en base al concepto de límite. Se hará notar que en un intervalo "suficientemente pequeño" la tasa media de variación pasa a ser instantánea ya que sólo aplica a un punto y que la recta secante pasa a ser tangente ya que sólo tiene un punto sobre la función; esta reducción del intervalo se traduce en lenguaje algebraico en un límite cuando dicho intervalo tiende a cero.

La técnica formal de cálculo de la función derivada se justificará mediante una generalización a cualquier punto del dominio donde la función sea derivable, al considerar el punto de cálculo como una variable en lugar de un valor conocido.

Todas estas justificaciones están basadas en algunos de los significados históricos del concepto de derivada, los cuales están recogidos en el apartado IV.2 de la presente memoria.

La institucionalización de las distintas técnicas se explicita al final de cada uno de los campos de problemas asociados a ellas (apartado V de la presente memoria) ya que se presenta como una conclusión del proceso enseñanza-aprendizaje.

VII.2 Metodología de enseñanza.

Para cada uno de los campos de problemas considerados, se propondrá un problema prototípico con algunos apartados plenamente asumibles por los estudiantes y otros que requieran del conocimiento y uso de la técnica a enseñar, para así poner de manifiesto ante ellos la necesidad de conocerla. Se animará a que intenten su resolución, aunque sea parcial o cualitativa, con el profesor como guía del aprendizaje y con un papel de apoyo. A partir de los resultados obtenidos y de su discusión, se intentará a los estudiantes a que saquen sus propias conclusiones y den una justificación de las mismas. Finalmente, el profesor, partiendo de las aportaciones de los alumnos, será el encargado de institucionalizar formalmente las técnicas y de resaltar los distintos aspectos de las mismas.

Está previsto que el uso y gestión de Geogebra se realice básicamente por parte del profesor, como herramienta de precisión para la comprobación de los resultados obtenidos manualmente que sirva para hacer una reflexión general de algunos aspectos aparecidos durante la secuencia didáctica como la dificultad para calcular gráficamente la recta tangente o la relación global entre la representación gráfica de una función y la de su función derivada.

VIII. SECUENCIA DIDÁCTICA

VIII.1 Temporalización de las actividades propuestas.

La presente introducción a la derivada se plantea llevar a cabo en 11 sesiones de una hora de duración cada una, en las que se trabajarán las actividades propuestas en los campos de problemas de la siguiente manera:

- Sesión 1. Sesión introductoria.

Se hará un breve repaso del cálculo de la tasa de variación media ya que al haberla dado el curso anterior, probablemente gran parte de los alumnos han olvidado su técnica de cálculo. Para ello se realizará de manera conjunta el problema inicial planteado en esta memoria.

Seguidamente, se planteará el problema 1 “el viaje” que es la razón de ser de nuestra secuencia didáctica. Se propondrá que los alumnos trabajen de manera individual durante unos 20 minutos y después se empezará a resolver el problema de manera grupal comentando los resultados obtenidos.

- Sesión 2. Campo de problemas 1.A.

Se acabará de resolver el problema 1, prestando especial atención al último apartado que es el que introduce la necesidad de conocer la velocidad instantánea.

Seguidamente se planteará en clase para resolver de manera individual el problema 2. Se pondrán los resultados en común, haciendo especial hincapié en el debate de soluciones de los apartados d) y e), esperando que los estudiantes vean que sus conocimientos hasta la fecha no son suficientes para dar una respuesta totalmente rigurosa puesto que se necesita del concepto de derivada.

- Sesión 3. Campo de problemas 1.B.

Se comentará que el concepto de derivada se puede extender a problemas que no sean función del tiempo y se resolverá de manera conjunta el problema 3, que introduce el campo de problemas 1.B.

Posteriormente, se propondrá para realizar en clase, en parejas, el problema 4. Se resolverá nuevamente en grupo y posteriormente, se institucionalizará el aspecto nuevo aparecido en estas sesiones, la derivada de la función en un punto como la tasa de variación instantánea en dicho y su sentido físico como variación instantánea o como velocidad instantánea en funciones dependientes del tiempo. Se plantearán para resolver en casa los apartados a), b) y c) del problema 5, que servirán para reforzar lo aprendido hasta la fecha.

- Sesión 4. Campo de problemas 2.

Se revisarán los resultados de los apartados planteados para casa y se dejaran unos 20 minutos para acabar de realizar el problema en clase. El apartado e) es el que nos sirve para introducir el sentido geométrico de la derivada y es de esperar que los alumnos tengan dificultades y dudas en su realización, por lo que se resolverá en clase por parte del profesor, con Geogebra y mediante proyector. Se incentivará a los alumnos a que comenten el apartado f), que conducirá a la institucionalización de la derivada en un punto como el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto, entendiendo la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forman la recta tangente y el eje de abscisas. Se planteará para realizar en casa los apartados a) y b) del problema 6 que permitirán trabajar lo aprendido en la sesión.

- Sesión 5. Campo de problemas 3.

Se comentarán los apartados del problema 6 planteados para resolver en casa, esperando que haya cierta discrepancia de resultados, lo que nos llevará a la necesidad de expresar de manera exacta el resultado de la derivada en un punto. Se realizarán en clase los apartados c), d) y e), donde esperemos que los alumnos reconozcan el procedimiento de cálculo planteado en el apartado d) y se den cuenta que el cálculo de la derivada en un punto es calcular el límite de la tasa de variación media en un entorno del punto que tiende a ser cero. Se plantearán ejercicios de cálculo de la función derivada en un punto para que los alumnos cojan soltura con la técnica, aprovechando las funciones de los problemas 2, 3 y 4.

- Sesión 6. Campo de problemas 4.

Se realizará el problema 7 en clase, repasando el proceso de cálculo del apartado c) y prestando especial atención a la resolución del apartado d), en el que es de esperar que los alumnos tengan dificultades; eso nos conducirá a la institucionalización de la función derivada. Se planteará a los alumnos que calculen en casa la función derivada de funciones simples como una función constante, una función lineal y una ecuación de segundo grado.

- Sesión 7. Campo de problemas 4.

Se revisarán los ejercicios propuestos para casa, destacando la utilidad de calcular la función derivada para conocer rápidamente la derivada en un punto cualquiera. Se les indicará así mismo cómo trabajar la función derivada de una función polinómica, exclusivamente en términos de sumandos y sustraendos. Se trabajará la derivación inmediata de funciones polinómicas básicas, aprovechando los conocimientos adquiridos hasta la fecha. Se revisarán los apartados de los problemas iniciales relativos al cálculo de la derivada, comparando los resultados obtenidos con los iniciales y notando la facilidad de cálculo que comporta conocer las derivadas inmediatas.

- Sesión 8. Campo de problemas 5.

Para reforzar el apartado conceptual de la función derivada, en esta sesión se trabajará la relación gráfica entre función y función derivada, que permitirá a los alumnos dotar de más sentido a las funciones derivada elementales que conocen. Se trabajarán aspectos como cualitativos como la forma general, la existencia o la falta de simetría, el valor positivo-negativo de la derivada en función de si la tangente en dicho punto tiene pendiente positiva-negativa, el valor nulo de la derivada cuando la tangente es paralela al eje de abscisas (que coincide con un máximo o mínimo), etc.

- Sesión 9. Sesión de repaso.

Se hará un repaso de lo planteado en las 8 sesiones anteriores, recordando los sentidos físicos y geométricos de la derivada así como la definición formal de derivada en un punto y de función derivada, las derivadas de funciones polinómicas sencillas y la relación gráfica entre función y función derivada.

- Sesión 10. Prueba de evaluación.

Se hará la prueba de evaluación planteada en el apartado IX del presente documento.

- Sesión 11. Revisión de la prueba de evaluación.

Se resolverá la prueba de evaluación planteada que servirá para reforzar aquellos aspectos que se detecte no hayan sido bien asimilados por los alumnos.

IX. EVALUACIÓN

IX.1 Prueba escrita de evaluación.

La prueba constará de cinco preguntas que abarquen todo lo planteado en la presente secuencia didáctica:

Actividad 1.

El espacio, en m., recorrido por un móvil viene expresado por la función $s(t) = 4t^2 - t$, t en s.

a) Halla la velocidad media del móvil en los tres primeros segundos de recorrido y entre los segundos tres y cinco. (0,5 ptos.)

b) Obtén la velocidad instantánea en el segundo 1 y en el segundo 3. (1 pto.)

Actividad 2.

En un bar temático egipcio, te sirven un zumo en un recipiente en forma de pirámide invertida cortada cuyo volumen viene dado por la función:

$$V(h) = \frac{\left(6 + \frac{h}{2}\right)^2 + 36}{2} h \,; h \text{ en } cm, V \text{ en } cm^3.$$

Donde h es la altura del vaso; la mides y es igual a 12cm.

a) Calcula la variación media de volumen al beber todo el zumo cuando el vaso está lleno. (0,25 ptos.).

b) Calcula la variación de volumen al beber el primer centímetro y el último (0,5 ptos.).

c) Calcula la variación de volumen cuando quedan exactamente 6cm para acabar el zumo (0,75 ptos.).

Actividad 3.

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = 4x^3 + x^2 - 7x$ en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = 1$. (1 ptos.)

¿En qué punto cortan estas recta al eje X?. (0,5 ptos.)

Actividad 4.

Usando la definición formal de la derivada, calcula la función derivada de las siguientes funciones:

$a)\ f(x) = \sqrt{x}\ (1{,}5\ ptos.)$

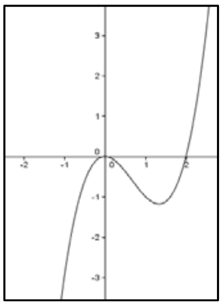
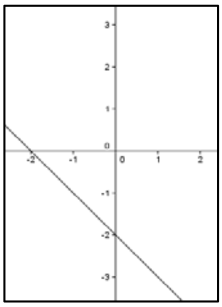
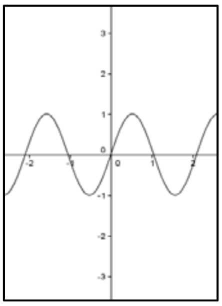
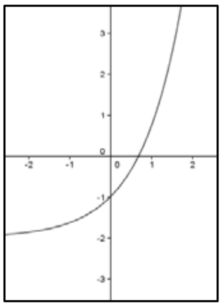
$b)\ g(x) = \dfrac{1}{x^2}\ (1{,}5\ ptos.)$

c) En base a la función derivada obtenida, calcula: $f'(4)\ y\ g'(3)$. (0,5 ptos.)

Actividad 5.

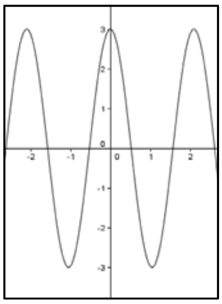
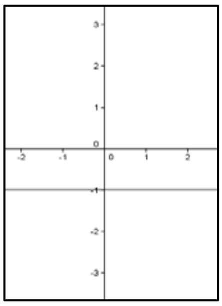
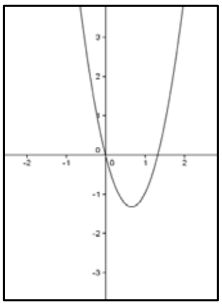
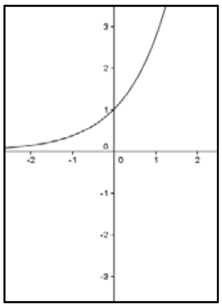
Relaciona cada función con su función derivada. Justifica tu elección indicando aspectos como el crecimiento-decrecimiento, los máximos y mínimos relativos, el comportamiento global de la función, etc. (2 ptos.)

Funciones

f(x) g(x) h(x) i(x)

Funciones derivadas

f’(x) g’(x) h’(x) i’(x)

IX.2 Aspectos del conocimiento evaluados con la prueba de evaluación.

Actividad 1.

Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y la tasa de variación instantánea en un punto e interpretarlas como velocidad media y como velocidad instantánea.

Actividad 2.

Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo y la tasa de variación instantánea en un punto, en funciones que no dependan del tiempo, e interpretarlas como variación media y como variación instantánea.

Actividad 3.

Determinar la derivada de una función en un punto e interpretarla como la pendiente de la tangente a una curva en un punto y calcular su ecuación.

Actividad 4.

Conocimiento de la definición formal de la derivada y manejo de ella para calcular la expresión de la función derivada.

Actividad 5.

Comprensión del sentido geométrico de la derivada y de la relación gráfica existente entre una función y su función derivada.

IX.3 Respuestas esperadas por los alumnos.

Actividad 1.

Las respuestas correctas son:

$$a.1)\ Vm[0,3] = TVM[0;3] = \frac{s(3)-s(0)}{3-0} = \frac{4.3^2-3}{3} = \frac{33}{3} = 11\ m/s$$

$$a.2)\ Vm[3,5] = TVM[3;5] = \frac{s(5)-s(3)}{5-3} = \frac{(4.5^2-5)-(4.3^2-3)}{2} = \frac{62}{2} = 31\ m/s$$

$$b.1)\ Vi\ [1] = TVI[1] = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\,.\,(1+h)^2-(1+h)-4+1}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} 4h+7 = 7\ m/s$$

$$b.2)\ Vi\ [3] = TVI[3] = \lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{4\,.\,(3+h)^2-(3+h)-(4.3^2-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{36+24h+4h^2-3-h-33}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(24+4h-1)}{h} = \lim_{h\to 0} 23+4h = 23\ m/s$$

La segunda opción también puede ser resuelta como:

$b.1)\ Vi\ [1] = f'(1) = 8t-1 = 8-1 = 7\ m/s$

b.2) $Vi\ [3] = f'(3) = 8t-1 = 24-1 = 23\ m/s$

Es de esperar que los alumnos resuelvan correctamente esta actividad ya que se trata de dos preguntas básicas ampliamente trabajadas. En la pregunta b) puede que algunos alumnos cometan el error de usar la tasa de variación media en el intervalo [0,1] o en el intervalo [2,4].

Actividad 2.

Las respuestas correctas son:

$$a)\ Vm[12;0] = TVM[12;0] = \frac{V(0)-V(12)}{0-12} = \frac{-\frac{\left(6+\frac{12}{2}\right)^2+36}{2}12}{-12} = 90\ cm^3/cm$$

$$b.1)\ Vm[12;11] = TVM[12;11] = \frac{V(11)-V(12)}{11-12} =$$

$$= \frac{\frac{\left(6+\frac{11}{2}\right)^2+36}{2}11-\frac{\left(6+\frac{12}{2}\right)^2+36}{2}12}{-1} = \frac{925{,}375-1080}{-1} = 154{,}625\ cm^3/cm$$

$$b.2)\ Vm[1;0] = TVM[1;0] = \frac{V(0)-V(1)}{0-1} = \frac{-\frac{\left(6+\frac{1}{2}\right)^2+36}{2}1}{-1} = 39{,}125\ cm^3/cm$$

$$c)\ V(h) = \frac{h^3}{8}+3h^2+36h \rightarrow V'(h) = \frac{3h^2}{8}+6h+36$$

$$V'(6) = \frac{3\,.\,6^2}{8}+6\,.\,6+36 = 85{,}5\ cm^3/cm$$

Los dos primeros apartados no revisten mayor dificultad que la utilización de una función que no depende del tiempo, lo que puede conllevar dificultades a los alumnos que no hayan interiorizado bien el trabajar con estas funciones ya que son menos intuitivas.

El último apartado requiere calcular la derivada, es de esperar que desarrollen la expresión hasta obtener una función polinómica básica que saben derivar. Es posible que alguno utilice la definición formal, lo que conlleva un trabajo laborioso que puede acarrear errores de cálculo.

Actividad 3.

Las respuestas correctas son:

$$a)\ f'(x) = 12x^2+2x-7\ \rightarrow f'(0) = -7$$

La pendiente de la recta tangente es -7 y en el punto (0,0) la recta coincide con la función, así:

$y - yo = m(x - xo) \rightarrow y - 0 = -7(x - 0) \rightarrow y = -7x$

Para saber el punto de corte con el eje X, basta resolver un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$y = -7x$

$y = 0$

Que da como resultado el punto (0,0).

$b)\, f'(x) = 12x^2 + 2x - 7 \ \rightarrow f'(1) = 12 + 2 - 7 = 7$

La pendiente de la recta tangente es 7 y en el punto (1,-2) la recta coincide con la función, así

$y - yo = m(x - xo) \rightarrow y - (-2) = 7(x - 1) \rightarrow y = 7x - 7 - 2 = 7x - 9$

Para saber el punto de corte con el eje X, basta resolver un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$y = 7x - 9$

$y = 0$

Que da como resultado el punto ($\frac{9}{7}, 0$).

Los alumnos pueden tener errores al calcular la ecuación de la recta si no reconocen el punto de tangencia como punto de la recta que cumple la ecuación de la función y/o si han olvidado la expresión para calcular la recta.

Para las intersecciones, es posible que algunos alumnos resuelvan el problema gráficamente, lo que será valorado del mismo modo que la resolución analítica.

Actividad 4.

Las respuestas correctas son:

$$a) f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right).\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)} = \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$b)\ g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2}-\frac{1}{x^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{x^2-(x+h)^2}{x^2(x+h)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2-(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{x^2-x^2-2xh-h^2}{hx^2(x+h)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-2x-h}{x^2(x+h)^2} = \frac{-2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$$

$$c)\ f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}\ \ ;\ \ g'(3) = -\frac{2}{3^3} = -\frac{2}{27}$$

Es de esperar que recuerden la expresión analítica de la derivada y que sustituyan correctamente la expresión de la función; así mismo, es posible que cometan algún error de cálculo, especialmente al realizar el límite. Se valorará el procedimiento aunque el resulta final no sea el correcto.

El último apartado no reviste dificultad siempre que se haya encontrado la expresión correcta.

Actividad 5.

Las respuestas correctas son:

$f(x) \to h'(x)\ ;\ g(x) \to g'(x)\ ;\ h(x) \to f'(x)\ ;\ i(x) \to i'(x)$

Creo que los estudiantes relacionaran correctamente cada función con su función derivada. Con respecto a los razonamientos se espera que establezcan relaciones entre el crecimiento-decrecimiento de la función y los valores positivos positivos-negativos de la derivada, entre los máximos-mínimos relativos y los puntos en que la derivada es cero, etc.

IX.4 Criterios de evaluación.

Actividad 1.

a) Utilización del algoritmo de la TVM para calcular la velocidad media (0,25 ptos.).

Resultado correcto en cada uno de los intervalos sin errores de cálculo (0,125 ptos.).

b) Utilización de la definición formal de la derivada de la función en un punto o cálculo directo de la función de la derivada (0,5 ptos.).

Resultado correcto en cada instante sin errores de cálculo (0,25 ptos.).

Actividad 2.

a) Utilización del algoritmo de la TVM para calcular la velocidad media (0,125 ptos.).

Resultado correcto sin errores de cálculo (0,125 ptos.).

b) Utilización del algoritmo de la TVM para calcular la velocidad media (0,125 ptos.).

Resultado correcto en cada uno de los intervalos sin errores de cálculo (0,125 ptos.).

c) Cálculo de la función derivada mediante cualquier método (0,5 ptos.).

Resultado correcto en el instante sin errores de cálculo (0,25 ptos.).

Actividad 3.

a) Calcular la función derivada de la función (0,25 ptos.).

Relacionar la derivada con la pendiente de la tangente y obtener su ecuación en cada caso (0,25 ptos.).

Resultados correctos en cada caso sin errores de cálculo (0,125 ptos.).

b) Encontrar correctamente el punto de intersección en cada caso pedido (0,25 ptos.).

Actividad 4.

Conocer y aplicar la definición formal de la derivada en cada caso (0,25 ptos.).

Obtener la expresión correcta de la función derivada en cada caso (0,5 ptos.).

Corrección formal del procedimiento en cada caso (0,75 ptos.). Con errores de cálculo 0,5 ptos; con un error conceptual 0,25 ptos; con varios errores 0 ptos.

Obtener el valor correcto de la derivada en cada caso (0,25 ptos.). Si la expresión utilizada es incorrecta pero el resulta es coherente, se otorgarán 0,125 ptos.

Actividad 5.

Cada relación correctamente justificada valdrá 0,5 ptos.

Si la justificación es pobre, poco argumentada, aunque contiene algún fundamento teórico 0,25 ptos.

Relación incorrecta, correcta sin justificación y correcta con justificación claramente errónea 0 ptos.

X. BIBLIOGRAFÍA.

Para la realización de la presente programación se ha consultado la siguiente legislación:

- LEY ORGÁNICA 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.
- ORDEN de 1 de julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón.
- REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.

Los libros, artículos y páginas web consultados han sido:

- Antibi, A. (2005). *La constante macabra*. Madrid: El rompecabezas.
- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática (un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 97–140). México: Grupo Editorial Iberoamérica. Fecha de consulta: mayo de 2013. [http://funes.uniandes.edu.co/676/1/Artigueetal195.pdf].
- Azcárate, C. (1992). *La velocidad: introducción al concepto de derivada*. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- Azcárate, C., et al. (D.L. 1996). *Cálculo diferencial e integral*. Madrid: Síntesis.
- Colera, J. et al. (2008). *Matemáticas, 1º Bachillerato*. Madrid: Anaya.
- Díaz, J., Font, V., Pino-Fan, L.R. (2011). *Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada*. Fecha de consulta: marzo 2013. [http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4423/4025].
- Grupo Cero (1977). *Matemáticas de Bachillerato*. Valencia: Roberto Guillén, D.L.
- Harel, G. et al. (2006). *Advanced mathematical thinking*. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), Handbook of research on the psychology of mathematics

education: past, present and future (pp.147–172). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

- Sánchez-Matamoros, G., García, M., Llinares, S. (2008). *La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática*. Revista latinoamericana de investigación en materia educativa, vol.11, n.2, pp. 267-296. ISSN 1665-2436. Fecha de consulta: mayo de 2013. [http://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S166543620080002000005&script=sci_arttext].