Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas

Especialidad: Matemáticas

Trabajo Fin de Máster

CÁLCULO DE PROBABILIDADES. MATEMÁTICAS I. 1º BACHILLERATO

Zaragoza, Junio de 2013

Alumno: José Raúl Lamana Gonzalo

Tutor: José María Muñoz Escolano

ÍNDICE

A. SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

1. Nombra el objeto matemático a enseñar.

Cálculo de Probabilidades.

2. Indica el curso y asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

1º de Bachillerato modalidad de Ciencias y Tecnología, Matemáticas I.

El objeto queda reflejado en el currículo aragonés de bachillerato entre los objetos de Estadística descriptiva y las Distribuciones de probabilidad. (BOA 105, 17/7/2008, pág. 14075):

> *"Variables aleatorias. Probabilidad compuesta, condicionada, total y a priori. Teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes."*

Además, aparece en los criterios de evaluación en el punto 13. (BOA 105, 17/7/2008, pág. 14077):

> *"13. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y analizar situaciones cotidianas descritas por una variable aleatoria de tipo binomial.*
>
> *Con este criterio se pretende evaluar la capacidad del alumnado para analizar una situación con varias alternativas y decidir la opción más conveniente. Ésta se manifiesta determinando la probabilidad de sucesos y expresando con un lenguaje adecuado, en términos de probabilidades, las conclusiones obtenidas. Se trata de observar si son capaces de aplicar estrategias diversas para calcular probabilidades, aplicar las fórmulas cuando sea necesario e interpretar el significado de los resultados para tomar decisiones."*

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

Problemas:

CP1 Problemas de cálculo de probabilidad de un suceso mediante la descripción del espacio muestral, el reparto de probabilidad entre sucesos equiprobables o la regla de Laplace.

CP2 Problemas de probabilidad condicionada: resolución mediante la regla de Laplace, regla del producto, diagramas de árbol o tablas de contingencia.

CP3 Probabilidad a priori: problemas de aplicación del Teorema de la probabilidad total.

CP4 Probabilidad a posteriori: problemas de aplicación del Teorema de Bayes.

Técnicas:

T1 Descripción del espacio muestral.

T2 Operaciones con sucesos.

T3 Manejo de las propiedades de la probabilidad.

T4 Aplicación de la regla de Laplace.

T5 Uso de la regla del producto.

T6 Elaboración y resolución mediante tablas de contingencia

T7 Elaboración, interpretación y resolución mediante diagramas de árbol.

T8 Aplicación del Teorema de la probabilidad total

T9 Aplicación del Teorema de Bayes.

Tecnologías: Algunas técnicas serán justificadas de manera natural y otras se justifican mediante técnicas anteriores. Principalmente la presentación de las técnicas se hará cuando sea necesario su uso en la resolución de problemas, así la justificación de las mismas vendrá dada con anterioridad a su presentación, como una herramienta para resolver problemas.

En cuanto a la definición de probabilidad se hará a partir del límite de las frecuencias relativas, procurando ser demostrado de modo experimental mediante simulaciones.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

En los libros de texto consultados, y en particular de las editoriales Santillana y Bruño, la introducción del tema se hace generalmente desde la toma de decisiones que posibilita el cálculo de probabilidades, así ante una situación con varias posibilidades se plantea un problema de toma de decisión, en el que la más correcta se tomará desde el punto de vista del cálculo de probabilidades.

Sin embargo en otros textos revisados no hay una introducción propiamente dicha para el objeto, aparece como una ampliación de los conceptos vistos en cursos anteriores.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

Problemas:

- Problemas de probabilidad compuesta.
- Problemas de probabilidad condicionada.
- Problemas de probabilidad a priori.
- Problemas de probabilidad a posteriori.

Técnicas:

- Descripción del espacio muestral. Uso de diagramas de árbol para describir el espacio muestral.
- Operaciones con sucesos.
- Manejo de las propiedades de la probabilidad.
- Tablas de contingencia.
- Regla del producto.
- Teorema de la probabilidad total.
- Teorema de Bayes.

Tecnologías: En este caso no se justifica ninguna técnica. También sorprende que se haga una definición de probabilidad de modo teórico, aunque incompleta, para posteriormente a la implementación de la Regla de Laplace, añadir la definición frecuentista de la probabilidad a partir de la Ley de los grandes números.

Por otro lado, para los docentes, es habitual que el objeto sea suprimido del temario por falta de tiempo (Lonjedo, 2008), o por considerar que hay cosas más importantes sobre los que preparar a sus alumnos para las evaluaciones finales, sin ser conscientes de sus propias limitaciones en el tema (Estrada y Díaz, 2007). Esto puede hacer que haya alumnos que no haya visto la probabilidad en su etapa de secundaria.

Es posible que esta sea la causa de la mala formación del profesorado en probabilidad (Estrada y Díaz, 2007), que repercute de nuevo en los alumnos.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

Uno de los efectos principales es la dificultad de interpretar la probabilidad como límite de las frecuencias en muestras grandes (Serrano [et al.], 1996), generando problemas cuando un suceso experimental con una gran probabilidad de suceder no ocurre.

El enfoque demasiado formal de la probabilidad condicionada puede generar que sea difícil de entender. Al margen de esto se añaden otros nuevos conceptos propios de la teoría de conjuntos y representaciones en diagramas de Venn. Las técnicas a base de fórmulas dan la sensación de ser recetas que no facilitan que el alumno tenga una idea intuitiva del concepto (Gómez, 2000). Así es común que haya dificultades a la hora de distinguir la independencia de sucesos de los sucesos mutuamente excluyentes, o que dos sucesos que ocurren a la vez puedan ser independientes.

En concreto, a la hora de afrontar problemas de probabilidad condicionada, se perciben otras dificultades (Batanero [et al.], 2009), como la dificultad en la percepción de independencia, no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos. Es decir, o no se comprende la estructura del experimento compuesto o se suponen los sucesivos experimentos independientes, habiendo un conflicto consistente en atribuir una propiedad (independencia) que no tienen los experimentos.

C. SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

1. ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

El objeto está presente en la educación secundaria, en el currículo aragonés de la ESO (BOA nº 65 del 1/6/2007):

Tercer curso:

"—Experiencias aleatorias. Sucesos y espacio muestral. Imprevisibilidad y regularidad. Frecuencia relativa y probabilidad de un suceso: estabilidad de las frecuencias. Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con el azar.

—Cálculo de probabilidades mediante la ley de Laplace. Utilización de distintas técnicas de recuento: tablas, diagramas de árbol, etc. Probabilidad de sucesos compatibles, incompatibles y contrarios. Formulación y comprobación de conjeturas sobre el comportamiento de fenómenos aleatorios sencillos.

—Cálculo de la probabilidad mediante la simulación o experimentación.

—Utilización de la probabilidad para tomar decisiones fundamentadas en diferentes contextos. Reconocimiento y valoración de las matemáticas para interpretar, describir y predecir situaciones inciertas. "

Cuarto curso opción B:

"—Experimentos aleatorios y sucesos. Experiencias aleatorias simples y compuestas. Asignación de probabilidades en experiencias simples mediante recuento: ley de Laplace. Probabilidad del suceso contrario. Utilización de tablas de contingencia y diagramas de árbol para el recuento de casos y la asignación de probabilidades en experiencias compuestas. Probabilidad condicionada. Probabilidad total. Probabilidad estadística. Simulación.

—Utilización del vocabulario adecuado para describir y cuantificar situaciones relacionadas con estudios estadísticos de poblaciones y con el azar.

—Utilización de la calculadora científica para obtener parámetros estadísticos

correspondientes a distribuciones de datos agrupados. Empleo de la probabilidad para la interpretación y toma consciente de decisiones en situaciones de la vida corriente o los juegos de azar. "

Aun así, como se ha comentado en el apartado anterior, es probable que haya alumnos que lleguen al primer curso de bachillerato sin haber visto el objeto. Por este motivo el objeto será impartido por completo desde sus conceptos iniciales, con las restricciones que conlleva el calendario.

Los conceptos iniciales necesarios son:

- Operaciones con números racionales y reales.
- Redondeos.
- Porcentajes.
- Operaciones con conjuntos.
- Combinatoria. Aunque no se pretende hacer uno habitual de esta herramienta puede ser necesario su uso en algunos casos.
- Estadística descriptiva. En particular el concepto de frecuencia, así como sus representaciones gráficas.

El uso de redondeos no sería estrictamente necesario, pero a la hora de trabajar se permitirá el cálculo mediante números decimales y los redondeos al segundo decimal.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Durante la educación secundaria los alumnos hacen uso de las operaciones con números racionales y reales, así como de los redondeos y los porcentajes. Las operaciones con conjuntos son vistas en secundaria principalmente mediante intervalos en la recta real. La combinatoria puede ser vista en cuarto curso de ESO y en cualquier caso está en el currículo de Matemáticas I en bachillerato, además suele ser el tema anterior a la probabilidad. Por último la estadística descriptiva aparece desde el segundo curso de la ESO hasta el cuarto.

3. ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Como actividad inicial se realizará una evaluación previa de conocimientos, y en caso de que hubiera una necesidad de afianzar estos conceptos se realizaría una sesión de repaso (Sección H, Actividad 0, pág. 24).

D. SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

A partir del estudio de los juegos de azar, determinando primero la aleatoriedad del suceso, el estudio de las frecuencias y posteriormente el concepto de probabilidad.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

El concepto de probabilidad viene sugerido por el fenómeno de los juegos de azar (Fernández, 2007), cuya antigüedad está demostrada en la antigua Grecia y Egipto, y como la necesidad de comprender y analizar dichos juegos, como soporte necesario para tomar decisiones.

Desde la antigüedad hasta el Renacimiento se juega sin interrupción a los juegos de azar, pero los primeros acercamientos serios a lo que más tarde se llamaría la Probabilidad, son debidos a grandes científicos y matemáticos italianos como: N. Tartaglia, G.F. Peverone, Galileo y G. Cardano.

Con la aparición de la imprenta emergen los primeros tratados sobre los diferentes juegos de moda. Se asigna a Cardano el primer tratado relacionado con el mundo del azar: *Liber de Ludo Alae*, cuyo objetivo es calcular las posibilidades del lanzamiento de varios dados. En sus resoluciones Cardano esboza una definición clásica de la probabilidad y de forma rudimentaria lo que ahora se conoce como la ley de los grandes números al afirmar que si un suceso tiene probabilidad p, al hacer un número grande de repeticiones n, lo más razonable es aportar a que ocurrirá alrededor de np veces.

El libro de Cardano si bien fue escrito alrededor de 1564 no fue impreso hasta el año 1663, esto explica, que las ideas que están contenidas en el tratado permanecieran, en buena parte, desconocidas para la mayoría de los estudiosos hasta bastantes años después de su muerte.

También Galileo escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624, *Sopre le Scoperte dei dadi* (Sobre los descubrimientos del dado), su mayor contribución a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos:

los errores sistemáticos, debidos a los métodos y las herramientas de medida; y los errores aleatorios, que varían impredeciblemente de una medida a otra. Esta clasificación sigue en vigor actualmente.

El impulso fundamental en el desarrollo de la teoría de la probabilidad se dio en Francia. En la sociedad francesa del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes, su complejidad y las elevadas apuestas hicieron sentir la necesidad de calcular las probabilidades de los juegos de manera racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) las bases sobre las que posteriormente se asienta la moderna teoría de la probabilidad.

En el año 1655, el holandés Christian Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal y Fermat. El poder compartir de primera mano las inquietudes científicas de esos grandes pensadores fue crucial para su devenir intelectual, tanto es así que a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades.

En 1656, Huygens envió su manuscrito, escrito en holandés: *Van Rekeningh in Spelan van Geluk* (el cálculo en los juegos de azar), a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La confirmación de su trabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le envió dos cuestiones, que junto con otros dos problemas diseñados por él mismo, fueron añadidos al final del libro y durante unos sesenta años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la doctrina del azar; cabe citar que A. de Moivre, Jacques Bernoulli, B. Spinoza y G. Leibniz, entre otros, publicaron soluciones de algunos de estos problemas.

Durante muchos años, se consideró al científico holandés como el primer teórico de la teoría del azar. Sin embargo, hoy sabemos que ese honor le corresponde por igual a la tríada: Pascal, Fermat y Huygens, los cuales sentaron las bases modernas de la teoría de la probabilidad, bases que fueron desarrolladas a lo largo del siglo XVIII.

A partir de entonces los juegos de azar dejaron de ser meros pasatiempos para convertirse en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento.

Uno de estos genios fue Jacques Bernouilli (1654-1705) quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, cuyas soluciones ofreció después. Bernouilli escribió, además, una obra de una enorme trascendencia, *Ars Conjectandi*, que no fue publicada hasta el año 1713. Este tratado contiene importantes contribuciones a todos los dominios de la teoría de las probabilidades como el célebre teorema de Bernouilli o ley de los grandes números.

Con el insigne matemático francés P. S. de Laplace (1749-1827) la teoría de la probabilidad adquiere rango de disciplina científica, cobrando un impulso que ha ido acrecentándose con el paso del tiempo. Con 63 años, Laplace publica, en 1812, un siglo después del escrito de Bernouilli, un gran tratado, titulado *Théorie Analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades).

A finales del siglo XIX el mundo de la probabilidad y del azar estaba muy abonado y gracias a personajes como E. Borel (1871- 1956), K. Pearson (1857-1936), H. Poincaré (1854-1912), F. Galton (1822-1911), A. Markov (1856-1922), P. Tchebycheff (1821-1894) y A. Kolmogorov (1903-1987), que la definió de forma axiomática y estableció las bases de la moderna teoría de la probabilidad.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

La apuesta interrumpida:

Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos.

¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

El problema de las tres puertas:

En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe *donde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida* ***¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?***

4. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Estos problemas se plantearán a los alumnos de modo que intenten solucionarlos, para posteriormente hacer una simulación y su solución formal. Este proceso se detalla en la secuenciación de actividades (Sección H, pág. 23).

E. SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS

1. Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

CP1: Problemas de cálculo de probabilidad de un suceso mediante la descripción del espacio muestral, el reparto de probabilidad entre sucesos equiprobables o la regla de Laplace.

> *Una urna contiene dos bolas blancas, una azul y tres rojas. Construye el espacio muestral del experimento "extraer una bola de la urna" y calcula:*
>
> *a) Probabilidad de sacar bola roja.*
>
> *b) Probabilidad de sacar bola blanca.*
>
> *c) Probabilidad de sacar bola azul.*

CP2: Problemas de probabilidad condicionada: resolución mediante la regla de Laplace, regla del producto, diagramas de árbol o tablas de contingencia.

> *En una clase hay 11 chicos y 14 chicas. De los estudiantes, 7 chicos y 10 chicas utilizan habitualmente Internet. Si escogemos un estudiante al azar, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.*
>
> *a) Ser chica, sabiendo que utiliza Internet.*
>
> *b) No utilizar Internet, sabiendo que es chico.*

CP3: Probabilidad a priori: problemas de aplicación del Teorema de la probabilidad total.

> *Un estudio médico ha analizado la tasa de mortalidad por cáncer de pulmón para los fumadores (0,04) y para los no fumadores (0,001), y se conoce también cual es la probabilidad de que una persona tomada al azar sea fumadora (0,3) o no lo sea (0,7). ¿Es posible conocer la probabilidad total de que una persona tomada al azar fallezca de cáncer de pulmón?*

CP4: Probabilidad a posteriori: problemas de aplicación del Teorema de Bayes.

> *Se dispone de dos urnas idénticas. En el interior de una de ellas hay billetes auténticos (5 billetes de 10€ y 5 de 50€). En el interior de la otra hay billetes falsos (8 de 10€ y 2 de 50€). Se desconoce en cuál de las dos están los falsos y en cuál los auténticos. Se elige una urna al azar y extraemos un billete que resulta ser de 50€ ¿Cuál es la probabilidad de que sea falso?*

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

En CP2 se usará la regla de Laplace en problemas sencillos en los que sea posible el cálculo de la probabilidad mediante la descripción del espacio muestral. En general será el alumno el que elija la técnica que se adecue al problema y le resulte más fácil.

Para la probabilidad a priori (CP3), será posible resolverlos mediante diagramas de árbol o la aplicación directa de la fórmula de la probabilidad total.

Para solucionar los problemas de probabilidad a posteriori (CP4) mediante diagramas de árbol se modificara la técnica introduciendo el proceso de renormalización (Gómez, 2000), consistente en tachar del árbol los sucesos no válidos para así recalcular la probabilidad dividiendo los casos válidos por la suma total de sus probabilidades. También será posible resolver estos problemas mediante la aplicación directa de la fórmula del teorema de Bayes.

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Los problemas se plantearan a los alumnos para que intenten solucionarlos, bien en el aula o como tarea para casa. Posteriormente serán resueltos en clase por el profesor.

Esta metodología esta descrita en detalle en la secuenciación de actividades (Sección H, pág. 23).

F. SOBRE LAS TÉCNICAS

1. Diseña los distintos tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

T1 - Descripción del espacio muestral. Ejercicios:

Construye los espacios muestrales con los sucesos elementales de los siguientes experimentos aleatorios:

a) *Una tirada de un dado de seis caras.*

b) *La tirada de dos dados de seis caras.*

c) *Una tirada de una moneda.*

d) *La tirada de tres monedas.*

T2 - Operaciones con sucesos. Ejercicios:

En una caja tenemos carteles con las siguientes letras.

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u

a) En el experimento aleatorio consistente en extraer uno de los carteles, describe los sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

V=Vocal

C=Consonante

A=Letra alta como b o f

B=Letra baja como g

M=Letra mediana como a o c

b) Enumera los sucesos elementales que tiene cada uno de estos sucesos.

$A \cup B$ $\quad$ $M \cap A$ $\quad$ $M \cup V$ $\quad$ $\overline{A}$

$\overline{C} \cup A \cup B$ $\quad$ $M \cap V$ $\quad$ $\overline{A \cap C}$ $\quad$ $C - A$

c) Comprueba las propiedades.

$\overline{C \cap M} = \overline{C} \cup \overline{M}$ $\qquad\qquad$ $\overline{C \cup M} = \overline{C} \cap \overline{M}$

T3 - Manejo de las propiedades de la probabilidad. Ejercicios:

En un experimento aleatorio sabemos que:

P(A)=0,6 P(B)=0,5 P(A∩B)=0,2

Calcula.

a) $P\ (\overline{A})$

b) $P\ (A \cup B)$

c) $P\ (\overline{A} \cup \overline{B})$

d) $P\ (A - B)$

e) $P\ (\overline{B} - A)$

El resto de técnicas serán ejercitadas en la resolución de problemas. Son las siguientes:

T4 - Aplicación de la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\textit{número de casos favorables}}{\textit{número de casos posibles}}$$

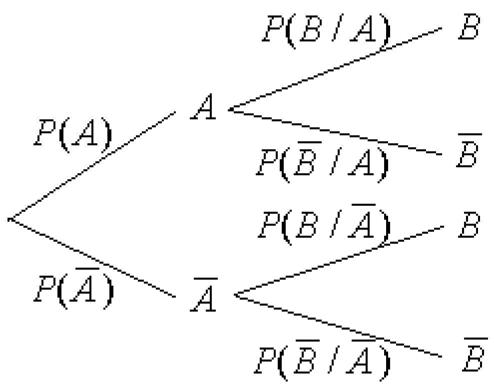
T5 - Uso de la regla del producto:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

T6 - Elaboración y resolución mediante tablas de contingencia:

	A	no A	total
B	a	b	a+b
no B	c	d	c+d
total	a+c	b+d	a+b+c+d

T7 - Elaboración, interpretación y resolución mediante diagramas de árbol:



T8 - Aplicación del Teorema de la probabilidad total:

Dada una partición del espacio muestral $E_1, E_2, ..., E_n$

$$P(A)=P(E_1)\cdot P(A/E_1)+P(E_2)\cdot P(A/E_2)+...+P(E_n)\cdot P(A/E_n)$$

T9 - Aplicación del Teorema de Bayes:

Dada una partición del espacio muestral $E_1, E_2, ..., E_n$

$$P(E_i/A)=\frac{P(E_i)\cdot P(A/E_i)}{P(E_1)\cdot P(A/E_1)+P(E_2)\cdot P(A/E_2)+...+P(E_n)\cdot P(A/E_n)}$$

2. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

En la siguiente tabla se relacionan las técnicas y los campos de problemas a partir de su denominación dada en el punto 3 del apartado A:

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	T9
CP1	X	X	X	X					
CP2	X	X	X	X	X	X	X		
CP3	X	X	X				X	X	
CP4	X	X	X				X		X

3. Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula.

Las técnicas serán introducidas a la hora de resolver problemas, una vez el alumno ha intentado encontrar la solución al problema, de este modo surgirá la necesidad de la nueva herramienta, que será presentada por el profesor. Este procedimiento se detalla en la secuenciación de actividades (Sección H, pág. 23).

G. SOBRE LAS TECNOLOGÍAS (JUSTIFICACIÓN DE LAS TÉCNICAS)

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

La descripción del espacio muestral se hace de manera intuitiva mediante conteo.

Con el espacio muestral y a partir de las propiedades de las operaciones con conjuntos, que son las mismas para los sucesos, se deducen las propiedades de la probabilidad.

La regla de Laplace se deduce de estas propiedades anteriores aplicadas a sucesos equiprobables.

La generalización de la definición de la probabilidad condicionada demuestra la regla del producto y el teorema de la probabilidad total a través de las propiedades de la probabilidad. A su vez este último sirve para probar el Teorema de Bayes.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Principalmente se justifican al resolver problemas por la necesidad de herramientas para la resolución. Será el profesor el que las presente y el que haga una justificación formal en caso de que sea necesario.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

Partiendo del primer problema razón de ser, se introducirán los conceptos de aleatoriedad, sucesos y espacio muestral. Las tres primeras técnicas: descripción del espacio muestral (T1), operaciones con sucesos (T2) y manejo de las propiedades de la probabilidad (T3) se presentaran sobre este caso práctico. La primera de ellas se justifica de manera intuitiva, las otras dos se justifican cada una en base a la anterior.

La definición de probabilidad se hará como límite de las frecuencias relativas y se justificará a través de simulaciones de experimentos aleatorios. Así mismo la descripción del espacio muestral es sucesos equiprobables servirá para justificar la regla de Laplace (T4).

A partir del segundo problema razón de ser, se introducirá el concepto de probabilidad condicionada, que servirá para justificar la regla del producto (T5) a través de su generalización y mediante el uso de la regla de Laplace.

Las tablas de contingencia (T6) se presentarán por el profesor como una herramienta útil en la resolución de problemas. Se indicará su elaboración e interpretación. Esta técnica se justifica de manera intuitiva y de manera sencilla a partir de la regla de Laplace o de la definición de probabilidad condicionada.

Tanto la aplicación del teorema de la probabilidad total (T8) como el de Bayes (T9), se introducirán a partir de sendos problemas, presentados a los alumnos para que intenten resolverlos, como una herramienta para obtener la solución, también pueden ser justificados mediante conceptos anteriores.

Los diagramas de árbol (T7) serán introducidos desde el principio como una representación del espacio muestral, pero serán usados para resolver problemas siempre que sea posible. Se pretende que sea la técnica principal para la resolución de problemas.

H. SOBRE LA SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

1. Indica la secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

En la siguiente tabla se muestra la secuencia de actividades, detallando el campo de problemas utilizado y las técnicas introducidas en cada sesión:

	Campo de problemas	Técnicas
Sesión 1 Actividad 0.		
Sesión 2 Actividad 1. Problema razón de ser.	CP1	T1, T2, T7
Sesión 3 Corrección actividad para casa 1. Actividad 2. Ley de los grandes números. Regla de Laplace	CP1	T3, T4
Sesión 4 Corrección actividad para casa 2. Actividad 3. Probabilidad condicionada.	CP2	T5, T7
Sesión 5 Actividad 4. Tablas de contingencia.	CP2	T6
Sesión 6 Corrección actividad para casa 3. Actividad 5. Teorema de la probabilidad total.	CP3	T7, T8
Sesión 7 Actividad 6. Teorema de Bayes.	CP4	T7, T9
Sesión 8 Actividad 7. Repaso y resolución de dudas.	CP1, CP2, CP3, CP4	
Sesión 9 Actividad de ampliación. Método de Montecarlo.		
Sesión 10 Actividad 8. Prueba de evaluación.		

Actividades previstas:

Actividad 0: Evaluación inicial.

Ejercicio 1: Se vende un artículo con una ganancia del 15% sobre el precio de costo. Si se ha comprado en 80 €. Halla el precio de venta.

Ejercicio 2: Cuál será el precio que hemos de marcar en un artículo cuya compra ha ascendido a 180 € para ganar al venderlo el 10%.

Ejercicio 3: Sea U = {1, 2, 3, 4, 5, . . . , 12} el conjunto universal. Consideremos los subconjuntos, A = {1, 3, 5, 7, 9, 11}, B = {2, 3, 5, 7, 11}, D = {2, 4, 8} y C = {2, 3, 6, 12}. Determina los conjuntos:

a) $A \cup B$	b) $A \cap C$	c) $(A \cup B) \cap \overline{C}$
d) $A - B$	e) $C - D$	f) $(B - D) \cup (D - B)$

Ejercicio 4: En un total de 250 personas encuestadas sobre su desayuno se obtuvieron las siguientes respuestas, 30 personas tomaban té con leche, 40 personas tomaban café con leche, 80 personas tomaban leche, 130 personas tomaban té o leche y 150 tomaban café o leche. a) ¿Cuántas personas tomaban té puro? b) ¿Cuántas personas tomaban leche pura? c) ¿Cuántas personas tomaban café puro? d) ¿Cuántas personas no tomaba ninguna de estas tres cosas al desayuno?

Ejercicio 5: Luisa dispone de 8 camisetas, 3 faldas, 4 pantalones y 5 pares de zapatillas. Si siempre va vestida con una camiseta, una falda o pantalón y un par de zapatillas, ¿de cuántas maneras diferentes puede ir vestida?

Ejercicio 6: Hemos alquilado un palco en el teatro con 6 asientos. ¿De cuántas formas podemos sentarnos mis padres, mi hermana y yo?

Ejercicio 7: Con 4 botes de pintura: amarilla, azul, roja y blanca, ¿cuántas mezclas de dos colores puedes realizar?

Ejercicio 8: Define frecuencia absoluta y relativa.

Actividad 1: Problema razón de ser.

Para iniciar el tema el profesor pregunta a los alumnos:

¿Qué entienden por probabilidad? ¿Para qué sirve la probabilidad?

Se pretende fomentar un pequeño debate en el que se introduzca el concepto de aleatoriedad, definiendo el experimento aleatorio y determinista. Además de justificar la utilidad de la probabilidad como medida de la incertidumbre y toma de decisiones.

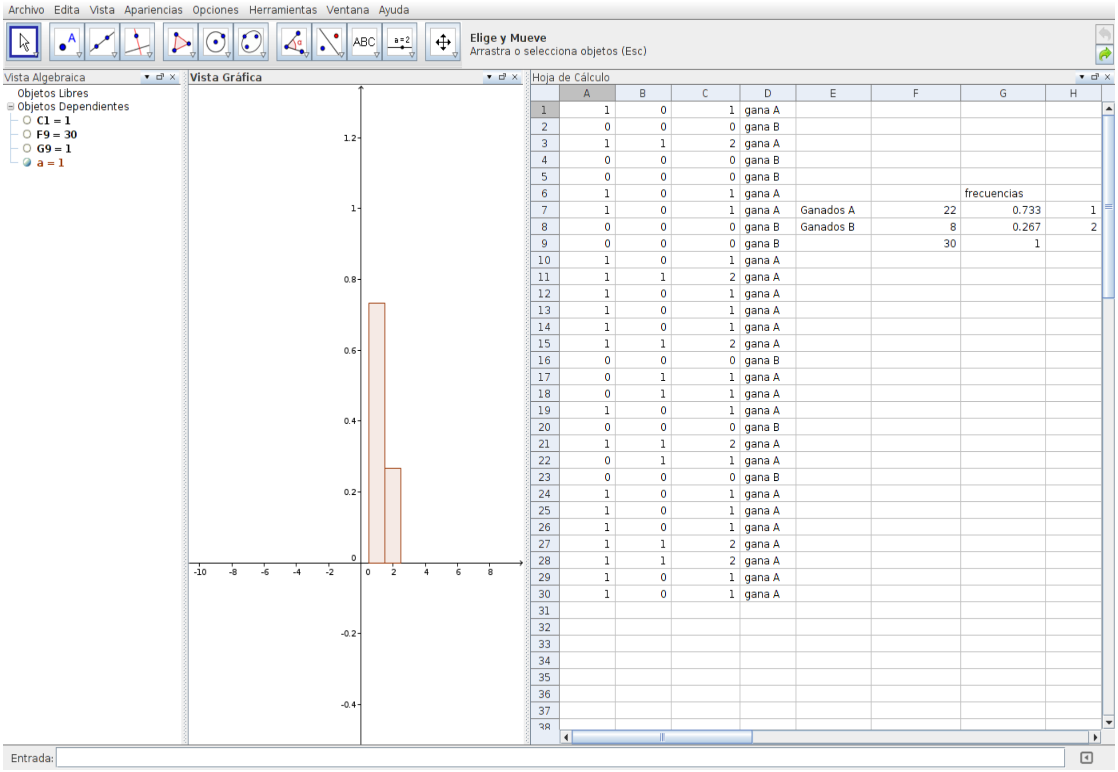
Como ejemplo de esa justificación a continuación se plantea el problema razón de ser:

Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos.

¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Las posibles respuestas erróneas esperadas son el reparto equitativo por no haber terminado el juego, el reparto en función del número de puntos, es decir 4/7 para A y 3/7 para B, el reparto en función de los puntos que faltan por ganar, es decir 2/3 para A y 1/3 para B, e incluso que A se quede con la apuesta pues va ganando.

Para introducir la probabilidad como límite de frecuencias se hace la siguiente simulación en Geogebra o Excel, la justificación para la introducción de la simulación será la de ver qué pasaría si continuase la partida.



En un principio se simula treinta veces la partida y se anotan las frecuencias de que gane cada jugador. Posteriormente se van añadiendo simulaciones hasta llegar a un número elevado en el que las frecuencias se ajustan a 3/4 de que gane A y 1/4 de que gane B.

Justificación matemática de la solución:

Para evitar la introducción de la regla del producto la justificación se hará de forma similar a la de Pascal en su carta a Fermat de 1654, para una apuesta de 64 monedas:

"...juegan una partida cuya suerte es que, si el primero la gana, gana todo el dinero que está en juego, a saber, 64 monedas; si el otro la gana, son dos partidas contra dos partidas, y por consiguiente, si quieren separarse, es preciso que retire cada uno lo que ha puesto, a saber, 32 monedas cada uno. Considerad, señor, que si gana el primero, le pertenecen 64; si pierde, le pertenecen 32. Ahora bien, si no quieren arriesgar esta partida y separarse sin jugarla, el primero debe decir: estoy seguro de tener 32 monedas, porque la pérdida misma me las da; pero para las otras 32, quizá las tendré yo, quizás las tendréis vos; el azar es igual repartamos, pues, estas 32 monedas, mitad por mitad, y me dais, además de éstos las 32 monedas que me corresponden con

seguridad. Tendrá, pues, 48 monedas y el otro 16. "

Es decir, analizado el diagrama de árbol se tiene que jugando una partida si A gana, se lleva el total de lo apostado, pero si pierde se llegaría a un empate, en el que ambos tienen las mismas opciones de ganar, por tanto el reparto debe ser de 3/4 para A y 1/4 para B.

Durante la actividad se introducirán los siguientes conceptos:

- Sucesos aleatorios.
- Introducción de espacio muestral de un suceso. Ejemplificando con este problema.
- Suceso elemental y suceso compuesto. Ejemplificando con este problema.
- Operaciones con sucesos.
- Sucesos incompatibles. Suceso seguro y suceso imposible. Ejemplificando con este problema mediante la unión e intersección de sucesos del lanzamiento de una moneda dos veces.
- Diagrama de árbol de sucesos.

Actividad para casa 1. Ejemplos de ejercicios:

- Ejercicios de descripción del espacio muestral.

Ejercicio 1: Construye los espacios muestrales con los sucesos elementales de los siguientes experimentos aleatorios:

a) Una tirada de un dado de seis caras.

b) La tirada de dos dados de seis caras.

c) Una tirada de una moneda.

d) La tirada de tres monedas.

Ejercicio 2: Consideramos el experimento aleatorio que consiste en lanzar un dado y anotar la puntuación obtenida.

a) Encuentra dos sucesos compatibles y dos sucesos incompatibles.

b) Escribe un suceso seguro y otro imposible.

Ejercicio 3: Construye el diagrama de árbol del experimento aleatorio que consiste en lanzar tres monedas. Calcula el espacio muestral asociado al experimento.

- Operaciones con sucesos.

Ejercicio 4: En una caja tenemos carteles con las siguientes letras.

a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, o, u

a) En el experimento aleatorio consistente en extraer uno de los carteles, describe los sucesos indicando los sucesos elementales que los componen.

V=Vocal

C=Consonante

A=Letra alta como b o f

B=Letra baja como g

M=Letra mediana como a o c

b) Enumera los sucesos elementales que tiene cada uno de estos sucesos.

$A \cup B \qquad M \cap A \qquad M \cup V \qquad \overline{A}$

$\overline{C} \cup A \cup B \qquad M \cap V \qquad \overline{A \cap C} \qquad C - A$

c) Comprueba las propiedades.

$\overline{C \cap M} = \overline{C} \cup \overline{M} \qquad \overline{C \cup M} = \overline{C} \cap \overline{M}$

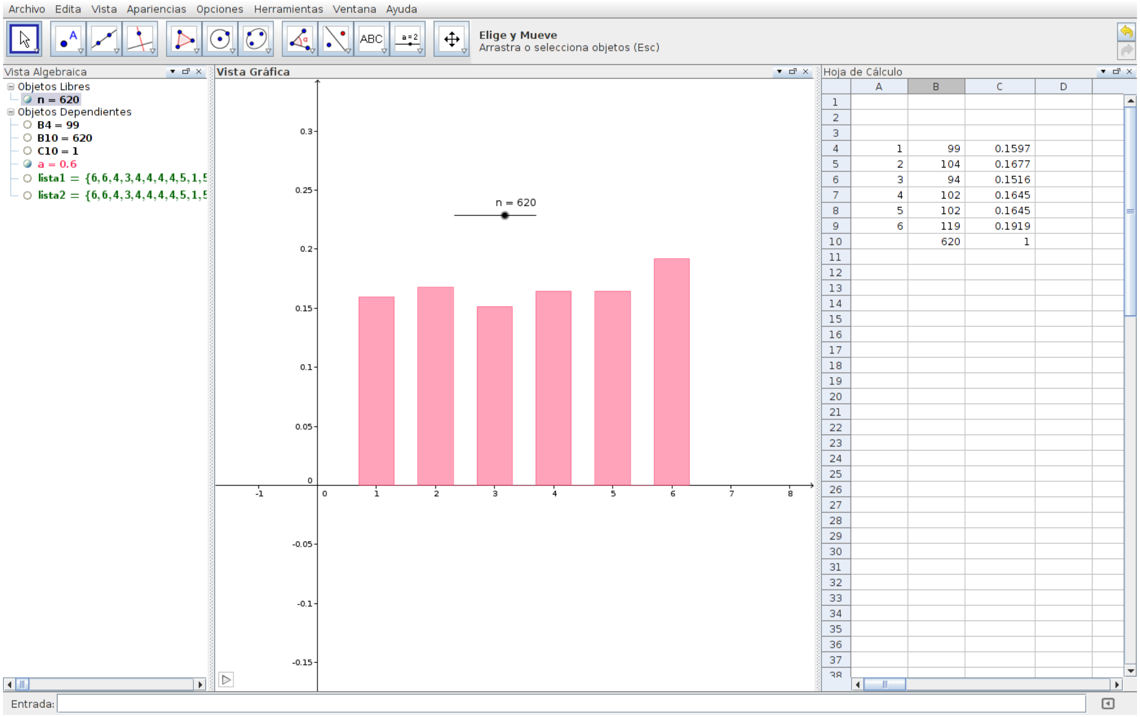
Actividad 2: Ley de los grandes números. Regla de Laplace.

Se plantean las siguientes preguntas:

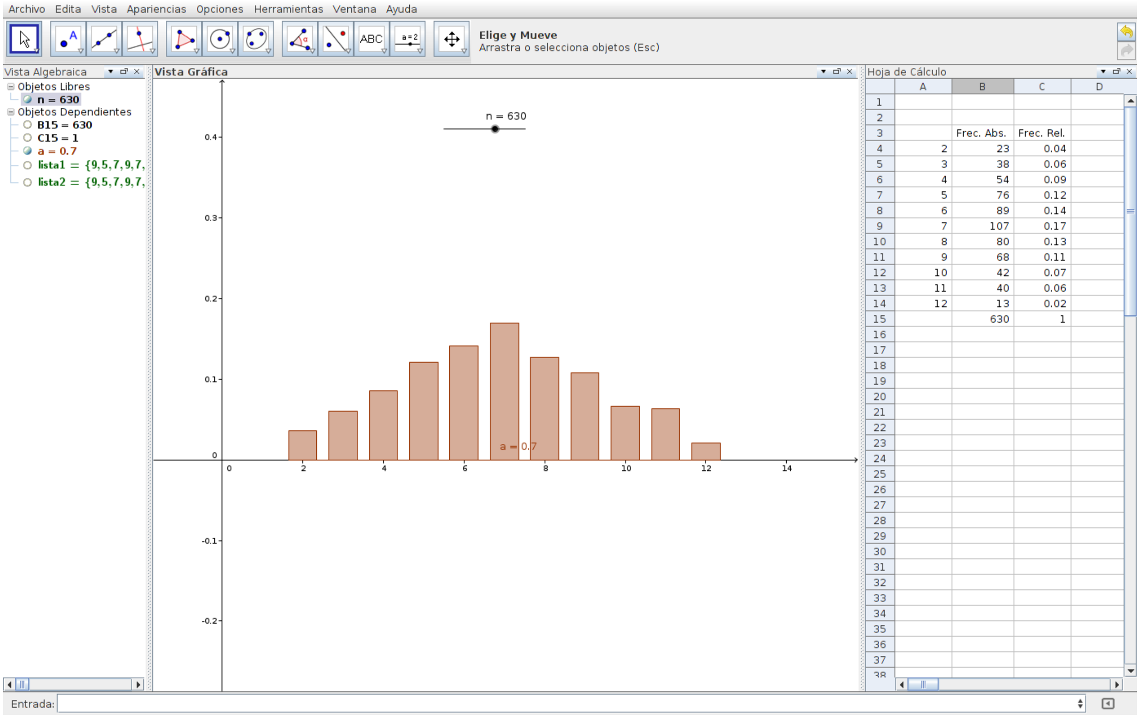
Cuando se tira un dado, ¿qué resultado tiene más posibilidades de salir? ¿Y si se tiran dos dados y se anota la suma?

Se realizan ambas simulaciones:

- Un dado



- Dos dados:



Se introducen los siguientes conceptos:

- Definición de probabilidad como límite de la frecuencia relativa. Ley de los grandes números.
- Regla de Laplace.
- Propiedades de la probabilidad.

Se realizan problemas de cálculo de probabilidad de un suceso mediante la descripción del espacio muestral, el reparto de probabilidad entre sucesos equiprobables o la regla de Laplace.

Actividad para casa 2. Ejemplos de ejercicios:

- Ejercicios de propiedades de la probabilidad.

En un experimento aleatorio sabemos que:

$P(A)=0,6 \qquad P(B)=0,5 \qquad P(A\cap B)=0,2$

Calcula.

a) $P\ (\overline{A})$

b) $P\ (A\cup B)$

c) $P\ (\overline{A}\cup\overline{B})$

d) $P\ (A-B)$

e) $P\ (\overline{B}-A)$

- Problemas de cálculo de probabilidades.

En una urna hay 5 bolas rojas, 3 azules y 7 verdes. Si sacamos una bola al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

A=Salir bola roja.

B=Salir bola verde o azul.

C=No salir bola azul.

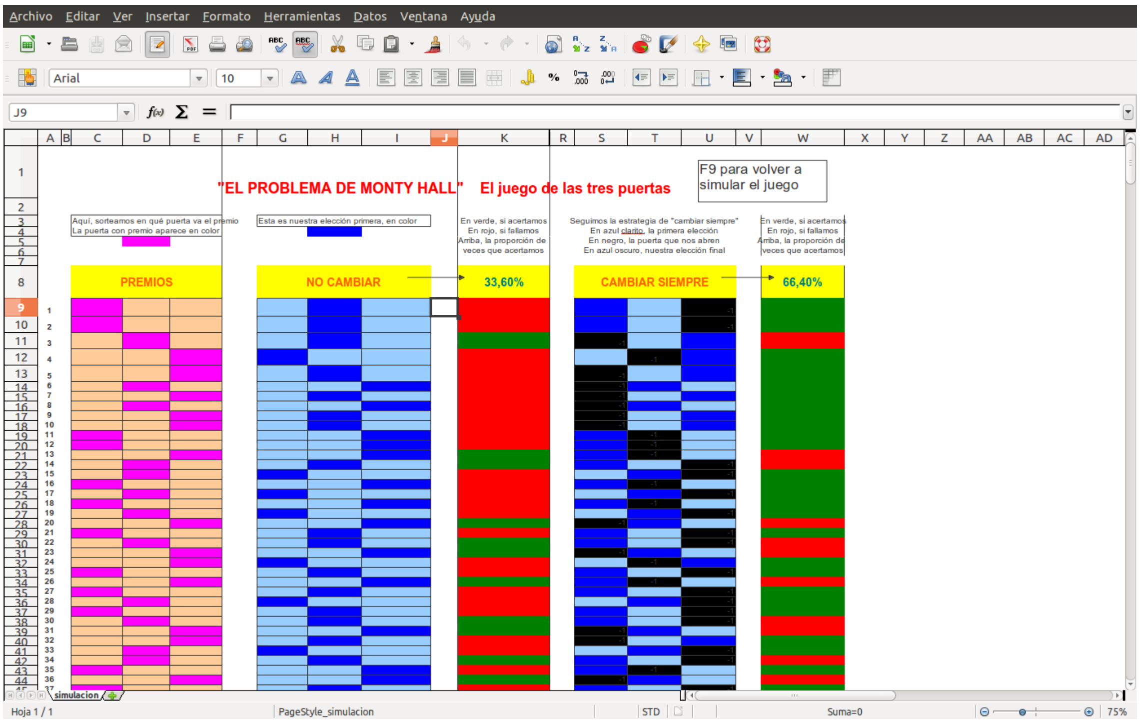
Actividad 3: Probabilidad Condicionada.

Se plantea el siguiente problema:

En un concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe donde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ***¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?***

Tras analizar las soluciones propuestas por los alumnos se pueden plantear variantes del problema aumentando el número de puertas.

A continuación se hace una simulación del problema con la hoja de cálculo (de www.estadisticaparatodos.com):



Para la resolución del problema se introducen los siguientes conceptos:

- Regla del producto.
- Sucesos independientes.

La resolución se hará de varias formas. Primero mediante diagrama de árbol, posteriormente con el planteamiento siguiente:

Suceso A=”Seleccionar una puerta que contiene el coche”.

Suceso B=”Seleccionar una puerta que contiene una cabra”.

Suceso G=”El jugador gana el coche”.

A y B son incompatibles y forma una partición del espacio muestral.

$P(G)=P((G \cap A) \cup (G \cap B)) = P(G \cap A) + P(G \cap B)= P(G/A)P(A) + P(G/B)P(B)$

Dado que $P(A) = 1/3$ y $P(B) = 2/3$ pues hay un coche y dos cabras.

Ahora debemos definir qué tipo de jugador estamos estudiando.

- **Jugador que nunca se cambia.**
  En este caso $P(G|A) = 1$ y $P(G|B) = 0$ pues el jugador se queda con su selección inicial.
  Por lo tanto **$P(G) = 1/3$**.
- **Jugador que siempre se cambia.**
  En este caso $P(G|A) = 0$ y $P(G|B) = 1$ pues el jugador se cambia a la única puerta cerrada que queda (y sabemos que como el presentador sabe donde está el coche, siempre mostrará una cabra).
  Por lo tanto **$P(G) = 2/3$**.

Resolución de problemas.

Actividad 4: Tablas de contingencia.

Se plantea el siguiente problema:

A una excursión acuden niños, padres y profesores de dos colegios, del colegio A: 50 niños, 5 padres y 5 profesores; del colegio B: 30 niños, 3 padres y 2 profesores.

Construye una tabla de contingencia.

Si llamamos N = «Ser niño», P = «Ser padre», F = «Ser profesor», A = «Pertenecer al colegio A» y B = «Pertenecer al colegio B», calcula las probabilidades.

a) $P(P)$ c) $P(A/N)$ e) $P(P \cap B)$

b) P(A) *d) P(B/F)* *f) P(P/B)*

Comprueba si los sucesos P y B son independientes.

Para su resolución se introducirán los siguientes conceptos:

- Construcción de tablas de contingencia.
- Resolución de problemas mediante tablas de contingencia.

Resolución de problemas.

Actividad para casa 3: Resolución de problemas de probabilidad condicionada.
Ejemplos:

En una clase hay 11 chicos y 14 chicas. De los estudiantes, 7 chicos y 10 chicas utilizan habitualmente Internet. Si escogemos un estudiante al azar, calcula las probabilidades de los siguientes sucesos.

a) Ser chica, sabiendo que utiliza Internet.

b) No utilizar Internet, sabiendo que es chico.

Actividad 5: Teorema de la Probabilidad Total.

Se plantea el siguiente problema:

Un estudio médico ha analizado la tasa de mortalidad por cáncer de pulmón para los fumadores (0,04) y para los no fumadores (0,001), y se conoce también cual es la probabilidad de que una persona tomada al azar sea fumadora (0,3) o no lo sea (0,7). ¿Es posible conocer la probabilidad total de que una persona tomada al azar fallezca de cáncer de pulmón?

Se introduce el siguiente concepto:

- Teorema de la probabilidad total.

La resolución se hará mediante:

- La aplicación directa del teorema de la probabilidad total.
- Mediante diagrama de árbol.

Resolución de problemas.

Actividad 6: Teorema de Bayes.

Se plantea el siguiente problema:

Se dispone de dos urnas idénticas. En el interior de una de ellas hay billetes auténticos (5 billetes de 10€ y 5 de 50€). En el interior de la otra hay billetes falsos (8 de 10€ y 2 de 50€). Se desconoce en cuál de las dos están los falsos y en cuál los auténticos. Se elige una urna al azar y extraemos un billete que resulta ser de 50€ ¿Cuál es la probabilidad de que sea falso?

Se introduce el siguiente concepto:

- Teorema de Bayes.

La resolución se hará mediante:

- La aplicación directa del Teorema de Bayes.
- Mediante diagrama de árbol, haciendo uso de la renormalización de las probabilidades.

Resolución de problemas.

Actividad para casa 4: Problemas de aplicación de los Teoremas de la probabilidad total y de Bayes.

Ejemplos:

Problema 1: En la central telefónica de una empresa hay tres telefonistas, A, B y C, que atienden a la misma proporción de clientes. Cuando estos solicitan hablar con el servicio técnico, los telefonistas deben derivar la llamada, de forma aleatoria, a las extensiones 1, 2, 3 o 4. Pero A solo tiene acceso a las extensiones 1, 2 y 3; B solo puede comunicar con 2, 3 y 4 y, finalmente, C solo tiene acceso a 1 y 4.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda C?

b) ¿Y de llamar al servicio técnico y que te atienda 4?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que te atienda 3, si el telefonista que te respondió fue A?

d) ¿Y la de que te atendiera A, si te desviaron al número 3?

e) ¿Y la de que te pasen con el número 1, si no te atendió C?

Problema 2: En la ciudad en la que vive Jorge llueve el 20% (2/10) de los días. Jorge es muy perezoso para levantarse de la cama. Ello provoca que a veces pierda el autobús, con lo que le toca ir caminando hasta el instituto y llega tarde a la primera clase. Normalmente, si hace buen tiempo, suele perder el autobús el 30% (3/10) de las ocasiones. Sin embargo, si llueve, se vuelve más perezoso aún para levantarse, y entonces la probabilidad de que pierda el autobús es del 50% (5/10). Un día llegó tarde al instituto. ¿Cuál es la probabilidad de que apareciera hecho una sopa?

Actividad 7: Repaso y resolución de dudas.

Actividad 8: Prueba de evaluación.

Actividad de ampliación: Método de Montecarlo, cálculo aproximado de π. (Anexo I).

I. SOBRE LA EVALUACIÓN

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

Problema 1: Celia propone a Daniel uno de estos juegos con dados de 4, 6 y 8 caras numeradas siempre en orden empezando por el 1. Analiza cada uno de ellos. ¿Cuál debería escoger Daniel? Justifica tu respuesta.

a) Daniel lanza un dado de cuatro caras, y Celia lanza un dado de seis, los dos una sola vez; quien saque el número mayor gana la tirada.

b) Celia lanza un dado de ocho caras una sola vez y Daniel lanza dos veces uno de cuatro caras y sumará el resultado. Gana quien obtenga el número menor.

c) Daniel lanza un dado de cuatro caras dos veces y suma los dos resultados; Celia lanza una vez un dado de ocho. Y quien saque primero un ocho gana.

d) Daniel lanza un dado de 8 caras una vez, y Celia lanza un dado de cuatro caras dos veces y suma los resultados. Gana quien saque un cuatro.

Problema 2: Para recibir las quejas de los clientes, una empresa telefónica dispone de una oficina atendida por tres empleados.

- El empleado A está exclusivamente dedicado a la atención a los clientes y los otros dos empleados realizan, además, otras tareas.
- El empleado A atiende al 60 % de los visitantes, B al 25 % y C al resto.
- El empleado más efectivo es A, que resuelve el 95 % de los problemas que le plantean los clientes, mientras que B solo resuelve el 80 % y C el 60 %.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que no me atienda el empleado A?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que me resuelvan el problema si no me atiende A?

d) ¿Cuál es la probabilidad de que no me resuelvan el problema si me atiende A?

e) Si no me han resuelto el problema, ¿cuál es la probabilidad de que me haya atendido B?

Problema 3: En un hospital, el 35% de los enfermos padece la enfermedad A, el 20% la enfermedad B y el 10% las dos enfermedades. Se elige un paciente al azar.

a) Hallar la probabilidad de que no padezca ninguna enfermedad.

b) Si padece la enfermedad B, ¿cúal es la probabilidad de que no padezca A?

Problema 4: En un taller, dos máquinas, A y B, hacen remaches. La primera hace bien el 90% de los remaches, mientras que B hace bien solo el 60%. Si un día la máquina A hizo 2000 remaches y la B 500 remaches, determina:

a) La probabilidad de que uno de los 2500 remaches sea defectuoso.

b) La probabilidad de que un remache defectuoso se haya fabricado con la máquina A.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Problema 1: Formar el espacio muestral y asignar probabilidades.

Problema 2: Formar el espacio muestral y asignar probabilidades. Regla del producto y propiedades de la probabilidad. Probabilidad a priori y a posteriori.

Problema 3: Propiedades de la probabilidad. Tablas de contingencia.

Problema 4: Probabilidad a priori y a posteriori.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Problema 1: En este problema se pretende que el alumno sepa en primer lugar analizar el espacio muestral de cada caso, en un nivel superior esta el cálculo de las probabilidades de ganar de cada uno y por último la capacidad de tomar decisiones con esos datos.

Así mediante un diagrama de árbol o por conteo se llega a que la probabilidad de ganar de ambos son las siguientes:

a) P(Ganar Daniel) =6/24=0,25 P(Ganar Celia) =14/24=0,58

b) P(Ganar Daniel) =48/128=0,375 P(Ganar Celia) =64/128=0,50

c) P(Ganar Daniel) =1/16=0,0625 P(Ganar Celia) =1/8=0,125

d) P(Ganar Daniel) =1/8=0,125 P(Ganar Celia) =3/16=0,1875

A la hora de elegir juego se valorara el razonamiento, teniendo en cuenta que puede haber varias elecciones, podría ser ninguno al tener menor probabilidad de ganar en todos o podría ser la que menor diferencia tiene de ganar en proporción, caso b).

Problema 2: Se pretende que todos los alumnos sean capaces de formular un diagrama de árbol del problema. Los apartados a) y d) son de resolución directa conociendo las propiedades de la probabilidad y sabiendo distinguir la probabilidad condicionada.

El apartado b) es de aplicación directa del teorema de la probabilidad total:

$$P(\overline{R}) = P(A) \cdot P(\overline{R}/A) + P(B) \cdot P(\overline{R}/B) + P(C) \cdot P(\overline{R}/C) =$$

$$= 0,6 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,2 + 0,15 \cdot 0,4 = 0,14$$

Se puede aplicar la fórmula o bien resolverlo mediante el diagrama de árbol.

El apartado c) es de aplicación de la regla del producto y de las propiedades de la probabilidad, o bien mediante el nuevo cálculo del diagrama de árbol suprimiendo el caso en el que te atiende A.

El apartado e) es del aplicación del Teorema de Bayes o su resolución mediante el diagrama de árbol renormalizado.

Problema 3: Este problema se puede resolver de manera sencilla mediante una tabla de contingencia, se pretende que el alumno sepa crearla para posteriormente interpretarla.

Alumnos avanzados pueden encontrar otros medios de resolución.

Problema 4: Se espera que los alumnos sean capaces de representar el diagrama de árbol del problema, y posteriormente aplicar el teorema de la probabilidad total o el de Bayes según el apartado, o bien la resolución mediante el diagrama.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Para cada problema se valorará por igual el planteamiento correcto, el conocimiento y aplicación de las técnicas y la solución correcta.

Se permitirá el uso de decimales, así como redondeos a la segunda cifra decimal.

J. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

Barbero Sanpedro, Carmen [et al.] (2003). *La estadística y la probabilidad en el bachillerato*. Ed. Conocimiento educativo. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Batanero Bernabeu, Carmen; Fernandes, José António; Contreras García, José Miguel (2009). “Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas”. Revista Suma nº 62, páginas 11-18.

De la Cruz López, Mª Concepción [et al.] (1993). *Actividades sobre azar y probabilidad*. Ed. Narcea. Ministerio de Educación y Ciencia.

Estrada Roca, Assumpta; Díaz Batanero, M. Carmen (2007). “Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación”. Revista Uno nº 44.

Fernández Fernández, Santiago (2007). “Los inicios de la teoría de la probabilidad”. Revista Suma nº 55, páginas 7-20.

Gómez Hernández, Santiago E. (2000). “¿Para qué enseñar fórmulas pudiendo enseñar procedimientos?”. Revista Suma nº 35, páginas 55-62.

Hernández Trevethan, Hugo Mael; Yumi Kataoka, Verónica; Silva de Oliveira, Marcelo (2010). “El uso de juegos para la promoción del razonamiento probabilístico”. Unión. Revista iberoamericana de educación matemática nº 24, páginas 69-83.

León, Nelly (2009). “La historia como elemento motivador hacia el estudio de la probabilidad: el problema de la apuesta interrumpida”. Sapiens. Revista Universitaria de Investigación nº 1, páginas 69-87.

Lonjedo Vicent, M. Ángeles (2008). *Análisis de los problemas ternarios de probabilidad condicional de enunciado verbal y de sus procesos de resolución*. Tesis doctoral. Servicio de publicaciones, Universidad de Valencia.

Martín Martín, Miguel Ángel [et al.] (2002). *Matemáticas, Bachillerato 1*. Ed. Bruño.

Molano Romero, Antonio [et al.] (2006). *Matemáticas I, 1º Bachillerato*. La Casa del Saber. Ed. Santillana.

Serrano Romero, Luis; Batanero Bernabeu, Carmen; Ortiz de Haro, Juan J. (1996). "Interpretación de enunciados de probabilidad en términos frecuenciales por alumnos de bachillerato". Revista Suma nº 22, páginas 43-49.

Vargas Herrera, Inmaculada (2011). *Introducción al estudio formal de la probabilidad, 2º curso de bachillerato.* Trabajo fin de máster. Universidad de Granada.

www.estadisticaparatodos.com

ANEXO I

MÉTODO DE MONTECARLO

La teoría de la probabilidad tiene aplicaciones en problemas muy variados. Una de ellas es el método de Montecarlo, consistente en el diseño de experimentos aleatorios que permiten resolver fácilmente problemas de difícil solución.

Por ejemplo, para calcular el área de una superficie irregular A contenida en un rectángulo R, el método consiste en generar aleatoriamente una cantidad de puntos N en R. Siendo N(A) los puntos contenidos en la superficie A.

La probabilidad de que al elegir un punto al azar esté contenido en A es:

$$P(A)=\frac{S(A)}{S}$$

Donde S(A) es la superficie de A y S la superficie total de R. Por la ley de los grandes números, se tiene que P(A) es aproximadamente, N(A)/N, de donde:

$$P(A)=\frac{S(A)}{S}\simeq\frac{N(A)}{N} \qquad \Rightarrow \; S(A)\simeq\frac{N(A)\cdot S}{N}$$

Así podemos aproximar el valor del área, cuya aproximación será mejor cuanto más grande sea N, es decir, cuantas más veces se repita el experimento aleatorio.

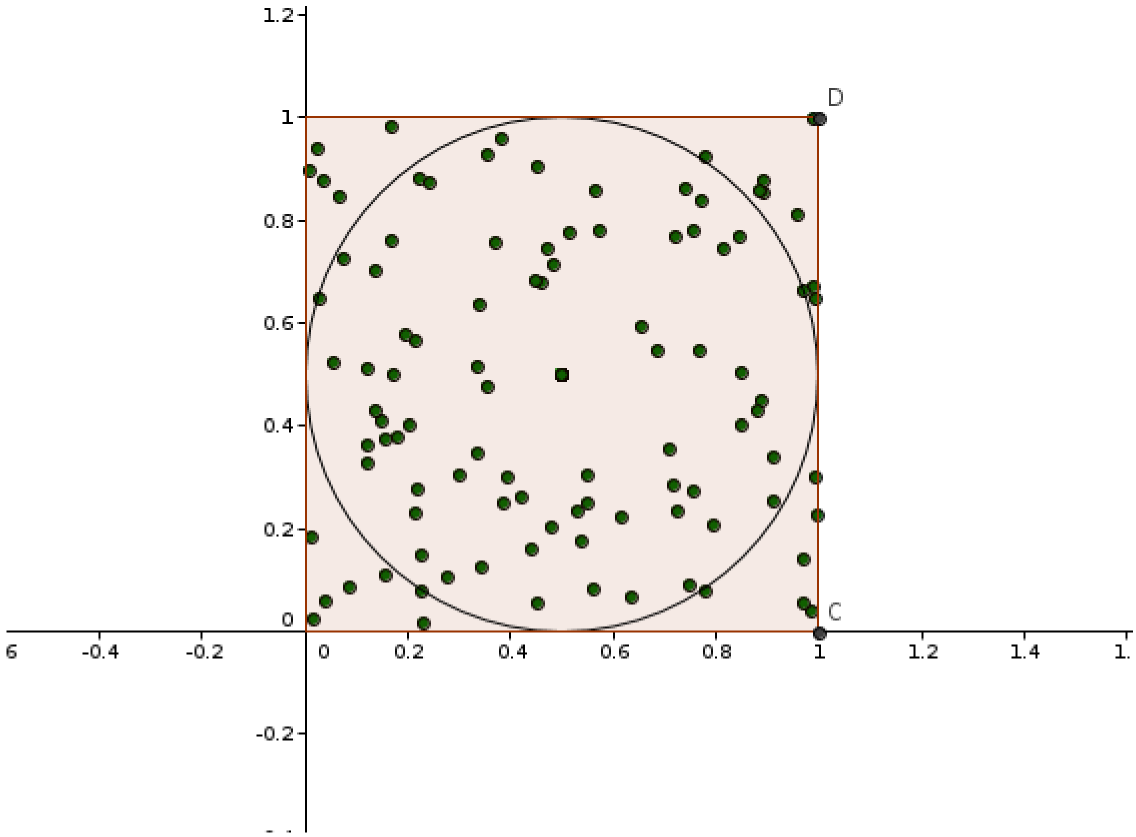
CÁLCULO APROXIMADO DE π

Con este método podemos hallar una aproximación del valor de π, usaremos un cuadrado R de lado 1 y su circunferencia C inscrita de radio 0.5, el área del primero es 1 y de la circunferencia es 0.25π. Como se ha visto anteriormente se tiene que dado un punto al azar en R, la probabilidad de que este en C es:

$$P(C)=\frac{S(C)}{S} \quad \Rightarrow \quad P(C)=0{,}25\cdot\pi\simeq\frac{N(C)}{N} \quad \Rightarrow \quad \pi\simeq\frac{4\cdot N(C)}{N}$$

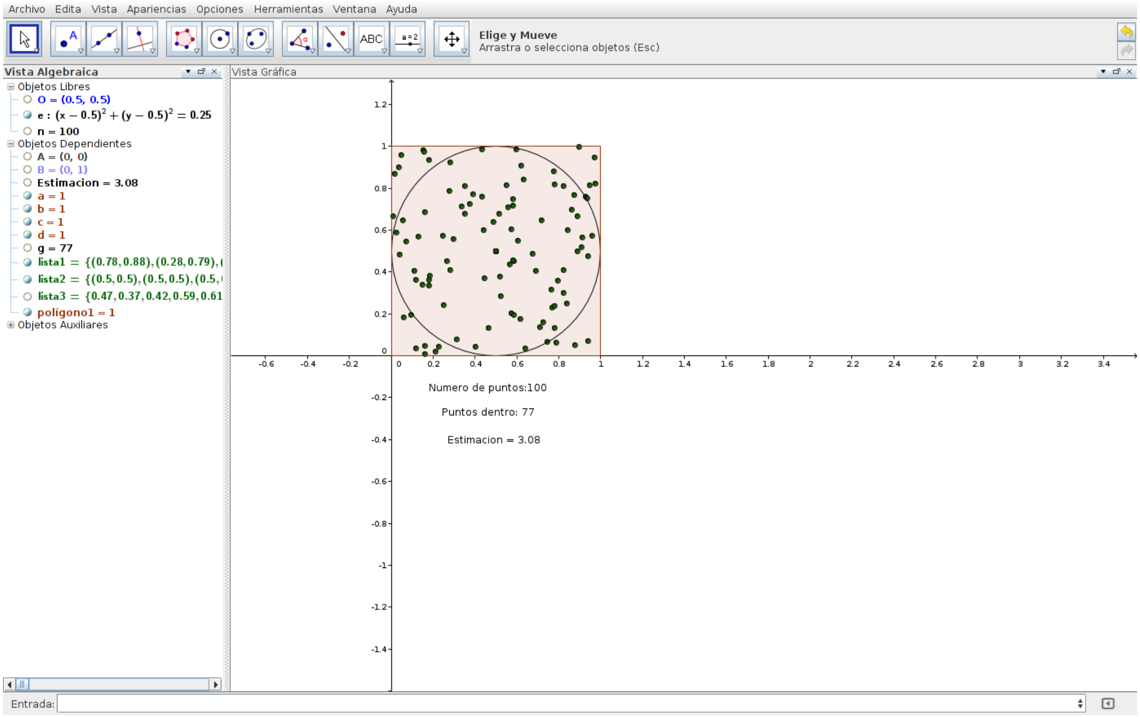
Haremos esta simulación en Geogebra, una vez abierto el programa crearemos el cuadrado de lado uno de vértices los puntos (0,0), (0,1), (1,1) y (1,0) y la circunferencia de radio 0.5 y centro (0.5,0.5).

Creamos una variable n=100 que será el número de puntos que vamos a crear, a partir de ella creamos una lista de n puntos dentro del cuadrado, mediante la función *Secuencia,* cuyas coordenadas sean aleatorias, para lo que usamos la función *random()*, que genera un numero pseudoaleatorio entre 0 y 1, se obtiene lo siguiente:

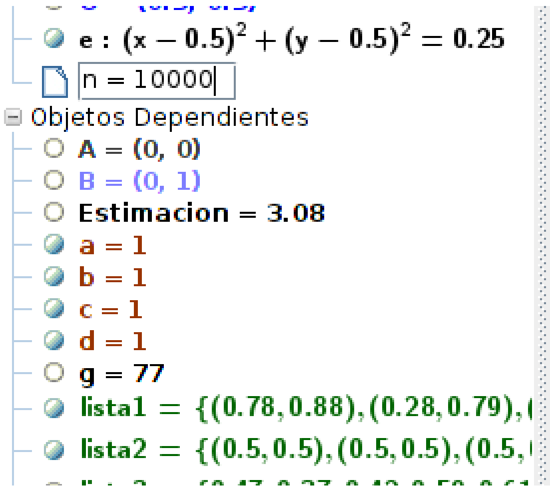


Ahora es necesario contar los puntos del interior de la circunferencia, para ello generamos otra lista auxiliar con n elementos, mediante el comando *Secuencia,* todos ellos el punto (0.5,0.5), esto servirá para ver qué puntos de la primera lista están a distancia menor de 0.5 del centro de la circunferencia. Esto lo haremos con el comando *Zip* sobre las dos listas anteriores y la función *Distancia.* Se generará una nueva lista con las distancia de cada punto al centro de la circunferencia.

Ahora basta con contar los valores que son menores o iguales a 0.5 mediante el comando *CuentaSi* y calcular el valor aproximado de π.



Al pulsar Ctrl-R se recalculan los puntos y por tanto la aproximación, prueba a aumentar el valor de n, ¿Mejora la aproximación del valor de π?



<u>Las agujas de Buffon</u>

Con esta misma idea existe otro modo de obtener una aproximación de π, la descubrió el francés Georges Luis Leclerc (1707-1788), conde de Buffon.

Este experimento consiste en dejar caer una aguja sobre una hoja rayada y anotar las veces que la aguja cruza alguna de las rayas. Después de lanzar la aguja muchísimas veces comprobó que su experimento estaba íntimamente relacionado con el número π. Para obtener un número muy parecido a π, hay que dejar caer la aguja muchísimas veces sobre la hoja, multiplicar esta cantidad por dos y dividir el resultado entre el número de veces que la aguja cruzó alguna de las rayas.

- Puedes realizar el experimento manualmente, tal como se indica en:

  http://www.estadisticaparatodos.es/taller/buffon/buffon.html

- O bien realizar una simulación en Geogebra, como nos explica Manual Sada en su videotutorial:

  http://vimeo.com/album/1512511