TESIS DE LA UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA

2022

21

María Eva Cid Castro

Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos ANEXOS

Director/es
BROUSSEAU, GUY

ISSN 2254-7606

Prensas de la Universidad
Universidad Zaragoza

ISSN 2254-7606

Tesis Doctoral

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS
ANEXOS

Autor

María Eva Cid Castro

Director/es

BROUSSEAU, GUY

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Escuela de Doctorado

2016

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

ANEXOS

Eva Cid Castro

Memoria presentada para optar al Título de
Doctor por la Universidad de Zaragoza
realizada bajo la dirección del profesor
Dr. Guy Brousseau

Zaragoza, noviembre de 2015

ÍNDICE

Anexos

ANEXO IV.1

PROBLEMA INICIAL

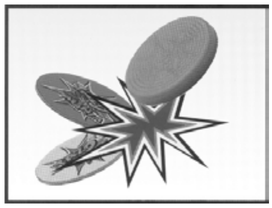
Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos.
Al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 rojas y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas.

A. Indica quién gana la partida en los casos siguientes:
   a. Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
   b. Les fichas blancas valen un punto menos que las rojas.

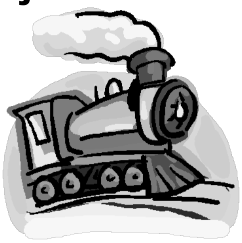
B. ¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si Eva y Bernardo empatan (es decir, tienen el mismo número de puntos)?

1. CÓMO CONSTRUIR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 1. Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?



Ejercicio 2.



Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?

Ejercicio 3. Completa las tablas siguientes sobre el número de pasajeros del tren anterior.

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
427	
1582	
a	

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
	45
	876
	c

Ejercicio 4. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

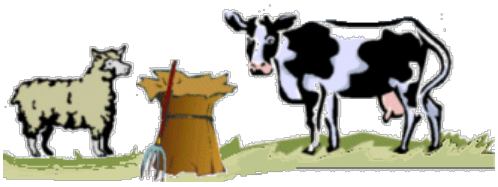
Ejercicio 5. Si María nos dice que le han quedado 30€, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos?

¿Y si le quedan 15 €?

¿Y si solo le quedan 5 €?

Ejercicio 6. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas.

Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas.



Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales
80	150				
			65	120	
50					
				90	

Ejercicio 7. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10 - 4$

E3) $12 - a - 5$

2. CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 8. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

(a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$

(b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$

(c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Ejercicio 9. Completa las siguientes frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que____________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que____________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que____________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que____________________________

Ejercicio 10. Completa las siguientes frases:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ____________ primero 2 y _____________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Ejercicio 11. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Lee toda la expresión de izquierda a derecha y observar si se suma y resta un mismo número. En ese caso, se tachan los dos. Realiza esa operación todas las veces que se pueda y vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos.

2) Vuelve a leer toda la expresión y realiza primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

Ejercicio 12. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) $30 + w - 10 + 12 - v$

E2) $h - 25 - 25 + 50 - 7$

E3) $m - 45 + 44 - 17 + 18 + 27 - 3$

E4) $100 - a - b - c - 80 + 6$

E5) $p - 15 + 85 + 36 + 24 - 35 - 1$

E6) $100 - r - n + 48 - 99 - 18$

E7) $65 + 84 - 82 - 13 + 15 - 16 - 4$

Ejercicio 13. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) s + 72 – 67 + s + 67 – 48 – 72 – 5 – s +50

E2) 200 + n +m + n + m –50 + m

E3) 35 – a – a – a – a – a + 60

E4) 3f + 77 + 5f – 82 +23 + 82 – 2f

E5) 17p + 26 – 32q – 16 + 12q + 3p

E6) 150 – 6y – 6y + 267+ 12 y – 66 + 150

E7) 4a – 8b – 6c – 3a + 18b

3. CÓMO COMPARAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 14. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

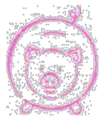
Ejercicio 15. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indica cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

b) El regalo cuesta 24 €.

¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Ejercicio 16.
Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:



María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
No recibe ni gasta	Recibe 30 €	Gasta 35 €

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

(b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Ejercicio 17. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x + 1$ $\quad$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $\quad$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $\quad$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $25 - 2z$

E5) $a - 4b$ $a + b$

E6) $3n + 5$ $2n + 30$

Ejercicio 18. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) $b - 45$

E2) $r - 27 + 2r - 38 + 17 - r$

E3) $33 - 2a$

Ejercicio 19. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que $y - 13$

E2) 11 unidades menor que $2c - 1$

E3) 4 veces mayor que $2n + 3m$

E4) 11 veces mayor que $16 - 3a$

4. CÓMO ENCONTRAR LA DIFERENCIA ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejercicio 20. Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

678 + 99

47 + 98

157 – 99

123 + 39

87 – 29

601 - 103

427 + 397

212 – 198

117 – 22

Ejercicio 21. Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:

765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1

80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1

141 – (100 + 2) = 141– 102 = 141 __ 100 __ 2

92 – (42 +3) = 92 – 45 = 92 __ 42 __ 3

325 + (200 – 3) = 325 – 197 = 325 __ 200 __ 3

Ejercicio 22.

I) Efectúa las operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) $12 - (8 - 3)$

b) $12 - (8 + 3)$

c) $12 + (8 - 3)$

d) $12 + (8 + 3)$

II) Efectúa las operaciones siguientes:

e) $12 - 8 - 3$

f) $12 - 8 + 3$

g) $12 + 8 - 3$

h) $12 + 8 + 3$

III) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado I), las operaciones del apartado II) que tienen el mismo resultado.

Apartado I	Apartado II
$12 - (8 - 3)$	
$12 - (8 + 3)$	
$12 + (8 - 3)$	
$12 + (8 + 3)$	

Ejercicio 23. Completa las siguientes frases:

Sumar $a + b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Sumar $a - b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar $a + b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar $a - b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Ejercicio 24.

a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) ¿Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
d	
	e

Ejercicio 25. Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:

i) $7p + 3q$ $\qquad$ $2p - 2q$

ii) $4t - 6 - 15$ $\qquad$ $4t - 3 - 2$

iii) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ $\qquad$ $10m - 30 + 5m + 25$

Ejercicio 26. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

Ejercicio 27. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

E1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

E2) $17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$

E3) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

E4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E5) $20 - 10z - (5z - (10 - 2w))$

Ejercicio 28. Cuando las expresiones algebraicas sólo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo de hacer.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) $45 - (371 - 87) + 372 - 87$ Deshacer paréntesis: SÍ NO

b) $8 + 20 - (45 - 44 + 3)$ Deshacer paréntesis: SÍ NO

c) $13 + (27 - 20) - (25 - 10 - 15)$ Deshacer paréntesis: SÍ NO

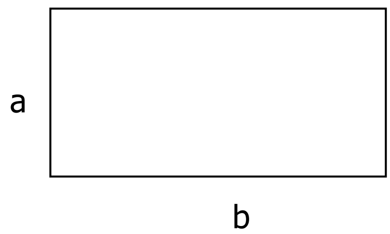
d) $5 - (4 - (3 - (2 - 1)))$ Deshacer paréntesis: SÍ NO

e) $4578 + 3127 - 578 - (127 +841 + 512) + 841 + 12$
Deshacer paréntesis: SÍ NO

5. CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 29.

i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).



Si nos dicen que a = 3 cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

Ejercicio 30.

a) Aplica la propiedad distributiva a las siguientes expresiones para suprimir los paréntesis.

i) $10(a - b)$

ii) $4 + 5 (x + 22)$

iii) $12(n + m - 4) - 5n + 40$

b) Aplica la propiedad distributiva en sentido inverso en las siguientes expresiones (Esta operación recibe el nombre de "sacar factor común").

i) $3t - 3v + 3z$

ii) $5v - 10$

iii) $24m + 12$

Ejercicio 31.

i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.

ii) ¿Que pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

iii) ¿Que longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

Ejercicio 32. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Ejercicio 33. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a)$

b) $3p + 6q - 3(p - 12 + 2q)$

c) $n(3 + 7n - 6) - m(5 - 6m + 2)$

d) $3(6 - 5(3b - 4 + c) + 10b) + 2(5b - 2c)$

e) $7(5 - a) + 11(5 - a) - 9(5 - a)$

Ejercicio 34. Completa las siguientes frases:

Sumar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Sumar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Ejercicio 35. Tres rectángulos tienen un lado igual que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, 6 + 2a cm^2 y 6 – 4a cm^2.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo?

b) ¿En cuánto se diferencian los lados distintos de los rectángulos?

Ejercicio 36. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) 36t – 4 es _______ veces ________ que 18t – 2

b) 6m + 4n es _______ veces ________ que 16(2n +3m) – 10(2n + 3m)

c) 30c – 60 + 20b es _______ veces _______ que 2b +3c – 6

d) 7(456x – 319y) es _______ veces _______ que 56(456x – 319y)

Ejercicio 37. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17 - 4 \cdot 3) + 5 - 3^3$

b) $(9^2 - 7^2) - (9 - 7)^2$

c) $47(4 \cdot 15 - 35) - 17 \cdot 25$

d) $45 - 5(20 - 4(15 - 3(10 - 6)))$

e) $8 + 2 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 - 4 \cdot 6$

Ejercicio 38. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

ANEXO IV.2

1. DE NUEVO CON EL ÁLGEBRA

Ejercicio 1. En una papelería entran varios clientes a comprar cartulinas blancas. Un día se venden 5 cartulinas, otro día 7, otro, 10. Como las existencias se van agotando, el dueño de la tienda encarga 50 cartulinas más. Después vienen de un colegio y se llevan 32 cartulinas. El dueño vuelve a hacer un pedido de otras 20 cartulinas.
a) ¿Cuántas cartulinas tendrá para vender una vez que le hayan servido el pedido? ¿Tendrá más o menos que al principio?

b) Completa la tabla siguiente sobre el número de cartulinas que había en la papelería.

Número inicial de cartulinas	Número final de cartulinas
25	
	46
p	
	q

Ejercicio 2. Completa las siguientes frases:

Sumar 6 y sumar 3 es lo mismo que______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Ejercicio 3. Unos alumnos, al resolver varios problemas en los que no se conocen todos los datos han obtenido las siguientes soluciones. ¿Podemos expresar estas soluciones de forma más sencilla? Inténtalo y úsalas después para completar la siguiente tabla.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10 - 4 + 2b$

E3) $32 - c - 5$

E4) $7 + b - 9 + 1$

E5) $a + 7 + 2a - 5 - a$

E6) $c + 15 + 237 - 14 - 1 - 237 + 2$

a	b	c	E1	E2	E3	E4	E5	E6
25	40	14						
2753		18		25				
	4571	20					10	
			57	13	25			

Ejercicio 4. Fernando tiene 10 euros más que Luis y Eva 3 euros menos que Fernando.

a) ¿Quién tiene más euros, Eva o Luis? ¿Y cuántos tiene de más?

b) Completa la tabla siguiente sobre el dinero que tienen Fernando, Luis y Eva.

Dinero de Fernando	Dinero de Luis	Dinero de Eva
15		
	10	
	n	
		m

c) Fernando y Eva van a comprar un regalo. Eva pone todo su dinero y Fernando la misma cantidad que Eva. ¿Cuánto dinero le queda a Fernando?

Ejercicio 5

I) Si queremos restar 98 a 135, lo más fácil será restar 100 y después sumar 2 y así se obtiene 37. Coloca los signos que faltan en la escritura en forma algebraica de esta operación.

135 – 98 = 135 – (100 – 2) = 37 = 135__100__2

II) Si queremos restar 102, lo más fácil será restar 100 y después restar 2 y así se obtiene 33. Coloca los signos que faltan en la escritura en forma algebraica de esta operación.

135 – 102 = 135 – (100 + 2) = 33 = 135__100__2

III) Completa las siguientes frases:

Sumar a + b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Sumar a – b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar a + b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar a – b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Ejercicio 6. Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones algebraicas y calcula su diferencia.

a) $d - 5$ es ________________ que $d - 13$

Diferencia:

b) $x + 6$ es ________________ que $2x + 8$

Diferencia:

c) $c - 14$ es ________________ que $c - 8$

Diferencia:

d) $3t + 4$ es ________________ que $t + 6$

Diferencia:

Ejercicio 7. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos.

A) $f - (f - 7) + 3f - 8 - (f + 7)$

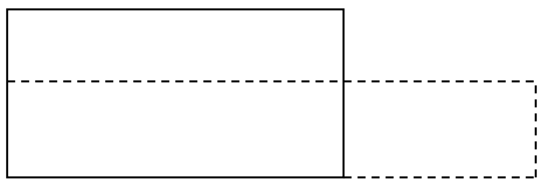
B) $20 - (4 - x) + (4 -x) - 15 - 2$

C) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

D) $2m + 18 - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E) $40 - 10z - (30 - (10 - 2w))$

Ejercicio 8. Si en un rectángulo del que sabemos que la longitud de un lado es 4 cm, aumentamos el lado conocido en 2 cm y disminuimos el lado desconocido en 1 cm, ¿qué pasará con el área del rectángulo?, ¿disminuirá, aumentará?, ¿cuánto?



Ejercicio 9. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos:

A) $a - 3(b - 7 + 2a)$

B) $5(z + 4 - 2v) - 2(z + 4 - 2v) + (z + 4 + 2v)$

C) $77 - 10(6 - c) + 3(2c - 8) - 5c + 3c - 12$

2. CÓMO OPERAR LOS NÚMEROS CON SIGNO

Ejercicio 10. Alberto juega a los cromos. En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde cuatro cromos.

a) ¿Cuántos cromos ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
+4	
–6	
	+5
	–3

Ejercicio 11. Después de jugar dos partidas, Alberto sólo se acuerda de que en la primera ganó cuatro cromos. Ana también ha jugado a los cromos y sabe que en la primera partida perdió dos cromos, pero tampoco se acuerda de lo que pasó en la segunda. Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre el nº de cromos ganado en total por Alberto y el ganado en total por Ana
a	b	
+3	–1	
–3	+4	
+2		+3
–1		–4
	+5	–2
	–2	+2

Ejercicio 12. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

E1) $p - q + 10$ siendo $p = +7$ y $q = +3$

E2) $12 - x - y$ siendo $x = -5$ e $y = +8$

E3) $2(6 - a)$ siendo $a = -4$

E4) $a - 3(b - 1)$ siendo $a = 2$ e $y = -6$

E5) $3(2 - 3n) - 2(3 - m)$ siendo $n = -5$ y $m = 1$.

Ejercicio 13. Efectúa las siguientes operaciones:

E1) $(-200) + (+300) + (-100) + (-100)$

E2) $(+37) - (-40) - (+23) + (-17)$

E3) $8 + 2((-72) - (-12)) - 18$

E4) $(4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$

E5) $((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$

Ejercicio 14.
Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Ejercicio 15.

a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

1) 6 sobre cero y 5 bajo cero

2) 7 sobre cero y 2 sobre cero

3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos *T* a la temperatura más alta y *t* a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa fórmula para encontrar las diferencias en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la fórmula las mismas diferencias que antes.

Ejercicio 16. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es negativa eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo.

Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo < ó > entre ellos.

a) (+12) – (+8) +12 _____ +8

b) (+5) – (–10) +5 _____ –10

c) (–6) – (+2) –6 _____ +2

d) (–15) – (–3) –15 _____ –3

e) (–11) – (+11) –11 _____ +11

f) (–2) – (–6) –2 _____ –6

Ejercicio 17. Lee el siguiente texto:

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo + ó –. Sabemos además cómo sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó –. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo – se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de +2 y que +2 es el opuesto de –2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

Ejercicio 18.

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

+14, –18, +36, +4, –12, –5, –20, +10, +8, 0

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros.

7, –7, 1500, –3568, –3569, –83, 1, 13, –100, 5

Ejercicio 19.
a) Coloca el signo < ó > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras sólo pueden tomar valores positivos.

1) 9 – a ______ 6 – a

2) 4q – 5 ______ 4q – 8

3) z + 2 ______ 2z + 5

4) d _______ – d

5) m – 2n _______ 3m – n

b) Coloca de nuevo el signo < ó > entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras sólo pueden tomar valores negativos.

1) 9 – a _______ 6 – a

2) 4q – 5 _______ 4q – 8

3) z + 2 ______ 2z + 5

4) d _______ – d

5) m – 2n _______ 3m – n

c) En las desigualdades anteriores, si las letras pueden tomar valores positivos y negativos, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

1)

2)

3)

4)

5)

Ejercicio 20. Las propiedades siguientes son ciertas para los números naturales. Indica si también se cumplen en los números enteros.

1) Los sumandos son siempre menores o iguales que el resultado de la suma.

2) El minuendo de una resta es siempre mayor o igual que el resultado de la resta.

3) Si los factores de un producto son todos distintos de cero, entonces son menores o iguales que el resultado del producto.

4) El dividendo de una división es siempre mayor o igual que el cociente.

5) No hay ningún número que sea menor que cero.

Ejercicio 21. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

$(+3)(+5)$

$(+3)(-5)$

$(-3)(+5)$

$(-3)(-5)$

Ejercicio 22. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ______________________

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ______________________
Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ______________________

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ______________________

Ejercicio 23. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

(+3)(   ) = +12

(–7)(   ) = +21

(+5)(   ) = –15

(–6)(   ) = –24

Ejercicio 24. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

(+12) : (+3)

(+21) : (–7)

(–15) : (+5)

(–24): (–6)

ANEXO IV.3

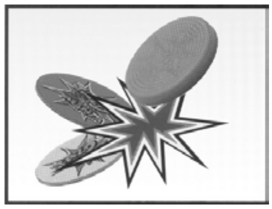
1. PROBLEMA INICIAL

Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos.
Al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 fichas rojas y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas.

A. Indica quién gana la partida en los casos siguientes:
   a) Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
   b) Las fichas blancas valen la mitad que las rojas.
   c) Las fichas blancas valen un punto más que las rojas.
   d) Las fichas blancas valen 2 puntos menos que las rojas.

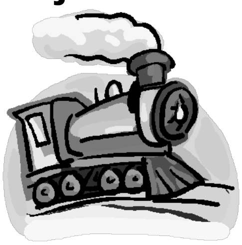
B. ¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si:
   a) Eva y Bernardo empatan (tienen el mismo número de puntos)?
   b) Eva tiene 10 puntos más que Bernardo?
   c) Eva tiene 5 puntos menos que Bernardo?
   d) Bernardo tiene la mitad de puntos que Eva?

2. CÓMO CONSTRUIR EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Ejercicio 1. Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?

Ejercicio 2.



Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a la tercera parada?

Ejercicio 3. En el tren anterior, ¿podemos saber cuántos pasajeros de más o de menos había a la llegada a la tercera estación respecto a la salida? ¿Qué expresión algebraica permite contestar a la pregunta más rápidamente?

Ejercicio 4. Si ahora te piden que completes la tabla siguiente sobre el número de pasajeros del tren anterior, ¿qué expresión algebraica permitiría calcular más rápidamente? Utilízala y completa la tabla siguiente:

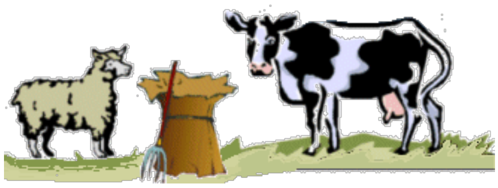
Nº inicial de pasajeros	Nº final de pasajeros
427	
1582	
a	

Nº inicial de pasajeros	Nº final de pasajeros
	45
	876
	c

Ejercicio 5. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

Ejercicio 6. Si María nos dice que le han quedado 30€, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos? ¿Y si le quedan 15 €? ¿Y si sólo le quedan 5 €?

Ejercicio 7. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crias y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas. ¿Cuántas vacas y ovejas tiene ahora? ¿Cuántos animales en total? Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas:



Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales
80	150				
			65	120	
73					
				90	

Ejercicio 8. Propón una situación que se describa mediante cada una de las expresiones algebraicas siguientes:

(a) $a + 5 + 8 - 6$

(b) $b - 6 - 10 - 4$

(c) $12 - a - 5$

(d) $7 + b - 9 + 1$

(e) $a + 7 + a - 5 - a$

(f) $c + 15 + 237 - 14 - 1 - 237 + 2$

(g) $x - y + 10$

3. CÓMO COMPARAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 9. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

Ejercicio 10.
Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indicar cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

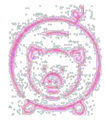
(a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

(b) El regalo cuesta 24 €.

(c) ¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Nota: En cualquiera de los casos, ¿crees que hay alguna manera justa de repartirse el cambio?

Ejercicio 12. Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:



María	Adriàn	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

(a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

(b) Repite el problema suponiendo que al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 € menos que Luisa. ¿Puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Ejercicio 13. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x + 1$ $\quad$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $\quad$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $\quad$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $\quad$ $25 - 2z$

E5) $a - 4b$ $\quad$ $a + b$

E6) $3n + 5$ $\quad$ $2n + 30$

Ejercicio 14. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) $b - 45$

E2) $r - 27 + 2r - 38 + 17 - r$

E3) $33 - 2a$

Ejercicio 15. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que $y - 13$

E2) 11 unidades menor que $2c - 1$

E3) 4 veces mayor que $2n + 3m$

E4) 11 veces mayor que $16 - 3a$

4. CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 16. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera.

(a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$

(b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$

(c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Ejercicio 17. Completa las frases siguientes:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Ejercicio 18. Completa las frases siguientes:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Ejercicio 19. Simplifica la siguiente expresión algebraica

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Lee toda la expresión de izquierda a derecha y observar si se suma y resta un mismo número. En ese caso, se tachan los dos y se vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos. Realiza esa operación todas las veces que se pueda.

2) Vuelve a leer toda la expresión y realiza primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

Ejercicio 20. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles:

(a) $p - 15 + 85 + 36 + 24 - 35 - 1$

(b) $100 - r - n + 48 - 99 - 18$

(c) $s + 72 - 67 + s + 67 - 48 - 72 - 5 - s + 50$

(d) $3f + 77 + 5f - 82 + 23 + 82 - 2f$

(e) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$

(f) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$

(g) $35 - a - a - a - a - a + 60$

5. CÓMO ENCONTRAR LA DIFERENCIA ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 21.

a) Al resolver varios problemas en una clase los alumnos han obtenido las soluciones siguientes:

Solución del Problema 1: 30 + (a + 10)

Solución del Problema 2: 30 – (a + 10)

Solución del Problema 3: 30 + (a – 10)

Solución del Problema 4: 30 – (a – 10)

Después el profesor les dice que el dato "a" puede valer 14, 15 ó 17. ¿Cuál será, en cada caso, la solución numérica de cada problema? Completa la tabla siguiente:

a	a + 10	a – 10	Solución Prob. 1	Solución Prob. 2	Solución Prob. 3	Solución Prob. 4
14						
15						
17						

b) ¿Podemos quitar los paréntesis en las expresiones algebraicas anteriores? ¿Cómo tendremos que hacerlo para que las soluciones de los problemas sigan siendo las mismas?

Solución del Problema 1: 30 + (a + 10) =

Solución del Problema 2: 30 – (a + 10) =

Solución del Problema 3: 30 + (a – 10) =

Solución del Problema 4: 30 – (a – 10) =

c) Completa la tabla siguiente utilizando las nuevas expresiones y corrígelas si los resultados de la tabla no son los mismos que en la tabla anterior.

a	Solució Prob. 1	Solució Prob. 2	Solució Prob. 3	Solució Prob. 4
14				
15				
17				

Ejercicio 22.
a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) ¿Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
d	
	e

Ejercicio 23.
a) Ordena de mayor a menor las siguientes expresiones algebraicas:

i) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$

ii) $10m - (30 - 5m) + 25$

iii) $6m - 1 + 2m + 31 - (6m + 31)$

b) Calcula la diferencia de las expresiones mayores respecto a las menores.

Ejercicio 24.
Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

6. CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS CON PARÉNTESIS

Ejercicio 25.
a) Efectúa les operaciones siguientes, teniendo en cuenta que les operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) 12 – (8 – 3)

b) 12 – (8 + 3)

c) 12 + (8 – 3)

d) 12 + (8 + 3)

b) Efectúa les operaciones siguientes:

e) 12 – 8 – 3

f) 12 – 8 + 3

g) 12 + 8 – 3

h) 12 + 8 + 3

c) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado a), las operaciones del apartado b) que tienen el mismo resultado:

Apartado a)	Apartado b)
12 – (8 – 3)	
12 – (8 + 3)	
12 + (8 – 3)	
12 + (8 + 3)	

Ejercicio 26.
Completa las siguientes frases:

Sumar a + b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Sumar a – b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Restar a + b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Restar a – b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Ejercicio 27.
Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

2) $17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$

3) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

5) $20 - 10z - (5z - (10 - 2w))$

Ejercicio 28.

Cuando las expresiones algebraicas sólo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo de hacer.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) $45 - (371 - 87) + 372 - 87$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

b) $8 + 20 - (45 - 44 + 3)$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

c) $13 + (27 - 20) - (25 - 10 - 15)$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

d) $5 - (4 - (3 - (2 - 1)))$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

e) $4578 + 3127 - 578 - (127 + 841 + 512) + 841 + 12$

Deshacer paréntesis: SÍ NO

Ejercicio 29.
Busca la manera más sencilla posible de efectuar la operación

678 + 99

Utiliza el mismo criterio para efectuar las siguientes operaciones:

47 + 98

157 – 99

123 + 39

87 – 29

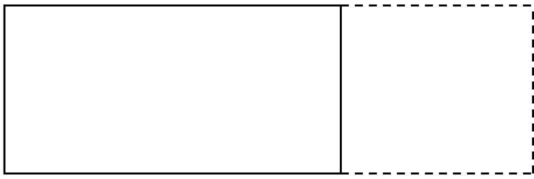
427 + 397

212 – 198

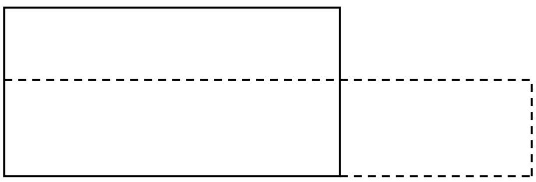
7. CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 30. Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es A = b x a, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura). Si nos dicen que en un rectángulo es a = 3 cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

Y si ahora me dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, ¿cuánto habrá aumentado el área del rectángulo?



Ejercicio 31. Si en un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm, el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm., ¿qué pasara con las áreas de los rectángulos?, ¿disminuyen, aumentan?, ¿cuánto?



Ejercicio 32. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo de los tres rectángulos.

b) ¿Qué pasara con las áreas de los últimos rectángulos?, ¿disminuyen o aumentan respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

Ejercicio 33. Si a partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 6 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 4 cm y el desconocido lo disminuimos en 2 cm, y otro en que aumentamos el lado conocido en 2 cm y disminuimos el lado desconocido en 4 cm. ¿Qué pasara con las áreas de estos últimos rectángulos? ¿Disminuyen, aumentan? ¿Cuánto?

a) Haz un dibujo de los tres rectángulos.

b) ¿Qué pasara con las áreas de los últimos rectángulos?, ¿disminuyen o aumentan respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

Ejercicio 34. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a)$

b) $3p + 6q - 3(p + 12 + 2q)$

c) $n(3 + 7n - 6) - m(5 - 6m + 2)$

d) $3(6 - 5(3b - 4 + c) + 10b) + 2(5b - 2c)$

e) $7(5 - a) + 11(5 - a) - 9(5 - a)$

Ejercicio 35. Completa las siguientes frases:

Sumar $2(a + b)$ es lo mismo que _______________ 2a y ________________ 2b.

Sumar $2(a - b)$ es lo mismo que _______________ 2a y ________________ 2b.

Restar $2(a + b)$ es lo mismo que _______________ 2a y ________________ 2b.

Restar $2(a - b)$ es lo mismo que _______________ 2a y ________________ 2b.

Ejercicio 36. Tres rectángulos tienen un lado común que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, $6 + 2a$ cm^2 y $6 - 4a$ cm^2.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo

b) ¿Cuál es la diferencia entre los lados distintos de los rectángulos?

Ejercicio 37. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a)36t – 4 es ____ veces _______ que 18t – 2

b) 216(2n +3m) – 10(2n + 3m) es ____ veces ________ que 6m + 4n

c) 3(30c – 60 + 20b) es ____ veces _______ que 5(6b +9c – 18)

Ejercicio 38. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17 - 4\cdot3) + 5 - 3^3$

b) $(9^2 - 7^2) - (9 - 7)^2$

c) $47(4\cdot15 - 35) - 17\cdot25$

d) $45 - 5(20 - 4(15 - 3(10 - 6)))$

e) $8 + 2\cdot6 - 5\cdot6 + 9\cdot6 - 4\cdot6$

Ejercicio 39. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

8. CÓMO OPERAR LOS NÚMEROS CON SIGNO

Ejercicio 40. Alberto juega a las canicas. En la primera partida pierde 3 canicas, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco canicas y en la cuarta pierde 4 canicas.

a) ¿Cuántas canicas ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de canicas que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de canicas que ganó o perdió en total
+4	
–6	
	+5
	–3

Ejercicio 41. Alberto es muy despistado y después de jugar dos partidas sólo se acuerda de que en la primera gano cuatro canicas y de que en total ha ganado canicas. Ana también ha jugado a las canicas y sabe que en la primera partida perdió dos canicas y que también vuelve a casa con canicas de más.

a) Escribe el número de canicas que ganó o perdió Alberto y el número de canicas que ganó o perdió Ana y la diferencia entre ellas.

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de canicas que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	Nº de canicas que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre las canicas ganadas en total por Alberto y las ganadas en total por Ana
a	b	
+3	-1	
–3	+4	
+2		+3
–1		+4
	+5	–2
	–2	+2

Ejercicio 42. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de canicas. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

E1) $p - q + 10$ siendo $p = +7$ y $q = +3$

E2) $12 - x - y$ siendo $x = -5$ e $y = +8$

E3) $2(6 - a)$ siendo $a = -4$

E4) $a - 3(b - 1)$ siendo $a = 2$ e $y = -6$

E5) $3(2 - 3n) - 2(3 - m)$ siendo $n = -5$ y $m = 1$.

Ejercicio 43. Efectúa las siguientes operaciones:

E1) $(-200) + (+300) + (-100) + (-100)$

E2) $(+37) - (-40) - (+23) + (-17)$

E3) $8 + 2((-72) - (-12)) - 18$

E4) $(4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$

E5) $((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$

Ejercicio 44. Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Ejercicio 45.

a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

1) 6 sobre cero y 5 bajo cero

2) 7 sobre cero y 2 sobre cero

3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos T a la temperatura más alta y t a la más baja, utiliza la fórmula T – t para calcular la diferencia de temperaturas en los casos anteriores. ¿Se obtienen las mismas diferencias en uno y otro caso?

Ejercicio 46. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es negativa eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo.
Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo < ó > entre ellos.

a) (+12) – (+8) +12 +8

b) (+5) – (–10) +5 –10

c) (–6) – (+2) –6 +2

d) (–15) – (–3) –15 –3

a) (–11) – (+11) –11 +11

a) (–2) – (–6) –2 –6

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo + ó –. Sabemos además como sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó –. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo – se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de +2 y que +2 es el opuesto de –2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

Ejercicio 47.

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números

+14, –18, +36, +4, –12, –5, –20, +10, +8, 0

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números

7, –7, 1500, –3568, –3569, –83, 1, 13, –100, 5

Ejercicio 48

a) Coloca el signo < ó > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras solo pueden tomar valores positivos:

1) 9 – a _____ 6 – a

2) 4q – 5 _____ 4q – 8

3) z + 2 ______ 2z + 5

4) d __________ – d

5) m – 2n ________ 3m – n

b) Coloca de nuevo el signo < ó > entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras pueden tomar valores positivos y negativos:

1) 9 – a ______ 6 – a

2) 4q – 5 ______ 4q – 8

3) z + 2 _______ 2z + 5

4) d __________ – d

5) m – 2n ________ 3m – n

c) En las desigualdades anteriores, a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad.

Ejercicio 49. Para que tipo de números son ciertas las siguientes desigualdades.

1) $a \leq a + b$

2) $z \geq z - x$

3) $b \leq b \cdot c$

4) $b \geq b : c$

Ejercicio 50. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

$(+3)(+5) =$

$(+3)(-5) =$

$(-3)(+5) =$

$(-3)(-5) =$

Ejercicio 51. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Ejercicio 52. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

(+3)(   ) = +12

(–7)(   ) = +21

(+5)(   ) = –15

(–6)(   ) = –24

Ejercicio 53. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

(+12) : (+3)

(+21) : (–7)

(–15) : (+5)

(–24) : (–6)

Ejercicio 54. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, donde *m* y *n* son números naturales, indica cuántas veces es mayor o menor una que otra.

E1) $16(2n + 3m) - 10(2n + 3m)$ $\qquad$ $4n + 6m$

E2) $18t - 2$ $\qquad$ $36t - 4$

E3) $5(6b + 9c - 18)$ $\qquad$ $3(30c - 60 + 20b)$

E4) $56(456x - 319y)$ $\qquad$ $7(456x - 319y)$

ANEXO IV.4

DIARIO DE SESIONES DE CLASE DE 1º ESO. CURSO 2008-09

Centro: IES Costa i Llobera (Barcelona)

Características del Centro: Fundado en 1958 como alternativa a la oferta escolar del momento: escuela pública estatal y escuela privada religiosa, el colegio Costa y Llobera buscaba atender a las aspiraciones educativas de una clase media, media-alta que no se sentía cómoda con la oferta escolar tradicional. Inicialmente fue un centro privado que se instaló en un piso de la Rambla de Cataluña, pero posteriormente fue cambiando de ubicación hasta llegar al barrio de Can Caralleu, al pie del Tibidabo. Su nombre es un homenaje al poeta mallorquín Miquel Costa y Llobera (1854-1922).

El Colegio era y sigue siendo un centro educativo muy comprometido con los movimientos de renovación pedagógica. Aunque desde 1989 es un centro público, sigue atendiendo a un alumnado procedente de familias con un nivel cultural y económico más bien alto y mantiene un equipo docente cohesionado gracias a su calificación como centro experimental, lo que le permite seleccionar al profesorado mediante un concurso de méritos restringido.

Curso académico: 2008-2009

Idioma utilizado en las clases: Catalán

Profesora: Mª Isabel Mestre

Datos del grupo: Es un grupo de 1º de ESO denominado 1º B y compuesto por 32 alumnos motivados, participativos y con un comportamiento correcto. Una de las alumnas es de integración y aunque permanece en clase con los demás, la profesora le propone tareas adaptadas a sus capacidades.

Horario: La experimentación se realiza en el horario de clases de la asignatura de Matemáticas: los jueves de 10 a 11, los viernes de 9 a 10, los martes de 11:30 a 12:30 y los viernes de 13:30 a 14:30. En las dos primeras horas el grupo está completo y se trabaja en grupo pequeño. En las dos últimas horas los alumnos se distribuyen por niveles de rendimiento académico, asistiendo los alumnos con mayores dificultades a la hora del martes y el resto del grupo a la del viernes. En estas últimas clases se trabaja individualmente y el trabajo propuesto es el mismo, pero esta organización permite una atención más personalizada. Por consiguiente, cada alumno tiene tres horas de clase a la semana pero en una de ellas, la de trabajo individual, no están todos los alumnos del grupo.

Observadoras: Eva Cid, Noemí Ruiz-Munzón y Marianna Bosch.

Características de la observación: Se observan las clases de jueves y viernes durante todo el periodo que dura la experimentación. Normalmente, hay una sola observadora en la sesión de clase que registra los hechos sucedidos mediante apuntes personales, fotos y fotocopia ocasional del trabajo de los alumnos.

Otras consideraciones: Como la experimentación se inició en el mes de enero, el grupo ya había recibido enseñanza sobre los números enteros porque es uno de los primeros temas que se trabajan en 1º de ESO, pero la profesora no tuvo inconveniente en realizarla al considerar que también le servía como introducción al álgebra.

SESIÓN 1: 22/01/09 (JUEVES, 10-11h)

La profesora comienza la clase, diciéndoles a los alumnos que durante unos días van a hacer un taller de matemáticas que es una nueva manera de aprender la unidad 4 del libro (la que se refiere a los números enteros que ya habían estudiando al principio del curso), que deberán trabajar en grupos de cuatro alumnos y que no tendrán mucho trabajo para casa, pero sí en clase. También les comenta que durante aproximadamente tres semanas vendrán una o dos personas a observar las clases.

Los alumnos mueven las mesas para trabajar formando grupos de cuatro alumnos. Se forman ocho grupos. La profesora controla la formación de grupos, asegurándose de que se mezclen niños y niñas con distintos niveles de conocimiento. La formación de grupos es rápida porque el trabajo en grupo forma parte del funcionamiento habitual del centro.

La profesora les pide que saquen una hoja cuadriculada y el estuche y les reparte el material titulado *1: Problema inicial*. Les avisa de que tendrán que pasar a limpio en casa lo que hayan hecho en clase y les recuerda que también habrán de entregar un dossier al finalizar la tanda de sesiones del taller.

Antes de comenzar la resolución del problema inicial, la profesora comenta que el problema que ahora les reparte deben intentar resolverlo utilizando las operaciones y herramientas que ya conocen y que lo primero que tienen que hacer es leerlo con detenimiento.

Los grupos hacen como que leen el enunciado y llaman a la profesora para preguntarle qué tienen que hacer. Ésta les dice que eso lo tienen que averiguar ellos, que deben pensar y discutir entre ellos y algo se les ocurrirá. Pasado el primer momento de desorientación todos los grupos se ponen a trabajar y resuelven los apartados Aa) y Ab) sin grandes dificultades. Unos grupos recurren a establecer la relación entre fichas blancas y rojas, reduciendo el cómputo de fichas ganadas a fichas rojas en el apartado a) o a fichas blancas en el apartado b).

Aa) 1 blanca= 2 vermelles
Eva : 90 vermelles 20 blanques 20 x 2 = 40 vermelles
40 + 90 = 130
Bernat : 60 vermelles 40 blanques 40 x 2 = 80 vermelles
60 + 80 = 140
L'Eva té 130 fitxes y el Bernat té 140 fitxes, Guanya el Bernat.

Ab) Eva 20 blanques ->20 90 vermelles -> 180 blanques
Bernat 40 blanques -> 40 60 vermelles -> 120 blanques
Eva = 20 + 180 = 200 Bernat = 40 + 120 = 160
R: Guanya l'Eva

Otros grupos recurren a dar puntos a cada tipo de ficha:

Aa) b – 2
V – 1

20 f b
90 f v
40 + 90 = 130 p

40 f b
60 f v
80 + 60 = 140 p

Bernat

Ab)
1b -> E -> 20b + 180v = 200 p
2v -> B -> 40b + 60v = 100 p
Eva

Los grupos que han resuelto los apartados Aa) y Ab) dando puntos a las fichas blancas y rojas no tienen demasiados problemas para resolver los apartados Ac) y Ad):

Ac)
b ->3 -> E -> 60b + 180v = 240 p
v -> 2 -> B -> 120b + 120v = 240 p
Eva, Bernat

Ad)
b ->2 -> E -> 40b + 360v = 400 p
v -> 4 -> B -> 80b + 240v = 320 p
Eva

Ac) vermelles 5 blanques 6
Eva 20 blanques -> 120 90 vermelles -> 450
Bernat 40 blanques -> 240 60 vermelles -> 300
Eva = 120 + 450 = 570 Bernat = 240 + 300 = 540
R: Guanya l'Eva

Ad) vermelles 3 blanques 1
Eva 20 blanques -> 20 90 vermelles -> 270

Bernat 40 blanques -> 40	60 vermelles-> 180
Eva = 20 + 270 = 290	Bernat = 40 + 180 = 220
R: Guanya l'Eva	

Estos grupos dan un solo valor y consideran que con eso queda justificado el resultado. La profesora les sugiere que den más valores. Los que han dado valores pequeños se quedan muy sorprendidos cuando ven que en el apartado Ac), dependiendo de los valores que dan, se obtiene que gana Bernat, empatan o gana Eva. Los grupos que han dado valores altos y siguen dándolos, obtienen que siempre gana Eva.

En cambio, los grupos que han establecido una equivalencia entre rojas y blancas se encuentran con dificultades para resolver los apartados Ac) y Ad) porque la estrategia de resolución seguida anteriormente ya no les sirve y no aceptan dar puntos a las fichas porque no saben los puntos que vale cada ficha. La idea de dar puntuaciones al azar, pero conservando la diferencia entre las puntuaciones les resulta extraña. Cuando la profesora les sugiere que como “las fichas blancas valen dos puntos menos que las rojas” podemos suponer que “si las rojas valen 3, las blancas valen 1” varios alumnos disienten: “Sí, pero no sabemos exactamente cuántos puntos vale cada ficha”. La profesora insiste: “Pero eso no importa, lo que importa es la relación”. Finalmente, todos los grupos se deciden a dar puntuaciones a las fichas y construyen tablas de valores.

Solo tres grupos pueden plantearse el apartado Ba antes de que la profesora interrumpa el trabajo para hacer una corrección en la pizarra. Dos grupos proponen la solución del apartado Ac) porque lo han resuelto dando 3 puntos a la ficha blanca y 2 puntos a la ficha roja y han obtenido un empate entre Eva y Bernat. Otro grupo pregunta si es posible que los puntos de las fichas sean cero, ya que así empatarían Bernat y Eva. La profesora les dice que sí, que han obtenido una solución, pero les propone que encuentren otras. Los alumnos tantean valores sin llegar a ningún resultado.

A las 10:40, la profesora hace una puesta en común del trabajo realizado. Escribe en la pizarra el número de fichas de Eva y Bernat.

Eva 20 blanques y 90 vermelles
Bernat 40 blanques y 60 vermelles.

y pregunta a la clase quién gana. Responden que Bernat. Entonces pide a dos grupos que le digan cómo han resuelto la primera pregunta y escribe lo que le dictan en la pizarra. El primer grupo ha resuelto estableciendo la relación entre fichas blancas y rojas

a) 1b = 2v Guanya Bernat
Eva -> 20b = 40v -> 40v + 90v = 130v
Bernat -> 40b = 80v -> 80v + 60v = 140v

Una alumna, perteneciente a un grupo que ha dado puntos a las fichas dice que no entiende. La profesora tiene que explica que este grupo ha pensado en cambiar sus fichas blancas por fichas rojas y, por lo tanto, como todas las fichas rojas valen igual, al tener Bernat más fichas tendrá más puntos.

La otra técnica usada por los alumnos ha consistido en calcular los puntos para casos concretos. La profesora recoge en una tabla lo que le dictan los niños.

v	b	Eva	Bernat
1	2	130	140
2	4	260	280
4	8	520	560

Después pregunta si este segundo método nos asegura que siempre gana Bernat. Los niños que lo han utilizado opinan que sí, mientras que alguno de los que han utilizado el primer método dice que podría suceder que dando otros valores saliese distinto resultado.

Varios niños están confusos y hacen preguntas. No entienden por qué en la primera resolución se asocia el 1 con la letra b y el 2 con la letra v y en la segunda resolución se hace al revés. La profesora no es consciente de que está utilizando las letras con un doble sentido: como abreviatura de las palabras ‘blanque’ y ‘vermelle’ (sentido aritmético de la letra) en la primera resolución y como letra que indica el número de puntos de cada ficha (sentido algebraico de la letra) en la segunda resolución. Se desarrolla una pequeña discusión en la que ninguna de las partes entiende lo que dice la otra. Finalmente, la profesora zanja la cuestión alegando que los dos procedimientos son correctos puesto que llevan a la misma solución.

Se resuelve en la pizarra el caso Ab) de la misma manera. La profesora pregunta quién gana en el segundo caso y escribe:

b) Bernat   2 v = 1 b

Se genera una discusión porque bastantes alumnos no entienden que si “una ficha blanca vale la mitad de una roja” entonces “una ficha roja vale el doble que una blanca”. La profesora argumenta que si la roja vale 2 puntos y la blanca vale la mitad, valdrá 1 punto, por lo que la roja vale el doble que la blanca. No todos los alumnos quedan convencidos por el argumento de la profesora.

Al terminar de corregir en la pizarra el apartado Ab) la clase tiene que concluir y la profesora pregunta que cuál de los dos métodos utilizados es el más general. Los niños contestan que la tabla. La profesora explica de manera apresurada que el primer método sirve para cualquier valor de la fichas, mientras que el segundo método, que da valores para tres casos concretos, no asegura la solución en general. La clase termina.

Valoración

La sesión ha resultado fallida. El objetivo didáctico era que los alumnos vieran que un problema aparentemente aritmético no tiene solución en forma aritmética y necesita nuevas herramientas, pero el problema inicial es muy largo y la parte que los alumnos han resuelto no permite llegar a esta conclusión. Además, el hecho de que los alumnos que han llegado al apartado Ba) lo hayan podido resolver basándose en la solución obtenida en el apartado Ac) ha hecho todavía más inviable la consecución del objetivo didáctico propuesto.

Por otro lado, han aparecido hechos didácticos que no se habían previsto y que han retrasado el desarrollo de la sesión: el hecho de que la profesora no es consciente del diferente sentido de las letras en aritmética y en álgebra y el desconocimiento por parte de los alumnos de la reversibilidad de las comparaciones multiplicativas.

La profesora considera que no puede dedicar otra sesión al problema inicial por lo que se decide abandonarlo. Se toma nota de que el problema debe ser acortado y que el caso Ac) debe ser modificado para que no se obtenga un empate que permita utilizarse como solución en el apartado Ba).

SESIÓN 2: 23/01/09 (VIERNES, 9-10h)

La profesora reparte el material titulado *2. Cómo construir expresiones algebraicas* y dice a los alumnos que saquen una hoja para hacer los cálculos y que en casa los pasarán a limpio. Los alumnos mueven las mesas para ponerlas como el día anterior.

Los grupos empiezan a trabajar, mientras la profesora recorre los grupos asegurándose de que han pasado a limpio el trabajo del día anterior.

A los cinco minutos, un alumno dice que faltan datos y la profesora les dice que piensen en lo que pueden hacer para resolver el problema. Los grupos dan como solución la variación de tazos y empiezan el ejercicio 2.

Cuando llevan diez minutos trabajando, la profesora interviene diciendo a los alumnos que se fijen en que no se pregunta cuántos tazos tiene Laura de más o de menos que al principio, sino cuántos tazos tiene al final. Los alumnos responden unánimemente que no se puede saber mientras no se les diga cuántos tenía al principio. La profesora explica que eso sucede muchas veces en matemáticas, que hay que resolver problemas cuyos datos en parte se desconocen y que entonces se usa el álgebra: se sustituyen por letras las cantidades desconocidos y la solución es una fórmula en vez de una cantidad como sucede en aritmética. Les dice que pueden utilizar cualquier letra, *x*, *m*, *c*, *b*, *n*, etc. en lugar del dato desconocido.

Algunos grupos rehacen el ejercicio 1 introduciendo alguna letra y otros lo dejan como lo tenían. Varios alumnos preguntan que si se puede poner cualquier letra, la profesora les dice que sí y entonces discuten en los grupos la elección de letra.

En el ejercicio 2 todos los grupos terminan dando la solución mediante una fórmula, pero la tendencia mayoritaria es resolver el problema en forma aritmética e introducir la letra al final, después de realizar las operaciones pertinentes. También se observa que el significado que le dan a la letra es el habitual en aritmética: la letra no significa 'número de tazos o de pasajeros' sino 'tazos o pasajeros'. La profesora tiene que intervenir en los grupos para aclarar este aspecto.

Exercici 1) 9 -7 = 2, Laura té 2 tazos menys que al principi.

Exercici 2) En la tercera parada puja 1 passatger més
15 – 12 = 3 menys   nombre de passatgers = c+1

42 – 38 = 4 més
4 – 3 = 1 més

Exercici 1) Laura -> x tazos -> perd 9 tazos -> guanya 7 tazos = (x – 9) + 7 = x - 2
R: Laura té dos tazos menys.

Exercici 2) un tren x passatgers

1° parada -15 passatgers + 12 passatgers
2° parada -38 passatgers + 42 passatgers

1° parada = 15 – 12 = 3 passatgers = perd 3 passatgers
2° parada = 42 -38 = 4 passatgers = guayna 4 passatgers

3° parada = 4 – 3 = 1 passatger més

R: Arriba amb x + 1 passatgers.

Una alumna es contraria a la utilización de la letra *x* porque dice que se confunde con el signo de la multiplicación. La profesora le da la razón y sugiere que utilicen otras letras, aunque avisa de que, precisamente por ese motivo, el signo de la multiplicación en álgebra pasa a ser un punto.

Los grupos que escriben expresiones algebraicas antes o durante el transcurso de los cálculos recurren a expresiones parciales.

x = nombre de passatgers en començar.
15 – 12 = 3 x + 3 = c
c = nombre de passatgers que queden després de la primera parada.
42 – 38 = 4 c + 4 = f
f = nombre de passatgers que hi ha després de la segona parada.

Ejercicio 2)
N -15 + 12 = N – 3 = L
L -38 + 42 = L + 4 = P

(La profesora interviene para que relacionen N y P)

P= L + 4 = N – 3 + 4 = N + 1

a) x - 9 = x
x + 7 = x Li queden x tazos.

(La profesora les corrige y explica, llegando a $x - 9 + 7 = x - 2$)

b) x passatgers
x – 15 + 12 = x – 3
x -38 + 42 = x + 4   = x + 1

(Discuten entre el grupo porque no todos entienden cómo se llega a la conclusión.
x – 15 + 12 – 38 + 42

x   -3   + 4   = x + 1)

El único grupo que escribe la expresión x – 15 + 12 – 38 + 42 después ya no sabe qué hacer con ella.

Exercici 2)   x- 15 + 12 -38 + 42 = x
x =
Depèn del nombre de passatgers que hi havia al principi.

La profesora les propone: “Restar 15 y sumar 12 es lo mismo que…” El grupo tras alguna discusión llega a que es lo mismo que restar 3.

Durante toda esta fase no se observa que los alumnos hagan referencia a los números enteros estudiados en la unidad 4 del libro. Algunos alumnos parece que utiliza las reglas de suma de números enteros, pero no son conscientes de ello.

El ejercicio 3 resulta redundante porque ya han contestado a la pregunta en el ejercicio anterior y como hacen las operaciones en forma aritmética, la fórmula que finalmente escriben ya está simplificada. Además, todos los grupos preguntan qué significa ‘expresión algebraica’.

El ejercicio 4 no presenta problemas, aunque varios grupos rehacen todas las operaciones para obtener el resultado numérico, en vez de utilizar la fórmula. Curiosamente, los grupos no tienen dificultades para rellenar la última fila de la tabla del ejercicio 4 a pesar de que supone un cambio de letra y pasar de una función a su inversa.

A las 9:45, todos los grupos menos dos empiezan el ejercicio 5, pero a esta hora los alumnos están ya bastante cansados y además tienen que acabar la clase a las 9:55 para asistir a otra actividad. Los grupos que resuelven el ejercicio lo hacen de forma aritmética y tienen dificultades para incorporar la letra a la solución porque ahora es una letra que no ocupa la primera posición de la expresión algebraica y está precedida de un signo ‘menos’.

Ejerxici 5)
120 – 40 = 80
80 – 15 = 65
Li queden 65 € menys el qui li han costat les sabates

(Ante el requerimiento de la profesora de que expresen el resultado mediante una fórmula y después de algunas vacilaciones y dudas escriben:)

z = preu de les sabates
65 – z
(Algunos grupos escriben z = sabates y la profesora tiene que corregirles)

No queda tiempo para hacer una puesta en común, aunque la profesora ha revisado el trabajo de casi todos los grupos.

Valoración

La sesión se ha desarrollado con normalidad. La introducción de las letras en las soluciones de los problemas ha tenido una desigual aceptación. Muchos alumnos no entienden la necesidad de escribir una letra donde se puede dar una respuesta numérica acompañada de una frase que contextualice dicha respuesta, pero aceptan escribir la letra a petición del profesor. Por supuesto, esa letra no interviene en los cálculos, éstos se hacen de forma aritmética y solo al final se escribe una expresión algebraica. Seguimos en el campo de la aritmética, pero los alumnos empiezan a aceptar la introducción de la letra en las soluciones, aunque después no hacen uso de ella. De hecho, en el ejercicio 4, varios grupos vuelven a rehacer todos los cálculos, sin utilizar la fórmula obtenida.

SESIÓN 3: 23/01/09 (VIERNES, 13:30-14:30h)

La sesión se realiza en el aula habitual con 21 alumnos de buen nivel académico. Los otros 11 alumnos tendrán esta misma clase el martes, 27 de enero. Los alumnos siguen trabajando en el material de forma individual (comentando con el compañero, no entre los miembros de grupo). Afrontan los ejercicios 6 y 7, aunque algunos alumnos todavía están en el ejercicio 5.

Un alumno pregunta si todas las respuestas deben darse utilizando la letra *x.* La profesora le contesta que pueden dar la respuesta con la letra que quieran.

Algunas anotaciones de los alumnos al ejercicio 5.

Alumno A
120 – 40 – s -15 = 120 – s -55 = 65 – s   s = sabates

Alumno B
a – 30 = o (letra o)   d + o = 75
a – 15 = u   u + d = 90

Alumno C
120 – 40 = 80   x = cost de les sabates
80 – x = p   p = resta dels pantalons i les sabates
p – 15 = M   80 – x – 15 = M

En el ejercicio 6, la mayor parte de los alumnos dan una solución de tipo aritmético, diciendo que si antes de comprar los zapatos tenía 65€ y después 30€ los zapatos habían costado 65 – 30 = 35€, pero algunos escriben la ecuación 65 – s = 30 y obtienen la solución diciendo que 35 es lo que hay que restar a 65 para obtener 30.

En cuanto al ejercicio 7, escriben las dos primeras filas de la tabla. Aunque algunos alumnos se equivocan en los cálculos, todos tienen claro lo que hay que hacer en la primera fila. Respecto a la segunda fila, no todos los grupos reconocen las operaciones a efectuar y lo resuelven por medio de tanteos.

vaques 21 (v) cries nombre inicial 80
+ animals = 230 inici
ovelles 57(o) cries nombre inicial 150

Nombre final vaques = 21 + 80 – 30 = 71
+ animals = 208 final
Nombre final ovelles = 57 + 150 – 70 = 137

En la tercera fila, como no tienen datos suficientes para completarla, algunos grupos no saben qué hacer. Ante la sugerencia de que pongan letras, colocan una letra en la casilla "nº inicial de ovejas" y siguen rellenando las siguientes casillas. Algunos alumnos ponen letras en varias casillas y hay que hacerles la consideración de que no pongan más que las letras imprescindibles.

Cuando llegan a la última casilla de la tercera fila, se vuelven a bloquear porque es la primera vez que tienen que sumar una expresión algebraica y un número. Finalmente escriben 64 + j – 13, suponiendo que se utilice la letra *j* para indicar el número inicial de ovejas. Prácticamente, ningún alumno simplifica la expresión. No se sienten con autoridad para efectuar la resta entre números porque en medio hay una letra.

Lo mismo sucede en la cuarta fila y se agrava en la quinta fila, pues en ella tienen que manejar dos variables y llegar a escribir la suma de las expresiones v – 9 y j – 13. Inicialmente no se atreven a hacerlo y solo cuando la profesora les anima a escribir dicha suma, lo hacen y preguntan a continuación si está bien escrito. En ningún caso simplifican la expresión resultante y de nuevo tiene que intervenir la profesora preguntando a qué equivale restar primero 9 y después 13. Ante esta sugerencia, varios grupos llegan a la expresión simplificada v + j – 22.

Todos los alumnos completan el ejercicio 7 y comienzan el 8. No tienen dificultades para inventar enunciados de problemas, algunos muy elaborados, que tengan como solución dichas expresiones algebraicas, pero no las simplifican, salvo algún alumno aislado. Algunos alumnos proponen enunciados como el siguiente:

Pau té *a* + 5 llapis, compra 8 llapis y perd 6.
¿Quants llapis té Pau?

La clase se acaba y no hay tiempo de realizar una puesta en común. La profesora decide que les dará las soluciones de los ejercicios a principios de semana y que el jueves preguntará si hay alguna duda y solo se corregirán aquellos ejercicios que hayan presentado dificultades.

Valoración

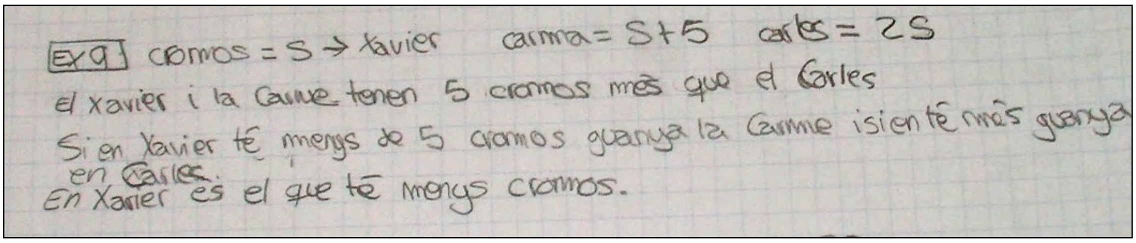
Los alumnos siguen muy apegados al modo de hacer aritmético. Todos sus razonamientos son de tipo aritmético y no han sido sustituidos por el cálculo algebraico, entre otras razones porque no han tenido necesidad de hacerlo. Cuando en el ejercicio 7 se han visto obligados a operar por primera vez con expresiones algebraicas, se observa que les resulta extraño pensar en operaciones entre términos que no sean números. Resulta muy curioso el hecho de que ningún alumno relaciona la simplificación de la expresión v – 9 + j – 13 con las operaciones entre números enteros que estudiaron al principio de curso.

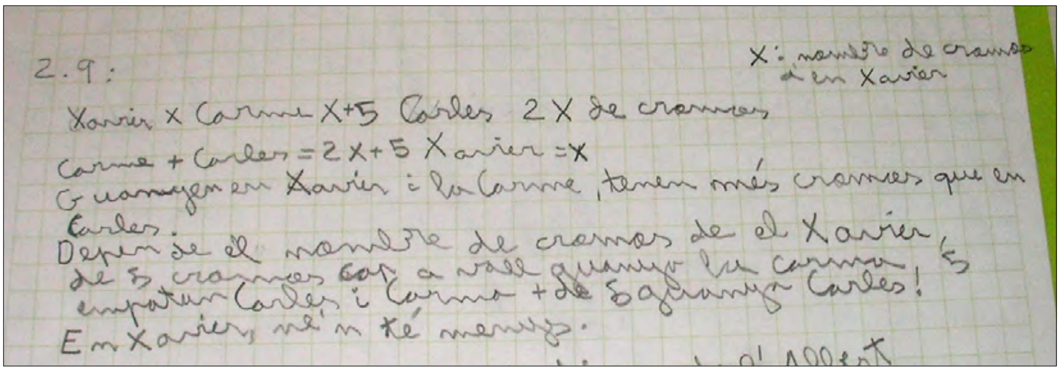
El ejercicio 8 debe ser modificado. No tiene sentido poner expresiones algebraicas demasiado complejas ni tantos apartados.

SESIÓN 4: 29/01/09 (JUEVES, 10-11h)

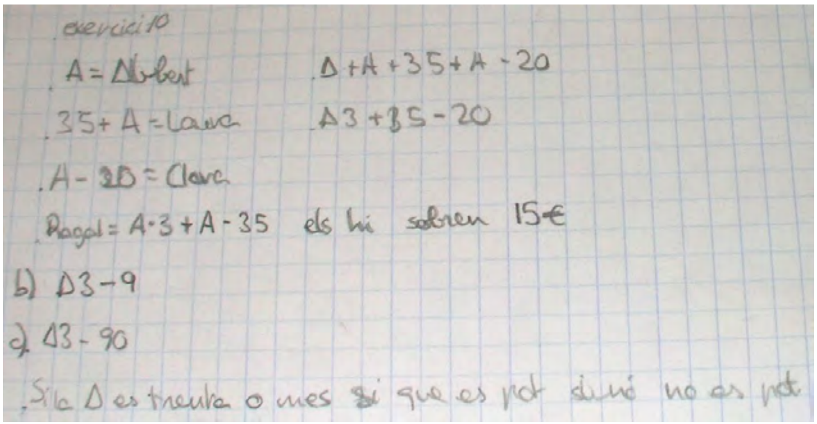
La profesora propone a los alumnos que terminen el ejercicio 8 en casa y que ya les avisará de cuándo tienen que entregarlo. Reparte el material titulado *3. Cómo comparar expresiones algebraicas*. Después hace una breve explicación sobre la comparación de expresiones algebraicas. Avisa que a partir de ahora el signo x del producto se sustituye por un punto si se trata de un producto entre números o por nada si intervienen letras. También explica que 2x significa x + x. Por último pregunta a la clase: "¿Qué significa comparar? ¿Cuál de estas dos expresiones es mayor, x ó 2x, p ó p – 8?" Los alumnos responden correctamente y la profesora les dice que comiencen a trabajar en grupos. Vuelve a recordarles que primero hagan la tarea en hojas aparte y ya lo pasarán a limpio cuando se hayan corregido los ejercicios.

Los grupos resuelven los ejercicios 9 y 10 sin demasiadas dificultades. En el ejercicio 9, incluso llegan a establecer los valores que hay que dar a la variable para que la desigualdad tenga un sentido u otro. Para ello, algunos grupos hacen una tabla de valores y otros lo deducen, sin más.

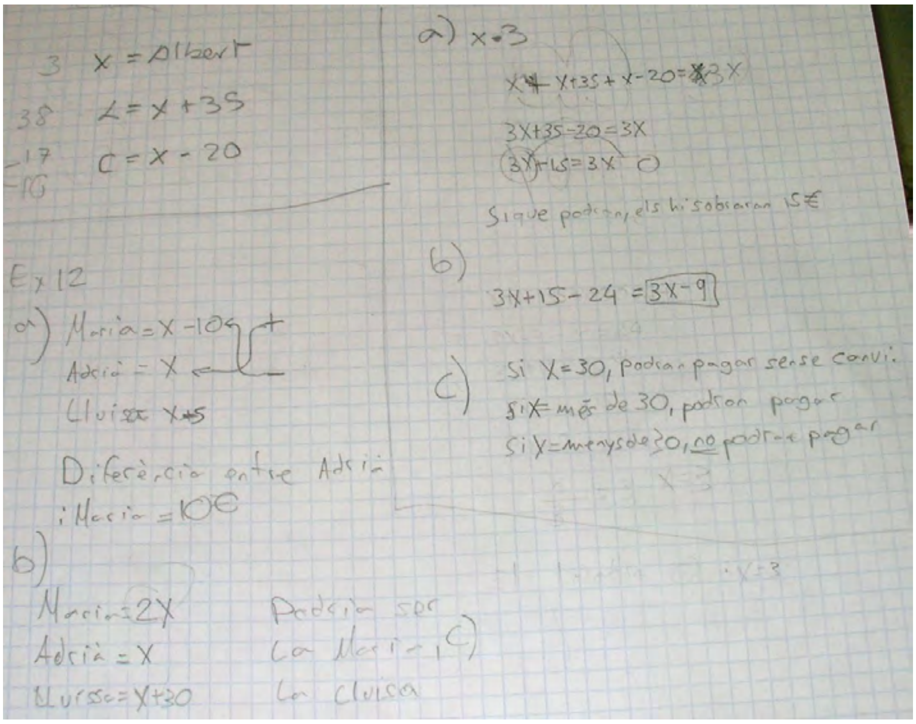

Ex 9 cromos = S → Xavier carma = S+5 carles = 2S
el xavier i la Carme tenen 5 cromos més que el Carles
Si en Xavier té menys de 5 cromos guanya la Carme i si en té més guanya en Carles.
En Xavier és el que té menys cromos.


2.9: X: nombre de cromos d'en Xavier
Xavier X Carme X+5 Carles 2X de cromos
Carme + Carles = 2X+5 Xavier = X
Guanyen en Xavier i la Carme, tenen més cromos que en Carles.
Depen de el nombre de cromos de el Xavier, de 5 cromos cap a vall guanya la Carme, 5 empaten Carles i Carme + de 5 guanya Carles!
En Xavier sempre té menys.

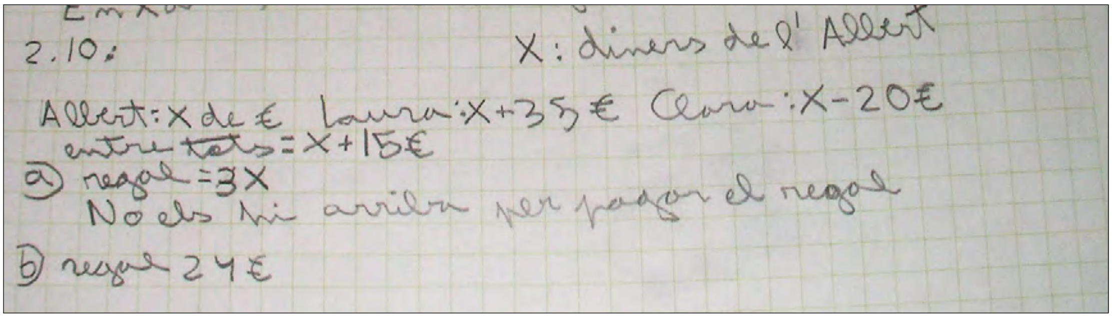
En el ejercicio 10, todos los grupos escriben correctamente el dinero que tienen los tres personajes del enunciado, pero bastantes grupos tienen dificultades para expresar algebraicamente la suma total de dinero y la diferencia entre el dinero que tienen y el precio del regalo. Son las primeras veces que se encuentran con la suma repetida de una letra y no están familiarizados con los coeficientes de las letras. Sin embargo, la mayoría de los grupos dan el resultado correcto porque siguen haciendo razonamientos aritméticos que les permiten controlar el resultado, aunque el cálculo algebraico no sea correcto.



Pero también hay grupos que empiezan a sustituir los razonamientos aritméticos por cálculo algebraico. En estos casos, se les anima a pensar en términos de “sumar y restar es lo mismo que…” lo que favorece la corrección del cálculo pues es un razonamiento que los alumnos entienden.



Algunos grupos no llegan a la solución correcta y hay que hacérselo ver y ayudarles a que la encuentren. En el caso siguiente, el problema está en la expresión algebraica del dinero que tienen entre los tres amigos.


2.10: X: diners de l' Albert

Albert: X de € Laura: X+35 € Clara: X-20€
entre tots = X+15€
a) regal = 3X
No els hi arriba per pagar el regal

b) regal 24€

Acaba la clase habiendo completado todos los grupos el ejercicio 10 y empezando algunos grupos el ejercicio 12 (hay un error en el material entregado a los alumnos y falta el ejercicio 11).

Valoración

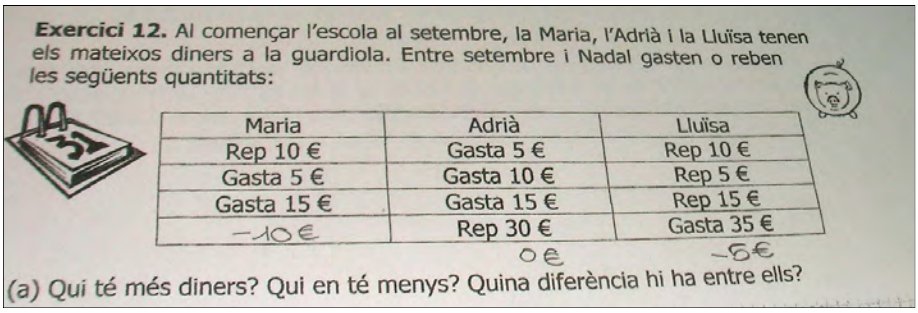
Se observa que los alumnos están ya más familiarizados con las expresiones algebraicas y son capaces de razonar sobre ellas y simplificarlas y operarlas en casos sencillos. También empiezan a familiarizarse con la comparación de expresiones, entendiendo siempre que las letras solo pueden tomar valores naturales. Algunos alumnos empiezan a asumir la suma de enteros entendida como composición de traslaciones.

SESIÓN 5: 30/01/09 (VIERNES, 9-10h)

La profesora les dice a los alumnos que está muy contenta de cómo van las cosas pero que no deben pelearse (a veces, las discusiones en los grupos son un poco subidas de tono), que si no entienden alguna cosa que levanten la mano y pregunten. También les dice que se tienen que ayudar los unos a los otros y da un toque de atención a un grupo que es el que trabaja menos y tiene peor actitud en clase.

Los grupos siguen trabajando y se encallan casi todos en el problema 12. La profesora y la observadora (se ve obligada a intervenir ante el bloqueo generalizado) tienen que pasar por las mesas ayudando a los diferentes grupos en este problema.

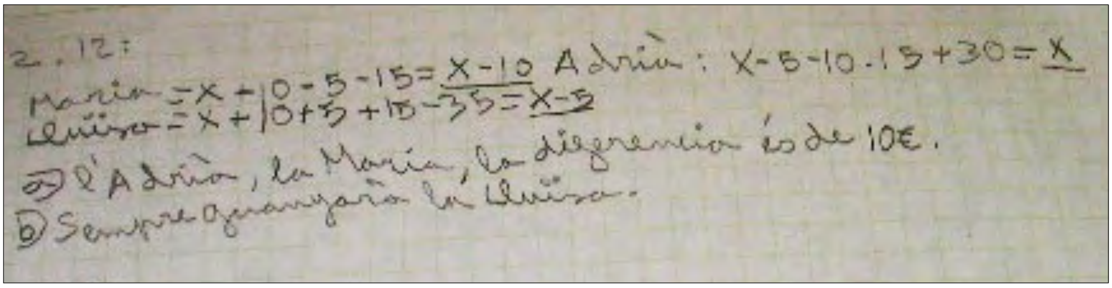
En el apartado a) la mayoría de los grupos obtienen el resultado de cada columna sin utilizar expresiones algebraicas. Algunos expresan el resultado en términos de "gastan o reciben" y otros utilizando números precedidos de un signo. Es la primera vez que algunos grupos recurren a los números con signo aislados.


Exercici 12. Al començar l'escola al setembre, la Maria, l'Adrià i la Lluïsa tenen els mateixos diners a la guardiola. Entre setembre i Nadal gasten o reben les següents quantitats:

Maria	Adrià	Lluïsa
Rep 10 €	Gasta 5 €	Rep 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Rep 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Rep 15 €
−10 €	Rep 30 €	Gasta 35 €
	0 €	−5 €

(a) Qui té més diners? Qui en té menys? Quina diferència hi ha entre ells?

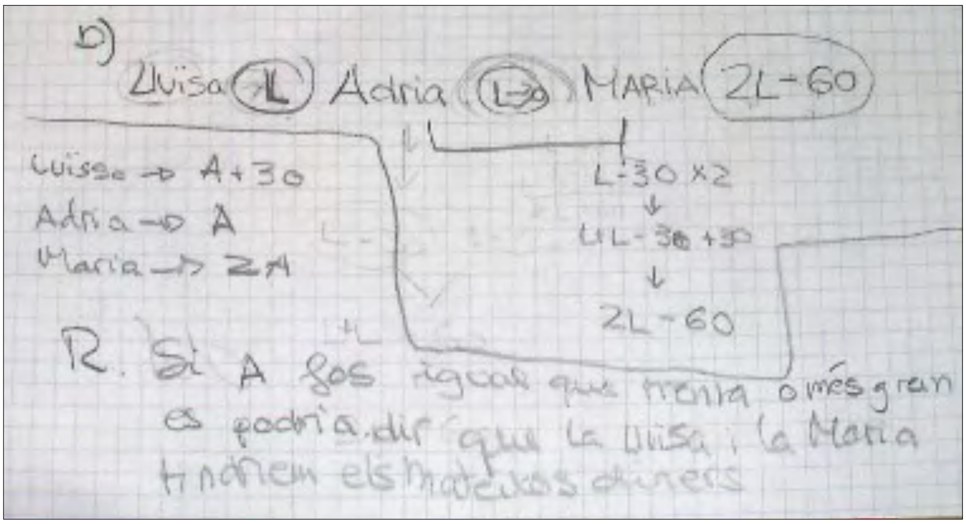
A partir de ese resultado, escriben las expresiones a – 10, a, a – 5 y las comparan correctamente. Algún grupo escribe directamente las expresiones algebraicas y las simplifica.



La dificultad importante se plantea en el apartado b) porque la primera frase comparativa dice que “María tiene el doble que Adrián”, lo que lleva a los alumnos a expresar con un letra el dinero inicial de Adrián y, a partir de él, el de María. Pero la siguiente frase comparativa: Adrián tiene 30€ menos que Luisa” establece el dinero de Adrián en función del dinero de Luisa. Todos los grupos que adjudican una letra al dinero de Adrián se encuentran en dificultades cuando intentan expresar el dinero de Luisa en función del de Adrián.

Es necesario ir grupo por grupo haciendo la siguiente pregunta: “Si Adrián tiene 30€ menos que Luisa, ¿cuántos euros de más o menos tendrá Luisa respecto a Adrián?”. La respuesta resulta compleja para los alumnos. Se ve que no han trabajado nunca la reversibilidad de las frases comparativas. Finalmente llegan a las expresiones, ***a*** (dinero inicial de Adrián), 2a (dinero inicial de María) y a + 30 (dinero inicial de Luisa), pero parte de los alumnos no acaban de entender el razonamiento.

Un grupo, al llegar al escollo de la segunda comparación, rectifica y decide empezar por el dinero de Luisa con lo que resuelve la situación, aunque después, al intentar expresar el dinero de María se encuentra con la dificultad de tener que multiplicar la expresión L – 30 por 2.



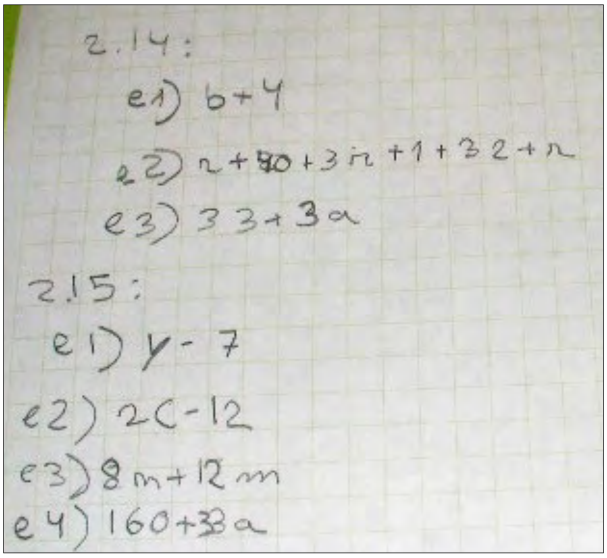
Un alumno propone transformar el producto en suma de la expresión consigo misma y de esa manera se llega a la solución, pero el resto de los miembros del grupo no entienden el razonamiento. La profesora les pregunta si se acuerdan de la propiedad distributiva y como no se acuerdan se la explica. No parecen muy convencidos por lo que la profesora les sugiere que empiecen por el dinero de Adrián e inviertan la segunda frase comparativa. Finalmente, después de reflexionar sobre dicha inversión, aceptan la sugerencia.

Para cuando se supera este escollo, la mayor parte de los grupos han perdido el norte y es necesario decirles que vuelvan a leer el enunciado, para saber que es lo que deben buscar a continuación. La resolución del ejercicio exige llegar a las expresiones, a (dinero final de Adrián), 2a – 10 (dinero final de María) y a + 25 (dinero final de Luisa), y compararlas entre sí. La mayor parte de los grupos se limita a dar soluciones parciales como que “Adrián tiene menos dinero que Luisa” y que “en los demás casos depende”. La profesora considera que ya no se puede dedicar más tiempo a este ejercicio y acepta las soluciones parciales, e incluso erróneas, de los grupos y les dice que pasen al ejercicio siguiente.

El ejercicio 13 se desarrolla sin mayores incidentes. Los grupos hacen razonamientos del tipo: “Sumar 1 es más que restar 10”, restar 2z es más que restar z”, etc. y contestan correctamente. En el apartado E6) todos los grupos son conscientes de que el sentido de la desigualdad depende de n, pero no todos son capaces de encontrar la solución de la inecuación. Los que lo hacen, dan valores naturales a n, encuentran el valor que resuelve la ecuación y, a partir de ahí, hacen razonamientos más o menos completos. Dos grupos son capaces de contestar con toda precisión, indicando las tres posibilidades:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si } n = 25,\ 3n + 5 = 2n + 30\\ \text{Si } n > 25,\ 3n + 5 > 2n + 30\\ \text{Si } n < 25,\ 3n + 5 < 2n + 30\end{array}}$$

También resuelven con rapidez el ejercicio 14, aunque la mayor parte de los alumnos no simplifican la expresión E2). En el ejercicio 15, hay que llamarles la atención sobre la distinción entre comparación aditiva y multiplicativa. Es algo con lo que los alumnos no están familiarizados pero, ante la explicación de la profesora, asumen la diferencia sin dificultad, aunque algunos se equivocan en los cálculos.



A las 9:40 la profesora interrumpe el trabajo de los grupos para corregir los ejercicios de la sesión 2. Les pide que le presten atención y que saquen las hojas en las que han realizado el trabajo para efectuar las correcciones oportunas. La profesora les recuerda el porqué ponemos letras: cuando no conocemos algún dato del problema, ponemos una letra y de esa manera podemos resolver el problema. La solución ya no es numérica, es una fórmula, pero cuando nos dan el dato ya no tenemos que volver a pensar en cómo se resuelve el problema, solo tenemos que aplicar la fórmula.

Después la profesora empieza a escribir las soluciones de los distintos ejercicios de la primera sesión insistiendo en que los alumnos comprueben si coinciden con sus soluciones. Una vez que escribe un resultado, por ejemplo, el del ejercicio 1,

Nombre de tazos inicials = b
Nombre de tazos finals = b – 2

pregunta a los alumnos qué han escrito ellos. Los niños lo dicen de viva voz y como unos y otros han usado distintas letras, la profesora les pregunta si todas las soluciones son válidas. Los alumnos responden que sí, porque la expresión es la misma aunque varíe la letra. No parecen tener dificultades en asumir la convencionalidad de la letra y la igualdad de expresiones en las que se utilizan distintas letras para indicar la misma cantidad.

A cada ejercicio resuelto, la profesora va preguntando si todo el mundo lo entiende y si tienen resultados diferentes. Los alumnos responden diciendo que no tienen dudas ni resultados diferentes.

La profesora recuerda a los alumnos que deben pasar el trabajo a limpio y a bolígrafo. Son sus deberes para el próximo día.

Valoración

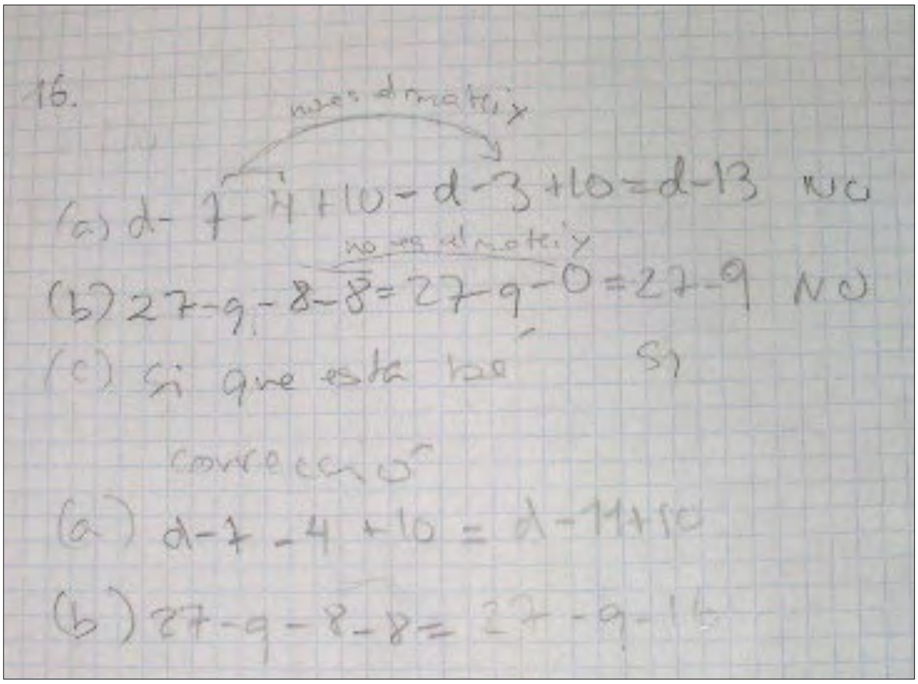
El ejercicio 12 en su apartado b) es de una gran complejidad pues, para establecer las cantidades de dinero inicial y final, es necesario “darle la vuelta” a una de las frases comparativas o aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y se observa que los alumnos no están familiarizados con ninguna de las dos técnicas. Además, la resolución del problema exige comparar tres expresiones entre sí y, en dos de las comparaciones, el sentido de la desigualdad depende de los valores de la variable. Por último, en una de las comparaciones el valor en el que la igualdad cambia de sentido es alto ($a = 35$) y difícil de encontrar haciendo tablas de valores.

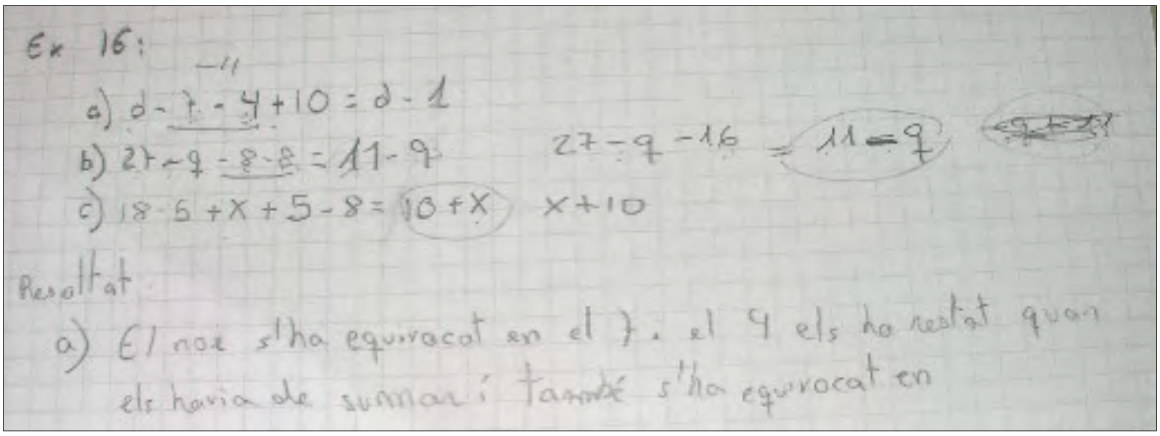
Los alumnos han aceptado sin dificultad la comparación entre expresiones algebraicas y las resuelven incluso cuando el sentido de la desigualdad depende del valor de la variable, siendo capaces de encontrar los valores que verifican la igualdad siempre que no sean muy altos. También se van familiarizando con el hecho de que la existencia de datos desconocidos no impide dar respuestas a las preguntas que plantea el enunciado del problema.

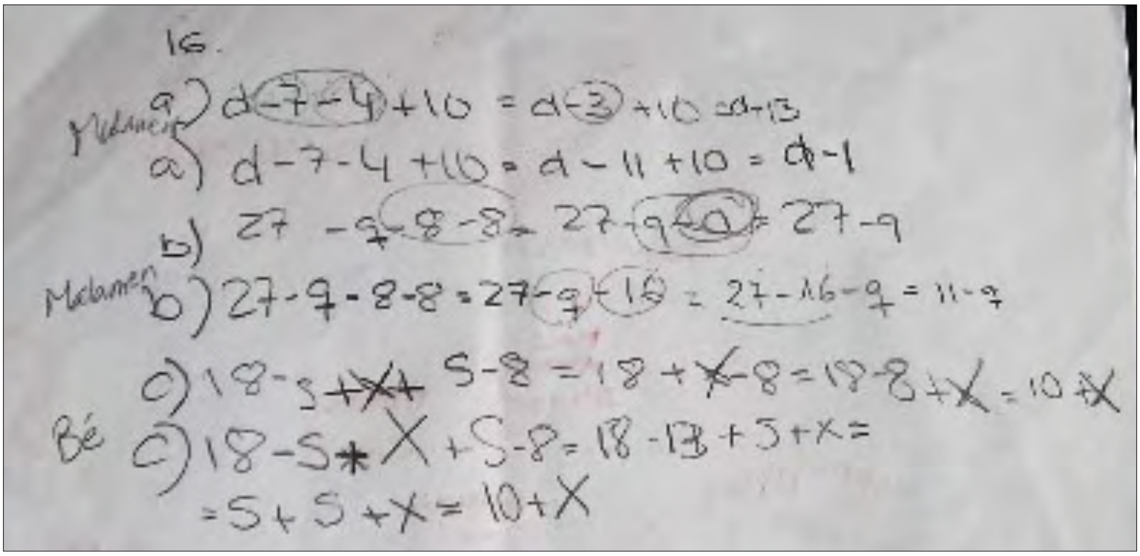
SESIÓN 6: 30/01/09 (VIERNES, 13:30-14:30h)

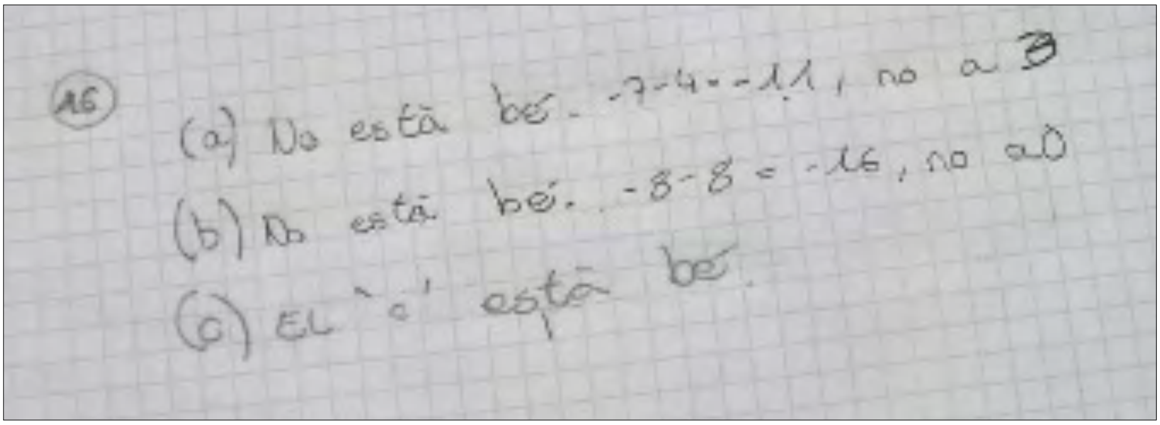
Es una clase de trabajo individual con 21 alumnos, aunque tienen permiso para hablar con el compañero lo que se suele transformar en un trabajo por parejas. Se reparte el material titulado *4. Cómo simplificar expresiones algebraicas*. Los alumnos comienzan a trabajar.

En el ejercicio 16, la mayoría de los alumnos responden que “d – 7 – 4 + 10 = d – 3 + 10 está bien porque 7 – 4 = 3”. A estos alumnos se les plantea entonces que inventen un problema donde la resolución corresponda a la primera expresión algebraica. Un alumno dice: “Tengo un paquete de cromos, pierdo 7 y me cogen 4 y mi padre me compra 10”. Entonces se le pregunta si es lo mismo “perder 7 y que te cojan 4 a perder 3”. El alumno responde claramente que “no, está mal, eso es lo mismo que perder 11”. Son necesarias muchas intervenciones de este tipo por parte de la profesora porque la tendencia de los alumnos es interpretar los signos como símbolos de operaciones binarias entre números sin signo, que es la interpretación propia de la aritmética.



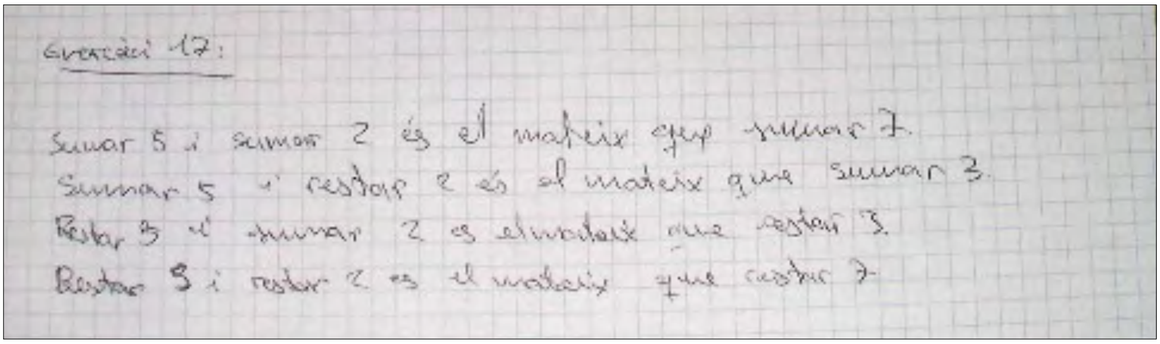




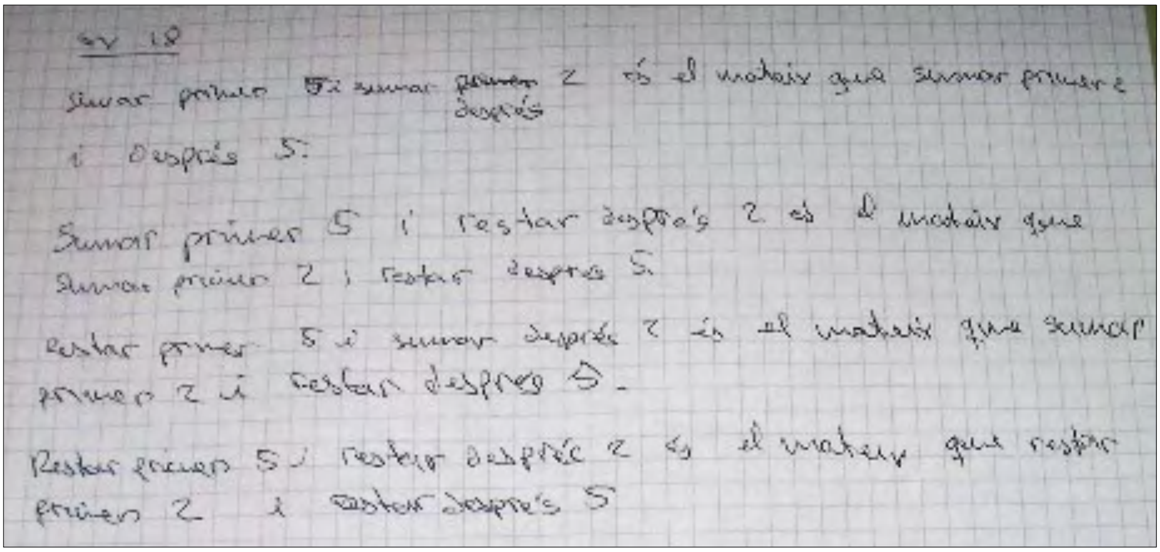


Una alumna pregunta qué quiere decir "más por más" en el ejercicio 16.c) porque confunde la *x* con el símbolo de la multiplicación. En este apartado no analizan si los pasos que sigue el niño son correctos, solo comprueban si el resultado final corresponde al que ellos han obtenido.

El ejercicio 17 no presenta aparentemente ninguna dificultad para los alumnos, pero no ocurre lo mismo con el ejercicio 18. En este último es muy frecuente que mantengan las operaciones en el mismo orden: "Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que sumar primero 2 y restar después 5". La profesora se ve obligada a hacer una intervención para toda la clase comentando el asunto y discutiendo con los alumnos si las frases que habían escrito eran correctas o no. El argumento de la profesora era: "Coge un número, súmale 5 y réstale después 2, ¿qué obtienes? Ahora coge el mismo número, súmale 2 y réstale después 5, ¿obtienes lo mismo que antes?". Algunos alumnos no quedan muy convencidos y mantienen la redacción inicial de las frases.

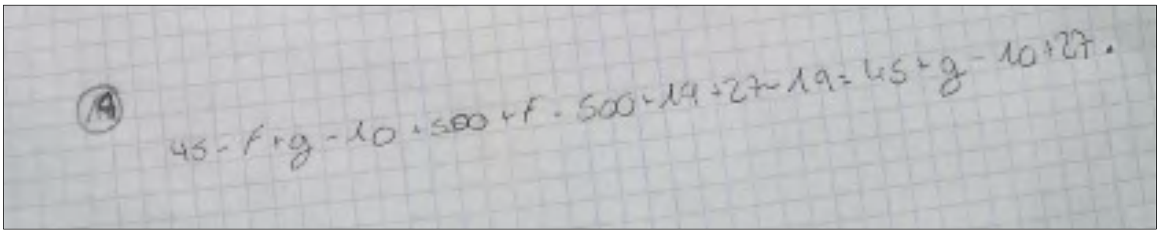

Exercici 17:

Sumar 5 i sumar 2 és el mateix que sumar 7.
Sumar 5 i restar 2 és el mateix que sumar 3.
Restar 5 i sumar 2 és el mateix que restar 3.
Restar 5 i restar 2 és el mateix que restar 7.

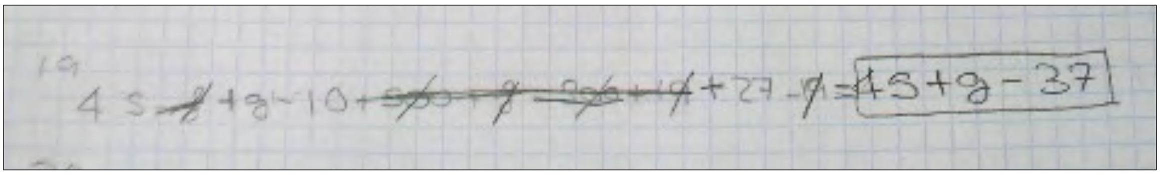

Ex 18

Sumar primer 5 i sumar ~~primer~~ després 2 és el mateix que sumar primer 2 i després 5.
Sumar primer 5 i restar després 2 és el mateix que sumar primer 2 i restar després 5.
Restar primer 5 i sumar després 2 és el mateix que sumar primer 2 i restar després 5.
Restar primer 5 i restar després 2 és el mateix que restar primer 2 i restar després 5

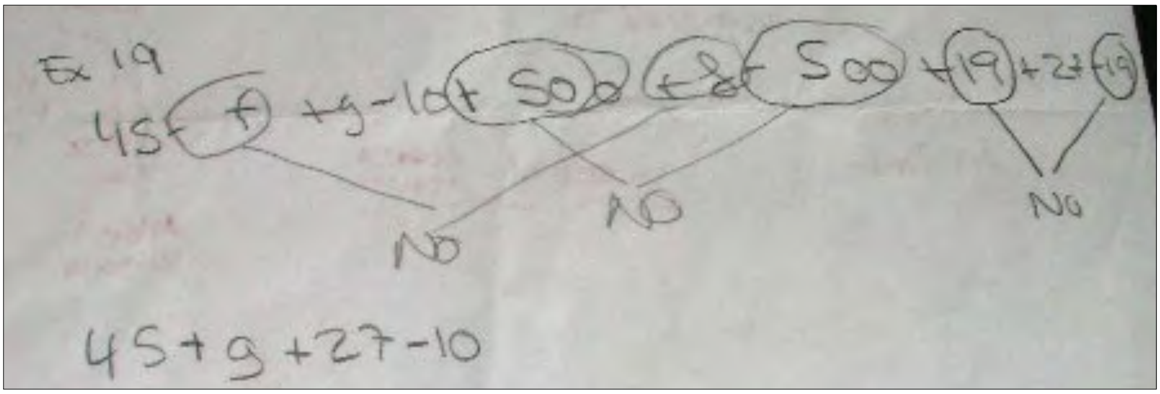
En el ejercicio 19 siguen las instrucciones que se les proponen con mejor o peor fortuna.


19

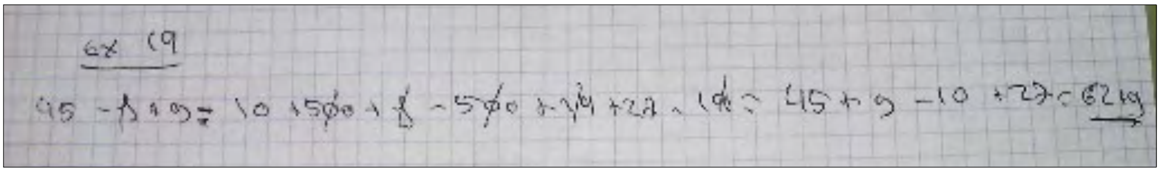
$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19 = 45 + g - 10 + 27.$


19

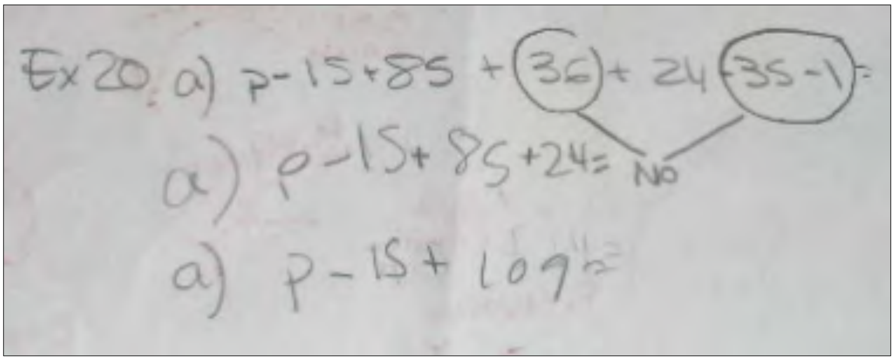
$45 - \cancel{f} + g - 10 + \cancel{500} + \cancel{f} - \cancel{500} + \cancel{19} + 27 - \cancel{19} = \boxed{45 + g - 37}$

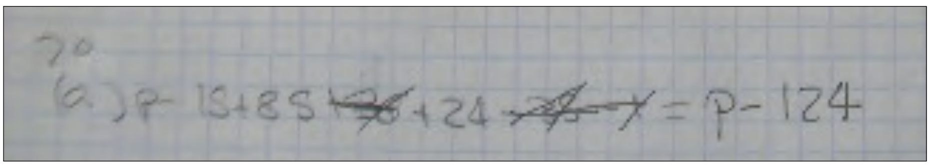


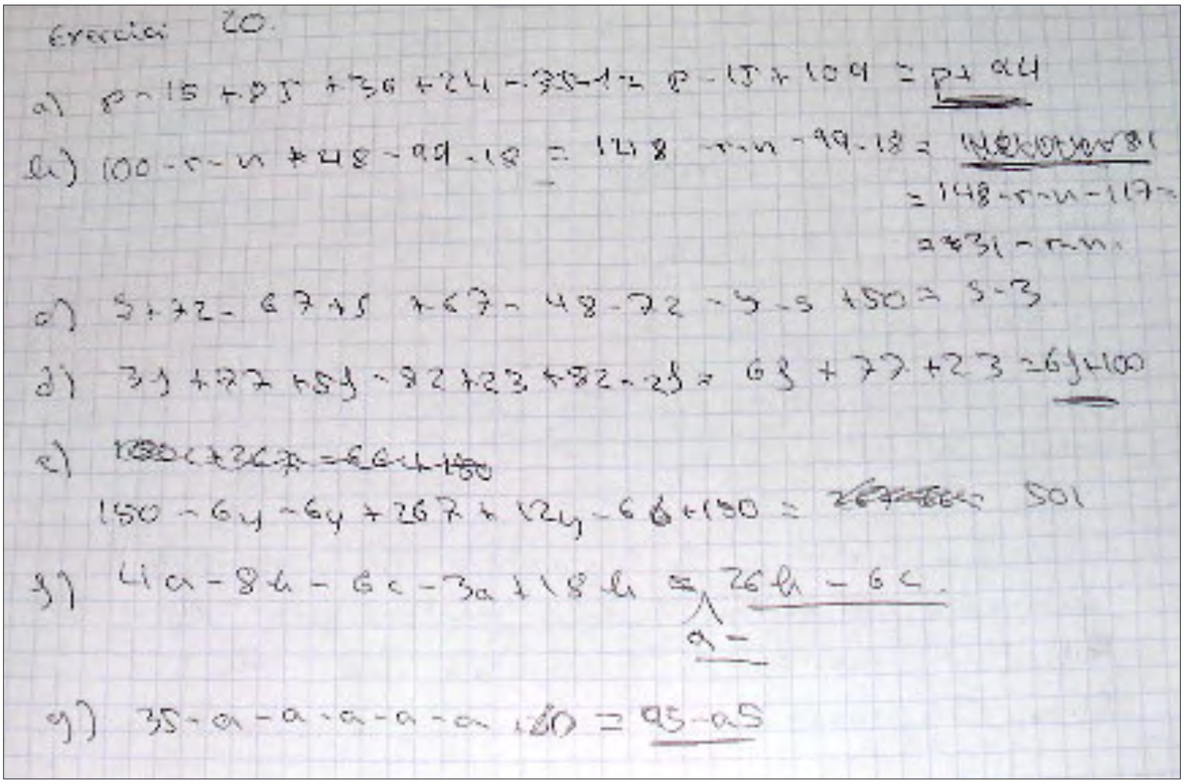
Algunos alumnos al llegar a 45 + *g* + 27 – 10, como la operación de 45 + *g* no se puede realizar, dicen que ya no se puede simplificar. Otros continúan hasta el final



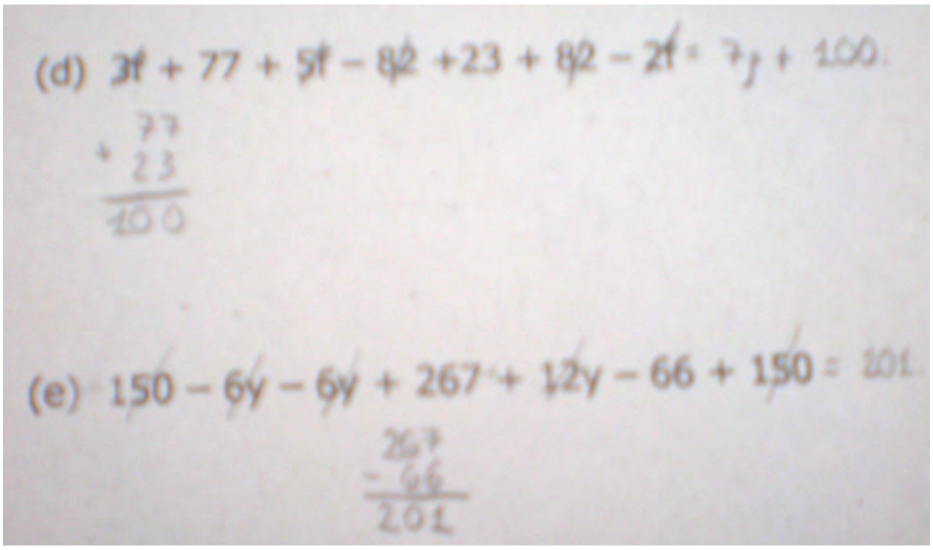
Los alumnos siguen trabajando en los distintos apartados del ejercicio 20. Se toman muy en serio las instrucciones que han recibido en el ejercicio 19 y procuran operar de acuerdo con ellas. Como no tienen seguridad en la corrección de los cálculos que hacen recurren constantemente a la profesora y a la observadora para asegurarse de que lo tienen bien.

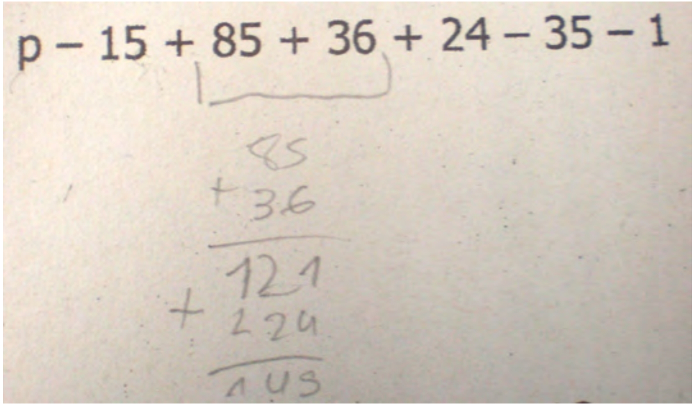






Se echa en falta el cálculo mental, Se comprueba que muchos alumnos no tienen apenas técnicas de cálculo mental lo que les impide reconocer operaciones sencillas y simplificaciones numéricas. También crea dificultades su tendencia a intentar resolver toda la operación de una sola vez y escribir el resultado final, sin pasos intermedios.





Cuando la profesora da por terminada la clase, la situación de los alumnos es muy dispar: mientras unos alumnos han realizado todos los ejercicios con razonable corrección, otros están todavía en los primeros apartados de ejercicio 20 y tienen serias dificultades para realizarlos correctamente.

Valoración

Los ejercicios de simplificación ponen de manifiesto lo costoso que es para los alumnos pasar del ámbito aritmético en el que se trabajan las operaciones entre números sin signo a un ámbito algebraico en el que lo que se trabaja es la composición de traslaciones. Y de un ámbito operacional de corte algorítmico, como es el de la aritmética, a un ámbito operacional que exige reflexión y búsqueda de una economía de trabajo. La falta de buenas técnicas de cálculo mental ralentiza aún más este paso.

A esto hay que añadir la tendencia de los alumnos a realizar los cálculos intermedios aparte para colocar a continuación de la expresión propuesta el resultado final de la operación, tal como se suele hacer en aritmética. No parecen sentirse con permiso para escribir los cálculos intermedios y menos para ligarlos con el signo igual. Son necesarias bastantes intervenciones de la profesora para que empiecen a aceptar esta nueva forma de expresar los cálculos.

SESIÓN 7: 12/02/09 (JUEVES, 10-11h)

Es una sesión de trabajo en grupo. La profesora comienza la clase dando una explicación sobre el trabajo de simplificación de expresiones algebraicas del día anterior. Recuerda las frases "sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que sumar 7", etc. y las relaciona con expresiones del tipo

$$x + 5 + 2 = x + 7$$
$$p + 5 - 2 = p + 3$$
$$r - 5 + 2 = r - 3$$
$$s - 5 - 2 = s - 7$$

También comenta las frases "sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que sumar primero 2 y sumar después 5", etc., y las relaciona con las expresiones

$x + 5 + 2 = x + 2 + 5$
$x + 5 - 2 = x - 2 + 5$
$x - 5 + 2 = x + 2 - 5$
$x - 5 - 2 = x - 2 - 5$

enfatizando que esto nos permite cambiar de sitio los números o letras dentro de la expresión algebraica siempre que vayan acompañados del signo que les precede, lo que permite operarlos aunque haya otros términos por en medio.

Después resuelve en la pizarra el ejercicio 19, discutiendo con los alumnos qué términos se pueden simplificar y por qué y completando la operación hasta llegar a la expresión 62 + g. Una alumna pregunta si no se puede dejar 45 + g – 10 + 27 y la profesora contesta que en álgebra es importante dejar las expresiones lo más simplificadas posible y que por eso es importante poder cambiar de lugar los términos para poder operarlos con otros, pero que hay que cambiarlos con el signo que les precede. Esto permite pasar de 45 + g – 10 + 27 a 45 – 10 + 27 + g y poder efectuar la operación.

Finalmente comenta que aquellos alumnos que no hayan terminado el ejercicio 20 podrán continuarlo en la clase de trabajo individual y reparte el material titulado *5. Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* y los grupos comienzan el trabajo.

Completan la tabla del apartado 21a) sin mayores dificultades. La mayor parte de los grupos utiliza los resultados de las columnas “a + 10” y “a – 10” para rellenar las demás, pero dos grupos realizan el cálculo utilizando el valor de a y sustituyéndolo en la expresión algebraica inicial,

$30 + (a + 10) = 30 + (14 + 10) = 30 + 24 = 54$
$30 - (a + 10) = 30 - (14 + 10) = 30 - 24 = 6$
$30 + (a - 10) = 30 + (14 - 10) = 30 + 4 = 34$
$30 - (a - 10) = 30 - (14 - 10) = 30 - 4 = 26$

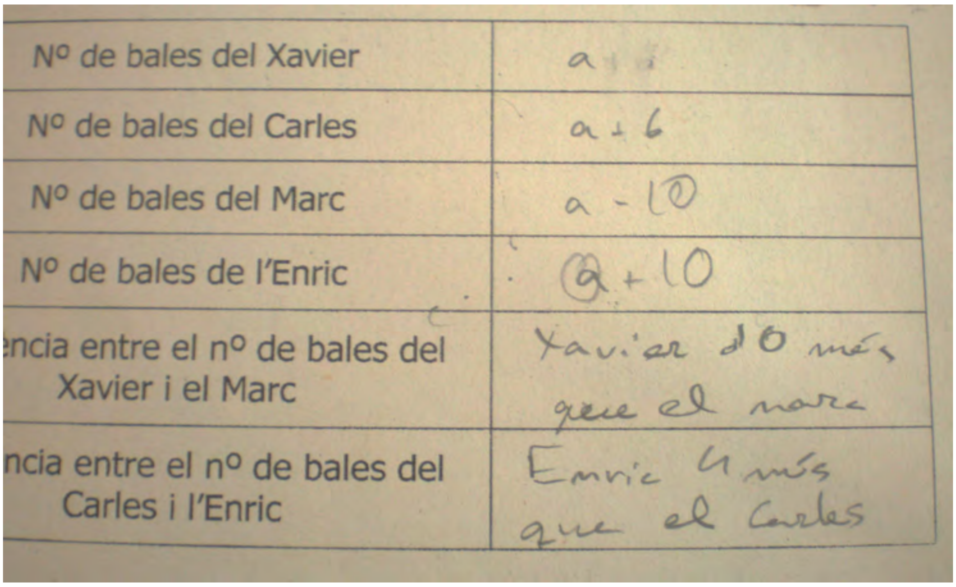
lo que indica un cierto conocimiento del papel que juegan los paréntesis en el cálculo algebraico. Estos últimos grupos no hicieron los cálculos para rellenar las casillas de la tercera fila, pues se dieron cuenta de que los resultados de la segunda fila se podían obtener sumando o restando 1 a los de la primera fila y siguieron la misma regla para la tercera fila, sumando o restando 3.

En el apartado 21b) los alumnos suprimen los paréntesis y preguntan si las fórmulas obtenidas son correctas. Se les comenta que hagan el ejercicio c) y podrán responder ellos mismos. Todos los grupos escriben mal parte de la respuesta:

Solució del Problema 1: $30 + (a + 10) = 30 + a + 10 = 40 + a$
Solució del Problema 2: $30 - (a + 10) = 30 - a + 10 = 40 - a$
Solució del Problema 3: $30 + (a - 10) = 30 + a - 10 = 20 + a$
Solució del Problema 4: $30 - (a - 10) = 30 - a - 10 = 20 - a$

La dificultad se plantea al afrontar el apartado 21c) pues los alumnos no entienden el sentido del ejercicio. Unos grupos deciden sin más copiar la tabla del apartado 21a) pues les parece una pérdida de tiempo volver a calcular algo que ya tenían calculado de antemano. Otros hacen de nuevo los cálculos utilizando las expresiones con paréntesis por lo que vuelven a obtener los mismos resultados que antes. Por último, los pocos grupos que utilizan las expresiones resultantes de quitar los paréntesis obtienen una tabla distinta pero no le dan importancia al hecho o la borran para sustituirla por la primera. La profesora tiene que intervenir largamente en todos los grupos ayudada por la observadora sin que sus argumentos convenzan a la mayor parte de los alumnos.

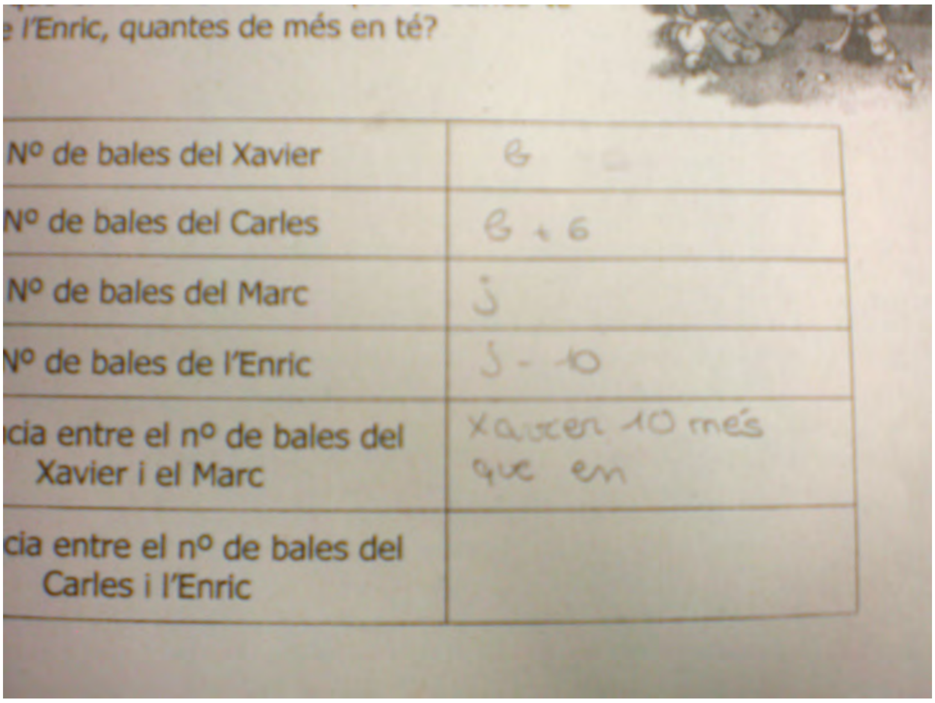
En el ejercicio 22 algunos grupos tienen problemas para reconocer que hay dos variables y que por tanto deben poner dos letras en la tabla. Intentan por diversos medios relacionar el numero de canicas de Marcos con el número de canicas de Javier o Carlos.



Nº de bales del Xavier	a
Nº de bales del Carles	a + 6
Nº de bales del Marc	a - 10
Nº de bales de l'Enric	a + 10
...ncia entre el nº de bales del Xavier i el Marc	Xavier 10 més que el marc
...ncia entre el nº de bales del Carles i l'Enric	Enric 4 més que el Carles

Otro grupo dice que el número de canicas de Marcos es - c –16, siendo c el número de canicas de Carlos, queriendo indicar con esa expresión que “Marcos tiene un número de canicas menor que (menos que) el de Carlos menos 16”.

Una vez que los grupos asumen la necesidad de poner dos letras en la tabla, rellenan sin problemas las cuatro primeras casillas y vuelven a tener dificultades al intentar expresar algebraicamente la diferencia entre el número de canicas de Javier y Marcos. En primer lugar, preguntan que qué es una diferencia. No es una palabra a la que estén habituados ya que suelen utilizar el término ‘resta’. Una vez aclarado el significado de la palabra ‘diferencia’ preguntan qué deben poner en la diferencia entre Javier y Marcos, no sabiendo la cantidad de cada uno. Algunos alumnos incluso son capaces de dar un valor determinado a esa diferencia.

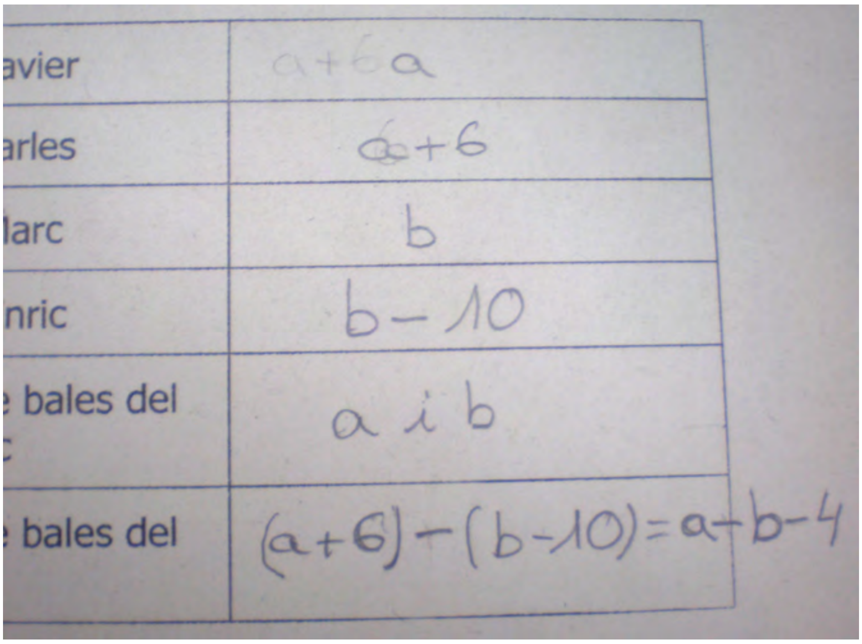


e l'Enric, quantes de més en té?

Nº de bales del Xavier	6
Nº de bales del Carles	6 + 6
Nº de bales del Marc	j
Nº de bales de l'Enric	j - 10
cia entre el nº de bales del Xavier i el Marc	Xavier 10 més que en
cia entre el nº de bales del Carles i l'Enric	

La profesora les pregunta que cómo calcularían esa diferencia si conocieran los números y los alumnos responden que restando una cantidad de la otra. Bueno, dice la profesora, no conocéis los números, pero tenéis las letras que los representan. Después de esto los alumnos empiezan a escribir j – m (por ejemplo, ya que no todos los grupos utilizan las mimas letras) o bien m – j porque no pueden determinar que cantidad es mayor.

Después escriben la diferencia entre el número de canicas de Carlos y Enrique, la mayor parte de los grupos sin paréntesis, j + 6 – m – 10, llegando al resultado final, j – m – 4. Solo un grupo rellena la última casilla poniendo paréntesis:



avier	~~a+6~~ a
arles	a+6
larc	b
nric	b–10
bales del	a i b
bales del	$(a+6)-(b-10)=a-b-4$

pero solamente un alumno del grupo concluye correctamente la operación indicada.

Valoración

La sesión resulta fallida en lo que se refiere a que los alumnos entiendan la relación que existe entre sumar o restar el resultado de una suma o diferencia o sumar o restar la suma o diferencia término a término. Los alumnos se muestran extraordinariamente reacios a aceptar esta relación y las tareas que se les plantean no ayudan a ello.

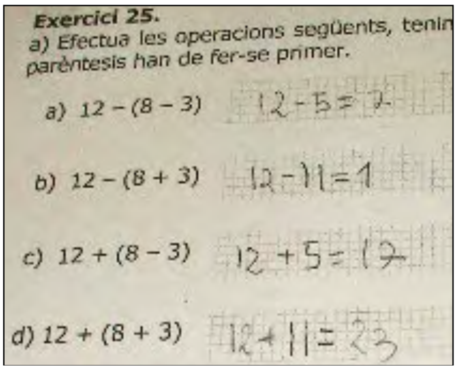
Curiosamente todo el estudio realizado al principio de curso sobre los números enteros no parece servir de mucho. Los alumnos siguen sin relacionar su trabajo actual con lo estudiado en dicho tema. Incluso cuando se hace una llamada a que recuerden cómo se operaban los números enteros, lo único que se consigue es provocar más confusión.

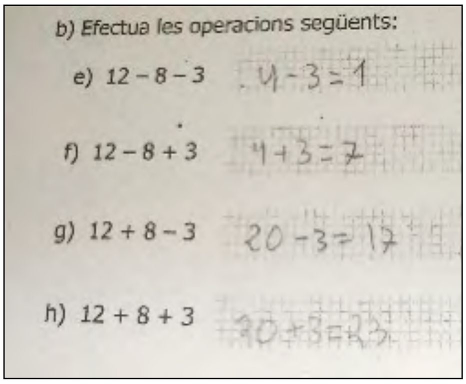
La profesora y la observadora deciden que, visto el resultado obtenido, en el material que trata de la simplificación de expresiones con paréntesis, a entregar en los días siguientes, hay que volver a incorporar ejercicios que pongan de manifiesto el efecto que produce un signo ‘menos’ delante de un paréntesis.

SESIÓN 8: 13/02/09 (VIERNES, 9-10h)

La profesora comienza la clase haciendo una alusión al ejercicio 21 y comentando que no era un mero ejercicio de cálculo, sino que a través de él se pretendía que los alumnos entendiesen lo que pasaba cuando un paréntesis se sumaba o restaba. Continuó diciendo que como el tema no había quedado claro, iba a repartir el material *6. Cómo simplificar expresiones algebraicas con paréntesis* y los alumnos tenían que hacer el ejercicio 25 fijándose mucho en lo que hacían y reflexionando sobre cómo quedaba una expresión cuando se suprimía un paréntesis. La profesora también recuerda la función de los paréntesis para indicar prioridad de las operaciones contenidas en ellos.

Todos los grupos hacen cálculos como los siguientes:

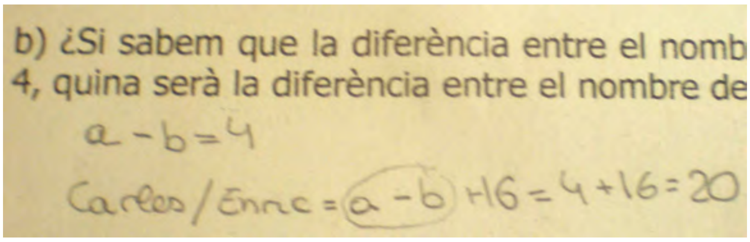




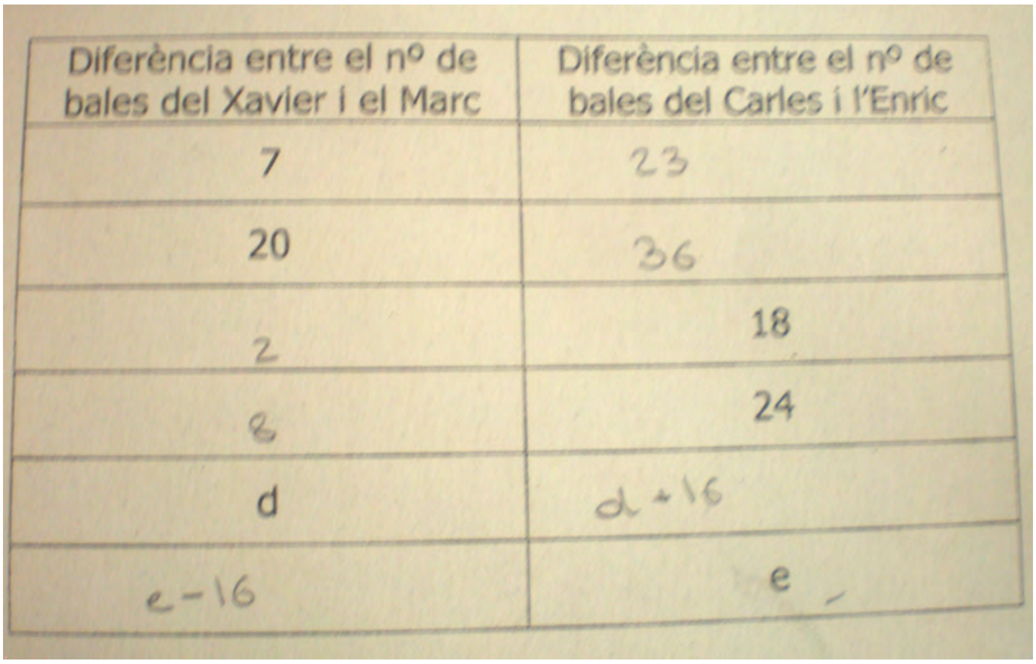
Después preguntan qué deben hacer en el apartado c) y la profesora les dice que deben emparejar aquellas expresiones que son iguales, es decir, que tienen el mismo resultado. Así lo hacen aun cuando todavía hay alumnos que emparejan las expresiones que resultan de suprimir los paréntesis sin modificar los signos adecuadamente a pesar de que los resultados de unas y otras no coinciden.

Una vez terminado el ejercicio la profesora hace una puesta en común. Una alumna sale a la pizarra a escribir las igualdades de la tabla del apartado c) y después de discutirlas, la profesora pregunta si todos los alumnos están de acuerdo y les dice que las copien en su cuaderno y a partir de ahora las tengan en cuenta en la simplificación de expresiones con paréntesis.

Acabada la puesta en común, los grupos siguen resolviendo el ejercicio 22. La mayor parte están en el apartado b), pero algún grupo sigue en el apartado a). Se vuelve a plantear una dificultad importante: los alumnos están ya familiarizados con el hecho de dar valores a una letra, pero por primera vez se encuentran con que se le da un valor a una diferencia y tratan de encontrar el valor de cada uno de los términos de la diferencia. Es decir, sabiendo que a – b = 4, no se les ocurre sustituir a – b por 4 en la expresión a – b + 16, sino que pretenden encontrar el valor de a y b para sustituirlo en la expresión. Solo unos pocos alumnos se dan cuenta de que no es necesario conocer dichos valores para encontrar el valor total de la expresión.


b) ¿Si sabem que la diferència entre el nomb
4, quina serà la diferència entre el nombre de
$a - b = 4$
Carles/Enric = $a - b + 16 = 4 + 16 = 20$

Una vez que asumen que no solo se puede sustituir una letra por un número sino también una expresión algebraica, los grupos no tienen grandes dificultades para rellenar la tabla del apartado c).



Diferència entre el nº de bales del Xavier i el Marc	Diferència entre el nº de bales del Carles i l'Enric
7	23
20	36
2	18
8	24
d	d + 16
e − 16	e

Valoración

La realización del ejercicio 25 y la puesta en común del mismo hace que mejore la comprensión que la clase tiene del papel de los paréntesis y de las reglas de supresión de los mismos, pero sigue habiendo bastantes dificultades al respecto y todo este proceso ocupa mucho tiempo de clase y obliga a la profesora a un esfuerzo adicional de atención a los grupos.

SESIÓN 9: 13/02/09 (VIERNES, 13:30-14:30h)

Se trata de una clase en la que los alumnos trabajan de forma individual, aunque la profesora aprovecha el inicio de la clase para corregir algunos apartados del ejercicio 20 sobre simplificación de expresiones. Pregunta a los alumnos cómo lo han hecho y discute con ellos sobre la manera más rápida y económica de efectuar la simplificación. Después propone que los alumnos que no hayan realizado todos los apartados lo terminen de hacer en casa y se lo entreguen para hacer una corrección escrita.

Acabada la corrección en la pizarra, la mayor parte de los alumnos comienza el ejercicio 23 y unos pocos acaban el 22. La profesora sugiere que antes de comparar las expresiones empiecen por simplificarlas porque observa que muchos alumnos intentan compararlas directamente. De nuevo, aunque en menor medida se producen errores en los signos al eliminar los paréntesis. Después, una vez simplificadas las expresiones: 3m +1, 15m – 5, 2m – 1, los alumnos se encuentran con que tienen que comparar tres expresiones, cuando hasta el momento solo habían comparado dos, y la tarea les resulta excesiva y son incapaces de abordarla.

A pesar de todo, algunos alumnos son capaces de encontrar soluciones parciales. Por ejemplo, un alumno dice que la ordenación depende del valor de *m* y da valores, construyendo la siguiente tabla,

	$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$
I	1	4	7
II	-5	10	25
III	-1	1	3

lo que le permite decir que para $m = 0$ el menor es II y el mayor I, y que para valores de *m* mayores que 0 (se supone que naturales) el mayor es II y el menor es III.

En cuanto al cálculo de las diferencias, vuelve a plantearse el significado del término ‘diferencia’ y finalmente las calculan, pero muchos de ellos no escriben los términos de la diferencia entre paréntesis con lo que obtienen resultados erróneos y la profesora y la observadora se ven obligadas a intervenir de nuevo, intentando hacerles ver que cuando se resta una expresión compuesta de varios términos es necesario poner un paréntesis.

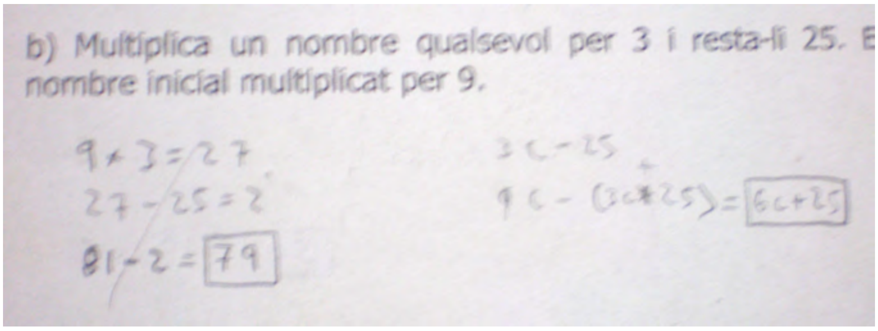
Valoración

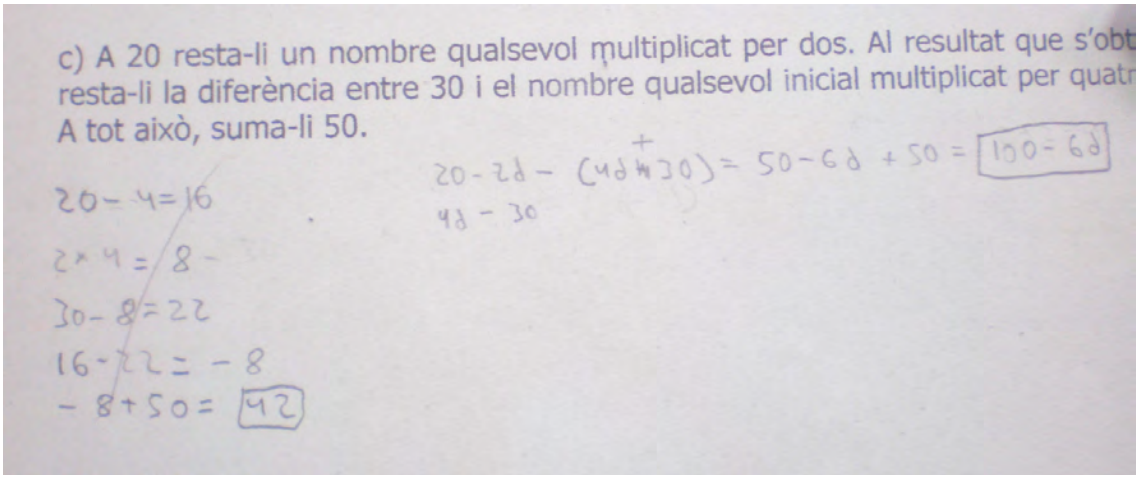
Nuevamente estamos ante una sesión bastante caótica y que consume una cantidad de tiempo que los resultados obtenidos no justifican. Analizado el devenir de la clase, se llega a la conclusión de que el ejercicio 23 no tiene sentido porque plantea una simplificación en un momento en que todavía no se está trabajando ese aspecto y porque complica la comparación al establecerla entre tres términos, cuando el objetivo del material es el de calcular diferencias. Además, dado que las soluciones de dos de las inecuaciones correspondientes son valores racionales positivos menores que 1, los alumnos no tienen posibilidades de obtener la solución correcta, solo de hacer alguna aproximación más que discutible desde el punto de vista de la corrección matemática.

SESIÓN 10: 19/02/09 (JUEVES, 10-11h)

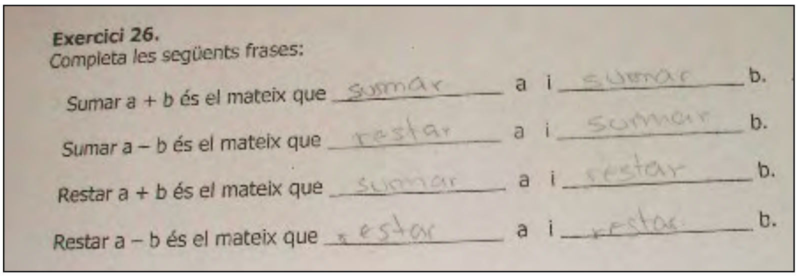
Los grupos empiezan el ejercicio 24 y se encuentran con dificultades que ponen de manifiesto la complejidad de los códigos de escritura algebraicos. En primer lugar, los alumnos interpretan que la expresión “un número cualquiera” les da permiso para elegir el número que quieran y realizar con ese número los cálculos indicados en el enunciado. La profesora permite que inicialmente lo hagan así y después interrumpe el trabajo de los grupos para comentar dicha expresión. Se produce una discusión sobre su significado y queda finalmente establecido que en matemáticas por “un número cualquiera” se entiende un número genérico que hay que representar con una letra.

Después de la aclaración, los alumnos no tienen ninguna dificultad en interpretar la frase “a un número cualquiera súmale 7” como a +7, por ejemplo. Sin embargo, cuando se trata de representar la frase “el resultado réstaselo a 31” la mayor parte escribe 31 – a + 7. La profesora tiene que ir grupo por grupo explicando la necesidad de poner un paréntesis porque “no es lo mismo restar el resultado de sumar *a* y 7 que restar *a* y sumar 7”. Este problema continúa en los demás apartados, dándose el caso de que varios alumnos, ante la exigencia de la profesora de que pongan un paréntesis, lo hacen pero transformando la diferencia en una suma.

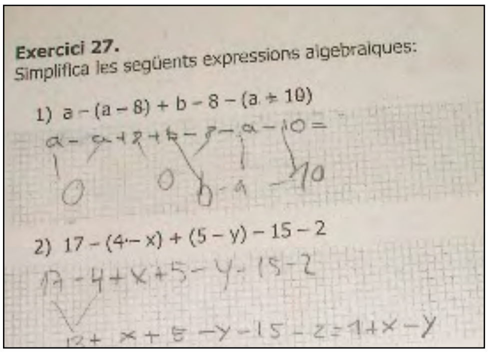


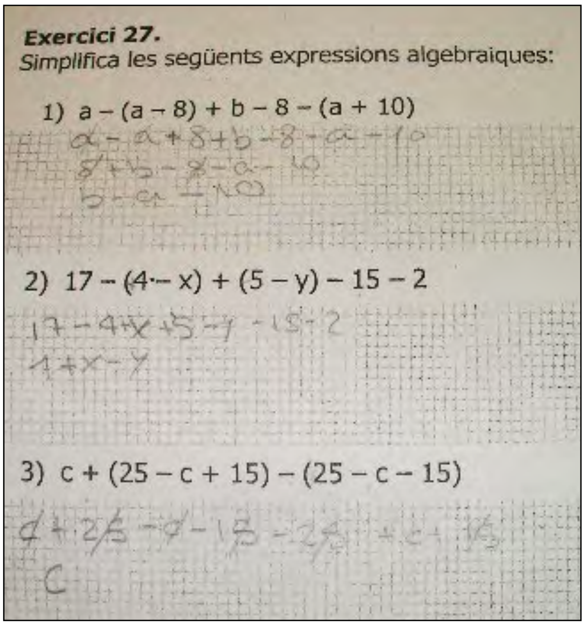


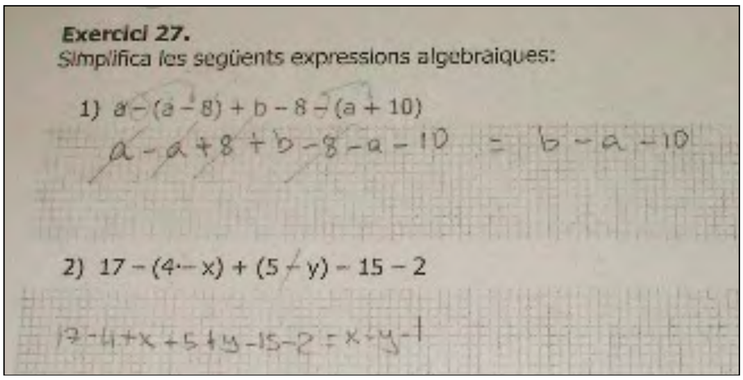
En el ejercicio 26, hay que recordarles de nuevo la puesta en común del ejercicio 25 realizada en una sesión de clase anterior. Todos los grupos se esfuerzan por responder correctamente, aunque sigue habiendo alumnos que contestan de forma incorrecta.



A continuación, inician las simplificaciones planteadas en el ejercicio 27. Se observa que cada vez son más los alumnos que tienen en cuenta el signo que precede a un paréntesis antes de eliminarlo. Además, intentan reducir los términos opuestos e incluso algunos alumnos procuran realizar las operaciones empezando por las más sencillas.







La profesora termina la clase diciendo a sus alumnos que deben darse prisa en acabar los ejercicios del material entregado hasta el momento porque la semana siguiente harán el examen. También les recuerda que deben llevar al día el dossier con todos los ejercicios del taller de matemáticas resueltos correctamente porque al finalizar el taller tendrán que entregarlo.

Valoración

La sesión se desarrolla con normalidad y sin los agobios de sesiones anteriores. Bastantes alumnos empiezan a aceptar las reglas de manipulación de los paréntesis y a darles sentido con lo que la profesora empieza a estar menos preocupada.

SESIÓN 11: 26/02/09 (JUEVES, 10-11h)

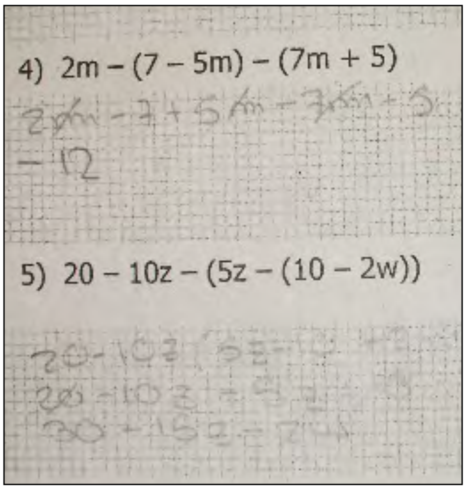
Ninguna de las observadoras está presente en esta sesión de clase. La profesora reparte el examen y los alumnos lo realizan individualmente, teniendo de tiempo toda la hora de clase.

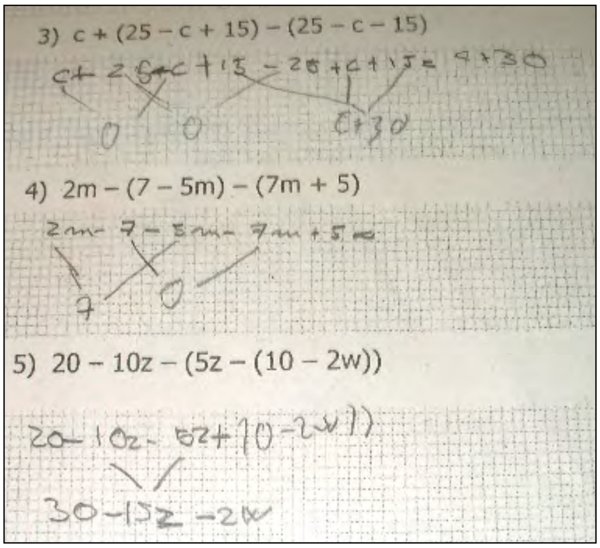
SESIÓN 12: 27/02/09 (VIERNES, 9-10h)

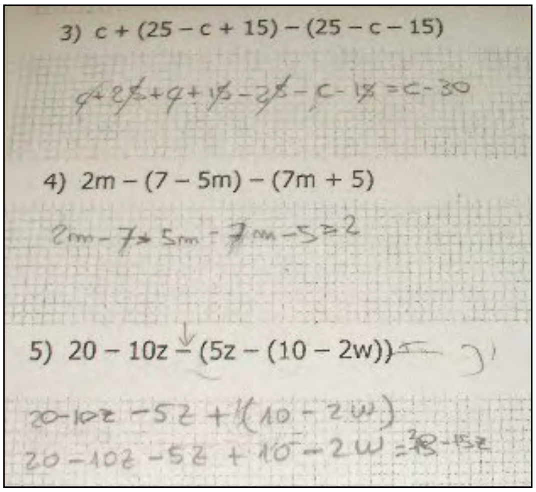
Ninguna de las observadoras está presente en esta sesión de clase. La profesora devuelve los exámenes corregidos, comenta que está bastante contenta con los resultados y corrige el examen en la pizarra. Los alumnos copian las soluciones y hacen alguna pregunta.

SESIÓN 13: 27/02/09 (VIERNES, 13:30-14:30h)

Es una sesión de trabajo individual en la que los alumnos siguen haciendo los ejercicios 27, 28 y 29. A la hora de simplificar, algunos grupos consideran que términos como –7 y +7m son opuestos y los cancelan. De nuevo es necesario discutir con ellos sobre la supuesta igualdad de esos términos.





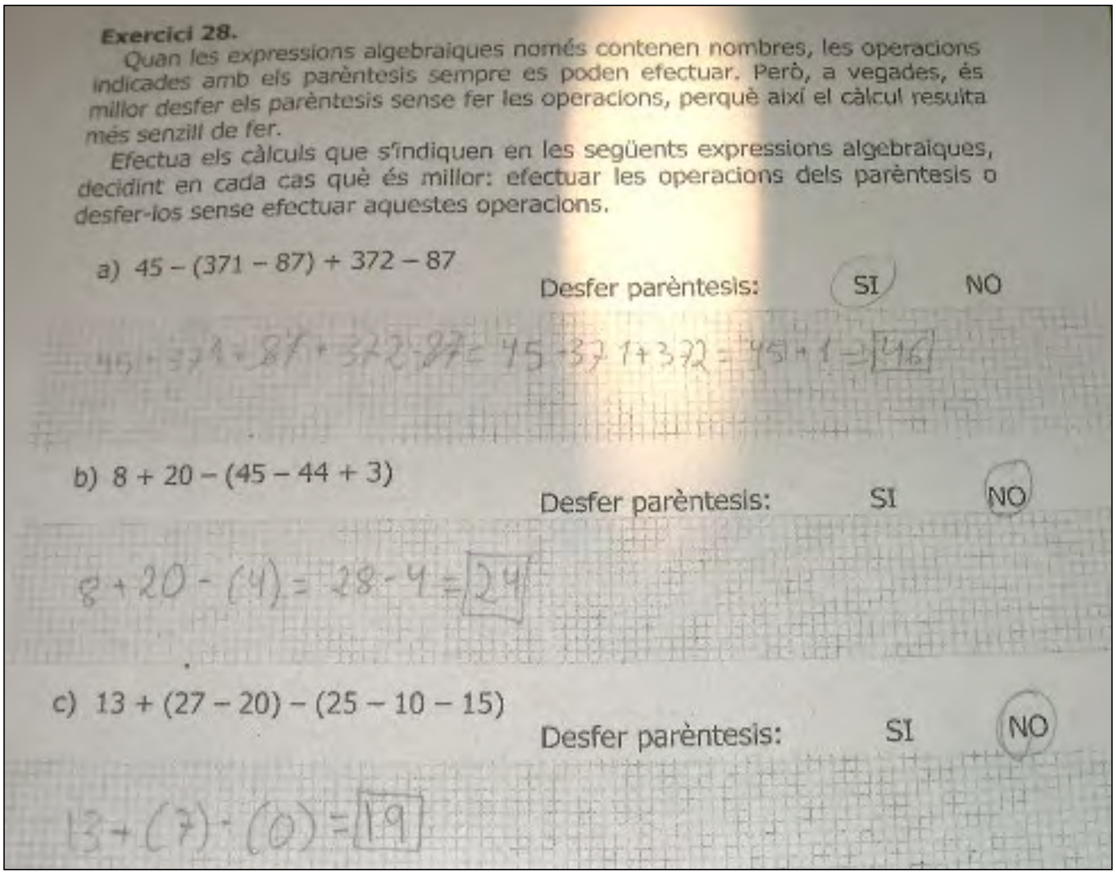


3) c + (25 − c + 15) − (25 − c − 15)

4) 2m − (7 − 5m) − (7m + 5)

5) 20 − 10z − (5z − (10 − 2w))

En el ejercicio 28, inicialmente bastantes alumnos no entienden lo que pide el problema y se hace necesaria una explicación por parte de la profesora. Una vez aclarado el sentido del ejercicio, los alumnos se toman muy en serio la decisión de efectuar o deshacer el paréntesis y lo consultan con sus compañeros. En general toman buenas decisiones.



Exercici 28.

Quan les expressions algebraiques només contenen nombres, les operacions indicades amb els parèntesis sempre es poden efectuar. Però, a vegades, és millor desfer els parèntesis sense fer les operacions, perquè així el càlcul resulta més senzill de fer.

Efectua els càlculs que s'indiquen en les següents expressions algebraiques, decidint en cada cas què és millor: efectuar les operacions dels parèntesis o desfer-los sense efectuar aquestes operacions.

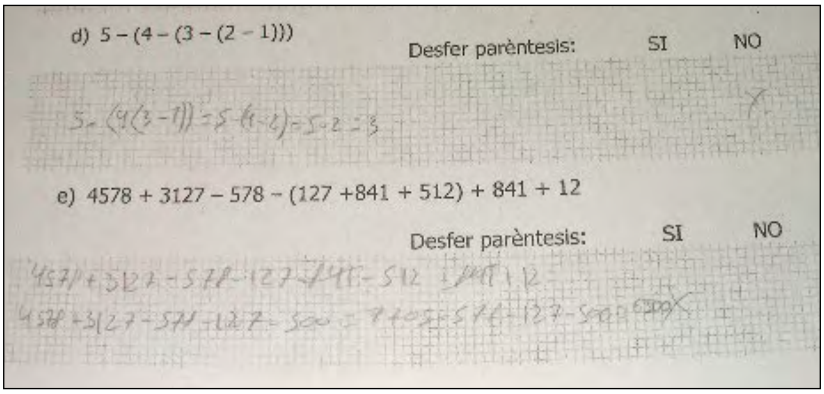
a) 45 − (371 − 87) + 372 − 87 — Desfer parèntesis: SI NO

b) 8 + 20 − (45 − 44 + 3) — Desfer parèntesis: SI NO

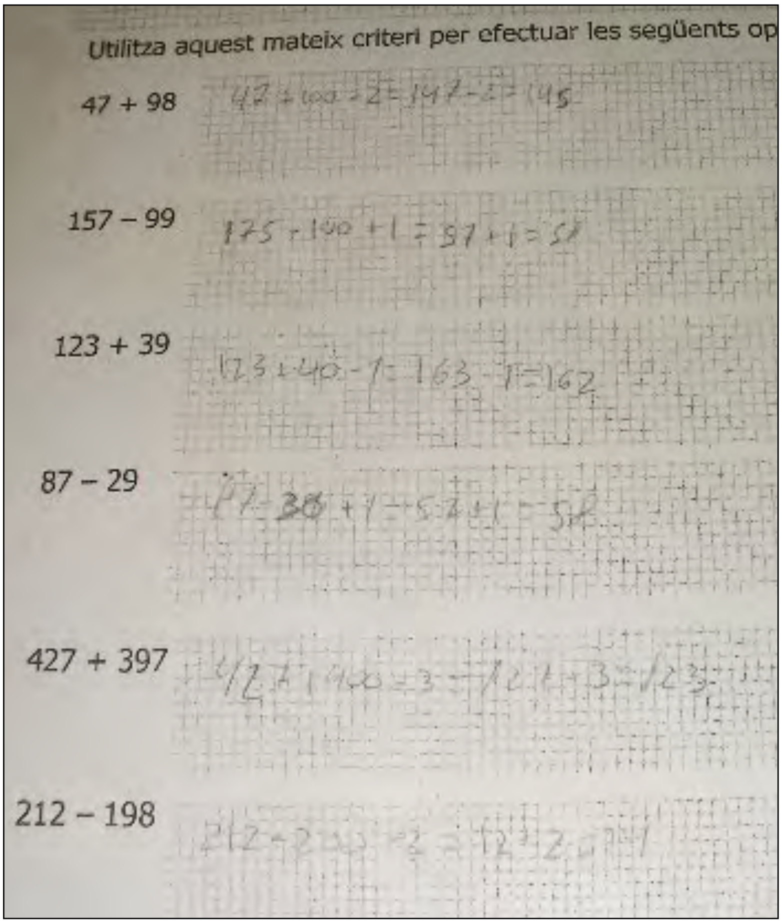
8 + 20 − (4) = 28 − 4 = 24

c) 13 + (27 − 20) − (25 − 10 − 15) — Desfer parèntesis: SI NO

13 + (7) − (0) = 19



No todos los alumnos llegan al ejercicio 29. Resulta además que no conocen la técnica de efectuar la suma de 99 sumando 100 y restando 1. Al parecer no la han trabajado anteriormente. Una vez aclarado en qué consiste la técnica, no tienen mayor problema para utilizarla en los demás casos, planteándose alguna dificultad con las restas que en general se resuelve bien.



Al finalizar la clase, la profesora les dice que terminen de hacer los ejercicios en casa y vuelve a recordarles que no se olviden del dossier.

Valoración

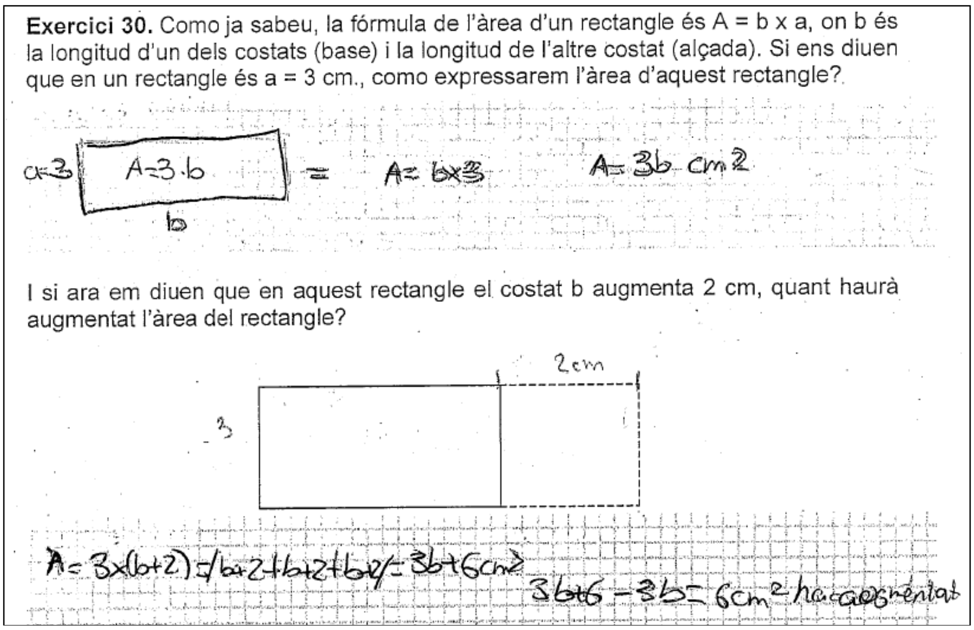
La sesión se desarrolla sin grandes dificultades, pero con prisas. Realmente, hubiera sido necesaria una sesión más para hacer los ejercicios porque bastantes alumnos no los han terminado, pero la profesora necesita acabar el tema porque el tiempo empieza a apremiarla.

La experiencia con los alumnos que resuelven el ejercicio 29 hace pensar a la profesora y a la observadora que podría ser un buen comienzo para introducir el tratamiento de los paréntesis, dado que los alumnos aceptan con mucha naturalidad que “para restar 99 hay que restar 100 y como hemos restado una unidad de más ahora hay que sumarla”.

SESIÓN 14: 5/03/09 (JUEVES, 10-11h)

Es una sesión de trabajo en grupo. La profesora reparte el material *7. Cómo multiplicar expresiones algebraicas* y dice a los niños que es la última entrega y que no deben perder el tiempo porque solo le pueden dedicar las clases de esa semana y todo lo que no hagan en clase tendrán que hacerlo en casa.

En el ejercicio 30, los grupos preguntan que cuánto vale el otro lado. La profesora les dice que no se sabe y entonces la mayor parte de los grupos decide dar un valor numérico al lado desconocido. La profesora se sorprende: “Pero bueno, ¿qué hacemos cuando un dato del problema no lo conocemos?”. Los grupos responden que se pone una letra, pero no parecen muy convencidos de que eso sea un procedimiento aceptable en este contexto. Ellos están acostumbrados a resolver problemas de áreas y siempre se les ha exigido dar un valor numérico, no que sustituyan las letras de las fórmulas de las áreas por otras letras. Finalmente, aceptan la propuesta de la profesora y ponen una letra. Pero entonces surge otra dificultad: la x como signo de la multiplicación, lo que además viene reforzado porque en el enunciado del ejercicio aparece la fórmula A = b x a. Aunque la profesora les recuerda que ya no se utiliza el aspa sino el punto, durante un tiempo conviven en la clase las dos formas de representar el producto.


Exercici 30. Como ja sabeu, la fórmula de l'àrea d'un rectangle és A = b x a, on b és la longitud d'un dels costats (base) i la longitud de l'altre costat (alçada). Si ens diuen que en un rectangle és a = 3 cm., como expressarem l'àrea d'aquest rectangle?

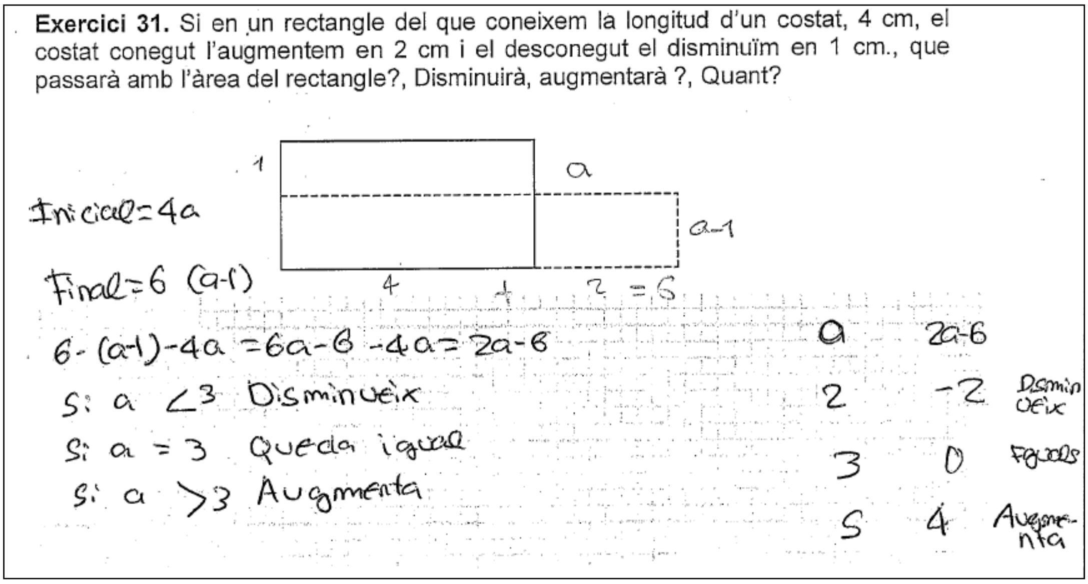
I si ara em diuen que en aquest rectangle el costat b augmenta 2 cm, quant haurà augmentat l'àrea del rectangle?

En el segundo apartado del ejercicio 30 se plantean diversas dificultades. La primera sobre la interpretación del dibujo, agravada por el hecho de que el segmento que mide 2 cm resulta de mayor longitud que el que mide 3 cm, y la segunda sobre la escritura y manipulación de la expresión algebraica. Todos los grupos asumen que se trata de multiplicar 3 por a + 2, por ejemplo, pero casi todos lo escriben sin paréntesis, 3a + 2. Cuando la profesora les recuerda el uso del paréntesis, escriben 3(a + 2) = 3a + 2 porque han olvidado la propiedad distributiva del producto respecto a la suma. Ante la insistencia de la profesora en que también tienen que multiplicar el segundo sumando por 3, varios grupos se rebelan diciendo que no entienden por qué hay que hacer eso. Las llamadas a que recuerden la propiedad distributiva no surten efecto.

Finalmente, la profesora hace una intervención general para decir que 3(a + 2) indica la suma reiterada tres veces de la expresión a + 2 y que escriban dicha multiplicación como una suma. Este argumento parece convencer a los alumnos disidentes y, a partir de ese momento y durante un tiempo, transforman los productos en sumas reiteradas, lo que les permite eliminar correctamente el paréntesis.

En dos grupos obtienen la diferencia directamente razonando que es 6 cm^2 porque es el área del rectángulo de puntos de lados 2 y 3 cm.

En el ejercicio 31 los grupos tienen alguna dificultad con la interpretación del dibujo y no saben cuál es el lado conocido y el desconocido. Una vez solventada esta primera dificultad, algunos grupos llegan a la expresión 2a – 6. La profesora se sorprende de que, al dar valores en dicha expresión, algunos alumnos aceptan que la diferencia puede ser negativa e interpretan correctamente dicho resultado en términos de que el minuendo es menor que el sustraendo.



En los ejercicios 32 y 33 los grupos se bloquean. Los enunciados les resultan muy complejos y no los entienden y la orden de que hagan un dibujo de los tres rectángulos la interpretan en términos de que el dibujo tiene que ser único y con los rectángulos superpuestos, tal como se han dibujado en los ejercicios anteriores, y son incapaces de hacerlo. Tienen que intervenir la profesora y la observadora y sugerir a los grupos que hagan los dibujos por separado, pero entonces no saben escribir la expresión algebraica de los lados, o los suman en vez de multiplicarlos porque confunden área y perímetro, o no aplican la propiedad distributiva para el cálculo de la diferencia.

Finalmente, la profesora decide que el tiempo apremia y les dice a los grupos que pasen al ejercicio 34 y que los ejercicios 32 y 33 los piensen para casa y se corregirán en la próxima clase.

Los grupos empiezan a simplificar las expresiones algebraicas, pero antes la profesora hace una intervención general en la pizarra: "Ya sabemos cómo eliminar el paréntesis en 3(a +2), pero ¿cómo eliminamos el paréntesis en la expresión 20 – 3(a +2)?" Una alumna sale a la pizarra y escribe 20 – 3a + 6. La profesora pregunta a los demás qué les parece. Varios dicen que hay que poner un paréntesis. Finalmente, se llega al acuerdo de deshacer el paréntesis en dos pasos: 20 – 3(a +2) = 20 – (3a +6) = 20 –3a – 6 = 14 – 3a.

Valoración

El paso del ámbito aritmético en el que hasta ahora se situaban los ejercicios al ámbito geométrico ha supuesto una regresión. Los alumnos, que ya asumían el trabajo con letras en la aritmética, no se sienten autorizados para utilizar la notación algebraica en la geometría y tratan de obtener resultados numéricos y vuelven a utilizar símbolos (la x del producto) propios de la aritmética, que ya habían abandonado. Los dibujos que figuran en el material y que se suponía que iban a facilitar el trabajo de los alumnos han resultado más bien una dificultad añadida. Tampoco estaba previsto el desconocimiento de los alumnos sobre la propiedad distributiva. De hecho, el material da por supuesto que los alumnos conocen la propiedad y no tienen dificultades para utilizarla en el cálculo algebraico, lo que ha resultado falso.

Todo esto ha dado como resultado que apenas se hayan podido trabajar los ejercicios 32 y 33. Además, el interés de estos ejercicios está en el cálculo de la diferencia pues es donde aparecen expresiones del tipo 8(a –3) – 2(a + 3), lo que permite entrar a discutir sobre cómo se simplifican. Pero, en realidad, en ellos no se pregunta por las diferencias, sino si las áreas aumentan o disminuyen, lo que se puede averiguar dando valores a los dos términos de la diferencia sin necesidad de efectuarla, con lo cual el objetivo didáctico del ejercicio no se cumple.

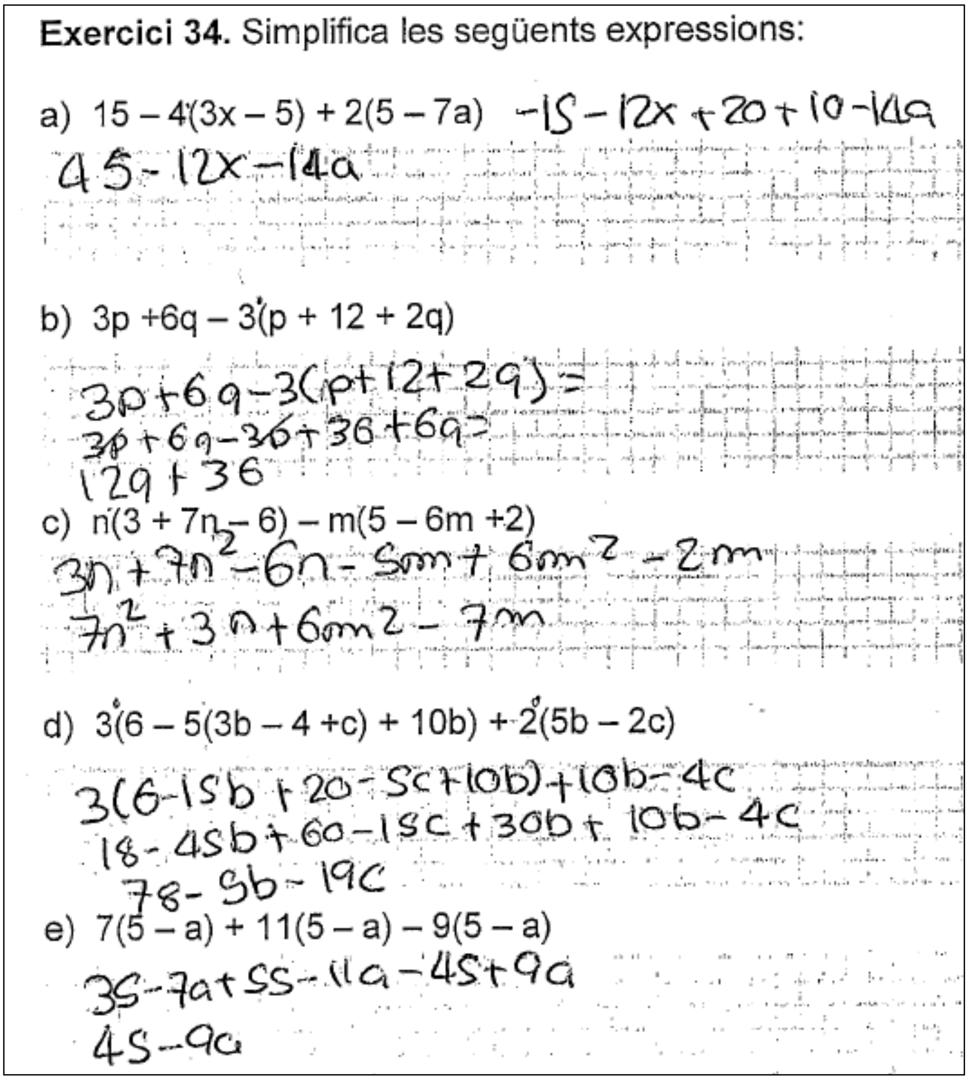
SESIÓN 15: 6/03/09 (VIERNES, 9-10h)

Sigue el trabajo en grupos. En la resolución de los apartados del ejercicio 34, algunos alumnos escriben 15 – 4(3x – 5) + 2(5 – 7a) = 11(3x – 5) + 2(5 – 7a). La profesora se da cuenta de que no conocen la jerarquía de las operaciones e interrumpe la clase para dar una explicación sobre ese tema. Después continúan con las simplificaciones que realizan con bastante corrección, aun cuando sigue habiendo alumnos que se olvidan de cambiar los signos al suprimir un paréntesis precedido de un signo 'menos'.

Aparece por primera vez la necesidad de multiplicar dos términos literales (n por 7n, por ejemplo). Los alumnos expresan el resultado en la forma n7n ó 7nn y la profesora, al recorrer los grupos, tiene que avisar de que ese producto se escribe en la forma $7n^2$. Los grupos lo aceptan sin mayor problema porque es una notación con la que ya están familiarizados.

El siguiente ejemplo es muy representativo del comportamiento de la mayoría de los alumnos de la clase. En él se observa que la alumna:

- escribe las sucesivas expresiones algebraicas unas debajo de otras sin ligarlas con el signo igual,
- asume el cambio de signos al suprimir los paréntesis, pero de vez en cuando se le olvida (apartado b)),
- no simplifica los paréntesis antes de aplicar la propiedad distributiva,
- realiza la suma de términos con bastante corrección, aunque comete algún error: –15 + 20 + 10 = 45 (apartado a)) y 3n – 6n = 3n (apartado c)), y
- tiende a suprimir el signo 'menos' del primer término de una expresión
- algebraica (apartado a)).



Exercici 34. Simplifica les següents expressions:

a) 15 – 4(3x – 5) + 2(5 – 7a) -15 - 12x + 20 + 10 - 14a

45 - 12x - 14a

b) 3p +6q – 3(p + 12 + 2q)

3p + 6q - 3(p + 12 + 2q) =

3p + 6q - 36 + 36 + 6q =

12q + 36

c) n(3 + 7n – 6) – m(5 – 6m +2)

3n + 7n2 - 6n - 5m + 6m2 - 2m

7n2 + 3n + 6m2 - 7m

d) 3(6 – 5(3b – 4 +c) + 10b) + 2(5b – 2c)

3(6 - 15b + 20 - 5c + 10b) + 10b - 4c

18 - 45b + 60 - 15c + 30b + 10b - 4c

78 - 5b - 19c

e) 7(5 – a) + 11(5 – a) – 9(5 – a)

35 - 7a + 55 - 11a - 45 + 9a

45 - 9a

En el ejercicio 35, incluso alumnos que han efectuado bien las operaciones contestan incorrectamente a alguno de los apartados. La profesora vuelve a recordar que "restar una suma equivale a restar cada uno de los sumandos", etc. Los grupos corrigen las frases sin mayores protestas.

Exercici 35. Completa les següents frases:

Sumar 2(a + b) és el mateix que sumar 2a i sumar 2b.

Sumar 2(a – b) és el mateix que sumar 2a i restar 2b.

Restar 2(a + b) és el mateix que restar 2a i sumar 2b.

Restar 2(a – b) és el mateix que restar 2a i restar 2b.

El ejercicio 36 está pensado para que los alumnos se encuentren con la necesidad de sacar factor común, pero los grupos que llegan a él lo resuelven buscando por tanteo la expresión que multiplicada por 2 da como resultado el área dada. Utilizan el mismo procedimiento en el ejercicio 37, siendo muy pocos los alumnos que efectúan la diferencia 216(2n +3m) – 10(2n +3m) = 206(2n +3m) sin deshacer los paréntesis y cuando la profesora lo comenta en los grupos: "tengo 216 veces una expresión y le tengo que restar 10 veces esa misma expresión, ¿cuál será el resultado?", una parte de los alumnos no entiende el razonamiento. Entonces la profesora pregunta: ¿Cómo se simplificaría esta expresión si en vez de 2n + 3m tuviéramos *a*? Con esta nueva pregunta, bastantes alumnos se animan a efectuar la operación sin deshacer paréntesis.

Exercici 37. A les següents parelles d'expressions algebraiques, indica quantes vegades és major o menor l'una de l'altre.

a) 36t – 4 és 2 vegades major que 18t – 2

b) 216(2n +3m) – 10(2n + 3m) és 103 vegades més gran que 6m + 4n
a a 206

c) 3(30c – 60 + 20b) és 2 vegades major que 5(6b +9c – 18)
90c+180+60b 30b+45c=90=396

En el apartado b) del ejercicio 37, los alumnos tienden a escribir la diferencia colocando en el lugar del minuendo la expresión mayor. De esa manera, la diferencia es positiva. Cuando obtienen una diferencia negativa, borran y escriben la diferencia opuesta para obtenerla positiva.

Al finalizar la clase, la situación de los grupos es bastante dispar: dos de ellos están comenzando el ejercicio 38, mientras los demás grupos están en alguno de los tres ejercicios anteriores

Valoración

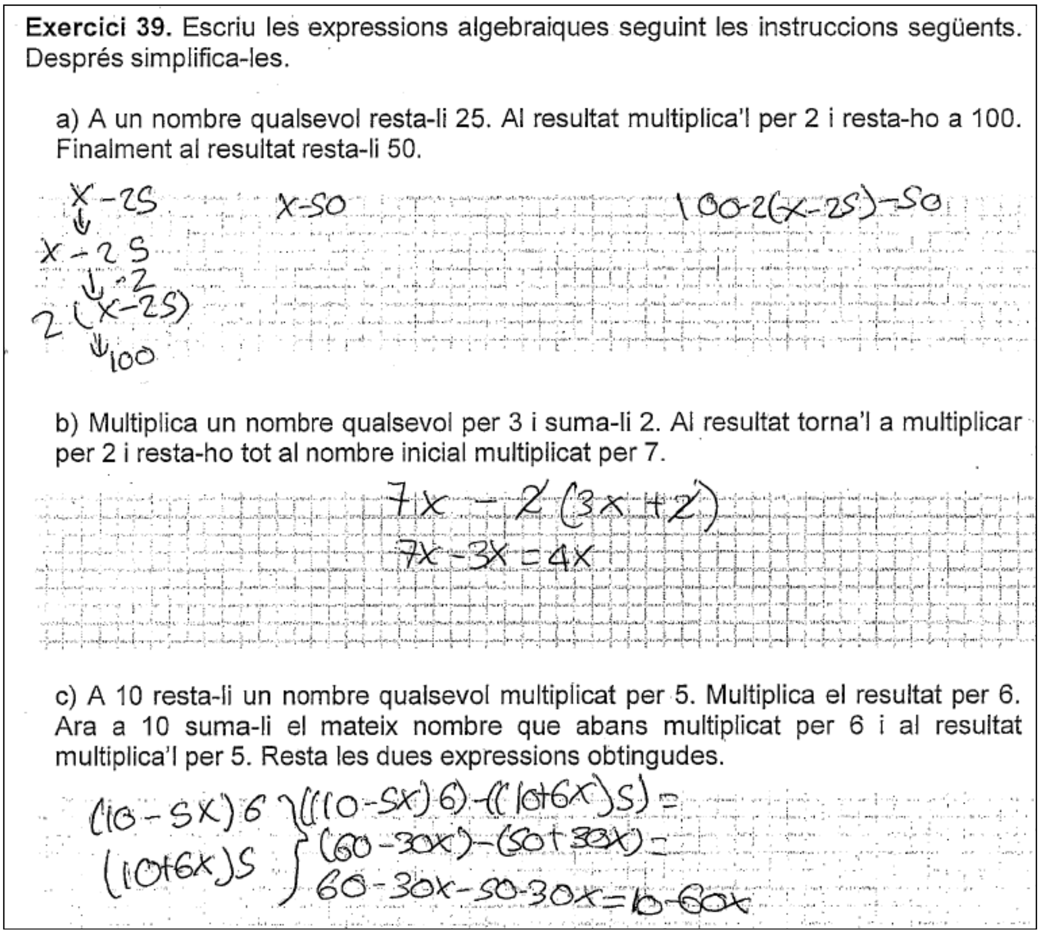
Aunque los alumnos siguen cometiendo errores en los cálculos, se observan avances significativos en la realización y comprensión de los mismos y en la rapidez con la que rehacen el cálculo cuando la profesora les hace ver que es incorrecto.

SESIÓN 16: 6/03/09 (VIERNES, 13:30-14:30h)

Es una sesión de trabajo individual, la última sesión del taller, y los alumnos reanudan su trabajo donde lo dejaron en la sesión anterior.

En el ejercicio 38, se producen errores de diferentes tipos pero, en general, los alumnos que han llegado a él, calculan con bastante corrección. Como se trata de operaciones entre números y por tanto todas efectuables, hay que discriminar si conviene o no efectuar las operaciones indicadas en los paréntesis. Los alumnos tienen tendencia a utilizar la propiedad distributiva y la profesora tiene que recordarles que hay que hacer las operaciones de la forma más sencilla y eficaz posible y que en este caso lo más sencillo es efectuar las operaciones indicadas en los paréntesis.

En cuanto al último ejercicio, el 39, los alumnos que llegan a él, menos de la mitad de la clase, se desenvuelven bastante bien, interpretando desde el primer momento que "un número cualquiera" es una variable que debe representarse con una letra o, por lo menos, consultándolo con la profesora. Simbolizan con bastante corrección los programas de cálculo que aparecen en los enunciados, sin olvidarse de los paréntesis y simplifican las expresiones, lo que no es óbice para que aparezcan errores inesperados, como el que comete en el apartado b) este alumno.



Exercici 39. Escriu les expressions algebraiques seguint les instruccions següents. Després simplifica-les.

a) A un nombre qualsevol resta-li 25. Al resultat multiplica'l per 2 i resta-ho a 100. Finalment al resultat resta-li 50.

$x-25$

$x-25 \xrightarrow{\cdot 2}$

$2(x-25) \xrightarrow{} 100$

$x-50$ $\quad 100-2(x-25)-50$

b) Multiplica un nombre qualsevol per 3 i suma-li 2. Al resultat torna'l a multiplicar per 2 i resta-ho tot al nombre inicial multiplicat per 7.

$7x - 2(3x+2)$

$7x-3x=4x$

c) A 10 resta-li un nombre qualsevol multiplicat per 5. Multiplica el resultat per 6. Ara a 10 suma-li el mateix nombre que abans multiplicat per 6 i al resultat multiplica'l per 5. Resta les dues expressions obtingudes.

$(10-5x)6$

$(10+6x)5$

$((10-5x)6)-((10+6x)5)=$

$(60-30x)-(50+30x)=$

$60-30x-50-30x=10-60x$

La clase acaba cuando más de la mitad de los alumnos están resolviendo apartados del ejercicio 38. La profesora les dice que lo terminen en casa y que para la semana siguiente tienen que entregarle el dossier con todos los ejercicios del taller de matemáticas resueltos. También les comenta que, al corregir los dossieres, verá si se hace necesario una corrección en clase. El taller de matemáticas se da por terminado en medio de las exclamaciones de pena de los alumnos porque dicen que trabajar en grupo está muy bien, que se aprende más y que las matemáticas así son más divertidas. Se despiden de la observadora preguntándole si va a volver.

Valoración

Se echa en falta una sesión más de clase que hubiera permitido la corrección en la pizarra de los ejercicios y la discusión de los aspectos más conflictivos, pero no puede ser porque a la profesora le urge comenzar el tema siguiente para poder dar todos los contenidos previstos en la programación de la asignatura. Hay que tener en cuenta que los alumnos ya dedicaron al principio de curso varias semanas al tema de los números enteros, con lo que a las horas del taller de matemáticas se suman las del principio de curso y eso está coartando el desarrollo de la programación. Por lo demás, el trabajo en esta sesión se ha desarrollado con normalidad y las dificultades surgidas han sido las previsibles.

ANEXO IV.5

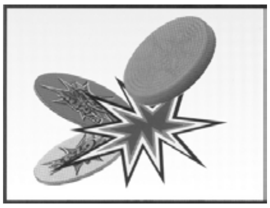
PROBLEMA INICIAL

Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos.
Al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 rojas y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas.

A. Indica quién gana la partida en los casos siguientes:
   a. Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
   b. Les fichas blancas valen un punto menos que las rojas.

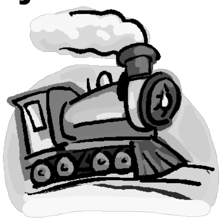
B. ¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si Eva y Bernardo empatan (es decir, tienen el mismo número de puntos)?

1. CÓMO CONSTRUIR EXPRESIONES ALGEBRAICAS



Ejercicio 1. Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?

Ejercicio 2.



Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?

Ejercicio 3. Completa las tablas siguientes sobre el número de pasajeros del tren anterior.

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
427	
1582	
a	

Número de pasajeros que sale de Barcelona	Número de pasajeros que llega a Gerona
	45
	876
	c

Ejercicio 4. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

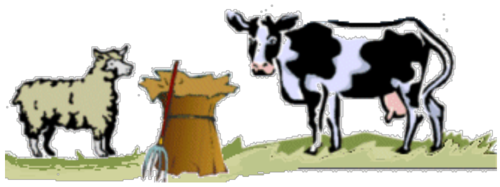
Ejercicio 5. Si María nos dice que le han quedado 30€, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos?

¿Y si le quedan 15 €?

¿Y si solo le quedan 5 €?

Ejercicio 6. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas.

Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas.



Nº inicial de vacas	Nº inicial de ovejas	Nº inicial de animales	Nº final de vacas	Nº final de ovejas	Nº final de animales
80	150				
			65	120	
50					
				90	

Ejercicio 7. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

(a) $a + 5 + 8 - 6$

(b) b – 6 – 10 – 4

(c) 12 – a – 5

2. CÓMO COMPARAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 8. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

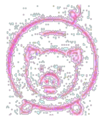
Ejercicio 9. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indica cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

b) El regalo cuesta 24 €.

¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Ejercicio 10.
Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:



María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

(b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Ejercicio 11. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x + 1$ $\quad$ $x - 10$

E2) $p - 7$ $\quad$ $p - 3$

E3) $2a + 5$ $\quad$ $3a + 12$

E4) $25 - z$ $\quad$ $25 - 2z$

E5) $a - 4b$ $\quad$ $a + b$

E6) $3n + 5$ $\quad$ $2n + 30$

Ejercicio 12. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) $b - 45$

E2) $r - 27 + 2r - 38 + 17 - r$

E3) $33 - 2a$

Ejercicio 13. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que $y - 13$

E2) 11 unidades menor que $2c - 1$

E3) 4 veces mayor que $2n + 3m$

E4) 11 veces mayor que $16 - 3a$

3. CÓMO SIMPLIFICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 14. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

(a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$

(b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$

(c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Ejercicio 15. Completa las siguientes frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que______________________________

Ejercicio 16. Completa las siguientes frases:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ____________ primero 2 y _____________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que____________ primero 2 y _____________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que_____________ primero 2 y _____________ después 5.

Ejercicio 17. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Lee toda la expresión de izquierda a derecha y observar si se suma y resta un mismo número. En ese caso, se tachan los dos. Realiza esa operación todas las veces que se pueda y vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos.

2) Vuelve a leer toda la expresión y realiza primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

Ejercicio 18. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) $30 + w - 10 + 12 - v$

E2) $h - 25 - 25 + 50 - 7$

E3) $m - 45 + 44 - 17 + 18 + 27 - 3$

E4) $100 - a - b - c - 80 + 6$

E5) $65 + 84 - 82 - 13 + 15 - 16 - 4$

E6) $p - 15 + 85 + 36 + 24 - 35 - 1$

E7) $100 - r - n + 48 - 99 - 18$

Ejercicio 19. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

(a) $200 + n + m + n + m - 50 + m$

(b) $35 - a - a - a - a - a + 60$

(c) $s + 72 - 67 + s + 67 - 48 - 72 - 5 - s + 50$

(d) $3f + 77 + 5f - 82 + 23 + 82 - 2f$

(e) $17p + 26 - 32q - 16 + 12q + 3p$

(f) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$

(g) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$

4. CÓMO ENCONTRAR LA DIFERENCIA ENTRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

Ejercicio 20. Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

678 + 99

47 + 98

157 – 99

123 + 39

87 – 29

601 - 103

427 + 397

212 – 198

117 – 22

Ejercicio 21. Coloca los signos + y – que faltan en las siguientes igualdades:

765 – (100 – 1) = 765 – 99 = 765 __ 100 __ 1

80 – (30 – 1) = 80 – 29 = 80 __ 30 __ 1

141 – (100 + 2) = 141– 102 = 141 __ 100 __ 2

92 – (42 +3) = 92 – 45 = 92 __ 42 __ 3

325 + (200 – 3) = 325 – 197 = 325 __ 200 __ 3

Ejercicio 22.
I) Efectúa las operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) 12 – (8 – 3)

b) 12 – (8 + 3)

c) 12 + (8 – 3)

d) 12 + (8 + 3)

II) Efectúa las operaciones siguientes:

e) 12 – 8 – 3

f) 12 – 8 + 3

g) 12 + 8 – 3

h) 12 + 8 + 3

III) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado I), las operaciones del apartado II) que tienen el mismo resultado.

Apartado I	Apartado II
12 – (8 – 3)	
12 – (8 + 3)	
12 + (8 – 3)	
12 + (8 + 3)	

Ejercicio 23. Completa las siguientes frases:

Sumar a + b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Sumar a – b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Restar a + b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Restar a – b es lo mismo que ________________ a y _________________ b.

Ejercicio 24.

a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

Nº de canicas de Javier	
Nº de canicas de Carlos	
Nº de canicas de Marcos	
Nº de canicas de Enrique	
Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique	

b) ¿Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el nº de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el nº de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
d	
	e

Ejercicio 25. Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:

i) 7p + 3q   2p – 2q

ii) 4t – 6 – 15   4t – 3 – 2

iii) 21 – 2m +3 – 23 + 5m   10m – 30 + 5m + 25

Ejercicio 26. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

Ejercicio 27. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

E1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

E2) $17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$

E3) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

E4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E5) $20 - 10z - (5z - (10 - 2w))$

Ejercicio 28. Cuando las expresiones algebraicas sólo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo de hacer.

Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) $45 - (371 - 87) + 372 - 87$ Deshacer paréntesis: SÍ NO

b) 8 + 20 – (45 – 44 + 3) Deshacer paréntesis: SÍ NO

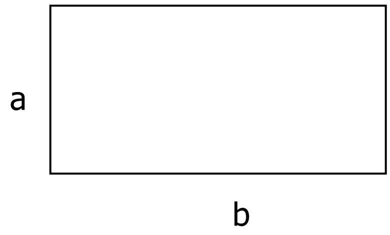
c) 13 + (27 – 20) – (25 – 10 – 15) Deshacer paréntesis: SÍ NO

d) 5 – (4 – (3 – (2 – 1))) Deshacer paréntesis: SÍ NO

e) 4578 + 3127 – 578 – (127 +841 + 512) + 841 + 12
Deshacer paréntesis: SÍ NO

5. CÓMO MULTIPLICAR EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Ejercicio 29.
i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).



Si nos dicen que a = 3 cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

Ejercicio 30.
a) Aplica la propiedad distributiva a las siguientes expresiones para suprimir los paréntesis.

i) $10(a - b)$

ii) $4 + 5\,(x + 22)$

iii) $12(n + m - 4) - 5n + 40$

b) Aplica la propiedad distributiva en sentido inverso en las siguientes expresiones (Esta operación recibe el nombre de "sacar factor común").

i) $3t - 3v + 3z$

ii) $5v - 10$

iii) $24m + 12$

Ejercicio 31.
i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.

ii) ¿Que pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

iii) ¿Que longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

Ejercicio 32. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Ejercicio 33. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a)$

b) $3p + 6q - 3(p + 12 + 2q)$

c) $n(3 + 7n - 6) - m(5 - 6m + 2)$

d) $3(6 - 5(3b - 4 + c) + 10b) + 2(5b - 2c)$

e) $7(5 - a) + 11(5 - a) - 9(5 - a)$

Ejercicio 34. Completa las siguientes frases:

Sumar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Sumar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a + b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Restar 2(a – b) es lo mismo que ________________ 2a y ________________2b.

Ejercicio 35. Tres rectángulos tienen un lado igual que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, 6 + 2a cm^2 y 6 – 4a cm^2.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo?

b) ¿En cuánto se diferencian los lados distintos de los rectángulos?

Ejercicio 36. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) 36t – 4 es _______ veces _______ que 18t – 2

b) 16(2n +3m) – 10(2n + 3m) es _______ veces ________ que 6m + 4n

c) 30c – 60 + 20b es _______ veces _______ que 2b +3c – 6

Ejercicio 37. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17 - 4 \cdot 3) + 5 - 3^3$

b) $(9^2 - 7^2) - (9 - 7)^2$

c) $47(4 \cdot 15 - 35) - 17 \cdot 25$

d) $45 - 5(20 - 4(15 - 3(10 - 6)))$

e) $8 + 2 \cdot 6 - 5 \cdot 6 + 9 \cdot 6 - 4 \cdot 6$

Ejercicio 38. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

ANEXO IV.6

DIARIO DE SESIONES DE CLASE DE 1º ESO. CURSO 2009-10

Centro: IES Costa i Llobera (Barcelona)

Características del Centro: Fundado en 1958 como alternativa a la oferta escolar del momento: escuela pública estatal y escuela privada religiosa, el colegio Costa y Llobera buscaba atender a las aspiraciones educativas de una clase media, media-alta que no se sentía cómoda con la oferta escolar tradicional. Inicialmente fue un centro privado que se instaló en un piso de la Rambla de Cataluña, pero posteriormente fue cambiando de ubicación hasta llegar al barrio de Can Caralleu, al pie del Tibidabo. Su nombre es un homenaje al poeta mallorquín Miquel Costa y Llobera (1854-1922).

El Colegio era y sigue siendo un centro educativo muy comprometido con los movimientos de renovación pedagógica. Aunque desde 1989 es un centro público, sigue atendiendo a un alumnado procedente de familias con un nivel cultural y económico más bien alto y mantiene un equipo docente cohesionado gracias a su calificación como centro experimental, lo que le permite seleccionar al profesorado mediante un concurso de méritos restringido.

Curso académico: 2009-2010.

Idioma utilizado en las clases: Catalán

Profesora: Mª Isabel Mestre.

Datos del grupo: Es un grupo de 1º de ESO denominado 1º B y compuesto por 30 alumnos motivados, participativos y con un comportamiento correcto. Dos de los alumnos son de integración y aunque permanecen en clase con los demás alumnos, la profesora les propone tareas adaptadas a sus capacidades.

Horario: La experimentación se realiza en el horario de clases de la asignatura de Matemáticas: los martes de 9 a 10, los jueves de 10 a 11, los lunes de 13:30 a 14:30 y los miércoles de 12:30 a 13:30. En las dos primeras horas el grupo está completo y se trabaja en grupo pequeño. En las dos últimas horas los alumnos se distribuyen por niveles de rendimiento académico, asistiendo los alumnos con mayores dificultades a la hora del miércoles y el resto del grupo a la del lunes. En estas últimas clases se trabaja individualmente y el trabajo propuesto es el mismo, pero esta organización permite una atención más personalizada. Por consiguiente, cada alumno tiene tres horas de clase a la semana pero en una de ellas, la de trabajo individual, no están todos los alumnos del grupo.

Observadoras: Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón.

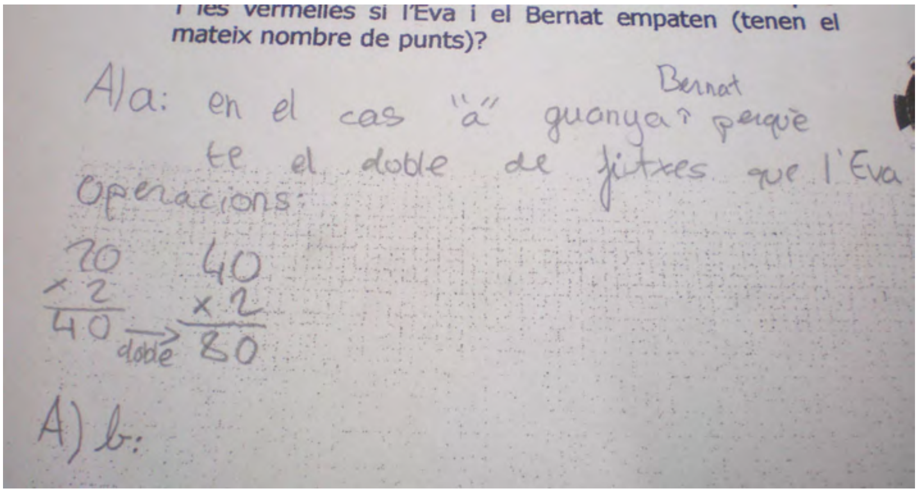
Condiciones de la observación: Se observan las clases de lunes, martes y jueves durante todo el periodo que dura la experimentación. Normalmente, hay una sola observadora en la sesión de clase que registra los hechos sucedidos mediante apuntes personales y fotos.

SESIÓN 1: 3/11/09 (MARTES, 9-10h)

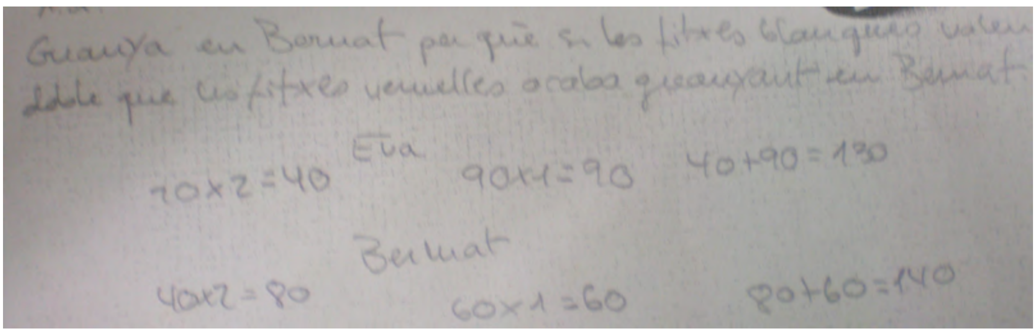
Empieza la clase con los grupos ya formados. En días anteriores la profesora, de acuerdo con los alumnos, los organizó en grupos de cuatro, procurando que en todos los grupos hubiera niños y niñas y que el nivel académico fuera variado. Una vez hechos los siete grupos, les dijo a los dos alumnos de integración que se incorporarán al grupo que prefiriesen, quedando dos grupos de 5 alumnos.

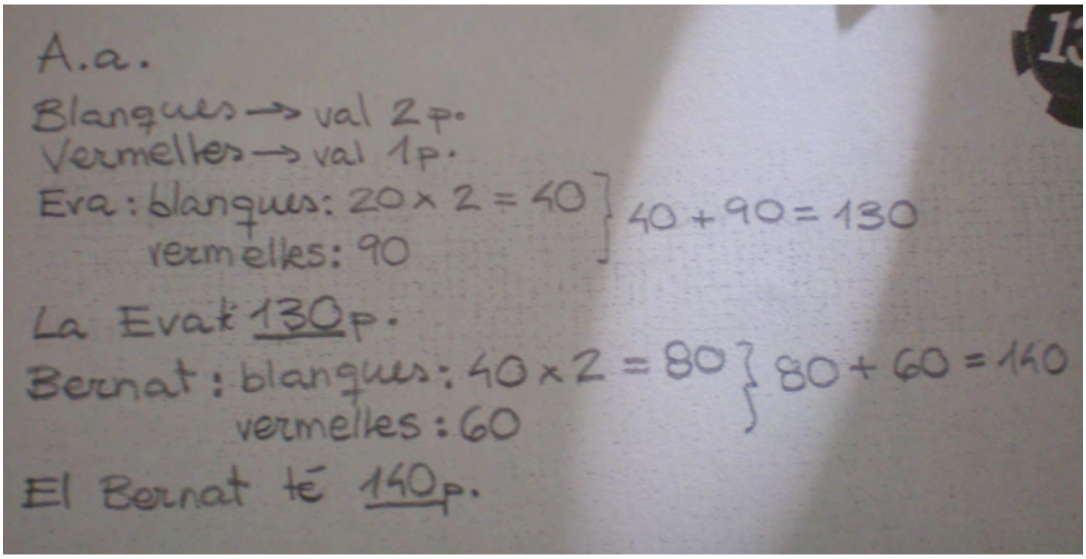
La profesora pide a los alumnos que formen los grupos y reparte el problema inicial. Les dice que van a trabajar en un problema nuevo, que necesita nuevas estrategias de resolución, que quizá alguna parte del problema no la sepan resolver, pero que no se asusten, que precisamente la parte de matemáticas que empieza ahora es para eso, para aprender a resolver ese tipo de problemas con más eficacia.

La estrategia inicial de los grupos es la de multiplicar las fichas blancas por dos y sumarle las fichas rojas, aunque un grupo decidió que siempre ganaba Eva porque tenía más fichas y la profesora tuvo que recordarles que las fichas tenían diferente valor. De esa manera establecen que gana Bernat. Sin embargo, no están seguros de haberlo hecho bien, pues la mayor parte de los grupos no sabe explicar lo que hace, simplemente multiplican por dos porque lo relacionan con el doble.

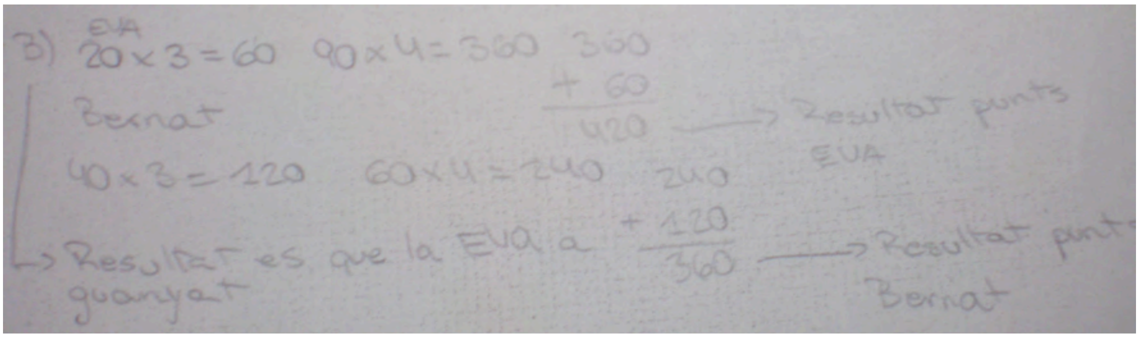


La profesora, en sus intervenciones en los grupos, les sugiere dos explicaciones: cambiamos una ficha blanca por dos rojas o damos un punto a la ficha roja y dos a la ficha blanca. Estas explicaciones satisfacen a los niños porque le da sentido a la solución propuesta.

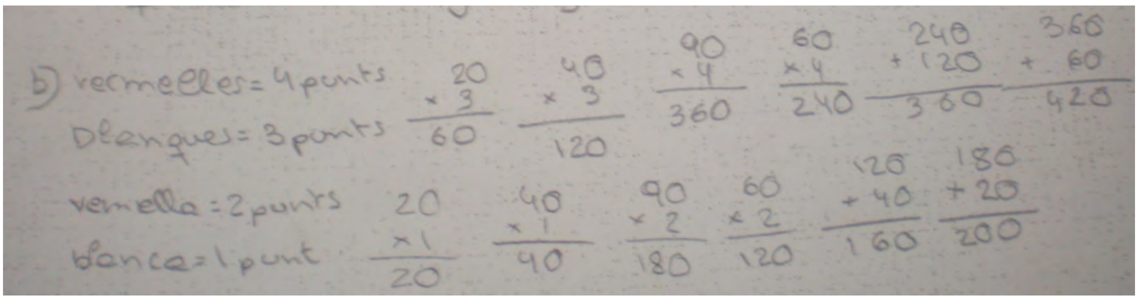




A continuación pasan a resolver el apartado Ab). Los grupos que usaron la estrategia de sustituir una blanca por dos rojas se encuentran con que esa estrategia ya no les sirve y tienen que pasar a considerar los puntos de cada ficha. En general, le dan un punto a la ficha roja y dos a la blanca, pero algunos grupos hacen elecciones distintas.



Obtienen que gana Eva. La profesora les pregunta qué pasaría si los puntos fueran otros. Prueban con otros valores y siempre gana Eva.



Algunos niños son conscientes de que se trata de una solución parcial, pues no está asegurado que gane Eva para todos los valores posibles, pero la mayor parte considera que el problema ha quedado totalmente resuelto.

Cuando llegan al apartado B no saben qué hacer. Para empezar no entienden qué significa el término “relación”. La profesora explica que cuando decimos que una ficha vale el doble que la otra o que una ficha vale más o menos puntos que otra, estamos estableciendo una relación entre los valores de las fichas. Una vez aclarada esta cuestión, la opinión mayoritaria de los niños es que no es posible el empate. Se les sugiere que prueben dando valores, pero no llegan a nada. Tampoco se les dejó mucho tiempo para que resolvieran esta parte ni ellos se implicaron especialmente.

Después de media hora de trabajo de los grupos, la profesora corrige el ejercicio en la pizarra. Escribe:

Bernat	40 fitxes blanques
	60 fitxes vermelles
Eva	20 fitxes blanques
	90 fitxes vermelles
1 fitxa blanca = doble de 1 fitxa vermella	

y pregunta: “¿Quién gana?” Los alumnos contestan que gana Bernat. La profesora sigue preguntando: “¿Cómo lo habéis hecho?” Una alumna dice que ha dado un punto a la ficha roja y dos puntos a la ficha blanca. “Bien -dice la profesora- vamos a ver qué pasa si damos puntos a las fichas” y escribe:

1 fitxa vermella = 1 punt	
1 fitxa blanca = 2 punts	
Bernat té 80 + 60 = 140 punts	
	Guanya el Bernat
Eva té 40 + 90 = 130 punts	

Todos los alumnos están de acuerdo con esta solución. La profesora añade: “También lo podemos hacer cambiando una ficha blanca por dos rojas, ¿quién lo ha hecho así?” . Varios alumnos levantan la mano y entonces la profesora escribe en la pizarra:

1 fitxa blanca = dos fitxes vermelles		
Bernat	40 fitxes blanques =	80 fitxes vermelles
		60 fitxes vermelles
		140 fitxes vermelles
Eva	20 fitxes blanques =	40 fitxes vermelles
		90 fitxes vermelles
		130 fitxes vermelles
	Guanya el Bernat	

Ante la pregunta de la profesora sobre qué procedimiento de resolución es el más general, el que garantiza mejor que la solución obtenida es la correcta, hay división de opiniones, pero mayoritariamente prefieren el de dar puntos porque parece que lo entienden mejor. La profesora indica que el procedimiento de cambiar una ficha blanca por dos rojas es un procedimiento más general, un procedimiento que nos asegura la validez de la solución, mientras que el de dar puntos no nos garantiza que si damos otros valores vayamos a obtener la misma solución, porque en realidad no se sabe qué puntuación tienen las fichas. Los alumnos no parecen muy interesados en el razonamiento.

El apartado Ab) se resuelve en la pizarra dando a las fichas la puntuación 1 y 2. La profesora pregunta si algún grupo ha dado otros valores y un alumno dice que en su grupo han dado a las fichas los puntos 3 y 4. Se vuelve a resolver el apartado en la pizarra con esos nuevos valores, obteniéndose la misma solución que antes: gana Eva. La profesora hace notar que sin embargo la diferencia de puntos entre Eva y Bernat es distinta en este caso respecto al anterior y pregunta: ¿Estamos seguros de que siempre ganará Eva, aun cuando demos otras puntuaciones a las fichas? Los alumnos aceptan, aunque no todos, que la solución obtenida puede ser parcial y que quizá, dependiendo de las puntuaciones que se adjudiquen, podría cambiar.

Se pasa a corregir el apartado B. La opinión generalizada de la clase es que Eva y Bernat no pueden empatar. La profesora sugiere que prueben a dar 3 puntos a la ficha blanca y 2 puntos a la ficha roja. Durante un rato los alumnos prueban con esos valores, después se corrige en la pizarra.

1 fitxa vermella = 2 punts
1 fitxa blanca = 3 punts

Bernat té 120 + 120 = 240 punts

L'Eva y el Bernat empaten

Eva té 60 + 180 = 240 punts

La profesora les dice a los alumnos que ha podido encontrar una solución porque sabe de otras técnicas de resolución de problemas distintas de las que ellos conocen y que las próximas clases se dedicarán a aprender esas nuevas técnicas de resolución de problemas: las técnicas algebraicas. Con esto se acaba la clase.

Valoración

Esta segunda versión del problema inicial ha resultado mucho más adaptada al tiempo disponible. Los alumnos han tenido la oportunidad de trabajar todos los apartados del problema. Sin embargo, se observa que la profesora, al tener ya una experiencia previa, tiende a dirigir a los alumnos hacia las respuestas que recuerda que dieron los alumnos del curso anterior, con lo que las respuestas de los alumnos de este curso son menos variadas y espontáneas[1]. El simple hecho de empezar la clase diciéndoles que seguramente una parte del problema no la van a saber resolver, hace que los alumnos no pongan en la búsqueda de la solución el mismo entusiasmo que los alumnos del curso anterior.

Esta vez la profesora ha tenido cuidado de no utilizar letras como abreviaturas de nombres en sus explicaciones con lo que se han evitado las dificultades observadas el

[1] Este fenómeno didáctico se conoce con el nombre de "envejecimiento de las situaciones de enseñanza" y fue descrito por G. Brousseau (1986).

curso anterior como consecuencia del diferente sentido que tienen las letras en aritmética y álgebra.

Se observa también que el discurso sobre la generalidad o particularidad de la solución y la necesidad de introducir otras técnicas de resolución de problemas es aceptado por los alumnos más por respeto a la autoridad de la profesora que por un convencimiento propio.

SESIÓN 2: 5/11/09 (JUEVES, 10-11h)

Es una sesión de trabajo en grupo. La profesora reparte el material titulado *1. Cómo construir expresiones algebraicas* y antes de que empiecen a trabajar ya les advierte que tendrán que utilizar letras para representar los datos del problema que no se conocen. Esto hace que los grupos utilicen en el ejercicio 1 una sobreabundancia de letras sin saber muy bien para qué.

A = tazos
A – 9 = B
B + 7 = C Resultat de tazos que li quedan

T = 9
Z = 7 (Después de escribir esto ya no saben seguir.)

Es necesario volver a reconstruir todo el proceso, preguntando en cada grupo cuántos tazos le quedan a Laura. Los alumnos no tienen problema en responder que tendrá 2 menos que al principio, pero que no se puede saber cuántos son mientras no nos digan cuántos tenía antes. La profesora o la observadora dicen entonces a los grupos que en matemáticas, cuando un dato necesario para resolver un problema no se conoce, se utiliza una letra en su lugar y de esa manera se obtiene como solución una fórmula, en vez de un número. Después de estas intervenciones los grupos discuten qué letra utilizar y escriben como respuesta, por ejemplo, a – 2.

En el ejercicio 2, todos los grupos lo resuelven en forma aritmética y finalmente, a requerimiento de la profesora escriben una respuesta del tipo a +1.

15	12	54	
+ <u>38</u>	+ <u>42</u>	– <u>53</u>	Arriben a Girona a + 1 passatgers
53	54	1	

En el ejercicio 3, casi todos los grupos empiezan de nuevo a hacer todas las operaciones para completar las tablas. La profesora les sugiere que utilicen la fórmula y de esa manera se evitan hacer operaciones y acaban antes. La mayoría de los grupos aceptan la sugerencia, pero se observa que hay alumnos que no están conformes con ella y vuelven a realizar las operaciones. Cuando se convencen de que se obtiene un número una unidad mayor, aceptan utilizar la fórmula.

En el ejercicio 4, llegan a la conclusión, haciendo operaciones aritméticas, de que a María le quedan 65€ menos lo que cuesten los zapatos. Nuevamente, hay que animar a los grupos a que pongan una letra, con la dificultad añadida de que ya no está al comienzo de la expresión y además está restando.

Algún grupo llega al ejercicio 5. Uno de ellos escribe:

j sabates 65 – j = 65 –30 = 35 Les sabates li han costat 35€

La profesora les pide que expliquen lo que han hecho. Ellos dicen que si a 65€ se le resta el dinero que le queda al final, se averigua cuánto costaron los zapatos. "Sí, eso está bien -dice la profesora- pero no es lo que habéis escrito. Habéis sustituido j por 30 y eso no es verdad". El grupo no entiende el razonamiento de la profesora.

Al finalizar la clase, todos los grupos están al menos en el ejercicio 4. La profesora les dice que acaben el ejercicio 5 en casa y que en la próxima clase se corregirán todos.

Valoración

De momento los alumnos resuelven los ejercicios utilizando métodos puramente aritméticos y sólo al final y a requerimiento de la profesora aceptan poner una letra. También la letra recibe un tratamiento aritmético: escriben a = tazos o a = pasajeros, por ejemplo, y la profesora tiene que indicarles que *a* no son los tazos o los pasajeros, sino el número de tazos o de pasajeros iniciales. Aparecen desde el primer momento gran variedad de letras, muchas de las cuales no se relacionan con las iniciales del objeto cuyo número indican.

Se observa de nuevo el fenómeno didáctico de "envejecimiento de la situación de enseñanza" en el intento de la profesora por abreviar un proceso de enseñanza con el que ya está familiarizada, advirtiendo de antemano a los alumnos de lo que va a suceder.

SESIÓN 3: 9/11/09 (LUNES, 13:30-14:30h)

Es una sesión de trabajo individual, pero se dedica parte de la hora a corregir en la pizarra los ejercicios realizados hasta el momento.

La profesora resuelve en la pizarra el ejercicio 1:

Laura porta t tazos Després de la primera partida té t – 9 Després de la segona partida té t – 9 + 7 t – 9 + 7 = t – 2 tazos

Mientras la profesora explica, varios alumnos intervienen contando lo que han hecho: unos dicen que lo han hecho más largo, otros dicen que más corto, otros que han utilizado otra letra, etc. Todos parecen muy interesados en comunicar sus opiniones y maneras de hacer y la profesora les anima a que se lo expliquen a sus compañeros.

Al escribir la expresión t – 9 + 7 la profesora pregunta si se puede escribir de manera más sencilla. Varios alumnos dicen que ellos han escrito t – 2, pero con otra letra. La profesora pregunta por qué. Todos se aprestan a dar razonamientos del tipo “si en la primera partida pierde 9 canicas y en la segunda gana 7, en total ha perdido 2, así que tiene 2 menos que al principio”. La profesora comenta: “Claro, si a t le tenemos que restar primero nueve y después sumar 7, eso es lo mismo que restarle 2” y escribe t – 9 + 7 = t – 2. Los alumnos parecen aceptar el razonamiento sin dificultad.

La profesora corrige el ejercicio 2, escribiendo en la pizarra:

b = nombre de passatgers que surten de Barcelona
Després de la primera parada queden b – 15 + 12 = b – 3
Després de la segona parada queden b – 3 – 38 + 42 = b – 3 + 4 = b + 1
Arriben a Girona b + 1 passatgers

A medida que escribe en la pizarra, va explicando lo que hace con intervenciones de los alumnos que también explican sus modos de hacer. A la hora de simplificar las expresiones, la profesora recurre a las frases “restar 15 y sumar 12 es lo mismo que restar 3”, etc. Finalmente, pregunta qué quiere decir que llegan a Gerona b + 1 pasajeros. Los alumnos responden que el tren llega con un pasajero más de los que salieron de Barcelona.

No hay ninguna dificultad respecto a la comprensión de los razonamientos, el problema se plantea con su representación algebraica. Hay niños que dicen no entender las expresiones intermedias y la profesora tiene que volver a explicar lo que significan.

Después se escriben en la pizarra las tablas del ejercicio 3, sin que den lugar a ninguna discusión, ni comentario. A continuación se corrige el ejercicio 4:

María porta 120€
Després de comprar els pantalons li queden 120 – 40 = 80€
c = preu de les sabates
Després de comprar les sabates li queden 80 – c
Després de comprar el llibre li queden 80 – c –15 = 65 –c

Nuevamente hay dificultades con el simbolismo algebraico. Los alumnos entienden que el resultado final es 65 – c, pero no entienden el paso intermedio 80 – c – 15 = 65 – c. La profesora les dice que lo que está escrito es lo que han hecho ellos: como no podían restar c, han dejado de lado esa operación y han empezado por restar 15 y de esa manera han obtenido 65.

Un alumno dice que él ha puesto más letras. La profesora lo hace salir a la pizarra y el alumno escribe:

R = diners que li queda
R = 65 –c

La profesora le dice que está bien escrito, que esa expresión es una fórmula. A continuación se corrige el ejercicio 5. La profesora escribe:

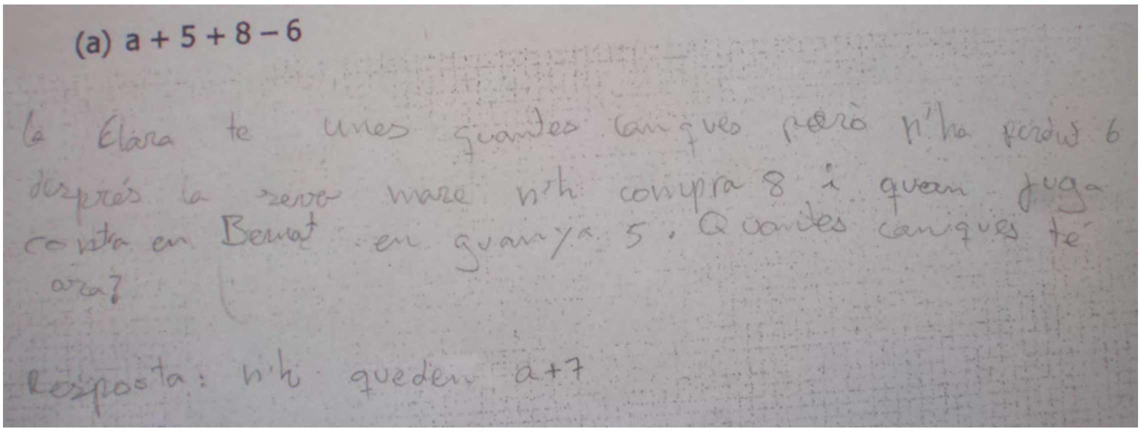
65 – c = 30
65 –c = 15
65 –c = 5

y explica que como sabemos que el dinero que le queda a María es 65 – c, si nos dicen que le han quedado 30€, tendrá que ser 65 – c = 30 y que habrá que pensar qué número le tenemos que restar a 65 para obtener 30. Los alumnos dicen que hay que restar 35.

Varios alumnos comentan que ellos lo han hecho al revés, a 65 le han restado 30 y han obtenido 35. La profesora les habla de la reversibilidad de la resta: "eso también es correcto porque si 65 – c = 30, entonces 65 – 30 = c". Finalmente se completa la pizarra:

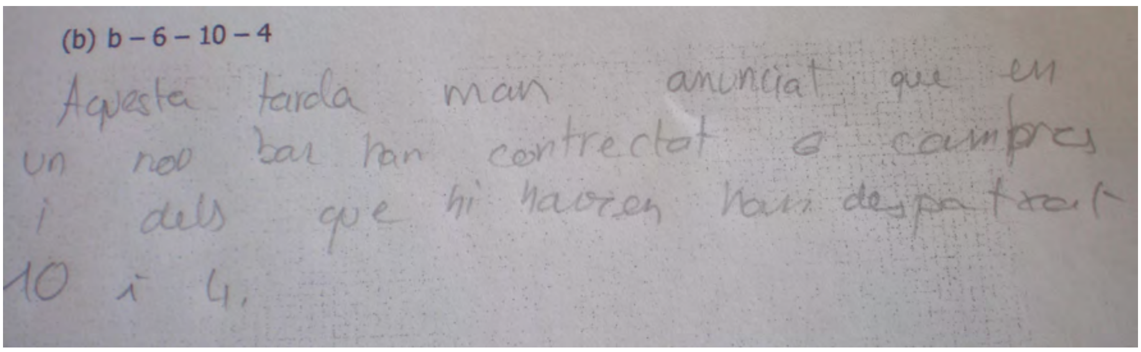
65 – c = 30	c = 35€
65 –c = 15	c = 50€
65 –c = 5	c = 60€

Después de la corrección, la profesora recuerda a los alumnos que deben ir haciendo el dossier que entregarán al acabar el tema. Como quedan 20 minutos de clase, les dice que hagan el ejercicio 7, dejando el 6 para la siguiente clase. Los alumnos proponen diversos enunciados:

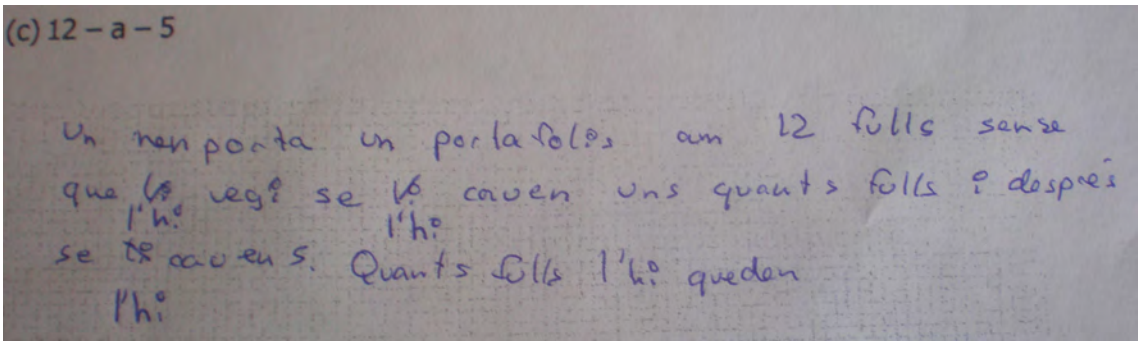

(a) a + 5 + 8 – 6

La Clara te unes quantes caniques però n'ha perdut 6 després la seva mare n'hi compra 8 i quan juga contra en Bernat en guanya 5. Quantes caniques té ara?

Resposta: n'hi queden a+7


(b) b – 6 – 10 – 4

Aquesta tarda m'han anunciat que en un nou bar han contractat a cambres i dels que hi havien han despatxat 10 i 4.


(c) 12 – a – 5

Un nen porta un portafolis am 12 fulls sense
que les vegi se les cauen uns quants fulls i després
l'hi l'hi
se te cauen 5. Quants fulls l'hi queden
l'hi

pero tienen dificultades para simplificar las expresiones b – 6 – 10 – 4 y 12 – a – 5. La profesora les pregunta: “si restamos primero 6, después 10 y, por último 4, ¿cuánto hemos restado en total?”. La segunda expresión les resulta más complicada: entienden que a 12 hay que restarle 5, pero como hay una letra por el medio no se sienten con legitimidad para hacerlo. La profesora les dice: “si a 12 le tengo que restar primero c y después 5, el resultado no cambia si empiezo restando 5 y dejo la resta de c para el final”. Los alumnos se animan a efectuar la operación, pero muchos de ellos dan como resultado a –7.

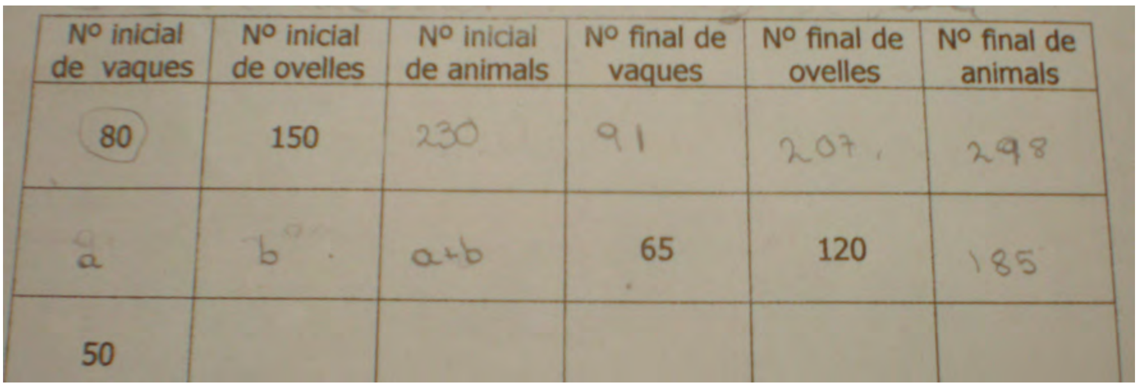
Valoración

La sesión de corrección de ejercicios en la pizarra ha resultado muy productiva. Los alumnos, que siguen utilizando métodos de resolución aritméticos y solo se avienen a poner la letra en la respuesta final, han podido ver la forma de resolver de la profesora, más algebraica, y han tenido la oportunidad de contrastarla con sus propios métodos.

SESIÓN 4: 12/11/09 (JUEVES, 10-11h)

Resuelven en grupo el ejercicio 6, lo que les ocupa gran parte de la hora. No tienen mayores dificultades en rellenar las dos primeras filas, salvo algún que otro error de cálculo, pero lo hacen de muy diferente manera: mientras algunos grupos se dan cuenta de que se pasa de la columna “Nº inicial de vacas” a la columna “Nº final de vacas” restando 9, y de la columna “Nº inicial de ovejas” a la columna “Nº final de ovejas” restando 13, otros grupos necesitan rehacer todas las operaciones en cada fila.

Un grupo no reconoce inicialmente que en la segunda fila todas las casillas pueden determinarse.



Nº inicial de vaques	Nº inicial de ovelles	Nº inicial de animals	Nº final de vaques	Nº final de ovelles	Nº final de animals
80	150	230	91	207	298
a	b	a+b	65	120	185
50					

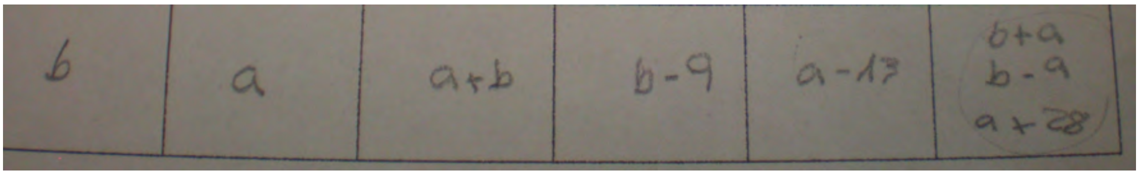
Cuando llegan a la tercera fila los alumnos dicen que les faltan datos y la profesora les propone que pongan una letra. Aquellos grupos que tienden a poner la inicial de los objetos se encuentran con problemas para dar una letra al número de ovejas. La inicial se confunde con el cero y la v ya la han utilizado para indicar el número de vacas, así que eso les obliga a proponer otra letra.

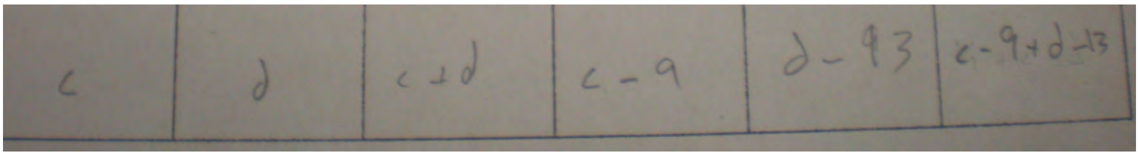
En la tercera y cuarta fila se encuentran por primera vez con la necesidad de sumar un número y una expresión algebraica. Algunos realizan la operación aritmética al margen y escriben en la casilla el resultado final, mientras que otros escriben la suma indicada y tienen después dificultades para simplificarla.

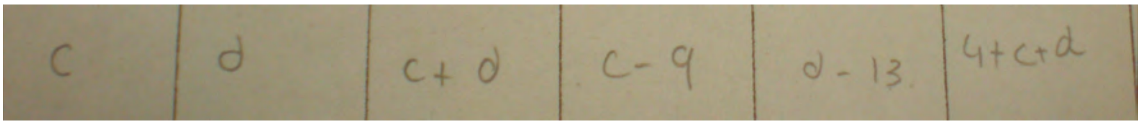
Nº inicial de vaques	Nº inicial de ovelles	Nº inicial de animals	Nº final de vaques	Nº final de ovelles	Nº final de animals
80	150	230	71	137	208
74	133	207	65	120	185
50	a	a+50	[illegible]	a-13	a+28
b	103	b+103	b-9	90	[illegible]

Nº inicial de vaques	Nº inicial de ovelles	Nº inicial de animals	Nº final de vaques	Nº final de ovelles	Nº final de animals
80	150	230	71	137	208
74	133	207	65	120	185
50	e	50+e	41	e-13	41+e-13
	103			90	

En la última fila tienen que utilizar dos letras lo cual es una novedad que genera preguntas y produce confusión en los grupos. Finalmente, van escribiendo los resultados en las casillas, pero en la última se encuentran con una suma de dos expresiones algebraicas, lo que da lugar a respuestas muy variadas: desde los que escriben expresiones totalmente erróneas a los que escriben la suma indicada correctamente, pero cometen errores al intentar simplificar la expresión. Ningún grupo simplifica correctamente la suma de las dos expresiones algebraicas y la profesora y la observadora tienen que pasar por todos los grupos para corregir sus soluciones.



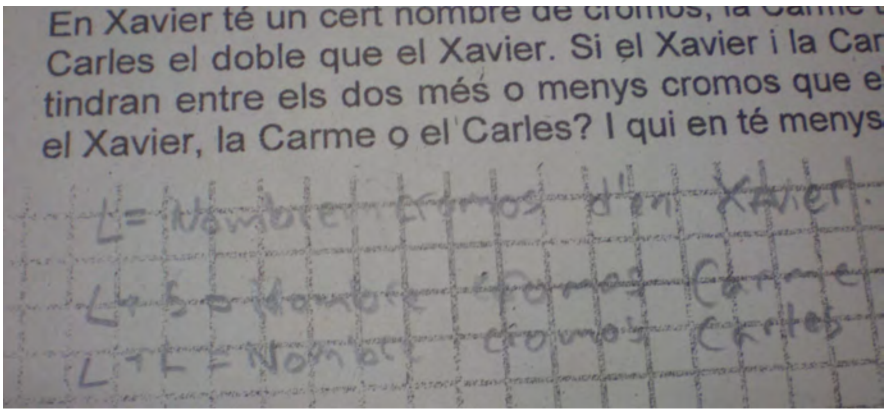




Un grupo se significa especialmente porque plantea desde el comienzo que lo mejor es rellenar primero la última fila y después utilizar las fórmulas para rellenar las demás casillas. Consideran que es un procedimiento más rápido. A la profesora le parece muy bien y así lo hacen.

A medida que los grupos acaban el ejercicio 6, la profesora les reparte el material titulado *2. Cómo comparar expresiones algebraicas* y les dice que comiencen el ejercicio 8.

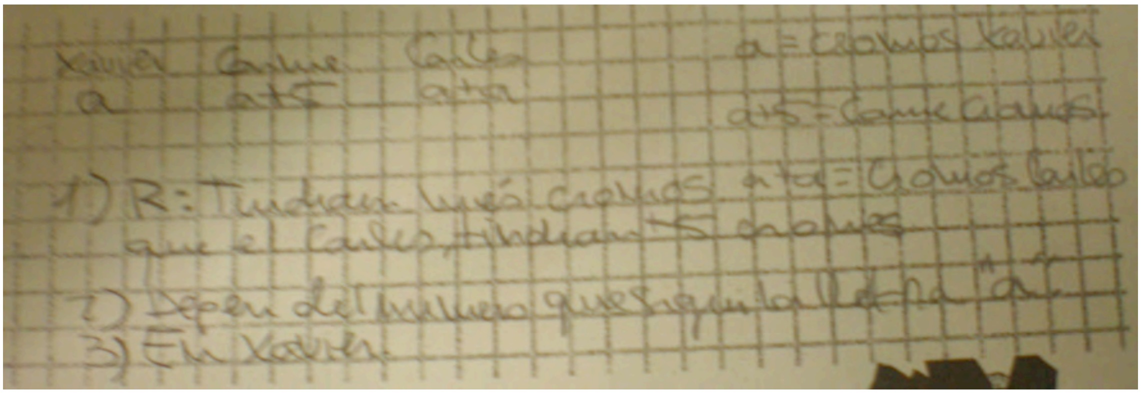
Algunos grupos siguen dándole a las letras un sentido aritmético como abreviatura de un objeto, pero otros grupos ya caracterizan a las letras como cantidades sin necesidad de que se lo haga notar la profesora.


En Xavier té un cert nombre de cromos,
Carles el doble que el Xavier. Si el Xavier i la Car
tindran entre els dos més o menys cromos que e
el Xavier, la Carme o el Carles? I qui en té menys

L= Nombre cromos d'en Xavier.
L+5 = Nombre cromos Carme
L+L = Nombre cromos Carles

Los grupos representan sin gran dificultad las cantidades de las que habla el ejercicio 8. Cuando llegan a la expresión L + L + 5 hay que advertirles que L + L es el producto de L por 2. Los grupos aceptan ese hecho, pero la mayoría escribe Lx2 y nuevamente hay que advertir que ahora el signo del producto se suprime o se pone un punto, para evitar que se confunda con la letra x. Los alumnos escriben indistintamente L2 o 2L y algunos mantienen el signo aritmético del producto. Hay que tener en cuenta que es la primera vez que se encuentran con los coeficientes de las letras.

En cuanto a las comparaciones, deducen con bastante rapidez que 2L + 5 es mayor que 2L y que Javier es el que tiene menos cromos. En lo que se refiere a la comparación entre el número de cromos de Carmen y Carlos, no todos los grupos se dan cuenta de que depende del valor de L y la profesora tiene que decirles que den valores a la letra para averiguar la relación. Deducen entonces que la desigualdad depende del valor de la letra y solo algunos grupos llegan a dar la solución precisa.



Cuando la clase termina todos los grupos menos uno han completado el ejercicio 8.

Valoración

Aunque la realización del ejercicio 6 supone casi toda la hora de clase, por primera vez los alumnos se ven enfrentados a la necesidad de calcular con expresiones que contienen letras. Hasta ahora podían obviar el tema, haciendo operaciones aritméticas e introduciendo la letra en la respuesta final, pero aquí, y más todavía en el ejercicio 8, las letras aparecen desde el principio. Las dificultades de los alumnos ponen de manifiesto el gran salto que supone el paso del cálculo y del razonamiento aritmético al algebraico.

SESIÓN 5: 16/11/09 (LUNES, 13:30-14:30h)

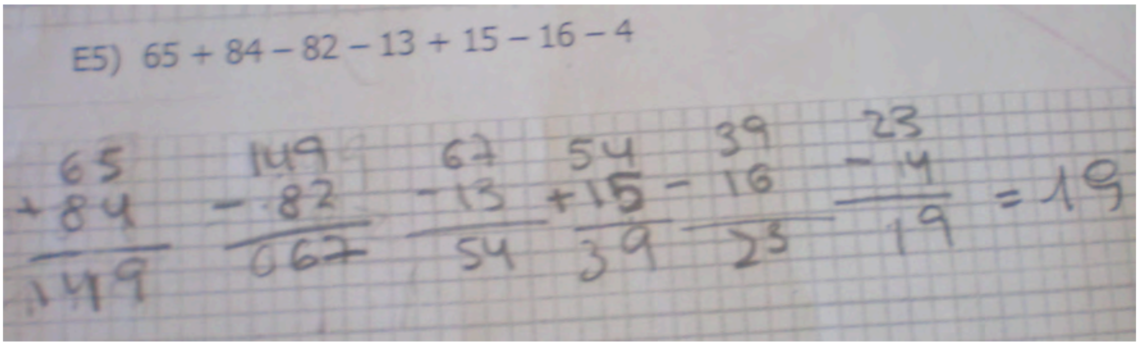
Es una sesión de trabajo individual, pero se empieza corrigiendo el ejercicio 6, para lo cual la profesora ha dibujado en la pizarra la tabla correspondiente. Salen a la pizarra un alumno y una alumna. Antes de que comiencen a rellenar la tabla, otra alumna dice que si se empieza por la fila de abajo se ahorra tiempo porque así se ve que hay que restar 9 en las vacas y 13 en las ovejas. A los demás alumnos les parece bien y se empieza por la fila de abajo.

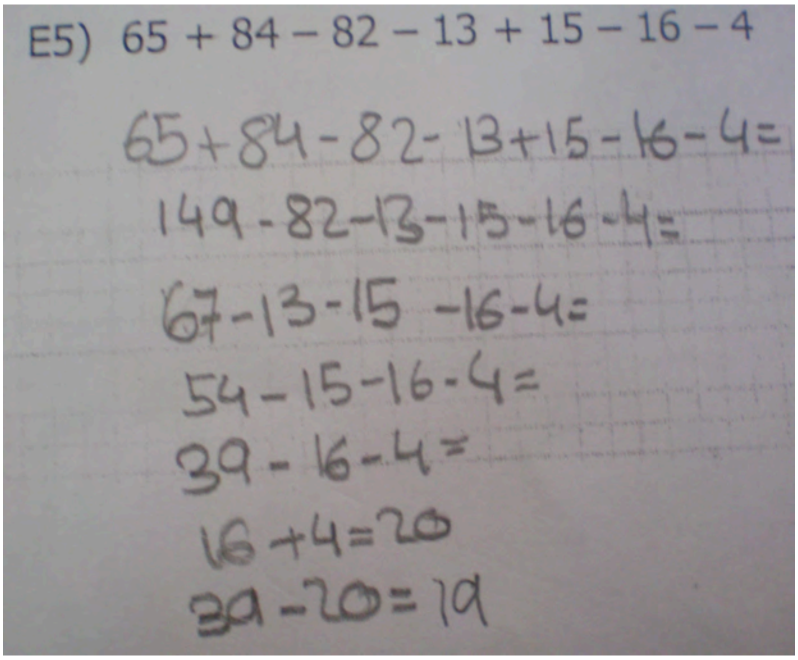
Se van rellenando las casillas con algunas equivocaciones por parte de los alumnos que están en la pizarra, corregidas rápidamente por los alumnos que están sentados en sus sitios. La profesora aprovecha la ocasión para resaltar el interés de las fórmulas de resolución de los problemas como medio para solucionar los problemas en casos particulares, sin necesidad de volver a hacer todos los razonamientos y cálculos que fueron necesarios para llegar a la fórmula.

Acabada la corrección, la profesora decide repartir el material titulado *3. Cómo simplificar expresiones algebraicas,* porque considera que es más apropiado para trabajarlo individualmente, dejando la continuación del titulado *2. Cómo comparar expresiones algebraicas* para las clases de trabajo en grupo. También decide dejar para más adelante la resolución de los ejercicios 14, 15, 16 y 17 y dice a los alumnos que empiecen a resolver el ejercicio 18.

Se trata de un ejercicio de simplificación de expresiones algebraicas aditivas en el que el recurso a frases del tipo "restar 10 y sumar 12 es lo mismo que sumar 2", etc., recurso ya utilizado en clases anteriores, permite dar pautas de cálculo y de corrección de las operaciones efectuadas. Sin embargo, al no trabajar previamente las referencias a la economía de cálculo que contiene el ejercicio 17, los alumnos no hacen ningún esfuerzo por eliminar los términos opuestos ni por leer toda la expresión algebraica para buscar los cálculos más sencillos.

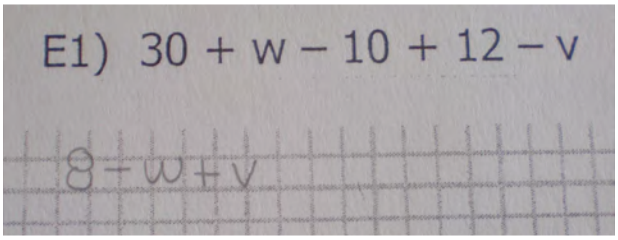
Bastantes alumnos dan respuestas como las siguientes y la profesora se da cuenta que, desde el momento que no hay una exigencia previa de economía de cálculo, no es fácil reconducir la situación hacia formas de hacer más propias del cálculo algebraico.

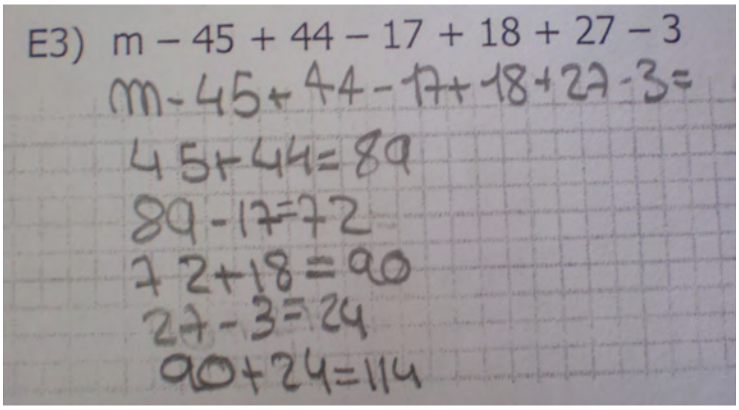




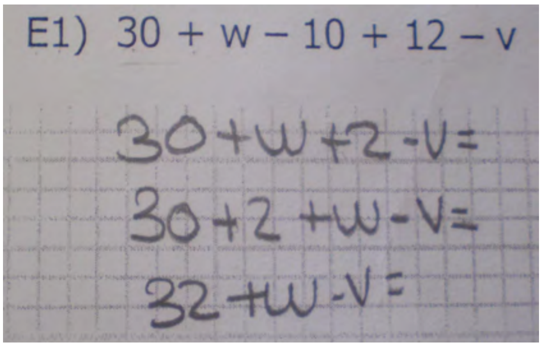
Aun así, se observan diferencias entre alumnos que hacen los cálculos de la misma manera, cometiendo incluso la misma equivocación. En los ejemplos anteriores se puede ver cómo el segundo alumno conserva la expresión algebraica mientras calcula. En cambio, el primero opta por expresar las operaciones de una en una al modo aritmético.

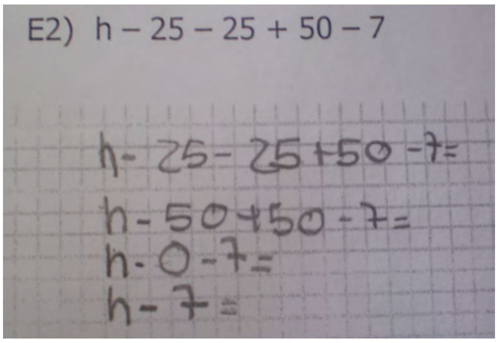
Los errores consecuencia de darle a los signos 'más' y 'menos' la interpretación usual en aritmética, también son muy numerosos.

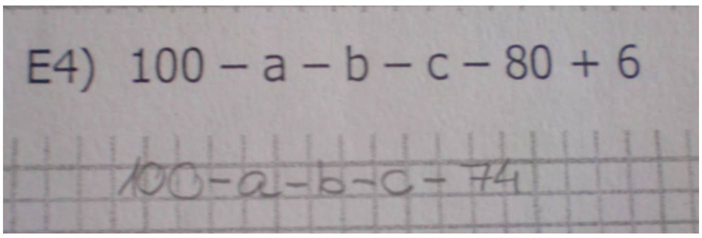




Los alumnos que operan correctamente son una minoría, pero suponen un respiro para la profesora que tiene que atenderlos a todos individualmente.







Al acabar la clase, la diferente velocidad de resolución de los alumnos da lugar a que, mientras unos están todavía resolviendo los primeros apartados del ejercicio 18, otros están ya muy avanzados en la resolución de los apartados del ejercicio 19.

Valoración

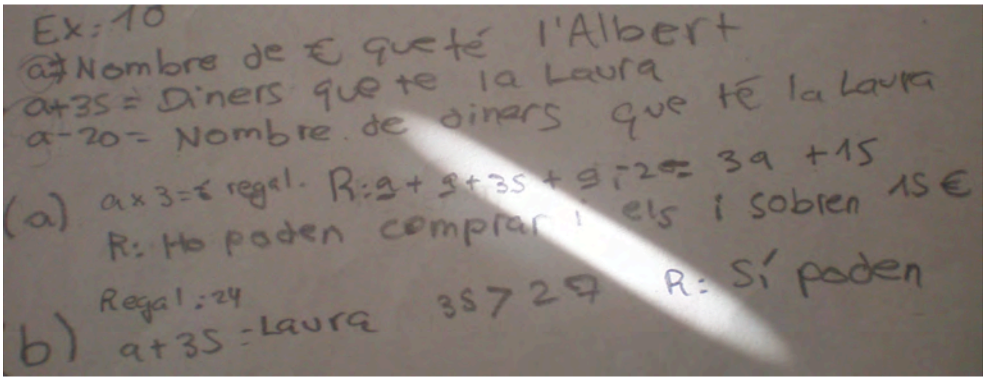
La decisión de la profesora de iniciar la simplificación sistemática de expresiones algebraicas antes de hacer una reflexión que pusiera de manifiesto las diferencias entre el cálculo algebraico y el aritmético, tiene como consecuencia que los alumnos realicen un trabajo que no les ayuda a asumir esas diferencias. Además, el hecho de que este comienzo del cálculo algebraico se desarrolle en una sesión de clase de trabajo individual priva a muchos alumnos del apoyo del grupo y produce grandes diferencias en cuanto al número de ejercicios realizados.

La misma profesora le comenta a la observadora que no se había dado cuenta del papel que jugaban los ejercicios 14 al 17 en la adquisición de buenas técnicas iniciales de cálculo algebraico hasta que había visto la diferencia de comportamiento de los alumnos de este curso respecto a los del curso anterior. La observadora coincide con su apreciación y abunda en el hecho de que los alumnos están acostumbrados a unas técnicas de cálculo aritméticas que son algorítmicas o cuasi-algorítmicas y el paso a unas técnicas de cálculo que exigen reflexión y toma de decisiones no es fácil. De ahí la importancia de realizar esos ejercicios antes de pasar a los típicos ejercicios de afianzamiento de las técnicas de cálculo.

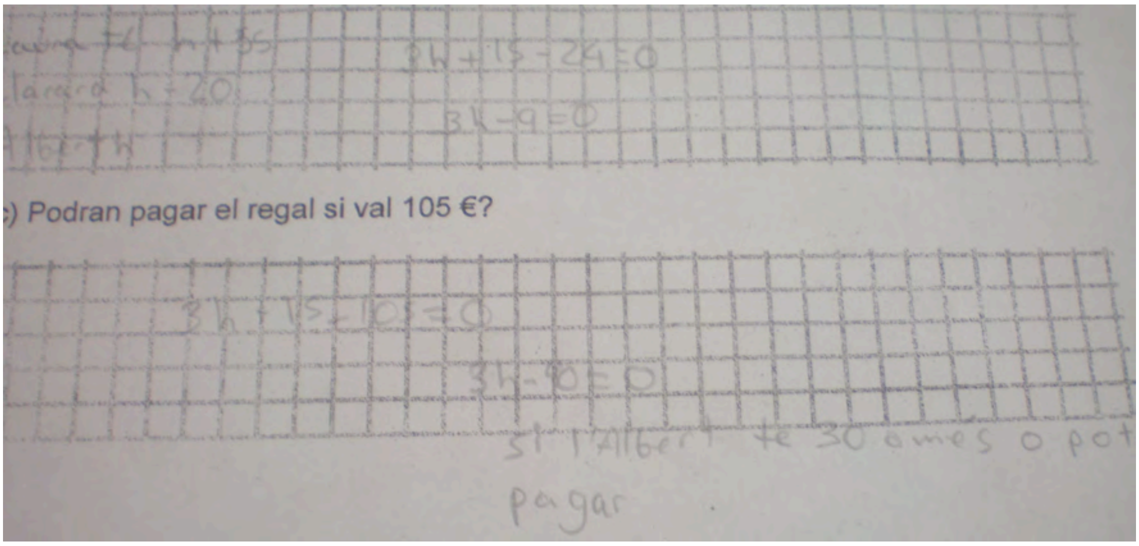
SESIÓN 6: 17/11/09 (MARTES, 9-10h)

Los grupos empiezan a resolver el ejercicio 9. Varios de ellos, al sumar a, a + 35 y a – 20, escriben a + 15 porque se olvidan de sumar las letras. Cuando ya escriben a + a + a + 15, es necesario recordarles que a + a + a es el producto de a por 3 y que ahora ya no se escribe el signo del producto. Una vez que tienen las expresiones 3a + 15 (dinero que juntan entre lo tres y 3a (dinero que cuesta el regalo) no tienen dificultad en contestar que les sobran 15 €.

El apartado b) ya supone una mayor dificultad porque el dinero que sobra viene indicado por una expresión algebraica y hay grupos que tratan de dar una solución numérica o transforman la pregunta contestando si pueden o no comprar el regalo.

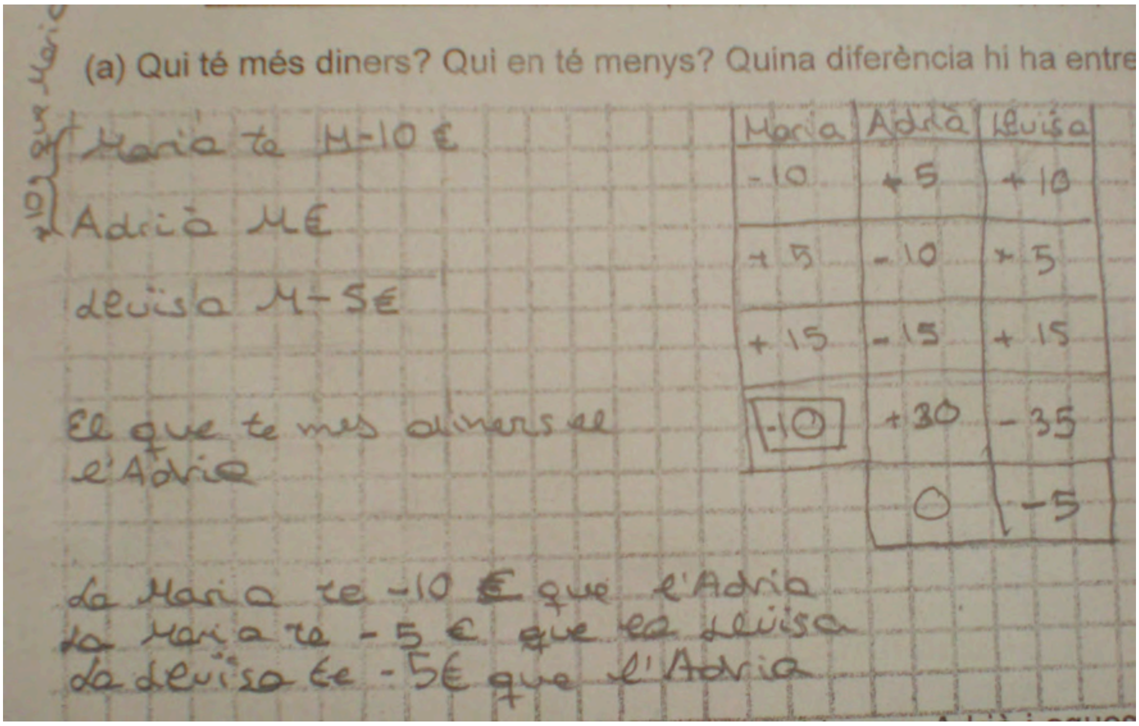


Un grupo termina igualando a cero la expresión obtenida y cuando la profesora les pregunta por qué, le dicen que es para saber si el regalo se puede comprar o no, pero en realidad no han completado el razonamiento ni saben hacerlo cuando la profesora se lo pide. Sin embargo, utilizan esa misma técnica para responder con éxito a la última pregunta del ejercicio 9.

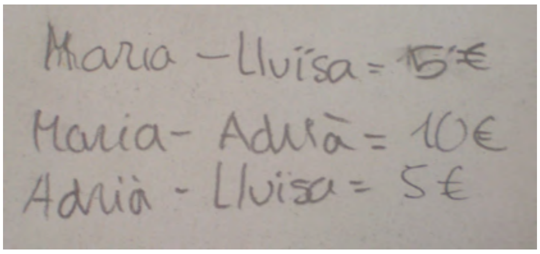


En cuanto a esta última pregunta, los grupos plantean la ecuación 3a + 15 = 105 y la resuelven por tanteo, pero la falta de técnicas de cálculo mental dificulta la obtención de la solución. Tardan un tiempo en darse cuenta de que 3a tiene que ser igual a 90 para que sumándole 15 se obtenga 105. En algunos grupos dan como solución a = 90 y hay que advertirles que 3a = 90. En un grupo dan como solución 20. La profesora pregunta que cuánto es 20 multiplicado por 3. Finalmente, llegan a la solución a = 30€. Hay que tener en cuenta que es la primera vez que se enfrentan a una ecuación del tipo ax + b = c, pues hasta ahora habían sido del tipo x + b = c ó b – x = c.

En el ejercicio 10, uno de los grupos resuelve el apartado a) operando con números positivos y negativos aislados.



Los demás grupos resuelven el apartado realizando operaciones entre números sin signo y llegan sin dificultad a la solución. La diferencia entre lo que tienen María (a – 10) y Luisa (a – 5) provoca cierta discusión, pero todos llegan a que es una diferencia de 5€.

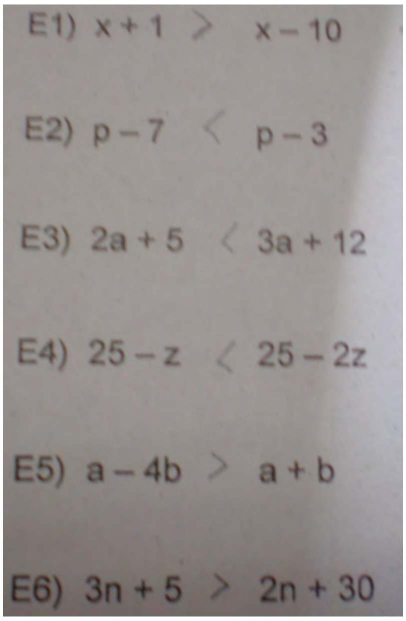


La mayor dificultad aparece en el apartado b). Los grupos indican con una letra el dinero de Adrián y no saben expresar el dinero de Luisa porque no están familiarizados con el hecho de que si Adrián tiene 30€ menos que Luisa, entonces Luisa tiene 30€ más que Adrián. Tiene que ser la profesora la que se lo haga notar.

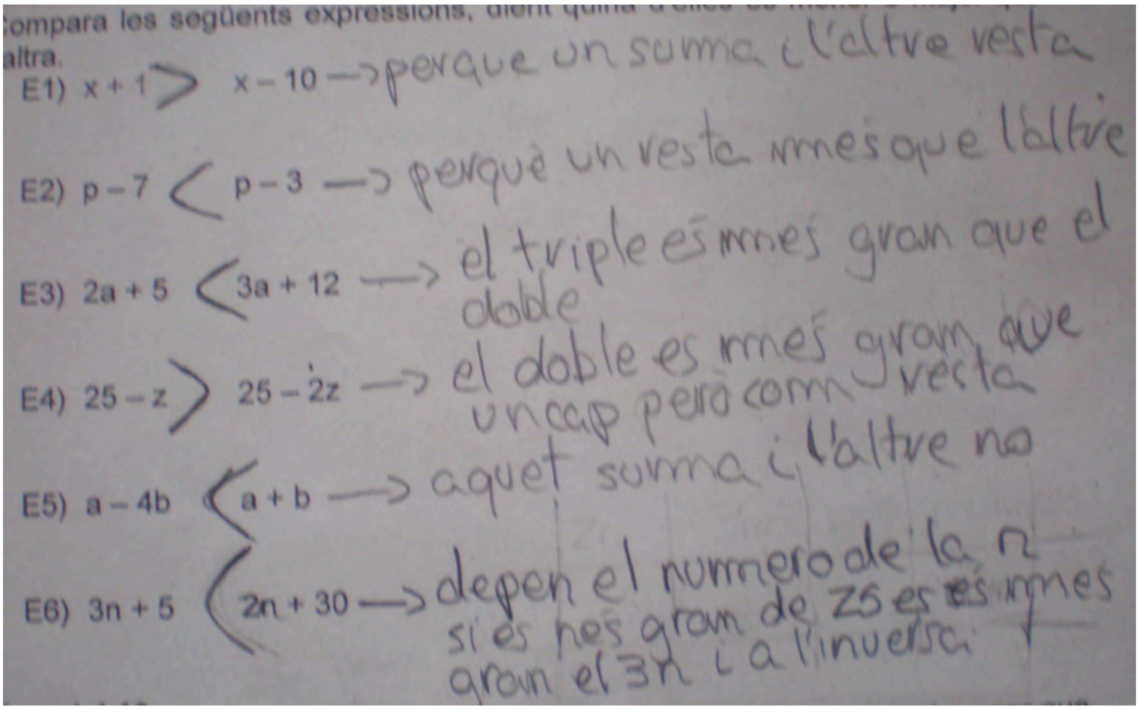
Para solventar esa dificultad, el grupo que ha utilizado números negativos en el apartado a) decide llamar s al dinero de Luisa. Entonces Adrián tiene s – 30 euros y María el doble de s – 30 que lo escriben s2 + 30. Preguntados por qué lo escriben así, dicen que como es el doble será s por dos y en vez de restar 30, habrá que sumar 30. La profesora les pregunta si se acuerdan de la propiedad distributiva y como no se acuerdan, se la explica. Los alumnos no parecen muy convencidos por los argumentos de la profesora, en vista de los cual, ésta les propone que empiecen representado por una letra el dinero de Adrián. “Si pero Adrián tiene 30 menos que Luisa” –dicen los alumnos. “Bueno –dice la profesora– si Adrián tiene 30 euros menos que Luisa, Luisa tendrá 30 más que Adrián”. Ahora sí que entienden el razonamiento y siguen trabajando el ejercicio.

Una vez que los grupos obtienen que la cantidad final de dinero de María, Adrián y Luisa es, respectivamente, 2a – 10, a y a + 25, la opinión generalizada es que no pueden acabar con la misma cantidad de dinero. La profesora les dice que hagan una tabla. Los grupos la hacen y algunos encuentran que para el valor a = 10, María y Adrián tienen la misma cantidad de dinero. Sin embargo, no encuentran que para el valor a = 35, María y Luisa tienen la misma cantidad de dinero porque es un número alto y los grupos no suelen hacer tablas de valores con números tan altos. Solamente un grupo da esa solución porque uno de los alumnos se da cuenta de que, a medida que aumenta el valor de *a*, disminuye la diferencia entre el dinero de María y Luisa y piensa que llegará un momento en que se hará cero.

Casi todos los grupos llegan al ejercicio 11 y lo resuelven bien, salvo el apartado E6), donde deciden que 3n + 5 es menor que 2n + 30 porque el segundo miembro de la desigualdad contiene un número más grande que los demás.



La profesora les sugiere que prueben dando valores a n, pero tienen dificultades para hacer la sustitución porque la letra tiene un coeficiente y no saben qué hacer con él. La profesora tiene que repetir que 3n significa multiplicar el valor de n por 3 y con eso empiezan a dar valores, pero como dan valores pequeños, el resultado confirma su suposición inicial. Entonces la profesora les sugiere que prueben con algún número grande y de esa manera los grupos llegan a la conclusión de que la desigualdad depende del valor de n, pero solo dos grupos llegan a dar una solución precisa.



Uno de los grupos obtiene, sin necesidad de intervención de la profesora, que si n = 1, entonces 3n + 5 < 2n + 30, pero que si n = 50, 3n + 5 > 2n + 30. La profesora les pregunta si se puede saber donde se cambia el sentido de la desigualdad y los alumnos con ayuda de la profesora se embarcan en la pesquisa. Un alumno descubre que para n = 20, 3n + 5 < 2n + 30. Otro averigua que para n = 30, 3n + 5 > 2n + 30. Finalmente encuentran que la desigualdad cambia de sentido en el entorno del valor n = 25 y se dan cuenta de que ese es precisamente el valor que da lugar a la igualdad de las expresiones.

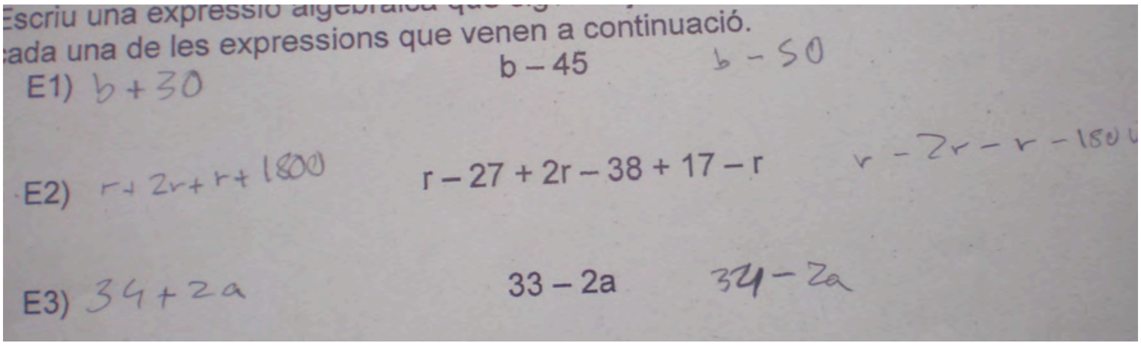
Al finalizar la clase, todos los grupos menos uno han terminado el ejercicio 11 y algunos están en el ejercicio 12. El grupo retrasado está terminando el ejercicio 10.

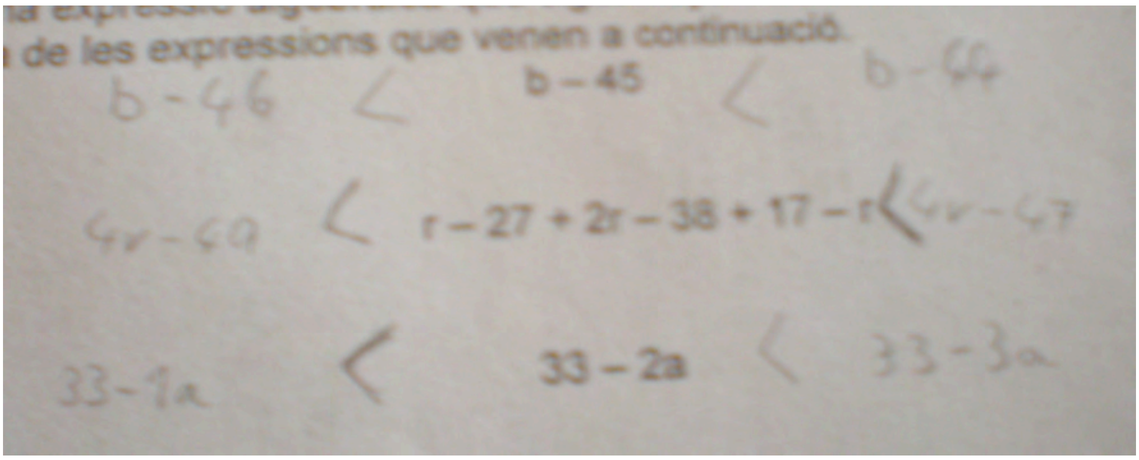
Valoración

La manipulación de las letras ha pasado de ser una rareza a tener en cuenta al final del ejercicio a formar parte del método de resolución de los problemas y de los razonamientos de los alumnos, aun cuando la representación simbólica deja todavía mucho que desear y los errores en el desarrollo del cálculo algebraico son muy frecuentes. Además los alumnos se empiezan a familiarizar con las desigualdades que expresan simbólicamente las comparaciones efectuadas.

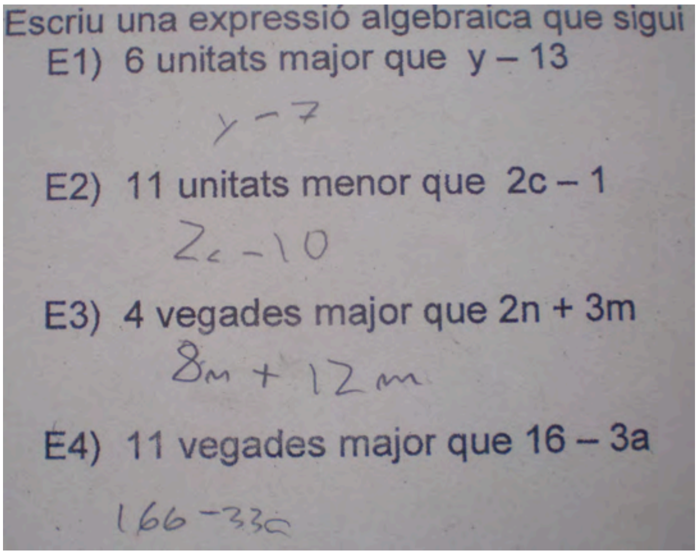
SESIÓN 7: 19/11/09 (JUEVES, 10-11h)

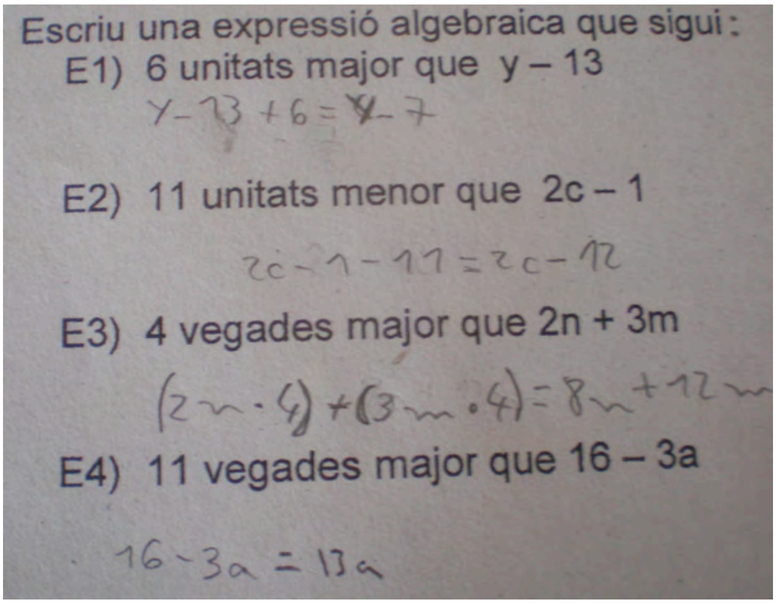
En el ejercicio 12, los grupos cometen distintos errores debidos a que no simplifican o simplifican mal la expresión del apartado E2) o que no tienen en cuenta que un sustraendo menor produce un resultado mayor.





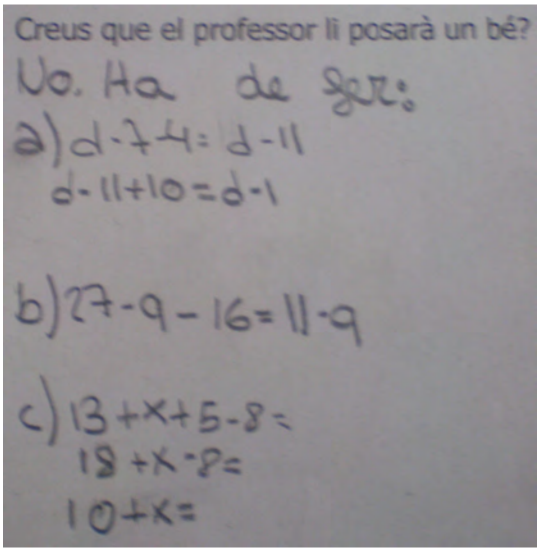
En el ejercicio 13, no distinguen inicialmente entre la comparación aditiva y la multiplicativa, lo que obliga a la profesora a comentarlo en todos los grupos. Los grupos entienden la diferencia entre una y otra, pero algunos tienen problemas a la hora de expresar el producto de un número por una suma porque no recuerdan la propiedad distributiva.





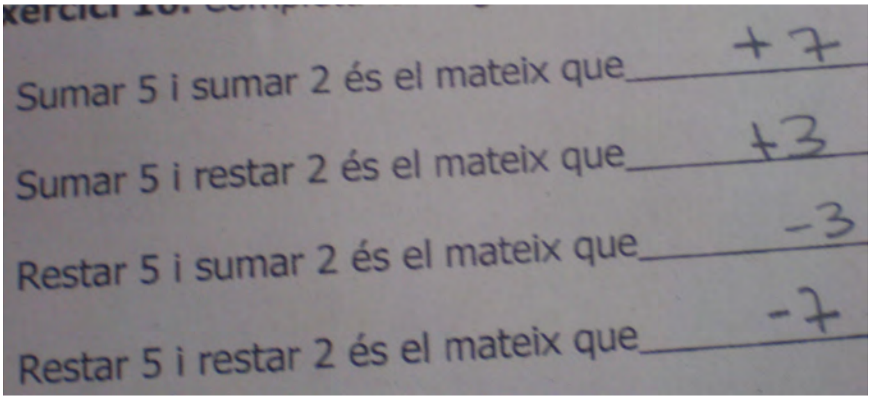
En el ejemplo anterior aparece la igualdad 16 – 3a= 13a. Es un tipo de error que empieza a producirse a partir de la introducción de los coeficientes de las letras, en expresiones aditivas en las que un término independiente precede a un monomio.

La situación de la clase ante el ejercicio 14 es muy diversa. Unos alumnos son capaces de responder correctamente a lo que en él se pregunta, debido a su experiencia de resolución del ejercicio 18 en la clase de trabajo individual, mientras que otros hacen las operaciones cometiendo los mismos errores que se indican en el enunciado y dicen que las operaciones están bien hechas.



La profesora tiene que dar una explicación general preguntando: “si a un número le resto 7 y después le resto 4, ¿eso es lo mismo que restarle 3?, ¿se obtendrá el mismo resultado?” y “si a un número le resto 8 y después le vuelvo a restar 8, ¿se queda como al principio?, ¿como si no le restara nada?”. Después de diversas intervenciones de los alumnos aceptando el argumento de la profesora o diciendo que no lo entienden y obligándola a repetirlo otra vez, los alumnos que lo han hecho mal vuelven a su tarea a su tarea de rehacer los cálculos del ejercicio 14, volviendo algunos de ellos a cometer errores del tipo d – 7 – 4 + 10 = d – 11 + 10 = d – 21.

Las frases del ejercicio 15 se completan sin dificultad. Algunos alumnos lo hacen poniendo números con signo en lugar de utilizar las palabras ‘sumar’ o ‘restar’.



Sin embargo, no sucede lo mismo en el ejercicio 16, donde hay una tendencia en algunos grupos a escribir, por ejemplo, “sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que sumar primero 2 y restar después 5”. A los grupos que acaban el ejercicio 16, la profesora les propone que sigan con el ejercicio 20, dejando el 17 y el 19 para la sesión de clase de trabajo individual.

Antes de acabar la clase, la profesora decide hacer una intervención general para explicar la regla de jerarquía de las operaciones en las expresiones algebraicas. Para ello, escribe en la pizarra la expresión 16 – 3a que algún alumno había igualado a 13a y calcula su valor cuando a = 2, 16 – 3a = 16 – 3·2 = 16 – 6 = 10. Después pregunta: “¿Qué pasa si hacemos 16 – 3a = 13a? Al sustituir, nos quedará 16 – 3a = 13a = 13·2 = 26. Luego no se obtiene lo mismo. ¿Estáis de acuerdo?”. Los alumnos asienten.

La profesora continúa diciendo que lo que sucede es que en el cálculo de esos valores se ha intercambiado el orden de las operaciones: en el primer caso, se ha hecho primero el producto y después la resta y en el segundo caso, primero la resta y después el producto. Comenta que, como los resultados que se obtienen son distintos, es necesario llegar a un acuerdo sobre qué operación se hace primero y que la decisión de los matemáticos es que primero se hacen los productos y después las sumas y restas. Por consiguiente, si escribimos 16 – 3a, se entiende que hay que hacer primero el producto y como no es efectuable porque no conocemos el valor de a, no se puede pasar a realizar la resta.

Por último, la profesora avisa de que el jueves de la semana siguiente habrá un examen sobre lo aprendido al realizar los ejercicios 1 a 19.

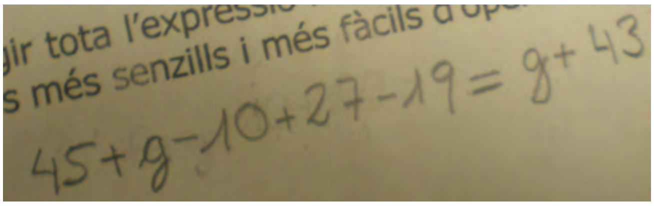
Valoración

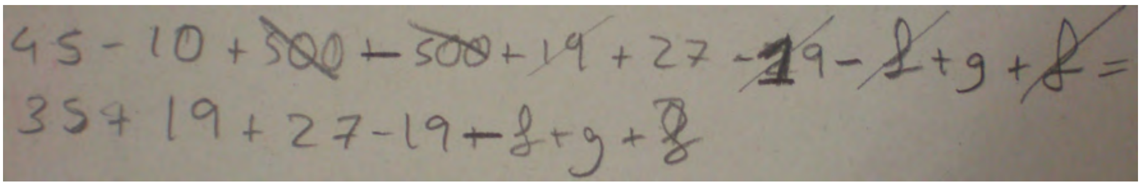
La sesión de clase se desarrolla con normalidad y los grupos empiezan su reflexión sobre las técnicas de cálculo algebraico.

SESIÓN 8: 23/11/09 (LUNES, 13:30-14:30h)

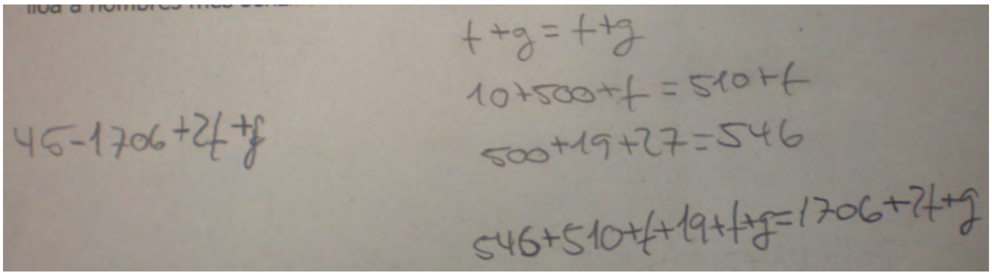
Es una sesión de trabajo individual. La profesora les dice a los alumnos que deben empezar todos el ejercicio 17 y que aquellos que no tengan terminados los ejercicios anteriores pueden completarlos en casa y que al día siguiente se corregirán en la pizarra.

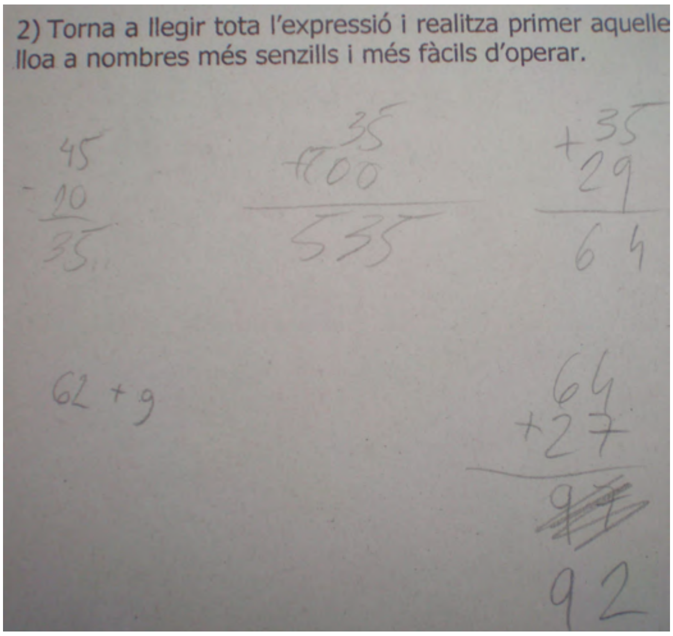
La actitud de los alumnos ante el ejercicio es muy variada. Unos leen el enunciado completo, hacen preguntas sobre su significado y, una vez aclaradas sus dudas, tratan de seguir las instrucciones, aun cuando suelen cometer errores.





Mientras tanto, otros alumnos no leen o no tienen en cuenta las instrucciones que se les dan y proceden a hacer las operaciones según sus propios criterios.





Antes de continuar con los siguientes ejercicios, la profesora hace una intervención general en la pizarra. Escribe la expresión algebraica del ejercicio 17 en la pizarra

$$\boxed{45 - f + g + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19}$$

y dice que si tenemos una expresión en la que se suma (o se resta) una cantidad para después restar (o sumar) esa misma cantidad, eso es lo mismo que no hacer nada porque una operación neutraliza a la otra. Por tanto, cuando se simplifica una expresión conviene empezar fijándose si la misma cantidad está a la vez sumando y restando porque entonces se puede eliminar y nos ahorramos tener que hacer esas operaciones. A continuación pide a los alumnos que le indiquen las cantidades que suman y restan a la vez en la expresión, las va tachando y concluye la operación.

$$\boxed{45 - \cancel{f} + g + \cancel{500} + \cancel{f} - \cancel{500} + \cancel{19} + 27 - \cancel{19} = 45 + g - 27 = 18 + g}$$

Un alumno pregunta que si en el examen hay que hacerlo de esa manera. La profesora contesta que sí, que es muy importante que aprendan esa nueva manera de hacer los cálculos porque los facilita mucho y que ella lo tendrá en cuenta en el examen.

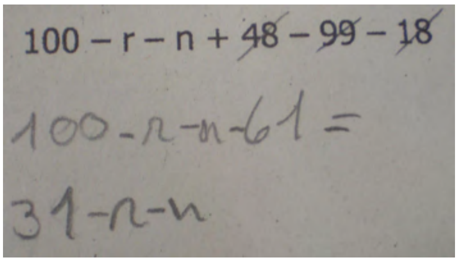
A continuación, la profesora corrige algunos de los ejercicios de simplificación realizados en la sesión de clase del lunes anterior. Los resuelve con la mayor economía de operaciones posible, por ejemplo:

$$\boxed{m - 45 + 44 - 17 + 18 + 27 - 3 = m - 1 + 1 + 24 = m + 24}$$

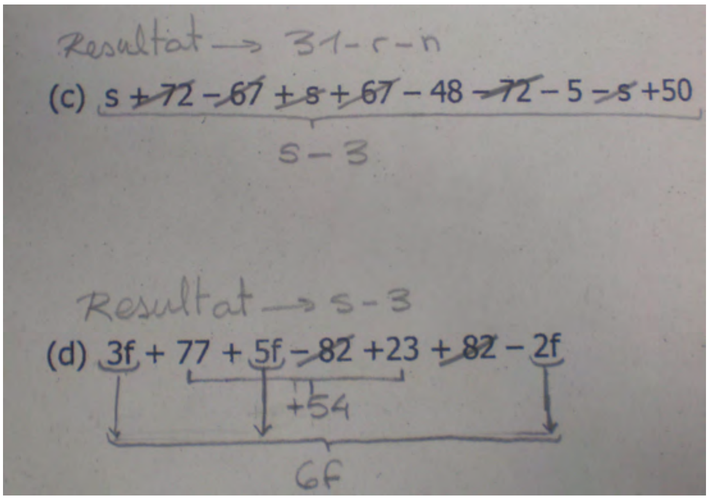
Bastantes alumnos dicen que no entienden lo que hace. La profesora vuelve a dar explicaciones y justifica que de esa manera las operaciones se hacen antes y la posibilidad de equivocarse es menor porque se trabaja con números más sencillos. Los alumnos no parecen muy convencidos y la profesora los tranquiliza diciéndoles que no se preocupen, que ya lo irán aprendiendo.

A continuación les dice que continúen con el ejercicio de simplificación que estuvieran haciendo el lunes anterior. El resultado es de una gran disparidad: mientras unos alumnos todavía están resolviendo apartados del ejercicio 18, otros están en el 19, incluso acabándolo, y algunos han seguido haciendo los ejercicios en casa y los tienen todos acabados. La profesora sale de clase un momento a buscar fotocopias del material titulado *4. Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* para que esos alumnos puedan seguir trabajando.

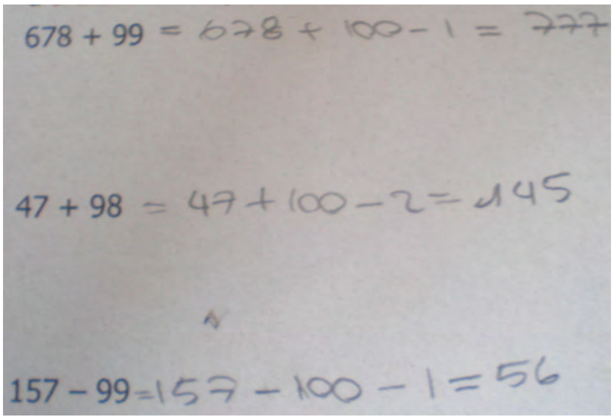
Los alumnos se esfuerzan en realizar las operaciones teniendo en cuenta lo que la profesora ha explicado, pero no todos lo consiguen.



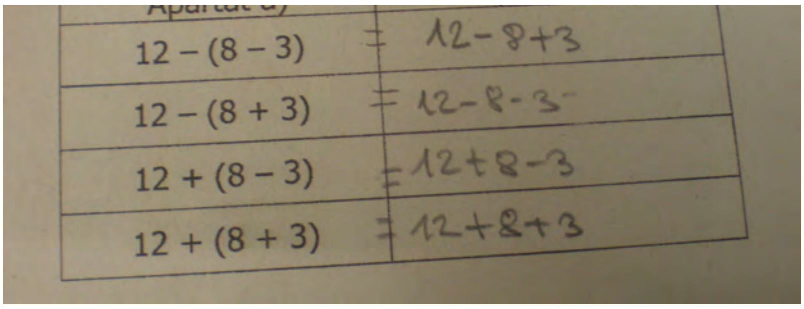
Reconocen bastante bien el caso de una misma cantidad sumando y restando, pero se les escapan con frecuencia las maneras más simples de realizar las operaciones, debido en gran parte a la falta de técnicas de cálculo mental. En cuanto a los errores, son muy frecuentes, pero bastantes alumnos empiezan a asumirlos cuando la profesora se los señala y los corrigen con prontitud.

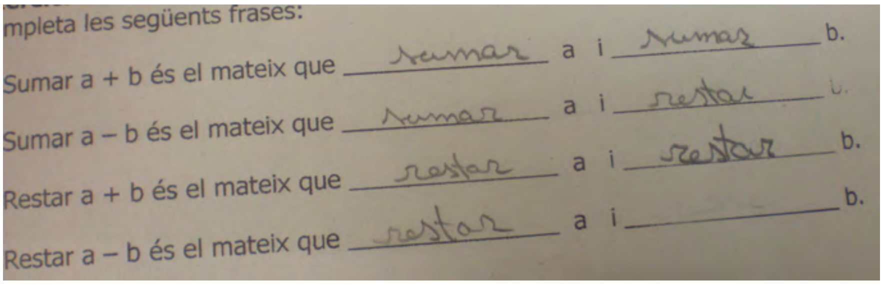


Mientras parte de los alumnos siguen haciendo los ejercicios 18 y 19, los más adelantados están en el ejercicio 20 y aunque al principio hacen alguna pregunta porque no parecen conocer la técnica de sumar 99, sumando 100 y restando 1, en seguida la controlan, aunque no sucede lo mismo cuando se trata de restar 99, pues entonces interpretan que tienen que restar 100 y restar 1 y la profesora tiene que intervenir.



Los ejercicios 21, 22 y 23 los realizan con algún apoyo de la profesora pero sin grandes dificultades y algunos alumnos, al acabar la sesión de clase, están resolviendo el ejercicio 24.




mpleta les següents frases:

Sumar a + b és el mateix que sumar a i sumar b.

Sumar a – b és el mateix que sumar a i restar b.

Restar a + b és el mateix que restar a i restar b.

Restar a – b és el mateix que restar a i ______ b.

Al finalizar la clase, la profesora recuerda que el jueves tienen el examen y que los alumnos que llevan el trabajo atrasado deben adelantarlo en casa.

Valoración

En esta sesión se han observado avances significativos en cuanto a la actitud de los alumnos ante el cálculo algebraico. Ya empiezan a asumir que no se trata de efectuar sin más las operaciones en el orden en el que aparecen en la expresión algebraica, sino que hay que reflexionar sobre la manera más económica de efectuar ese cálculo, aun cuando la falta de técnicas de cálculo mental hace que en bastantes ocasiones la reflexión resulte baldía.

También empieza a observarse una mayor receptividad a interpretar las operaciones aditivas como composición de traslaciones, en lugar de entenderlas como operaciones binarias entre números sin signo.

Un aspecto negativo de la sesión es que el diferente ritmo de trabajo individual de los alumnos ha conducido a que alumnos de un mismo grupo se encuentren trabajando en ejercicios distintos, lo que va a repercutir durante unos días en el buen funcionamiento del trabajo en grupo.

SESIÓN 9: 24/11/09 (MARTES, 9-10h)

La profesora va escribiendo en la pizarra las soluciones de los ejercicios 8 a 13 y pregunta a los alumnos si coincide con las soluciones que ellos han dado. No se producen discrepancias, salvo en el ejercicio 11, donde un alumno dice que la solución que él tiene anotada es distinta. La profesora escribe lo que le dice el alumno

$$p - 7 > p - 3$$
$$25 - z < 25 - 2z$$

y le pide que explique su respuesta. El alumno dice que “7 es más que 3 y z menos que 2z”. La profesora pide el parecer de los demás alumnos. Una alumna contesta que eso está mal “porque en el primero se resta 7, más que en el segundo, que solo se resta 3, y por eso queda más pequeño”. Otros alumnos intervienen con argumentos similares y finalmente el alumno corrige el ejercicio.

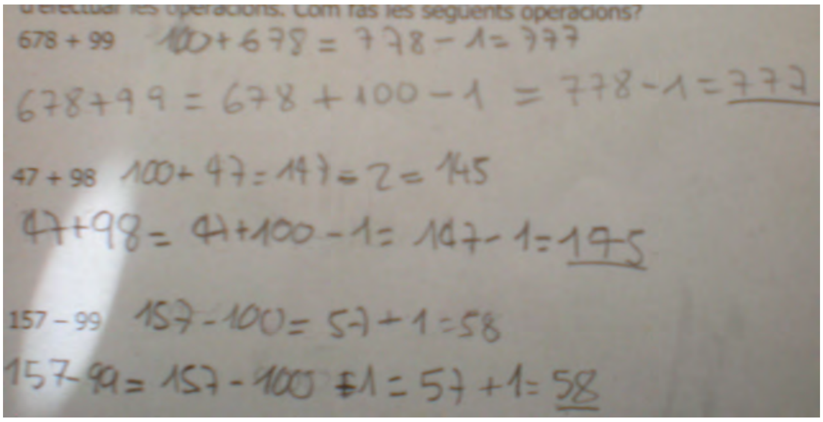
En el ejercicio 12 la corrección se complica porque los alumnos han dado soluciones diferentes. La profesora pide a distintos alumnos que le dicten las que han dado y las copia en la pizarra. En general son correctas, salvo las correspondientes al apartado E2). La profesora indica que la expresión del apartado E2) debe ser simplificada previamente y aquellos alumnos que no lo han hecho deben copiar la simplificación de la pizarra.

En la corrección del ejercicio 13, algunos alumnos tienen mal los apartados E3) y E4) porque solo han multiplicado el primer término de la suma. La profesora vuelve a insistir en la propiedad distributiva.

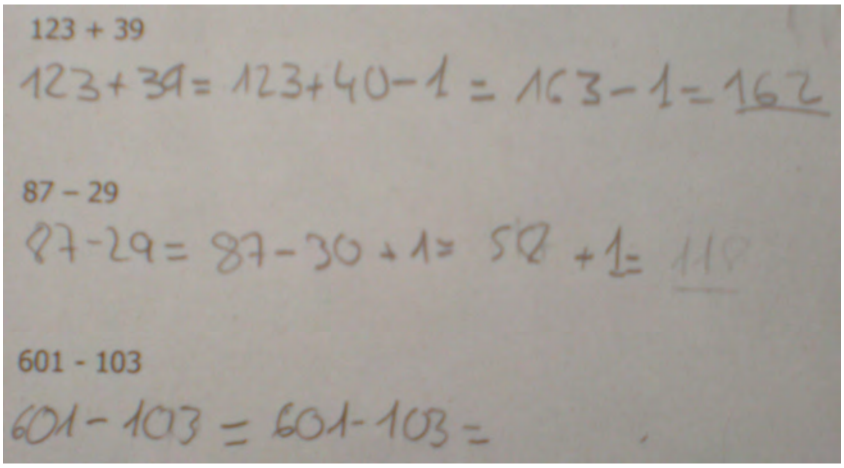
Al acabar la corrección, recuerda a los alumnos el dossier que tienen que entregar al acabar el tema, instándoles a que vayan pasando a limpio los ejercicios corregidos. Después reparte el material *4. Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* a los alumnos que no lo tienen y dice a los grupos que sigan trabajando.

El funcionamiento de algunos grupos se hace difícil porque los alumnos están resolviendo ejercicios distintos y además la tarea sistemática de simplificar expresiones en la que todavía se encuentran inmersos bastantes alumnos se presta poco al trabajo en grupo. A esto se añade que el material que se acaba de repartir no entra para examen, por lo que bastantes alumnos que tendrían que empezarlo se dedican a repasar los ejercicios anteriores y a preguntar dudas a la profesora, lo que casi transforma la sesión de trabajo en grupo en una sesión de trabajo individual.

Los grupos más avanzados siguen resolviendo los ejercicios 20, 21. 22 y 23. Las dificultades mayores se plantean en el ejercicio 20 pues, una vez que averiguan en qué consiste la técnica de sumar 99 a la que se refiere el ejercicio, la utilizan de forma incorrecta en otros casos. Por ejemplo, escriben que 157 – 99 = 157 – 100 – 1 ó 47 + 98 = 47 + 100 – 1.



Finalmente, con la ayuda de la profesora todos los alumnos llegan a entender la justificación de la técnica y son capaces de aplicarla correctamente.



Una vez superado el ejercicio 20, los alumnos realizan sin demasiados problemas los ejercicios 21, 22 y 23 porque la ejercitación en la técnica del ejercicio 20 facilita la comprensión de las explicaciones de la profesora a aquellos alumnos que se equivocan en los signos.

Valoración

El nuevo enfoque que se le ha dado al material en el que se trabajan las diferencias entre expresiones algebraicas produce un cambio importante en la dinámica de la clase respecto al curso anterior. Aunque los alumnos siguen suprimiendo los paréntesis precedidos de un signo ‘menos’ sin modificar los signos de los términos situados en su interior, la profesora dispone de una herramienta: la familiarización de los alumnos con la técnica presentada en el ejercicio 20, que le permite dar explicaciones más breves, pero más comprensibles que las del curso anterior. Esa mayor brevedad y eficacia en la argumentación facilita la corrección del error por parte de los alumnos y evita que el funcionamiento de la clase se bloquee.

SESIÓN 10: 26/11/09 (JUEVES, 10-11h)

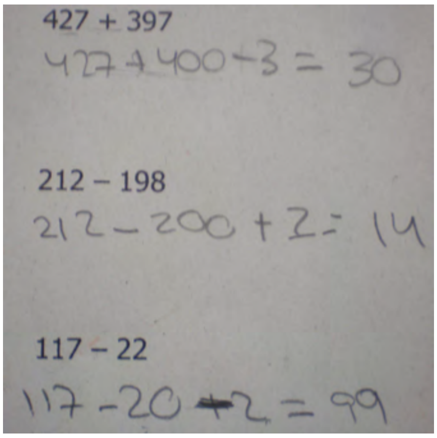
Ninguna de las observadoras está presente en esta sesión de clase. La profesora reparte el examen y los alumnos lo realizan individualmente, teniendo de tiempo toda la hora de clase.

SESIÓN 11: 30/11/09 (LUNES, 13:30-14:30h)

Ninguna de las observadoras está presente en esta sesión de clase. La profesora devuelve los exámenes corregidos y pide a los alumnos que analicen los errores en los grupos. Después contesta a las preguntas de los alumnos, al mismo tiempo que corrige el examen en la pizarra y ellos copian las soluciones. Finalmente, comenta que los alumnos que tienen una nota de examen de 6 o más, tienen que volver a escribir aquellas preguntas en las que no han obtenido nota máxima y los alumnos que tienen una nota de examen de menos de 6 tienen que reescribir todo el examen. La corrección del examen junto con el propio examen deberán entregarla al lunes siguiente.

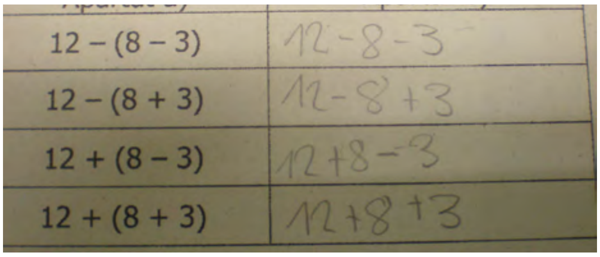
SESIÓN 12: 1/12/09 (MARTES, 9-10h)

Es una sesión de trabajo en grupo. Cuatro grupos empiezan el ejercicio 20, mientras que los tres grupos más adelantados están en el ejercicio 24. Los grupos que están en el ejercicio 20 pasan por las mismas fases por las que ya pasaron sus compañeros en días anteriores: desconocimiento inicial de la técnica a utilizar en el ejercicio 20, posterior realización del ejercicio con errores que les obligan a reflexionar sobre la técnica, realización de los ejercicios 22 y 23 y corrección de los errores cometidos en los signos, ante las explicaciones de la profesora y, finalmente, realización del ejercicio 23.

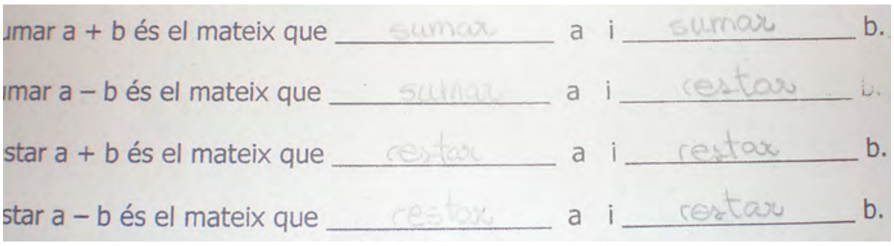

427 + 397
427+400-3 = 30

212 – 198
212-200+2= 14

117 – 22
117-20+2 = 99

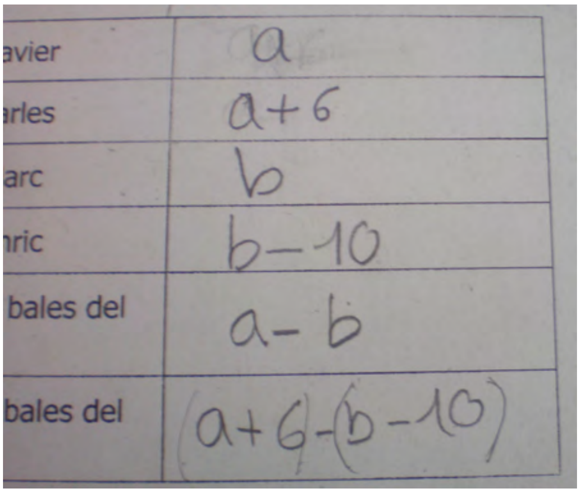


12 – (8 – 3)	12-8-3
12 – (8 + 3)	12-8+3
12 + (8 – 3)	12+8-3
12 + (8 + 3)	12+8+3

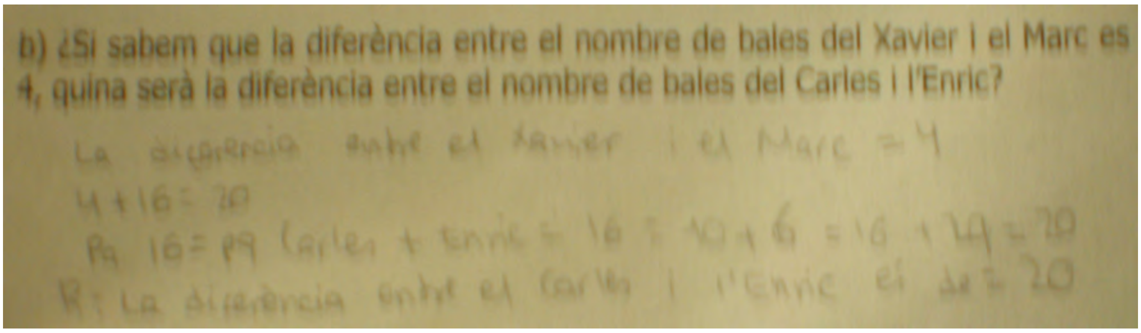

umar a + b és el mateix que sumar a i sumar b.
mar a – b és el mateix que sumar a i restar b.
star a + b és el mateix que restar a i restar b.
star a – b és el mateix que restar a i restar b.

En cuanto a los grupos que están en el ejercicio 24, una vez que han entendido el enunciado, lo que ya les lleva un tiempo, intentan utilizar una sola letra, tratando de expresar el número de canicas de Marcos en función del de Javier o Carlos. Cuando aceptan que eso es imposible y que deben representar el problema mediante dos letras, rellenan las cuatro primeras casillas de la tabla con bastante corrección. Hay que tener en cuenta que es la primera vez que tienen que utilizar dos letras en el planteamiento del problema.

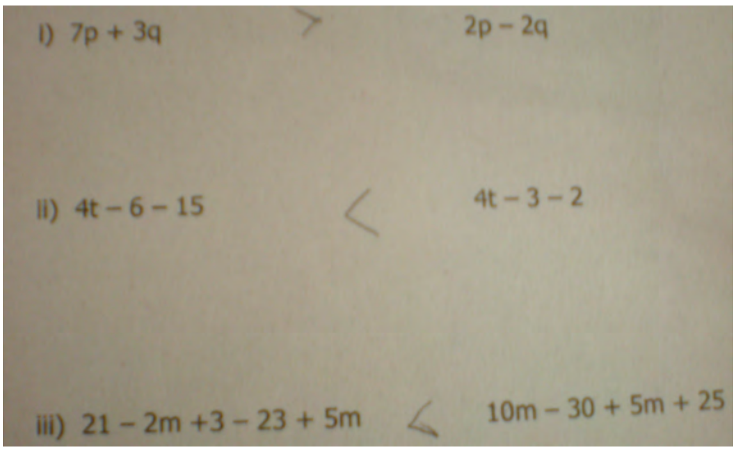
Para expresar la diferencia entre el número de canicas de Javier y de Marcos tratan de encontrar en el enunciado algún dato que les permita dar a esa diferencia un valor numérico. Como no lo encuentran, buscan un razonamiento que justifique la asignación de un valor numérico: 6, 10 u otro, o le dicen a la profesora que no pueden encontrar esa diferencia, que depende de los valores de a y b. La idea de que la respuesta es simplemente a – b es totalmente extraña a los alumnos porque hasta ahora siempre que les han pedido que hagan una operación, han podido hacerla, por lo menos en parte. Una vez que la diferencia entre Javier y Marcos queda establecida, los grupos rellenan la última casilla, pero generalmente sin poner el paréntesis y sin terminar de simplificar la expresión. En el ejemplo siguiente, los paréntesis los ha puesto la profesora.



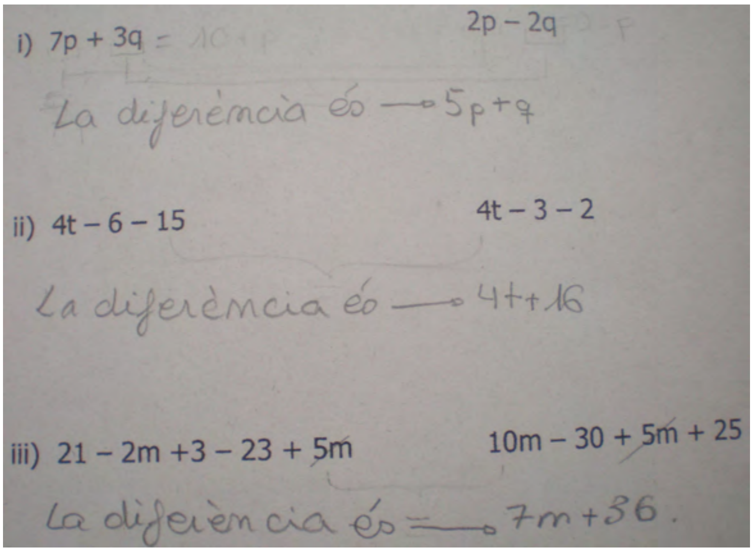
En el apartado 24b), algún grupo, haciendo un razonamiento, llega a la solución, pero los grupos que tratan de resolver a partir de la expresión a – b + 16 no se les ocurre sustituir a – b por 4 porque hasta ahora solo se había dado valor numérico a una sola letra. El apartado c) se resuelve sin dificultades una vez que la profesora ha pasado por todos los grupos, comentando la sustitución del apartado b).



Hacer el ejercicio 24 les lleva a los grupos gran parte de la hora de clase. En el ejercicio 25, hay grupos que se limitan a establecer las desigualdades, generalmente sin simplificar las expresiones. La profesora tiene que avisar de que en el enunciado se pregunta por la diferencia.

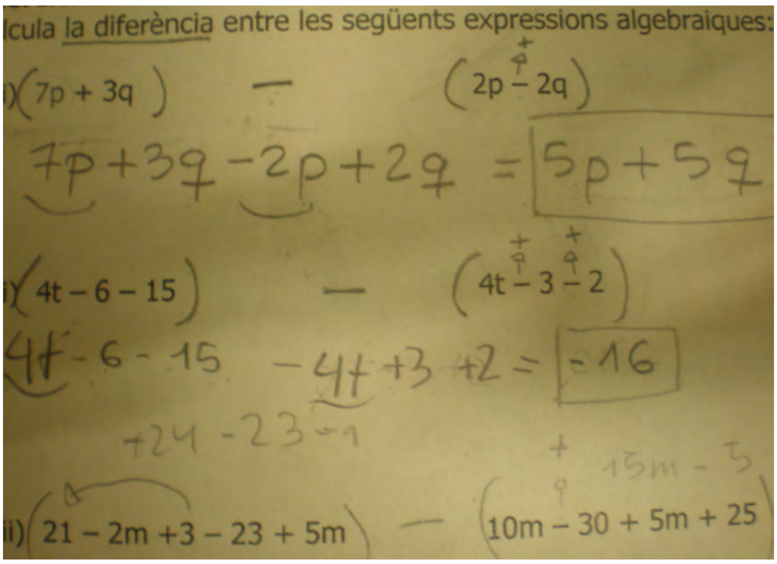


Una vez aclarado el sentido del enunciado los grupos empiezan a calcular las diferencias, pero generalmente se equivocan porque no ponen paréntesis ni simplifican las expresiones antes de efectuar la diferencia. Intentan hacerlo mentalmente sin escribir los pasos intermedios.



Para algunos alumnos la dificultad fundamental estriba en que no entienden la necesidad de poner un paréntesis en la expresión 7p + 2q – (2p – 3q) porque para ellos 7p + 2q – (2p – 3q) = 7p + 2q – 2p – 3q, es decir, la expresión no les cambia al suprimir el paréntesis, por lo que lo consideran superfluo. En estos casos, la profesora y la observadora tienen que hacer un verdadero esfuerzo para intentar de nuevo hacerles ver que 7p + 2q – (2p – 3q) ≠ 7p + 2q – 2p – 3q.

De cualquier modo, también hay que decir que el número de alumnos que aceptan el uso de paréntesis y los manipulan con cierta corrección, va aumentando poco a poco.



Al finalizar la clase, los tres grupos más adelantados están iniciando el ejercicio 26, mientras que los demás grupos están resolviendo el ejercicio 24.

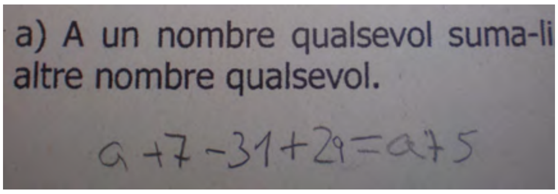
Valoración

Los alumnos siguen sin aceptar el uso de paréntesis para indicar operaciones entre términos que a su vez son operaciones y el cambio de signos en la supresión de paréntesis precedidos de un signo ‘menos’, lo que produce constantes errores. Sin embargo, se observa que poco a poco van siendo más receptivos a la corrección de dichos errores y algunos alumnos empiezan a utilizar paréntesis con cierta propiedad.

SESIÓN 13: 3/12/09 (JUEVES, 10-11h)

La profesora dedica bastante tiempo a los grupos que están todavía resolviendo el ejercicio 24, en un intento de que alcancen a los otros grupos y se pueda volver a tener una clase más homogénea. Finalmente lo consigue, bien es verdad que, más de una vez, explicándoles ella misma la resolución.

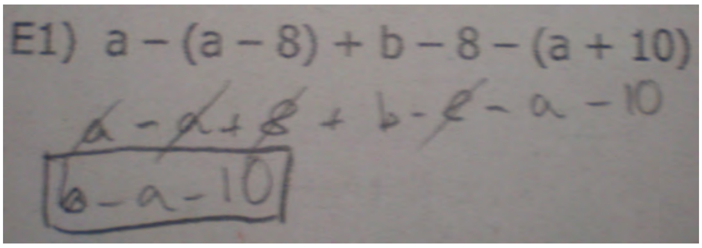
Los otros grupos están en el ejercicio 26. La dificultad inicial la plantea la interpretación que hacen los alumnos de “un número cualquiera”. No lo interpretan como una variable, sino como un número concreto que ellos tienen libertad para elegir. Aclarada esta cuestión en la primera referencia del enunciado a un número cualquiera, algunos alumnos o grupos siguen dándole esta interpretación en momentos posteriores.


a) A un nombre qualsevol suma-li
altre nombre qualsevol.

$a + 7 - 31 + 29 = a + 5$

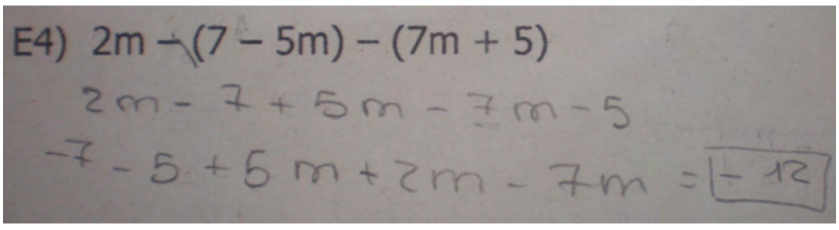
Otro error frecuente, como puede verse en el ejemplo anterior, es escribir a + 7 – 31 en lugar de 31 – (a + 7) que es lo que indica el enunciado. También en el apartado b) escriben con frecuencia 3n – 25 – 9n, en lugar de 9n – (3n – 25). El ejercicio les resulta difícil y tardan tiempo en hacerlo.

En el ejercicio 27 se pone de manifiesto una gran diferencia en el comportamiento de los alumnos. Unos alumnos escriben y realizan las operaciones con bastante corrección, aunque sigue la tendencia a no enlazar las expresiones con el signo igual.


E1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

$\cancel{a} - \cancel{a} + \cancel{8} + b - \cancel{8} - a - 10$

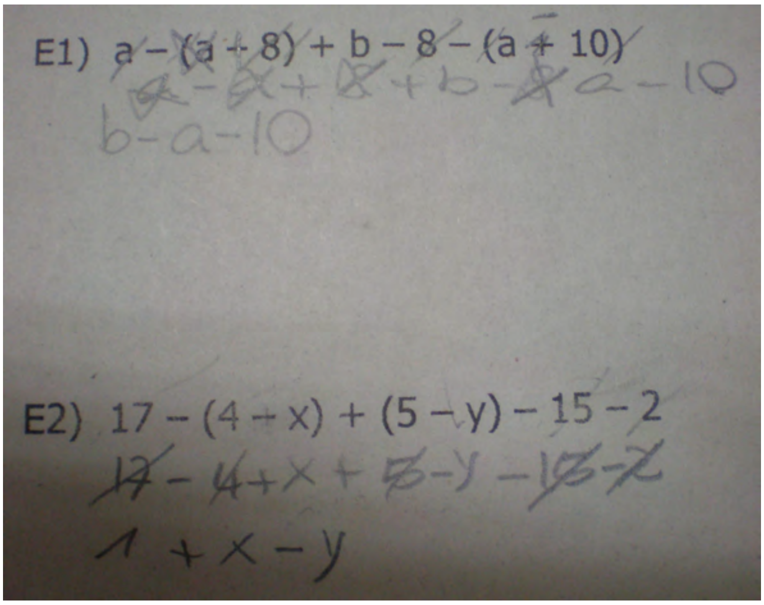
$\boxed{b - a - 10}$

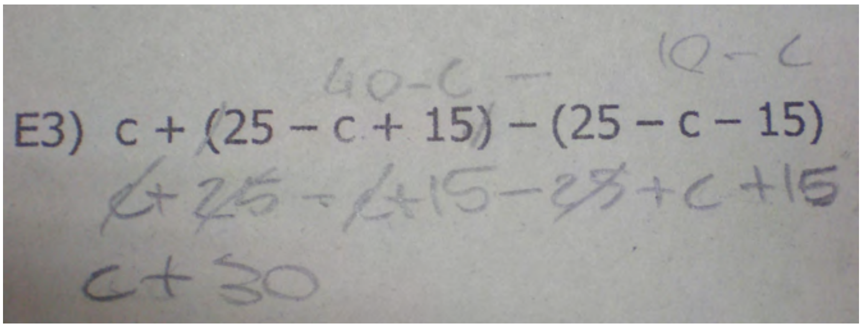

E4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

$2m - 7 + 5m - 7m - 5$

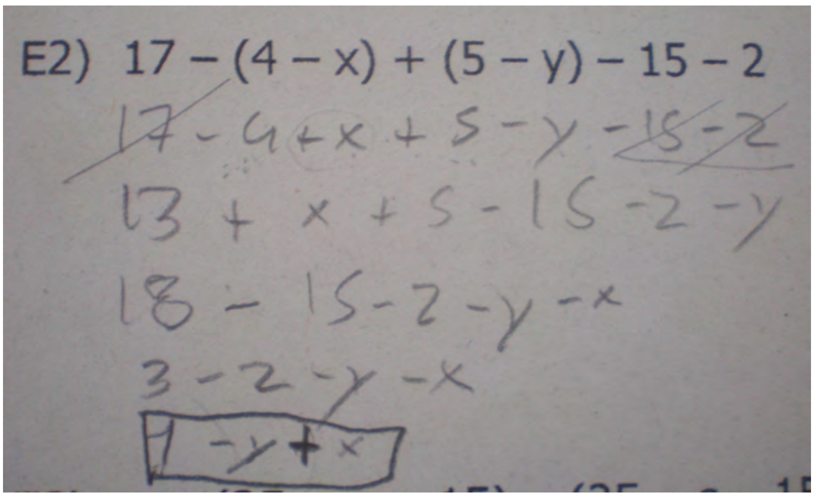
$-7 - 5 + 5m + 2m - 7m = \boxed{-12}$

Otros calculan bien, pero su escritura es más confusa

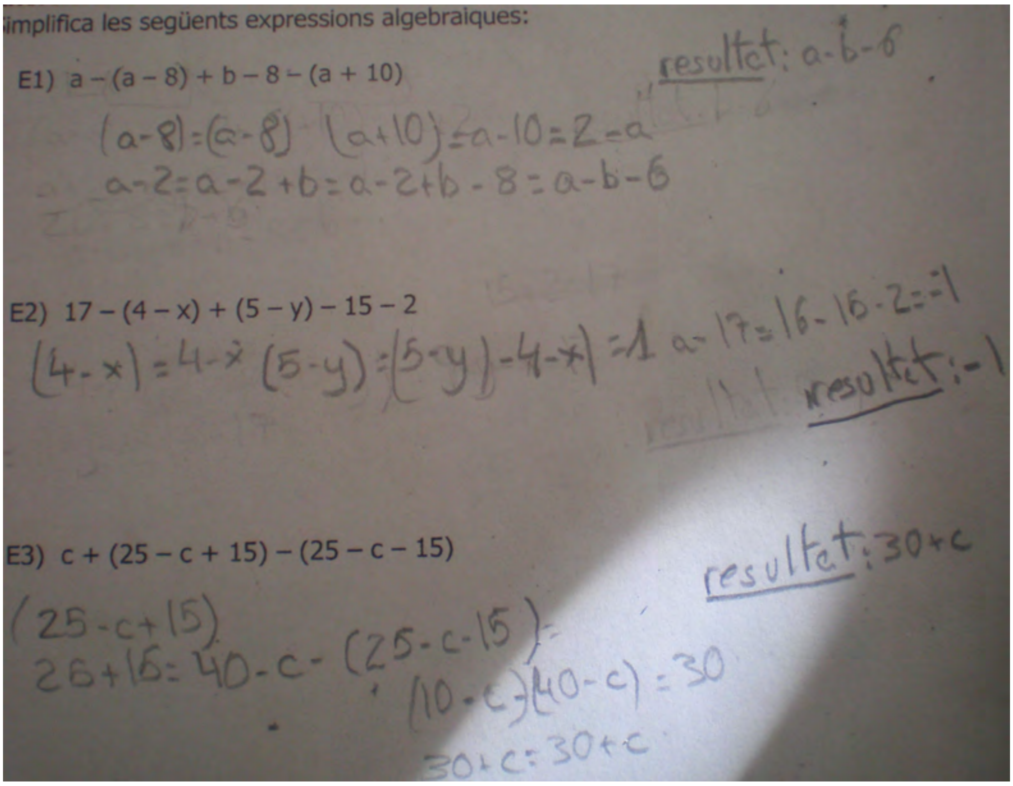




O calculan bastante bien, pero como no procuran efectuar los cálculos de la manera más económica posible, acaban cometiendo algún error. En el ejemplo que sigue, el tachado de los números y la corrección del resultado final corresponde a la profesora.



Y, por último, algunos alumnos, los menos, muestran con su manera de hacer que han entendido muy poco, tanto de las características del cálculo algebraico, como de sus reglas de escritura.



En el apartado E1) un grupo llega a la expresión

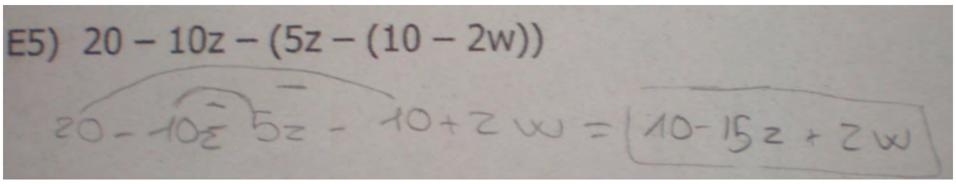
a – 2a + b – 10

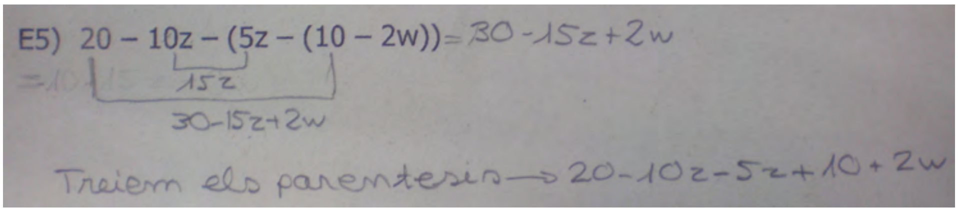
y no saben cómo gestionar la expresión a – 2a. Un alumno cree que es igual a 3a. La profesora les dice que cuando un término no lleva signo se entiende que lleva el signo ‘más’. Los alumnos siguen sin verlo claro. La profesora propone poner primero la letra *b* en la expresión y escribe:

b + a – 2a – 10

Ahora ya reconocen que esa expresión es igual a b – a – 10.

En el apartado E5) los alumnos tratan de quitar los dos paréntesis a la vez lo que da lugar a muchos errores.





Al término de la sesión de clase, tres grupos han acabado el ejercicio 27 y comienzan el 28, mientras que 4 grupos están trabajando en distintos apartados del ejercicio 27.

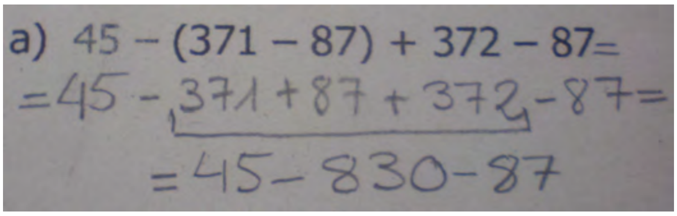
Valoración

Se observa un avance importante en la corrección de los cálculos. Prácticamente todos los alumnos interpretan las sumas y restas en términos de composición de traslaciones y cada vez son más los alumnos que simplifican correctamente las expresiones con paréntesis.

En cambio, se constata que la simbolización algebraica de los programas de cálculo aritmético les resulta muy difícil.

SESIÓN 14: 10/12/09 (JUEVES, 10-11h)

Los grupos siguen trabajando en los ejercicios 27 y 28. Este último ejercicio se desarrolla sin grandes dificultades, una vez que las profesora les aclara lo que se pide en el enunciado, y los alumnos se toman muy en serio la decisión de si conviene deshacer el paréntesis o efectuarlo, pero todavía aparecen resoluciones como la siguiente, que muestra la tendencia de algunos alumnos a calcular considerando que los signos indican operaciones binarias entre números sin signo, a pesar de las sucesivas llamadas de atención y correcciones de la profesora.

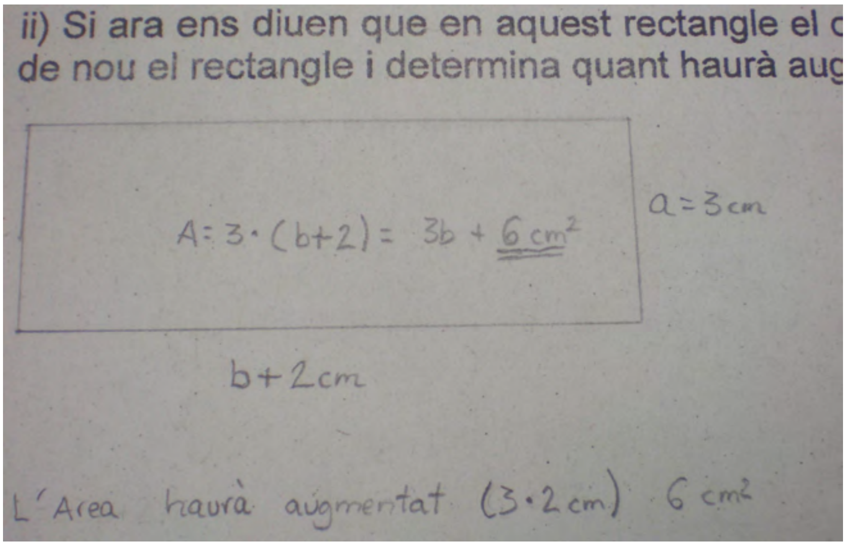


A los grupos que terminan el ejercicio 28 la profesora les reparte el material titulado *5. Cómo multiplicar expresiones algebraicas* y comienzan el ejercicio 29.

De nuevo se produce el fenómeno reseñado en el curso anterior: búsqueda de una solución numérica, pues el uso de las letras, aceptado ya para determinados problemas aritméticos en los que faltan datos, no se generaliza sin más al caso de un problema geométrico. La profesora tiene que insistir para que expresen el área utilizando letras.

También se producen dificultades con la simbolización del producto, aunque menos que el curso anterior porque en la fórmula del área que aparece en el enunciado del ejercicio 29 ya se ha suprimido el símbolo que indica el producto. A algunos alumnos les extraña esta manera de expresar el área y la profesora les dice que ab = axb, recordándoles que en álgebra el símbolo del producto no se escribe.

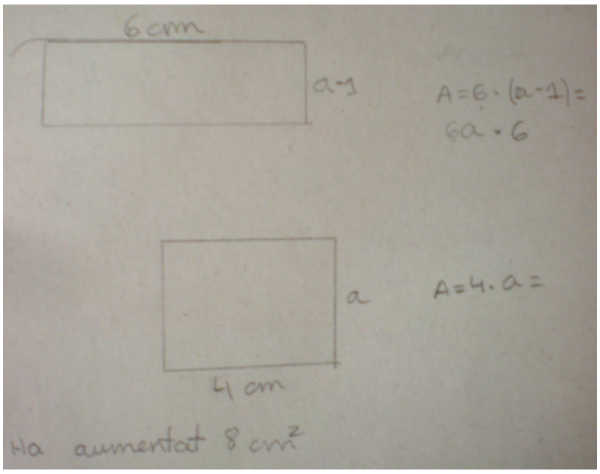
En la versión de este curso se deja que sean los propios alumnos los que hagan los dibujos, lo que evita también las malas interpretaciones que hicieron los alumnos del curso pasado de los dibujos que aparecían en el enunciado. Por lo demás, los grupos solucionan el ejercicio sin grandes dificultades



El ejercicio 30 está propuesto para que los alumnos recuerden la propiedad distributiva que muchos de ellos han olvidado. Realizan la primera parte sin dificultad, resultándoles algo más complicada la parte en la que tienen que sacar factor común.

En el ejercicio 31 hacen los dibujos de los dos rectángulos por separado y hay que hacer notar que bastantes alumnos interpretan la orden de dibujar un rectángulo en el sentido estricto de "dibujar un rectángulo con las medidas indicadas en el enunciado", por lo que preguntan qué medida le tienen que dar al lado desconocido. Es necesario decirles que el dibujo del rectángulo no tiene que tener las medidas exactas, pues solo se utiliza como soporte del razonamiento geométrico, no como medio para averiguar las soluciones que nos piden haciendo mediciones sobre él.

En general, los grupos expresan correctamente las áreas de los dos rectángulos, cometiendo más errores a la hora de indicar la diferencia. Algunos grupos le dan un valor numérico porque en el ejercicio 29 se obtiene un valor numérico para la diferencia y piensan que aquí tiene que suceder lo mismo.



El estudio del aumento o disminución del área del segundo rectángulo lo hacen mediante una tabla de valores para las dos áreas, lo que les permite contestar también al apartado iii). Algún grupo resuelve el problema estudiando si la diferencia de las áreas, $2a - 6$, es mayor, menor o igual a cero.

El enunciado del ejercicio 32 les resulta más complicado. La profesora les dice que lean lo que necesiten para dibujar el primer rectángulo y después que sigan leyendo para dibujar cada uno de los otros dos rectángulos y con esa sugerencia van consiguiendo entenderlo y dibujan los rectángulos.

Una vez dibujados y encontradas las fórmulas de las áreas, nuevamente, bastantes alumnos escriben:

$A = 8(a - 3) = 8a - 24$
$A = 2(a + 3) = 2a + 6$
Diferència $= 8a - 24 - 2a + 6 = 6a - 18$

y de nuevo la profesora debe recordar que hay que poner paréntesis.

Cuando termina la sesión de clase, un grupo está todavía trabajando en el ejercicio 28. La profesora les dice que lo tienen que acabar en casa porque el lunes siguiente se va a dedicar a la corrección de todos los ejercicios que faltan por corregir hasta el 28.

Valoración

De nuevo, a semejanza de lo ocurrido el curso anterior, el paso al ámbito geométrico produce una regresión en el tratamiento algebraico, ya asumido en el ámbito aritmético. Los alumnos tienen que familiarizarse otra vez con el uso de las letras y otros símbolos propios del álgebra en ciertos problemas geométricos que con suficientes datos se modelizan aritméticamente.

Un aspecto importante que surge en esta sesión es el del papel que juegan los dibujos de las figuras en la resolución de los problemas geométricos.

SESIÓN 15: 14/11/09 (LUNES, 13:30-14:30h)

Es una sesión de corrección de ejercicios. La profesora empieza corrigiendo en la pizarra los ejercicios 14 a 17. Como son ejercicios que ya han sido objeto de alguna explicación anterior de la profesora y se han trabajado mucho en los grupos, todos los alumnos están de acuerdo con lo que hace la profesora.

En los ejercicios 18 y 19, los alumnos salen a corregir de tres en tres los distintos apartados porque la pizarra es muy grande. Se observan bastantes diferencias entre unos y otros: unos tienen un cálculo más vacilante, otros se esfuerzan más en buscar un cálculo más económico, pero en general resuelven bien y se observa que ya tienen asumida la interpretación de las operaciones de suma y resta como composición de traslaciones.

Acabada cada operación, la profesora pregunta si se puede hacer de manera más sencilla y si es así, el alumno debe rehacer los cálculos. Después los alumnos vuelven a su sitio y salen otros a la pizarra. Durante este tiempo todos los alumnos están muy atentos a lo que hacen sus compañeros en la pizarra e intervienen rápidamente si cometen una equivocación.

Se corrige de la misma manera el ejercicio 20. En cambio, en los ejercicios 21 a 24, los alumnos dan las respuestas desde su sitio, contestando a preguntas de la profesora. Ésta hace alguna intervención en la pizarra para aclarar alguna duda.

En los ejercicios 25 y 26 vuelven a salir tres alumnos a la pizarra y en el primer ejercicio la profesora les pide que simplifiquen las expresiones antes de calcular la diferencia. Lo hacen así y llegan al resultado correcto con alguna ayuda por parte de la profesora. Otros alumnos resuelven los apartados del ejercicio 26 con intervenciones ocasionales de la profesora.

Finalmente, se corrigen por el mismo procedimiento los ejercicios 27 y 28. La profesora hace salir a la pizarra a alumnos que sabe que han hecho bien los cálculos para ir más deprisa porque la clase se acaba. Tampoco por parte de los alumnos hay apenas interrupciones porque están cansados y un tanto aburridos de tanta corrección.

Valoración

La corrección ininterrumpida de tantos ejercicios resulta excesiva, a pesar de la buena voluntad de los alumnos por participar en ella. Hubiera sido más efectiva una corrección gradual a lo largo de diferentes sesiones, pero nos encontramos con una fuerte restricción: el diferente ritmo de trabajo de los grupos hace que sea difícil encontrar el momento apropiado para corregir un ejercicio, bien porque no todos los grupos han llegado a él, bien porque algunos grupos ya lo han sobrepasado hace tiempo y están interesados en resolver otros ejercicios.

SESIÓN 16: 15/12/09 (MARTES, 9-10h)

Los tres grupos más adelantados empiezan el ejercicio 33, otros tres grupos están entre el ejercicio 31 y el 32 y un grupo empieza el 29.

En el ejercicio 33, los grupos se enfrentan por primera vez al producto de un número entero por una expresión algebraica. La profesora les sugiere una regla: “primero se aplica la propiedad distributiva que ya conocéis, manteniendo los paréntesis, y después quitáis los paréntesis”. Los grupos tratan de seguir la regla con mejor o peor fortuna al simplificar el apartado a). Algunos alumnos lo hacen bien, pero otros cambian la jerarquía de las operaciones:

$$\boxed{15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a) = 11(3x - 5) + 2(5 - 7a)}$$

o aplican la propiedad distributiva sin poner paréntesis

$$\boxed{15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a) = 15 - 12x - 20 + 10 - 14a}$$

o no saben dónde colocar los paréntesis:

$$\boxed{15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a) = 15\ (- 12x - 20)\ (+ 10 - 14a)}$$

o cometen errores de otros tipos.

Finalmente la profesora pasa por los grupos y les muestra, a modo de ejemplo, cómo hace ella la simplificación

$$\boxed{\begin{array}{l} 15 - 4(3x - 5) + 2(5 - 7a) = 15 - (12x - 20) + (10 - 14a) = \\ = 15 - 12x + 20 + 10 - 14a = 45 - 12x - 14a \end{array}}$$

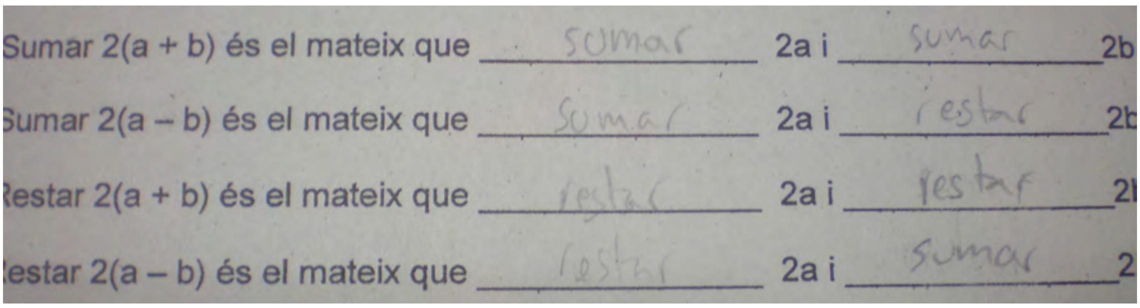
En el apartado c) la profesora tiene que informar de que n7n se escribe como $7n^2$, mientras que en el apartado d) los alumnos se encuentran de nuevo con dificultades porque aparece un paréntesis dentro de otro. La tendencia de los alumnos a escribir los menos pasos intermedios posibles hace que bastantes alumnos se equivoquen en los cálculos. La profesora les anima a repetir los cálculos "despacio", escribiendo todos los pasos intermedios. Una vez que han llegado a la expresión

$$\boxed{\begin{aligned}&3(6 - 5(3b - 4 + c) + 10b) + 2(5b - 2c) = \\ \\ &= 3(6 - (15b - 20 + 5c) + 10b) + 2(5b - 2c) = \\ &= 3(6 - 15b + 20 - 5c + 10b) + 2(5b - 2c)\end{aligned}}$$

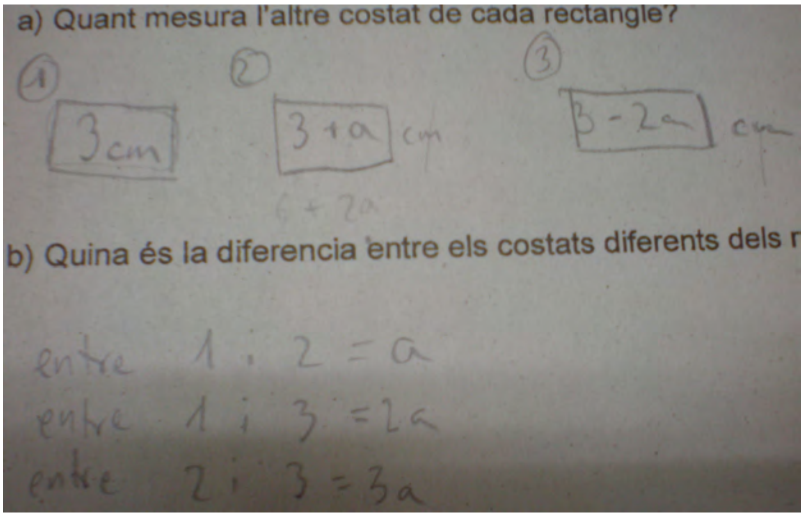
les dice que antes de aplicar de nuevo la propiedad conmutativa, deben simplificar la expresión del primer paréntesis y después aplicar la distributiva. A bastantes alumnos les resulta extraña una cadencia de cálculo tan despaciosa y preguntan si no se puede hacer más rápido. La profesora contesta que sí, pero cuando aprendan a hacerlo sin equivocarse, mientras tanto deben hacer los cálculos escribiendo con cuidado los pasos intermedios.

En la simplificación del apartado e) todos los alumnos aplican la propiedad distributiva y se muestran muy poco receptivos a la sugerencia de la profesora de que se puede hacer sin necesidad de aplicar dicha propiedad.

El ejercicio 34 se desarrolla con las incidencias ya habituales de tener que avisar que restar una suma significa restar los dos sumandos, etc.


Sumar 2(a + b) és el mateix que sumar 2a i sumar 2b
Sumar 2(a – b) és el mateix que sumar 2a i restar 2b
Restar 2(a + b) és el mateix que restar 2a i restar 2b
Restar 2(a – b) és el mateix que restar 2a i sumar 2b

En cuanto al ejercicio 35 encuentran por tanteo los lados desconocidos y establecen las diferencias.



De nuevo el mayor número de errores aparece al intentar expresar la diferencia entre los lados del segundo y tercer rectángulo porque, o bien lo hacen directamente y se equivocan, o intentan expresar la diferencia y se olvidan del paréntesis.

Al término de la sesión de clase, los grupos fluctúan entre el ejercicio 33 y el 36.

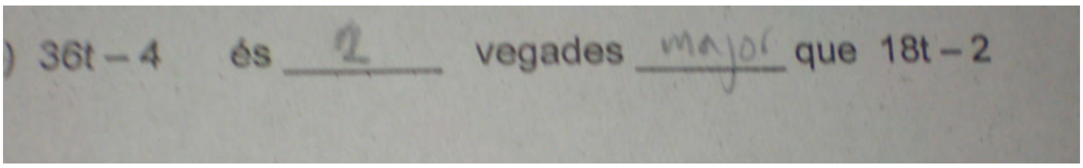
Valoración

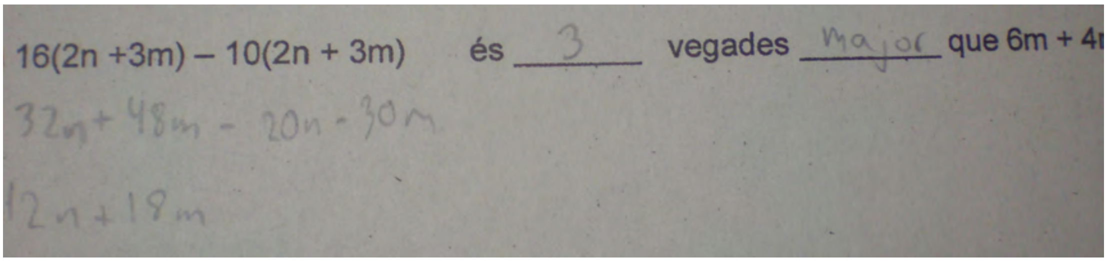
La diferencia en el ritmo de trabajo de los alumnos ha vuelto a hacer que unos grupos estén bastante más adelantados que otros, lo que provoca cierto desaliento en los grupos más retrasados que no contribuye a fomentar su interés por la realización de los ejercicios. Suelen ser los ejercicios de cálculo los que dan lugar a estas diferencias, pues los alumnos que calculan con corrección los hacen con rapidez, mientras que los que siguen teniendo dificultades en ellos, tienen que corregir una y otra vez, a instancias de la profesora, y eso retrasa su trabajo y les desespera.

SESIÓN 17: 17/12/09 (JUEVES, 10-11h)

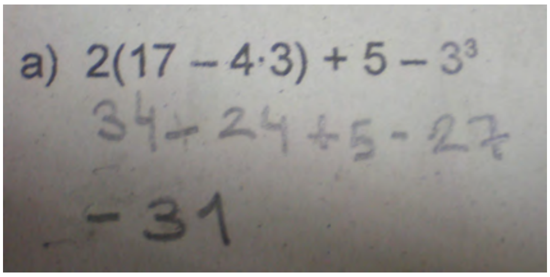
Es la última sesión de clase de matemáticas antes de las vacaciones de Navidad y los alumnos están cansados y con pocas ganas de trabajar. La profesora les dice que lo que no hagan en clase tendrán que hacerlo en casa y que después de las vacaciones se hará una sesión de corrección de los ejercicios 29 al 38 y, a continuación tendrán que entregar el dossier.

Dos grupos empiezan a trabajar en el ejercicio 36. Reconocen fácilmente que 36t – 4 es el doble de 18t – 2, pero en el apartado b) no reconocen que 16(2n + 2m) – 10(2n + 3m) = 6(2n + 3m). Todos aplican la propiedad distributiva y simplifican, llegando a obtener 12n + 18m, expresión que, con ciertas dificultades, comparan con 6m + 4n.





Los dos grupos que llegan al ejercicio 37 realizan las operaciones, pero se han olvidado de hacer un uso discrecional de la propiedad distributiva, en función de la economía del cálculo, y la profesora tiene que recordárselo.



Por lo demás, calculan con bastante corrección.

El resto de los grupos siguen haciendo los ejercicios 33, 34 o 35, en función de dónde lo habían dejado la clase anterior. Al finalizar la clase, un grupo ha finalizado el ejercicio 37, dos están resolviendo diferentes apartados del ejercicio 37, otro grupo está en el ejercicio 36, dos grupos se encuentran resolviendo el ejercicio 35 y un grupo no ha acabado el ejercicio 33. La profesora les recuerda que los tienen que terminar de hacer en vacaciones y dice a los alumnos que se despidan de la observadora porque no va a volver, lo que ellos hacen con expresiones de cariño y buenos deseos.

Valoración

Es una sesión poco productiva dadas las fechas en las que se realiza. Tanto los alumnos como la profesora están cansados y un poco hartos de seguir tantas semanas en un mismo tema. Se necesitaría alguna sesión más para garantizar que todos los alumnos acaban los ejercicios, pero la profesora considera, con razón, que hay que cambiar de tercio.

ANEXO IV.7

1. DE NUEVO CON EL ÁLGEBRA

Ejercicio 1. En una papelería entran varios clientes a comprar cartulinas blancas. Un día se venden 5 cartulinas, otro día 7, otro, 10. Como las existencias se van agotando, el dueño de la tienda encarga 50 cartulinas más. Después vienen de un colegio y se llevan 32 cartulinas. El dueño vuelve a hacer un pedido de otras 20 cartulinas.

a) ¿Cuántas cartulinas tendrá para vender una vez que le hayan servido el pedido?

b) ¿Tendrá más o menos que al principio?

Simplifica todo lo qe puedas la expresión algebraica que obtengas como resultado

c) Completa la tabla siguiente sobre el número de cartulinas que había en la papelería.

Número inicial de cartulinas	Número final de cartulinas
25	
	46
p	
	q

Ejercicio 2. Completa las siguientes frases:

Sumar 6 y sumar 3 es lo mismo que_______________________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que_______________________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que_______________________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que_______________________________

Ejercicio 3. Unos alumnos, al resolver varios problemas en los que no se conocen todos los datos han obtenido las siguientes soluciones. ¿Podemos expresar estas soluciones de forma más sencilla? Inténtalo y úsalas después para completar la siguiente tabla.

E1) $a + 5 + 8 – 6$

E2) $b – 6 – 10 – 4$

E3) $12 – a – 5$

E4) $7 + b – 9 + 1$

E5) $a + 7 + a – 5 – a$

E6) $c + 15 + 237 – 14 – 1 – 237 + 2$

a	b	c	E1	E2	E3	E4	E5	E6
25	40	14						
2753		318		25		44		
	4571	2000	10		4		9	

Ejercicio 4. Fernando tiene 10 euros más que Luis y Eva 3 euros menos que Fernando.

a) ¿Quién tiene más euros, Eva o Fernando? ¿Y cuántos tiene de más?

b) Completa la tabla siguiente sobre el dinero que tienen Fernando, Luis y Eva.

Dinero de Fernando	Dinero de Luis	Dinero de Eva
15		
	10	
	n	
		m

c) Fernando y Eva van a comprar un regalo. Eva pone todo su dinero y Fernando la misma cantidad que Eva. ¿Cuánto dinero le queda a Fernando?

Ejercicio 5

I) Si queremos restar 98 a 135, lo más fácil será restar 100 y después sumar 2 y así se obtiene 37. Coloca los signos que faltan en la escritura en forma algebraica de esta operación.

$$135 - 98 = 135 - (100 - 2) = 37 = 135\_\_100\_\_2$$

II) Si queremos restar 102, lo más fácil será restar 100 y después restar 2 y así se obtiene 33. Coloca los signos que faltan en la escritura en forma algebraica de esta operación.

$$135 - 102 = 135 - (100 + 2) = 33 = 135\_\_100\_\_2$$

III) Completa las siguientes frases:

Sumar a + b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Sumar a – b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar a + b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar a – b es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Ejercicio 6. Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones algebraicas y calcula su diferencia.

a) $d - 5$ es ________________ que $d - 13$

Diferencia:

b) $x + 6$ es _______________ que $2x + 8$

Diferencia:

c) $c - 14$ es ________________ que $c - 8$

Diferencia:

d) $3t + 4$ es _______________ que $t + 6$

Diferencia:

Ejercicio 7. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos.

A) $f - (f - 7) + 3f - 8 - (f + 7)$

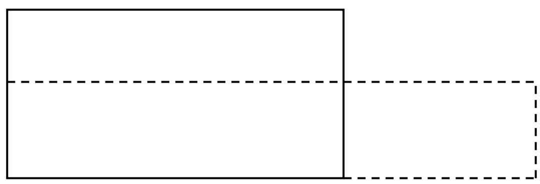
B) $20 - (4 - x) + (4 - x) - 15 - 2$

C) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

D) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E) $20 - 10z - (30 - (10 - 2w))$

Ejercicio 8. Si en un rectángulo del que sabemos que la longitud de un lado es 4 cm, aumentamos el lado conocido en 2 cm y disminuimos el lado desconocido en 1 cm, ¿qué pasará con el área del rectángulo?, ¿disminuirá, aumentará?, ¿cuánto?



Ejercicio 9. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos:

A) $a - 3(b - 7 + 2a)$

B) $5(z + 4 - 2v) - 2(z + 4 - 2v) + (z + 4 + 2v)$

C) $77 - 10(6 - c) + 3(2c - 8) - 5c + 3c - 12$

2. CÓMO OPERAR LOS NÚMEROS CON SIGNO

Ejercicio 10. Alberto juega a los cromos. En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde cuatro cromos.

a) ¿Cuántos cromos ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

Nº de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió en total
+4	
–6	
	+5
	–3

Ejercicio 11. Alberto es muy despistado y después de jugar dos partidas sólo se acuerda de que en la primera gano cuatro cromos y que en total ha ganado cromos. Ana también ha jugado a los cromos y sabe que en la primera partida perdió dos cromos y que también ha vuelto a casa con cromos de más. Completa la siguiente tabla:

a) Escribe el número de cromos que ha ganado o perdido Alberto y el número de cromos que ha ganado o perdido Ana y la diferencia entre ellos.

Nº de cromos que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	Nº de cromos que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre los cromos ganados en total por Alberto y los ganados en total por Anna
a	b	
+3	–1	
–3	+4	
+2		+3
–1		+4
	+5	–2
	–2	+2

Ejercicio 12. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

E1) $p - q + 10$ siendo $p = +7$ i $q = +3$

E2) $12 - x - y$ siendo $x = -5$ i $y = +8$

E3) $2(6 - a)$ siendo $a = -4$

E5) $3(2 - 3n) - 2(3 - m)$ siendo $n = -5$ i $m = 1$.

Ejercicio 13. Efectúa las siguientes operaciones:

E1) $(-200) + (+300) + (-100) + (-100)$

E2) $(+37) - (-40) - (+23) + (-17)$

E3) $8 + 2((-72) - (-12)) -18$

E4) $(4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$

E5) $((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$

Ejercicio 14.

Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que _____________ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que _____________ dicho número.

Ejercicio 15.

a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

1) 6 sobre cero y 5 bajo cero

2) 7 sobre cero y 2 sobre cero

3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos T a la temperatura más alta y t a la más baja, escribe la fórmula que nos da las diferencias de temperaturas en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la fórmula las mismas diferencias que antes.

Ejercicio 16. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es negativa eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo.

Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el símbolo < ó > entre ellos

a) (+12) – (+8) = +12 _____ +8

b) (+5) – (–10) = +5 _____–10

c) (–6) – (+2)= –6 ______ +2

d) (–15) – (–3) = –15 ______ –3

e) (–11) – (+11) = –11 _____ +11

f) (–2) – (–6) = –2______ –6

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo + ó –. Sabemos además como sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo + ó –. A los números naturales precedidos de un signo + se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo – se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de +2 y que +2 es el opuesto de –2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

Ejercicio 17.

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

+14, –18, +36, +4, –12, –5, –20, +10, +8, 0

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros.

7, –7, 1500, –3568, –3569, –83, 1, 13, –100, 5

Ejercicio 18

a) Coloca el signo < ó > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras sólo pueden tomar valores positivos.

1) 9 – a ______ 6 – a

2) 4q – 5 ______ 4q – 8

3) z + 2 ______ 2z + 5

4) d _______ – d

5) m – 2n ______ 3m – n

b) Coloca de nuevo el signo < ó > entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras sólo pueden tomar valores negativos.

1) 9 – a ______ 6 – a

2) 4q – 5 ______ 4q – 8

3) z + 2 ______ 2z + 5

4) d _______ – d

5) m – 2n ______ 3m – n

c) En las desigualdades anteriores, si las letras pueden tomar valores positivos y negativos, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

1)

2)

3)

4)

5)

Ejercicio 19. Para que tipo de números son ciertas las siguientes desigualdades.

1) $a \leq a + b$

2) $z \geq z - x$

3) $b \leq b \cdot c$

4) $b \geq b : c$

Ejercicio 20. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

(+3)(+5) =

(+3)(–5) =

(–3)(+5) =

(–3)(–5) =

Ejercicio 21. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ______________________.

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ______________________.

Ejercicio 22. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

(+3)(   ) = +12

(–7)(   ) = +21

(+5)(   ) = –15

(–6)(   ) = –24

Ejercicio 23. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

(+12) : (+3)

(+21) : (–7)

(–15) : (+5)

(–24): (–6)

Ejercicio 24.
En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, donde *m* y *n* son números naturales, indica cuántas veces es mayor o menor una que otra.

E1) $16(2n + 3m) - 10(2n + 3m)$ $\quad$ $4n + 6m$

E2) $18t - 2$ $\quad$ $36t - 4$

E3) $5(6b + 9c - 18)$ $\quad$ $3(30c - 60 + 20b)$

E4) $56(456x - 319y)$ $\quad$ $7(456x - 319y)$

ANEXO IV.8

DIARIO DE SESIONES DE CLASE DE 2º ESO. CURSO 2009-10

Centro: IES Costa i Llobera (Barcelona)

Características del Centro: Fundado en 1958 como alternativa a la oferta escolar del momento: escuela pública estatal y escuela privada religiosa, el colegio Costa y Llobera buscaba atender a las aspiraciones educativas de una clase media, media-alta que no se sentía cómoda con la oferta escolar tradicional. Inicialmente fue un centro privado que se instaló en un piso de la Rambla de Cataluña, pero posteriormente fue cambiando de ubicación hasta llegar al barrio de Can Caralleu, al pie del Tibidabo. Su nombre es un homenaje al poeta mallorquín Miquel Costa y Llobera (1854-1922).

El Colegio era y sigue siendo un centro educativo muy comprometido con los movimientos de renovación pedagógica. Aunque desde 1989 es un centro público, sigue atendiendo a un alumnado procedente de familias con un nivel cultural y económico más bien alto y mantiene un equipo docente cohesionado gracias a su calificación como centro experimental, lo que le permite seleccionar al profesorado mediante un concurso de méritos restringido.

Curso académico: 2009-2010

Idioma utilizado en las clases: Catalán

Profesora: Mª Isabel Mestre

Datos del grupo: Es un grupo de 2º de ESO denominado 2º R y compuesto por 22 alumnos motivados, participativos y con un comportamiento correcto. La razón de que el grupo sea tan poco numeroso se debe a que en el colegio hay dos grupos de 2º de ESO que en algunas asignaturas como la de Matemáticas se desdoblan en tres.

Horario: La experimentación se realiza en el horario de clases de la asignatura de Matemáticas: los lunes de 9 a 10, los martes de 11:30 a 12:30 y los jueves de 15:30 a 16:30.

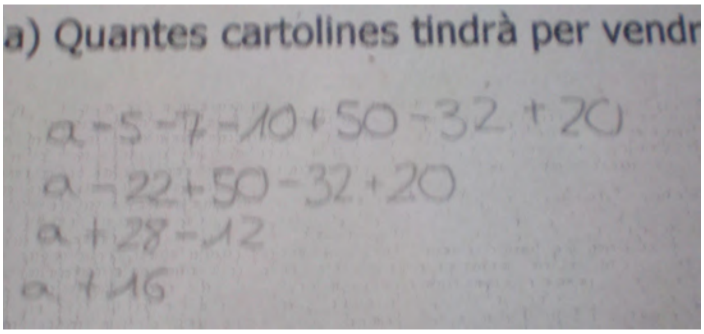
Observadoras: Eva Cid y Noemí Ruiz-Munzón.

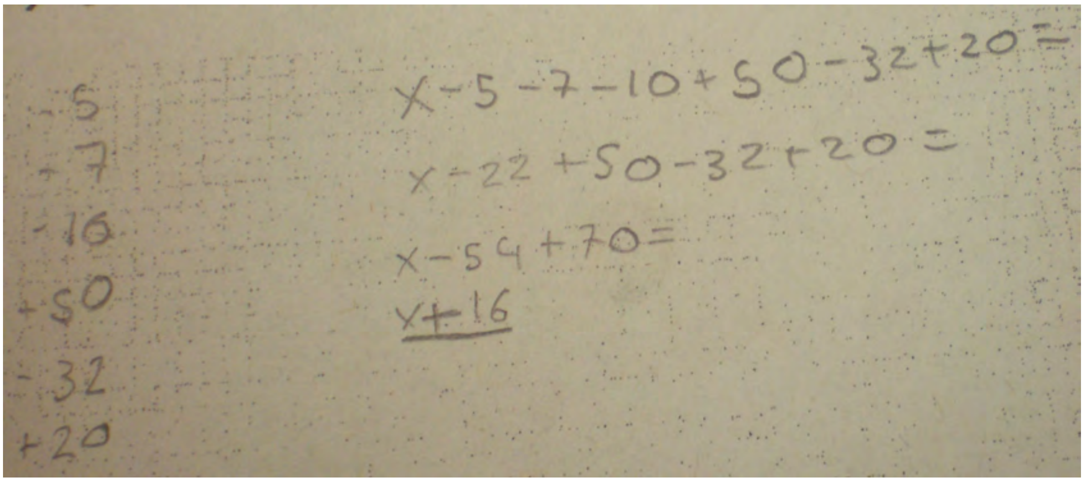
Condiciones de la observación: Se observan las clases de lunes, martes y jueves durante todo el periodo que dura la experimentación. Normalmente, hay una sola observadora en la sesión de clase que registra los hechos sucedidos mediante apuntes personales, fotos y recogida del dossier realizado por algunos alumnos.

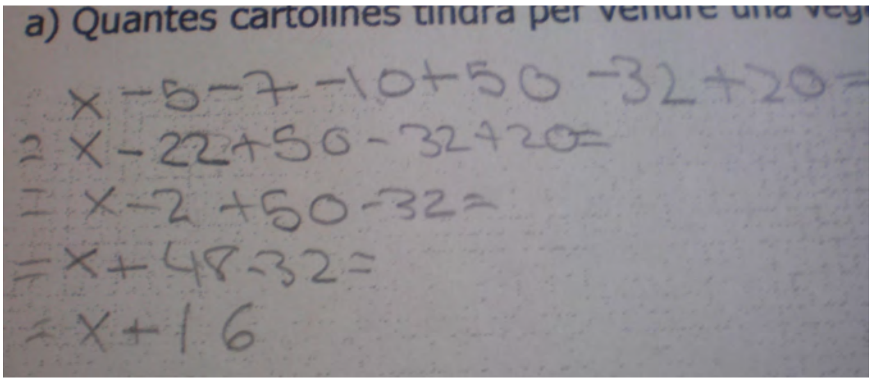
SESIÓN 1: 26/10/09 (LUNES, 9-10h)

Faltan 9 de los 22 alumnos porque están enfermos con gripe. La profesora reparte el material *1. De nuevo con el álgebra* y les recuerda el taller del curso pasado, diciéndoles que van a trabajar de nuevo el álgebra y que estos primeros ejercicios son de repaso y deben hacerlos individualmente.

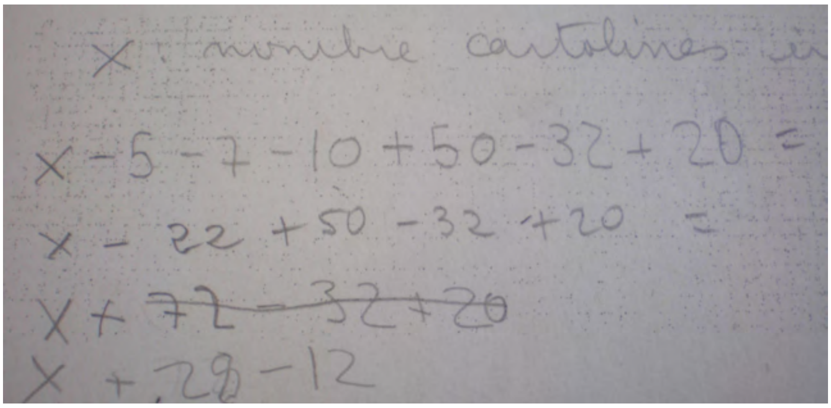
Los alumnos empiezan la tarea y van realizando los ejercicios sin grandes dificultades y con ocasionales preguntas a la profesora. En el ejercicio 1, todos los alumnos eligen un letra, aunque muchos de ellos no indican su significado o dicen que la letra representa “cartulinas”, y escriben la expresión algebraica completa. A la hora de simplificarla, el comportamiento de los alumnos es bastante variado. Dentro de los que operan correctamente, están los que lo hacen de izquierda a derecha o bien sumando los positivos y negativos por separado, o bien los que operan términos que no son contiguos, buscando una economía de cálculo.







También se encuentran alumnos, los menos, que siguen dando ocasionalmente un sentido aritmético a los signos ‘más’ y ‘menos’, pero ante la llamada de atención de la profesora corrigen el error.



X: nombre cartolines in

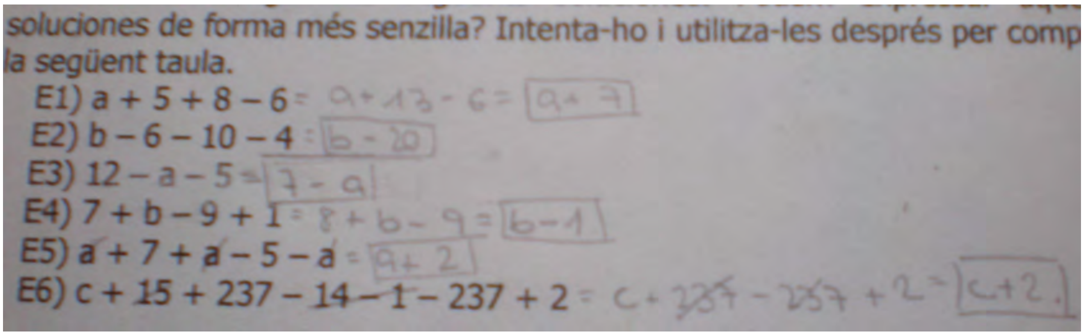
$x - 5 - 7 - 10 + 50 - 32 + 20 =$

$x - 22 + 50 - 32 + 20 =$

$x + \cancel{72 - 32 + 20}$

$x + 28 - 12$

Los demás apartados del ejercicio 1 y el ejercicio se resuelven sin ninguna dificultad. En el ejercicio 3 todos los alumnos simplifican las expresiones sin mayores incidencias. En el apartado E6) prácticamente todos los alumnos neutralizan los términos +237 y –237 y bastantes hacen lo mismo con los términos +15, –14 y –1.



soluciones de forma més senzilla? Intenta-ho i utilitza-les després per comp

la següent taula.

E1) $a + 5 + 8 - 6 = a + 13 - 6 = \boxed{a + 7}$

E2) $b - 6 - 10 - 4 = \boxed{b - 20}$

E3) $12 - a - 5 = \boxed{7 - a}$

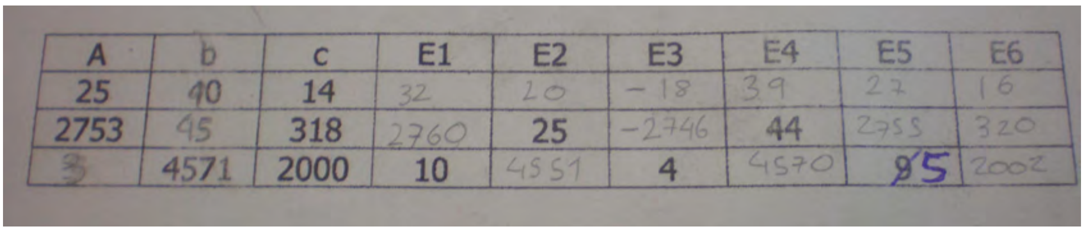
E4) $7 + b - 9 + 1 = 8 + b - 9 = \boxed{b - 1}$

E5) $a + 7 + a - 5 - a = \boxed{a + 2}$

E6) $c + 15 + 237 - 14 - 1 - 237 + 2 = c + 237 - 237 + 2 = \boxed{c + 2}$

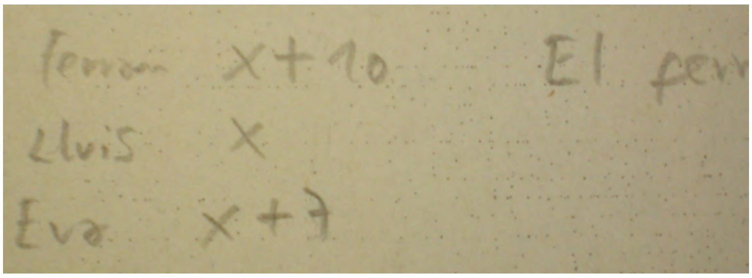
Al hacer la tabla, se dan cuenta enseguida de que la tercera casilla de la columna 9 está equivocada y avisan a la profesora de que tiene que ser un 5. Ésta comprueba que los alumnos tienen razón y propone que sustituyan el 9 que figura en la casilla por un 5.

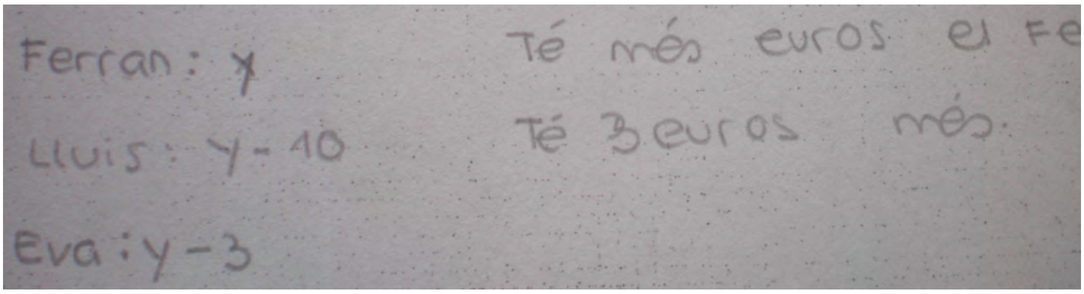
En las dos primeras casillas de la columna 3 salen valores negativos. Algunos alumnos escriben -18 y -2746 y preguntan si está bien. Otros los escriben sin signo o preguntan a la profesora cómo tienen que rellenar la casilla. Ésta les dice cuál es el resultado, pero les avisa que no deberían haber salido esos números y que hay un error en el enunciado.

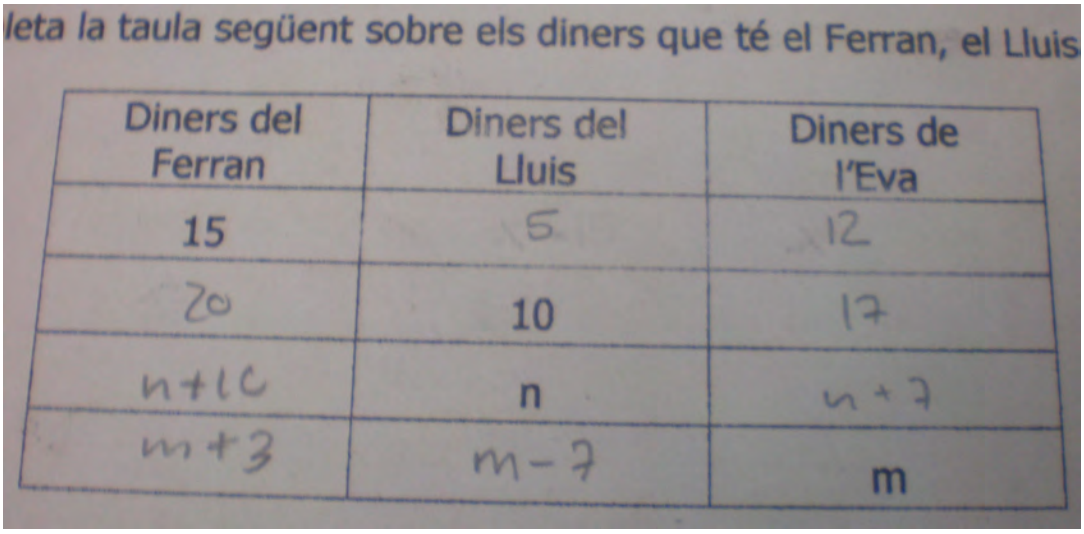


A	b	c	E1	E2	E3	E4	E5	E6
25	40	14	32	20	− 18	39	27	16
2753	45	318	2760	25	−2746	44	2755	320
3	4571	2000	10	4551	4	4570	~~9~~5	2002

En el apartado a) del ejercicio 4 los alumnos contestan que Fernando tiene 3 euros más que Eva, resultado que se deduce directamente del enunciado. La profesora les dice que escriban también el dinero que tiene cada uno porque lo van a necesitar para el apartado siguiente. Lo escriben sin dificultad, asumiendo la reversibilidad de las frases comparativas, y rellenan la tabla.






leta la taula següent sobre els diners que té el Ferran, el Lluis

Diners del Ferran	Diners del Lluis	Diners de l'Eva
15	5	12
20	10	17
n+10	n	n+7
m+3	m-7	m

Cuando termina la sesión de clase la mayor parte de los alumnos están terminando de hacer el ejercicio 4, aunque unos pocos están ya en el ejercicio 5 y un alumno está terminando el ejercicio 6. La profesora les dice que continúen haciendo el trabajo en casa.

Valoración

El transcurso de la sesión de clase sorprende gratamente a la profesora y la observadora. Los alumnos se acuerdan de la experiencia del curso pasado, reciben con alegría su continuación y realizan sin grandes dificultades los ejercicios planteados. Se observa que mayoritariamente han asumido el uso de las letras, la interpretación de las operaciones aditivas como composición de traslaciones y la eliminación de los términos opuestos en la simplificación de expresiones algebraicas, aunque sigue la tendencia a escribir los distintos pasos de la simplificación uno debajo de otro y sin unirlos con el signo 'igual'.

Como aspecto negativo hay que reseñar los errores en los enunciados de los ejercicios 3 y 4 que conllevan la aparición de cantidades negativas aisladas antes de tiempo y una pregunta ociosa sobre algo que ya se dice en el enunciado del ejercicio.

SESIÓN 2: 2/11/09 (LUNES, 9-10h)

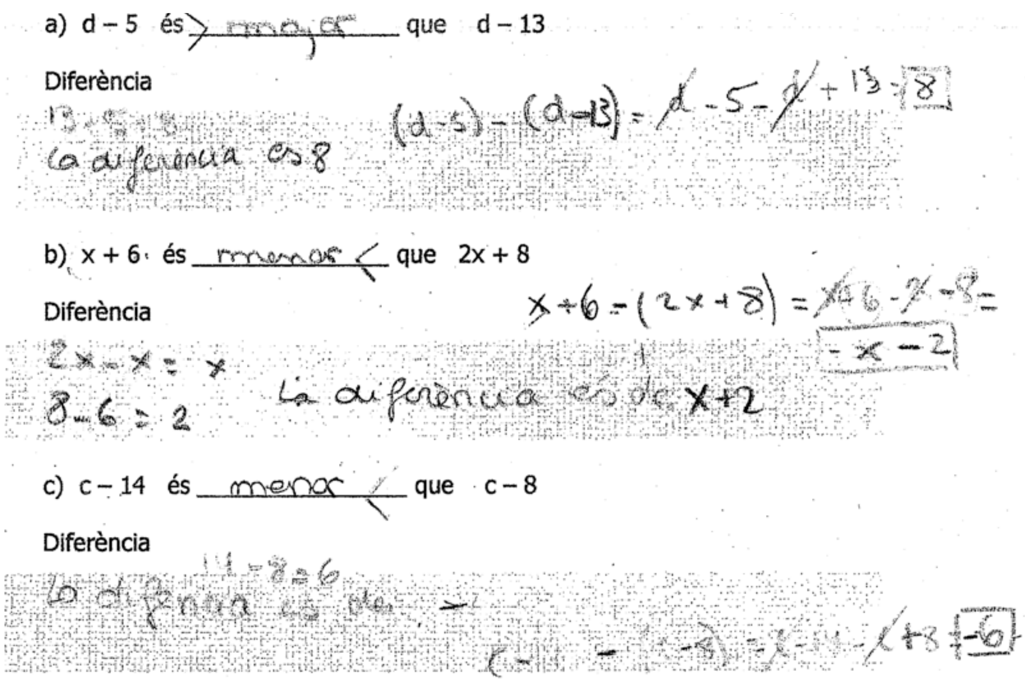
Las clases de los días 27 y 29 de octubre se suspendieron por enfermedad de la profesora. Ahora la gripe ya ha pasado y tanto la profesora como todos los alumnos están en clase.

La profesora reparte el material a los niños que no asistieron a la primera sesión y comienzan a trabajar con una gran disparidad en cuanto a la tarea a realizar: mientras los niños que no asistieron a la sesión anterior empiezan a hacer el ejercicio 1, otros alumnos siguen haciendo ejercicios del 5 en adelante y alguno ya trae hechos todos los ejercicios de casa.

El ejercicio 5 no presenta mayores dificultades y en el ejercicio 6 escriben las desigualdades con corrección, asumiendo que, a igualdad de minuendos, si los sustraendos son menores, los resultados de las restas son mayores.

En el cálculo de las diferencias hay que decir que bastantes alumnos se acuerdan de poner los paréntesis y de suprimirlos, sustituyendo los términos por sus opuestos en el caso de paréntesis que afectan al segundo término de la diferencia. Los errores de este tipo se siguen produciendo, pero con mucha menor frecuencia.

Al expresar las diferencias, los alumnos tienden a elegir el primer miembro de la desigualdad como minuendo y el segundo como sustraendo, lo que da lugar a diferencias negativas.


a) d – 5 és > mayor que d – 13

Diferència

13 - 5 = 8

$(d-5)-(d-13) = \cancel{d}-5-\cancel{d}+13 = \boxed{8}$

La diferencia es 8

b) x + 6 és menor < que 2x + 8

Diferència

$x+6-(2x+8) = \cancel{x}+6-\cancel{2x}-8 = \boxed{-x-2}$

2x - x = x

8 - 6 = 2 La diferencia es de x+2

c) c – 14 és menor < que c – 8

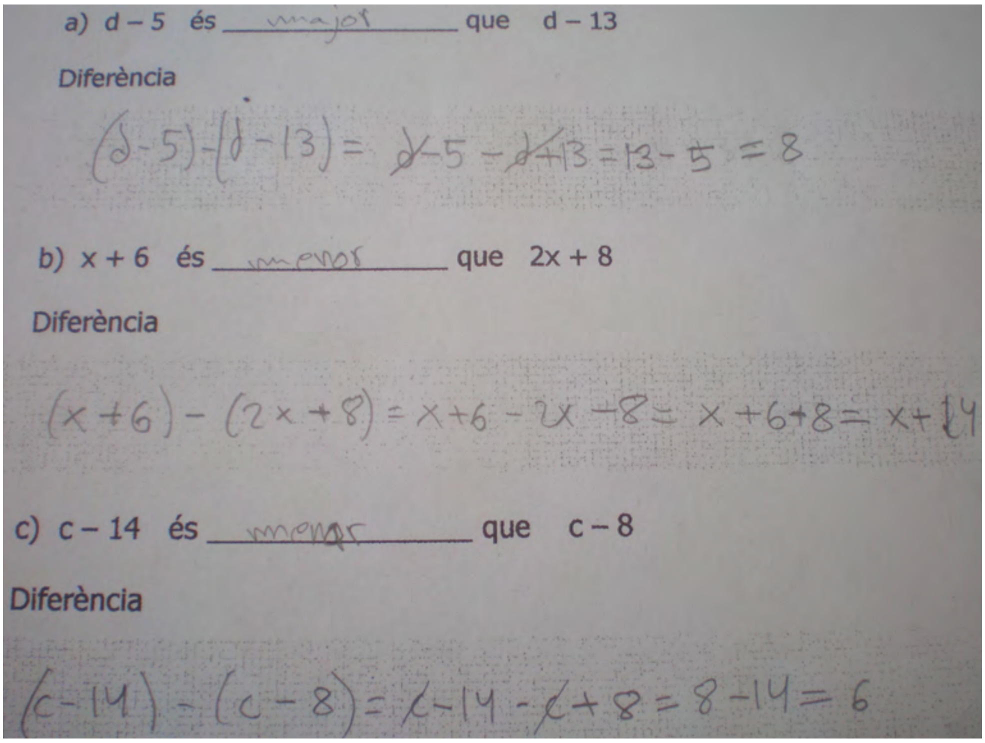
Diferència

14 - 8 = 6

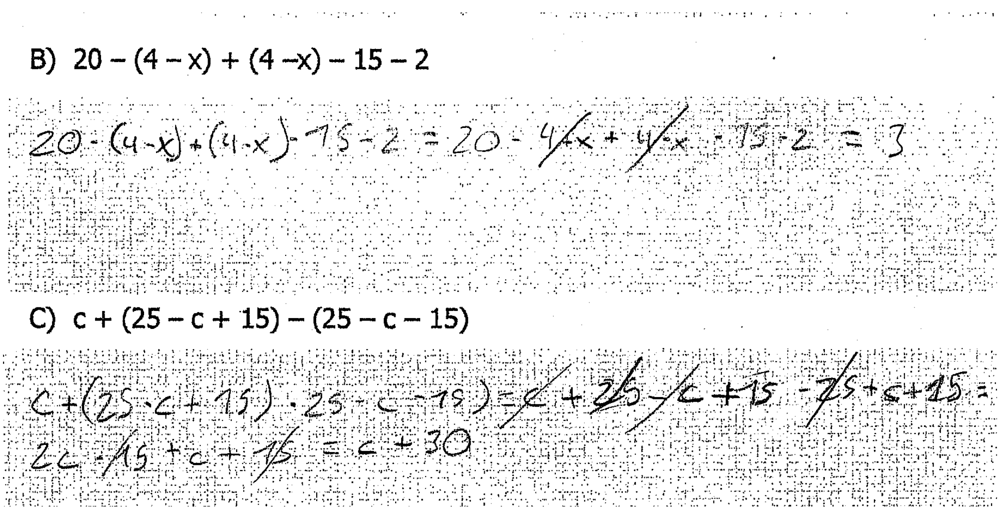
La diferencia es de ...

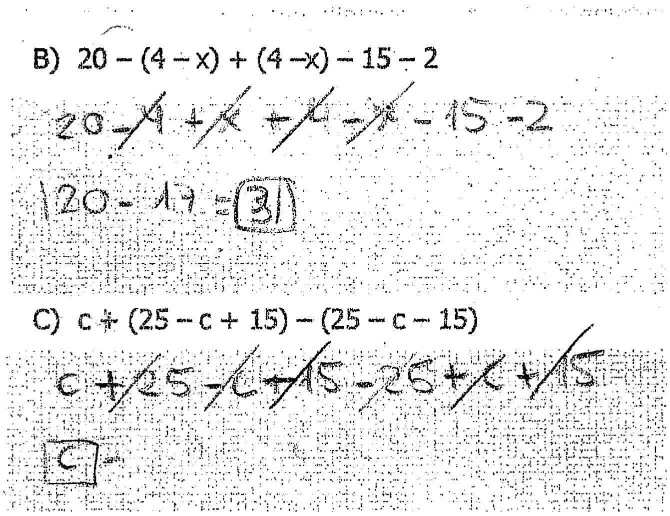
$(c-14)-(c-8) = \cancel{c}-14-\cancel{c}+8 = \boxed{-6}$

Ante ese resultado, unos alumnos preguntan a la profesora y ésta les explica que es correcto y que el signo ‘menos’ indica precisamente que el minuendo es menor que el sustraendo. Otros alumnos optan por positivizar las soluciones negativas. En general, se observa que los alumnos no se sienten cómodos ante las soluciones negativas.

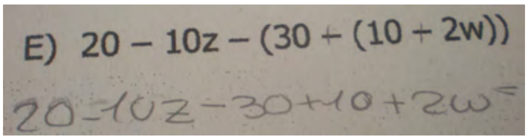


En el ejercicio 7, se producen bastantes errores de cálculo, pero ya no son tan sistemáticos, son más erráticos y debidos a falta de concentración, a “despistes”, más que a creencias erróneas sobre las técnicas de cálculo. Sigue siendo muy frecuente la escritura en vertical de los pasos intermedios de una simplificación sin ligarlos con el signo ‘igual’.



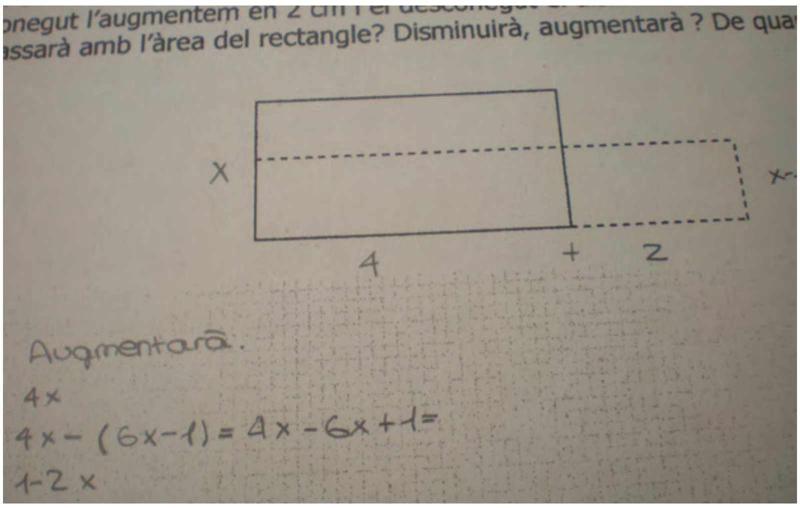


Otras veces el error se debe a un intento de ahorrar pasos intermedios.



En el ejercicio 8 varios alumnos preguntan que cómo van a hacer para calcular el área de los rectángulos si desconocen uno de los lados. La profesora les dice que si no tienen ese dato que pongan una letra, lo mismo que han hecho en problemas anteriores, pero parece que los alumnos no están muy conformes con la idea. La dificultad quizá provenga de que están familiarizados con las fórmulas del área de las figuras y no encuentran legítimo sustituir las letras de las fórmulas por nuevas letras, pues siempre han utilizado las fórmulas dando valores numéricos a las letras y obteniendo un resultado numérico para el área.

Algunos niños tienen dificultades con la propiedad distributiva y curiosamente se acuerdan de cambiar de signo los términos de un paréntesis precedido de un signo ‘menos’, pero no multiplican todos los términos por el coeficiente.



Otro aspecto conflictivo es la notación que en aritmética se utiliza para indicar el producto. En álgebra hay que abandonarla porque se confunde con la letra x, pero los alumnos se resisten a ello.

Veinte minutos antes de acabar a sesión de clase, la profesora propone que los alumnos salgan a la pizarra a corregir los primeros ejercicios. Sale una alumna a corregir el ejercicio 1 y escribe:

x = cartolines inicials
$x - 5 - 7 - 10 + 50 - 32 + 20$
$= x + 16$

La profesora no corrige el significado que la alumna ha dado a la letra x y pregunta si hay que explicar algo más. Todos los alumnos contestan que no porque todos han hecho bien el ejercicio. Sale otro niño a la pizarra a completar la tabla del ejercicio 1 y después otro a contestar al ejercicio 2, sin que tampoco se plantee ninguna dificultad.

El alumno que sale a resolver el apartado E1) del ejercicio 3 escribe:

$$a + 5 + 8 - 6$$

y pregunta si lo simplifica. La profesora le dice que sí. “¿Tengo que hacer varios pasos?”, pregunta de nuevo el niño. “Cómo tu quieras”, responde la profesora. El niño escribe

$$a + 5 + 8 - 6 = a + 13 - 6 = a + 7$$

A continuación, siguen saliendo alumnos a la pizarra a simplificar cada uno una operación. Dos de ellos hacen las siguientes simplificaciones:

$$12 - a - 5 = 5 + 7 - a - 5 = 7 - a$$

$$c + \cancel{15} + \cancel{237} - \cancel{14} - \cancel{1} - \cancel{237} + 2 = c + 2$$

Después de cada simplificación, la profesora pregunta si todo el mundo lo entiende y está de acuerdo. En ningún momento pregunta si algún alumno lo ha hecho de otra forma. Por ejemplo, el apartado E1 podría haberse simplificado de la siguiente manera: $a + 5 + 8 - 6 = a + 5 + 2 = a + 7$.

La tabla del ejercicio 3 la dicta la profesora de viva voz para que los alumnos comprueben si lo tienen igual, sin que se produzca ninguna incidencia. Como el tiempo de clase se acaba, también corrige ella el ejercicio 4, escribiendo en la pizarra:

LLuis = x €
Ferran = x + 10 € Ferran té 3 € més que Eva
Eva = x + 7 €

Después escribe la tabla:

Ferran	Lluis	Eva
15	2	12
n + 10	n	n + 7
m + 3	m – 7	M

y concluye la sesión de clase diciendo a los alumnos que pasen a limpio lo que se ha corregido en clase y que terminen de hacer los ejercicios.

Valoración

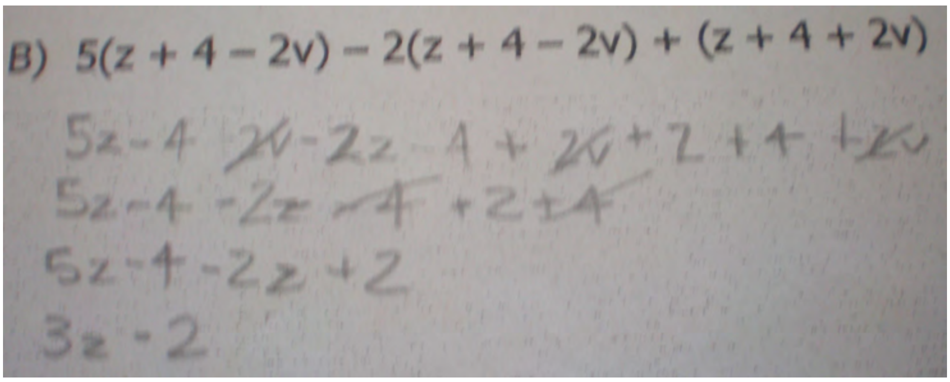
Sigue la impresión positiva en lo que se refiere al tratamiento de las desigualdades y diferencias. Los alumnos recuerdan bastante bien los argumentos utilizados el curso anterior para decidir el sentido de una desigualdad y calculan con bastante corrección las diferencias entre expresiones algebraicas.

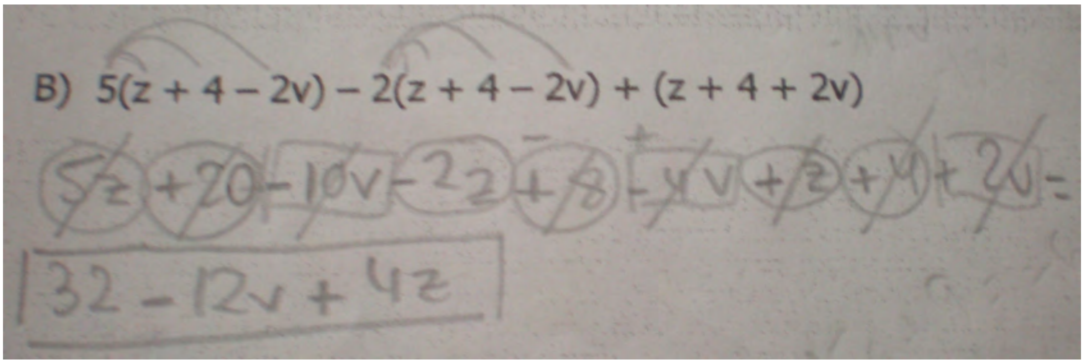
Sin embargo, no sucede lo mismo con la resolución de ejercicio 8. De nuevo la aparición de las áreas supone una regresión respecto al tratamiento algebraico de los problemas. A esto se añade el olvido de la propiedad distributiva, lo que obliga a recordarla y justificarla una vez más. Los alumnos no parecen recordar que este tipo de ejercicios ya se resolvieron el curso anterior. Se nota que la parte correspondiente al producto de expresiones algebraicas se desarrolló al final, más deprisa que las otras y con los alumnos cansados y un tanto hartos de estar tanto tiempo trabajando un mismo tema.

SESIÓN 3: 3/11/09 (MARTES, 11:30-12:30h)

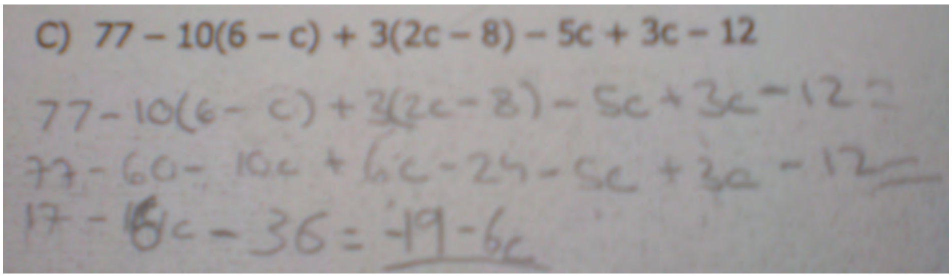
La profesora comienza la clase preguntando cuántos alumnos han acabado de hacer los ejercicios. Levantan la mano 11 alumnos, la mitad de la clase, y la profesora decide dar 20 minutos más de tiempo para hacer los ejercicios, diciendo a los alumnos que ya lo tienen todo hecho que ayuden a sus compañeros. Estos últimos están haciendo los ejercicios 8 y 9.

En el ejercicio 9, la complejidad de la simplificación hace que pocos alumnos lleguen al resultado final correcto. El que no se equivoca al aplicar la propiedad distributiva, se equivoca al quitar paréntesis o al hacer las operaciones finales de suma o resta de términos semejantes.





En el ejemplo siguiente puede verse una mezcla de errores y aciertos muy habitual. El alumno aplica bien la propiedad distributiva, se equivoca al quitar los paréntesis, suma bien los términos independientes y los monomios en c, pero a esta última suma le añade el monomio en a, estableciendo que –9c + 3a = –6c.



Acabado el tiempo de realización de los ejercicios, se pasa a corregirlos en la pizarra. Un alumno escribe las frases del ejercicio 5 y la profesora recuerda qué ocurre cuando se restan una suma o una resta término a término. Una alumna dice que no entiende la frase:

Restar a – b = restar a i sumar b

La profesora pide al alumno que escriba las operaciones que figuran en ese ejercicio y le dicta:

135 – 98 = 135 – (100 – 2) =

El alumno continúa escribiendo:

135 – 98 = 135 – (100 – 2) = 135 – 100 – 2

La profesora tiene que corregirle:

135 – 98 = 135 – (100 – 2) = 135 – 100 + 2

Finalmente vuelve a explicar que “si restamos primero 100 y después 2 , estamos restando 102, no 98 que es lo que queríamos restar. Si para restar 98, empezamos restando 100, hemos restado 2 de más, así que ahora hay que sumarlo”.

Se empieza la corrección del ejercicio 6. El alumno que sale a la pizarra escribe:

d – 5 és major que d – 13

y la profesora le pide que ponga el signo correspondiente. Como el alumno no se acuerda de cuál es, la profesora tiene que indicárselo.

$d - 5 > d - 13$

Después de explicar la desigualdad diciendo que “en el primero se resta menos que en el segundo” el alumno pasa a calcular la diferencia sin mayores problemas:

$(d - 5) - (d - 13) = d - 5 - d + 13 = 8$

Sale otro alumno a la pizarra y escribe:

$x + 6 < 2x + 8$

porque “x es más pequeño que 2x y 6 más pequeño que 8”. Después sigue escribiendo:

$x + 6 < 2x + 8$
$x + 6 +$

La profesora le dice que una diferencia es una resta y el alumno rectifica:

$x + 6 < 2x + 8$
$(x + 6) - (2x + 8) = x + 6 - 2x - 8 = -2x - 2$

Al finalizar la operación, la profesora hace notar que ahora la diferencia es negativa, mientras que en el ejemplo anterior era positiva, y pregunta por qué. Una alumna dice que “antes el primer número de la resta era mayor que el segundo y ahora es al revés”. La profesora le da la razón y completa el argumento del alumno.

En el apartado c) vuelve a salir negativa la diferencia y se constata que el minuendo es menor que el sustraendo.

Por último, en el apartado d) el alumno que sale a la pizarra escribe:

$3t + 4 > t + 6$

$(3t + 4) - (t + 6) = 3t + 4 - t - 6 = 2t - 2$

La profesora le pregunta el porqué de la desigualdad que ha escrito. El alumno da una explicación confusa que no convence a la profesora y pregunta a los demás alumnos. Uno de ellos dice que eso se puede ver dando valores y la profesora pide al alumno que está en la pizarra que haga una tabla.

t	3t + 4	T + 6
1	7	7
2	10	8
3	13	9

Finalmente, se llega a que $3t + 4 > t + 6$ siempre que $t > 1$. Un alumno dice que no hace falta hacer la tabla, basta con estudiar cuándo la diferencia se hace 0 y cuando es positiva o negativa. Así se puede ver fácilmente que $2t - 2 = 0$ para $t = 1$ y para los demás valores de t es positiva.

Para corregir el ejercicio 7 va saliendo a la pizarra un alumno para cada apartado. Las operaciones las hacen de la siguiente manera:

$$f - (f - 7) + 3f - 8 - (f + 7) =$$
$$\cancel{f} - \cancel{f} + \cancel{7} + 3f - 8 - f - \cancel{7} =$$
$$2f - 8$$

$$20 - (4 - x) + (4 - x) - 15 - 2 =$$
$$20 - 4 + \cancel{x} + 4 - \cancel{x} - 15 - 2 = 3$$

$$c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15) =$$
$$\cancel{c} + \cancel{25} - \cancel{c} + 15 - \cancel{25} + c + 15 =$$
$$c + 30$$

El signo ‘igual’ lo escriben a instancias de la profesora. Todos los alumnos están de acuerdo con esa forma de hacer las simplificaciones y como ya no da tiempo a corregir los ejercicios que faltan: dos apartados del ejercicio 7 y los ejercicios 8 y 9, la profesora dice que se corregirán más adelante.

Valoración

Se observa que cada vez son menos los alumnos que cometen errores de cálculo debidos a creencias erróneas sobre las técnicas de cálculo algebraico. Sin embargo, la complejidad de los cálculos hace que los errores debidos a falta de concentración en la tarea sean muy frecuentes.

La corrección en la pizarra ayuda a los alumnos a comprender la justificación de las técnicas y les da pautas para hacer los cálculos de la manera más sencilla posible.

SESIÓN 4: 5/11/09 (JUEVES, 15:30-16:30h)

Los alumnos mueven las mesas para trabajar en grupos de tres o cuatro alumnos (cuatro grupos de cuatro alumnos y dos grupos de tres alumnos), mientras la profesora reparte las fotocopias del material titulado *2. Cómo operar los números con signo.* También avisa de que la corrección de ejercicios pendiente se hará al final de la clase.

Nada más empezar a leer, los alumnos detectan un error en el título, consecuencia de una traducción incorrecta del castellano al catalán. La profesora dice a los alumnos que corrijan el título y los grupos empiezan a trabajar en el ejercicio 10.

En su primer intento de resolución, los grupos tratan de responder a la pregunta de cuántos cromos le quedan a Alberto después de jugar las 4 partidas, así que indican con una letra el número de cromos que tenía Alberto al principio. Pero a continuación se encuentran con que tampoco se sabe cuánto gana o pierde en una de las partidas, lo que les desconcierta.

Algunos grupos se dan cuenta de que hay dos variables y se necesitan dos letras, mientras otros deciden usar la misma letra para las dos variables u olvidarse de una de ellas y la profesora tiene que intervenir, razonando con ellos la necesidad de utilizar letras distintas.

Un grupo que toma por su cuenta la decisión de utilizar dos letras, escribe:

$x - 3 + t + 5 - 4 = x + t - 2; \quad x + t - 2 - x = t - 2$ Ha guanyat o perdut $t - 2$ croms

Pero la mayor parte de los grupos solo utilizan una letra y escriben:

Croms inicials: x 1) $x - 3$ 2) x 3) $x + 5$ 4) $x - 4$ 5) $x - 2$

o bien

$a - 3 + 5 - 4 = a - 2$

y cuando se les pregunta qué significa la letra y qué sentido tiene la expresión final no saben responder, no están seguros de lo que han hecho.

Ante las razones de la profesora para que utilicen dos letras reescriben las soluciones siguientes:

Croms inicials: x
Croms no recorda: z

1) $x - 3$
2) $x - 3 + z$
3) $x - 3 + z + 5$
4) $x - 3 + z + 5 - 4$
5) $x + z - 2$

x = croms inicials
a = el que no recorda (En este punto se preguntan si es +a o –a)

$x - 3 + a + 5 - 4 = x - 3 + a + 1 =$ (Discuten entre ellos si -3 +1 es igual a 4 o es igual a -2 y finalmente llegan al convencimiento de que es igual a -2)

$= x - 2 + a$

Una vez que los grupos han respondido correctamente a la pregunta: ¿cuántos cromos tiene al final Alberto?, la profesora les recuerda que esa no es la pregunta que se hace en el apartado a) del ejercicio, lo que les obliga a replantearse el problema, hasta que dan con la solución de restar la cantidad inicial de cromos a la expresión obtenida.

En cuanto a la pregunta que hace algún grupo sobre si la letra que representa el número de cromos ganados o perdidos en la segunda partida debe sumarse o restarse, la profesora se hace la desentendida de momento y les dice que lo hagan como prefieran.

En el apartado b) los alumnos no tienen inconveniente en asumir la notación de un número precedido de un signo para indicar ganancia o pérdida y rellenan la tabla con relativa facilidad, haciendo o no uso de la fórmula obtenida.

En la resolución del ejercicio 11 se plantean bastantes dificultades:

- A pesar de que la pregunta del apartado a) se sigue refiriendo a los cromos ganados o perdidos, los alumnos se empeñan en contestar cuántos cromos tienen Ana y Alberto al final.
- Utilizan una misma letra para indicar el número de cromos inicial tanto de Alberto como de Ana, lo que sin embargo les permite obtener la diferencia correcta.
- Algunos grupos utilizan también una misma letra para indicar las ganancias o pérdidas de Ana y Alberto. En ese caso, obtienen una diferencia numérica.

La profesora tiene que ir de un grupo al otro tratando de convencerlos de que esa manera de hacer no es la correcta, pero sin demasiado éxito.

Por otro lado, algunos grupos distinguen entre pérdidas y ganancias, diciendo por ejemplo que si Alberto tiene una ganancia en la segunda partida su número de cromos final será $x + 4 + a$ y si tiene una pérdida la expresión será $x + 4 - a$. Un grupo llega incluso a decir que en la primera expresión *a* “puede ser todos los números”, mientras que en la segunda “solo puede ser 0, 1, 2 ó 3” porque el enunciado dice que Alberto en total ganó cromos. La profesora les da la razón, pero les pregunta si eso no se puede solucionar sustituyendo las letras por los números acompañados del signo ‘menos’ cuando se trata de una pérdida.

Finalmente, con el apoyo de la profesora y después de bastante tiempo de reflexión y correcciones, todos los grupos llegan a expresar correctamente la diferencia y empiezan a rellenar la tabla del apartado b).

Albert va guanyar 4+R i Anna va guanyar -2+c
La diferència és (4 + R) – (-2+c) = 6 + R - c

Entonces aparecen nuevas dificultades. En primer lugar, la tendencia de los alumnos es la de sustituir las letras por los números sin el signo que es lo que han hecho hasta ahora. La profesora tiene que advertirles que es el signo el que nos dice si es una pérdida o una ganancia y no se puede prescindir de él, pero esto muchos alumnos no lo entienden. Además, cuando los alumnos asumen el signo, escriben expresiones como las siguientes:

$6 + +3 - -1$
$6 + a - +5 = -2$

y cuando se les informa de que al sustituir una letra por un número que lleva incorporado un signo se pone un paréntesis, escriben:

$6 + (+3) - (-1)$

pero no saben hacer esa operación porque desconocen cómo se opera con la notación completa. La profesora les dice que estos paréntesis se pueden eliminar siguiendo las reglas que ya conocen, pero ese argumento no parece convencerlos. Consulta con la observadora y deciden ofrecer a los alumnos el argumento de que $6 + (+3) - (-1) = 6 + (0 + 3) - (0 - 1) = 6 + 0 + 3 - 0 + 1 = 6 + 3 +1$. Por tanto $+ (+3) = +3$ y $- (-1) = +1$.

Después de esta explicación los grupos tardan bastante en rellenar la tabla, cometiendo con frecuencia errores que tienen que rectificar. Además varios grupos se dan cuenta de que los valores que figuran en la tabla para las ganancias o pérdidas de Ana contradicen el enunciado porque si en la segunda partida Ana pierde 1 ó 2 cromos, no puede ser que se vaya a casa con ganancias, como indica el enunciado. La profesora reconoce el error y dice a los alumnos que pongan en positivo los números de la segunda y última casilla de la segunda columna.

Los problemas aparecen de nuevo cuando tienen que rellenar las casillas correspondientes a las cuatro últimas filas, pues se encuentran operaciones inversas. Nuevamente la profesora tiene que hacerles sugerencias en el sentido de que escriban las operaciones directas y busquen por tanteo el término que falta.

b y 6 + b - y

Nº de cromos que va guanyar o perdre l’Albert a la segona partida	Nº de cromos que va guanyar o perdre l’Anna a la segona partida	Diferència entre els cromos guanyats en total per l’Albert i els guanyat en total per l’Anna
a	b	6 + a – b
+3	+1	+ 10
–3	+4	–3 + 6 – 4 = –1
+2	+5	6 + 2 – ? = +3
–1	+1	6 – 1 – ? = +4
–3	+5	6 + ? – 5 = –2
–6	+2	6 + ? – 2 = +2

4 + ? = + 2

Diez minutos antes de acabar la clase, cuando la mayor parte de los grupos no han completado la tabla, la profesora interrumpe el trabajo para corregir los últimos apartados del ejercicio 7. Salen dos alumnos a la pizarra y escriben:

d) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5) = \cancel{2m} - 7 + \cancel{5m} - \cancel{7m} - 5 = -12$

e) $20 - 10z - (30 - (10 - 2w)) = 20 - 10z - 30 + 10 + 2w = -10z + 2w$

La profesora le dice al alumno que ha simplificado la última expresión que el error que ha cometido se debe a que ha querido ir deprisa y le obliga a rehacer la simplificación escribiendo más pasos intermedios.

e) $20 - 10z - (30 - (10 - 2w)) = 20 - 10z - (30 - 10 + 2w) =$

$20 - 10z - (20 + 2w) = 20 - 10z - 20 - 2w = -10z - 2w$

Como los alumnos están muy cansados, la profesora da por finalizada la sesión de clase antes de tiempo.

Valoración

Los redactores del material no han valorado suficientemente el enorme salto que supone pasar del trabajo con sumandos y sustraendos al trabajo con números con signo aislados y de la notación algebraica incompleta a la completa[1]. El ejercicio 11 es de una dificultad excesiva, pues los alumnos no solo tienen que enfrentarse por vez primera a la notación completa, sino que además se encuentran con ecuaciones expresadas en dicha notación, lo que obliga a la profesora a dedicar mucho tiempo

[1] La diferencia entre la notación algebraica completa y la incompleta es que en la primera figuran los signos de suma y producto entendidos como indicadores de operaciones binarias entre términos, mientras que en la incompleta estos símbolos se suprimen.

en cada grupo a resolver dudas y hacer sugerencias de resolución, con el consiguiente bloqueo del funcionamiento de la clase.

La profesora y la observadora coinciden en que antes de continuar con el trabajo de los grupos se impone una explicación en la pizarra de los ejercicios 10 y 11 y estudian en qué términos debería hacerse.

SESIÓN 5: 9/11/09 (LUNES, 9-10h)

La profesora explica los ejercicios del día anterior. Para ello, un alumno lee el enunciado de ejercicio 10 y, a medida que lo lee, la profesora va escribiendo:

x = nº de croms inicials

1p -3

2p ?

3p +5

4p -4

y explica que como las pérdidas se restan a la cantidad inicial de cromos y las ganancias se suman, se pueden representar con números que restan o suman. Después sigue escribiendo:

x = nº de croms inicials	
1p -3	$x - 3$
2p ?	$x - 3 + a$ $x - 3 - a$
3p +5	$x - 3 + a + 5$ $x - 3 - a + 5$
4p -4	$x - 3 + a + 5 - 4 = x + a - 2$ $x - 3 - a + 5 - 4 = x - a - 2$

y comenta que como en la segunda partida no se sabe si gana o pierde, habría que poner dos fórmulas, una para el supuesto de que sea una ganancia y otra para el supuesto de una pérdida. Un alumno dice que no hace falta poner dos fórmulas y la profesora le da la razón, pero le pide que espere a que acabe su explicación.

La profesora continúa diciendo que esas fórmulas nos permiten saber el número de cromos finales de Alberto, pero que no es eso lo que nos pide el problema. Lo que pregunta el enunciado del problema es cuántos cromos ganó o perdió en total Alberto. "¿Cómo podemos averiguarlo?"-pregunta la profesora. Varios alumnos contestan que quitando la x. La profesora aclara que la ganancia o pérdida total será la diferencia entre el número de cromos finales e iniciales y escribe:

$$x + a - 2 - x = a - 2$$
$$x - a - 2 - x = -a - 2$$

"Y ahora -continúa la profesora-, si en la segunda partida Alberto tiene una ganancia de 5 cromos, ¿dónde sustituiremos ese valor numérico?, ¿y si tiene una pérdida de 4 cromos?" Los alumnos dan la respuesta esperada y la profesora escribe:

$a - 2 = 5 - 2 = 3$ (guanya)	si a = guany de 5 croms
$-a - 2 = -4 - 2 = -6$ (perd)	si a = pèrdua de 4 croms

"Bien -dice la profesora-, hemos encontrado una solución pero ¿cómo podríamos hacer para utilizar solo una fórmula en vez de dos?" El alumno que ha interrumpido antes dice que "poniéndoles el signo a los números". La profesora escribe:

$a - 2 = +5 - 2 = +3$ (guanya)	si $a = +5$ cromos
$a - 2 = -4 - 2 = -6$ (perd)	si $a = -4$ cromos

haciendo ver a los alumnos que si se sustituyen las letras no solo por los números, sino por los números precedidos por el signo correspondiente para indicar ganancias o pérdidas, basta con una fórmula, la que corresponde a suponer que la letra está sumando, porque "al sustituir la letra por un número con signo 'menos', ella misma se cambia de signo".

Después de esa explicación se completa en la pizarra la tabla del apartado 10c) y se comienza a corregir el ejercicio 11. Nuevamente es la profesora la que escribe mientras va dando explicaciones:

Albert nº de croms en començar: x
1p $x + 4$
2p $x + 4 + a$
Guanya o perd: $x + 4 + a - x = 4 + a$

Anna nº de croms en començar: y
1p $y - 2$
2p $y - 2 + b$
Guanya o perd: $y - 2 + b - y = b - 2$

Diferència: $4 + a - (b - 2) = 4 + a - b + 2 = 6 + a - b$

Los alumnos aceptan las explicaciones de la profesora y ésta les dice que empiecen a hacer la tabla del ejercicio 11 de nuevo. Ahora todos los grupos sustituyen las letras por los números con el signo 'más' o 'menos', según que sean ganancias o pérdidas, pero tienen muchas dificultades con el manejo de la notación completa. Finalmente, la tabla se corrige en la pizarra. La profesora escribe:

$$6 + (+3) - (-1) = 6 + 3 + 1 = 10$$

$$6 + (-3) - (+4) = 6 - 3 - 4 = -1$$

$$6 + (+2) - ? = +3 \qquad 6 + 2 - ? = 3 \qquad \underset{(+5)}{8 - ? = 3}$$

explicando al mismo tiempo lo que hace. En el último caso dice que "b tendrá que ser positivo porque si fuera negativo sumaría y el resultado de la operación sería mayor que 8".

Varios alumnos dicen no entender las operaciones que la profesora ha hecho en la pizarra. El problema está en la utilización de paréntesis. La profesora dice que el que los paréntesis se pongan es una norma de la escritura algebraica. En cuanto a su supresión, vuelve a repetir en la pizarra el argumento que ya había utilizado en los grupos:

$$6 + (+3) - (-1) = 6 + (0 + 3) - (0 - 1) = 6 + 0 +3 - 0 +1 = 6 + 3 + 1$$

Una alumna sigue diciendo que no entiende, a pesar de todas las explicaciones que da la profesora y finalmente ésta, cansada de su insistencia, escribe:

$$+ (+12) = + 12$$
$$+ (-12) = - 12$$
$$- (+12) = - 12$$
$$- (-12) = + 12$$

y le dice que procure aprenderlo.

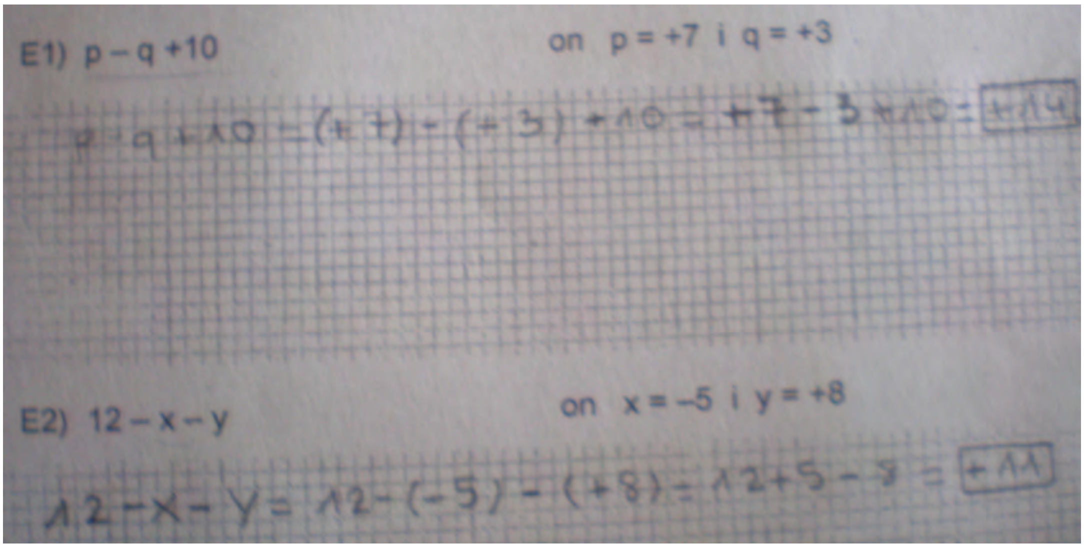
Se completa la tabla en la pizarra y se da por finalizada la sesión de clase.

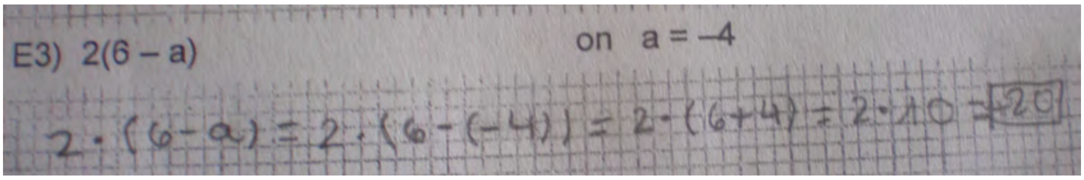
Valoración

La explicación de la profesora resulta eficaz. La mayor parte de los alumnos se da por satisfecho con las razones que expone y aceptan sustituir las letras por los números con signo, pero siguen teniendo muchas dificultades con la notación completa y bastantes de ellos no acaban de entender el razonamiento que permite pasar, por ejemplo, de –(–3) a +3.

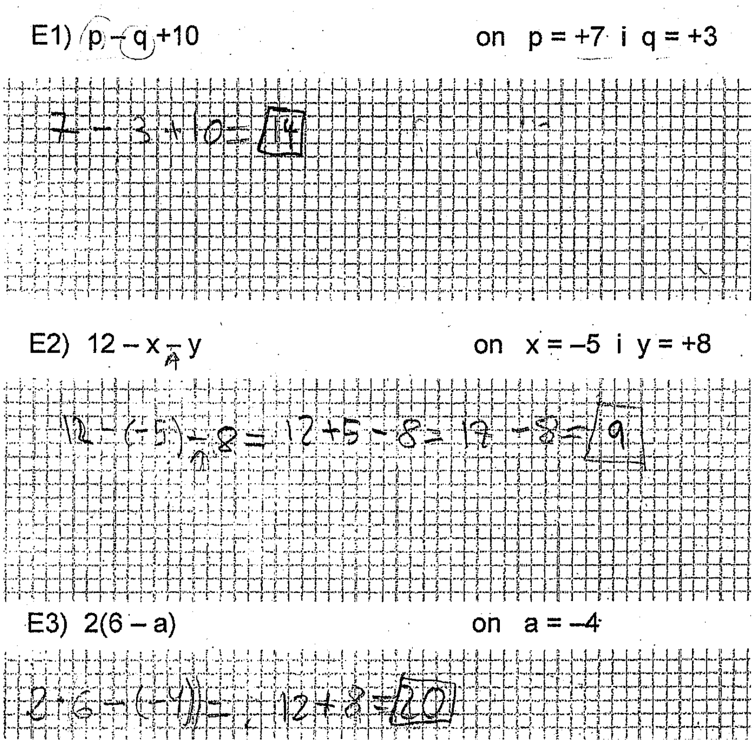
SESIÓN 6: 12/11/09 (JUEVES, 15:30-16:30h)

Vuelven a faltar seis alumnos por enfermedad. Los grupos comienzan el ejercicio 12 que, después de la explicación del día anterior sobre el uso de las notaciones completas, se desarrolla sin demasiadas dificultades, aunque los errores siguen siendo frecuentes.

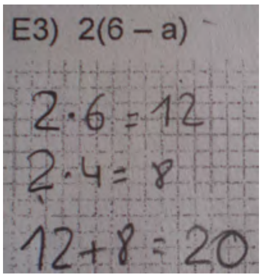




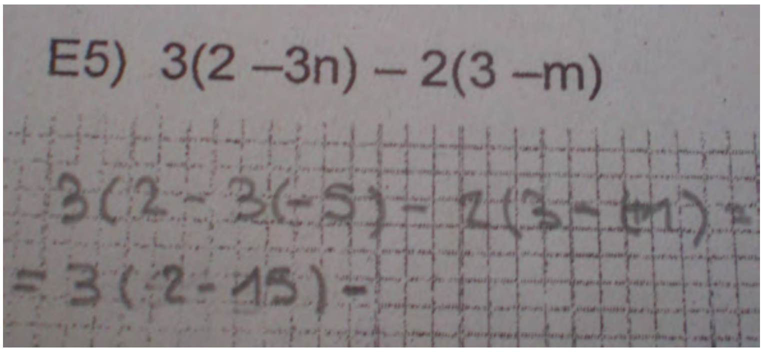
Algunos alumnos deciden por su cuenta no utilizar las notaciones completas, dejando de colocar el paréntesis cuando el valor numérico a sustituir es positivo.



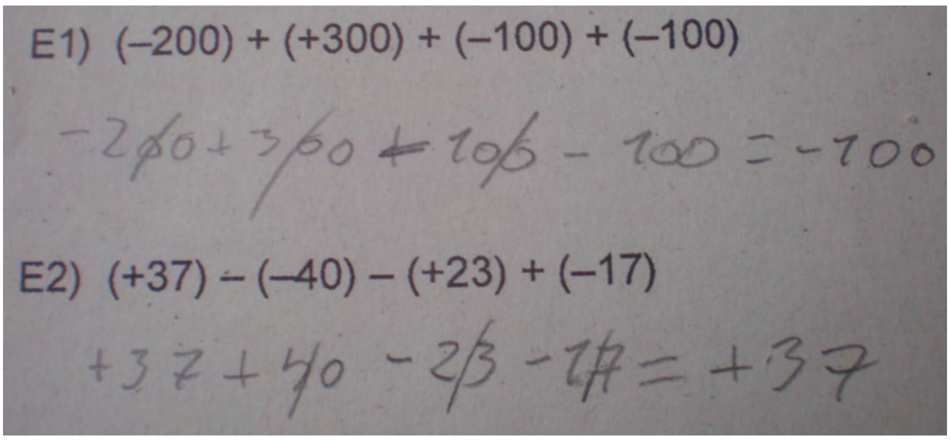
Por el contrario, todavía se encuentra algún alumno que sigue aferrado a procedimientos de cálculo de tipo aritmético, lo que no le impide llegar a un resultado final correcto.

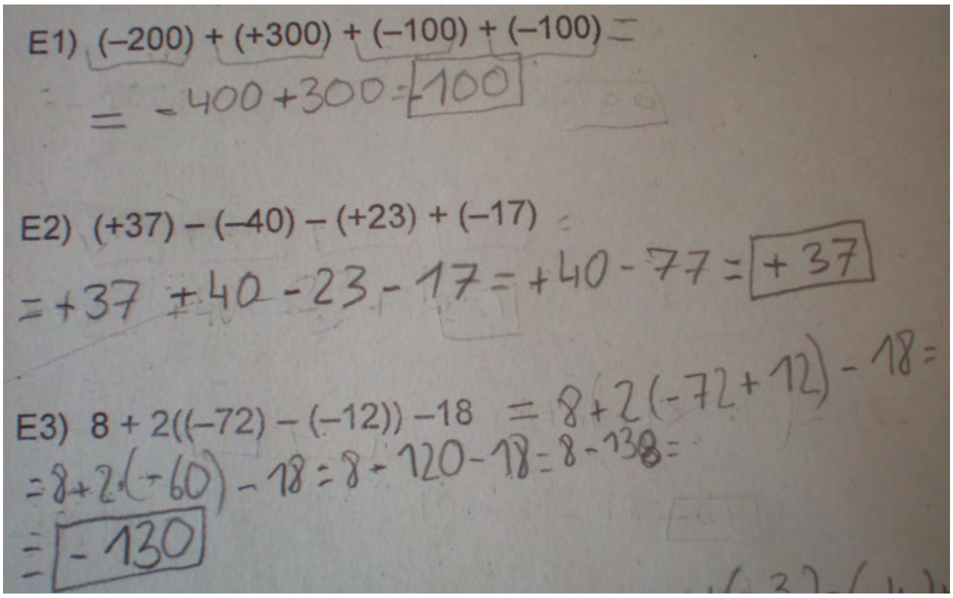


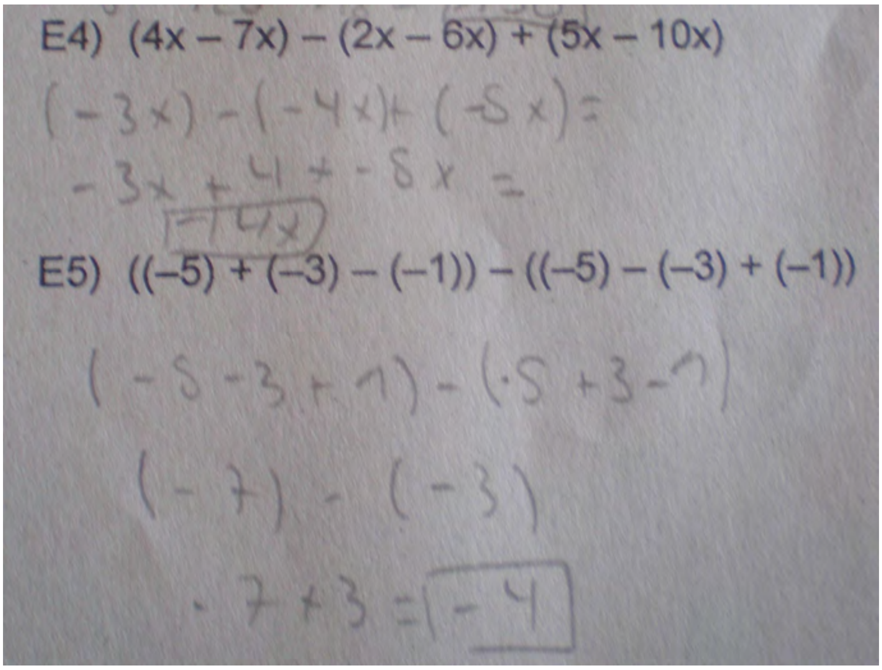
En el apartado E5) la necesidad de colocar dos cierres de paréntesis seguidos provoca alguna confusión.



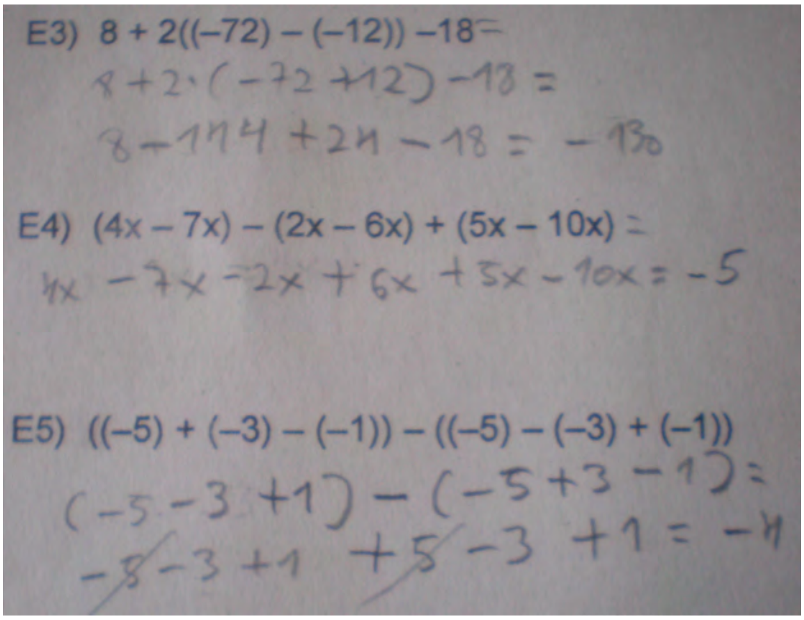
En el ejercicio 13 todos los alumnos pasan de las notaciones completas a las incompletas, utilizando, a partir de ahí, procedimientos muy variados con cierta tendencia a la eliminación de los términos opuestos y a la realización de las operaciones indicadas en los paréntesis. Los errores siguen siendo frecuentes, aun cuando en los ejemplos siguientes apenas se producen.



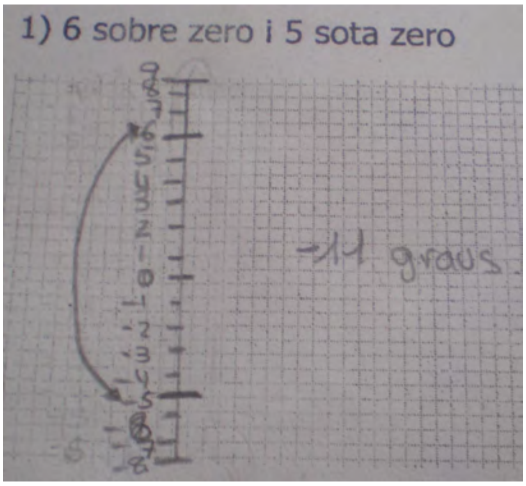


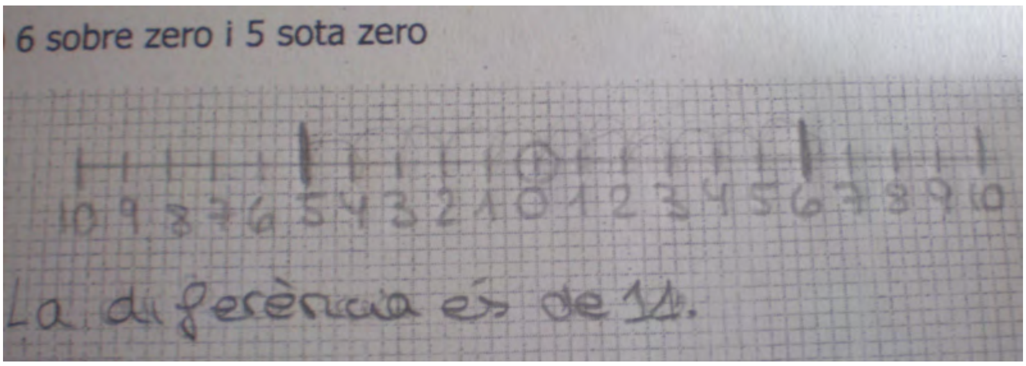


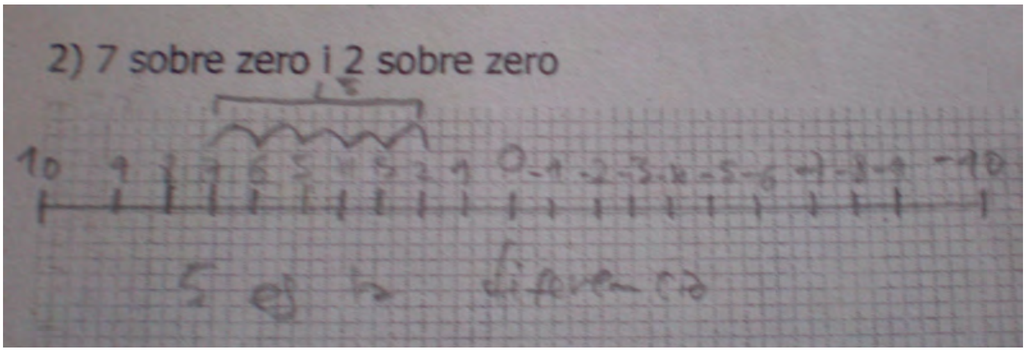
Pero también existen alumnos que utilizan de continuo la propiedad distributiva, sin discriminar su pertinencia en el caso de que las operaciones sean efectuables.

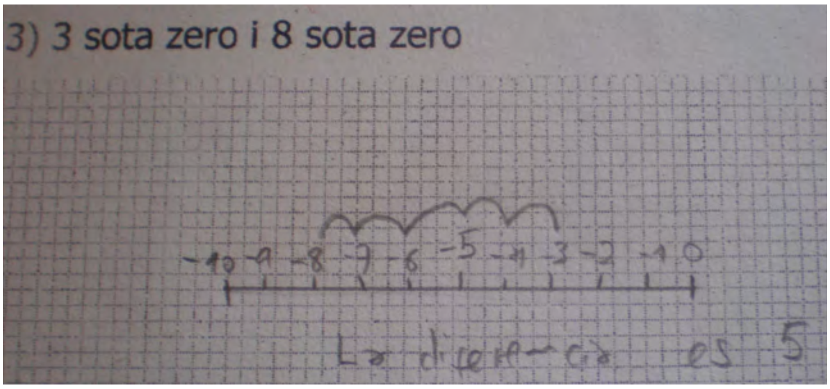


La realización del ejercicio 14 transcurre sin mayores incidentes y en los primeros apartados del ejercicio 15 los alumnos dibujan el termómetro de diferentes maneras: en vertical o en horizontal, con o sin números negativos, con los números negativos a la derecha o a la izquierda del 0, pero no tienen mayores dificultades en encontrar las diferencias de temperatura, normalmente en valor absoluto.









La sesión de clase termina con un grupo en el ejercicio 13, cuatro grupos en el ejercicio 15, unos empezándolo y otros acabándolo, y un grupo en el ejercicio 18.

Valoración

La resolución de los ejercicios 12, 13 y 14 permite a los alumnos familiarizarse con la notación completa y su transformación a notación incompleta. Los alumnos empiezan de nuevo a desarrollar los cálculos con cierta soltura. Llama la atención que muchos de ellos siguen preocupándose por eliminar términos opuestos y por calcular de la manera más sencilla posible.

La realización de los primeros apartados del ejercicio 15 pone de manifiesto que algunos alumnos no conocen el termómetro tradicional.

SESIÓN 7: 16/11/09 (LUNES, 9-10h)

El trabajo de los grupos se ve perjudicado por la reincorporación a la clase de los alumnos que habían estado enfermos en la sesión anterior. Al desfase existente entre grupos se añade ahora el desfase entre alumnos dentro de un mismo grupo, lo que provoca de facto reorganizaciones de los grupos en subgrupos más pequeños.

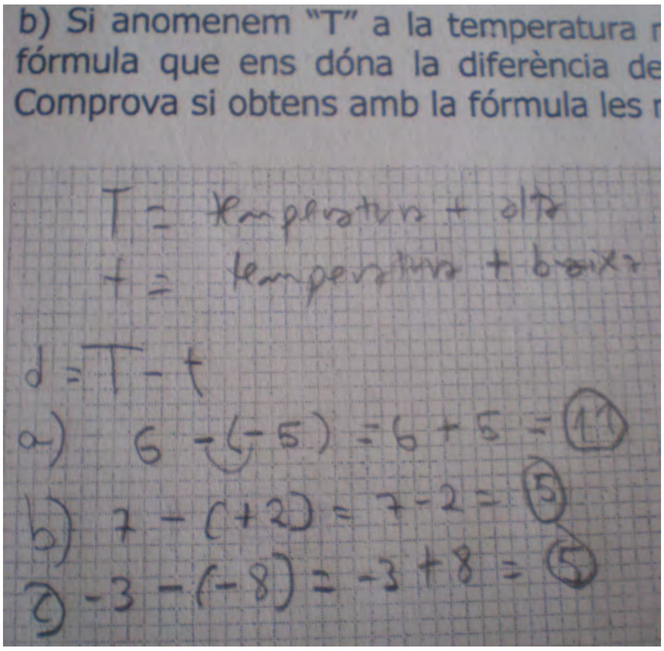
En el apartado b) del ejercicio 15 los alumnos no entienden lo que pide el enunciado y dan respuestas como la siguiente:

1) 6 + 5 = 11

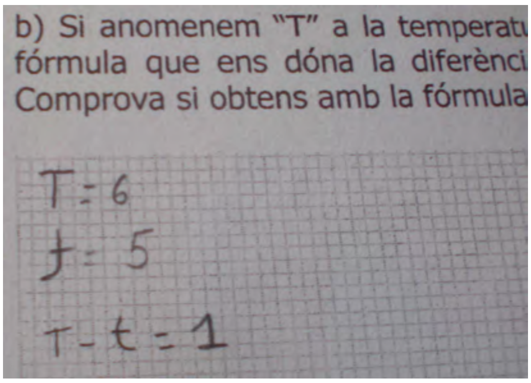
2) 7 - 2 = 5

3) 8 – 3 = 5

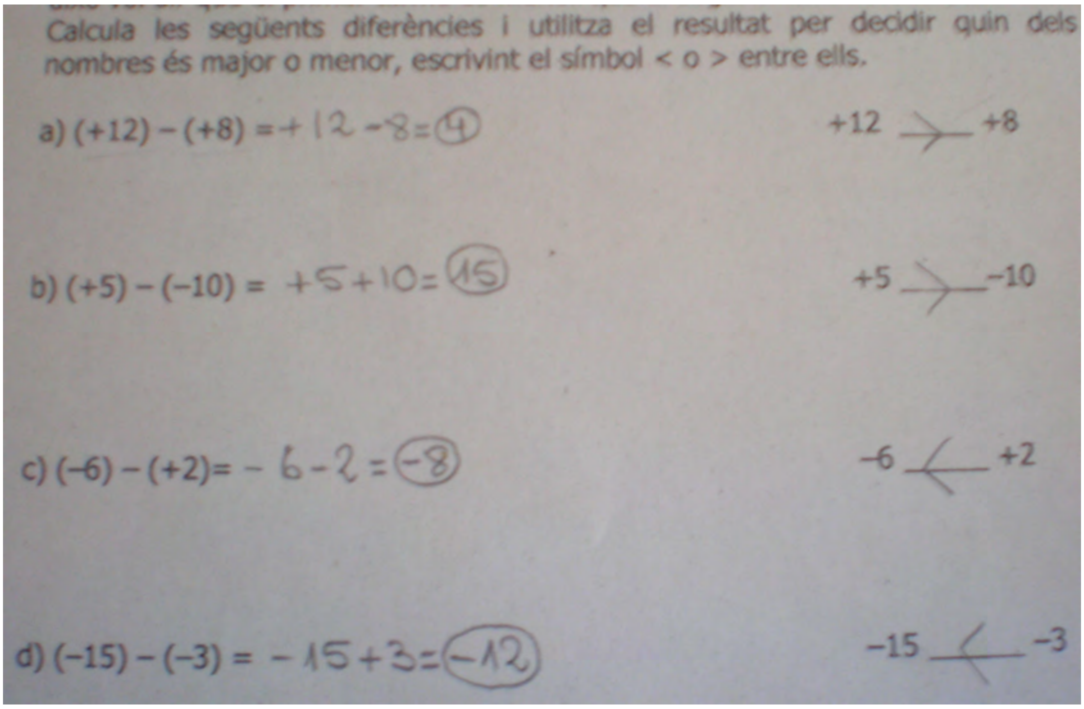
La profesora se ve obligada a advertir en cada grupo que una fórmula es una expresión que contiene letras, pero eso no ayuda a los alumnos a encontrar la respuesta. Al parecer, el problema lo crea la palabra ‘fórmula’ porque cuando finalmente les dice que escriban la diferencia, bastantes alumnos escriben T – t. Una vez aclarada esa parte de la tarea, la usan para encontrar las diferencias en los tres casos:

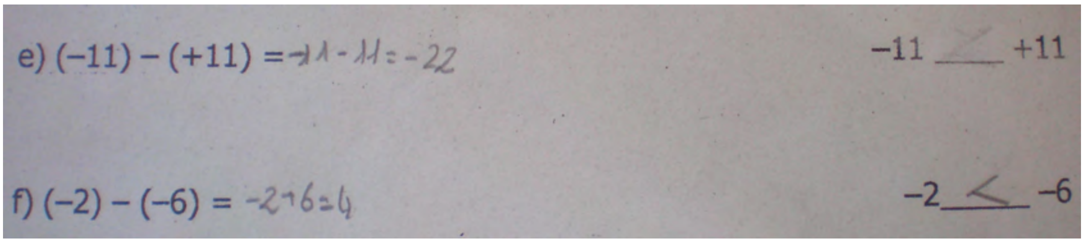


aunque algunos alumnos siguen sin entender la necesidad de utilizar en la fórmula los números con signo.



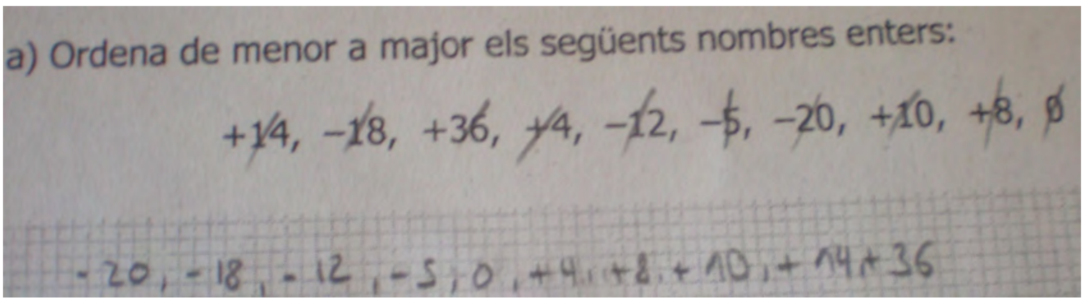
En el ejercicio 16, calculan las diferencias y completan las desigualdades sin dificultad, pero algunos alumnos no relacionan los dos hechos y, cuando se trata del orden entre dos números negativos, a pesar de obtener una diferencia positiva, dicen que es mayor el de mayor valor absoluto.

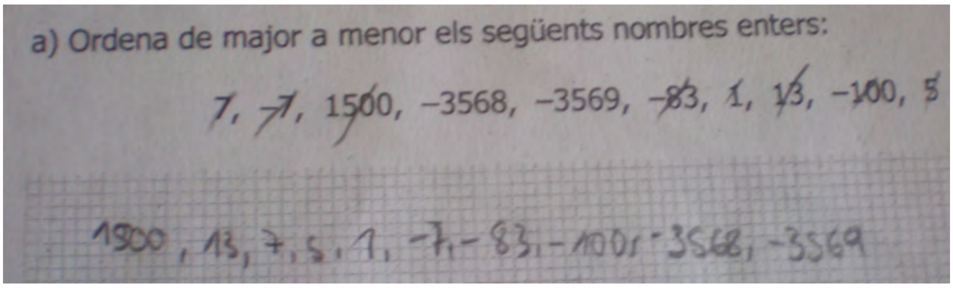




Cuando acaban el ejercicio 16, los alumnos preguntan qué tienen que hacer con los párrafos que aparecen a continuación. La profesora les contesta que deben leerlos con cuidado para entender bien lo que allí se dice. Algunos lo hacen pero los más se los saltan y pasan al ejercicio siguiente.

En el ejercicio 17 la única incidencia que se produce es que algunos alumnos ordenan los números negativos a partir de sus valores absolutos. En esos casos, la profesora les dice que calculen las diferencias para ver qué número es mayor.

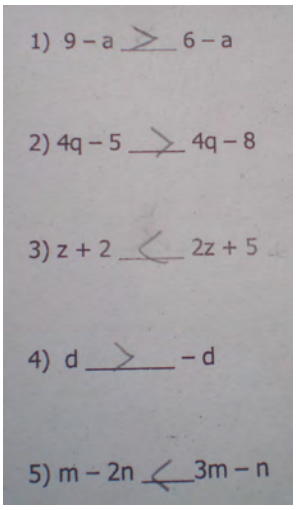



a) Ordena de major a menor els següents nombres enters:

7, −7, 1500, −3568, −3569, −83, 1, 13, −100, 5

1500, 13, 7, 5, 1, −7, −83, −100, −3568, −3569

Los grupos resuelven el apartado a) del ejercicio 18 con relativa prontitud dado que han resuelto un ejercicio similar hace pocos días.


1) 9 − a > 6 − a

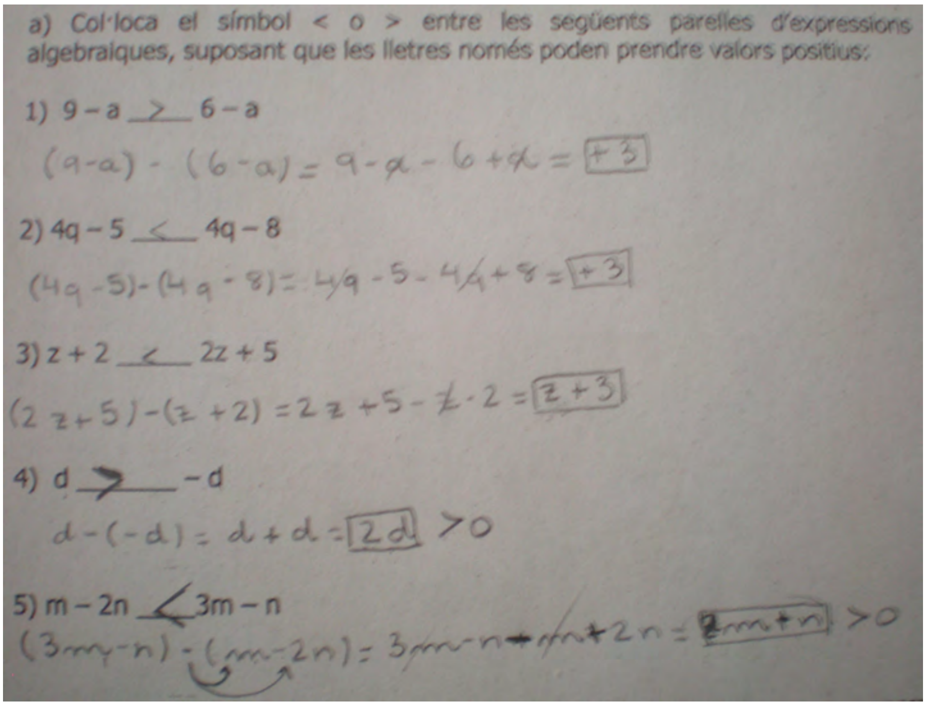
2) 4q − 5 > 4q − 8

3) z + 2 < 2z + 5

4) d > − d

5) m − 2n < 3m − n

En aquellos casos en que tienen dudas, la profesora les sugiere que calculen las diferencias, técnica que algunos alumnos utilizan en todos los casos.


a) Col·loca el símbol < o > entre les següents parelles d'expressions algebraiques, suposant que les lletres només poden prendre valors positius:

1) 9 − a > 6 − a

$(9-a)-(6-a) = 9-\cancel{a}-6+\cancel{a} = \boxed{+3}$

2) 4q − 5 < 4q − 8

$(4q-5)-(4q-8) = \cancel{4q}-5-\cancel{4q}+8 = \boxed{+3}$

3) z + 2 < 2z + 5

$(2z+5)-(z+2) = 2z+5-\cancel{z}-2 = \boxed{z+3}$

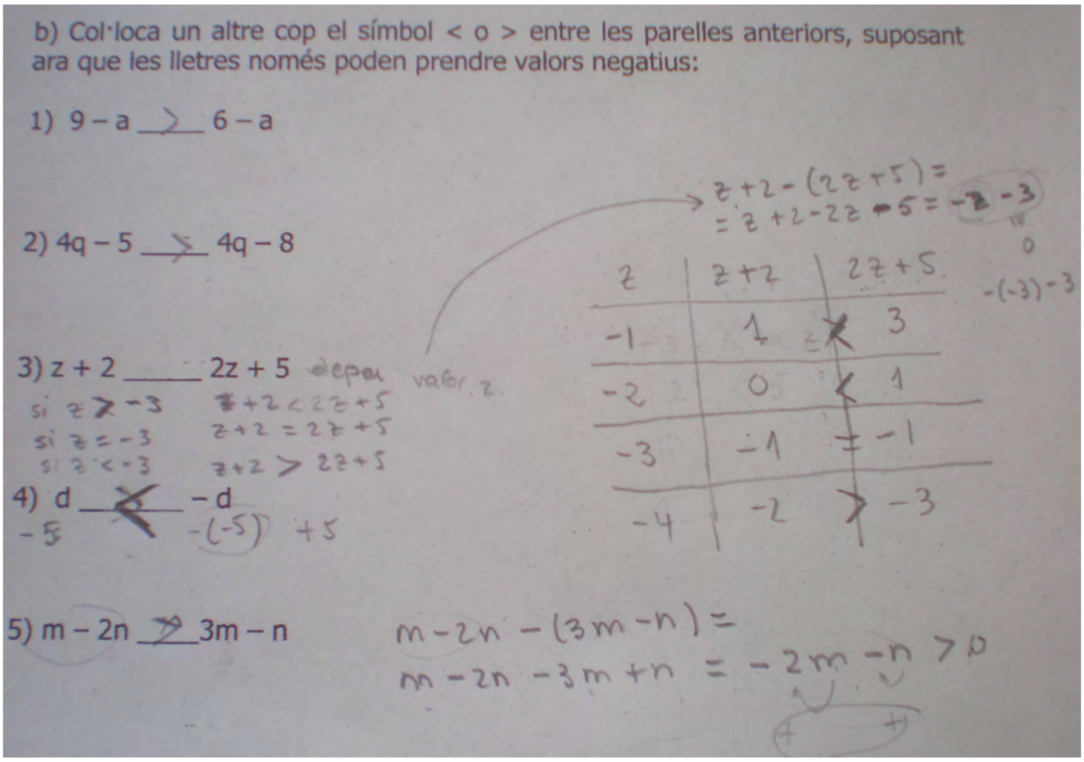
4) d > − d

$d-(-d) = d+d = \boxed{2d} > 0$

5) m − 2n < 3m − n

$(3m-n)-(m-2n) = 3m-n-m+2n = \boxed{2m+n} > 0$

En el apartado b) un grupo con ayuda de la profesora llega a la solución siguiente:



Al finalizar la sesión de clase, un grupo está en el ejercicio 19, tres grupos en distintos apartados del ejercicio 18, un grupo en el ejercicio 17 y otro en el ejercicio 16, aunque hay alumnos realizando un ejercicio distinto del que está haciendo su grupo. La profesora insta a los grupos y alumnos más retrasados a que trabajen en casa para alcanzar a sus compañeros.

Valoración

Se trata de una clase muy productiva, aunque la dispersión de los grupos hace que bastantes alumnos empiecen a trabajar en parejas o en solitario, sobrecargando con ello a la profesora.

El apartado b) del ejercicio 15 vuelve a poner de manifiesto la necesidad de sustituir las letras con números con signo para poder unificar las fórmulas, hecho al que los alumnos comienzan a mostrarse receptivos.

En cuanto al ejercicio 16, consolida la relación existente entre una desigualdad y la correspondiente diferencia de sus miembros y proporciona a los alumnos un buen instrumento para decidir sobre el orden de los números enteros en los casos dudosos.

Los párrafos donde se institucionaliza el número entero no juegan ningún papel hasta que la profesora da una explicación general porque los alumnos no están acostumbrados a leer textos tan largos si no se plantea una tarea relacionada con ellos.

SESIÓN 8: 19/11/09 (JUEVES, 15:30-16:30h)

La clase se dedica inicialmente a la corrección de ejercicios. Se empieza por los ejercicios 8 y 9 que habían quedado pendientes. La profesora resuelve en la pizarra el ejercicio 8, recordando la propiedad distributiva.

Primer rectangle	$A = 4b$
Segon rectangle	$A = 6(b - 1) = 6b - 6$
Diferència	$6b - 6 - 4b = 2b - 6$

Después hace una tabla de valores y finalmente llega al resultado

Augmenta si $b > 3$
Queda igual si $b = 3$
Disminueix si $b < 3$

En el ejercicio 9 salen varios alumnos a realizar sus distintos apartados.

$$a - 3(b - 7 + 2a) = a - 3b - 21 + 6a$$

La profesora pregunta a la clase si está bien. Varios alumnos contestan que hay que cambiar los signos. El alumno de la pizarra rectifica:

$$a - 3(b - 7 + 2a) = a - 3b + 21 - 6a = 5a - 3b + 21$$

La profesora tiene que intervenir nuevamente hasta que el alumno escribe bien el resultado

$$a - 3(b - 7 + 2a) = a - 3b + 21 - 6a = - 5a - 3b + 21$$

El alumno y la alumna que simplifican las otras expresiones lo hacen sin incidencias.

Después se pasa a corregir el ejercicio 12 porque los ejercicios 10 y 11 ya habían sido explicados en la pizarra en una sesión anterior. Para cada apartado la profesora dicta el resultado final y pregunta si alguien ha obtenido un resultado distinto. En el apartado E3) una alumna dice que a ella no le ha salido lo mismo y la profesora lo resuelve en la pizarra:

$$2(6 - a) = 2(6 - (-4)) = 2(6 +4) = 2\cdot10 = 20$$

La alumna dice que no ha puesto un paréntesis y que por eso se ha equivocado. La profesora recuerda lo importante que es no olvidarse de poner los paréntesis.

El ejercicio 13 se corrige de la misma manera que el anterior. Un alumno pregunta por el apartado E5) y la profesora lo escribe en la pizarra:

$$((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1)) = (-5 - 3 + 1) - (-5 + 3 - 1) =$$
$$-5 - 3 + 1 + 5 - 3 + 1 = -4$$

Ante una observación del alumno, la profesora insiste en que, en las expresiones que tienen paréntesis encajados, siempre hay que empezar a resolver los paréntesis "de dentro a fuera".

También las frases del ejercicio 14 las dice la profesora sin ningún comentario por parte de los alumnos. En cuanto al ejercicio 15, dibuja un termómetro en vertical, marca el cero y pregunta a los alumnos dónde se sitúan las temperaturas por debajo de cero. Una vez aclarado este extremo, pregunta cómo se suelen representar las temperaturas por debajo de cero. Los alumnos responden que "con un 'menos' delante" y la profesora termina de representar el termómetro en la pizarra.

A continuación, con el concurso de los alumnos y dibujando las distancias entre temperaturas en la pizarra, establece las diferencias de temperatura solicitadas en los primeros apartados, haciendo notar que para obtener esa diferencia, unas veces hay que sumar las temperaturas y otras, restarlas.

Después escribe la diferencia de temperaturas T – t y calcula las diferencias de los apartados anteriores utilizando la fórmula:

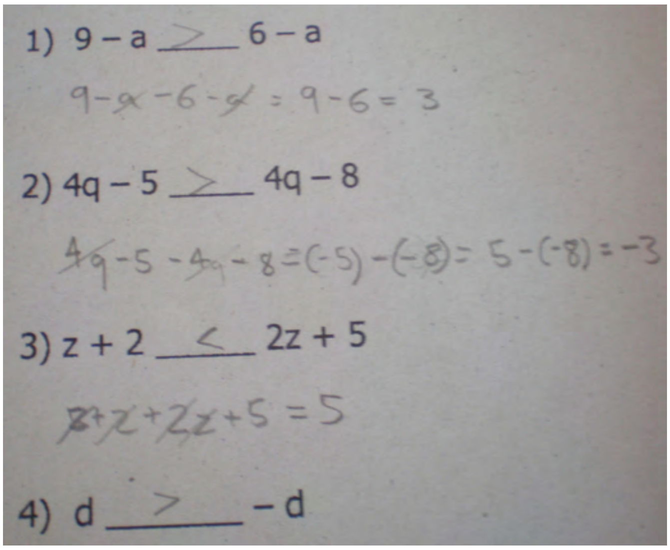
$$T - t = 6 - (-5) = 6 + 5 = 11$$
$$T - t = 6 - 2 = 5$$
$$T - t = (-3) - (-8) = -3 + 8 = 5$$

y muestra que, si sustituimos las letras por números con signo, con una sola fórmula podemos obtener siempre la diferencia de temperaturas, pues el signo ya convierte la operación en una suma o en una resta, según el caso.

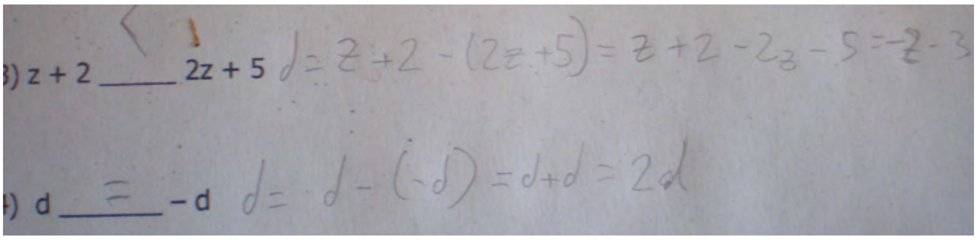
También pregunta por qué salen todas las diferencias positivas. Algunos alumnos contestan que porque el primer término de la resta es mayor que el segundo. "¿Qué pasaría entonces si la diferencia la escribimos t – T?" –pregunta la profesora. "Que saldrían negativas" -contesta un alumno.

Los alumnos empiezan a estar cansados de tanta corrección y la profesora propone que sigan trabajando en grupos los 20 minutos de clase que quedan.

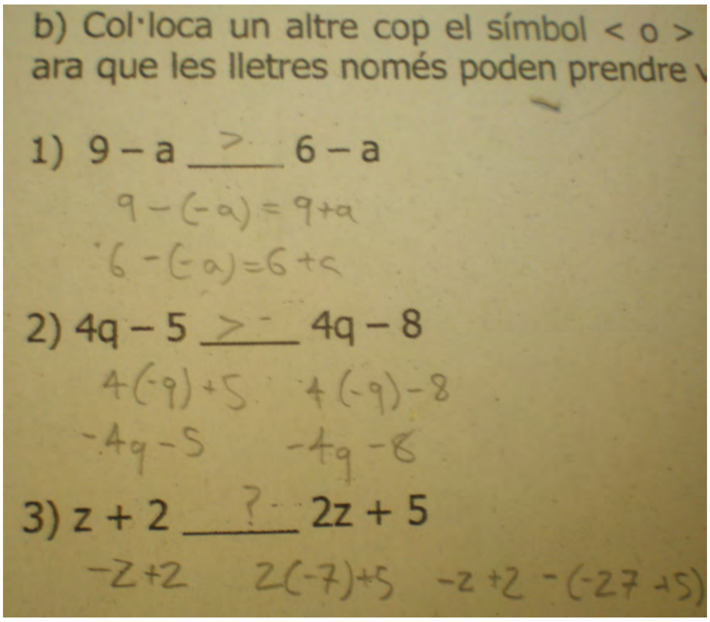
En el ejercicio 18, la contestación a los apartados a) y b) se ve facilitada por la utilización de la técnica de calcular la diferencia y estudiar si es mayor o menor que cero, siempre que el alumno no se equivoque en los cálculos.



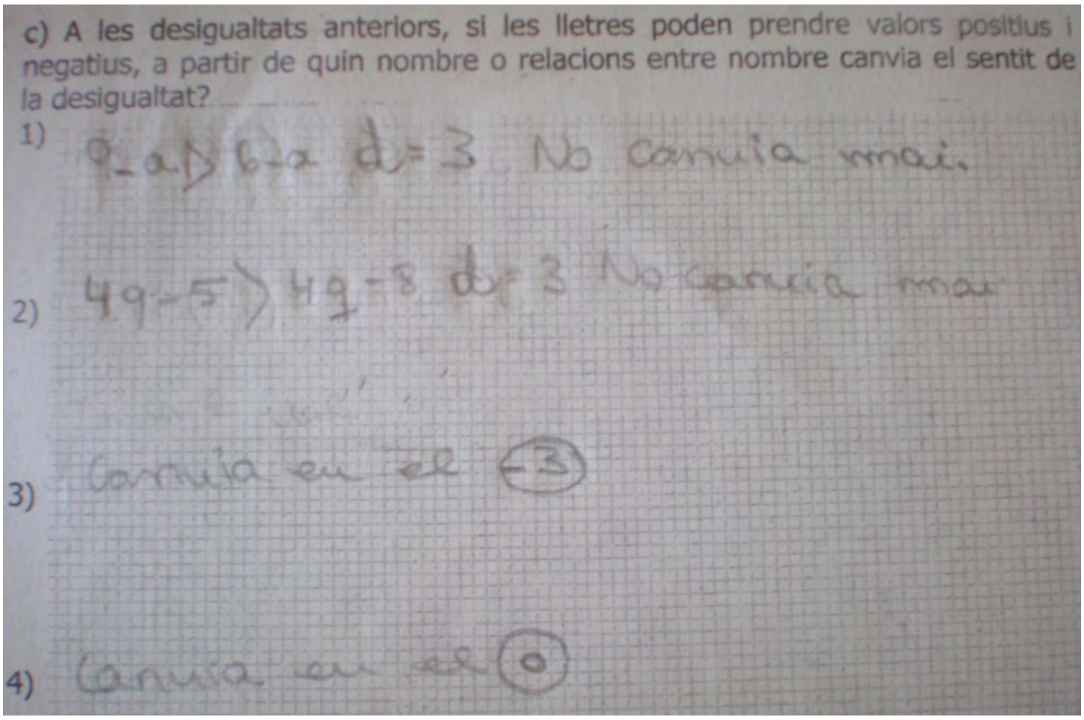
En algunos casos, el cálculo de la diferencia lleva a falsas deducciones. En el ejemplo siguiente, la utilización de la letra d para indicar la diferencia crea problemas en un apartado en el que se utiliza también la letra d para indicar la variable.

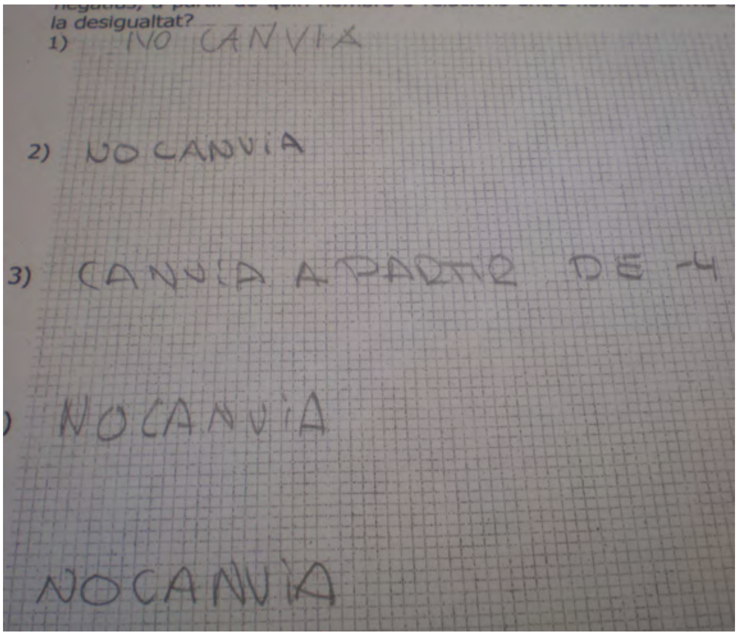


En el apartado b), algunos alumnos para solventar el hecho de que las letras toman valores negativos las sustituyen por sus opuestas.

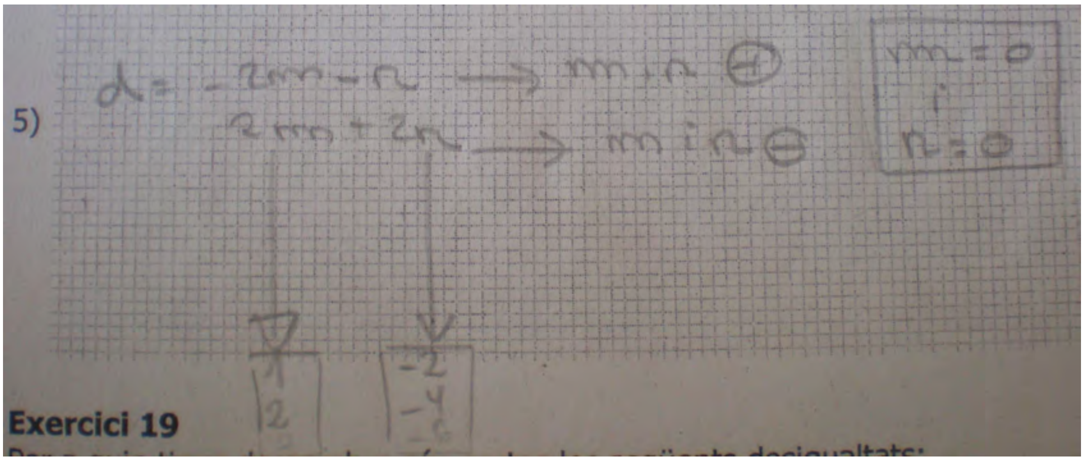


Una vez que se ha respondido a los apartados a) y b), los alumnos están en condiciones de afrontar el apartado c). Unos alumnos contestan correctamente, mientras que otros cometen alguna que otra equivocación.

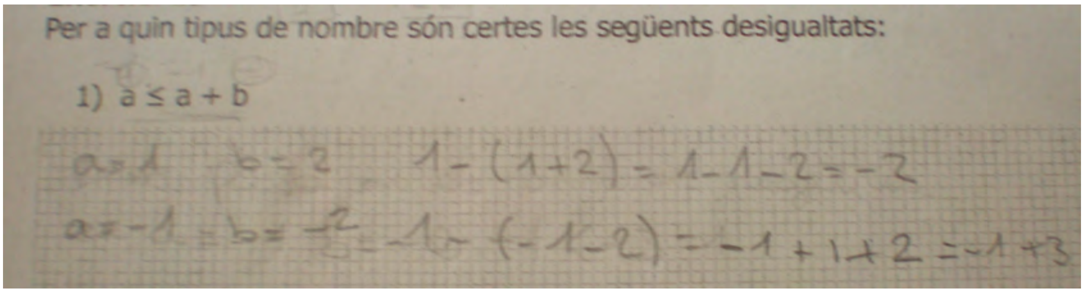


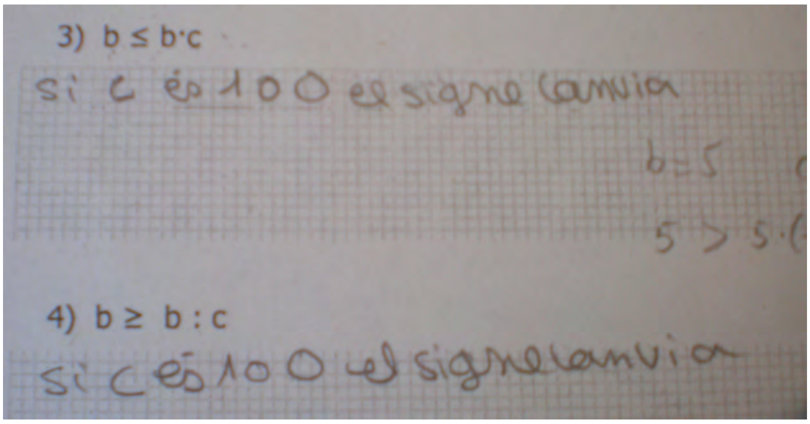


El apartado c5) en general no saben contestarlo. Algún alumno es capaz de dar alguna solución parcial. La profesora, dada la dificultad de la respuesta, no corrige los errores de los alumnos.

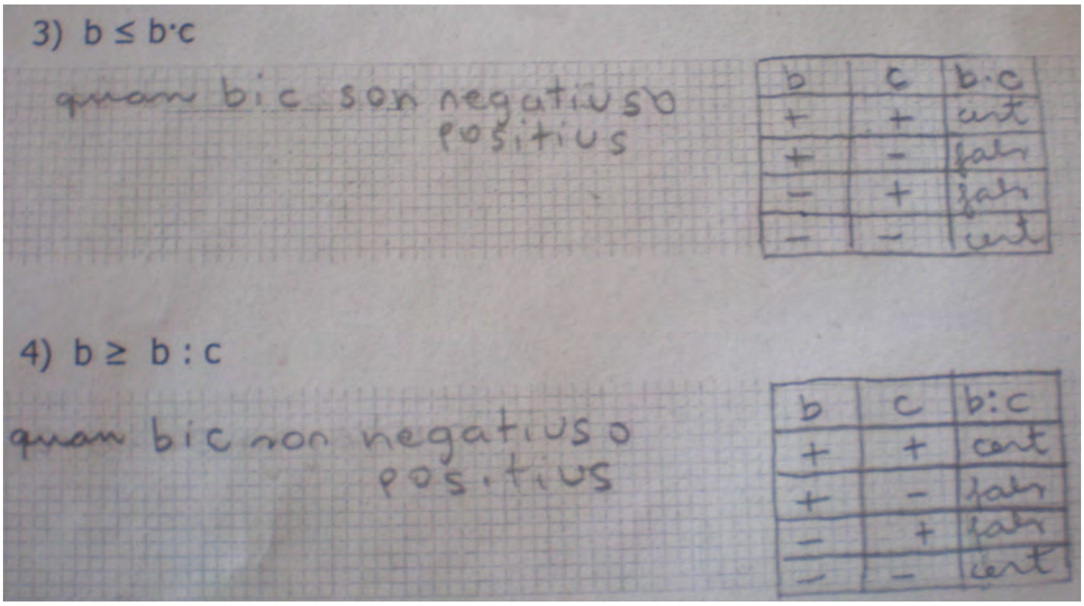


El grupo que está más adelantado inicia el ejercicio 19, pero no entienden a qué se refiere el enunciado con la expresión tipo de números y se dedican a dar valores o tratan de referir este ejercicio al anterior.





Ante las explicaciones de la profesora, indicando que la expresión “tipo de números” se refiere a si son positivos o negativos, el grupo consigue llegar a esta solución:



Al término de la sesión de clase, todos los grupos están en distintas fases del ejercicio 18 y un grupo ha acabado el ejercicio 19. La profesora les anuncia que el jueves siguiente tendrán el examen y que para entonces tienen que tener hechos todos los ejercicios.

Valoración

Habría que buscar otra manera de efectuar la corrección de los ejercicios en la pizarra. Los alumnos acaban cansándose y dejando de atender cuando ésta ocupa gran parte de la hora de clase. Por otro lado, es complicado interrumpir las clases con frecuencia para ir haciendo correcciones parciales porque se rompe el ritmo de trabajo de la clase y se resuelven ejercicios a los que algunos grupos todavía no han llegado, con lo que se les priva de la posibilidad de hacerlos por sí mismos.

El ejercicio 18 resulta muy complejo, pero es de una gran riqueza conceptual. Los grupos tardan alrededor de una hora en realizarlo, tiempo que necesitan para darse cuenta de que al pasar de positivos a negativos algunos tipos de desigualdades cambian, mientras otros permanecen. Empieza así a plantearse el hecho de que la asunción de nuevos números supone la modificación de las propiedades que tradicionalmente se les adjudica.

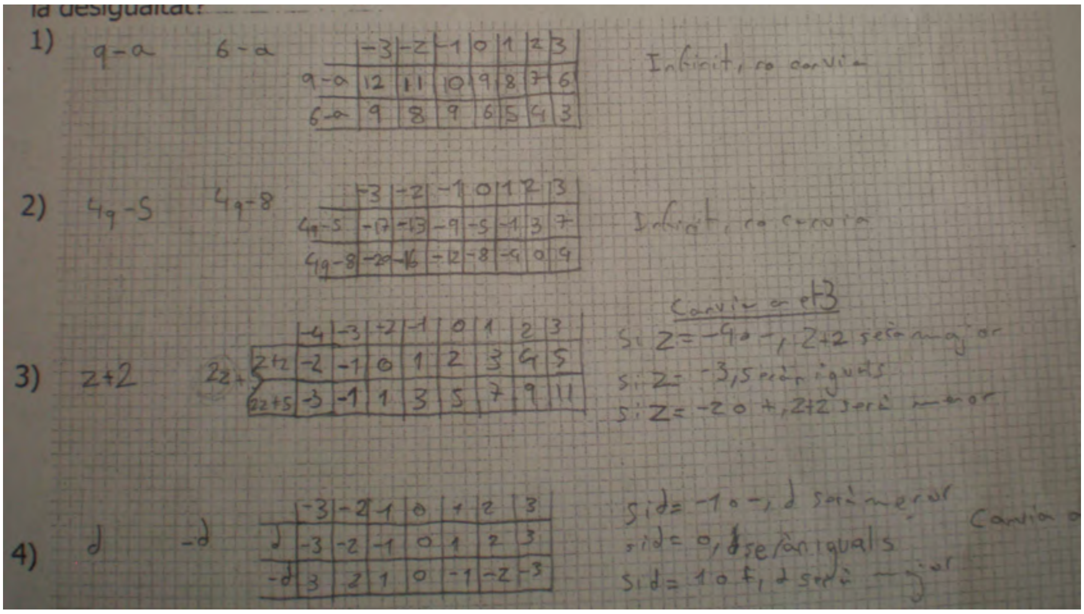
Dada la complejidad de la desigualdad planteada en el apartado 5) del ejercicio 18, no se puede esperar que los alumnos den una solución completa en el caso c), pero si pueden darla en los casos a) y b).

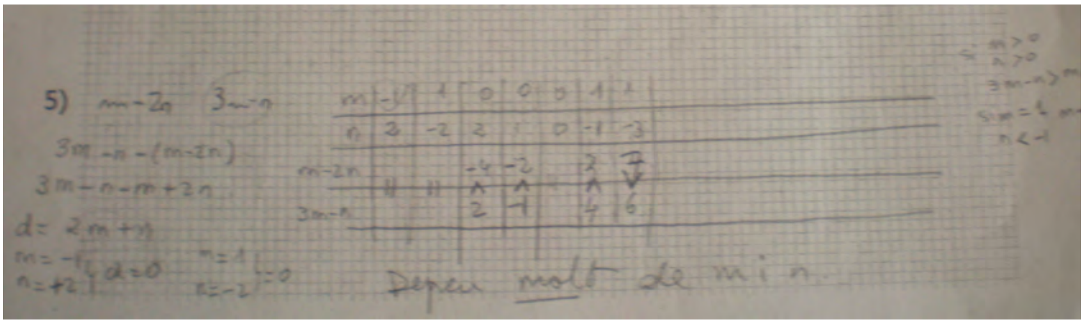
El enunciado del ejercicio 19 lleva a confusión por lo que debería de ser modificado. Además, desde un punto de vista matemático, sería más correcto dejarlo para el momento en que se introduzcan los números racionales, pues entonces ya se podría decir que $b \leq bc$ siempre que $c \geq 1$, mientras que en este momento la respuesta que hay que aceptar es que $b \leq bc$ siempre que $c \geq 0$ porque los alumnos solo están pensando en números enteros.

SESIÓN 9: 23/11/09 (LUNES, 9-10h)

Los grupos siguen trabajando en el ejercicio 18, salvo el grupo que empieza el ejercicio 20. La profesora les dice que una vez terminado el ejercicio 18 pasen todos al ejercicio 20 sin hacer el 19.

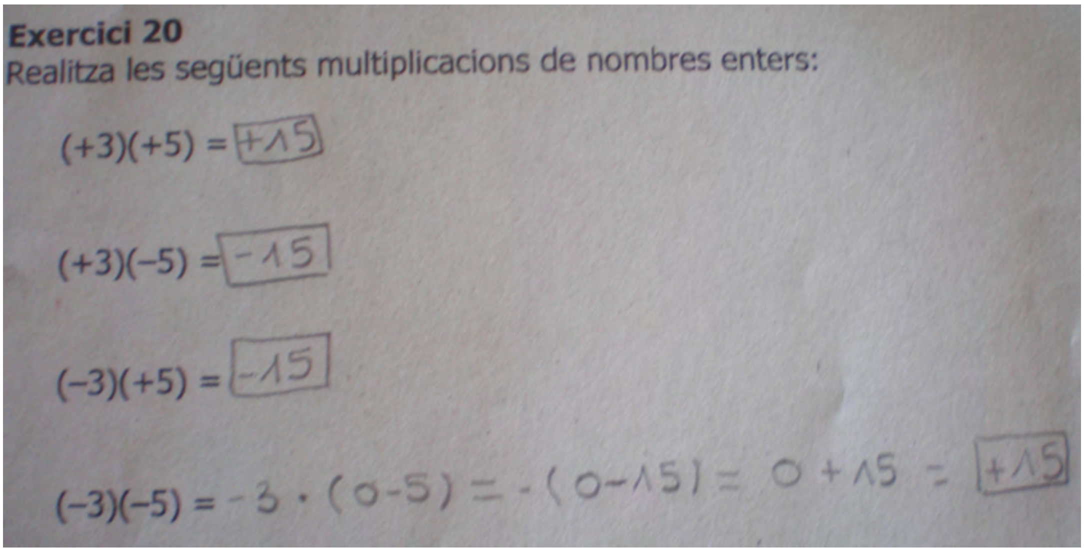
A los grupos que están todavía resolviendo el primer apartado del ejercicio 18, les lleva gran parte de la hora terminarlo, pero finalmente lo consiguen. Un grupo resuelve el apartado c) haciendo tablas de valores de todos los casos.





En el ejercicio 20 aparecen nuevas dificultades, pues los alumnos no saben cómo hacer las multiplicaciones. La profesora recurre a relacionar estos productos con los obtenidos en las expresiones algebraicas: (–3)(–5) = –3(0 – 5) = –(0 – 15) = –0 + 15 = +15, pero no todos los alumnos aceptan el razonamiento, no entienden por qué (–3)(–5) = –3(–5) y está el problema añadido de que muchos alumnos creen que 3·0 = 3.

Algunos alumnos reproducen el razonamiento de la profesora


Exercici 20
Realitza les següents multiplicacions de nombres enters:

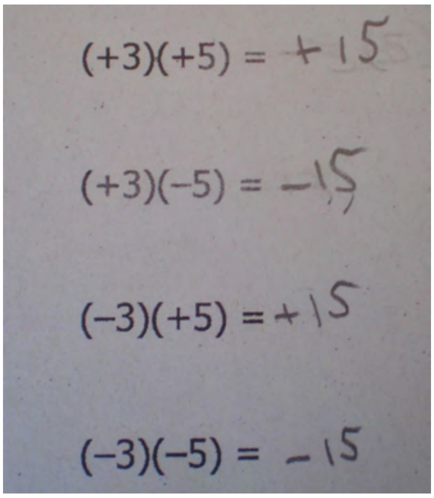
$(+3)(+5) = \boxed{+15}$

$(+3)(-5) = \boxed{-15}$

$(-3)(+5) = \boxed{-15}$

$(-3)(-5) = -3 \cdot (0-5) = -(0-15) = 0+15 = \boxed{+15}$

pero otros toman decisiones diferentes.

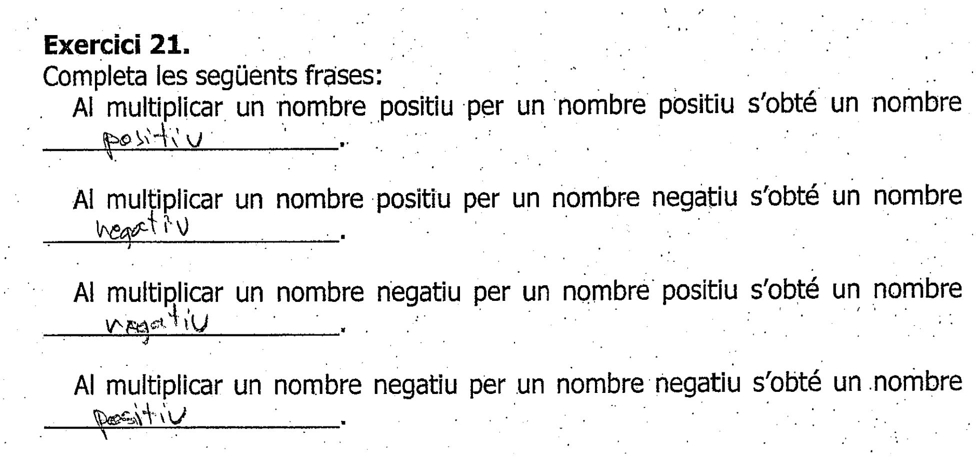

$(+3)(+5) = +15$

$(+3)(-5) = -15$

$(-3)(+5) = +15$

$(-3)(-5) = -15$

Los grupos que llegan a resolver los ejercicios 21, 22 y 23, lo hacen correctamente porque para entonces la profesora ya ha impuesto su criterio de que "menos por menos da más".

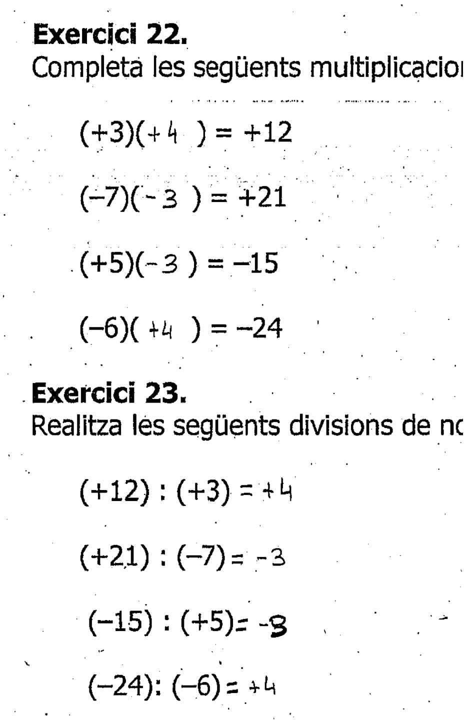

Exercici 21.
Completa les següents frases:

Al multiplicar un nombre positiu per un nombre positiu s'obté un nombre positiu.

Al multiplicar un nombre positiu per un nombre negatiu s'obté un nombre negatiu.

Al multiplicar un nombre negatiu per un nombre positiu s'obté un nombre negatiu.

Al multiplicar un nombre negatiu per un nombre negatiu s'obté un nombre positiu.



Exercici 22.
Completa les següents multiplicacio

(+3)(+4) = +12

(–7)(-3) = +21

(+5)(-3) = –15

(–6)(+4) = –24

Exercici 23.
Realitza les següents divisions de n

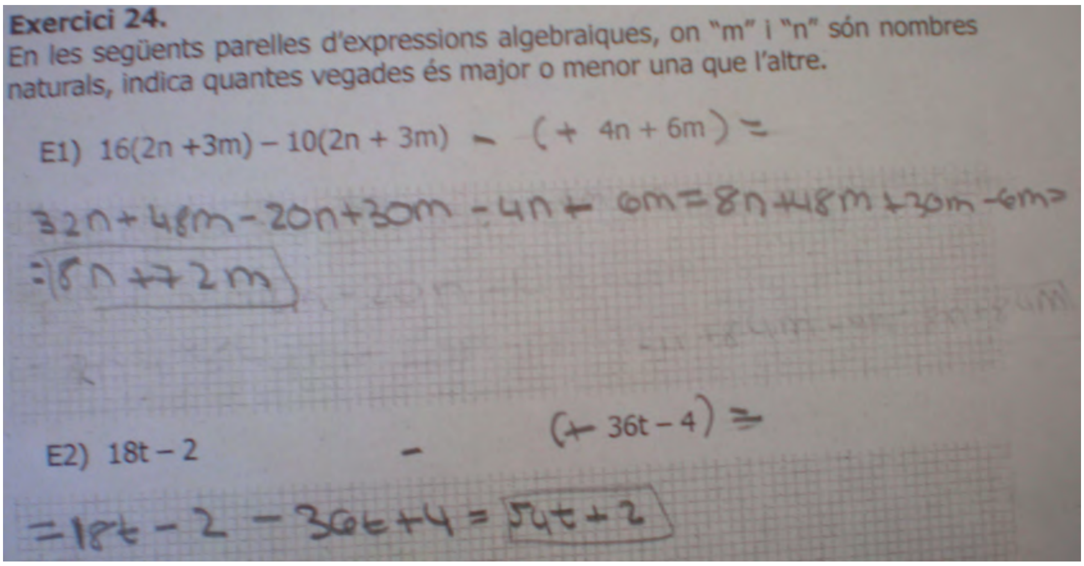
(+12) : (+3) = +4

(+21) : (–7) = -3

(–15) : (+5) = -3

(–24): (–6) = +4

Solamente un grupo llega al ejercicio 24 e inicialmente lo resuelve como si se tratase de una comparación aditiva, calculando la diferencia entre las dos expresiones:



Exercici 24.
En les següents parelles d'expressions algebraiques, on "m" i "n" són nombres naturals, indica quantes vegades és major o menor una que l'altre.

E1) 16(2n +3m) – 10(2n + 3m) – (+ 4n + 6m) =

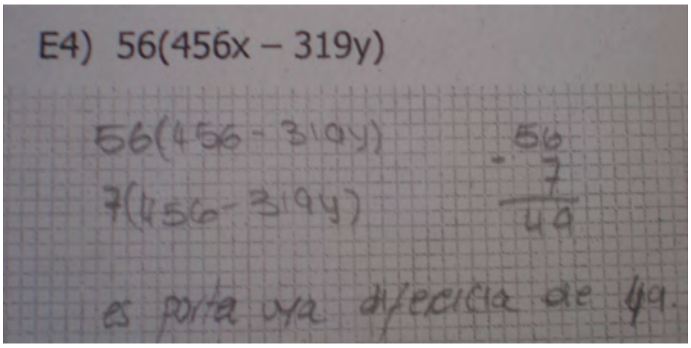
32n+48m−20n+30m −4n+ 6m=8n+48m+30m−6m=

$=\boxed{8n+72m}$

E2) 18t – 2 – (+ 36t – 4) =

$=18t-2-36t+4=\boxed{54t+2}$

En el apartado E4) un alumno se da cuenta de que solo necesita comparar los números que multiplican a los paréntesis, puesto que éstos contienen la misma expresión, pero efectúa la diferencia en vez de hacer el cociente.



La profesora les recuerda que se trata de una comparación multiplicativa, no aditiva, y con esa intervención el grupo corrige sus respuestas.

Al finalizar la sesión de clase, un grupo ha resuelto todos los ejercicios, cuatro grupos han acabado el ejercicio 22 o el 23 y un grupo se encuentra resolviendo el ejercicio 20.

La profesora dice que todos los alumnos que no hayan terminado los ejercicios deberán completarlos en casa y que se corregirán todos en la clase del día siguiente. También recuerda a los alumnos que tienen que terminar de elaborar el dossier y entregarlo la semana siguiente.

Valoración

De nuevo los redactores del material han subestimado el salto que supone pasar de la multiplicación de expresiones algebraicas a la multiplicación de números enteros. En la multiplicación de enteros el signo tiene un sentido predicativo, mientras que en la manipulación de expresiones algebraicas los signos se han trabajado con un sentido operativo: indican que los términos son sumandos o sustraendos o bien que un término es opuesto de otro. De alguna manera, esta diferencia de sentido es percibida por los alumnos y hace que se nieguen a aceptar fácilmente la analogía entre una y otra situación.

Por otro lado, la larga resolución del ejercicio 18 retrasa la llegada a los ejercicios referentes al producto de enteros que, como consecuencia, se resuelven de una manera rápida y marginal. En cuanto al ejercicio 24, su lugar está en el material de repaso, pues se trata de comparaciones multiplicativas entre expresiones algebraicas que ya fueron trabajadas en el material de 1º de ESO.

SESIÓN 10: 24/11/09 (MARTES, 11:30-12:30h)

Es una sesión de corrección de ejercicios y se empieza por el ejercicio 16. Los alumnos salen a la pizarra y cada uno calcula una diferencia y establece el sentido de la desigualdad correspondiente.

En el apartado e) una alumna dice que no entiende por qué –11 es menor que +11. La profesora le señala la diferencia en la pizarra:

$$\boxed{(-11) - (+11) = -11 - 11 = -22}$$

haciéndole notar que es negativa. La alumna no parece entender el argumento de la profesora y ésta le pregunta: “¿Cuánto es cinco menos cuatro?” La alumna responde que uno. “Y cuál es mayor?” –prosigue la profesora. “El cinco” –dice la alumna. Entonces la profesora escribe:

$5 - 4 = 1$	El més gran és el primer

A continuación la profesora vuelve a preguntar: “¿Y cuatro menos cinco?”, y lo escribe en la pizarra. La alumna responde que menos uno.

$$\boxed{4 - 5 = -1}$$

“Y cuál es mayor?”. “El cinco” –contesta la alumna. La profesora escribe:

$4 - 5 = -1$	El més gran és el segon

La alumna dice que ahora ya lo entiende.

A continuación la profesora explica que en el cálculo algebraico nos encontramos con unos nuevos objetos matemáticos: los sumandos y los sustraendos representados por números o letras precedidos del signo ‘más’ o del signo ‘menos’, y que por necesidades del cálculo algebraico hemos aprendido a sumarlos, restarlos, multiplicarlos e, incluso a ordenarlos. En resumen, que hacemos con esos objetos lo mismo que se hace con los número que ya conocemos. Por eso los matemáticos decidieron que esos objetos también fueran números. Por consiguiente, a los números naturales precedidos de un signo ‘más’ o ‘menos’ también se les considera números y, a partir de ahora, los llamaremos números enteros, positivos o negativos según el signo que preceda al número natural.

Después la profesora dibuja la recta numérica y coloca en ella los números enteros, añadiendo que los números enteros positivos son lo mismo que los números naturales, así que los números enteros son los naturales, el cero y los enteros negativos.

Acabada la explicación, que los alumnos oyen sin comentarios, continúa la corrección de ejercicios. La profesora aprovecha el ejercicio 17 para indicar que el orden de los enteros de menor a mayor sigue el movimiento sobre la recta real de izquierda a derecha.

En la corrección del ejercicio 18, la profesora corrige a la vez los tres casos: letras que pueden tomar valores positivos, negativos o ambos. En los apartados 1 y 2 calcula las diferencias y establece el sentido de las desigualdades, haciendo notar que salen siempre positivas o negativas, independientemente del valor de las letras, por lo que las desigualdades no cambian de sentido en ningún caso. Los alumnos se muestran de acuerdo.

En el apartado 3 escribe la diferencia en la pizarra:

$$\boxed{(2z + 5) - (z + 2) = 2z + 5 - z - 2 = z + 3}$$

y dice que ahora sí que la diferencia depende del valor de la letra y pregunta que cuándo será esa diferencia positiva o negativa. Un alumno levanta la mano y contesta de palabra y con toda precisión lo siguiente, que la profesora copia en la pizarra:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \text{Si } z > -3 & z + 3 > 0 & z + 2 < 2z + 5 \\ \text{Si } z = -3 & z + 3 = 0 & z + 2 = 2z + 5 \\ \text{Si } z < -3 & z + 3 < 0 & z + 2 > 2z + 5 \end{array}}$$

Varios niños dicen que no lo entienden y la profesora hace una tabla de valores:

z	z + 2		2z + 5
3	5	<	11
2	4	<	9
1	3	<	7
0	2	<	5
-1	1	<	3
-2	0	<	1
-3	-1	=	-1
-4	-2	>	-3
-5	-3	>	-5

Los alumnos se muestran conformes y se continúa con la corrección del ejercicio.

En el apartado 4) no es necesario hacer una tabla de valores pues los alumnos parecen entender que si la diferencia es 2d, será positiva o negativa en función de que d lo sea. En cambio, el apartado 5) solo se resuelve parcialmente. La profesora escribe en la pizarra la diferencia:

$$\boxed{(3m - n) - (m - 2n) = 3m - n - m + 2n = 2m + n}$$

y pregunta qué pasa si m y n son positivos. Varios niños contestan que la diferencia es positiva, pero otros no lo ven claro. La profesora da valores positivos a m y n y se comprueba que 2m + n es positivo. Después se sigue el mismo procedimiento con m y n negativos. Finalmente la profesora dice que el caso de que m y n sean uno positivo y otro negativo es muy difícil y que aprenderán a resolverlo en otro curso.

Finalmente, la profesora dicta de viva voz las respuestas a los ejercicios 20, 21, 22 y 23, preguntando si alguien ha respondido de forma diferente. A estas alturas los alumnos están cansados de tanta corrección y los que tienen alguna respuesta diferente se limitan a corregirla sin preguntar nada a la profesora. Ésta dice que el ejercicio 24 no se corrige porque no da tiempo y que no entra para el examen. Y con alguna pregunta de los alumnos sobre las características del examen del jueves próximo acaba la sesión de clase.

Valoración

Aunque la sesión de corrección de ejercicios resulta de nuevo demasiado larga, ayuda a los alumnos a asumir que las relaciones entre expresiones algebraicas que estaban acostumbrados a establecer cuando los valores de las letras solo podían ser positivos, pueden ser distintas cuando se considera la posibilidad de que la letra tome valores negativos.

El hecho de que la corrección de los ejercicios sobre el producto de enteros se haga al final, con los alumnos y la profesora cansados, sigue incidiendo en el poco tiempo que se le ha dedicado y pone en duda su asimilación.

SESIÓN 11: 26/11/09 (JUEVES, 15:30-16:30h)

Ninguna de las observadoras está presente en esta sesión de clase. La profesora reparte el examen y los alumnos lo realizan individualmente, teniendo de tiempo toda la hora de clase.

ANEXO IV.9

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. 1º ESO

Ejercicio 1.

El lunes es la inauguración de la tienda de flores de Margarita y entran varios clientes a comprar rosas. El primero compra 2, la segunda, 12 y el tercero, 6. La dueña de la tienda encarga 24 rosas más que le traen poco después. Todavía vende 15 rosas más. Antes de cerrar la tienda encarga otras 18 rosas para el día siguiente que le traen nada más abrir la tienda.

a) ¿Cuántas rosas tiene para vender el martes? Simplifica todo lo que puedas la expresión algebraica que obtienes como resultado.

b) ¿Tendrá más o menos rosas que el día anterior?

c) Completa la tabla siguiente sobre el número de rosas que había en la floristería.

Nº inicial de rosas el lunes	Nº inicial de rosas el martes
20	
	38
n	
	m

Ejercicio 2.
Andrea tiene 8 euros más que Carlos y Alberto 5 euros menos que Andrea.

a) ¿Quién tiene más euros, Carlos o Alberto? ¿Y cuántos tiene de más o de menos?

b) Completa la tabla siguiente sobre el dinero que tienen Andrea, Carlos y Alberto.

Dinero de Andrea	Dinero de Carlos	Dinero de Alberto
15		
	10	
	p	
		q

c) Andrea y Alberto van a comprar un regalo. Alberto pone todo su dinero y Andrea la misma cantidad que Alberto. ¿Cuánto dinero le queda a Andrea?

Ejercicio 3.
Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos:

a) $a - b + 143 + 79 + b + 2a - 80 - 143 + 528$

b) $27 + (4 - x) - (y - 12) - 25 - 2$

Ejercicio 4.
Ordena de menor a mayor las siguientes expresiones algebraicas y calcula su diferencia

a) $c - 14$ es ________________ $c - 8$

Diferencia

b) $3t + 4$ es ________________ $t + 6$

Diferencia

	EXAMEN 1º ESO. TABLA DE ÉXITOS									
ALUMNO	1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	TOTAL
1	1	1		1	1	1		1	1		7
2				1	1	1	1		1		5
3	1	1		1	1	1					5
4		1	1	1					1		4
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
6	1	1	1	1	1	1			1		7
7	1		1	1	1	1	1		1		7
8	1	1	1		1	1			1		6
9	1	1	1	1	1						5
10				1					1		2
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	10
12	1	1	1	1	1	1	1		1		8
13	1	1	1	1		1			1		6
14	1	1	1	1	1	1			1		7
15			1	1							2
16	1	1	1	1	1	1			1		7
17					1	1			1		3
18				1							1
19	1		1	1	1		1		1		6
20	1	1	1	1	1		1		1		7
21	1		1	1		1					4
22	1	1	1	1	1	1	1		1		8
23	1			1	1	1			1		5
24									1		1
25	1	1	1	1	1	1	1	1	1		9
26	1	1	1	1	1	1	1				7
27	1	1	1	1	1		1	1			7
28	1	1	1	1	1	1		1	1		8
29	1	1	1		1		1	1	1		7
30	1	1							1		3
31	1	1	1	1	1	1	1	1	1		9
TOTAL	24	21	22	26	23	20	13	8	24	2	
PORCENTAJE	77,42	67,74	70,97	83,87	74,19	64,52	41,94	25,81	77,42	6,45	

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIO 1a

Estrategia 1: Escriben la expresión algebraica correspondiente al programa de cálculo aritmético que resuelve el problema y la simplifican.

Estrategia 2: Escriben una primera expresión algebraica parcial, es decir, que simboliza una parte del programa de cálculo, la simplifican y posteriormente van simbolizando el resto del programa de cálculo hasta obtener la expresión algebraica final.

Estrategia 3: Escriben la expresión algebraica final sin decir cómo la obtienen o escriben la expresión algebraica inicial, pero terminan dando como solución un valor numérico.

Estrategia 4: Resuelven el problema aritméticamente, es decir, sin simbolizar algebraicamente el programa de cálculo.

	EJERCICIO 1a				
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4
1	1	1			
2			1		
3	1			1	
4			1		
5	1	1			
6	1		1		
7	1	1			
8	1	1			
9	1	1			
10			1		
11	1		1		
12	1	1			
13	1		1		
14	1	1			
15		1			
16	1	1			
17			1		
18				1	
19	1	1			
20	1	1			
21	1	1			
22	1	1			
23	1	1			
24					1
25	1		1		
26	1	1			
27	1	1			
28	1	1			
29	1	1			
30	1				1
31	1	1			
TOTAL	24	19	8	2	2
PORCENTAJE	77,42	61,29	25,81	6,45	6,45

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIOS 1b y 1c

EJERCICIO 1b

Estrategia 1: Contestan de manera coherente con la solución obtenida en 1a.

Estrategia 2: Contestan contradiciendo la solución obtenida en 1a.

Estrategia 3: No contestan

EJERCICIO 1c

Estrategia 1: Completan la tabla correctamente, habiendo obtenido también la solución correcta en 1a.

Estrategia 2: Se equivocan en los resultados de la tabla, habiendo obtenido la solución correcta en 1a, o completan la tabla correctamente, habiendo obtenido una solución incorrecta en 1a.

Estrategia 3: Completan la tabla incorrectamente, contradiciendo la solución obtenida en 1a, incorrecta a su vez.

	EJERCICIO 1b			EJERCICIO 1c		
ALUMNO	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 1	EST. 2	EST. 3
1	1				1	
2		1				1
3	1				1	
4	1				1	
5	1			1		
6	1			1		
7		1		1		
8	1			1		
9	1			1		
10		1				1
11	1			1		
12	1			1		
13	1			1		
14	1			1		
15			1	1		
16	1			1		
17		1				1
18		1			1	
19		1		1		
20	1			1		
21			1	1		
22	1			1		
23		1			1	
24		1				1
25	1			1		
26	1			1		
27	1			1		
28	1			1		
29	1			1		
30	1				1	
31	1			1		
TOTAL	21	8	2	21	6	4
PORCENTAJE	67,74	25,81	6,45	67,74	19,35	12,90

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIO 2

EJERCICIO 2a

Estrategia 1: Contestan representando algebraicamente el dinero que tiene cada uno.

Estrategia 2: Lo resuelven aritméticamente o inician el procedimiento algebraico pero terminan resolviendo aritméticamente.

EJERCICIO 2b

Estrategia 1: Completan la tabla correctamente, habiendo obtenido también la solución correcta en 2a.

Estrategia 2: Completan la tabla correctamente, habiendo obtenido una solución incorrecta en 2a.

Estrategia 3: Se equivocan en una o dos casillas de la tabla, habiendo obtenido la solución correcta en 2a.

Estrategia 4: Se equivocan en más de 5 casillas de la tabla o las dejan en blanco.

	EJERCICIO 2a			EJERCICIO 2b				EJ. 2c
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	SOLUCIÓN CORRECTA
1	1		1	1				1
2	1	1		1				1
3	1		1	1				1
4	1		1				1	
5	1	1		1				1
6	1	1		1				1
7	1	1		1				1
8			1		1			1
9	1	1		1				
10	1	1				1		
11	1	1		1				1
12	1	1		1				1
13	1	1				1		1
14	1	1		1				1
15	1	1					1	
16	1	1		1				1
17		1			1			1
18	1		1			1		
19	1	1		1				
20	1		1	1				
21	1		1				1	1
22	1	1		1				1
23	1		1	1				1
24			1				1	
25	1	1		1				1
26	1		1	1				1
27	1		1	1				
28	1	1		1				1
29			1		1			
30			1				1	
31	1	1		1				1
TOTAL	26	18	13	20	3	3	5	20
PORCENTAJE	83,87	58,06	41,94	64,52	9,68	9,68	16,13	64,52

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIO 3a

Estrategia 1: Cancelan los términos opuestos y efectúan la operación 79 – 80 = –1.

Estrategia 2: Cancelan los términos opuestos y continuan operando o no, pero no cometen los errores indicados en las estrategias 4 y 5.

Estrategia 3: No cancelan los términos opuestos y apenas simplifican o lo dejan en blanco, pero no cometen los errores indicados en las estrategias 4 y 5.

Estrategia 4: Suman términos literales con términos numéricos.

Estrategia 5: Hacen desaparecer las letras y dan una respuesta numérica.

	EJERCICIO 3a					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1			1			
2	1		1			
3				1		
4					1	
5	1	1				
6			1			
7	1	1				
8				1		
9					1	
10						1
11	1	1				
12	1	1				
13			1			
14			1			
15						1
16			1			
17			1			
18			1			
19	1	1				
20	1	1				
21			1			
22	1	1				
23			1			
24			1			
25	1	1				
26	1	1				
27	1	1				
28			1			
29	1	1				
30			1			
31	1	1				
TOTAL	13	12	13	2	2	2
PORCENTAJE	41,94	38,71	41,94	6,45	6,45	6,45

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIO 3b

Estrategia 1: Suprimen los paréntesis correctamente y cancelan el término 27 con –25 y –2.

Estrategia 2: Suprimen los paréntesis correctamente, pero no cancelan el término 27 con –25 y –2.

Estrategia 3: Suprimen los paréntesis de forma incorrecta, pero cancelan el término 27 con –25 y –2.

Estrategia 4: Suprimen los paréntesis de forma incorrecta y no cancelan el término 27 con –25 y –2.

Estrategia 5: No suprimen los paréntesis o dejan el ejercicio en blanco.

	EJERCICIO 3b					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1	1				
2					1	
3						1
4					1	
5	1	1				
6					1	
7					1	
8			1			
9					1	
10			1			
11	1	1				
12		1				
13					1	
14					1	
15						1
16			1			
17						1
18					1	
19			1			
20			1			
21		1				
22				1		
23						1
24					1	
25	1		1			
26				1		
27	1	1				
28	1		1			
29	1		1			
30			1			
31	1	1				
TOTAL	8	7	9	2	9	4
PORCENTAJE	25,81	22,58	29,03	6,45	29,03	12,90

EXAMEN 1º ESO. EJERCICIO 4

EJERCICIO 4a

Estrategia 1: Ordenan correctamente las dos expresiones y calculan también correctamente su diferencia.

Estrategia 2: Ordenan correctamente las dos expresiones, pero se equivocan al calcular la diferencia.

Estrategia 3: Ni ordenan ni calculan bien la diferencia

EJERCICIO 4b

Estrategia 1: Calculan bien la diferencia y resuelven la inecuación.

Estrategia 2: Calculan mal la diferencia, pero resuelven la inecuación.

Estrategia3 : Calculan bien la diferencia, pero dicen que $3t + 4 > t + 6$.

Estrategia4: Calculan mal la diferencia y dicen que la desigualdad depende de t.

Estrategia 5: Calculan mal la diferencia y dicen que $3t + 4 > t + 6$.

	EJERCICIO 4a			**EJERCICIO 4b**				
ALUMNO	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1					1		
2	1							1
3			1					1
4	1							1
5	1			1				
6	1					1		
7	1						1	
8	1							1
9		1						1
10	1							1
11	1			1				
12	1							1
13	1							1
14	1							1
15			1					1
16	1							1
17	1							1
18		1						1
19	1						1	
20	1							1
21		1						1
22	1							1
23	1						1	
24	1							1
25	1							1
26		1				1		
27		1				1		
28	1					1		
29	1				1			
30	1						1	
31	1				1			
TOTAL	24	5	2	2	2	5	4	18
PORCENTAJE	77,42	16,13	6,45	6,45	6,45	16,13	12,90	58,06

ANEXO IV.10

EXAMEN DE MATEMÁTICAS. 2º ESO

Ejercicio 1.
Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, escribiendo los pasos sucesivos.

a) $n - m + 187 + 23 - 3n + m - 25 - 187 + 448$

b) $35 - 4(2 + 2d - 7) - d - d - d$

c) $6(3 - x + 2y) - 3(2x - y + 4)$

Ejercicio 2.
Marc juega dos partidas a un juego en el que se ganan o pierden puntos. La fórmula que da la ganancia o pérdida final en el juego es $3a + 2b$, donde **a** es el número de puntos que gana o pierde en la primera partida y **b** el número de puntos que gana o pierde en la segunda partida. Utiliza la fórmula para averiguar cuántos puntos ganará o perderá Marc al final en los siguientes casos:

a) En la primera partida gana 8 puntos y en la segunda gana 6.

b) En la primera partida pierde 4 puntos y en la segunda pierde 5.

c) En la primera partida pierde 6 puntos y en la segunda gana 3.

Ejercicio 3.
Encuentra la diferencia que hay entre las siguientes altitudes por encima del nivel del mar o profundidades por debajo del nivel del mar. ¿Qué fórmula se podría utilizar?

a) 324 m por debajo del nivel del mar y 207 m por encima del nivel del mar.

b) 2128 m por encima del nivel del mar y 475 m por encima del nivel del mar.

c) 1700 m por debajo del nivel del mar y 1100 m por debajo del nivel del mar.

Ejercicio 4.
Realiza las siguientes operaciones entre números enteros

a) $(-100) + (-200) - (-150) - (-200) - (+150)$

b) $(-8)(-4)$

c) $(-3)(+5)(-4)$

d) $(-35) : (+7)$

e) $(-24) : (-4)$

Ejercicio 5.
Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros

$$0,\ -8,\ +23,\ 40,\ -125,\ +125,\ -243,\ 62$$

Ejercicio 6.
Coloca el símbolo < o > entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras puedan tomar valores positivos y negativos:

a) $h - 9 \qquad h - 13$

b) $10 - x \qquad 10 - 3x$

c) $-b \qquad b$

	EXAMEN 2º ESO. TABLA DE ÉXITOS												
ALUMNO	1a	1b	1c	2	3	4a	4bc	4de	5	6a	6b	6c	TOTAL
1	1		1	1	1	1	1		1	1	1	1	10
2						1	1	1	1	1	1	1	7
3	1							1		1			3
4	1		1		1	1		1	1	1			7
5									1	1			2
6				1					1	1			3
7	1								1	1	1		4
8	1	1	1	1	1			1	1	1			8
9	1	1	1			1			1	1	1	1	8
10	1								1	1			3
11	1	1		1	1	1				1		1	7
12	1				1	1			1	1			5
13	1				1				1	1	1	1	6
14				1					1	1			3
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	12
16	1	1					1	1	1	1			6
17	1	1			1		1	1	1	1			7
18	1			1		1	1	1	1	1			7
19	1			1	1		1	1	1	1			7
20	1	1		1	1		1		1	1			7
21	1					1	1			1			4
TOTAL	17	7	5	9	10	9	9	9	18	21	6	6	
PORCENTAJE	80,95	33,33	23,81	42,86	47,62	42,86	42,86	42,86	85,71	100,00	28,57	28,57	

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 1a

Estrategia 1: Cancelan los términos opuestos y suman sin separar positivos de negativos.

Estrategia 2: Cancelan los términos opuestos y suman separando positivos de negativos.

Estrategia 3: No cancelan los términos opuestos y suman separando positivos de negativos.

Estrategia 4: No cancelan los términos opuestos y suman de izquierda a derecha.

Estrategia 5: No cancelan los términos opuestos e interpretan algún signo como opertivo binario entre números naturales.

	EJERCICIO 1a					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1		1			
2		1				
3	1			1		
4	1	1				
5					1	
6		1				
7	1	1				
8	1			1		
9	1	1				
10	1	1				
11	1		1			
12	1	1				
13	1	1				
14						1
15	1	1				
16	1		1			
17	1	1				
18	1	1				
19	1				1	
20	1	1				
21	1	1				
TOTAL	17	13	3	2	2	1
PORCENTAJE	80,95	61,90	14,29	9,52	9,52	4,76

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 1b

Estrategia 1: Operan con números enteros y cambian lo signos al suprimir el paréntesis.

Estrategia 2: Operan con números enteros, pero no cambian los signos al suprimir el paréntesis.

Estrategia 3: No cambian los signos al suprimir el paréntesis e interpretan algún signo como operativo binario entre números naturales o aplican la propiedad conmutativa a los números naturales sin tener en cuenta el signo que les precede.

Estrategia 4: Transforman el producto en una suma.

Estrategia 5: En blanco.

	EJERCICIO 1b					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1		1				
2			1			
3				1		
4		1				
5					1	
6			1			
7				1		
8	1	1				
9	1	1				
10						1
11	1	1				
12			1			
13		1				
14			1			
15	1	1				
16	1	1				
17	1	1				
18			1			
19		1				
20	1	1				
21			1			
TOTAL	7	11	6	2	1	1
PORCENTAJE	33,33	52,38	28,57	9,52	4,76	4,76

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 1c

Estrategia 1: Operan con números enteros y cambian lo signos al suprimir el paréntesis precedido de un signo –.

Estrategia 2: Operan con números enteros, pero no cambian los signos al suprimir el paréntesis precedido de un signo –.

Estrategia 3: No cambian los signos al suprimir el paréntesis precedido de un signo – e interpretan algún signo como operativo binario entre números naturales o aplican la propiedad conmutativa a los números naturales sin tener en cuenta el signo que les precede.

Estrategia 4: Transforman los productos en sumas.

Estrategia 5: En blanco.

	EJERCICIO 1c					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1	1				
2			1			
3			1			
4	1	1				
5					1	
6					1	
7				1		
8	1	1				
9	1	1				
10						1
11		1				
12				1		
13		1				
14		1				
15	1	1				
16		1				
17						1
18			1			
19			1			
20		1				
21		1				
TOTAL	5	11	4	2	2	2
PORCENTAJE	23,81	52,38	19,05	9,52	9,52	9,52

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 2

Estrategia 1: Utilizan la fórmula.

Estrategia 2: Resuelven aritméticamente.

Estrategia 3: No entienden la fórmula.

Estrategia 4: En blanco.

	EJ. 2a	EJ. 2b	EJ. 2c	EJ. 2a, 2b y 2c			
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4
1	1	1	1		1		
2	1	1			1		
3	1	1			1		
4	1		1	1			
5						1	
6	1	1	1	1			
7	1		1	1			
8	1	1	1	1			
9	1			1			
10				1			
11	1	1	1	1			
12						1	
13	1		1	1			
14	1	1	1	1			
15	1	1	1	1			
16		1	1	1			
17							1
18	1	1	1	1			
19	1	1	1	1			
20	1	1	1	1			
21	1				1		
TOTAL	16	12	13	14	4	2	1
PORCENTAJE	76,19	57,14	61,90	66,67	19,05	9,52	4,76

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 3

Estrategia 1: Utilizan una única fórmula.

Estrategia 2: Utilizan fórmulas distintas según el caso.

Estrategia 3: Resuelven aritméticamente.

Estrategia 4: En blanco.

	EJ. 3a	EJ. 3b	EJ. 3c	EJ. 3a, 3b y 3c		
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3
1	1	1	1	1		
2				1		
3	1		1		1	
4	1	1	1		1	
5			1			1
6					1	
7		1	1			1
8	1	1	1	1		
9	1			1		
10		1	1			1
11	1	1	1	1		
12	1	1	1			1
13	1	1	1	1		
14	1	1				1
15	1	1	1	1		
16		1	1	1		
17	1	1	1			1
18	1		1	1		
19	1	1	1	1		
20	1	1	1			1
21			1			1
TOTAL	14	14	17	10	3	8
PORCENTAJE	66,67	66,67	80,95	47,62	14,29	38,10

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 4a

Estrategia 1: Pasan de la notación completa a la incompleta y cancelan los términos opuestos.

Estrategia 2: Pasan de la notación completa a la incompleta y suman separando positivos de negativos.

Estrategia 3: Pasan de la notación completa a la incompleta, pero no efectúan las operaciones.

Estrategia 4: En el paso de la notación completa a la incompleta no cambian el signo de los números enteros precedidos de un signo –.

Estrategia 5: En blanco.

	EJERCICIO 4a					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1	1				
2	1		1			
3				1		
4	1	1				
5					1	
6					1	
7		1				
8		1				
9	1	1				
10			1			
11	1	1				
12	1	1				
13		1				
14						1
15	1	1				
16		1				
17						1
18	1	1				
19			1			
20			1			
21	1	1				
TOTAL	9	12	4	1	2	2
PORCENTAJE	42,86	57,14	19,05	4,76	9,52	9,52

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIOS 4b, 4c, 4d y 4e

EJERCICIOS 4b y 4c

Estrategia 1: Se equivocan en la regla de los signos.

Estrategia 2: Suman en vez de multiplicar.

EJERCICIOS 4d y 4e

Estrategia 1: Se equivocan en la regla de los signos.

Estrategia 2: Efectúan una operación distinta de la multiplicación.

Estrategia 3: En blanco.

	EJ. 4b	EJ. 4c	EJ. 4b y 4c		EJ. 4d	EJ. 4e	EJ. 4d y 4e		
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3
1	1	1							1
2	1	1			1	1			
3		1	1		1	1			
4	1		1		1	1			
5				1	1		1		
6			1		1		1		
7			1						1
8				1	1	1			
9				1	1		1		
10				1			1		
11				1	1		1		
12				1				1	
13	1			1				1	
14				1	1		1		
15	1	1			1	1			
16	1	1			1	1			
17	1	1			1	1			
18	1	1			1	1			
19	1	1			1	1			
20	1	1			1			1	
21	1	1			1		1		
TOTAL	11	10	4	8	16	9	7	3	2
PORCENTAJE	52,38	47,62	19,05	38,10	76,19	42,86	33,33	14,29	9,52

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIOS 5 y 6a

EJERCICIO 6a

Estrategia 1: Calculan la diferencia

Estrategia 2: Hacen una tabla de valores dando valores positivos y negativos a la variable.

Estrategia 3: Hacen una tabla de valores dando sólo valores positivos a la variable.

Estrategia 4: Dan otras justificaciones erróneas.

Estrategia 5: No justifican su respuesta.

	EJ. 5	EJERCICIO 6a					
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5
1	1	1		1			
2	1	1		1			
3		1					1
4	1	1			1		
5	1	1				1	
6	1	1					1
7	1	1					1
8	1	1	1				
9	1	1					1
10	1	1					1
11		1	1				
12	1	1					1
13	1	1	1				
14	1	1					1
15	1	1	1				
16	1	1			1		
17	1	1				1	
18	1	1					1
19	1	1	1				
20	1	1					1
21		1					1
TOTAL	18	21	5	2	2	2	10
PORCENTAJE	85,71	100,00	23,81	9,52	9,52	9,52	47,62

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 6b

Estrategia 1: Hacen una tabla de valores dando valores positivos y negativos a la variable.

Estrategia 2: Calculan la diferencia pero sólo dan valores positivos.

Estrategia 3: Hacen una tabla de valores dando sólo valores positivos a la variable.

Estrategia 4: Hacen un razonamiento verbal.

Estrategia 5: Dan otras justificaciones erróneas.

Estrategia 6: No justifican su respuesta.

	EJERCICIO 6b						
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5	EST. 6
1	1	1					
2	1	1					
3				1			
4		1					
5						1	
6							1
7	1	1					
8			1				
9	1				1		
10							1
11			1				
12							1
13	1	1					
14							1
15	1	1					
16				1			
17						1	
18							1
19			1				
20							1
21				1			
TOTAL	6	6	3	3	1	2	6
PORCENTAJE	28,57	28,57	14,29	14,29	4,76	9,52	28,57

EXAMEN 2º ESO. EJERCICIO 6c

Estrategia 1: Hacen una tabla de valores dando valores positivos y negativos a la variable.

Estrategia 2: Calculan la diferencia pero sólo dan valores positivos.

Estrategia 3: Hacen una tabla de valores dando sólo valores positivos a la variable.

Estrategia 4: Hacen un razonamiento verbal.

Estrategia 5: Dan otras justificaciones erróneas.

Estrategia 6: No justifican su respuesta.

	EJERCICIO 6c						
ALUMNO	SOLUCIÓN CORRECTA	EST. 1	EST. 2	EST. 3	EST. 4	EST. 5	EST. 6
1	1	1					
2	1	1					
3			1				
4							1
5						1	
6							1
7							1
8			1				
9	1				1		
10							1
11	1	1					
12							1
13	1	1					
14							1
15	1	1					
16				1			
17						1	
18							1
19			1				
20							1
21							1
TOTAL	6	5	3	1	1	2	9
PORCENTAJE	28,57	23,81	14,29	4,76	4,76	9,52	42,86