TESIS DE LA UNIVERSIDAD
DE ZARAGOZA

2022 21

María Eva Cid Castro

Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos

Director/es
BROUSSEAU, GUY

ISSN 2254-7606

Prensas de la Universidad
Universidad Zaragoza

ISSN 2254-7606

Tesis Doctoral

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Autor

María Eva Cid Castro

Director/es

BROUSSEAU, GUY

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
Escuela de Doctorado

2016

Universidad Zaragoza
1542

OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS NEGATIVOS

Eva Cid Castro

Memoria presentada para optar al Título de Doctor por la Universidad de Zaragoza realizada bajo la dirección del profesor Dr. Guy Brousseau

Zaragoza, noviembre de 2015

A la memoria de mis padres
que siempre esperaron este momento

AGRADECIMIENTOS

Al profesor Guy Brousseau, mi director de tesis, porque me ha enseñado casi todo lo que sé sobre didáctica de las matemáticas.

A Nadine Brousseau por su cálida y exquisita hospitalidad.

A Marianna Bosch y Josep Gascón por haberme acogido en su proyecto de investigación y contribuido con sus ideas a la conclusión de esta tesis.

A Maribel Mestre y Noemí Ruiz-Munzón por su desinteresada ayuda en la fase experimental de la tesis.

A Mario Pérez por su colaboración en el dibujo de las figuras y en algunos aspectos tipográficos de la memoria.

A todos los componentes del proyecto de investigación por su apoyo e interés por mi trabajo.

A mis actuales compañeros del área de Didáctica de las Matemáticas por su buen talante, su camaradería y su espíritu de trabajo.

Al área de Análisis Matemático por haberme proporcionado un precioso despacho donde he podido trabajar muy a gusto.

A Paco Marcellán por su préstamo, ya hace algunos años, del *Manuscrito encontrado en Zaragoza*.

Y, por último, a Manolo, mi marido, por todo.

Llegó alguien buscando al gitano, por lo que éste nos pidió permiso para aplazar hasta el día siguiente la continuación de su historia. Cuando se hubo marchado, la bella judía, a la que ya sólo llamábamos Laura, volviéndose hacia Velázquez, le dijo: "¿Qué pensáis, señor duque, de los sentimientos exaltados de ese joven Soárez? ¿Os habéis molestado alguna vez en dirigir vuestras ideas hacia eso que se llama comúnmente amor?"

"Señora, respondióle Velázquez, mi sistema abarca toda la naturaleza, y por eso mismo, debe incluir todos los sentimientos que ésta ha puesto en el corazón humano. He debido ahondar en todos y definirlos. He tenido éxito sobre todo en lo que se refiere al amor, pues he descubierto que era posible expresarlo en términos algebraicos, y ya sabéis que las cuestiones que son abordables a través del álgebra dan lugar a soluciones que no dejan nada que desear.

En efecto, supongamos 'amor' un valor positivo acompañado de un signo más; 'odio', que es lo opuesto al amor, irá acompañado del signo menos, y la indiferencia, que es un sentimiento neutro, será igual a cero.

Si multiplicara el amor por sí mismo, tanto si yo amara el amor, como si amara amar el amor, tengo siempre valores positivos, por lo que más por más siempre da más.

Pero si odio el odio, entro en los sentimientos de amor o en las cantidades positivas, de manera que menos por menos da más.

Por el contrario, si odio el odio del odio, entro en los sentimientos opuestos al amor, es decir, en los valores negativos, del mismo modo que el cubo de menos es menos.

En cuanto a los productos de amor por odio o de odio por amor, son siempre negativos, lo mismo que los productos de más por menos y de menos por más. En efecto ya odie el amor o ya ame el odio, estoy siempre dentro de los sentimientos opuestos al amor.

¿Encontráis algo, bella Laura, que oponer a mi razonamiento?"

"Nada en absoluto, respondió la joven judía, y estoy convencida de que no hay mujer que no se rindiera ante semejantes argumentos."

"No me bastaría, repuso Velázquez. Pues al rendirse tan pronto, se perdería la continuación de mis corolarios o consecuencias

resultantes de mis principios. Prosigo pues mi razonamiento: puesto que amor y odio se comportan absolutamente como valores positivos y negativos, resulta de ello que en lugar de 'odio' puedo escribir 'menos amor', que no hay que confundir con la indiferencia, cuya naturaleza es ser igual a cero.

Ahora examinad la conducta de los amantes. Se aman, se odian, luego, detestan el odio que han tenido, se aman más que antes, luego, un factor negativo cambia todos estos sentimientos en odio. Ahora bien, es imposible ignorar en esto las potencias alternativas de más y de menos. En fin, oís decir que el amante ha apuñalado a su amada. Os encontráis en un buen apuro para decidir si se trata de un producto de amor o de odio. Es como en álgebra, llegáis a más menos raíz x, cuando los exponentes son impares.

Tan cierto es esto que a menudo veis comenzar el amor por una suerte de aversión, pequeño valor negativo, que podemos representar por menos B. Esta aversión traerá consigo una desavenencia, que representaremos por menos C, y el producto de estos dos valores dará más BC, es decir un valor positivo, un sentimiento de amor."

Aquí la falsa Uceda interrumpió a Velázquez y le dijo: "Señor duque, si os he comprendido bien, nada podría representar mejor el amor que el desarrollo de las potencias de x menos a, siendo ésta mucho menor que x."

"Gentil Laura, dijo Velázquez, me habéis leído el pensamiento. Sí, encantadora criatura, la fórmula del binomio, inventada por el caballero don Newton debe ser nuestra guía tanto en el estudio del corazón humano como en todos los cálculos."

Jan Potocki: Manuscrito encontrado en Zaragoza

ÍNDICE

Anexos

INTRODUCCIÓN

Todo profesor de matemáticas sabe que la aparición de números o términos negativos, tanto en un proceso de cálculo como en un razonamiento, aumenta el grado de dificultad de la tarea. En su práctica cotidiana, los profesores de matemáticas de la Educación Secundaria constatan que sus alumnos se equivocan con mucha más frecuencia en los cálculos en los que aparecen signos menos, se olvidan de las soluciones negativas de las ecuaciones o las positivizan y, además, en sus razonamientos únicamente suelen tomar en consideración el dominio positivo de las variables y tienden a identificar el término 'número' con 'número positivo', e incluso con 'número natural'. La particular idiosincrasia de "lo negativo" problematiza la enseñanza de las matemáticas generando frustración en los profesores y en los alumnos, tanto más cuanto que algunos de estos comportamientos erróneos se rastrean también en los niveles de enseñanza universitaria.

De ahí el problema docente que se plantean los profesores:

¿Cómo debo enseñar los números negativos para que mis alumnos no cometan errores sistemáticos en los cálculos en los que intervienen y tengan en cuenta la existencia de dichos números en los razonamientos matemáticos?

problema al que ha intentado responder una bibliografía didáctica muy numerosa, dedicada a presentar nuevas propuestas de enseñanza que "mejoren" las que habitualmente se utilizan en el aula.

La mayor parte de las aportaciones sobre el tema se centran en la búsqueda de un buen modelo concreto introductorio de los números negativos. Se trata, básicamente, de una literatura de tipo apologético en la que, después de describir someramente algunos de las dificultades de aprendizaje que se observan en la enseñanza habitual de los números negativos, se presenta un nuevo modelo concreto, o bien una nueva versión de uno ya conocido, asegurando que su utilización resuelve dichas dificultades; afirmación, esta última, que suele hacerse sin el respaldo de un trabajo de campo que la justifique.

Aparece así una extensa bibliografía que propone, a través de juegos o actividades diversas, la utilización de: deudas y haberes, pérdidas y ganancias, temperaturas, escaleras, ascensores u otros objetos que suben y bajan, móviles que se mueven a derecha e izquierda, tiempo antes y después de Cristo, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, longitudes y latitudes geográficas, cargas eléctricas, puntuaciones positivas o negativas, fichas de dos colores, etc., para enseñar los números negativos.

Todos estos modelos se presentan como capaces de fomentar el interés y la actividad del alumno, debido a que le resultan familiares y, al parecer, poseen un grado de abstracción adecuado a su edad. Se supone también que, como consecuencia de su familiarización con el modelo, el alumno puede conjeturar o, al menos, comprender y aceptar sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al ámbito de los números positivos y negativos. Así, al decir de los autores, el modelo cumple una doble función: por una parte, permite justificar, dar sentido, a los números negativos y sus reglas de cálculo y, por otra, sirve de apoyo a la reconstrucción de dichas reglas en caso de olvido.

Una aportación mucho menos numerosa la componen los estudios estadísticos o clínicos que ponen de manifiesto los errores que cometen los alumnos al realizar tareas en las que intervienen números o términos negativos. En ellos se constatan errores y dificultades de todo orden, correspondientes tanto a la estructura aditiva como a la estructura multiplicativa u ordinal de dichos números. También aquí es frecuente la referencia a los modelos concretos, ya que los autores suelen terminar este tipo de artículos achacando las dificultades de los alumnos para comprender y manejar los números negativos a la ausencia de un buen modelo concreto introductorio de dicha noción.

Pero existe además un tercer grupo de trabajos de corte muy distinto. En ellos se pone de manifiesto la larga historia de los números negativos; su difícil emergencia desde la época de Diofanto hasta, prácticamente, nuestros días; la posible existencia de concepciones históricas, es decir, maneras de concebir las matemáticas a lo largo de la historia, que han obstaculizado, retrasado, la aceptación del número negativo por parte de la comunidad matemática; y la posible pervivencia de dichos obstáculos epistemológicos en la enseñanza actual.

Se trata de una línea de investigación controvertida, en la que no hay acuerdo sobre cuáles son, en el supuesto de que existan, los obstáculos epistemológicos que afectan al número negativo, ni sobre los efectos que producen en la enseñanza y, ni siquiera, sobre el propio concepto de obstáculo epistemológico. Pero, en último término, incluso para el lector que no quiera entrar en la polémica, estos trabajos muestran un panorama histórico tan conflictivo a la hora de dar un estatuto matemático claro a los números negativos, que se hace difícil aceptar que la actual enseñanza de dichos números pueda discutirse sin tener en cuenta su historia y la posible existencia de obstáculos epistemológicos.

Sin embargo, la mayor parte de la bibliografía correspondiente a las dos primeras áreas: las propuestas de enseñanza y los errores y dificultades de los alumnos en el aprendizaje de los números negativos, sigue discurriendo al margen de la noción de obstáculo epistemológico. De hecho, la posible existencia de obstáculos aparece citada en bastantes trabajos, pero sin que normalmente esta mención repercuta en el planteamiento de las nuevas propuestas de enseñanza o en el análisis de las ya existentes o de los errores de los alumnos.

El objetivo que nos proponemos en este trabajo es el de transformar el problema docente que se plantea en la enseñanza de los números negativos en un problema didáctico que pueda ser abordado y resuelto con las herramientas propias de la disciplina. Y para ello, consideramos imprescindible un estudio en profundidad de los posibles obstáculos epistemológicos en el ámbito de los números negativos, tratando de justificar su existencia y precisando cuáles son y qué efectos producen en la enseñanza. Nos proponemos también mostrar la importancia que tienen los obstáculos epistemológicos en el análisis, tanto de los errores que cometen los alumnos como de las prácticas habituales de enseñanza, y la necesidad de tenerlos en cuenta a la hora de formular nuevas propuestas didácticas.

CAPÍTULO I

Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos: estado de la cuestión y problemática abierta

I.1. Orígenes de la noción de obstáculo epistemológico

La noción de obstáculo epistemológico aparece en 1938 en el ámbito de la filosofía de la ciencia[1]. Su creador, Gaston Bachelard, la comenta por primera vez en un párrafo que se ha convertido en cita casi obligada para todo el que habla del tema:

> Cuando se investigan las condiciones psicológicas del progreso de la ciencia, se llega pronto a la convicción de que *es en términos de obstáculos como es preciso plantear el problema del conocimiento científico.* Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y fugacidad de los fenómenos, ni de acusar a la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer íntimamente cuando aparecen, por una suerte de necesidad funcional, lentitudes y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, es ahí donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (. . .) De hecho, se conoce *contra* un conocimiento anterior, destruyendo conocimientos mal hechos, remontando lo que, en el espíritu mismo, obstaculiza la espiritualización. (Bachelard, 1986, pp. 13-14)

Aun cuando al principio Bachelard no precisa si se refiere a las condiciones de formación del conocimiento en un sujeto o a las de génesis histórica del saber, más adelante aclara que la noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada tanto en el desarrollo histórico del pensamiento científico como en la práctica educativa (Bachelard, 1986, p. 17). Sin embargo,

[1] Una parte de este capítulo está publicada en Cid (2002) y Cid (2004).

Bachelard no profundiza en este dualismo y en su presentación de los diferentes obstáculos epistemológicos recurre a razonamientos basados en hechos históricos y apenas se ocupa de analizar cuáles serían las características de dichos obstáculos en el ámbito de la educación.

Pero si el aprendizaje individual no es la preocupación primera de Bachelard, sí lo es, en cambio, de otro epistemólogo: Jean Piaget. Y éste, en su teoría de la equilibración (Piaget, 1957) plantea un modelo individual de adquisición de conocimientos que no es incompatible, e incluso tiene ciertos puntos en común, con el supuesto bachelardiano de que se conoce contra un conocimiento anterior. La idea central de este modelo es que los conocimientos:

> ... no proceden ni de la sola experiencia de los objetos, ni de una programación innata preformada en el sujeto, sino de construcciones sucesivas con constantes elaboraciones de nuevas estructuras (Piaget, 1978, p. 1)

A partir de aquí, el autor postula la existencia en el niño de unos primeros esquemas innatos de conocimiento que le permiten asimilar o incorporar los objetos exteriores. Pero la aparición de objetos que no pueden ser asimilados con esos primeros esquemas obliga al niño a modificarlos para acomodarlos a los nuevos objetos que quiere conocer. De manera que la adquisición de conocimientos no sólo supone un aumento cuantitativo de los mismos, sino que, muchas veces, supone también una reorganización de la estructura cognitiva del sujeto. El intento de asimilar un nuevo objeto con un esquema de conocimiento inadecuado produce un desequilibrio que se supera mediante un proceso de equilibración, proceso que conduce a la reestructuración de los esquemas existentes en el sujeto para construir nuevos esquemas cognitivos más potentes que los anteriores.

Sin embargo, la posición de Piaget no es tan rupturista como la de Bachelard. Este último considera que la adquisición del nuevo conocimiento exige la destrucción del antiguo, destrucción que debe entenderse en un sentido de negar lo que antes se tenía por válido. Piaget, en cambio, más que de conocimientos está hablando de esquemas de conocimientos, es decir, de aquellos instrumentos cognitivos que le permiten al sujeto llevar a cabo el acto de conocer. Y esos esquemas, que han funcionado en determinadas condiciones, no pueden ser totalmente desechados, su modificación debe hacerse dentro de ciertos límites, pues es necesario que el nuevo esquema de conocimiento permita conocer todo lo que ya se conocía con el antiguo:

> Todo esquema de asimilación se encuentra obligado a acomodarse a los elementos que asimila, es decir, a modificarse en función de sus particularidades, pero sin perder por ello su continuidad (y por lo tanto su cerramiento

> en cuanto ciclo de procesos interdependientes), ni sus anteriores poderes de asimilación. (Piaget, 1978, p. 9)

En 1976, Guy Brousseau, como consecuencia de sus investigaciones sobre la didáctica de los números racionales y decimales, retoma la noción de obstáculo epistemológico propuesta por Bachelard, defendiendo su utilización tanto en el ámbito de la epistemología de las matemáticas como en el de la didáctica de las mismas. Según él, el trabajo de Bachelard y el de Piaget, así como sus propias experiencias, muestran que:

> El error y el fracaso no tienen el papel simplificado que se quiere hacerles jugar a veces. El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, tal como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior que tenía su interés, su éxito, pero que, ahora, se revela falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos e imprevisibles, se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del profesor como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido. (Brousseau, 1983, p. 171)

Nos encontramos de nuevo con la idea de que el aprendizaje no puede entenderse como un proceso continuo en el que el individuo va aumentando progresivamente su caudal de conocimientos, sino que, en determinados momentos, para aprender algo nuevo es necesario modificar un conocimiento anterior que está obstaculizando ese aprendizaje. En otras palabras, los conocimientos previos no siempre son un apoyo en el proceso de adquisición de nuevos conocimientos sino que, en ocasiones, son una rémora que impide la evolución del sujeto hacia otros estados de conocimiento. Pero la posición de Brousseau supone, en cierto modo, una reinvención de la noción de obstáculo epistemológico, pues difiere bastante de la de Bachelard. No hay más que leer el párrafo arriba transcrito para encontrar elementos que ya permiten señalar diferencias entre las ideas de uno y de otro.

En efecto, en dicho párrafo se enfatiza el hecho de que ese conocimiento obstaculizador de aprendizajes y generador de errores es un conocimiento que anteriormente era válido y tenía su éxito en un cierto campo de problemas; es al modificar ese campo de problemas cuando se revela falso o inadaptado. Sin embargo, Bachelard hace hincapié en que el obstáculo es un conocimiento erróneo que debe ser rechazado, obviando la posibilidad de que, gracias a ese conocimiento, el individuo haya podido afrontar con éxito algunas situaciones. Pero la idea de que el obstáculo es un conocimiento válido en determinado ámbito es fundamental para explicar por qué el sujeto tiene dificultades para desecharlo: las tiene desde el momento que su experiencia le dice que ese conocimiento es válido y apropiado en determinadas situaciones. Como consecuencia, y dependiendo del nivel de éxito obtenido, el individuo tratará de mantener en mayor o menor grado su conocimiento anterior, de adaptar lo nuevo a lo viejo haciéndolo compatible, y todo eso provocará errores frecuentes y difíciles de erradicar.

En este sentido, la postura de Brousseau está más cercana a la de Piaget. Este último también habla de esquemas de conocimiento que funcionan bien hasta que la asimilación de determinados objetos los hace inadecuados y deben ser modificados. Pero, por un lado, dichos esquemas, más que conocimientos relativos a una cierta rama del saber -que es a lo que se refiere Brousseau-, son estructuras cognitivas muy generales compuestas, inicialmente, por secuencias de acciones físicas y, más adelante, por sistemas de operaciones mentales que Piaget modeliza utilizando conceptos lógico-matemáticos[2]. Además, por otro lado, Brousseau, al igual que Bachelard, postula el rechazo explícito del obstáculo, ya que es incompatible con el nuevo conocimiento, mientras que Piaget, como ya comentamos anteriormente, ofrece una versión más continuista.

Otra diferencia entre Brousseau y Bachelard es su postura respecto a la epistemología de las matemáticas. La relación de obstáculos epistemológicos presentada por este último se refiere, toda ella, a las ciencias experimentales, dejando de lado el ámbito de las matemáticas y llegando incluso a afirmar que este fenómeno no se da en su historia:

> Por lo demás, para rematar nuestra tarea en esta dirección, hará falta estudiar, desde el mismo punto de vista crítico, la formación del espíritu matemático. Hemos dejado esta tarea para una obra posterior. En nuestra opinión, esta división es posible porque el desarrollo del espíritu matemático es bien diferente del desarrollo del espíritu científico en su esfuerzo por comprender los fenómenos físicos. De hecho, la historia de las matemáticas es una maravilla de regularidad. Ella conoce periodos de detención, pero no conoce periodos de errores. Ninguna de las tesis que sostenemos en este libro apuntan, por consiguiente, al conocimiento matemático. No tratan más que del conocimiento del mundo objetivo. (Bachelard, 1986, p. 22)

Esta afirmación obedece a una manera muy frecuente de entender la historia de las matemáticas como un proceso de crecimiento sostenido, continuo y acumulativo del saber matemático en el que no tienen cabida saltos, rupturas, confrontaciones ni reelaboraciones. Sin embargo, cada vez son más los filósofos o historiadores de las matemáticas que muestran su desacuerdo con esta afirmación. La posición de Brousseau, contraria en este punto a la

[2] A este respecto, también hay que decir que los obstáculos epistemólogicos que propone Bachelard son, más bien, nociones metacognitivas (la experiencia primera, el conocimiento general, el obstáculo verbal, etc.), aunque después las concreta en conocimientos específicos referidos a las ciencias experimentales.

de Bachelard, se inscribe, por tanto, en una corriente de pensamiento actual que ha abandonado la concepción continuista y lineal de la historia de las matemáticas, asumiendo la existencia de periodos históricos de fractura y reorganización del saber matemático. Manera de pensar que queda, por ejemplo, bien reflejada en la obra de Lizcano cuando, a la hora de definir los criterios actuales para una epistemología de las matemáticas, propone, entre otros:

> No restablecer continuidades, desarrollos, evoluciones, acumulaciones, sino "mantener lo que pasó -y, añadiríamos, lo que pasa- en la dispersión que le es propia", con todos sus pliegues, fracturas, puntos de inflexión, capas heterogéneas, sustituciones, desplazamientos (Canguilhem, 1975) y obstáculos epistemológicos (Bachelard). (Lizcano, 1993, p. 22)

O también, en la obra de De Lorenzo cuando dice:

> La historicidad que se encuentra subyacente al hacer matemático no es evolucionista, difusionista o cíclica. Se encuentra sustentada en un tiempo no lineal, no continuo, sino en un tiempo a intervalos discretos, a base de saltos y rupturas. De esta forma, el hacer matemático no puede ser considerado como un hacer nacido en Grecia, o en otro lugar, por ejemplo, ni desarrollado y mantenido a lo largo de un flujo que va presentando su culminación en cada instante posterior, en el cual parece alcanzar su pleno sentido. Enfoque de historia lineal que ha sido predominante hasta tiempos recientes. (...)
>
> Admitir un tipo de historicidad discreta en el hacer matemático supone rechazar la práctica matemática como reflejo de una evolución continua y constante del hombre hacia una perfección progresivamente alcanzada y alcanzable con uniformidad -bien constante, bien acelerada-. (De Lorenzo, 1977, p. 19)

Estas primeras diferencias que acabamos de comentar nos muestran que, aunque el origen de la noción de obstáculo epistemológico se remonta a Bachelard y su transposición al campo de la didáctica de las matemáticas viene favorecida por la aceptación de la teoría constructivista del aprendizaje de Piaget, el desarrollo que hace Brousseau de la misma tiene características propias que la alejan de sus orígenes. Y esto se debe a que ese desarrollo es coherente con su teoría de situaciones didácticas y, por consiguiente, es en el seno de esa teoría donde conviene describir y analizar la noción de obstáculo epistemológico que él propone.

I.2. El papel de concepciones y obstáculos en la teoría de situaciones didácticas

En la teoría de situaciones didácticas se postula que un alumno adquiere un conocimiento cuando, enfrentado a una situación-problema cuya solución exige ese conocimiento, es capaz de generarlo en forma de estrategia de resolución de la situación. El conocimiento es, por tanto, el resultado de la adaptación de un sujeto a un conjunto de situaciones-problema en las que es útil como estrategia de resolución (Brousseau, 1989a, p. 41). La consecuencia inmediata de este postulado es que los conocimientos de un alumno sobre una noción matemática dependerán de la experiencia adquirida resolviendo situaciones-problema en las que dicha noción está implicada.

Ahora bien, en la enseñanza es imposible presentar para cada noción matemática el conjunto de todas las situaciones-problema en las que ésta interviene, lo que obliga a elegir unas pocas de entre ellas, un subconjunto de situaciones. Y esa elección puede dar lugar a que el alumno adquiera una concepción, es decir, un conjunto de conocimientos referentes a la noción matemática que funcionan con éxito en ese subconjunto de situaciones y para determinados valores de sus variables didácticas, pero que no son eficaces e, incluso, provocan errores al utilizarse en otro subconjunto de situaciones o al modificar las variables didácticas de la situaciones consideradas[3]. Una concepción tiene, por tanto, un campo de problemas en el que funciona y otro campo de problemas en el que no permite resolver o, al menos, dificulta la resolución. De manera que la ampliación del campo de problemas va a obligar a la concepción a evolucionar, modificando alguno de sus aspectos, para adaptarse a las nuevas situaciones.

Pero, dentro de esta perspectiva y desde un punto de vista teórico, pueden plantearse otras alternativas a la evolución de concepciones. Por

[3] El término 'concepción' ha sido muy utilizado en las ciencias sociales para referirse, más o menos vagamente, a la forma que tiene el individuo de "entender", "concebir" o "representarse" una determinada noción o conjunto de nociones. Nosotros lo usaremos con el sentido que se le da en la teoría de situaciones didácticas, sentido que, al igual que el del término 'obstáculo', iremos precisando a lo largo de este trabajo. Una descripción de algunos de los distintos significados que se le han atribuido a la palabra 'concepción', y también de su relación con términos análogos, puede encontrarse en Giordan y de Vecchi (1988) y Confrey (1990) para las ciencias sociales, en general, y en El Bouazzaoui (1988), Ruiz Higueras (1993) y Artigue (1990), para la didáctica de las matemáticas, en particular.

ejemplo, podría darse el caso de que, acerca de una misma noción matemática y en un mismo sujeto, aparecieran dos concepciones contradictorias ligadas a dos subconjuntos de situaciones diferentes, lo que, tarde o temprano, obligaría al sujeto a integrar las dos concepciones limando los aspectos contradictorios o a rechazar una de ellas. También podríamos encontrarnos con una concepción a la que ya no fuera posible hacer evolucionar para que asumiera nuevos campos de problemas, en cuyo caso no quedaría más alternativa que el rechazo de la concepción y su sustitución por otra.

En estos casos, en los que la ampliación del campo de problemas exige la sustitución de la concepción antigua, válida hasta ese momento, por una nueva y, además, el sujeto que la posee se resiste a rechazarla y trata, a pesar de la constatación de su fracaso, de mantenerla, de adaptarla localmente, de hacerla evolucionar lo menos posible, diremos que la concepción es un obstáculo. Y esta 'concepción obstáculo' (en adelante, simplemente, 'obstáculo') se pondrá de manifiesto a través de los errores que produce, errores que no serán fugaces ni erráticos, sino reproductibles y persistentes (Brousseau, 1983, p. 173).

Naturalmente, detrás de todo esto se encuentra una manera de concebir el aprendizaje muy alejada del modelo de aumento progresivo y escalonado de los conocimientos. En efecto, en la teoría de situaciones el aprendizaje es el resultado de:

> ... una interacción constante del alumno con las situaciones problemáticas, interacción dialéctica (pues el sujeto anticipa, finaliza sus acciones) en la que compromete los conocimientos anteriores, los somete a revisión, los modifica, los completa o los rechaza para formar nuevas concepciones. (Brousseau, 1983, p. 172)

Brousseau expone sus primeras ideas sobre las nociones de concepción y obstáculo en diferentes artículos (1976, 1980, 1981, 1983, 1988a, 1989a, 1989b). Entre ellas figura una clasificación de los obstáculos (1983, pp. 176-178; 1989b, pp. 282-283) atendiendo a que su origen se sitúe en uno u otro de los polos del sistema didáctico -alumno, profesor y saber- o en la sociedad en general, lo que le permite distinguir entre:

- *obstáculo ontogenético*, cuando es una consecuencia de las limitaciones propias del estado de maduración neuro-fisiológica del alumno. El obstáculo lo constituyen entonces determinados esquemas operatorios o modelos espontáneos que aparecen de forma "natural" en el curso de su desarrollo psicológico.
- *obstáculo cultural*, cuando es consecuencia de creencias o prácticas propias de la cultura general de una sociedad.

- *obstáculo didáctico*, cuando se debe, únicamente, a las elecciones didácticas realizadas en el seno del sistema educativo y no es susceptible de una renegociación por parte del profesor en el marco restringido de la clase.
- *obstáculo epistemológico*, cuando ese mismo obstáculo se puede rastrear en la historia de las matemáticas y la comunidad de matemáticos de una determinada época ha tenido que tomar conciencia de él y de la necesidad de superarlo. En este caso, el rechazo explícito del obstáculo, la 'ruptura epistemológica' con la concepción anterior, forma parte del saber matemático actual.

Por otro lado, Duroux (1982, pp. 20-21) propone una lista de condiciones necesarias para poder calificar de obstáculo epistemológico a una concepción. Esta lista, con algunas modificaciones introducidas por Brousseau, es la siguiente[4]:

> a) Un obstáculo será un conocimiento, una concepción, no una dificultad ni una falta de conocimiento.
>
> b) Este conocimiento produce respuestas adaptadas a un cierto contexto, frecuentemente reencontrado.
>
> c) Pero engendra respuestas falsas fuera de este contexto. Una respuesta correcta y universal exige un punto de vista notablemente diferente.
>
> d) Además, este conocimiento resiste a las contradicciones con las que se le confronta y al establecimiento de un conocimiento mejor. No es suficiente poseer un conocimiento mejor para que el precedente desaparezca (lo que distingue la superación de obstáculos de la acomodación de Piaget). Es pues indispensable identificarlo e incorporar su rechazo en el nuevo saber.
>
> e) Después de tomar conciencia de su inexactitud, el obstáculo continua manifestándose de forma intempestiva y obstinada. (Brousseau, 1989a, p. 43)

A esto hay que añadir alguna puntualización más. La primera es que Brousseau (1989b, p. 277) distingue entre 'obstáculo epistemológico inevitable', cuando ese mismo obstáculo, detectado en la historia de las matemáticas, forma parte de las concepciones de los alumnos actuales y no debe ser obviado por el profesor, y 'obstáculo epistemológico evitable', cuando el obstáculo histórico no se reproduce en la enseñanza actual. Otra puntualización la hace El Bouazzaoui (1988) cuando dice que todo obstáculo epistemológico lleva asociado un obstáculo didáctico, producido

[4] En nuestra opinión, estas condiciones son igualmente necesarias en el caso de un obstáculo didáctico o cultural. Por supuesto, para que un obstáculo pueda calificarse de epistemológico, habrá que añadir, además, la condición, ya comentada, de que dicho obstáculo sea también detectado en la historia de las matemáticas.

por la práctica didáctica habitual de apoyarse en las concepciones que poseen los alumnos para hacer que adquieran una nueva concepción. En el caso de un obstáculo epistemológico esa forma de hacer lo refuerza, añadiéndole una dimensión didáctica.

Como podemos ver, en la teoría de situaciones, la noción de obstáculo epistemológico queda englobada en una categoría más amplia, la de obstáculo, que a su vez es un caso particular de otra noción más general, la de concepción. Además, la definición de obstáculo epistemológico conlleva, implícitamente, el establecimiento de un paralelismo entre las concepciones obstáculo que poseen los alumnos actuales y determinados conocimientos y saberes históricos que han obstaculizado la evolución de las matemáticas y cuyo rechazo ha sido incorporado al saber trasmitido. Esto induce a extender el concepto de concepción utilizándolo también como significante del estado de conocimiento propio de los matemáticos de otras épocas.

Aparece así el término 'concepción histórica' para referirse a la concepción que determinado matemático de otra época ha podido tener de una cierta noción matemática, siempre que esa concepción sea relevante, es decir, que represente la forma de pensar de una parte significativa de la comunidad de matemáticos de su tiempo. La determinación de estas concepciones históricas se hace a partir de la lectura de la obra escrita del matemático considerado.

También hay que hacer notar que, aun cuando en un principio Brousseau califica a la concepción de "conjunto de conocimientos", posteriormente establece una distinción entre conocimiento y saber que le lleva a hablar de "los conocimientos y saberes" implicados en una concepción. Para Brousseau (1993, p. 3), el 'conocimiento' es aquella información que permite a un sujeto en situación a-didáctica[5] elegir una estrategia de resolución en lugar de otra, siempre que esa posibilidad de elección exista y no sea aleatoria. En cambio, el 'saber' es el instrumento cultural de identificación, de reconocimiento del conocimiento, de gestión social de ese medio de decisión que es el conocimiento. El conocimiento es un medio al nivel de la acción y el saber es un instrumento al nivel de la cultura, de las interacciones sociales.

Lo dicho hasta el momento, aun cuando no son más que unas primeras precisiones sobre el tema, nos muestra que tanto las concepciones como los

[5] Situación sin intencionalidad didáctica en la que el sujeto afronta la resolución de un problema sin poseer de antemano toda la información que permite resolverlo. El sujeto construirá esa nueva información en sus intentos por resolver el problema.

obstáculos ocupan un lugar central dentro de la teoría de situaciones. De entrada, como ya hemos visto, son nociones necesarias para describir los procesos de aprendizaje pero, además, esta manera de entenderlos establece una conexión muy estrecha entre concepciones y situaciones. En efecto, la interpretación del aprendizaje de una noción matemática en términos de concepciones provisionales que deben ser sustituidas por otras convierte las relaciones causales existentes entre situaciones y concepciones en un asunto de vital importancia.

> La noción de obstáculo es central en la teoría, de una parte, ya lo hemos visto, porque el aprendizaje por adaptación que permite dar sentido a los conceptos produce en general, al mismo tiempo, concepciones erróneas, conocimientos locales que habrá ocasión de poner en duda; de otra parte, porque estos nudos de resistencia que son los obstáculos van a necesitar la construcción de situaciones didácticas adaptadas y es para ayudar a los alumnos a franquearlos por lo que la ingeniería didáctica va a desarrollarse. (Perrin-Glorian, 1994, p. 114)

No es extraño, por consiguiente, que estas relaciones de causa-efecto entre situaciones y concepciones sean las protagonistas a la hora de definir, en el marco de la teoría, el objeto de la didáctica:

> El objeto principal de la didáctica es justamente estudiar las condiciones que deben cumplir las situaciones o los problemas propuestos a los alumnos para favorecer la aparición, el funcionamiento y el rechazo de estas concepciones sucesivas. (Brousseau, 1983, p. 172)

Se trata, no sólo, de determinar las distintas concepciones que poseen los individuos y su posible carácter de obstáculo, sino también de estudiar qué situaciones de enseñanza y, en particular, qué valores de sus variables didácticas favorecen o evitan la implantación de dichas concepciones e, incluso, provocan su rechazo cuando se trata de una concepción obstáculo.

I.3. La importancia de concepciones y obstáculos en la práctica docente

En el apartado anterior hemos puesto de manifiesto el papel fundamental que juegan los conceptos de concepción y obstáculo en la teoría de situaciones. Ahora intentaremos mostrar que la utilización de estos conceptos, además de constituir un recurso teórico fundamental, tiene también una repercusión inmediata en la práctica docente, es decir, en la preparación de las lecciones, en el tratamiento de los errores de los alumnos, etc.

Es importante, por ejemplo, decidir si los errores que cometen los alumnos están ligados por una determinada concepción porque eso nos proporcionará pautas de corrección más eficaces. Los profesores están atrapados en una didáctica de corrección local de los errores: cada vez que un alumno comete un error lo corrigen, pero como los errores de los alumnos son muchos se impone la necesidad de corregir cada uno de ellos mediante una explicación corta y rápida. Sin embargo, no todos los errores se deben a las mismas causas. Un alumno puede cometer un error como consecuencia de una falta de atención momentánea o de una ignorancia o mal comprensión que afecte a un aspecto local del saber; en esos casos la corrección local estará justificada. Pero si el error es consecuencia de una manera global de comprender una parte del saber, de una concepción, habrá, cuando menos, que poner en duda la eficacia de las correcciones locales. Distinguir un error producto de una concepción de un error producto de un desconocimiento local o un despiste permitirá a un profesor valorar si una corrección local viene o no al caso.

Por otro lado, una concepción saca a la luz las relaciones existentes entre errores distintos y aparentemente independientes unos de otros, lo que hace concebir la esperanza de que actuando sobre la concepción, por medio de la presentación a los alumnos de un número reducido de situaciones, se pueda conseguir que los errores desaparezcan sin necesidad de emprender la tediosa tarea de corregirlos uno por uno. En otras palabras, la consideración de que distintos errores pueden ser consecuencia de una misma concepción abre la puerta a la posibilidad de erradicarlos con más éxito por medio de acciones didácticas más limitadas en el tiempo, pero más pertinentes.

También la determinación de si una concepción constituye o no un obstáculo y qué tipo de obstáculo tiene implicaciones importantes en la práctica docente. Si la concepción no es un obstáculo el trabajo del profesor deberá centrarse en la presentación de situaciones de enseñanza que favorezcan su evolución, mientras que, si lo es, será necesario atacar esa concepción hasta conseguir que el alumno la rechace y esto último exige acciones didácticas mucho más radicales. Para motivar el abandono de un conocimiento antiguo que ha funcionado bien hasta el momento hay que poner al alumno en situaciones en las que ese conocimiento resulte absolutamente ineficaz. En ese caso, ya no sirve el procedimiento, habitual en la práctica docente, de construir las nuevas situaciones de enseñanza modificando levemente las variables didácticas de las situaciones en las que el conocimiento antiguo tenía éxito, sino que serán necesarios lo que Brousseau llama 'saltos informacionales', es decir, modificaciones bruscas de las variables didácticas que impliquen una modificación cualitativa de los conocimientos necesarios para adaptarse a la nueva situación.

En cuanto a la clasificación de los obstáculos según su origen, su importancia práctica viene dada por la exigencia de dar un tratamiento didáctico diferenciado a cada uno de ellos. Los obstáculos de origen ontogenético son inevitables, pero se superan de manera natural, sin necesidad de intervenciones didácticas específicas, a medida que el sujeto pasa a otros estadios de su desarrollo psicológico. Los de origen didáctico, en cambio, deberían ser evitados modificando adecuadamente las condiciones de enseñanza. Por último, los de origen cultural o epistemológico son también inevitables, pero aquí la acción del profesor deberá ir encaminada, como ya hemos dicho, a crear las condiciones didácticas que permitan al alumno rechazar explícitamente el obstáculo.

Como podemos ver, aceptar la existencia de concepciones y obstáculos tiene consecuencias inmediatas para la ingeniería didáctica. El análisis del conocimiento en términos de concepciones y obstáculos, así como de las condiciones didácticas que los producen, se revela imprescindible para poder construir "buenas" génesis escolares de las nociones matemáticas, es decir, génesis que provoquen en los alumnos concepciones iniciales que evolucionen fácilmente hacia otras más cercanas al concepto matemático[6], que eviten la aparición de obstáculos didácticos y que afronten su rechazo y superación en el caso de obstáculos que, como los epistemológicos, sean inevitables.

I.4. La larga historia de los números negativos

La primera referencia a obstáculos epistemológicos en los números negativos aparece en un artículo de Glaeser publicado en 1981. En él, el autor manifiesta su intención de buscar los obstáculos que se oponen a la comprensión y aprendizaje de los números negativos. Para ello busca los vestigios de esos obstáculos en el pasado analizando, mediante una técnica de comentario de textos, lo que los matemáticos de distintas épocas[7] dijeron sobre los números negativos.

Lo primero que llama su atención es la "sorprendente lentitud" del proceso histórico de construcción del concepto de número negativo. La lectura

[6] Entendemos el término 'concepto matemático' como el conjunto de conocimientos y saberes que la comunidad científica actual posee sobre una noción matemática.

[7] Se citan textos de: Diofanto, Stevin, Descartes, Mc Laurin, Clairaut, Euler, Cramer, d'Alembert, Carnot, Laplace, Cauchy y Hankel.

de los textos citados por Glaeser muestra que desde la primera formulación de la regla de los signos, hecha por Diofanto, hasta mediados del siglo XIX, se utilizan de continuo unos entes, los ahora llamados números negativos, que eran necesarios en muchas ramas de las matemáticas (álgebra, análisis, geometría analítica, trigonometría, etc.), pero que la comunidad matemática no sabía como encajar dentro de su cuerpo teórico. Los números negativos se usaban con profusión y sin dificultad, pero cuando los grandes matemáticos se veían en la tesitura de tener que dar explicaciones sobre su naturaleza, lo hacían en unos términos difícilmente concebibles hoy en día. Un ejemplo de esto es Carnot quien, en los preliminares de su célebre *Géométrie de position*, dedica veinticuatro páginas a las cantidades negativas y dice cosas como las siguientes:

> Nada es más simple que la noción de cantidades negativas precedidas por cantidades positivas más grandes que ellas; pero en álgebra nos encontramos a cada paso con expresiones de formas negativas aisladas y cuando se quiere conocer con precisión el sentido de estas expresiones faltan principios claros, porque éstas son el resultado de operaciones que no son, en sí mismas, claras ni ejecutables más que para las cantidades positivas o, más bien, absolutas. (Carnot, 1803, pp. 2-3)

> Para obtener realmente una cantidad negativa aislada será necesario sustraer una cantidad efectiva de cero, quitar algo de nada: operación imposible. ¿Cómo concebir entonces una cantidad negativa aislada? (Carnot, 1803, p. 3)

> Las nociones que se han dado hasta el momento sobre las cantidades negativas aisladas se reducen a dos: aquella de la que acabamos de hablar, a saber, que son cantidades menores que cero, y la que consiste en decir que las cantidades negativas son de la misma naturaleza que las positivas, pero tomadas en un sentido contrario. (Carnot, 1803, p. 6)

> Yo digo, en primer lugar, que la primera de esas nociones es absurda y para destruirla basta con advertir que teniendo el derecho de omitir en un cálculo las cantidades nulas, por comparación con aquellas que no lo son, con más razón deberíamos tener el derecho de omitir aquellas que son menores que cero, es decir, las cantidades negativas, lo que es ciertamente falso: por tanto, las cantidades negativas no son menores que cero. (Carnot, 1803, p. 9)

> Una multitud de paradojas o, más bien, de absurdos palpables resultará de la misma noción; por ejemplo, -3 será menor que 2; sin embargo, $(-3)^2$ será más grande que 2^2, es decir, que entre dos cantidades desiguales el cuadrado de la más grande será menor que el cuadrado de la más pequeña, lo que choca con todas las ideas claras que podamos hacernos sobre la cantidad. (Carnot, 1803, p. 9)

No es extraño, por tanto, el asombro de Glaeser ante manifestaciones como las anteriores, tanto más cuanto que el tratamiento que se da a los números negativos en los manuales generales de historia de las matemáticas no permite prever el estado de cosas que revela la lectura de las fuentes primarias. En los textos de historia aparecen bastantes referencias a las dificultades que tuvo la comunidad matemática para asumir los números irracionales y complejos, pero muy pocas que hagan patente ese mismo problema en el caso de números negativos o racionales. Incluso los libros específicos de historia de los números o del álgebra siguen ese mismo esquema, estudiando en profundidad la génesis del número complejo o del irracional y muy superficialmente, en cambio, la del número negativo.

Según los manuales[8], en las matemáticas babilonias, egipcias, griegas y árabes no se admitieron las soluciones negativas de las ecuaciones ni el manejo de los números negativos aislados, aunque la necesidad de trabajar con sustraendos en los cálculos algebraicos obligó a Diofanto, en su *Arithmetica*, y a los matemáticos árabes a familiarizarse con las reglas de cálculo de números negativos. Por el contrario, chinos e hindúes utilizaron los números negativos, los reconocieron como tales en sus cálculos (la matemática china por medio del uso de palillos rojos o negros que simbolizaban número positivos o negativos; la hindú dándoles a los números negativos un sentido de "deudas" y a los positivos de "haberes") y parece que estos últimos los aceptaron, en algún caso, como soluciones de las ecuaciones. Incluso uno de ellos, Bhaskara, tenía en cuenta las dos determinaciones, positiva y negativa, de la raiz cuadrada.

Se cita a Fibonnacci como el primer matemático europeo que, en su obra *Flos*, fechada en 1225, y ante una ecuación cuya única solución era negativa, dice que el enunciado del problema es absurdo y que donde éste señala un haber hay que suponer una deuda. También se dice que Chuquet fue el primero que, en su *Triparty* de 1484, escribió números negativos aislados y los aceptó como soluciones de las ecuaciones[9] y como exponentes de las potencias, aunque parece que el que generalizó el uso de exponentes negativos fue Wallis en su *Arithmetica Infinitorum* editada en 1655.

Se señala, a continuación, que la problemática sobre las soluciones negativas de las ecuaciones siguió en pie en los siglos XVI y XVII, con el agravante de que la resolución de la cúbica, propuesta por Cardano en 1545 en su *Ars Magna*, dio lugar a la aparición de raíces cuadradas de

---

[8] Nos referimos a los siguientes: Bell (1945), Boyer (1986), Cajori (1991), Collette (1973-79), Crossley (1987), Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), Eves (1969), Kline (1992), Rey Pastor y Babini (1951), Smith (1958), Van der Waerden (1985) y Wussing (1998).

[9] Aunque según Sesiano (1985), la primera solución negativa de una ecuación aparece en un manuscrito provenzal escrito alrededor de 1430.

números negativos. A partir de ahí, la atención de los libros de historia de las matemáticas suele desplazarse hacia los problemas que planteó la aparición de los números complejos, cesando casi totalmente las referencias a las posibles dificultades de los matemáticos a la hora de asumir los números negativos.

Además de lo dicho anteriormente, la lectura de los diferentes manuales de historia consultados nos proporciona la siguiente relación de noticias sobre los números negativos, compendio de las encontradas en los diferentes textos:

- La mayoría de los matemáticos del Renacimiento y de los siglos XVI y XVII no los aceptaban como números ni tampoco como soluciones de las ecuaciones, llamándoles 'números absurdos', 'ficticios' (parece ser que fue Stifel, en su *Arithmetica integra* de 1544, el primero en nombrarlos de esa manera) o 'raíces falsas' de las ecuaciones. Varios matemáticos (por ejemplo, Descartes en la tercera parte de su *Géométrie*, publicada en 1637) estudiaron las transformaciones que tenía que sufrir un ecuación para hacer desaparecer las raíces negativas.

- Vieta, en su obra *Isagoge* de 1591, no pudo establecer en toda su generalidad las relaciones existentes entre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones algebraicas porque no consideraba las raíces negativas o complejas, siendo Girard quien, en su *Invention nouvelle en l'algèbre* de 1629, pudo, por fin, enunciarlas al tener en cuenta todo tipo de raíces; consideración, esta última, que le permitió también conjeturar el teorema fundamental del álgebra.

- El hecho de que los números negativos sean menores que cero fue causa de dificultades. Por ejemplo, Arnauld (1612-94) dio un argumento que se hizo famoso, consistente en decir que si -1 es menor que 1, la proporción $-1 : 1 :: 1 : -1$ indicaría que un menor es a un mayor como un mayor es a un menor, lo cual, según el autor del argumento, era un absurdo (Kline, 1992, vol. 1, p. 338). También se comenta que Wallis, en su *Arithmetica Infinitorum* de 1655, decía que, dado que la razón $1 : 0$ es infinita y que -2 es menor que 0, la razón $1 : -2$ tenía que ser mayor que infinito (Cajori, 1991, p. 185).

- Se cree que Hudde fue el primer matemático que, en su contribución a las *Exercitationes mathematicae* de Van Schooten publicadas en 1656-57, utilizó coeficientes literales en una ecuación para indicar números reales cualesquiera, positivos o negativos. Por otro lado, los primeros en utilizar coordenadas negativas fueron Wallis, en su obra *De sectionibus conicis* de 1655, y Newton, en su *Enumeratio linearum tertii ordinis* de 1704.

- Leibniz, Bernouilli, Euler y d'Alembert, entre otros, participaron en una discusión sobre la existencia y naturaleza del logaritmo de un número negativo que resolvió, definitivamente, Euler en 1747, estableciendo su carácter complejo.

- Wessel estableció en 1799 la representación gráfica de los números complejos por medio de vectores. Como consecuencia, también los números reales, negativos y positivos, pudieron ser representados mediante vectores sobre la recta real con sentidos opuestos. La obra de Wessel no tuvo apenas difusión y la representación vectorial de los complejos fue posteriormente redescubierta por Argand y Gauss.

Aunque todos estos hechos considerados en su conjunto son un indicio de la existencia de problemas a la hora de asumir el número negativo, lo cierto es que cuando se encuentran, como es el caso, dispersos entre diferentes textos y mezclados con otros muchos sucesos históricos, no producen el mismo efecto y, como consecuencia, las dificultades habidas en la construcción del número negativo pasan bastante desapercibidas.

Además, los manuales de historia suelen dejar de hablar de las dificultades que plantearon los números negativos en cuanto empiezan a historiar las matemáticas del siglo XVIII, con lo que dan la impresión de que para entonces dejaron de ser un problema. En este sentido, es significativo que Boyer, para indicar hasta qué punto estaba atrasada la matemática inglesa de finales del XVIII y principios del XIX, dice que:

> Mientras los matemáticos del continente desarrollaban la representación gráfica de los números complejos, en Inglaterra se oían declaraciones en las que se negaba validez incluso a los números negativos. (Boyer, 1986, p. 710),

sin tener en cuenta que, por esas fechas, en el continente, a la vez que, efectivamente, se desarrollaba la representación gráfica de los números complejos, se estaban haciendo declaraciones parecidas. Únicamente Kline (1992, vol. 3, pp. 783-85) dedica algún párrafo a comentar que los números negativos no fueron bien comprendidos hasta épocas muy recientes y cita para apoyar su tesis, aunque muy brevemente, a Euler, Carnot y De Morgan.

En este panorama, el artículo de Glaeser supone un punto de inflexión respecto al tratamiento histórico dado a los números negativos. En él, a través de una interesante selección de textos de matemáticos de distintas épocas, se muestra cómo éstos han constituido una constante fuente de problemas para la comunidad matemática y cómo su estatuto matemático actual se alcanza en la segunda mitad del siglo XIX, después de más de veinte siglos de historia. Posteriormente, y en parte como consecuencia de la resonancia alcanzada por dicho artículo, se desarrollan bastantes trabajos que contribuyen, bien a precisar cuándo y en qué condiciones hicieron su aparición los números negativos, bien a poner de manifiesto su conflictiva evolución hasta llegar al concepto actual[10], lo que no obsta para que se siga reconociendo que el estudio sistemático de la historia del número negativo aun está por hacer (Schubring, 2005; Schubring. 2014).

I.5. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: la aportación de Glaeser

Según Glaeser, en la evolución histórica de la noción de número negativo desde sus primeras emergencias hasta el concepto actual, se pueden constatar los siguientes obstáculos:

> 1. *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.*
> 2. *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.*
> 3. *Dificultad para unificar la recta real.* Esto se manifiesta, por ejemplo, cuando se insiste sobre las diferencias cualitativas entre las cantidades negativas y los números positivos; o cuando se describe la recta como una yuxtaposición de dos semirrectas opuestas portadoras de símbolos heterogéneos; o cuando existe un rechazo a considerar simultáneamente los caracteres dinámicos y estáticos de los números.
> 4. *La ambigüedad de los dos ceros.*
> 5. *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas* (por oposición al estadio de las operaciones formales). Esto es, la dificultad de distanciarse de un sentido "concreto" atribuido a los entes numéricos.
> 6. *Deseo de un modelo unificador.* Deseo de hacer funcionar un "buen" modelo aditivo, igualmente válido para ilustrar el dominio multiplicativo donde este modelo es inoperante. (Glaeser, 1981, p. 308)

Aun cuando Glaeser, en un principio, no da más explicaciones sobre la naturaleza de dichos obstáculos, los diversos comentarios que va haciendo a medida que presenta textos matemáticos de autores de diferentes épocas nos permiten entender mejor a qué se refiere:

- *Falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas.* Indica con esto el hecho, observable en la obra de Diofanto, de que la necesidad de

[10] Podemos citar, entre ellos, a: Boyé (2002), Brousseau (1983), Dell'Aquila y Ferrari (1995), Duroux (1982), Fischbein (1987), Gallardo (2002, 2008, 2010), Gobin et al. (1996), Hefendhel-Hebeker (1991), Kline (1985), Lay-Yong y Tian-Se (1987), Lizcano (1993), Milazzo y Vacirca (1983), Pycior (1981), Schubring (1986, 1988, 1997, 2005), Sesiano (1985), Thomaidis (1993), Vargas-Machuca et al. (1990), Vlassis (2004a).

efectuar cálculos algebraicos con diferencias y, en particular, la necesidad de multiplicar dos diferencias, le lleva a enunciar la regla de los signos y, sin embargo, no acepta la existencia de números negativos aislados.

- *Dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas.* En la obra de algunos matemáticos (Stevin, D'Alembert, Carnot y, posiblemente, Descartes) se constata que conciben la existencia de soluciones negativas de las ecuaciones, las "ven" y las tienen en cuenta, pero no pueden aceptarlas como cantidades reales y las justifican diciendo, por ejemplo, que son cantidades ficticias que expresan un defecto en el enunciado del problema.

- *Dificultad para unificar la recta real.* En el intento de sobrepasar el obstáculo anterior interpretando las cantidades negativas como cantidades reales, se observa que algunos matemáticos (McLaurin, D'Alembert, Carnot y Cauchy) concebían los negativos y los positivos en términos antinómicos: "lo negativo" neutralizaba, se oponía a "lo positivo", pero era de naturaleza distinta. Es decir, la cantidad negativa era tan real como la positiva, pero estaba tomada en un sentido opuesto. Esta heterogeneidad que se establecía entre negativos y positivos no facilitaba su unificación en una única recta numérica y, en cambio, favorecía el modelo de dos semirrectas opuestas funcionando separadamente. Además, esta manera de entender la cantidad negativa establecía una distinción entre cantidades sin signo que representaban medidas estáticas de magnitudes y cantidades con signo que indicaban medidas dinámicas, es decir, medidas a las que el signo añadía una componente operatoria.

- *La ambigüedad de los dos ceros.* Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, McLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada"[11].

[11] Hay que tener en cuenta, como muy bien señala Glaeser (1981, p. 239), que el establecimiento de las escalas de temperatura Celsius o Réaumur, uno de los hechos que pudo contribuir a la aceptación de un cero origen y de cantidades por debajo de cero, fue bastante tardío. Réaumur realizó sus primeros termómetros en 1730 y Celsius en 1742, pero tardaron casi un siglo en popularizarse. Antes de eso, en 1713, Fahrenheit había propuesto otra escala de temperatura que refleja claramente el deseo de evitar los números negativos.

- *El estancamiento en el estadio de las operaciones concretas.* La superación de los obstáculos anteriores permite aceptar los números negativos como cantidades reales y justificar su estructura aditiva, pero no así la estructura multiplicativa. El problema de justificar la regla de los signos lo resolvió definitivamente Hankel, en sus *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen* de 1867, cuando propuso prolongar la multiplicación de $\mathbb{R}^+$ a $\mathbb{R}$ respetando un principio de permanencia que conservara determinadas "buenas propiedades" de la estructura algebraica de los reales positivos[12]. Esto, a juicio de Glaeser, supone un cambio total de perspectiva en la resolución del problema:

> Ya no se trata de descubrir en la Naturaleza ejemplos prácticos que "expliquen" los números enteros[13] de un modo metafórico. Estos números ya no son *descubiertos*, sino *inventados*, *imaginados.* (Glaeser, 1981, p. 337)

Se trata, por el contrario, de una justificación puramente formal basada en necesidades internas de las matemáticas.

Al hecho de creer que una noción matemática debe tener un referente en el mundo físico que le dé sentido y a partir del cual se puedan justificar sus propiedades, es a lo que Glaeser parece llamar "estadio de las operaciones concretas". Esta creencia se relaciona, según el autor, con una corriente ideológica muy amplia que se inicia en los *Elementos* de Euclides e impregna todo el pensamiento matemático hasta fines del siglo XIX. Se caracteriza por suponer que los objetos matemáticos son objetos del mundo físico que han sido suficientemente idealizados para poder insertarlos en un discurso hipotético-deductivo, lo cual permite que allí donde ese razonamiento deductivo no alcanza, pueda recurrirse al "pensamiento natural", el "sentido común" o la "intuición" como medio de justificación del discurso matemático. Pero esta forma de entender las matemáticas, que posee indudables ventajas, también tiene serios inconvenientes, como el que se plantea cuando a través del razonamiento deductivo se demuestran propiedades que repugnan a la "razón natural". Glaeser atribuye a

[12] El primero en enunciar el, posteriormente, llamado 'principio de permanencia de las leyes formales' parece ser que fue Peacock. Un estudio detallado del tema puede encontrarse en Novy (1973), Fisch (1999) y Pycior (1981).

[13] En realidad, en vez de 'números enteros', debería decir 'números reales' o 'números reales negativos' puesto que se está refiriendo a la construcción de $\mathbb{R}$ a partir de $\mathbb{R}^+$ que hace Hankel. Esta confusión terminológica, muy frecuente en los trabajos sobre el tema, es, probablemente, una consecuencia del cambio que ha sufrido el lugar de aparición de los números negativos en el discurso matemático. Anteriormente, los números negativos aparecían al simetrizar respecto a la suma los reales positivos, o al menos, los racionales positivos, mientras que, hoy en día, aparecen por primera vez en la simetrización aditiva de $\mathbb{N}$.

matemáticos como Stevin, Euler, D'Alembert, Carnot y Laplace este tipo de ideología, mientras que la postura de Hankel representa la superación del obstáculo y

> se inscribe en un vasto *rechazo de la ideología de la luz natural.* (Glaeser, 1981, p. 340)

- *Deseo de un modelo unificador.* Es el deseo, largamente sentido por la comunidad matemática, de encontrar un buen modelo concreto que justifique tanto la estructura aditiva como la multiplicativa de los números enteros y que pueda ser comprendido con relativa facilidad por las personas que están en vías de aprenderlos. Su existencia hubiera evitado la necesidad de superar el obstáculo anterior, pero hasta hoy no ha sido encontrado y los que se utilizan habitualmente en la enseñanza, como, por ejemplo, el modelo de ganancias y pérdidas, sólo explican satisfactoriamente la estructura aditiva, pero a costa de convertirse en un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa. También aquí la obra de Hankel ha supuesto la superación del obstáculo al rechazar la búsqueda de un modelo explicativo de los enteros.

Glaeser concluye diciendo que sería necesario realizar experiencias con los alumnos para comprobar si alguno de los obstáculos puestos en evidencia en el estudio histórico se reproduce en los procesos de enseñanza actuales. Añade también que su investigación pone de manifiesto que los modelos concretos, habitualmente utilizados en la enseñanza de los números enteros, son un obstáculo para la comprensión de su estructura multiplicativa.

I.6. Obstáculos epistemológicos en los números negativos: otras aportaciones

Son varios los autores que, a raíz del trabajo de Glaeser, discuten el tema de los obstáculos epistemológicos en los números negativos. Entre ellos, Duroux (1982) hace hincapié en que la definición de obstáculo epistemológico propuesta por Brousseau exige que el obstáculo sea un conocimiento, no una falta de conocimiento. De hecho, toda concepción es un conjunto de conocimientos asociado a un campo de problemas en el que tiene éxito y es, precisamente, la experiencia de su validez en un cierto ámbito lo que, a veces, la convierte en un obstáculo. Teniendo esto en cuenta, Duroux considera que los dos primeros obstáculos epistemológicos propuestos por Glaeser: la "falta de aptitud para manipular cantidades negativas aisladas" y la "dificultad para dar sentido a las cantidades negativas aisladas", no debieran ser considerados como tales pues sólo indican un déficit de conocimiento[14].

Sin embargo, la "dificultad para unificar la recta real", puede ser, según Duroux, un síntoma de una posible concepción obstáculo caracterizada por considerar a los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos. Añade, además, que la concepción del número como expresión de la medida de una cantidad de magnitud, concepción trasmitida por la enseñanza elemental, puede estar en la base de la diferente consideración de positivos y negativos, dado que entonces el número negativo sólo puede interpretarse como una medida "a la inversa", como un objeto compuesto de dos partes: el signo $-$ y una medida, mientras que el positivo representa, sin más, una medida. Esto puede llevarnos a interpretar los números enteros negativos como algo radicalmente distinto de los números naturales y no como su prolongación.

Brousseau (1983) argumenta en la misma línea que Duroux, insistiendo en que hay que distinguir entre un "obstáculo" en el sentido de Bachelard y una "dificultad", sugiriendo que lo que propone Glaeser son "dificultades" que pueden servir como punto de partida para la búsqueda de los verdaderos "obstáculos":

> Muy a menudo, es entre las "dificultades" donde hay que buscar los indicios de los obstáculos, pero para satisfacer la primera condición que dice que un **obstáculo es un conocimiento**, el investigador deberá hacer un esfuerzo para reformular la "dificultad" que estudia en términos, no de una falta de conocimiento, sino de conocimiento (falso, incompleto. . .). (Brousseau, 1983, p. 190)

Pero además es necesario establecer, no sólo los errores, dificultades y resistencias que ese obstáculo produce, sino también el dominio donde se revela eficaz:

> Y hay que hacer notar que no basta con identificar las dificultades y los fracasos del conocimiento-obstáculo, sino también, y sobre todo, sus **éxitos**. (Brousseau, 1983, p. 192)

En este sentido, cita también las dos primeras "dificultades" propuestas por Glaeser, poniendo de manifiesto su formulación en términos de falta

[14] En realidad, aun cuando Glaeser empieza su artículo refiriéndose a Bachelard y Brousseau, enseguida aclara que considera prematuro precisar demasiado el término 'obstáculo' y que lo utiliza con un sentido amplio, equiparándolo a 'dificultad', 'umbral', 'síntoma', etc.

de conocimiento, establecida además desde la perspectiva del conocimiento actual.

> Esa formulación muestra lo que falta, a Diofanto o a Stevin, **visto desde nuestra época**, en nuestro sistema actual. (...) Pero esa formulación enmascara la necesidad de comprender por qué medios se abordaban los problemas que hubieran necesitado la manipulación de cantidades negativas aisladas. ¿Se planteaban esos problemas? ¿Cómo se resolvían o creían poder resolverlos? Lo que a nuestros ojos es una dificultad, ¿era percibido de la misma manera en su época? ¿Por qué ese "estado de conocimiento" parecía suficiente, sobre qué conjunto de cuestiones resultaba razonablemente eficaz? ¿Qué ventajas procuraba el "rechazo" a manipular cantidades negativas aisladas o qué inconvenientes permitía evitar? Ese estado, ¿era estable? ¿Por qué las tentativas de modificarlo o, más bien, de renovarlo fracasaron en su momento? Quizá hasta que aparecieron nuevas condiciones y se llevó a término un trabajo "lateral", ¿pero cuál?
>
> Estas cuestiones son necesarias para entrar en la intimidad de la construcción de los conocimientos (...); lo que sería muy útil para la enseñanza. (Brousseau, 1983, pp. 190-91)

En el intento de encontrar el obstáculo u obstáculos que puedan estar detrás de esas dificultades, Brousseau (1983, p. 191) hace la hipótesis de que el empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de "positivo" o "negativo" a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. Por ejemplo, dependiendo de la situación, la entrada y salida de productos en un comercio puede notarse positiva o negativamente. Esos números, considerados aisladamente son números sin signo, puesto que representan medidas de magnitudes; el signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter "relativo" de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación[15] y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

También retoma la propuesta de Duroux, respecto a que la concepción de los números negativos como objetos de naturaleza distinta a los positivos

[15] Es sintomático que en Francia, coloquialmente, usan los términos 'les relatifs' o 'les entiers relatifs' para nombrar a los números enteros, mientras que cuando dicen 'les entiers' suelen sobreentender los números naturales. También los anglosajones usan con profusión las palabras 'directed numbers' para referirse a los números enteros, reservando, con frecuencia, el término 'integers' o 'whole numbers' para nombrar a los naturales. De hecho, la expresión 'número entero' surge como oposición a 'número fraccionario' o 'quebrado' e, inicialmente, hacía referencia a los números naturales.

pudo ser un obstáculo a la homogeneización de los dos tipos de números y su inclusión en una única clase: la de los enteros, pero advierte de que, tanto la "relatividad de positivos y negativos" como "la diferente naturaleza de los negativos respecto a los naturales", son sólo candidatos a obstáculo y que su aceptación como tales exige probar la resistencia de esas concepciones a evolucionar y los errores repetidos que produjeron. Brousseau piensa que en el intento de probar el carácter de obstáculo de estas concepciones es muy probable que se haga evidente la existencia de un obstáculo todavía más antiguo: "la concepción del número como medida", es decir, la idea de que un objeto matemático sólo puede recibir la consideración de número si representa o puede representar la medida de una cantidad de magnitud.

Schubring (1986, 1988) realiza un trabajo parecido al de Glaeser, pero analizando, sobre todo, textos escritos por matemáticos alemanes y llegando a la conclusión de que la historia del número negativo en Alemania difiere sensiblemente de lo sucedido en Francia o en Inglaterra. Según él, Alemania no conoció el rechazo del estatuto matemático de los números negativos que se observa en Francia (Glaeser, 1981) o en Inglaterra (Pycior, 1981; Kline, 1985), hecho que atribuye a la influencia ejercida por la teoría filosófica de las "cantidades opuestas", desarrollada, entre otros, por Kant en su opúsculo *Versuch den Begriff der negativen Größen in die Weltweisheit einzufüren* de 1763. Sin embargo, dicha teoría no es totalmente ajena al pensamiento francés; de hecho, se encuentran vestigios de la misma en textos de d'Alembert y Cauchy citados por el propio Glaeser[16] y, precisamente, este último señala que pudo suponer un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números negativos. Schubring no hace ninguna referencia a esta posibilidad, ni tampoco aclara de qué manera se justificó en Alemania la regla de los signos a partir de la teoría de las cantidades opuestas.

Asimismo, y en particular, pone en duda los obstáculos que Glaeser constata en la obra de McLaurin. Según Schubring (2014), Glaeser analiza la obra de McLaurin utilizando una traducción francesa, y él considera que los obstáculos se encuentran en dicha traducción antes que en el original, siendo la primera un ejemplo de un proceso de transmisión entre dos comunidades matemáticas con visiones epistemológicas diferentes.

A la hora de explicar la difícil emergencia del número negativo, Schubring recurre también al término 'obstáculo', pero con un sentido distinto

[16] En un artículo posterior, Schubring (1997) constata que en Francia se desenvolvió también una noción de "oposición" de cantidades que contribuyó al desarrollo de los conceptos de número complejo, vector, segmento y ángulo orientado, etc.

al usado por los autores anteriores. Así dice (1986, pp. 22-24) que las principales causas de impugnación de los números negativos como objeto plenamente matemático pertenecen a tres grandes categorías:

- *Obstáculos internos a las matemáticas.* Dentro de esta categoría señala la dificultad para distinguir entre cantidad, magnitud y número. Históricamente, el concepto básico de las matemáticas ha sido el de "cantidad", pero, hoy en día, ese término ha dejado de representar una noción matemática precisa, siendo sustituido por el de "número". A juicio de Schubring, uno de los hechos que obstaculizó el proceso de conceptualización del número negativo fue la tardía diferenciación entre número, cantidad y magnitud que revela la lectura de textos matemáticos franceses. Según él, se trata de un fenómeno localizado que no puede extenderse a otros países como, por ejemplo, Alemania, donde un desarrollo temprano del concepto de número, separado de los de cantidad y magnitud, evitó parte de las dificultades observadas en el país vecino.

- *Obstáculos epistemológicos.* Considera como tales, los que se refieren a:

> Las epistemologías subyacentes a la trasmisión del saber científico a la sociedad en general. Por "epistemología" se puede entender las concepciones sobre las condiciones de "existencia" de las entidades matemáticas. Estas epistemologías se presentan con la siguiente alternativa:
>
> - una epistemología sustancialista (u ontológica), según la cual los conceptos se justifican por reducción a unos entes a los que se concede una existencia semejante a la del mundo físico;
>
> - una epistemología sistémica, donde la existencia está justificada por la coherencia del campo conceptual y los conceptos no deben satisfacer más que condiciones internas a las matemáticas. (Schubring, 1986, p. 23)

En opinión del autor, la opción por una u otra de estas alternativas puede ser responsable de alguna de las rupturas descritas en el ámbito de los números negativos. Se observa aquí una cierta coincidencia entre Schubring y Glaeser respecto a un posible obstáculo, aun cuando le dan nombres distintos: el primero le adjudica el término genérico de 'obstáculo epistemológico', mientras que el segundo le llama 'estancamiento en el periodo de las operaciones concretas'.

- *Arquitectura de las matemáticas.* Se refiere con esto a una tercera categoría de obstáculos que tienen que ver con la importancia que en cada época se ha concedido a las distintas ramas de las matemáticas, en particular, al álgebra y a la geometría. El hecho de que las dos tengan igual importancia favorece a nociones, como la de cantidad, integradoras de los dos ámbitos, lo que perjudica el proceso de diferenciación entre número y cantidad; si se considera a la geometría como la rama más importante de las matemáticas, la cantidad se convierte en la noción básica de las matemáticas y la de número es una noción subsidiaria; por último, si es el álgebra la disciplina fundamental y la geometría un campo de aplicación del álgebra, se tiene entonces la concepción que sostuvo el proceso llamado de 'aritmetización de las matemáticas' con el número como noción básica. Schubring considera que muchas rupturas conceptuales pueden explicarse en términos de concepciones sobre la "arquitectura de las matemáticas":

> Las cuestiones sobre la arquitectura de las matemáticas son primordiales tanto para la didáctica como para la elaboración de programas de enseñanza, porque afectan a los problemas de transposición del saber científico en "secuencias didácticas", siguiendo un orden bien "lógico", bien "natural", bien "psicológico". Es también alrededor de estas cuestiones donde se expresan las visiones que los matemáticos sostienen ante el gran público. Así, me parece que esta categoría ha supuesto una aportación bastante determinante a los casos de rupturas. (Schubring, 1986, p. 24)

Como puede verse, la idea de obstáculo que maneja Schubring está muy alejada de la propuesta de Brousseau. Para empezar, no llama obstáculo a un conocimiento o conocimientos matemáticos que cumplen unos determinados requisitos de éxito en cierto campo de problemas, fracaso en otros y resistencia a la evolución, sino que parece, más bien, que entiende por obstáculos ciertos conocimientos meta-matemáticos que son, según él, las causas últimas de las rupturas observadas en el proceso de evolución del estatuto matemático de ciertas nociones; rupturas que, por otra parte, queda sin definir en qué consisten y cómo se reconocen. Únicamente en la primera categoría de obstáculos que propone, los 'obstáculos internos', hace referencia a conocimientos propiamente matemáticos y no de filosofía de las matemáticas, pero enseguida añade que esta categoría no parece haber sido la causa principal de las rupturas e, incluso, parece haber contribuido al lento progreso del estatuto matemático del número negativo, dejando en manos de las otras dos categorías: los "obstáculos epistemológicos" y la "arquitectura de las matemáticas", la responsabilidad de las tales rupturas.

Por otro lado, Brousseau califica de "epistemológicos" a los obstáculos encontrados en la enseñanza de las matemáticas si se constata que en alguna época histórica la comunidad matemática tuvo que franquear ese mismo obstáculo y las huellas de ese hecho pueden encontrarse en el discurso matemático actual. Sin embargo, Schubring utiliza el calificativo de "epistemológico" para referirse, como ya hemos dicho, a ciertas concepciones filosóficas sobre las condiciones de existencia de los objetos matemáticos que, a su juicio, están en el origen de los problemas surgidos en la evolución de los conceptos.

Schubring termina su artículo (1986, pp. 24-26) dando las razones por las que considera que la noción de obstáculo epistemológico en el sentido de Bachelard no es la adecuada para explicar las rupturas observadas en la historia de las matemáticas, pero no dice nada de la noción de obstáculo epistemológico en el sentido definido por Brousseau.

I.7. Otras contribuciones a la epistemología del número negativo

Posteriormente, aunque se produce una polémica a nivel general sobre el sentido y utilidad del concepto de obstáculo epistemológico en la didáctica de las matemáticas, polémica de la que hablaremos en un apartado posterior, no vuelve a discutirse el caso particular de los números negativos. Los trabajos sobre epistemología del número negativo, o bien no se expresan en términos de obstáculos epistemológicos, o bien hacen una utilización ambigua del término en la que caben sinónimos como 'dificultad', 'ruptura', etc., o bien repiten con pequeñas matizaciones lo ya dicho por Glaeser, Brousseau, Duroux o Schubring.

Pycior (1981), en un artículo contemporáneo del de Glaeser, analiza con detalle los comienzos del álgebra simbólica en Inglaterra y sostiene que la razón última de los trabajos de Peacock en ese campo fue la de justificar la utilización de los números negativos, frente a la postura de Maseres y Frend que preconizaban su abandono en aras de la coherencia lógica del discurso matemático, dadas las dificultades existentes para dar una definición adecuada de los mismos. Esta polémica la describe también Kline (1985) comentando textos de Frend, De Morgan, Hamilton, Boole y Peacock sobre los números negativos y el álgebra simbólica.

Varios autores comentan distintos textos históricos en los que aparecen números negativos:

- Lay-Yong y Tian-Se (1987) estudian el uso de números negativos en la resolución de sistemas lineales de ecuaciones en los *Nueve Capítulos*, uno de los textos fundacionales de la matemática china.
- Sesiano (1985) comenta también los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la aparición de soluciones negativas de las ecuaciones en las matemáticas medievales, estudiando, en particular, dos manuscritos provenzales y la obra de Fibonnacci, Chuquet y Pacioli.
- Haegel (1992) amplía el recorrido de Glaeser por las fuentes primarias, recogiendo otras varias manifestaciones sobre los números negativos efectuadas por los matemáticos en distintos momentos históricos.

- Dell'Aquilla y Ferrari (1995) analizan escritos de Chuquet, Vieta, Stifel y Stevin, llegando a la conclusión de que en el siglo XVI la comunidad matemática conoce las reglas de cálculo con números negativos y las utiliza, pero ningún matemático de la época considera los negativos como números de la misma naturaleza que los positivos, aceptando algunos de mejor o peor grado las soluciones negativas de las ecuaciones, mientras otros las ignoran sistemáticamente o las rechazan expresamente.
- Gómez (2001) hace también un recorrido por autores de distintas épocas históricas, estudiando las justificaciones que proponen para la regla de los signos del producto de números positivos y negativos.

Por otro lado, Thomaidis (1993) analiza el papel de los números negativos en la construcción de los logaritmos de Napier y en textos de Vieta y Descartes referentes a la resolución de ecuaciones. Justifica este estudio defendiendo que existe relación entre la historia y la didáctica de las matemáticas y que el caso de los números negativos revela aspectos importantes de dicha relación. Concluye que, en el siglo XVII, el significado y la estructura del número negativo estaba muy ligado al contexto matemático específico en que éste aparecía: no es lo mismo el negativo que aparece en el contexto de los logaritmos que el que aparece en el contexto de la resolución de ecuaciones; en el primero no es necesario, por ejemplo, definir el producto de negativos o discutir su estatuto como cantidad, mientras que en el segundo sí lo es. Además, considera que las características de este concepto en el siglo XVII responde a lo que tanto Brousseau como Chevallard han llamado 'concepto paramatemático', es decir, un instrumento de trabajo del que los usuarios son conscientes y pueden describir sus propiedades, pero que no constituye un objeto de estudio en si mismo.

Fischbein (1987) y Hefendehl-Hebeker (1991) recogen lo dicho por Glaeser añadiendo alguna información y opinión adicional. Fischbein hace hincapié en que el principal obstáculo es el hecho de que el número negativo contradice el concepto de número inicialmente desarrollado en la historia de las matemáticas. Señala también la imposibilidad de encontrar un buen modelo concreto, intuitivo y familiar, que dé cuenta de todas sus propiedades y retoma una propuesta de Freudenthal en el sentido de que la enseñanza de los números negativos se afronte, desde el principio, de manera puramente formal, pues es la primera oportunidad que tienen los alumnos de aprender un concepto que ha surgido por razones internas a las propias matemáticas. A su vez, Hefendehl-Hebeker aporta más datos al comentario de textos realizado por Glaeser, estudiando especialmente el cambio conceptual que supuso la postura de Hankel.

Schubring (2005) hace una revisión muy detallada de la historia del número negativo, con especial incidencia en los siglos XVII a XIX. En ella se hace una descripción pormenorizada de la controversia entre dos matemáticos franceses del siglo XVII, Arnauld y Prestet, acerca de la naturaleza y existencia de los números negativos por considerar que fue la primera controversia pública sobre el tema.

Maz (2005) hace un breve resumen de la historia del número negativo en los siglos XVIII y XIX y define una "parrilla para la caracterización del contenido sobre los números negativos" que le permite estudiarlos en los libros de texto españoles de esos mismos siglos.

Otros autores relacionan la historia del número negativo con las dificultades de los alumnos o las propuestas de enseñanza. En particular, Gallardo (2002) efectúa un estudio epistemológico como paso previo previo a la realización de un estudio clínico sobre los razonamientos de varios alumnos al resolver problemas aritméticos. Considera que históricamente se han dado cuatro interpretaciones del número negativo: como sustraendo, como medida de magnitudes relativas o dirigidas, como número aislado resultado de una operación o solución de una ecuación y como número negativo formal, entendido como una extensión de los números positivos. Relaciona estos niveles de aceptación del número negativo con la distinción entre dos tipos de lenguaje y de métodos de resolución de problemas: el aritmético y el algebraico. Finalmente, reconoce estas mismas interpretaciones del número negativo en los alumnos entrevistados.

Milazzo y Vacirca (1983), Vargas-Machuca et al. (1990) y Gobin et al. (1996) desarrollan propuestas de enseñanza de los números enteros, precedidas de estudios sobre la naturaleza de los números negativos y su historia donde se mencionan posibles dificultades u obstáculos. Los primeros consideran que en la historia del número negativo aparecen dos tipos de dificultades: la idea de que un número debía expresar solamente la medida de una magnitud absoluta y la falta de una justificación intuitiva de la regla de los signos, dificultades ya señaladas por autores anteriores. Pero además, añaden que la primera dificultad se superó cuando se aceptaron las magnitudes dotadas de dirección.

También Vargas-Machuca et al. coinciden con autores anteriores en que:

> El gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia, profundamente enraizada en la experiencia de cada

> cual, que identifica número con cantidad y que se vio favorecida por la concepción que de las matemáticas predominó hasta el siglo XIX: las matemáticas describen y demuestran verdades acerca del mundo real. La ruptura con esta concepción hizo posible el nacimiento de las geometrías no euclídeas, el surgimiento del álgebra abstracta y el reconocimiento de los números enteros negativos como extensión formal de los naturales. A su vez, todos estos logros influyeron en que se impusiera la nueva concepción de las matemáticas como creación intelectual del hombre. (Vargas-Machuca et al., 1990, p. 152)

En cuanto a Gobin et al., comentan de nuevo distintos textos históricos, siguiendo la línea del artículo de Glaeser, con el objeto de señalar en qué contextos aparecieron y funcionaron los números enteros y cuáles son los obstáculos que se oponen a su comprensión y utilización. Respecto a la primera cuestión, concluyen que dichos contextos fueron: la recta real, la resolución de ecuaciones y el cálculo algebraico en general, pero llaman la atención sobre el hecho de que el contexto de la recta real, que suele ser el más utilizado en la enseñanza, fue el más tardío históricamente, apareciendo con una diferencia de bastantes siglos respecto a los otros dos. En lo que se refiere a los obstáculos, señalan, una vez más, que los modelos concretos usados para dar sentido a la adición de enteros son un obstáculo para la comprensión del producto de enteros, así como la concepción, favorecida por el uso de los números naturales, de que la suma supone un aumento, la resta una disminución y el producto una suma repetida. También hacen notar el hecho de que, históricamente, la escritura de una letra sin signo o precedida del signo $+$ representaba siempre un número positivo, mientras que si estaba precedida del signo $-$ representaba un número negativo, tardándose mucho tiempo en aceptar que una letra pudiera representar, indistintamente, números positivos o negativos.

Comentario aparte merece, por su detalle y profundidad, el trabajo de Lizcano (1993) sobre la epistemología de los números negativos. Su tesis es que el lenguaje, las representaciones simbólicas, las formas de razonar y las técnicas propias de cada sociedad determinan, en gran parte, las matemáticas que pueden ser pensadas, creadas, en el seno de esa sociedad. Las matemáticas:

> ...emergen contaminadas por las significaciones imaginarias colectivas que laten en la razón común propia de cada época y cada cultura. (Lizcano, 1993, p. 13)

Para probar esto el autor elige una noción matemática: los números negativos, y tres culturas distintas: la china antigua, la griega clásica y la alejandrina tardía y muestra cómo los diferentes imaginarios sociales permiten construir a la cultura china ciertas formas de negatividad que en la griega son absolutamente impensables y que sólo serán parcialmente asumidas en el periodo alejandrino, en un momento en el que el paradigma aristotélico-euclídeo pierde fuerza.

Lizcano no se expresa en términos de obstáculos, pero llega a establecer, después de un estudio muy pormenorizado, cuáles son las características de la cultura griega clásica que impidieron la aceptación de ciertas formas de negatividad que, sin embargo, en la cultura china se desarrollaron sin problemas:

> Así, las principales diferencias entre las matrices fundamentales de los imaginarios griego y chino son: i) pensar por abstracción (*aphaíresis*) y determinación, en términos de géneros y especies, *vs.* pensar por analogía, simetría o equivalencias; ii) asumir principios como el de identidad o no-contradicción como principios primeros (tanto del ser como del pensar) *vs.* una matriz preconceptual que predispone (la realidad y el pensamiento) según criterios de alternancia de contrarios y oposiciones en torno a un hueco (*wu*) o centro; iii) suponer un espacio (y, en particular, un espacio de representación) que es extensión delimitada *vs.* un espacio simbólico marcado por la oposición, en el que los lugares significan; esto es, un espacio extenso *vs.* un espacio tenso; iv) la *negatividad* se ve así obligada a pensarse, en una tradición en términos de sustracción (*aphaíresis*) y del posible sentido de expresiones como 'nada', 'menos que nada', 'lado de un cuadrado de superficie menor que nada', 'sustraer una magnitud mayor de una menor', etc., mientras que, desde la otra tradición, se piensa en términos de opuestos articulados en torno a un quicio que, rigiendo su enfrentamiento, rige también su anulación recíproca (*jin*). (Lizcano, 1993, pp. 266-267)

La cita puede resultar un tanto críptica para el lector que no esté familiarizado con el trabajo de Lizcano, pero como será necesario volver sobre ella en el contexto de nuestro propio estudio epistemológico, posponemos su comentario hasta ese momento.

Lo que sí queremos hacer ahora es llamar la atención sobre el hecho de que Lizcano, cuando se refiere a las matemáticas chinas o griegas de la Antigüedad, no habla de 'números negativos' sino de 'negatividad' o 'formas de negatividad'. Para él, llamar 'números negativos' a ciertos objetos considerados generalmente como antecedentes históricos de los mismos, presupone la reducción de los significados de cada época a los significados actuales, lo que sesga irremediablemente el análisis epistemológico. Según sus palabras:

> Sólo desde un ideal y definitivo final de la historia, y sólo en la creencia de que los 'hechos' y los 'objetos' teóricos atraviesan las épocas y las civilizaciones sin irse haciendo/deshaciendo/rehaciendo en esa travesía, pueden formularse enunciados habituales como 'las dificultades de Diofanto con las magnitudes negativas', o 'los griegos no las admitieron', o 'los matemáticos de la época de los Han fueron los primeros en descubrirlas'. ¿Dónde, pues, estaban antes?

> ¿Qué las cubría? ¿Cómo puede no admitirse lo que no se conoce ni puede siquiera pensarse? ¿Qué destino común les estaba ya urdiendo la historia a las *leíponta eídē* diofánticas y a los lugares opuestos en los cuadrados mágicos de la antigua China para que ambos puedan alojarse, desde su misma gestación, bajo un único concepto? ¿Qué sentido tiene decir, como hace algún prestigioso historiador de las matemáticas, que los chinos no tuvieron dificultades con 'la idea de los números negativos' porque estaban acostumbrados a calcular con palillos de dos colores (rojos y negros), cuando los supuestos 'números negativos' no eran ninguna otra cosa *aparte* de esos palillos (los negros)?
>
> Intentando evitar, por tanto, la ilusión de identidad de unos 'números negativos' cuya mítica búsqueda de los orígenes y posteriores cumplimientos se estuviera investigando, decidimos emplear en su lugar el término *'negatividad'* y mantenerlo voluntariamente impreciso. Este término cubría, en un primer momento, el conjunto heteróclito de 'antecedentes', 'embriones' y 'atisbos' de números negativos que suelen percibirse en torno a la sustracción de magnitudes y a las ecuaciones algebraicas (coeficientes, soluciones, etc.). Proyectar retroactivamente un concepto acuñado sólo mucho después puede facilitar la detección de 'antecedentes', pero no es su menor inconveniente el de no mostrar al investigador sino lo que éste ya ha puesto previamente e impedirle aprehender el proceso mismo de construcción de unos objetos matemáticos que sólo pueden incorporar los materiales que en ese momento tienen disponibles. (Lizcano, 1993 pp. 18-19)

Más recientemente, Glière (2007) estudia con mucho detalle la evolución del estatuto matemático de los números negativos desde la segunda mitad del siglo XVIII hasta comienzos del XX. Glière no habla de obstáculos epistemológicos, aunque conoce el artículo de Glaeser, pero sí de rupturas, contradicciones y dificultades en el paso de la cantidad negativa de D'Alembert al nmero negativo de Hankel. Empieza exponiendo la posición dubitativa de D'Alembert ante las cantidades negativas y su exigencia de fundamentación del álgebra. Sigue, presentando el intento de Carnot de sustituir las cantidades negativas aisladas por lo que él llama las 'cantidades directas e inversas', ligadas a la 'correlación de figuras' que establece en su *Géométrie de Position*. La continuación de la polémica se desarrolla en los manuales de enseanza del álgebra, cuyos autores: Clairaut, Bézout y Lacroix, tratan de establecer, no sin dificultad, puntos de encuentro entre las dos visiones. Finalmente, la influencia de la comunidad matemática, tanto inglesa como alemana, propiciará el paso definitivo a una definición formal del número negativo (Hankel) basada en las necesidades del álgebra abstracta. Por último, Glière estudia la influencia que la emergencia de la noción de vector ha tenido en la enseñanza de los números negativos hasta el presente.

I.8. Concepciones y obstáculos sobre los números negativos observados en los alumnos

Hasta ahora nos hemos ocupado de la dimensión histórica de los obstáculos epistemológicos, pero no podemos olvidarnos de su dimensión didáctica, es decir, de la constatación de dichos obstáculos en el mundo de la enseñanza. Lo primero que hay que notar es que, al día de hoy, no existen investigaciones que, expresamente, se propongan confirmar la existencia de los obstáculos históricos en los alumnos actuales[17]. Pero sí existen trabajos en los que el autor conoce los estudios epistemológicos sobre los números negativos y, aun cuando sus objetivos son otros, relaciona, o da lugar a que se pueda relacionar, algunos de sus resultados con los obtenidos en dichos estudios. En este apartado comentaremos aquellos que se acercan al tema de los obstáculos epistemológicos o que, al menos, definen estados de conocimiento que pueden asimilarse a la idea de concepción.

Coquin-Viennot (1985), analizando las estrategias de resolución empleadas y los errores cometidos por alumnos de 11 a 15 años en un cuestionario sobre números enteros, establece las cuatro concepciones siguientes:

a) Los números enteros se manejan como si se tratase de naturales: el signo $-$ se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que produce muchas respuestas erróneas. El número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positivo. Se reconoce que los enteros negativos son menores que los enteros positivos, pero la relación de orden entre los enteros negativos se establece en el mismo sentido que la de sus valores absolutos.

b) Se resuelven correctamente los problemas que ponen en juego la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$, pero se utiliza $\mathbb{N}$ siempre que sea posible y permita obtener la respuesta correcta; si no, se trabaja separando los positivos de los negativos, hasta el punto de que las simplificaciones en las sumas de varios sumandos no juegan ningún papel. No se produce la unificación del conjunto de los enteros, pero los unos se definen por oposición a los otros. Aparecen más respuestas correctas en las preguntas que afectan al orden entre enteros negativos, mientras que en los problemas en los que interviene la estructura multiplicativa de $\mathbb{Z}$ apenas se esbozan las soluciones.

c) Los problemas aditivos se resuelven en $\mathbb{Z}$, aun cuando puedan resolverse en $\mathbb{N}$, siempre que eso resulte más eficaz. Las estrategias de resolución

[17] Sobre la posibilidad de que esas concepciones u obstáculos aparezcan en profesores y libros de texto actuales no hay ningún trabajo.

en $\mathbb{Z}$ ponen de manifiesto su homogeneización: positivos y negativos son tratados como un todo, ya no se manejan por separado. La relación de orden entre enteros negativos se establece correctamente y empiezan a utilizarse las relaciones de compatibilidad existentes entre el orden y la suma de enteros. Podemos considerar que la recta numérica está ya unificada; sin embargo, los problemas que exigen poner en juego la estructura multiplicativa de $\mathbb{Z}$ no se resuelven correctamente.

d) Esta concepción engloba la concepción anterior con el añadido de que los problemas de tipo multiplicativo se resuelven correctamente, lo que indica que la estructura multiplicativa de $\mathbb{Z}$ ha sido asumida.

Para Coquin-Viennot estas cuatro concepciones representan una 'jerarquía de concepciones' en la que cada una supone una progresión, un paso adelante respecto a la anterior, en la adquisición del concepto de número entero. Entiende también que cada una de ellas es un obstáculo para la concepción siguiente. Así dice que la primera concepción se caracteriza por entender el número "en tanto que medida o cantidad" y que es necesario superar este obstáculo para poder acceder a la segunda concepción que se caracteriza por el hecho de que:

> ... el número negativo es definido por oposición al positivo; no existe más que *relativamente* al positivo; el símbolo − lo vuelve diferente, pero permanece como un número positivo en potencia: una deuda no es más que la *cantidad* de dinero que habrá que reembolsar cuando las arcas se llenen de nuevo. A este nivel de concepción, hay antagonismo entre dos grupos de números, cada uno de los cuales es necesario tratar, separadamente, como naturales, que se reúnen después por medio de un operador "menos". (Coquin-Viennot, 1985, p. 179)

Esta dicotomía entre enteros positivos y negativos constituye, a su vez, un obstáculo a la tercera concepción que asume la unificación de $\mathbb{Z}$, por lo menos en lo que a su estructura aditiva se refiere. Por último, la autora considera también que la tercera concepción es un obstáculo para la cuarta porque el buen dominio de la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$ que caracteriza a esta concepción se fundamenta, dadas las prácticas de enseñanza habituales, sobre modelos concretos que obstaculizan la asunción de la estructura multiplicativa de $\mathbb{Z}$.

Como vemos, la investigación de Coquin-Viennot, aun cuando su objetivo es el de determinar una jerarquía de concepciones, tiene muy en cuenta los trabajos sobre epistemología de los números negativos: los obstáculos que ella reconoce en los alumnos ya se han comentado anteriormente al hablar de la historia de los números negativos, lo que supone una primera confirmación de la existencia de tales obstáculos en la enseñanza de los números negativos. Además, su interpretación de las nociones de concepción y obstáculo está en la línea definida por la teoría de situaciones.

Vergnaud (1989) hace notar que son muchos los alumnos que se equivocan al restar un número negativo o dividir por él. También comenta que si en el transcurso de la resolución de una ecuación se llega a una expresión como, por ejemplo, $-x = 7$, muchos alumnos no saben continuar o dicen que la solución es $x = 7$. Considera que estos y otros errores pueden ser síntomas de la existencia de un obstáculo epistemológico: la reducción de la noción de número a la de medida de magnitudes, pero cree que sería necesario hacer investigaciones que confirmaran la hipótesis.

Iriarte et al. (1991) al analizar un cuestionario sobre números enteros propuesto a alumnos de Octavo de EGB y de Diplomaturas de Magisterio, hablan de 'ideas obstaculizadoras' que agrupan en dos apartados, el primero de los cuales refleja de nuevo el obstáculo del "número como medida", comentado con profusión en el ámbito de la historia:

> A) Lo real como obstáculo: el apego a la evidencia inmediata, a la intuición primaria de número como cantidad, obstaculiza de múltiples formas la construcción de $\mathbb{Z}$.
>
> B) La imposición de lo formal como obstáculo: la construcción del conocimiento formal es un logro que requiere la ruptura de concepciones previas. Si no es así, lo formal queda vacío de significado, y se convierte en mera apariencia que no tarda en desvanecerse. (Iriarte et al., 1991, p. 13)

Como ideas obstaculizadoras que se agruparían en el primer apartado citan las siguientes, acompañadas de un ejemplo de las preguntas y respuestas que las ponen de manifiesto:

A1 *El número como expresión de una cantidad.* Ejemplo: "¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido $-(-3)$?". "No, porque no es posible quitar una cosa que no existe".

A2 *La suma como aumento.* Ejemplo: "¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?". "No".

A3 *La multiplicación como multiplicación natural.* Ejemplo: "¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?". "No".

A4 *La sustracción como disminución.* Ejemplo: "¿Es posible encontrar un número que restado de 7 dé 10?". "No".

A5 *La división como división natural.* Ejemplo: "La siguiente división:

$$\begin{array}{r|l} 3 & 4 \\ \cline{2-2} -1 & 1 \end{array}$$

¿es correcta?". "No, porque 3 entre 4 no cabe", "no, porque 3 entre 4 cabe a 0", "no, porque el resto no puede ser negativo".

A6 *El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural.* Ejemplo: "¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3?". "El -4".

A7 *Ignorar el signo.* Ejemplo: "¿En Moscú están a -7 grados de temperatura y en Budapest a -3 grados. Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?". "Una bajada porque $7 - 3 = 4$".

A8 *Identificación de los símbolos literales con números positivos.* Ejemplo: "Si a es positivo y b es negativo, $a - b$ es un número positivo. Esta afirmación ¿es verdadera o falsa?". "No se sabe, depende de los valores que tomen a y b".

Las ideas obstaculizadoras que agrupan en el segundo apartado son las siguientes:

B1 *En el manejo del orden lineal*

Fracaso en la inversión de una relación de orden. Ejemplo: "El ordenador de Eva costó 12.000 ptas. más que el de Alejandro. El de Eva costó 52.000 ptas. ¿Cuánto costó el de Alejandro?". "$52.000+12.000 = 64.000$".

La secuencia temporal como fuente de errores. Ejemplo: "Sara gastó ayer en chucherías 8 ptas. más que hoy. Ayer gastó 35 ptas. ¿Cuántas ha gastado hoy?". "$35 + 8 = 43$".

Identificación de una relación con su recíproca. Ejemplo: "¿Qué número precede en 7 unidades a -3?". "El 4".

B2 *Las reglas de cálculo como formalismo vacío.* Se refieren aquí al hecho de que el aprendizaje de las reglas de cálculo con enteros como un mero formalismo desprovisto de significación provoca muchos errores, sobre todo en las sumas y restas de enteros, cuyas reglas resultan, al parecer, más difíciles de memorizar que las del producto de enteros.

B3 *Los enteros estudiados y olvidados.* Engloban en este apartado los errores que se producen porque los alumnos no se acuerdan de la existencia de los números negativos y no los tienen en cuenta a la hora de responder.

El trabajo de Iriarte et al. no se puede enmarcar en el ámbito de la teoría de situaciones; de hecho, las autoras no hablan de 'obstáculos' sino de 'ideas obstaculizadoras'. Sin embargo, están al tanto de las conclusiones epistemológicas sobre los enteros y establecen un paralelismo entre los obstáculos encontrados en la historia, principalmente la concepción del número como medida y la búsqueda de un modelo concreto, y algunas de las ideas obstaculizadoras definidas a partir de las respuestas de los alumnos.

Peled (1991) no tiene en cuenta las investigaciones sobre epistemología de los enteros, pero define, en función de las estrategias que utilizan los alumnos en las sumas y restas de dos números enteros, unos 'niveles de conocimiento' de la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$ que podrían ser reinterpretados en términos de concepciones. Se trata de niveles teóricos, es decir, no son el resultado del estudio estadístico de un cuestionario, como suele ser habitual, sino un "a-priori" que el autor propone como instrumento facilitador del análisis de observaciones posteriores. Además, a la hora de establecer esos niveles de conocimiento tiene en cuenta dos 'dimensiones': la recta real y la idea de cantidad, pues asegura que los alumnos tienen más de una 'imagen' sobre los números con signo y, según el tipo de problema que se les plantea, usan unas u otras. Los niveles de conocimiento que define son los siguientes:

Nivel 1

Dimensión de la recta numérica: Se acepta la existencia de los números negativos y se sitúan en la recta numérica a la izquierda del cero. Un número entero negativo es un número natural precedido del signo menos. Dados dos números enteros es mayor el que está situado a la derecha del otro en la recta numérica.

Dimensión de la cantidad: Los números negativos representan cantidades que tienen alguna característica desfavorable, cuya existencia se marca con el signo menos. Debido a esta connotación negativa la relación de orden en estos números se invierte respecto a los naturales: una cantidad negativa es menor cuanto mayor es su valor absoluto porque representa una situación "peor".

Nivel 2

Dimensión de la recta numérica: Se interpreta la suma y resta de números naturales como movimientos sobre la recta numérica, a derecha o izquierda del primer término, respectivamente. Esta estrategia se extiende a los casos: $-a+b$, con $a, b \in \mathbb{N}$, y $a-b$, con $a, b \in \mathbb{N}$ y $a<b$, asumiendo, en el primer caso, que el movimiento se inicia a la izquierda de cero y, en el segundo, que hay que atravesar el cero.

Dimensión de la cantidad: Se extiende la operación de resta entre números naturales al caso de sustraendo mayor que el minuendo, efectuando la resta del menor respecto al mayor y añadiendo al resultado el signo menos para indicar que el resultado es una "deuda" o "deficiencia".

Nivel 3

Dimensión de la recta numérica: Las operaciones se extienden a pares de números que tienen el mismo signo. Se asume que hay un sentido positivo: hacia la derecha, y un sentido negativo: hacia la izquierda, y que sumar números positivos significa avanzar en el sentido positivo y sumar negativos avanzar en el sentido negativo. Argumentos similares se usan para realizar la resta de números del mismo signo: restar positivos significa ir hacia los negativos y restar negativos ir hacia los positivos.

Dimensión de la cantidad: Se asumen las sumas y restas de números del mismo signo entendiendo que sumar significa añadir y restar significa quitar. No se manejan correctamente las restas de números negativos con minuendo mayor que el sustraendo, ni las sumas y restas de números de distinto signo.

Nivel 4

Dimensión de la recta numérica: Se efectúan sumas y restas de números enteros cualesquiera sin más que fijarse en el segundo término de la operación, avanzando en el sentido que indica su signo si se trata de una suma y en el sentido contrario si es una resta.

Dimensión de la cantidad: Se realizan sumas y restas con cantidades de signos cualesquiera. El examen conjunto de la operación implicada y del signo de la segunda cantidad permite decidir si la cantidad inicial "mejora" o "empeora".

Bruno y Martinon (1999), siguiendo a Peled (1991), distinguen tres dimensiones en el conocimiento numérico: la dimensión abstracta, referida al conocimiento formal del número y su estructura, la dimensión contextual, que afecta a los usos y aplicaciones de los números, y la dimensión de la recta numérica cuando el número se relaciona con posiciones y desplazamientos sobre la recta. A partir de ahí, realizan un estudio clínico que les permite clasificar a los alumnos en tres niveles en función de su mayor o menor habilidad para transferir sus conocimientos numéricos de una dimensión a otra.

El artículo de Gallardo (1996) está también bastante alejado del marco teórico de la didáctica fundamental[18], pero conoce los obstáculos epistemológicos establecidos por Glaeser y define, al igual que Peled, unos 'per-

[18] Se suele llamar así al corpus teórico y experimental de didáctica de las matemáticas que se basa en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau, la teoría antropológica de Chevallard y, más tangencialmente, la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud.

files' cercanos a la idea de concepción. La autora, analizando las estrategias de resolución algebraica de problemas que utilizan los alumnos de secundaria, encuentra cuatro perfiles que representan distintos niveles de conceptualización del número negativo, de los cuales describe los dos más extremos, designados por A y D:

Perfil A

1) *Presencia del dominio multiplicativo en las situaciones aditivas*[19]. Esto significa el uso incorrecto de la regla multiplicativa de los signos en las adiciones y sustracciones de enteros.

2) *Ignorancia de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos.* Los alumnos con un avanzado nivel de conceptualización de los números negativos reconocen la triple naturaleza de la sustracción (completar, quitar y diferencia entre dos números) y la triple naturaleza del signo menos (binaria, unaria y el simétrico de un número). Los estudiantes pertenecientes al *Perfil A* ignoran la triple naturaleza de la sustracción y la triple naturaleza del signo menos.

3) *Operatividad incorrecta en las esferas aritmética y algebraica.* Los estudiantes desarrollan mecanismos inhibitorios cuando se les presentan dobles signos $[-(+a),\ -(-a)]$. Las expresiones abiertas de la forma $x + a - b =$, $a - x - b =$, reciben cinco interpretaciones erróneas diferentes: i) son iguales a un valor numérico arbitrario: $x + a - b = c$; $a - x - b = d$ (clausura). ii) Son tratadas como ecuaciones $x = a - b$; $x = -b-a$. iii) Conjunción de términos desemejantes: $x+a-b = (a-b)x$; $a - x - b = (a - b)x$; $a - x - b = ax + b$.

4) *Inconsistencia en el uso del lenguaje algebraico.* Cuando se resuelven ecuaciones y existe la posibilidad de una solución negativa, se encuentra lo siguiente: i) los métodos escolares para resolver ecuaciones no se usan. ii) La estructura de la ecuación se altera para obtener soluciones positivas. Por ejemplo, la ecuación $x + a = b$ con $a > b$ se convierte en $a - x = b$.

5) *Preferencia por los métodos aritméticos de resolución de problemas.*

6) *Ignorancia de las soluciones negativas de los problemas.* Los estudiantes resuelven los problemas de enunciado verbal sin expresar la solución en términos negativos. Usan un lenguaje verbal para dar una respuesta positiva.

Perfil D

1) *Permanencia en el dominio aditivo y no intervención de la regla multiplicativa de los signos* en adiciones y sustracciones de enteros.

2) *Reconocimiento de la triple naturaleza de la sustracción y de la triple naturaleza del signo menos.*

3) *Operatividad correcta en las esferas aritmética y algebraica.*

4) *Preferencia por el lenguaje algebraico.*

5) *Predominio de los métodos algebraicos.*

[19] Las frases en itálica corresponden a frases subrayadas en el original.

6) *Aparición de las soluciones negativas en problemas y en ecuaciones.*

> Concluimos que los estudiantes del *Perfil A* no extienden el dominio numérico de los naturales a los números enteros. Los estudiantes del *Perfil D* extienden el dominio numérico de los números naturales a los números enteros en las tareas que se les han presentado. (Gallardo, 1996, pp. 381-382)

Como podemos ver, estas investigaciones ponen de manifiesto un abanico amplio de comportamientos de los alumnos, tanto correctos como erróneos, agrupados en 'estados de conocimiento', 'perfiles', 'concepciones', etc., en un intento de dar una visión coherente de los mismos y encontrar las causas últimas que los producen. Aunque el planteamiento y conclusiones de unos y otros trabajos son distintos, se observa una cierta coincidencia a la hora de valorar las ideas adquiridas por los alumnos en el ámbito de los números positivos como un 'obstáculo' para una buena conceptualización del número negativo.

Más recientemente, Bishop et al. (2010), aun cuando no llegan a definir concepciones de los alumnos sobre los números enteros, establecen un paralelismo entre los razonamientos de los alumnos acerca de los números enteros y las ideas de los matemáticos de distintas épocas históricas: no puede haber números menores que cero; si en un problema se obtiene una solución negativa, el enunciado del problema no es correcto; los números negativos representan medidas de magnitudes con dos sentidos; los números negativos representan sustraendos; los números negativos entendidos como opuestos de los positivos; los números negativos expresan diferencias orientadas, etc.

También recogemos en este apartado el trabajo de Vlassis (2004a, 2004b, 2008) sobre los errores y dificultades de los alumnos en la utilización del signo $-$ porque se hace eco de los trabajos sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos y establece algunas relaciones entre ellos y las producciones de los alumnos. El interés inicial de Vlassis se centraba en las dificultades de los alumnos en la resolución de ecuaciones, pero la autora reconoce que, a pesar de que era sabedora de las dificultades de los alumnos en la manipulación de los términos negativos por otras investigaciones, se quedó asombrada ante la extensión del problema, lo que la llevó a iniciar una investigación sobre el fenómeno. Después de revisar distintos trabajos, tanto sobre la epistemología del número negativo, como sobre las dificultades de los alumnos en la resolución de ecuaciones o en el manejo de los números enteros, y de referirse a las propuestas de enseñanza a partir de modelos concretos, la autora se plantea una investigación sobre la manipulación de términos negativos en tres ámbitos: la resolución de ecuaciones de primer grado con coeficientes enteros en las que la incógnita está situada en uno sólo de los miembros, la simplificación de expresiones algebraicas de primer grado, sin paréntesis ni productos de términos, y la realización de operaciones combinadas (sumas y restas) que pueden ser interpretadas en términos de operaciones entre números naturales o, forzosamente, entre números enteros.

El análisis de las respuestas de los alumnos a los cuestionarios propuestos muestra que gran parte de las dificultades provienen de la incapacidad de los alumnos para:

- tener en cuenta la polisemia de los signos: tienden a interpretar los signos $-$ y $+$ como signos que indican una operación binaria (dimensión binaria) antes que como signos que indican que el término es negativo o es el opuesto (dimensión unaria o simétrica),
- gestionar una expresión en la que aparecen dos signos $-$ sucesivos,
- distinguir entre las reglas aditivas y multiplicativas de los signos,
- aceptar soluciones negativas o expresiones algebraicas que comienzan por un término negativo o diferencias negativas.

En la última parte de su trabajo (Vlassis, 2004a) desarrolla una secuencia didáctica con dos alumnas de bajo nivel académico que ya habían recibido enseñanza sobre los números enteros y las expresiones algebraicas y posteriormente sobre resolución de ecuaciones de primer grado. Les propone ítems similares a los del cuestionario con el apoyo del modelo de la recta numérica y de los números enteros escritos en tarjetas. Se pretende con ello analizar si la representación de términos escritos en tarjetas facilita el paso de la dimensión binaria del signo $-$ a la unaria y si el modelo de la recta es pertinente para dar sentido a las operaciones con números enteros. Las conclusiones del estudio muestran los puntos fuertes y débiles de la experiencia.

La tesis final de Vlassis (2004a, 2008) es que existen evidencias de que los errores de los alumnos se deben a sus intentos de asimilar los números negativos con sus presuposiciones sobre los números naturales, pero que esto no se refiere sólo a los obstáculos epistemológicos planteados por Glaeser sobre la naturaleza de dichos números, sino también al hecho de que ha cambiado el papel del signo $-$ en el cálculo algebraico, concluyendo que dicho signo tiene un papel mucho más importante en el desarrollo de la comprensión y uso del número negativo del que suelen recogen las investigaciones sobre el tema.

I.9. Otras investigaciones sobre la competencia de los alumnos en el ámbito de los números negativos

Al margen de la búsqueda de obstáculos o concepciones, se han desarrollado otras investigaciones que también nos aportan información relevante sobre el comportamiento de los alumnos en situaciones en las que aparecen números negativos. Sus resultados nos muestran otras estrategias de resolución, distintas de las señaladas en el apartado anterior, o confirman algunas de las ya citadas.

Küchemann (1980, 1981) propone a alumnos de 14 años un cuestionario sobre operaciones formales (suma, resta y multiplicación) entre parejas de números enteros. Los mayores porcentajes de éxito se obtienen en las sumas, seguidas por las multiplicaciones, mientras que las restas resultan ser las operaciones peor resueltas. Dentro de estas últimas, se observan diferencias entre restas como $^{+}8 -^{-} 6$ o $^{+}6 -^{+} 8$, con porcentajes de éxito del 77% y 70%, respectivamente, y otras como $^{-}2 -^{-} 5$ o $^{-}6 -^{+} 3$, con porcentajes de éxito del 44% y 36%, respectivamente[20]. Esto contradice, por lo menos aparentemente, los niveles de adquisición de la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$ propuestos por Peled (1991), donde se supone que la competencia en la realización de operaciones con el mismo signo se adquiere antes que la de efectuar operaciones con números de distinto signo[21]. También está en contra de lo que dice Coquin-Viennot (1985), pues según ella la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$ se adquiere antes que la multiplicativa[22].

[20] En el mundo anglosajón los números enteros se suelen introducir mediante una notación que diferencia los signos que acompañan al número de los que indican las operaciones binarias de suma o resta: los primeros se escriben en forma de exponentes situados a la izquierda del número. Como consecuencia, unos cuestionarios utilizan esa notación, mientras que en otros aparece la notación usual en matemáticas. Sin embargo, el estudio de la influencia que el uso de las distintas notaciones puede tener en las respuestas de los alumnos y, por consiguiente, en las conclusiones de los autores, está por hacer.

[21] En cambio, Borba (1995) y Bofferding y Richardson (2013), analizando, a su vez, las competencias de los alumnos en la resolución de sumas y restas de enteros, también creen encontrar indicios de que se resuelven mejor las operaciones que afectan a números del mismo signo que las que afectan a números de distinto signo.

[22] Si se analizan los hechos que permiten a Küchemann y a Coquin-Viennot decir cosas aparentemente contradictorias, nos encontramos con que la segunda considera que los alumnos han asimilado la estructura multiplicativa de $\mathbb{Z}$ cuando contestan correctamente a los dos ítems siguientes: "Si x e y son dos números enteros tales que $x \geq y$, escribe

Bell (1982a) en entrevistas realizadas a alumnos de 15 años, comprueba que así como el 80% suman correctamente dos números enteros, solamente el 40% es capaz de restar sin errores, lo que está en la línea de los resultados obtenidos por Küchemann. Murray (1985) examina también a alumnos de secundaria que han recibido enseñanza sobre los números enteros y obtiene que los mayores porcentajes de éxito se dan en el producto de dos números enteros (alrededor de 85% de aciertos) seguido por las sumas de enteros (alrededor del 75% de aciertos), mientras que las restas de enteros tienen porcentajes de éxito que varían entre el 46% ($8-{}^{-}3$) y el 69% ($3-8$). Tanto los resultados de Bell como los de Murray vienen a confirmar lo dicho por Küchemann.

Además, Bell (1982a) analiza las estrategias utilizadas por los alumnos para efectuar las operaciones de enteros, comprobando que, sobre todo, usan razonamientos basados en la recta numérica o la idea de "cantidades menos que cero". En el caso de la suma, un procedimiento bastante usado consiste en determinar, en la recta numérica, el punto que corresponde al primer sumando y a partir de ahí contar tantas unidades como indica el segundo sumando, hacia la derecha o la izquierda según que éste sea positivo o negativo. Parece ser que los alumnos utilizan un procedimiento similar en el caso de la resta, lo que provoca muchos errores. Ante operaciones como, por ejemplo, $7-{}^{-}2$, dicen que $7-{}^{-}2=5$ porque "restar es ir hacia la izquierda". Bell considera que este tipo de errores se deben a que los alumnos no están acostumbrados a interpretar la resta entre números positivos como diferencia sino, más bien, como la acción de quitar el sustraendo al minuendo. Esta misma hipótesis la hace también Gallardo (1996) cuando, como hemos visto en el apartado anterior, habla del 'no reconocimiento de la triple naturaleza de la sustracción'.

Bell constata también errores por utilización indebida de la regla multiplicativa de los signos: ${}^{-}9-{}^{-}2={}^{+}11$ porque "dos menos hacen un más", lo que implica una mala gestión de las reglas de cálculo formales que les han dado los profesores. El olvido de dichas reglas y la ausencia de un modelo que les permita rehacerlas adecuadamente provoca reconstrucciones o reinterpretaciones erronéas, en las que se aplican las reglas de una operación a otra distinta o sólo se recuerda parte de la regla, etc. Este mismo fenómeno

la relación de orden entre $-3x$ y $-3y$", "Si $x\geq +2$, ¿cómo puedes escribir $\mid x-(+2)\mid$ sin utilizar las barras verticales?", mientras que el primero pregunta por el resultado de operaciones como las siguientes: "${}^{-}3\times{}^{+}4$" y "${}^{+}4\times{}^{-}4$". Esto indica hasta qué punto la variedad de cuestionarios propuestos y de niveles educativos en los que se proponen hace prácticamente imposible contrastar los resultados obtenidos por unos y otros autores.

lo señala Murray (1985) cuando dice que el error más frecuente en las restas es el de aplicarles la regla de suma de enteros (por ejemplo, $^{-}9 - ^{-}4 = ^{-}13$, $^{-}7 - 3 = ^{-}4$ y $7 - ^{-}5 = 2$). También Iriarte et al. (ver apartado anterior) hacen referencia a este mismo fenómeno cuando hablan de "la imposición de lo formal como obstáculo". Además, Léonard y Sackur (1990) hacen notar que el porcentaje de éxitos de los alumnos en la realización de sumas y restas de enteros disminuye al enseñar el producto de enteros porque es entonces cuando aplican la regla multiplicativa de los signos a las sumas o restas de enteros, dando lugar a errores que al principio no se producían[23].

Hativa y Cohen (1995) hacen una lista de los errores más frecuentes en la realización de sumas y restas de enteros que amplía lo ya señalado por otros autores:

a. Operación: $0-x,\ x>0$. Respuestas erróneas: $x,\ 0,\ 10-x$. Por ejemplo: $0-4=4$ ó 0 ó 6.
b. Operación: $x-y,\ y>x>0$. Respuestas erróneas: $y-x,\ x+y,\ -(x+y),\ x,\ y$. Por ejemplo: $3-8=5$ u 11 ó -11 ó 3 u 8.
c. Operación: $-x-y,\ x>0,\ y>0$. Respuestas erróneas: $x-y,\ y-x,\ x+y,\ x$. Por ejemplo: $-3-8=-5$ ó 5 u 11 ó 3.
d. Operación: $-x+x,\ x>0$. Respuestas erróneas: $2x,\ x$. Por ejemplo: $-3+3=6$ ó 3.
e. Operación: $-x+y,\ x>y>0$. Respuestas erróneas: $x-y,\ x+y,\ -(x+y),\ x,\ y$. Por ejemplo: $-8+3=5$ u 11 ó -11 u 8 ó 3.

Araya Chacón (2005) estudia también los errores que cometen los alumnos en la realización de restas de números enteros y hace una clasificación de los mismos, distinguiendo entre aquellos que se producen por una errónea interpretación de la regla de la resta -para restar dos números enteros se suma el primero con el opuesto del segundo- y aquellos otros que tienen lugar al efectuar la suma subsiguiente. La experiencia se realiza en dos clases a cargo de dos profesores distintos y la autora concluye que algunos de los errores observados no dependen de las elecciones didácticas de los profesores.

---

[23] Esta observación de Leonard y Sackur se produce en el contexto de un trabajo dedicado a introducir la noción de 'conocimiento local' como alternativa a la noción de obstáculo, tema sobre el que volveremos a hablar en un apartado posterior. Para los autores, tanto los modelos concretos que inducen la adición en $\mathbb{Z}$ como las reglas formales que rigen su producto, son 'conocimientos locales', es decir, conocimientos correctos y eficaces dentro de sus límites, pero que provocan errores porque los alumnos desconocen esos límites y los utilizan fuera de su campo de validez.

Por otra parte, Murray (1985) y Human y Murray (1987) estudian las concepciones espontáneas (concepciones anteriores a la enseñanza de los números negativos en la escuela) de alumnos de 13 años. Averiguan que los interpretan como "números menores que cero" o "números por debajo de cero" y que se remiten al ejemplo de las temperaturas[24]. Un porcentaje significativo de ellos realiza con éxito algunas operaciones con números enteros (entre un 30 y un 50%, dependiendo de la operación a realizar). Las estrategias que utilizan son: razonamientos basados en una línea numérica vertical que se recorre hacia arriba o abajo (el termómetro) o extensiones analógicas a partir de las operaciones con números naturales, como, por ejemplo: "$^{-}5 -^{-} 2 =^{-} 3$ porque $5 - 2 = 3$ y éstos llevan el menos"[25]. Pero ese razonamiento analógico es, según Murray, un arma de doble filo, pues hace que bastantes alumnos sean capaces de efectuar con corrección operaciones como $^{-}7 +^{-} 5$ o $^{-}4 + 7$, mientras que, sin embargo, transforman la resta $3 - 8$ en $8 - 3 = 5$, en una extensión de la propiedad conmutativa de la suma de números naturales al caso de la resta.

También Peled et al. (1989) estudian las concepciones sobre los negativos previas a la instrucción escolar, pero lo hacen eligiendo muestras de niños más pequeños y sin que, al parecer, reciban ningún tipo de información inicial sobre el tema. Observan que los niños muy pequeños (alrededor de seis años) se las arreglan siempre para dar sus respuestas en términos de números positivos. Para ello, utilizan distintas estrategias de evitación como: invertir los términos de las operaciones ($5-7$ se transforma en $7-5$), ignorar los signos menos ($-5+8$ se trata como si fuera $5+8$), etc. Los niños algo mayores (alrededor de diez años) están más dispuestos a aceptar resultados negativos, pero utilizan reglas de cálculo que no se atienen a las convenciones usuales, como, por ejemplo, operar $-5+8$ efectuando la suma

[24] En realidad, los alumnos recibieron una clase previa sobre los números negativos de veinte minutos de duración en la que se les habló de temperaturas por encima y debajo de cero.

[25] Esto podría justificar el hecho, observado por algunos investigadores, de que los alumnos efectúan mejor las sumas y restas de números del mismo signo que las que afectan a números de signo contrario, aunque habría que añadir la precisión de que en en la resta de números del mismo signo el valor absoluto del minuendo tiene que ser mayor o igual que el del sustraendo. En el primer caso se trata, simplemente, de hacer la operación como si fuesen números naturales y añadir al resultado el signo que afecta a los términos iniciales, mientras que el segundo caso exige el conocimiento de reglas más complejas que ya no son simples extensiones de las que afectan a las sumas y restas de números naturales.

$5 + 8 = 13$ y poniendo un signo menos delante del resultado, -13.

Como consecuencia del análisis de las respuestas a los cuestionarios propuestos, Peled et al. llegan a la conclusión de que los niños sin instrucción previa pasan de una etapa en la que ignoran la existencia del número negativo a otra en la que han adquirido una "recta numérica mental", distinguiendo dos fases en la adquisición de ese modelo mental: una primera fase en la que tienen un modelo de 'recta numérica dividida', caracterizado porque la recta se concibe como un conjunto de dos semirrectas opuestas, y una segunda fase en la que se adquiere un modelo de 'recta numérica continua'. Esta conclusión nos remite a Glaeser cuando habla de "la dificultad para unificar la recta real" y también a Coquin-Viennot que utiliza una variable similar para definir las concepciones de los alumnos.

En el trabajo que nos ocupa, parece que la existencia de esos dos modelos de recta se establece a partir, sobre todo, de las estrategias que utilizan los alumnos para sumar o restar "cruzando el cero": cuando toman en consideración el paso de una a otra semirrecta y realizan la operación en dos etapas, obteniendo un cero como resultado intermedio, se supone que están en el modelo de recta dividida; en cambio, si interpretan que sumar es "ir hacia arriba" y restar "ir hacia abajo" sin que les afecte el hecho de cruzar o no el cero, se entiende que están en el modelo de recta continua. Esta estrategia de "cruzar el cero" la ponen también de manifiesto Mukhopadhyay et al. (1990), añadiendo que el contexto de deudas y haberes que ellos proponen en su cuestionario puede contribuir, por sus connotaciones sociales, al establecimiento del modelo de 'recta numérica dividida'. También Hativa y Cohen (1995) mencionan esa estrategia, detallando que para algunos alumnos el cero funciona como un "stop" entre semirrectas: todo paso de una a otra exige hacer una parada en él.

Peled et al. (1991) dicen también que, entre los niños que no han recibido enseñanza escolar sobre los números negativos, son muy pocos los que se refieren en sus respuestas a modelos concretos, como puedan ser, por ejemplo, las deudas y haberes. Curiosamente, los dos modelos de recta detectados en los niños tienen un grado de abstracción mayor que el de muchos de los modelos usados habitualmente en la enseñanza. Esta percepción vuelve a darse en Mukhopadhyay (1997), pero esta vez con alumnos que sí que han recibido enseñanza sobre los números enteros. A lo largo de varias entrevistas clínicas se observa que los alumnos, forzados por el entrevistador a dar razones que justifiquen sus respuestas, recurren, bien a un modelo de colección de objetos en la que se añaden o suprimen algunos de ellos, modelo en el que no pueden justificar los números negativos, o bien al modelo de la recta, ya sea continua o dividida. Solamente un alumno se refiere a un modelo distinto del de la recta, concretamente al de deudas y haberes.

Un aspecto poco estudiado es el del comportamiento de los alumnos en la realización de operaciones de enteros con más de dos términos y en el uso de paréntesis. En el trabajo de Herscovics y Linchevski (1994), aun cuando su objetivo es el de analizar la habilidad de los alumnos para manejar las incógnitas, averiguan que en secuencias como la siguiente: $237 + 89 - 89 + 67 - 92 + 92$, bastantes alumnos optan por prescindir del signo $-$ que acompaña a 89 y efectúan la suma $89 + 67$ y todavía son más los que prescinden del signo $-$ que acompaña a 92 y suman $92 + 92$. Por otro lado, Gallardo (1995) dice que muchos alumnos no distinguen el doble uso del paréntesis como símbolo que expresa un agrupamiento de términos que deben ser sumados o restados y como símbolo que indica que los términos deben ser multiplicados.

Por último, Johnson (1986) plantea el problema de la representación literal de los números enteros y señala las dificultades de los alumnos para entender que $-x$ puede representar un número positivo. A este respecto, también Duroux (1982) constata en un cuestionario el alto porcentaje de alumnos (más del 60%) que no asumen que $-x$ signifique el opuesto de x. Estos errores se relacionan con otros ya comentados en el apartado anterior: la "identificación de los símbolos literales como números positivos" de Iriarte et al. (1991) o la "ignorancia de la triple naturaleza del signo menos" de Gallardo (1996).

En resumen, tanto en este apartado como en el anterior se hacen patente las muchas dificultades y errores de los alumnos en el campo de los números negativos, aunque no es nada fácil relacionar las conclusiones obtenidas por unos y otros autores, dadas las grandes diferencias de criterio con que han sido construidos los ítems de los cuestionarios y analizadas las respuestas. Tampoco es fácil reproducir los experimentos para contrastar los resultados, pues es bastante frecuente que en los artículos se expongan las conclusiones sin explicitar con detalle el cuestionario que las ha hecho posibles, ni las estrategias de resolución utilizadas por los alumnos.

I.10. Las propuestas de enseñanza de los números enteros

La bibliografía que se ocupa de las propuestas de enseñanza sobre los números enteros[26] es relativamente abundante, aunque no inabarcable, como sucede con otros conceptos. En este apartado y el siguiente trataremos de presentar los distintos tipos de propuestas existentes para pasar, a continuación, a examinar hasta qué punto sus autores tienen en cuenta el tema de los obstáculos epistemológicos a la hora de plantearlas y de analizar los efectos que producen.

Arcavi y Bruckheimer (1981) y, más adelante, Crowley y Dunn (1985) hacen una clasificación de las distintas propuestas de introducción de la multiplicación de los números enteros en la escuela que puede hacerse extensiva a la estructura aditiva y que es un buen punto de partida para ordenar la bibliografía existente. La clasificación, con alguna modificación terminológica por nuestra parte, es la siguiente:

- *Introducción memorística.* Consiste en presentar las reglas de las operaciones con enteros sin motivación ni justificación ninguna, pidiendo a los alumnos que las memoricen. Es una propuesta que puede encontrarse en libros de texto antiguos.

- *Introducción inductiva.* Se caracteriza por el descubrimiento y generalización de regularidades. Por ejemplo, se presentan a los alumnos secuencias como las siguientes:

[26] Nos referimos a los números enteros y no a los números negativos porque casi todos los autores identifican la introducción del número negativo con la introducción del número entero. De hecho, incluso aunque hablen de la enseñanza de los números negativos, sus propuestas, en la práctica, restringen esa negatividad al ámbito de los números enteros. Freudenthal es una de las excepciones, pues al plantear, como veremos más adelante, la posibilidad de introducir los números negativos en el marco de la geometría analítica, dice que una de las ventajas de esta introducción sería la de no limitarse a los enteros negativos (Freudenthal, 1983, p. 451). Más recientemente, Bruno y Martinón (Bruno y Martinón, 1995-96; Bruno, 1997) han realizado experiencias en las que introducen los números negativos simetrizando $\mathbb{Q}^+$ o el conjunto de números positivos que los niños manejan. Alegan que no ven la ventaja de empezar simetrizando solamente $\mathbb{N}$, pues esto supone, a su juicio, una ruptura en la secuencia de extensiones numéricas realizadas hasta ese momento: los niños conocen ya los naturales, los racionales positivos e, incluso, algunos irracionales positivos y, sin embargo, deben olvidarse durante un tiempo de estos últimos conjuntos numéricos para concentrarse en la extensión de los números naturales a los enteros.

$$\begin{array}{ll} 5-3=2 & \quad 4\times 3=12 \\ 5-2=3 & \quad 4\times 2=8 \\ 5-1=4 & \quad 4\times 1=4 \\ 5-0=5 & \quad 4\times 0=0 \end{array}$$

y después se les pide que continúen estableciendo resultados como:

$$\begin{array}{ll} 5-(-1)=6 & \quad 4\times(-1)=-4 \\ 5-(-2)=7 & \quad 4\times(-2)=-8 \\ 5-(-3)=8 & \quad 4\times(-3)=-12 \end{array}$$

Otra variante de este método se basa en realizar representaciones gráficas y algebraicas de la función afín en el primer cuadrante y prolongarlas a otros cuadrantes.

- *Introducción deductiva.* Consiste en añadir a los números naturales sus simétricos respecto a la suma y definir las operaciones entre esos nuevos números de manera que se conserve la estructura algebraica de los números naturales. Esta exigencia es la que, históricamente, se conoce como 'principio de permanencia de las leyes formales'.
- *Introducción por medio de modelos.* Son presentaciones de $\mathbb{Z}$ basadas en su similitud con otros sistemas de objetos que son familiares a los alumnos o que les pueden resultar más atractivos. Se supone que éstos, a partir de su experiencia con el modelo, pueden conjeturar o, al menos, justificar, "dar sentido" a sus reglas de funcionamiento y, posteriormente, por analogía, extenderlas al conjunto de los números enteros. Estos modelos han recibido distintos nombres: 'modelos físicos', 'modelos intuitivos', 'modelos concretos' (que es el nombre que usaremos nosotros)[27], etc. Es muy frecuente que estos modelos se presenten a través de juegos colectivos en los que el alumno tiene que participar, estrategia que sirve para motivar la reflexión sobre el modelo y sus leyes[28].

[27] Por el momento, nos parece que el nombre más apropiado es el de 'modelo concreto' porque estos modelos, independientemente de su nivel de abstracción, reflejan la voluntad del autor de encontrar un objeto más asequible al alumno, más cercano a su experiencia, más "concreto" que el propio conjunto de los números enteros.

[28] Aparece con cierta frecuencia una variante de este método consistente en presentar las reglas que rigen las operaciones en $\mathbb{Z}$ como reglas de un juego que, a su vez, resulta tan artificial y poco familiar a los niños como lo pueda ser la estructura de $\mathbb{Z}$. Aquí el carácter

- *Introducción constructiva.* Consiste en simetrizar la suma de números naturales, construyendo los enteros como conjunto cociente de pares ordenados de naturales respecto a la relación de equivalencia:

$$(a, b)\Re(a', b') \iff a + b' = b + a'.$$

Posteriormente se define la suma, el producto y el orden de dicho conjunto cociente y se deduce la estructura de anillo totalmente ordenado.

De entre las introducciones de tipo axiomático, la introducción constructiva, que es la que suele aparecer en los libros de texto universitarios, tuvo su auge en los años sesenta-setenta en relación con el movimiento de introducción de la "matemática moderna" en la escuela. Coltharp (1966) y Fletcher (1976), entre otros, defendieron en su momento esta forma de presentar los enteros en la educación primaria o secundaria, encuadrándola en dicho movimiento. Hoy en día, ha caído en desuso en los niveles educativos no universitarios.

La otra posible introducción de tipo axiomático, la introducción deductiva, se sigue utilizando en los distintos niveles educativos, aunque en las etapas iniciales de enseñanza de los números negativos, los razonamientos basados en el principio de permanencia de las leyes formales suelen hacerse utilizando números en vez de letras. Por ejemplo:

> Sabiendo que $3+(-3) = 0$ y que $(-4)\cdot 3 = -12$, tendremos que $(-4)(3+(-3)) = (-4)\cdot 0 = 0$. Por tanto, $(-4)\cdot 3+(-4)(-3) = 0$ y $-12+(-4)(-3) = 0$, de donde se deduce que $(-4)(-3) = 12$.

Partidarios de esta introducción son, entre otros, Brown (1969), Chevallard (1990), Freudenthal (1973, 1983), Klein (1927, pp. 24-32), Milazzo y Vacirca (1983), Phillips (1971), SMSG (1961, citado en Hitchcock, 1997) y Snell (1970), si bien algunos creen necesario empezar proponiendo modelos concretos o secuencias inductivas como paso previo a la exposición deductiva.

---

arbitrario de las reglas se mantiene, el alumno no puede anticiparlas, conjeturarlas, hay que dárselas. Los autores de estos trabajos suponen, implícita o explícitamente, que los niños ofrecen una menor resistencia al aprendizaje de reglas arbitrarias de manipulación de objetos si se introducen como reglas de juego, ya que están acostumbrados a aprender y respetar las reglas de los juegos sin discutirlas. En estos casos, el funcionamiento del modelo está tan alejado de la experiencia cotidiana de los niños como la presentación directa de las operaciones con enteros y su uso se justifica sólo por el deseo de jugar que se atribuye a los niños.

La mayor parte de estos autores entienden por "permanencia de las leyes formales" la conservación en $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ de las propiedades que caracterizan a $(\mathbb{N}, +, \cdot)$: asociativas, conmutativas, distributiva y existencia de elemento nulo y unidad, pero de ahí no se deduce la conservación del orden total de $\mathbb{N}$ y de su compatibilidad con las operaciones, aspecto del problema que no suelen mencionar. Klein es de los pocos que habla, explícitamente, no sólo de la conservación de las propiedades de las operaciones, sino también de la necesidad de prolongar el orden total definido en $\mathbb{N}$ conservando su compatibilidad con la suma y el producto. Esto concede a la prolongación a $\mathbb{Z}$ del orden de $\mathbb{N}$ una importancia que, en cambio, otros autores no parecen dispuestos a resaltar[29].

Por otro lado, Freudenthal (1983, pp. 432-460) considera que, aun cuando es evidente que los números negativos nacieron en el ámbito del álgebra, en particular, de la resolución de ecuaciones, la responsable de su éxito final fue la geometría analítica. Según él:

> La necesidad de validez general de los métodos de resolución de ecuaciones, a la cual deben su existencia los números negativos, se vio reforzada, desde el siglo XVII en adelante, por la necesidad de validez general de las descripciones [algebraicas] de las relaciones geométricas. Esta segunda necesidad, más profunda que la formal algebraica, es la más natural y convincente. Es la auténtica responsable del éxito histórico de los números negativos (y también del de los complejos). (Freudenthal, 1983, p. 433)

Como consecuencia, deduce que la enseñanza de los negativos debe fundamentarse no sólo en el ya citado principio de permanencia de las leyes formales, sino también en un principio de permanencia geométrico-algebraico que es el que permite que una sola fórmula algebraica represente la totalidad de una curva, independientemente de los cuadrantes que atraviese.

Entre los que comentan la introducción inductiva se encuentran Freudenthal (1973, 1983), Peterson (1972), Sicklick (1975) y Snell (1970). Para Freudenthal, una introducción de este tipo facilitaría el paso a un posterior desarrollo deductivo del tema. Además, en consonancia con su idea de basar los razonamientos sobre los números negativos no sólo en aspectos algebraicos sino también geométricos, propone una presentación inductiva con una doble vertiente: la de prolongar, por un lado, las regularidades numéricas propias de los números naturales y, por otro, las rectas e hipérbolas equiláteras restringidas, inicialmente, al primer cuadrante

29 Brown (1969) hace notar que la simetrización aditiva de una estructura de semianillo no garantiza la existencia de un orden total compatible con las operaciones. Para él, la conservación del orden total de $\mathbb{N}$ y de su compatibilidad con las operaciones juega un papel primordial en los proceso de ampliación numérica.

(Freudenthal, 1983, pp. 450-55). Una propuesta didáctica basada en esta misma idea la desarrollan recientemente Gallardo y Damián (2011).

Ahora bien, la existencia de autores que hacen propuestas de enseñanza de los números enteros de tipo inductivo, deductivo o constructivo, no debe hacernos perder de vista el hecho de que, hoy en día, la práctica totalidad de los mismos se decanta por una introducción por medio de modelos concretos y dedica sus esfuerzos a buscar estos modelos y a investigar los efectos que producen en los alumnos. Este tipo de introducción es también la más habitual en los actuales libros de texto escolares.

I.11. Los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros

Para empezar, hay que decir que la profusión de modelos concretos es tanta que cualquier descripción de los mismos, por somera que sea, obliga a recurrir a algún tipo de clasificación que simplifique la tarea. En este sentido, la clasificación hecha por Janvier (1983), en la que distingue tres tipos de modelo: el del equilibrio, el de la recta numérica y el híbrido, es un buen punto de partida, aun cuando nosotros no vamos a tener en cuenta el modelo híbrido por considerar que los ejemplos existentes pueden también incluirse en una de las otras dos clases. Además preferimos llamar 'modelo de neutralización' al modelo del equilibrio definido por Janvier porque nos parece que dicho nombre refleja mejor la idea central de este tipo de modelos: la existencia de entidades opuestas que se neutralizan entre sí. Utilizaremos también el término de 'modelo del desplazamiento' en lugar del nombre propuesto por Janvier: modelo de la recta numérica, porque, a nuestro juicio, este último es uno de los elementos de la clase, aunque, eso sí, un elemento muy significativo (Cid, 2002).

A continuación, expondremos en qué consiste la estructura de un modelo de neutralización o de desplazamiento utilizando un caso particular: el de las fichas de dos colores y el de las fichas que se desplazan a lo largo de un camino, respectivamente. Entendemos que esta restricción no quita generalidad al tema y permite una mayor claridad y sencillez en la exposición.

- *Modelo de neutralización.* Se basa en la manipulación de fichas de dos colores, por ejemplo, rojas y azules, bajo el supuesto de que cada ficha de un color neutraliza a una ficha del otro color. La existencia de a fichas rojas y b fichas azules se representa mediante el par ordenado (a, b) o bien mediante el número $\mid a - b \mid$ precedido del signo $+$ o $-$, según que las fichas que queden después de neutralizarse unas con otras sean rojas o azules, respectivamente.

La suma se interpreta como una reunión de fichas, o bien como una acción de añadir fichas a un conjunto dado de ellas, seguida del correspondiente proceso de neutralización para obtener la representación canónica del resultado. En cuanto a la resta, se relaciona con la acción de quitar o separar fichas. Cuando se quieren quitar más fichas de un color de las que se dispone, se añaden pares de fichas azules y rojas hasta poder efectuar la acción. La realización de este proceso en distintos casos muestra que quitar fichas de un color equivale a añadir el mismo número de fichas del otro color.

Si además de identificar el signo + con uno de los colores y el signo $-$ con el otro, se utilizan también los signos + y $-$ para indicar las acciones de añadir o quitar, como es habitual en aritmética, el producto de enteros se puede justificar en este modelo diciendo que $(\pm a)(\pm b)$, con a y b números naturales, significa que a una situación cero, es decir, a una situación de igual número de fichas rojas y azules, hay que añadir (quitar) b fichas rojas (azules) un número a de veces.

En la bibliografía sobre la enseñanza de los enteros se proponen muchos modelos de este tipo: fichas o bloques de dos colores (Chang, 1985; Freudenthal, 1983, pp. 438-441; Gallardo, 1994; Rossini, 1986; Semadeni, 1984; Soria, 1991, 1997), bolas que se ensartan en dos varillas distintas (Bartolini, 1976; Linchevsky y Williams, 1999), pares de dados de dos colores (Linchevsky y Williams, 1999), deudas y haberes o pérdidas y ganancias (Alcalá, 1998; Baldino, 1996, 1997; Chang, 1985; González Alba et al., 1989; Liebeck, 1990; Malpas, 1975; Puig Adam, 1956, pp.45-46; Sasaki, 1993; Souza et al., 1995; Stephan y Akyuz, 2012; Tulej y Gorman, 1990), ejércitos que se enfrentan cuerpo a cuerpo (Papy, 1964, pp. 316-341, 1968, pp. 112-148; Rowland, 1982), cargas eléctricas positivas o negativas (Battista, 1983; Cotter, 1969; Kohn, 1978, Peterson, 1972), sumandos y sustraendos, acciones de añadir o quitar u operadores aditivos (Baldino, 1996, 1997; Davidson, 1987; Davis y Maher, 1997; Souza et al., 1995; Spagnolo, 1986), juegos con puntuaciones positivas o negativas (Frank, 1969; Milne, 1969), clavijas con tres posiciones (Gardner, 1977), estimaciones con errores por exceso o defecto (Cable, 1971), seres u objetos que pueden estar valorados positiva o negativamente, entrando o saliendo de un recinto (Dubisch, 1971; Linchevski y Willams, 1996; Sarver, 1986; Streefland, 1996) cubitos que calientan o enfrian un líquido (Jencks y Peck, 1977), balones de helio y sacos de arena que elevan o bajan un globo (Luth, 1967), fichas de dominó en las que los puntos situados en una de las partes de la ficha neutralizan a los situados en la otra parte (Nuffield Mathematics Project, 1964 (citado en Galbraith, 1974)), etc.

Los modelos de neutralización más usados en los libros de texto de la Educación Secundaria[30] son: deudas y haberes complementado con pérdidas y ganancias, puntuaciones positivas o negativas y, por último, personas que suben o bajan de un medio de locomoción o entran o salen de un recinto. A veces, se incorpora al modelo de deudas y haberes un concepto de ganancia o pérdida por unidad de tiempo. De esa manera, uno de los términos del producto indica la ganancia o pérdida por unidad de tiempo y el otro el número de unidades de tiempo pasado o futuro a considerar, mientras que el resultado es la pérdida o ganancia total. Esto mismo se hace también con el modelo de personas que entran y salen de un recinto, introduciendo la noción de entradas o salidas por unidad de tiempo.

- *Modelo de desplazamiento.* Supongamos un camino troceado en casillas donde cada casilla es una posición que puede ocupar una o varias fichas. El camino no tiene principio ni final o, por lo menos, la posición considerada como inicial no se corresponde con el principio o el final del camino. Las distintas posiciones se numeran a partir de la posición inicial, añadiendo el signo $+$ o $-$ según que el sentido de recorrido sea uno u otro. También se cuantifican los desplazamientos: un desplazamiento de $+a$ casillas, con a natural, aplicado a una ficha situada en una casilla cualquiera, significa que ésta se desplaza a casillas en el sentido positivo de recorrido, mientras que un desplazamiento de $-a$ casillas indica que la ficha recorre a casillas en el sentido de recorrido negativo. De manera que los números enteros pueden indicar tanto posiciones como desplazamientos. Además, para cada desplazamiento existe un desplazamiento opuesto, es decir, un desplazamiento que devuelve la ficha desde la casilla final hasta la inicial.

La suma de enteros se justifica, bien como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, bien como una composición de desplazamientos que da como resultado otro desplazamiento, bien como una composición de desplazamientos que se aplica a una ficha situada en la casilla cero y da como resultado la nueva posición de la ficha. La resta significa la operación inversa de cualquiera de las anteriores: desplazamiento que permite pasar de una posición a otra, posición resultante de aplicar a una posición inicial el opuesto de un desplazamiento, composición de un desplazamiento con el opuesto de otro, etc.

[30] Las editoriales consultadas son: Anaya (Cólera y Gaztelu, 2010), McGraw Hill (Becerra et al., 1997), Santillana (Álvarez et al., 2011) y SM (Bujanda y Mansilla, 1996).

El producto se interpreta como composición repetida de desplazamientos para obtener un desplazamiento resultante al que se le cambia o no el sentido según que el entero que indica la repetición sea negativo o positivo. También puede interpretarse que el desplazamiento resultante se aplica a una ficha situada en la posición cero y, en ese caso, representa la nueva posición de la ficha. Algunos autores consideran que el producto $(\pm a)(\pm b)$, con a y b naturales, indica la posición resultante de transformar una posición inicial $(\pm a)$. El valor numérico de la nueva posición pasa a ser ab y, dependiendo de que el signo que acompañe a b sea positivo o negativo, estará situada en la misma semirrecta que $(\pm a)$ o en la semirrecta opuesta. Por último, otros autores incorporan al modelo el concepto de velocidad positiva o negativa y tiempo pasado y futuro y, en esas condiciones, los términos del producto indican desplazamientos y tiempos y el resultado es una posición.

Dentro de los modelos de desplazamiento nos encontramos con las siguientes propuestas: personajes u objetos que avanzan o retroceden a lo largo de un camino, casi siempre recto y formado por casillas adosadas (Alcalá, 1998; Aze, 1989; Baldino, 1996, 1997; Bofferding y Hoffman, 2014; Cemen, 1993; Chang, 1985; Chilvers, 1985; Crowley y Dunn, 1985; Davidson, 1987; Ettline y Smith, 1978; Hollis, 1967; Johnson, 1978; McAuley, 1990; NCTM, 1970; Sánchez Olmedo, 1991; Sasaki, 1993; Souza et al., 1995; Thompson y Dreyfus, 1988; Tulej y Gorman, 1990; Whiffing, 1989; Whitman, 1992), peldaños que se suben o bajan (González Alba et al., 1989; Skemp, 1980, pp. 210-216), termómetros o escalas de diversas magnitudes (Cable, 1971; Sasaki, 1993; Strefland, 1996), ascensores que bajan a los garajes o suben a los pisos (Alsina et al., 1980; Gadanidis, 1994; Puig Adam, 1956, pp. 46-47), globos que se elevan o que se hunden por debajo del nivel del mar (Petri, 1986), cintas de video que se proyectan o rebobinan (Cooke, 1993; Peterson, 1972), variaciones en el nivel de agua de un depósito (Alsina et al., 1980), desplazamientos representados por vectores unidireccionales que actúan sobre posiciones (puntos) de la recta numérica (Freudenthal, 1983, pp. 441-445; Hativa y Cohen, 1995; Havenhill, 1969; SMP, 1965, 1966 (citados en Galbraith, 1974)).

Algunos autores, para justificar el producto de enteros, añaden a este último modelo, es decir, al de la recta numérica, dispositivos gráficos parecidos a los que suelen utilizarse para explicar las homotecias de razón entera (Cable, 1971; Cofman, 1981; Dieudonné, 1987, pp. 57-59; SMP, 1987, pp. 1-20, 173-193; Varo Gómez de la Torre, 2000). También hay autores que interpretan el producto ab, con $a, b \in \mathbb{Z}$, como el área del rectángulo cuyos vértices son los puntos de coordenadas (a, b), $(a, 0)$, $(0, b)$ y $(0, 0)$

acompañada del signo + o − según el cuadrante en que esté situado (Castelnuovo, 1970, pp. 160-163, Alsina et al., 1980).

Más recientemente, Beatty (2010) propone usar la representación de rectas en el plano para una mejor comprensión y justificación de los números negativos y sus operaciones. Partiendo de un conocimiento previo de la estructura de los números positivos y negativos y de la representación de rectas en el primer cuadrante del plano real, se propone a los alumnos que prolonguen los ejes y que representen rectas cuya pendiente o término independiente sean negativos. La necesidad de que los resultados de las operaciones coincidan con los puntos de la gráfica permite a los alumnos reparar en los errores cometidos al efectuarlas y reflexionar sobre ellos.

Los modelos de desplazamiento más habituales en los libros de texto de la actual Educación Secundaria son, inicialmente: el termómetro, avances o retrocesos a lo largo de un camino, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, ascensores o escaleras que se suben o bajan y años antes y después de Cristo, para desembocar, después de exponer uno o varios de estos modelos, en el de la recta numérica y los desplazamientos sobre ella. Hay que tener en cuenta, además, que los libros de texto no se ciñen a un único modelo para introducir los números enteros, sino que presentan sucesivos modelos, unos de neutralización y otros de desplazamiento y usan, en cada momento de la exposición, el que consideran más adecuado[31].

Un apartado importante dentro de las propuestas de enseñanza del número entero lo constituyen aquéllas que se basan en modelos concretos de uso común en los manuales escolares. Naturalmente, el interés de estas propuestas no estriba en los modelos que describen, todos ellos de sobra

[31] Este eclecticismo de los libros de texto lo comparten muchos autores que optan por proponer modelos distintos según que se trate de introducir una u otra de las operaciones. Así, es bastante frecuente proponer uno o varios modelos de neutralización para introducir la estructura aditiva (o multiplicativa) de los enteros y otros de desplazamiento para la estructura multiplicativa (o aditiva), e incluso utilizar modelos de desplazamiento para justificar la resta habiendo introducido la suma de enteros por medio de modelos de neutralización. Entre los autores que siguen estas pautas podemos citar a: Alcalá (1998), Alsina et al. (1980), Baldino (1996, 1997), Bell (1982a, 1986, 1993), Bruno y Martinón (1994a, 1994b, 1995-96, 1996a, 1996b), Chang (1985), Davidson (1987), Gobin et al. (1996), González Alba el al. (1989), González Marí (1994, 1995, 1996), Grup Zero (1980), Lytle (1994), Marthe (1979), Moro y Salazar (1993), Salmerón (1988), Sasaki (1993), Schultz (1973) Souza et al. (1995), Tulej y Gorman (1990) y Vargas-Machuca et al. (1990).

conocidos y utilizados, sino en las sugerencias que hacen sobre cómo usarlos y por qué. En esta línea, Salmerón (1988) y Schultz (1973) se limitan a presentar dichos modelos, defendiendo su uso porque, a su juicio, plantean situaciones de la vida cotidiana familiares a los alumnos que facilitan la comprensión de la estructura de los números enteros. Otros enriquecen los modelos con muchas más actividades de las que suelen aparecer en los manuales escolares (Alsina et al., 1980; Grup Zero, 1980) o incorporan algún programa informático (Moro y Salazar, 1993).

Bell (1982a, 1986, 1993) utiliza también los modelos concretos usuales, pero pone de manifiesto, mediante diversos cuestionarios, las dificultades y errores de los alumnos cuando los manejan y propone una metodología de "enseñanza mediante conflicto": el profesor llama la atención de los alumnos sobre las distintas respuestas (una correcta y otras erróneas) que han dado a una misma pregunta, provocando una discusión entre ellos que les ayude a superar los errores cometidos. También Gobin et al. (1996) recogen de nuevo los modelos habituales de los manuales y proponen su uso, pero también son críticos con ellos, alertando sobre los obstáculos que pueden suponer para la adquisición de una buena concepción de los números enteros.

Por otra parte, varios autores han utilizado en sus propuestas de enseñanza la clasificación de situaciones aditivas de una sola operación de Vergnaud (Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982). Marthe (1979) efectúa un experimento proponiendo a los alumnos situaciones del tipo Estado-Transformación-Estado (STS) y Transformación-Transformación-Transformación (TTT) en el contexto de los modelos habituales en la enseñanza de los números enteros, llegando a la conclusión de que los alumnos tienen más dificultades en la resolución de situaciones del tipo TTT que las del tipo STS. Si, además, en las de tipo TTT las transformaciones implicadas son de distinto signo, la dificultad aumenta. Marthe cree que la construcción de secuencias de enseñanza en las que se tengan en cuenta distintos tipos de situaciones aditivas puede ayudar a los niños a comprender mejor la noción de número entero[32]

En este mismo sentido, Bruno y Martinón (1994a, 1994b, 1995-96,

[32] El propio Vergnaud, al desarrollar su clasificación aditiva, considera que los tipos TTT, RRR (Relación-Relación-Relación) y RTR (Relación-Transformación-Relación) implican una resolución en $\mathbb{Z}$. Sin embargo, Dienes no es de esta opinión y así, al desarrollar secuencias didácticas sobre la suma y resta de números naturales, utilizando sus máquinas aditivas, advierte de que la composición de máquinas aditivas (equivalente a las situaciones de tipo TTT) no significa estrictamente trabajar en los números enteros, desde el momento que las entradas y salidas de las máquinas tienen que ser números

1996a, 1996b) llevaron a cabo experiencias de enseñanza de los números negativos en las que usaron: deudas y haberes, altitudes por encima o debajo del nivel del mar, temperaturas, tiempo antes o después de Cristo y móviles que recorren una carretera en uno u otro sentido, en situaciones del tipo Estado-Estado-Estado (SSS), Estado-Transformación-Estado (STS), Estado-Relación-Estado (SRS) y Transformación-Transformación-Transformación (TTT). Utilizaron también el modelo de la recta numérica, enseñando a los alumnos a representar los estados correspondientes a los diferentes modelos mediante puntos en la recta y las variaciones (o transformaciones) de los mismos mediante vectores.

Su conclusión es que la recta numérica es un buen apoyo para razonar sobre la suma y la resta de los números negativos, pero que la interpretación en términos de dicho modelo se facilita si se utilizan otros modelos (deudas y haberes, etc.) como intermediarios entre "lo formal" y "la recta". Se muestran, por tanto, partidarios del uso de los modelos concretos habituales, pero presentándolos en situaciones aditivas muy variadas, tanto desde el punto de vista del tipo de situación como del lugar que ocupa la incógnita dentro de ella, y de introducir la recta numérica como un sistema de representación universal de las distintas situaciones y modelos.

También Vargas-Machuca et al. (1990) utilizan los modelos escolares y la clasificación de Vergnaud, pero, en este caso, haciendo hincapié en las situaciones de comparación (concretamente, situaciones de Estado-Relación-Estado (SRS), Relación-Relación-Relación (RRR) y Relación-Transformación-Relación (RTR)). Para ellos, la clave de la comprensión del número entero está en asumirlo como "medida o cuantificación de comparaciones y transformaciones". Su propuesta pretende familiarizar a los alumnos con situaciones de comparación referidas a distintos modelos para, posteriormente, hacerles aceptar el paso de un cero absoluto, entendido como símbolo de la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero relativo, entendido como medida convencional que se asigna a una cierta cantidad de magnitud que es término de comparación para muchas otras. Esto, a juicio de los autores, es lo que permite el paso del número natural al 'número entero contextualizado'[33]. Después, consideran necesaria otra fase didáctica, que citan aunque no detallan, que permita pasar del 'número entero con-

naturales. Según él: "se precisan intuiciones mucho más finas para pasar al caso en que las entradas y salidas sean números enteros" (Dienes, 1976, p. 52).

[33] Uno de los ejemplos que utilizan es el de las puntuaciones en el juego de golf. Mientras se habla del número de golpes que ha necesitado cada jugador para hacer un hoyo estamos en el ámbito de los números naturales. Cuando se da el valor cero al

textualizado' al 'número entero abstracto'.

González Marí (1994, 1995, 1996) es también partidario de que a lo largo del currículo escolar, los alumnos se familiaricen con las situaciones aditivas de comparación en el contexto de los modelos concretos habituales, como paso previo y necesario para la introducción de los números enteros. Ahora bien, la constatación, a través de una serie de cuestionarios, de que el orden que inducen los modelos concretos más frecuentes no es el propio de los números enteros, le lleva a plantearse la construcción, por razones didácticas, de un nuevo objeto matemático, el 'número natural relativo'. Dicho número que, según el autor, refleja mejor el comportamiento de los modelos, ocuparía una posición intermedia entre el número natural y el entero y sus diferencias con este último serían las siguientes:

> 1) Orden total [en el número entero] / orden parcial con inversión en la región "negativa" [en el número natural relativo]; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa). (González Marí, 1996)

Así pues, según esta propuesta, el trabajo en la escuela con situaciones aditivas de comparación conduciría a la noción de 'número natural relativo' desde la cual, más adelante, habría que pasar a la de número entero.

Un planteamiento completamente distinto de los anteriores es el de Thomaidis (1993) que, en vez de recurrir a modelos de neutralización o desplazamiento, propone un modelo distinto: el de los exponentes de las potencias de un misma base. Considera que, históricamente, la necesidad de utilizar exponentes positivos y negativos jugó un papel importante a la hora de dar un estatuto matemático a los números negativos. En consecuencia, propone usar ese modelo en la enseñanza para justificar las reglas de las operaciones con los números enteros.

I.12. Otras puntualizaciones sobre las propuestas de enseñanza basadas en modelos concretos

En primer lugar, hay que advertir de que muchas de las propuestas de utilización de modelos concretos para enseñar los números enteros son incompletas, bien porque contemplen sólo la estructura aditiva de dichos

---

número de golpes que constituye la moda de la distribución y se empieza a hablar de número de golpes bajo par o sobre par estamos en el ámbito de los 'números enteros contextualizados'.

números[34], que son con mucho las aportaciones más numerosas, bien porque se ocupen solamente de la estructura multiplicativa[35]. En este último caso, los autores suelen dar por supuesto que el alumno ya conoce la estructura aditiva de $\mathbb{Z}$ y se centran en el problema de justificar su estructura multiplicativa. Además, la mayor parte de las propuestas obvian la estructura ordinal del conjunto de los números enteros[36].

También hay que puntualizar que son muy pocos los autores que, una vez introducida la noción de número entero a través de uno o varios modelos concretos, se plantean la necesidad de un proceso de formalización, de descontextualización de la noción inicialmente aprendida. Incluso algunos autores no parecen distinguir entre el conocimiento del modelo y el conocimiento de la noción matemática y aseguran, por ejemplo, que un alumno "ha aprendido" la suma y la resta de números enteros, simplemente, por haber desarrollado cierta habilidad en el manejo de fichas de dos colores que se neutralizan entre ellas. Entre los que hacen alguna referencia explícita, aunque breve, a la necesidad de descontextualizar el conocimiento inicial para pasar a una concepción de número entero más abstracto están Alcalá (1998), Baldino (1996), Bruno y Martinón (1995-96), González Marí (1996) y Vargas-Machuca et al. (1990).

Un reflejo de esta falta de preocupación por la descontextualización de la noción de número entero inicialmente aprendida a través de un modelo concreto, lo tenemos en la casi total ausencia de análisis de la escritura del número entero y sus operaciones. Son muy pocos los autores de propuestas didácticas que entran a discutir las distintas valencias o significados de los

[34] Entre otros: Aze (1989), Bartolini (1976), Bell (1982a, 1986, 1993), Bruno y Martinón (1994a, 1994b, 1995-96, 1996a, 1996b), Cemen (1993), Chang (1985), Davidson (1987), Frank (1969), Gadanidis (1994), Galbraith (1974), Gallardo (1994), González Marí (1994, 1995, 1996), Hativa y Cohen (1995), Jencks y Peck (1977), Johnson (1978), Liebeck (1990), Linchevski y Willams (1996), Lytle (1994), Malpas (1975), Marthe (1979), Moro y Salazar (1993), Papy (1968), Rossini (1986), Rowland (1982), Sánchez Olmedo (1991), Sasaki (1993), Semadeni (1984), Stephan y Akyuz (2012), Strefland (1996), Thompson y Dreyfus (1988), Tulej y Gorman (1990) y Whiffing (1989).

[35] Entre otros: Cooke (1993), Crowley y Dunn (1985), Dubisch (1971), Havenhill (1969), Hollis (1967), Peterson (1972), Sarver (1986) y Whitman (1992).

[36] Sólo los siguientes autores hacen alguna referencia a cómo introducir el orden de $\mathbb{Z}$: Alsina et al. (1980), Dieudonné (1987, pp. 57-59), González Alba et al. (1989), González Marí (1994, 1995, 1996), Grup Zero (1980), Moro y Salazar (1993), NCTM (1970), Salmerón (1988), SMP (1987, pp. 1-20) y Vargas-Machuca et al. (1990). Se trata de aportaciones someras al tema, salvo en el caso de González Marí.

signos $+$ y $-$ en las expresiones numéricas algebraicas. Incluso los que usan la notación anglosajona e indican los números positivos y negativos con el signo como superíndice a la izquierda del número (^{+}a, ^{-}a), lo hacen sin apenas referirse al distinto significado de los signos $^{-}$ y $-$ y sin explicar en qué momento consideran oportuno abandonar esta notación para pasar a la notación matemática habitual, ni si el uso de esta notación, inexistente en el mundo de las matemáticas, puede crear algún problema de enseñanza.

Lo poco que se dice sobre las valencias de los signos nos aporta el siguiente balance, en el que, como podemos ver, aparecen posturas contradictorias:

- NCTM (1970) utiliza tres signos en su disertación sobre los números enteros: el signo $-$ para indicar la operación de restar, el $^{-}$ para indicar que un número es negativo ($^{-}6$) y el $^{\circ}$ para indicar que un número es el opuesto de otro ($^{\circ}(^{-}6)$). Al final, dice que esas notaciones no son universales desde el punto de vista de las matemáticas, donde se utiliza únicamente el signo $-$ con los tres significados. Consideran que no hay contradicción entre los tres usos porque todos ellos pueden reducirse al de opuesto de un número: el número negativo -4 es también el opuesto de 4 y la diferencia $4 - 7$ puede entenderse como la suma de 4 con el opuesto de 7, $4 + (-7)$.

- Freudenthal (1973, p. 266) considera que el signo $-$ puede indicar una operación (la resta) o un estado (un número negativo), mientras que el signo $+$ indica siempre una operación porque se puede prescindir de su valencia como estado. Además, se manifiesta en contra del recurso didáctico de distinguir los dos usos mediante la utilización de la notación $^{-}$ para indicar los signos de estado.

- Carraher (1990) distingue el signo como indicador de una resta del signo que indica un número negativo y pone en duda la conveniencia didáctica de marcar esta diferencia con notación distinta. Aduce que existe un tercer significado del signo $-$ para indicar el opuesto de un número y que no por eso se utiliza un tercer símbolo distinto de los anteriores.

- Léonard y Sackur (1990) atribuyen cuatro significados al signo $-$: puede indicar un número negativo, una sustracción, el opuesto de un número o una multiplicación por -1.

- Gallardo (1996) habla de la triple naturaleza del signo $-$: binaria, cuando indica una operación binaria, unaria, cuando indica que un número es negativo, y simétrica, cuando indica el opuesto de un número. Esta misma clasificación es usada por Bofferding (2010) para analizar los significados que dan los niños al signo $-$ antes de recibir enseñanza sobre los números negativos, concluyendo que el significado más usado por los niños es el binario. También Vlassis (2004a) parte de la propuesta de Gallardo, aun cuando introduce alguna modificación en el significado binario.

- Baldino (1996, 1997) distingue entre signos operatorios, cuando $+$ y $-$ indican sumas o restas, y signos predicativos, cuando indican números positivos o negativos. Entiende que la expresión $-(+4)+(-7)-(-3)+(+6)$ se puede reducir a signos operatorios y quedaría $-(4)-(7)+(3)+(6)$, o a signos predicativos y entonces sería $+(-4)+(-7)+(+3)+(+6)$.

- Gobin et al. (1996) consideran que el signo $-$ puede ser operatorio o predicativo y que como predicado designa a la vez un número negativo y el opuesto de un número. Interpretan que en la expresión $3+(-7)$ el signo $+$ es operatorio y el signo $-$ predicativo y en la expresión $-8-5$ el primer $-$ es predicativo y el segundo operatorio[37].

Por último, queda por comentar que la posición de los autores ante los modelos que describen es muy distinta. Unos se limitan a dar cuenta de su existencia, otros, los más, los proponen entusiásticamente asegurando que la utilización del modelo resuelve muchos de los problemas que se plantean en la enseñanza de los enteros, mientras que otros los describen para criticarlos y poner en duda su eficacia didáctica.

I.13. Obstáculos epistemológicos y propuestas de enseñanza de los números enteros

Las conclusiones que se desprenden de los estudios sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos hacen sospechar que la utilización en la enseñanza de modelos concretos de neutralización o desplazamiento puede no ser pertinente o, por lo menos, debe discutirse su pertinencia. Para empezar, no sólo es evidente que, aun cuando dichos modelos justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto[38], sino que hay que afrontar la posibilidad, comentada, entre otros, por Glaeser (1981), Coquin-Viennot (1985) y Gobin et al. (1996), de que dichos modelos sean incluso un obstáculo para la comprensión de la estructura multiplicativa de los números enteros. A este respecto, Glaeser se muestra muy tajante:

[37] Esta es la interpretación que se da en la mayor parte de los manuales escolares que introducen el número entero.

[38] Fischbein (1987, pp. 100-101) llega a decir que los modelos que se proponen para justificar el producto de enteros son tan sofisticados y artificiales como el producto mismo.

> Las enseñanzas que se deducen de nuestro estudio son, en principio, una bofetada para la pedagogía de las opiniones. Ésta proclama gustosa que las matemáticas *deben* enseñarse por medio de *ejemplos concretos*. La didáctica científica, en cambio, se esfuerza por poner en evidencia las ventajas e inconvenientes de una enseñanza basada en ejemplos. El estudio histórico que acabamos de presentar muestra precisamente *un caso en el que una pedagogía basada exclusivamente en ejemplos concretos es nociva.*
>
> Además, un aprendizaje satisfactorio de las propiedades aditivas que se apoye en un "buen modelo" corre el riesgo de crear, posteriormente, bloqueos en la comprensión de las propiedades multiplicativas. (1981, p. 344)

Por otro lado, la hipótesis de que varios de los obstáculos definidos por Glaeser son manifestaciones de un obstáculo más general: el de la concepción del "número como medida", hipótesis formulada por Duroux (1982) y Brousseau (1983) y asumida, posteriormente, por otros varios autores (Coquin-Viennot, 1985; Iriarte et al., 1991; Schubring, 1986, entre otros), plantea también dudas sobre si la utilización de modelos concretos está en consonancia con el tratamiento didáctico que debe recibir un obstáculo. En opinión de Brousseau:

> El obstáculo está organizado como un conocimiento, con sus objetos, relaciones, métodos para conocer, previsiones, evidencias, consecuencias olvidadas, ramificaciones imprevistas... Va a resistir el rechazo, intentará como pueda adaptarse localmente, modificarse lo menos posible, optimizarse sobre un campo reducido, siguiendo un proceso de acomodación bien conocido.
>
> Por todo ello, será necesario un flujo suficiente de situaciones nuevas, inasimilables por él [por el obstáculo], que lo desestabilicen, lo vuelvan ineficaz, inútil, falso, que hagan necesaria la renovación o el rechazo, el olvido, la extirpación, hasta de sus últimas manifestaciones. (Brousseau, 1983, p. 175)
>
> (...)
>
> Esta observación tiene importantes consecuencias, en primer lugar, para la enseñanza: así, si se quiere desestabilizar una noción muy arraigada, será ventajoso que el alumno pueda poner a prueba, suficientemente, sus concepciones en situaciones
>
> - bastante numerosas e importantes para él
>
> - y, sobre todo, bajo condiciones de información suficientemente diferentes para que hagan necesario un salto cualitativo [en los conocimientos del alumno]. (Brousseau, 1983, p. 176)

Según esto, una acción didáctica pertinente iría en la línea de plantear al alumno situaciones muy diferentes de las que suelen aparecer en el ámbito de la aritmética elemental, para que se viera obligado a poner en duda su concepción del número como medida. Sin embargo, la utilización de los modelos concretos, ¿no es precisamente una manera de perpetuar el obstáculo reforzando la idea de que los números enteros también son medidas? Como bien dicen Vargas-Machuca. et al. (1990, p. 151):

> (...) lo habitual en la enseñanza de los números enteros no ha sido el provocar el conflicto sino el evitarlo, con lo que las concepciones ingenuas de la aritmética práctica han seguido vigentes (...)

Además, cualquier incursión en la historia de los negativos pone de manifiesto, como ya hemos visto en apartados anteriores, que se trata de una noción que ha surgido por necesidades internas de las matemáticas ligadas, concretamente, al desarrollo del cálculo formal algebraico y de la teoría de ecuaciones. Se puede decir, incluso, que es la primera noción matemática de la enseñanza elemental cuya génesis histórica no puede explicarse recurriendo a la necesidad de modelizar el mundo físico o social[39]. Como consecuencia, algunos autores han puesto en duda la legitimidad de las justificaciones didácticas basadas en modelos concretos por ser ajenas a la historia de la noción. El más explícito es Chevallard cuando dice que:

> Los números artificiales -aquí, negativos- no están por tanto motivados por el estudio de sistemas con variables que toman valores enteros positivos y negativos, como se obstinan todavía algunos en hacer creer, presentando raros sistemas de este tipo: altitudes, ascensores, pérdidas y ganancias, etc. Nacen de las exigencias internas del trabajo matemático (exáctamente: algebraico). (Chevallard, 1990, p. 22)

También Cid (2002) abunda en las mismas ideas, afirmando, no sólo que los modelos concretos obstaculizan una buena comprensión de la estructura multiplicativa y ordinal de los números enteros, sino que tampoco son eficaces como medio de reconstrucción de la estructura aditiva en caso de olvido por parte del alumno.

> En realidad, el conocimiento previo que tienen los profesores del comportamiento de los enteros es una guía que les permite elegir dentro del modelo aquellos argumentos que les conducen al establecimiento correcto de las reglas de suma y resta, pero si no se conoce previamente lo que se quiere obtener, es muy fácil seguir una argumentación que lleve a cometer errores. Por ejemplo, un alumno podría pensar que $(+70) - (-10) = +70$ porque "si tengo 70 pesetas y me perdonan una deuda de 10 pesetas sigo teniendo 70 pesetas". Naturalmente, el profesor utiliza otro razonamiento dentro de ese mismo modelo, pero hay que reconocer que el primero es perfectamente válido desde el punto de vista del "sentido común", que es a lo que se apela cuando se trabaja con modelos muy familiares a los niños. (Cid, 2002, vol.2, p. 534)

Según Cid, los inconvenientes que presentan los modelos concretos se deben a que la estructura algebraica que más se asemeja a ellos no es la

[39] Esta idea puede encontrarse en Klein (1927, p. 25) y después la reproducen distintos investigadores (Chevallard, 1990; Fischbein, 1987; Freudenthal, 1973, 1983; Gobin et al., 1996; Thomaidis, 1993).

de anillo totalmente ordenado, sino la de espacio vectorial unidimensional o la de espacio afín unidimensional. De ahí las dificultades para justificar a través de dichos modelos un producto interno y un orden total compatible con las operaciones. Por último, comenta que la aritmética no permite justificar de manera creíble la necesidad de introducir los números enteros ya que cualquier problema aritmético escolar admite una modelización mucho más económica en términos de números positivos.

Se desprende de todo esto una idea genérica de que "lo concreto" puede, por diferentes razones, ser un obstáculo para una buena concepción del número entero. Ahora bien, si nos preguntamos qué influencia ha tenido todo este discurso en los diseñadores de propuestas didácticas deberemos contestar que muy poca. Por supuesto, muchos de los trabajos de este tipo son anteriores a las publicaciones sobre obstáculos y, por lo tanto, mal pueden tener en cuenta lo que allí se dice. Pero en las propuestas didácticas más recientes se siguen defendiendo la utilización de modelos concretos y, mayoritariamente, se ignoran o se prescinde de las opiniones vertidas en los artículos sobre epistemología de los números negativos.

Entre los que se dan por enterados de las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos en los números negativos están: Bell (1982b), Baldino (1997), Bruno y Martinón (1996), Gallardo (1994), Gobin et al. (1996), González Marí (1996), Janvier (1985), Semadeni (1984), Souza et al. (1995), Streefland (1996), Thomaidis (1993), Vargas-Machuca et al. (1990) y Vlassis (2004a), pero la mayor parte de ellos se limitan a hacer una cita más o menos extensa al respecto y no analizan desde el punto de vista epistemológico los modelos que proponen. Únicamente, Gobin et al. y Vargas-Machuca et al. advierten de que los modelos concretos pueden obstaculizar una buena comprensión de la noción matemática de número entero, aunque siguen proponiendo su utilización. Por su parte, Thomaidis va un poco más lejos y, ante dicha posibilidad, prescinde de los modelos basados en objetos extramatemáticos y recomienda una introducción de los números enteros a través de potencias de exponente positivo o negativo (ver apartado I.12).

Por otro lado, también una enseñanza "formal" de los números enteros produce, a juicio de algunas autores, obstáculos que impiden una buena comprensión del concepto. Por ejemplo, Leonard y Sackur (1990), al constatar que bastantes alumnos se equivocan en las sumas y restas de enteros porque aplican la regla de los signos que corresponde al producto, consideran que es el aprendizaje formal de dicha regla, sin ligarla a un modelo que la justifique y le dé sentido, el que dificulta la comprensión de la estructura aditiva de los enteros. También Gallardo (1996) e Iriarte et al.

(1991) señalan dificultades similares cuando hablan, respectivamente, de la "presencia del dominio multiplicativo en las situaciones aditivas" o de "la imposición de lo formal como obstáculo" (ver apartado I.9).

Como consecuencia de este supuesto doble obstáculo: el de "lo concreto" y el de "lo formal", la enseñanza del número entero se encuentra encerrada en un aparente dilema:

> La enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada, de forma creíble, en el plano concreto, aunque algunos autores, rizando el rizo, se esfuercen en buscar situaciones concretas para justificar todas las propiedades de los enteros; pero, por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y a causar errores y confusiones. Es decir, se trata de un tema en el que no cabe aplicar la vía que caracteriza a la enseñanza de la matemática elemental, ni tampoco la que caracteriza a la enseñanza superior, pues ninguna de las dos es, en este caso, satisfactoria: la primera porque impide el acceso a lo abstracto, la segunda porque la imposición de la abstracción es estéril. (Vargas-Machuca et al., 1990, p. 150)

I.14. Otras críticas a las propuestas de enseñanza de los números enteros

Aun cuando son muy pocos los investigadores que se cuestionan la enseñanza de los enteros en términos de obstáculos epistemológicos, sí que se han hecho, desde siempre, críticas a las distintas propuestas presentadas. Para empezar, hay que tener en cuenta que cuando se expone una novedad en materia de enseñanza la forma más sencilla de justificarla es criticando lo ya existente. Pero además, algunos de los proponentes no se limitan a presentar sus ideas acerca de cómo introducir los números enteros, sino que hacen un trabajo de campo analizando las consecuencias que se derivan de su puesta en práctica lo que, lógicamente, introduce una faceta crítica en su trabajo.

Freudenthal, por ejemplo, tiene sus dudas respecto a la conveniencia de introducir los números negativos por medio de modelos concretos. Comenta (1973, pp. 279-282) que, aun cuando en los inicios de la enseñanza de los conceptos numéricos es pertinente la utilización de estos modelos (llamada por él 'método intuitivo'), este tipo de enseñanza no se puede prolongar indefinidamente, pues a la larga la intuición puede convertirse en una rémora para el alumno. Considera, por tanto, que la introducción del número negativo es el momento adecuado para sustituir el método intuitivo por uno de tipo inductivo que preludie lo que más adelante será un proceso deductivo (a esto le llama 'método racional'). Coincide con Klein en que la aparición de los números negativos en la escuela supone:

> *El paso de la matemática práctica a la matemática formal*, para cuya completa comprensión es precisa en alto grado la capacidad de abstracción. (Klein, 1927, p. 25)

y que el tratamiento didáctico que se les dé debe ser consecuente con estas ideas.

También Brown (1969) muestra su reticencia al uso de modelos en general diciendo que normalmente éstos no son isomorfos al sistema que modelizan lo que implica que determinados teoremas que se cumplen en el modelo pueden no ser válidos en el sistema, creando la consiguiente confusión en los alumnos.

De entre los modelos concretos uno de los más criticados es el de la recta numérica, a pesar de que es el más utilizado en la enseñanza, o quizá por eso. Tanto Brookes (1969) como Cable (1971) ya señalan el hecho de que en ese modelo los números enteros tan pronto se representan por puntos, como por desplazamientos, como por factores escalares, dando lugar a que la suma y el producto de enteros se interpreten en términos de operaciones externas. Glaeser (1981) es consciente también de este problema cuando exige que un buen modelo concreto debe referirse a operaciones internas.

Diversos autores (Bell, 1982; Bruno y Martinón, 1994b, 1995-96; Carr y Katterns, 1984; Ernest, 1985; Gallardo, 1995; Küchemann, 1981; Liebeck, 1990; Mukhopadhyay, 1997) han puesto de manifiesto que los niños tienen dificultades para interpretar la suma y resta de números naturales o enteros usando el modelo de la recta real. Básicamente, se observa que tienden a representar los números y el resultado de la operación como puntos aislados en la recta, no como vectores, lo que no les permite dar una interpretación de las operaciones en el modelo. Gallardo detecta el mayor número de errores en restas del tipo $a - (-b)$ y $-a - (-b)$ y en el reconocimiento de la simetría entre números expresados en la forma $-(+a)$ y $-(-(+a))$. Bruno y Martinón ponen de manifiesto que es necesaria una larga secuencia didáctica para enseñar a los niños a usar el modelo de la recta real con los números naturales y enteros, teniendo que recurrir a otros modelos concretos (temperaturas, deudas y haberes, etc.) para facilitar la comprensión del de la recta.

También existen referencias a las dificultades de los alumnos en el uso de otros modelos concretos. Como ya comentamos al final del apartado I.12, las investigaciones de González Marí (1995) muestran que el orden que inducen determinados modelos concretos no es el de los números enteros. Además, Lytle (1994) constata que en el modelo de fichas de dos colores surgen dificultades de interpretación de la resta de números enteros. Gallardo (1994) refleja esa misma dificultad al hacer experiencias de enseñanza con dicho modelo y añade que se producen confusiones entre las estructuras aditiva y multiplicativa de $\mathbb{Z}$.

En ese mismo sentido, Bell (1986) constata que hay niños que no saben dibujar correctamente la escala de un termómetro, que cuando tienen que calcular la diferencia entre dos temperaturas efectúan siempre una resta independientemente de los signos de las mismas, que no interpretan adecuadamente la expresión "más abajo" o "más arriba" para calcular la posición de un disco en la "lista de los cuarenta principales" a partir de una primera posición, que deciden sumar o restar en función de que en el enunciado que se les presenta aparezcan, respectivamente, palabras como 'más' o 'sube' o como 'menos' o 'baja', etc. A pesar de esto, Bell está convencido de que es a través de dichos modelos como deben introducirse los enteros:

> Si los números negativos y las operaciones con ellos han de lograr el concreto status familiar que tienen los positivos, los alumnos necesitan mucha más experiencia en la exploración y manipulación de las situaciones familiares en las que esos números se encuentran. (Bell, 1986, p. 199)

pero, eso sí, proponiendo secuencias didácticas en las que se trabajen detalladamente esos modelos y fomentando, por medio de debates en el aula, que afloren las diferentes dificultades que los alumnos encuentran en su manejo, para permitir el tratamiento didáctico de las mismas.

En otro orden de cosas, Carraher (1990) pasó, a personas de distintas edades, un cuestionario sobre problemas de deudas y haberes en diferentes contextos. La mitad de la muestra tenía que resolverlos oralmente y la otra mitad por escrito. No se observó que el hecho de conocer los números enteros mejorara las tasas de éxito. Incluso se comprobó que los encuestados que conocían los números negativos no los utilizaban, resolviendo los problemas por medio de números positivos a los que calificaban, de palabra o por escrito, como deudas o haberes. También Whitacre et al. (2012) comprueban que el 80% de los alumnos resuelven un problema de pérdidas y ganancias monetarias en términos de números naturales, aun cuando han recibido enseñanza sobre los números enteros, lo que les lleva a cuestionar la pertinencia de introducir los enteros mediante el modelo de deudas y haberes o pérdidas y ganancias. Por otro lado, Mukhopadhyay et al. (1990) comprueban que los alumnos se desenvuelven mejor en un contexto de deudas y haberes que en situaciones de cálculo formal con números enteros, lo que, a nuestro juicio, parece deberse al hecho de que en el primer caso resuelven utilizando números naturales.

Nos encontramos también con las reticencias de Human y Murray (1987) y Murray (1985) a la enseñanza de los números enteros por medio de modelos concretos, basadas en que sus experiencias sobre las estrategias espontáneas de los niños en la realización de operaciones con números negativos, muestra que no utilizan estos modelos. Los niños, antes de recibir enseñanza sobre el tema, tienden a usar razonamientos formales buscando analogías entre los números positivos y los negativos o, como mucho, recurren a las temperaturas o a una recta vertical que representa el termómetro (ver apartado I.10). Conclusiones parecidas obtienen Whitacre et al. (2011) al entrevistar a niños que apenas han recibido enseñanza formal sobre los números negativos, lo que les lleva a discutir la introducción escolar de los números enteros mediante modelos concretos. Dado que la historia de las matemáticas muestra que los números negativos surgieron por necesidades internas de las matemáticas, se plantean si no sería posible una enseñanza basada en la necesidad matemática de extender las operaciones aritmeticas de resta y multiplicación.

Por último, existen algunas experiencias en las que se compara los efectos que produce el uso de unos u otros modelos en la enseñanza, pero sin resultados significativos que inclinen la balanza a favor de unos u otros. En este sentido, Janvier (1983, 1985) compara el modelo de fichas de dos colores con el del globo que sube o baja en función de que se le añadan balones de helio o sacos de arena y Liebeck (1990) compara un modelo basado en un juego de "tantos y prendas" con el modelo de la recta real.

I.15. La polémica sobre los obstáculos epistemológicos. Relaciones entre epistemología y didáctica de las matemáticas

En lo que va de capítulo hemos hablado de la noción de obstáculo epistemológico, del lugar que ocupa en la teoría de situaciones, de su interés para la práctica docente, de los posibles obstáculos epistemológicos en los números negativos y de sus repercusiones en la enseñanza de dichos números y en el análisis de los errores de los alumnos. Pero, para cerrar el estado de la cuestión, nos falta comentar los reparos de distintos investigadores al uso de dicha noción y la polémica a la que esta toma de postura ha dado lugar.

La transposición de la noción de obstáculo epistemológico al ámbito de la didáctica de las matemáticas, iniciada por Brousseau en 1976, suscitó mucho interés y en los años siguientes proliferaron las investigaciones didácticas en términos de obstáculos. Sin embargo, pasado un tiempo, las vicisitudes sufridas en el intento de determinar los obstáculos epistemológicos que afectan a diversas nociones matemáticas -por ejemplo, las comentadas en los apartados I.5 y I.6 en el caso concreto de los números negativos-, el diferente significado que unos y otros investigadores atribuían a la noción y la aparente falta de utilidad práctica de dichas investigaciones, enfriaron el entusiasmo inicial.

A este respecto, la postura de Sierpinska, que, en un principio, investigó los obstáculos epistemológicos que afectaban a la noción de límite, más concretamente, a la de tangente a una función en un punto entendida como límite de secantes (Sierpinska, 1985), refleja un estado de opinión bastante generalizado:

> La noción de obstáculo epistemológico ha hecho una carrera espléndida en didáctica de las matemáticas. Nos gusta mencionarla mientras enumeramos las nociones importantes construidas en este dominio. Pero ¿cuál es su verdadera aportación a la didáctica de las matemáticas? ¿Qué ha explicado? ¿Ha sido verdaderamente útil en alguna investigación? ¿Qué servicios ha prestado en la práctica de la enseñanza?
>
> Por otra parte, ¿por qué hay tantas controversias sobre la naturaleza de los obstáculos epistemológicos? Estos últimos parecen escapar a cualquier definición satisfactoria. Puesto que todo conocimiento puede ser un obstáculo, incluso algunas veces se llega a la conclusión de que la noción de obstáculo no tiene sentido (si se considera que todo lo que **ya** se sabe es un obstáculo a lo que no se sabe **todavía**). (Sierpinska, 1989, p.130)

Las últimas frases de la cita anterior son especialmente significativas porque ponen de manifiesto uno de los aspectos más conflictivos de la noción: el hecho de que el obstáculo sea un conocimiento matemático. En efecto, Brousseau establece, desde el primer momento (Brousseau, 1976), que el obstáculo es un conjunto de conocimientos matemáticos, una concepción, que tiene, en principio, un dominio de validez y eficacia, pero que, posteriormente, al intentar utilizarla en otros dominios, resulta ser falsa y se convierte en una fuente de errores (ver apartados I.1 y I.2). Y, ante la utilización que hace Glaeser del término 'obstáculo' en su artículo sobre los números negativos (Glaeser, 1981), vuelve a insistir, junto con Duroux (Brousseau, 1983, 1989a; Duroux, 1982), en que un obstáculo es un conocimiento, no una dificultad, ni una falta de conocimiento (ver apartados I.2 y I.7).

Sin embargo, esta forma de entender la noción de obstáculo choca con las interpretaciones que otros autores adoptan en el transcurso de sus investigaciones. El primero que manifiesta su desacuerdo es el propio Glaeser (1984), quien, remitiéndose a la obra de Bachelard, creador inicial de la noción, asegura que ninguno de los ejemplos de obstáculo epistemológico que este último propone puede atribuirse a un “conocimiento mal hecho”. Considera que la formulación de Brousseau es demasiado categórica y restringida y echa en falta la existencia de estudios exploratorios de las dificultades de enseñanza-aprendizaje de los conceptos matemáticos, antes de definir de una manera estricta la noción de obstáculo epistemológico.

También Schubring (1986) discrepa de la postura de Brousseau y, como ya comentamos en el apartado I.6, llama ‘obstáculos epistemológicos’ a determinadas concepciones sobre la naturaleza de las nociones matemáticas, distinguiendo entre una epistemología sustancialista, que atribuye a dichas nociones una existencia similar a la de los objetos del mundo físico, y una epistemología sistémica, en la que éstas quedan justificadas por su consistencia lógica dentro de las teorías matemáticas.

Sierpinska (1989), siguiendo las ideas de Wilder (1981) considera que las matemáticas forman un sistema cultural que contiene tres niveles:

> El nivel III (técnico) es el nivel de las teorías matemáticas, de los conocimientos verbalizados y validados. El nivel II (informal) de la cultura matemática es el nivel del saber matemático implícito que permite a los matemáticos proponer y resolver problemas. Este saber (o este arte) no se deja comunicar bien, incluso cuando parece tener sus esquemas, sus leyes y sus reglas. El nivel I (formal) contiene, aparte de la visión general del mundo, las creencias, prejuicios, convicciones, ritos y normas ligados a las nociones matemáticas y a los matemáticos. Así, contiene actitudes filosóficas respecto a las matemáticas, por ejemplo, la concepción de las matemáticas como una abstracción de la verdad (los axiomas de las teorías matemáticas contienen verdades absolutas) o como un juego formal con símbolos desprovistos de significado, etc. Contiene también ideas sobre los métodos que son aceptables en matemáticas (la solución, con ayuda de un ordenador, del problema de los cuatro colores, ¿ha sido aceptado por todos los matemáticos?) y sobre la evolución de las matemáticas (por acumulación o por pruebas y refutaciones). (Sierpinska, 1989, p. 133)

A partir de esta interpretación de las matemáticas, Sierpinska opina que el nivel III (técnico) no puede contener obstáculos epistemológicos y que éstos estarán siempre ligados a los niveles I y II (formal e informal). Pero una actitud filosófica o cultural acerca de las matemáticas o un esquema de pensamiento o de comportamiento a la hora de resolver problemas no será tampoco un obstáculo en sí mismo, sino que puede funcionar como un obstáculo si no se tiene conciencia de las limitaciones de sus ámbitos de aplicación. Y franquear el obstáculo será, precisamente, tomar conciencia de dichas limitaciones.

Para Artigue (1990), los obstáculos tampoco son los conocimientos matemáticos. Refiriéndose a la afirmación de Brousseau (1989a) de que los números naturales son un obstáculo a la comprensión de los racionales y decimales, Artigue reconoce que determinadas propiedades de los números naturales (cada número tiene un siguiente, un producto es siempre mayor o igual que cada uno de sus factores, etc.) que los niños extienden a los decimales y racionales producen errores muy difíciles de erradicar, pero considera que el obstáculo no son los conocimientos sobre los números naturales sino el proceso de 'generalización abusiva' de estas propiedades[40]. Este proceso se revela también como un productor de obstáculos en la historia de las matemáticas y, al mismo tiempo, como un verdadero motor de producción de conocimientos matemáticos.

A partir de esta idea, Artigue (1990, pp. 261-262) hace una lista, que no pretende exhaustiva, de procesos productores de obstáculos que se han dado y se dan, tanto en la historia de las matemáticas como en la enseñanza actual:

- *la generalización abusiva* de la que acabamos de hablar.

- *la regularización formal abusiva* que está detrás de errores tales como $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ o $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

- *la fijación sobre una contextualización o una modelización familiar* como, por ejemplo, la que se produce cuando se identifican los números enteros con el modelo de pérdidas y ganancias.

- *la amalgama de nociones sobre un soporte dado*, por ejemplo, fuerza y velocidad de un móvil, tensión y corriente de una pila, etc.

Además, Artigue comenta también que la mayor parte de las investigaciones sobre obstáculos epistemológicos han tenido, básicamente, un componente histórico dedicado a constatar la resistencia de esas concepciones a evolucionar. Sin embargo, en el caso de los alumnos actuales, no está claro que se produzcan esas mismas resistencias ni que se deban a las

---

[40] Encontramos esa misma opinión en Sierpinska:

> Se nos dice: el conocimiento de los números naturales es un obstáculo para el conocimiento de los números decimales; lleva a los alumnos a decir, por ejemplo, que $1'19$ es más grande que $1'2$. Esto nos asombra porque, desde luego, no se pueden comprender los decimales sin haber comprendido los naturales. Además, ¡un obstáculo debería poder ser evitado! Finalmente, ¿por qué llamar 'obstáculo' a lo que, por encima de todo, es un conocimiento, un buen conocimiento sobre el que se pueden construir otros conocimientos? Todos nuestros conocimientos son construidos a partir de otros conocimientos que son entonces un apoyo y no un obstáculo. A lo que llamaremos obstáculo en el ejemplo citado será más bien a nuestra tendencia a las generalizaciones prematuras, a las extrapolaciones excesivas. (Sierpinska, 1989, p.130)

causas determinadas en la historia y no a elecciones didácticas efectuadas en la enseñanza actual.

Pero tanto Artigue como Sierpinska plantean objeciones que en parte ya han sido tenidas en cuenta y discutidas por el propio Brousseau, quien, refiriéndose a la posibilidad de que el conocimiento de $\mathbb{N}$ sea un obstáculo a la comprensión de otros conjuntos numéricos, dice lo siguiente:

> Un niño puede comprender las primeras mediciones con la ayuda del recuento, aprender las propiedades del orden con la ayuda de la medición, controlar las operaciones con la ayuda del orden ("esto" aumenta, por consiguiente no hay que dividir) o de otra operación (multiplicar es añadir cierto número de veces), comprender el recuento gracias a las operaciones o a la búsqueda de sucesores... y todas las relaciones posibles, verdaderas en $\mathbb{N}$, son buenas para dar sentido.
>
> Estos conocimientos, ligados por el alumno personalmente o gracias a la historia de la clase, no han sido todos institucionalizados por la actividad del enseñante, pero algunos sí lo han sido y, ciertamente, con todo derecho dentro de ese contexto. Son, en todo caso, indispensables al funcionamiento conveniente de los conocimientos institucionalizados, enseñados por el profesor.
>
> Para el alumno, estas propiedades son las de los números en general, de todos los números. Es comprensible que eso que los matemáticos llaman la inmersión de $\mathbb{N}$ en un conjunto más amplio haga desaparecer algunas de esas propiedades que ya no son verdaderas para todos los números, o incluso que ya no son verdaderas para ninguno.
>
> El alumno no es advertido de esta ruptura, pues, ni la cultura, y en particular la tradición, ni la ingeniería didáctica han producido todavía los instrumentos necesarios (ejercicios, advertencias, conceptos, observaciones, paradojas...). Por consiguiente, cometen errores, y como están atados a una cierta manera de comprender las propiedades de los números, estas concepciones falsas persisten y se pueden observar los efectos de la ruptura durante muchos años.
>
> Más importante aún es el mecanismo de este obstáculo: no son los conocimientos enseñados los que caen en falta -en general los enseñantes proveen a este inconveniente-, son los instrumentos personales de la comprensión del alumno. Éste no comprende porque lo que debe ser cambiado son justamente los medios de lo que él llamaba "comprender" hasta ese momento. (Brousseau, 1989a, 53-54)

> Los obstáculos epistemológicos no residen en la formulación de conocimientos institucionalizados (la enseñanza tiende a comunicar un saber adecuado a este propósito), sino en las representaciones que el sujeto -y eventualmente el profesor- pone en marcha para asegurar el funcionamiento y la comprensión de los conocimientos. Esta comprensión está ligada a las circunstancias de aprendizaje y es necesaria en la utilización de los conocimientos institucionalizados. El alumno debe por consiguiente guardar memoria de los saberes que se le enseñan, pero también cierta memoria de las circunstancias del aprendizaje que él organiza a su antojo. (Brousseau, 1989a, p. 59)

Esta cita pone de manifiesto que el pensamiento de Artigue y Sierpinska no está tan alejado del de Brousseau como en principio podría parecer, al mismo tiempo que sirve de contestación a algunas de las objeciones planteadas por ellas.

Por otro lado, Gascón (1993) no niega el carácter de conocimiento matemático del obstáculo epistemológico, pero considera que la condición de conocimiento válido dentro de unos límites e ineficaz o falso en otros podría ser asignada a cualquier conocimiento matemático. Para evitar ese inconveniente, propone que un obstáculo epistemológico debe buscarse en los orígenes de una bifurcación, entendiendo por tal un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, tanto en lo referente a sus técnicas como al campo de problemas que aborda. De esta manera liga y, por consiguiente, limita la existencia de obstáculos epistemológicos a los momentos de ruptura producidos en la evolución histórica de las matemáticas y así:

> Puede seguir diciéndose que *un obstáculo epistemológico es constitutivo del conocimiento matemático que genera*, y podemos añadir que *la explicitación de un obstáculo en términos de la bifurcación que origina permite comprender la naturaleza de dicho conocimiento*. (Gascón, 1993, p. 306)

En una línea diferente, Léonard y Sackur (1990) prefieren hablar de 'conocimiento local', en vez de utilizar el término 'obstáculo':

> Llamamos *conocimiento local* a un conocimiento del alumno que tiene las dos propiedades siguientes:
>
> 1) es un conocimiento *correcto* dentro de ciertos límites,
>
> 2) el alumno ignora la existencia de estos límites.
>
> Por ejemplo, un alumno que no conozca más que los números enteros naturales atribuirá la misma significación a las dos frases siguientes:
>
> $x^2 \geq x$ en el conjunto de los enteros naturales
>
> $x^2 \geq x$
>
> (...) Este conocimiento (que confunde las dos frases) es verdadero dentro de ciertos límites (para los enteros) pero el alumno que ignora estos límites no puede darle significación mientras no conozca otros números.
>
> (...)
>
> Los conocimientos locales son por tanto conocimientos limitados. A título de conocimientos son *válidos*, *coherentes* y *eficaces*, pero *limitados*, poseyendo cada una de esas propiedades dentro de ciertos límites que el usuario ignora. (Léonard y Sackur, 1990, pp. 209-211)

Prosiguen diciendo que esta noción de conocimiento local está muy cerca de la de obstáculo epistemológico o didáctico definida por Brousseau, pero que la consideran preferible porque así evitan las referencias a la construcción histórica y social del conocimiento, construcción que, a juicio de los autores, al depender de factores muy diversos, relega a un segundo plano los mecanismos individuales de adquisición del conocimiento (Léonard y Sackur, 1990, pp. 210). Añaden, además, que el término 'obstáculo' tiene connotaciones negativas que impiden resaltar el hecho de que se trata de un conocimiento que tiene unos límites en los que es correcto y permite resolver con eficacia[41].

Por otro lado, Chevallard, Bosch y Gascón (1997) consideran que pueden aparecer obstáculos epistemológicos cada vez que en el proceso didáctico se hace necesario un cambio de actividad matemática, es decir, un paso de uno a otro de los siguientes 'momentos': del primer encuentro, exploratorio, del trabajo de la técnica, tecnológico-teórico, de la institucionalización y de la evaluación[42]. Las dificultades de los alumnos para aceptar los cambios en el contrato didáctico necesarios para pasar de uno a otro 'momento' son interpretadas por estos autores como obstáculos epistemológicos ligados a dicho paso[43]. Aquí el adjetivo 'epistemológico' no indica relación con la historia de las matemáticas, sino el hecho de que:

> El obstáculo puede ser descrito en términos de la actividad matemática

[41] Sin embargo, la condición de que el obstáculo es un conocimiento que tiene un campo de validez es precisamente la más enfatizada por Brousseau. Entendemos, además, que el carácter local de un obstáculo, carácter que ya se pone de manifiesto en la definición dada por Brousseau, no es suficiente para caracterizarlo. Un conocimiento local es obstáculo cuando la persona que lo posee se resiste a admitir su carácter limitado, a pesar de que se le advierte una y otra vez sobre dichos límites y a pesar de que el no aceptarlos le lleva a cometer errores frecuentes. ¿Por qué los alumnos aceptan sin problema la "localidad" de determinados conocimientos y, sin embargo, en otros, no pueden asumirla? Esta es la pregunta a la que se pretende contestar usando la noción de obstáculo.

[42] Una descripción detallada de cada uno de esos momentos y del papel que juegan en el proceso didáctico puede encontrarse en Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 261-276).

[43] Esta forma de entender el obstáculo epistemológico es radicalmente distinta a las ofrecidas por otros autores. En artículos anteriores Chevallard hace un uso del término más cercano a la posición de Bachelard, como, por ejemplo, cuando califica de tal a la por él llamada 'ilusión representacionalista', consistente en interpretar las teorías o modelos que se utilizan para estudiar un sistema como imágenes o representaciones de dicho sistema, lo que introduce una exigencia de "parecido" entre el sistema y su modelo de todo punto engañosa y causante de numerosas dificultades y errores (Chevallard, 1992, pp. 75-78).

> en sí misma, sin hacer referencia a las particularidades de los actores. (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997, p. 283)

Más recientemente, Spagnolo (2006) analiza la definición de obstáculo epistemológico a la luz del enfoque semiótico de la cognición matemática (Godino, 2002, citado en Spagnolo, 2006). Considera que dicho enfoque permite una nueva definición de obstáculo epistemológico basada en la noción de campo semántico y en la caracterización del lenguaje como un sistema determinado por representaciones, operaciones y estructuras de control en un cierto dominio de validez.

> *Nueva definición:* Los objetos matemáticos de los campos semánticos construidos precedentemente y que sirven para la construcción sintáctica (en los fundamentos de un nuevo lenguaje), pueden ser obstáculos epistemológicos. (Spagnolo, 2006, p. 352)

Es por tanto en la evolución de los campos semánticos del lenguaje matemático dónde sitúa los obstáculos epistemológicos. De esta manera. estos últimos pueden ser identificados como paradojas lógico-matemáticas y paradojas semánticas, según la clasificación de Watzlawick et al. (1971, citado en Spagnolo, 2006).

Como podemos ver, existe entre los investigadores una fuerte disparidad de criterio sobre la naturaleza de los obstáculos y sobre su interés para la didáctica, disparidad que, sin embargo, no se extiende a otros aspectos de las relaciones entre la epistemología y la didáctica de las matemáticas. De hecho, parece haber un consenso generalizado acerca de la necesidad de efectuar estudios epistemológicos de las nociones matemáticas al afrontar su problemática didáctica[44].

En particular, en la teoría de situaciones de Brousseau, la epistemología es necesaria no sólo para encontrar posibles obstáculos epistemológicos, sino también para desvelar variables didácticas que, utilizadas en la construcción de cuestionarios, permitan delimitar las diferentes concepciones de los alumnos acerca de una misma noción matemática, aspecto del que hablaremos en el apartado siguiente, o permitan construir génesis escolares, es decir, secuencias de situaciones-problema en cuyas estrategias de resolución aparezcan las distintas facetas de las nociones consideradas. Por ejemplo, respecto a esto último y a propósito de los números decimales, Brousseau plantea que:

[44] Un estudio detallado de la relaciones que existen entre la epistemología y la didáctica de las matemáticas puede encontrarse en Artigue (1990), Ernest (1994), Otte y Seeger (1994) y Sierpinska y Lerman (1996).

> Las génesis artificiales que tratamos de construir deberán hacer funcionar la noción de decimal de manera que simule los diferentes aspectos actuales del concepto. No se trata de reproducir el proceso histórico sino de producir efectos similares por otros medios. La fenomenotecnia epistemológica consiste en hacer, sobre *ciertos* puntos, elecciones muy diferentes de las que sugiere la historia, y de restaurar por medio del ejercicio de las reglas y principios que se hayan podido descubrir, un proceso que, sin embargo, sea equivalente. (Brousseau, 1981, p. 50)

> Hay que encontrar un equilibrio entre una enseñanza "histórica" que restauraría una selva de distinciones y de puntos de vista caducados en la que se perdería el niño, y una enseñanza directa de lo que hoy aparece como una estructura única y general, sin preocuparse de unificar las concepciones del niño, necesaria y naturalmente diferentes. La búsqueda de las condiciones de un tal equilibrio es uno de los grandes problemas que se le plantea actualmente a la didáctica. (Brousseau, 1981, p. 48)

Asimismo, la teoría de la transposición didáctica de Chevallard concede también un papel importante a la epistemología de las matemáticas. De hecho, su autor considera que la didáctica de las matemáticas se inscribe en el campo de la 'antropología de los saberes', entendiendo por tal una epistemología más amplia que la tradicional que, además de analizar los procesos de producción del saber, asuma también el estudio de los procesos de utilización y enseñanza del mismo[45].

I.16. Determinación de concepciones y obstáculos

Por último, y para terminar el recorrido por el estado de la cuestión, hablaremos de los aspectos metodológicos, de cómo han buscado y encontrado obstáculos epistemológicos los investigadores que se han ocupado del tema, tanto si lo han hecho sobre los números negativos como sobre otras nociones matemáticas. Pero éste es un asunto muy variopinto, como era de esperar desde el momento en que ni siquiera hay acuerdo sobre la definición de obstáculo epistemológico. Además, el hecho de que en la teoría de situaciones didácticas un obstáculo se considere un caso particular de concepción nos obliga a tener también en cuenta los distintos métodos que se han utilizado para determinar concepciones[46].

---

[45] Una exposición de diferentes aspectos de la teoría de la transposición didáctica puede encontrarse en Chevallard (1985a, 1992), Chevallard, Bosch y Gascón (1997), Henry (1992-93) y Johsua y Dupin (1993).

[46] Así como la noción de obstáculo epistemológico ha sido objeto de un largo debate en el marco de la didáctica fundamental, del que ya hemos hablado en el apartado I.15,

Para empezar, unos investigadores buscan concepciones u obstáculos en los alumnos (Artigue y Robinet, 1982; Robert, 1982; Bessot y Eberhard, 1983; Douady y Perrin, 1989; Artigue, Menigaux y Viennot, 1990; Iriarte, Jimeno y Vargas-Machuca, 1991; Rouan y Pallascio, 1994; Castela, 1995; Gras y Totohasina, 1995a, 1995b, Lacasta, 1995, Spagnolo, 2006), otros, en la historia de las matemáticas (Glaeser, 1981; Brousseau, 1981, 1983, 1988a, 1989a; Duroux, 1982; Schubring, 1986, 1988; Janvier, Charbonneau y René de Cotret, 1989; Hefendehl-Hebeker, 1991; Gascón, 1993; Deledicq, 1994) y otros utilizan las concepciones u obstáculos históricos como punto de partida para definirlos en los alumnos actuales (Ratsimba-Rajohn, 1982; Cornu, 1983; Coquin-Viennot, 1985; Sierpinska, 1985; Robinet, 1986; El Bouazzaoui, 1988; Schneider, 1991; Ruiz Higueras, 1993). Asimismo, existen algunos trabajos que estudian las concepciones transmitidas por los libros de texto (Brousseau, 1980; El Bouazzaoui, 1988; Ruiz Higueras, 1993) o los profesores (El Bouazzaoui, 1988; Lacasta, 1995).

Además, unos autores determinan obstáculos sin interpretarlos, por lo menos explícitamente, como concepciones (por ejemplo, Glaeser, 1981; Cornu, 1983; Sierpinska, 1985; Schubring, 1986, 1988; Janvier, Charbonneau y René de Cotret, 1989 y Gascón, 1993); otros establecen concepciones pero no discuten su posible carácter de obstáculo (por ejemplo, Artigue y Robinet, 1982; Douady y Perrin, 1989; Artigue, Menigaux y Viennot, 1990; Rouan y Pallascio, 1994; Castela, 1995), mientras que otros tratan de definir concepciones y decidir, al mismo tiempo o a posteriori, si son o no obstáculos (por ejemplo, Ratsimba-Rajohn, 1982; Coquin-Viennot, 1985; El Bouazzaoui, 1988; Ruiz Higueras, 1993; Deledicq, 1994 y Gras y Totohasina, 1995a, 1995b). Estas primeras diferencias nos hacen prever la variedad de puntos de vista metodológicos existentes.

Si nos ceñimos al tema de los números negativos, nos encontramos (ver apartado I.5) con el trabajo de Glaeser (1981) en el que se definen

---

la noción de concepción no ha suscitado demasiada polémica, lo que no significa que su definición esté unívocamente establecida y, mucho menos, que sea una noción aceptada por todos. De hecho, existen otros varios términos, como 'representación', 'modelo implícito', 'modelo de acción', 'campo conceptual', 'relación al saber', con un sentido cercano al de la palabra 'concepción'. Un estudio bastante detallado de los primeros usos del término en el ámbito francófono puede encontrarse en Artigue (1990). Según Assude (1995), las nociones de concepción y obstáculo epistemológico han cumplido una función transaccional en las negociaciones inherentes a la ocupación por un nuevo dominio de saber: la didáctica de las matemáticas, del espacio anteriormente ocupado por dominios más antiguos: la psicología piagetiana y la epistemología bachelardiana.

obstáculos históricos sin interpretarlos como concepciones. La determinación de estos obstáculos es el resultado de una argumentación sobre las dificultades que tuvieron los matemáticos de distintas épocas para aceptar los negativos como soluciones de las ecuaciones e incluso como números, así como para justificar la regla de los signos. Estas dificultades se hacen patentes a través de citas de matemáticos de distintas épocas. Hay que advertir que dichas citas, aunque muy pertinentes para justificar el discurso del autor, están sacadas de contexto y tratadas con cierta superficialidad.

Las posteriores aportaciones (ver apartado I.6) de Duroux (1982) y Brousseau (1983) van en la línea de discrepar de la utilización del término 'obstáculo' que hace Glaeser, en el sentido de que el obstáculo es una concepción, no, simplemente, una dificultad o ignorancia, pero sus ideas sobre el caso que nos ocupa no pasan de ser conjeturas que ponen a disposición de la comunidad didáctica para que sean investigadas. En cuanto a las propuestas de Schubring (1986, 1988), se basan en referencias sobre los números negativos encontradas en los manuales de historia y en el análisis de libros de texto de diferentes épocas. La presentación de sus argumentos se hace, como en el caso de Glaeser, con el apoyo de pequeñas citas que van salpicando el discurso. Posteriormente, Schubring (2005, 2014) sigue profundizando en la historia de los números negativos, pero sin tratar de explicarla en términos de obstáculos e incluso discutiendo la postura de Glaeser.

Hay que salirse del tema de los números negativos para encontrar investigaciones en las que los obstáculos históricos se interpreten como concepciones históricas. Así sucede, por ejemplo, con el trabajo de El Bouzzaoui (1988) sobre la continuidad de funciones. La autora hace un recorrido por la historia de la noción tomando como base de su argumentación las informaciones contenidas en los libros de historia de las matemáticas, complementadas con alguna referencia a fuentes primarias (El Bouzzaoui, 1988, pp. 65-126). Este método de trabajo no se diferencia del seguido por Glaeser o Schubring, pero aquí el objetivo es modelizar la evolución histórica del concepto en términos de 'concepciones históricas teóricas' que se suceden o coexisten en el tiempo.

Con esta denominación de 'concepción histórica teórica' queremos enfatizar el hecho de que no son concepciones estrictamente atribuibles a un matemático concreto, sino un instrumento teórico que pretende caracterizar y explicar -modelizar, en una palabra- las particularidades de la génesis y desarrollo histórico de la noción de continuidad. El estudio epistemológico justifica la definición de ciertas variables, intrínsecas a la propia noción, cuyos distintos valores permiten caracterizar dichas concepciones[47]. Posteriormente, esas variables serán utilizadas para tratar de determinar concepciones en los alumnos, los libros de texto y los profesores.

La decisión sobre si a dichas concepciones se las puede calificar de obstáculos históricos es un tema secundario dentro del trabajo de El Bouzzaoui sobre la continuidad. Para poder afirmar que una concepción es obstáculo, la autora analiza, en primer lugar, si la concepción se convirtió en una "fuente de errores" al producirse un cambio en el campo de problemas abordado por los matemáticos de la época; en segundo lugar, si hubo "resistencia" a sustituirla por otra a pesar de las dificultades que producía. Sin embargo, este análisis se lleva a cabo de una forma bastante somera, ofreciendo datos históricos y argumentos que no justifican de una manera convincente la decisión final sobre qué concepciones históricas se consideran obstáculo[48].

Un trabajo similar sobre determinación de concepciones históricas, en este caso referidas a la noción de función, lo realiza Ruiz Higueras (1993). La diferencia es que ésta utiliza las 'componentes de un concepto' definidas por Vergnaud (1990, p. 145), como pauta para estudiar las concepciones históricas. Considera que una concepción se caracteriza por:

> - los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;
>
> - el conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;
>
> - el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto[49], es decir, para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta. (Ruiz Higueras, 1993, pp. 73-74)

---

[47] Las variables intrínsecas definidas son: la continuidad como propiedad global o local, el dominio matemático en el que se considera la noción (geométrico, aritmético, algebraico o topológico), los objetos calificados de continuos (magnitudes, trayectorias, curvas, funciones analíticas, aplicaciones en espacios topológicos, etc.) y el estatuto matemático de la noción (protomatemático, paramatemático o matemático). (El Bouzzaoui, 1988, pp. 125-126)

[48] Aunque ya lo comentamos en el apartado I.15, conviene recordar aquí que Gascón (1993) considera que la condición de ser "fuente de errores" y la de "resistir al cambio" pueden adjudicarse a cualquier conocimiento histórico y, por tanto, no permiten discernir con claridad si se trata o no de un obstáculo. Desde luego, en el trabajo de El Bouazzaoui se observa esa dificultad de discriminación.

[49] Hay que advertir que en este texto los términos 'objeto' y 'concepto' equivalen al término 'noción' habitualmente empleado por nosotros.

En el caso de las concepciones históricas, a estas tres características añade una cuarta que llama 'momento histórico'. Esta utilización de las componentes que Vergnaud atribuye a un concepto para delimitar concepciones volvemos a encontrarla en Deledicq (1994) a propósito de la noción de límite.

En cuanto a la determinación de obstáculos históricos, lo que hace Ruiz Higueras, más que estudiar el carácter de obstáculo de las concepciones que previamente ha definido, es considerar como tales determinados aspectos del conocimiento matemático o de la cultura en general que, a su juicio, retardaron el paso de una concepción a otra; aspectos que clasifica por niveles siguiendo las ideas de Sierpinska y Wilder (ver apartado I.16).

Del trabajo de Gascón sobre obstáculos epistemológicos en la génesis histórica del lenguaje algebraico queremos resaltar dos ideas que nos parecen especialmente importantes. La primera es que lo que se pretende con estos estudios epistemológicos no es una "reconstrucción histórica" de la evolución del conocimiento, sino una "reconstrucción racional". Es decir, se pretende hallar un "modelo específico del desarrollo del conocimiento matemático" que permita al didáctico de las matemáticas reformular y explicar algunos fenómenos didácticos. Este modelo deberá apoyarse en el análisis de las técnicas que se utilizan y de los campos de problemas producidos en el desarrollo de dichas técnicas (Gascón, 1993, pp. 309-310).

La segunda idea, ya comentada en el apartado I.15 y al hablar de las dificultades de El Bouazzaoui para discriminar los obstáculos históricos, es que no es suficiente la caracterización de un obstáculo en términos de conocimiento eficaz en un cierto campo de problemas, pero ineficaz y productor de errores en otro y, además, resistente al cambio. Hay que añadir la condición de que se produzca una modificación en la actividad matemática tradicional, es decir, que aparezca una 'bifurcación' del quehacer matemático que genere nuevos campos de problemas y nuevas técnicas de resolución. La naturaleza del presunto obstáculo se explicará en términos de la bifurcación que origina, lo que exigirá contestar a preguntas como: ¿cuál fue la actividad matemática en la que se produjo la génesis de la noción?, ¿qué técnicas matemáticas se utilizaban?, ¿qué campos de problemas se estudiaban?, ¿qué discursos teóricos servían para justificar dichas técnicas e interpretar dichos problemas?, ¿cómo se bifurcó dicha actividad matemática?, ¿cuáles fueron las nuevas técnicas, campos de problemas y justificaciones que se desarrollaron a partir de las primeras? (Gascón, 1993, pp. 305-306).

Utilizando esta metodología, el autor estudia las bifurcaciones que sufre el patrón clásico de resolución de problemas basado en el binomio análisis-síntesis, lo que le permite describir un posible obstáculo epistemológico en el desarrollo del álgebra elemental y diferenciarlo de los obstáculos didácticos atribuibles exclusivamente a las características propias de la enseñanza actual.

Por otro lado, si nos centramos de nuevo en los números negativos y analizamos el modo en que se han buscado concepciones y obstáculos en los alumnos (ver apartado I.8), nos encontramos con que el trabajo más significativo desde un punto de vista metodológico es el de Coquin-Viennot (1985). En él, la autora elabora un cuestionario, lo aplica a una muestra de 366 alumnos entre 11 y 15 años y analiza los resultados. Para la construcción del cuestionario tiene en cuenta los obstáculos históricos propuestos por Glaeser y los ejercicios que aparecen en los manuales escolares a propósito de los números enteros. Para el tratamiento de datos utiliza el análisis implicativo de Gras y el análisis factorial de correspondencias aplicado a la tabla de contingencia que cruza las modalidades de respuesta de los alumnos con el curso al que pertenecen, lo que le permite establecer cuatro concepciones ya descritas en el apartado I.8. Sin embargo, el carácter de obstáculo que Coquin-Viennot atribuye a cada una de esas concepciones no parece derivarse del estudio estadístico realizado, sino que se basa en argumentos como los dados por Glaeser en el caso de la historia.

La búsqueda de concepciones y obstáculos en los alumnos referentes a otras nociones nos ofrece un panorama metodológico más variado. Se han empleado básicamente dos métodos: el estudio clínico a partir de la realización de entrevistas o de la observación de secuencias de enseñanza y el estudio estadístico de las respuestas de los alumnos a un cuestionario. En el primer caso tenemos, por ejemplo, el trabajo de Artigue y Robinet (1982) sobre la circunferencia y el de Sierpinska (1985) sobre la tangente como límite de secantes. En el segundo caso, bastante más frecuente, encontramos, entre otros, los trabajos de Ratsimba-Rajohn (1982) sobre las fracciones, El Bouazzaoui (1988) sobre la continuidad de funciones, Ruiz Higueras (1993) y Lacasta (1995) sobre la noción de función, Castela (1995) sobre la noción de tangente, Spagnolo (2006) sobre la propiedad arquimediana y el análisis no standard, y Gras y Totohasina (1995a, 1995b) sobre la probabilidad condicional.

Ahora bien, tanto si se realizan estudios clínicos como estadísticos, el primer problema que hay que abordar a la hora de preparar el dispositivo experimental es el de definir los criterios que van a dirigir la elección de las preguntas del cuestionario o entrevista o el diseño de las situaciones de enseñanza. Para ello algunos autores definen concepciones a priori y otros, variables cuyos diferentes valores se consideran indicio de la existencia de concepciones distintas. Las fuentes que se utilizan para construir estas variables o concepciones a priori suelen ser: la epistemología de la noción, sus propiedades matemáticas, las características observadas en la enseñanza de la misma o algún estudio previo sobre el comportamiento de los alumnos en tareas en las que la noción está implicada.

En cuanto a la determinación a posteriori de concepciones u obstáculos, en los estudios clínicos se basa en el análisis de las grabaciones de las entrevistas o situaciones de enseñanza, buscando aquellas manifestaciones de los alumnos que puedan relacionarse con las concepciones u obstáculos definidos a priori. En los estudios estadísticos, la codificación de las respuestas de los alumnos puede dar lugar a una gran cantidad de datos que es necesario ordenar y sintetizar y de variables que hay que identificar y relacionar entre sí. En estas condiciones los métodos de análisis multivariante resultan ser los más idóneos y, entre ellos, el más usado es el análisis factorial de correspondencias simples (AFC) o múltiples (AFCM). Como tratamiento de datos complementario se utiliza el análisis en componentes principales (ACP), el análisis jerárquico de similaridad de Lerman (Lerman, 1981) o el análisis implicativo de Gras (Gras, 1992) o de Gras y Larher (Gras y Larher, 1992).

Por último, hay que decir que en los trabajos que buscan concepciones u obstáculos usando métodos estadísticos se observa lo que ya comentamos al referirnos a Coquin-Viennot (1985): la existencia de una metodología de determinación empírica bastante bien definida en el caso de las concepciones, pero poco clara en el caso de los obstáculos, donde es frecuente que jueguen un papel decisivo argumentos que no se deducen directamente del estudio estadístico. Esto está seguramente ligado al hecho de que la determinación experimental de concepciones u obstáculos exige una fundamentación teórica previa que en el caso de las concepciones está más desarrollada que en el de los obstáculos.

La propia definición de concepción, ligada a la existencia de un cierto conjunto de situaciones en las que es eficaz y permite resolver con éxito -conjunto que no agota todas las situaciones en las que la noción correspondiente está implicada-, facilita tanto el diseño de métodos experimentales adecuados al empeño como su justificación teórica. En líneas generales, estos métodos se organizan alrededor de los siguientes hitos:

a) Determinación a priori de las concepciones cuya existencia intenta probarse. Para esto se recurre a alguno de los métodos ya comentados en un párrafo anterior: estudio epistemológico de la noción, estudio matemático, etc.

b) Elección de una colección de situaciones que, por medio de la variación de sus variables didácticas, dé lugar a varios conjuntos representativos, respectivamente, del campo de situaciones asociado a cada una de las concepciones a priori.

c) Utilización de algún tratamiento de datos multivariante para comprobar la existencia de diferentes grupos, compuesto cada uno de ellos por alumnos que presentan comportamientos similares a la hora de enfrentarse a las distintas situaciones, con la condición añadida de que ese patrón de comportamientos les conduce al éxito en las situaciones asociadas a una de las concepciones y al fracaso en las asociadas a otras. Se dice entonces que los distintos grupos de alumnos así determinados poseen diferentes concepciones de una misma noción[50].

En cambio, en el caso de la determinación experimental de los obstáculos apenas hay aportaciones. El carácter de obstáculo de una concepción viene dado por su grado de resistencia a ser sustituida por otra que permita soluciones más eficaces en un conjunto más amplio de situaciones, y esto es difícil de medir. Quizá lo más significativo sobre el tema lo dice Brousseau en la siguiente cita:

> Supongamos que tenemos una población que posee [la concepción] α y otra que no la posee y lo mismo para β. Nuestro problema es saber si son independientes o no. Si la proporción de individuos que poseen β es la misma entre los que poseen α que entre los que no poseen α, eso quiere decir que α y β son independientes. Si el hecho de tener éxito en [el grupo de situaciones asociadas a la concepción] α es un buen indicador de haber tenido éxito en β, esto es un argumento para declarar que existe una concepción común y no concepciones particulares α y β. Por el contrario, supongamos que hay una rarefacción de β entre los α y un aumento en proporción de β entre los no-α. Entonces habrá un efecto de obstáculo o al menos de incompatibilidad entre las dos concepciones. Si el alumno que piensa en α tiene dificultad para adaptarse a β, es que las concepciones son distintas y tienen tendencia a oponerse. (Brousseau, 1993, p. 10)

[50] Una justificación y descripción detallada de la metodología de determinación estadística de concepciones se encuentra en Brousseau (1993) y Lacasta (1995).

I.17. Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos: problemática abierta

Como hemos podido ver en los apartados anteriores, el análisis del estado de la cuestión en lo que se refiere a los obstáculos epistemológicos en los números negativos ha resultado ser un hilo conductor que nos ha permitido abordar, por un lado, el estado general de la investigación sobre la enseñanza de los números negativos y, por otro, la naturaleza e interés de la noción de obstáculo epistemológico para la didáctica de las matemáticas. A continuación vamos a concretar la problemática que, a nuestro juicio, queda abierta a partir de la revisión bibliográfica efectuada.

1) En primer lugar, se ha puesto de manifiesto que la noción de obstáculo epistemológico ha recibido interpretaciones muy diversas y, en general, bastante alejadas del sentido inicial definido por Brousseau. Además, el entusiasmo que despertó en los primeros momentos fue, posteriormente, sustituido por un cierto escepticismo, dado que su uso no proporcionó los resultados esperados. Esto desató en su momento una controversia sobre las características de su definición y sobre su utilidad para la didáctica, controversia que actualmente sigue sin resolverse.

En realidad, la noción de obstáculo epistemológico tal como la concibe Brousseau, apenas ha sido utilizada -la mayor parte de los investigadores que han usado dicha noción lo han hecho dándole un significado distinto del propuesto por él- y, como consecuencia, su eficacia como herramienta de investigación didáctica no ha sido contrastada experimentalmente. Por otra parte, tampoco se le han hecho objeciones de tanto peso como para justificar su abandono o sustitución por una noción diferente (ver apartado I.15). Además, el término sigue de actualidad y, pese a la atribución de diversos significados, aparece con una cierta frecuencia en trabajos de distinta índole

Por otro lado, el desacuerdo sobre la definición del término 'obstáculo epistemológico' se traduce, como no podía ser menos, en una falta de unanimidad a la hora de decidir cuándo y cómo queda probada su existencia. Los métodos de determinación de obstáculos, tanto en la historia de las matemáticas como en los alumnos o profesores actuales, no están claramente definidos y existen serias discrepancias respecto a su validez probatoria (ver apartado I.16). Todas estas razones avalan la necesidad de profundizar en la caracterización de la noción y de analizar con más precisión las ventajas o inconvenientes que su uso aporta a la investigación didáctica.

2) Como ya sabemos, existe desde 1981 una propuesta de Glaeser sobre posibles obstáculos en la historia de los números negativos que, según

el autor, debieran ser tenidos en cuenta en la enseñanza actual de dicha noción. Esa propuesta, que se hizo desde una concepción de obstáculo bastante alejada de la de Brousseau, ha recibido comentarios a favor o en contra por parte de diferentes investigadores (ver apartados I.5, I.6 y I.7), pero ninguno de ellos aporta pruebas que justifiquen la definitiva conclusión del tema. En estos momentos, no hay acuerdo sobre la existencia o no de obstáculos en la historia de los números negativos, ni sobre cuáles son éstos, supuesto que existan.

Donde sí parece haber una cierta coincidencia de opiniones es en el hecho de considerar que la concepción del 'número como medida' es un obstáculo histórico, responsable, por lo menos en parte, de las dificultades habidas en la comunidad matemática para asumir los números negativos y detectable en la enseñanza actual. Sin embargo, a pesar de que son bastantes los autores que dan por supuesto ese obstáculo y de que algunos de ellos lo han descrito someramente, nadie ha explicado con detalle en qué consiste, cómo se manifiesta, qué efectos produce, etc.; da la impresión de que se ha convertido en un lugar común que se asume sin mayor reflexión sobre el tema.

3) La determinación de obstáculos en la historia de las matemáticas es interesante desde el punto de vista didáctico si se constata su pervivencia en la enseñanza actual y, en particular, en los alumnos actuales. Un obstáculo epistemológico es, después de todo, una concepción detectable en un número significativo de alumnos que puede ser puesta en relación con ciertas concepciones históricas. Sin embargo, son pocas las investigaciones que relacionan las concepciones de los alumnos sobre los números negativos con las investigaciones sobre obstáculos en la historia de dichos números. Es más, de hecho apenas existen trabajos sobre errores de los alumnos que se analicen en términos de concepciones. La mayor parte de los cuestionarios realizados hacen preguntas muy puntuales y elementales y no permiten relacionar entre sí los errores relativos a las diferentes situaciones en las que intervienen los números negativos (ver apartados I.8 y I.9.).

Únicamente Coquin-Viennot (1985) e Iriarte et al. (1991) analizan los errores de los alumnos en términos de obstáculos: la primera usando el concepto propuesto por Brousseau y las segundas dándole un sentido parecido al de Glaeser. Pero sus deducciones no han sido confirmadas ni rechazadas por ninguna investigación posterior. Otros investigadores como Peled (1991) o Gallardo (1996) intentan también encontrar una coherencia en los errores de los alumnos que los acerca a la búsqueda de concepciones, pero sin tener en cuenta la posibilidad de los obstáculos (ver apartado I.8).

4) Ya se ha dicho anteriormente que la mayor parte de la literatura didáctica sobre los números negativos se dedica a hacer propuestas de enseñanza y que, además, defiende la opción de comenzar por el número entero, presentándolo a través de modelos concretos de neutralización o desplazamiento (ver apartados I.10, I.11 y I.12). Esta opinión ha tenido, como era de esperar, su influencia en el sistema educativo y, hoy en día, lo único que diferencia a unos libros de texto de otros son los modelos concretos que proponen para introducir el número entero. Ahora bien, como ya comentamos en el apartado I.13, existen serias sospechas de que este uso de modelos concretos puede contribuir a reforzar los posibles obstáculos epistemológicos, en vez de ayudar a superarlos. Si esto fuera cierto, obligaría a un replanteamiento de la enseñanza de los números negativos sobre supuestos totalmente diferentes de los hasta ahora considerados. Sin embargo, la posibilidad de que el uso de modelos concretos contribuya a reforzar algún obstáculo epistemológico no ha sido estudiada en profundidad y, desde luego, la bibliografía que se dedica a buscar y proponer esos modelos, se desentiende de ella o la desconoce.

Pero este desconocimiento de la conexión que pueda existir entre modelo concreto y obstáculo epistemológico es un indicio de una ignorancia más general. En realidad, no existen prácticamente investigaciones que relacionen, en el caso de los números negativos, el estado de conocimientos de los alumnos con la enseñanza recibida. Lo poco que se sabe sobre concepciones y obstáculos en los alumnos no incluye la contestación a preguntas como: ¿cuáles son las situaciones de enseñanza que han producido esas concepciones?, ¿bajo qué contrato didáctico se han desarrollado?, ¿qué concepciones transmiten los libros de texto y los profesores?, ¿cuál es su relación con las concepciones de los alumnos?, etc.

Por otro lado, los estudios epistemológicos sobre el número negativo ponen de manifiesto que la génesis escolar actual de la noción difiere grandemente de la génesis histórica. Por ejemplo, hoy en día se introduce en el ámbito de la aritmética, mediante la simetrizacion aditiva de $\mathbb{N}$, y ligada a la necesidad de modelizar determinadas situaciones del mundo sensible, cuando en cada momento histórico se simetrizó aditivamente el conjunto de números positivos entonces considerado y las condiciones de necesidad que forzaron su uso y posterior aceptación se encuentran en el álgebra, sobre todo en la teoría de ecuaciones algebraicas, y son, por tanto, necesidades internas de las matemáticas.

Esto plantea una serie de interrogantes respecto a la transposición didáctica actual, al por qué de sus características, a cuáles son las restricciones a las que se ha visto sometida, etc., que no han sido contestados. De hecho, en la mayor parte de los trabajos que proponen nuevas secuencias didácticas se acepta, sin ningún tipo de discusión, el punto de partida de la simetrización de $\mathbb{N}$ y su justificación en el ámbito aritmético por necesidades externas a las matemáticas.

Toda esta problemática abre una línea de investigación que podría organizarse alrededor de los siguientes objetivos:

a) Utilizar el concepto de obstáculo epistemológico definido por Brousseau en el marco de la teoría de situaciones didácticas para investigar los obstáculos en la historia de los números negativos, probando si existen o no y determinándolos en el supuesto de que existan. En cualquier caso y dado que según la definición de Brousseau un obstáculo es ante todo una concepción, este objetivo nos exigirá poner de manifiesto las concepciones históricas sobre los números negativos.

b) Constatar si dichos obstáculos históricos perviven en los alumnos actuales y si, por consiguiente, podemos hablar con propiedad de obstáculos epistemológicos. En el caso de no encontrar obstáculos históricos, el objetivo sería determinar las posibles concepciones de los alumnos, analizando su relación con las concepciones históricas y estudiando si alguna de ellas, aun no siendo un obstáculo epistemológico, puede ser un obstáculo de origen didáctico.

c) Realizar el trabajo teórico necesario para desarrollar los dos objetivos anteriores, profundizando en la metodología de determinación de obstáculos epistemológicos y verificando si el uso del concepto que propone Brousseau lleva a obtener resultados que por otras vías no se han conseguido, lo que nos permitiría decidir sobre su utilidad para la investigación didáctica.

d) Analizar el papel que juega la introducción del número negativo por medio de modelos concretos en la génesis y evolución de posibles obstáculos epistemológicos o didácticos.

e) Estudiar bajo qué condiciones e influencias, tanto internas como externas al sistema de enseñanza, han sido tomadas las decisiones que caracterizan la transposición didáctica actual del número negativo y plantear, sin restricciones previas, todo el campo de elecciones posibles.

f) Determinar, de acuerdo con la teoría de situaciones didácticas, la situación o situaciones fundamentales[51] correspondiente a la noción

[51] Se llama situación fundamental de una noción al conjunto mínimo de situaciones

de número negativo, utilizando para ello las informaciones obtenidas en la consecución de los objetivos anteriores y diseñando los dispositivos experimentales pertinentes.

I.18. Del problema docente al problema didáctico

Naturalmente, la línea de investigación presentada en el apartado anterior es muy amplia y no puede ser abarcada en su totalidad en este trabajo. Nuestro interés se va a centrar en la investigación de aquellos aspectos que nos permitan transformar el problema docente inicialmente planteado en la introducción de esta memoria en un problema didáctico susceptible de ser investigado en el marco de la teoría de situaciones didácticas.

Por consiguiente, donde los profesores se preguntan:

¿Cómo debo enseñar los números negativos para que mis alumnos no cometan errores sistemáticos en los cálculos en los que intervienen y tengan en cuenta la existencia de dichos números en los razonamientos matemáticos?

nosotros vamos a tratar de contestar a la pregunta:

¿Cómo diseñar una génesis escolar del número negativo que evite la aparición de obstáculos didácticos, que afronte la superación de los obstáculos epistemológicos, en el supuesto de que existan, y que permita al alumno construir una concepción inicial del número negativo que evolucione con facilidad hacia concepciones cada vez más cercanas al concepto matemático?

Para ello, nos proponemos alcanzar los siguientes objetivos de investigación:

- en el capítulo II, precisar la naturaleza de los obstáculos epistemológicos en la historia de los números negativos, de acuerdo con la definición dada por Brousseau en el marco de la teoría de situaciones didácticas.
- en el capítulo III, analizar el papel que juega la transposición didáctica del número negativo en el tratamiento didáctico de los obstáculos epistemológicos y en la génesis de otros posibles obstáculos didácticos.
- en el capítulo IV, diseñar una génesis esolar del número negativo que responda al problema didáctico planteado.

---

a-didácticas que permite engendrar, por manipulación de sus variables didácticas, un conjunto de situaciones lo suficientemente amplio como para lograr que el alumno adquiera una concepción que sea, entre todas las posibles, la que mejor evolucione hacia el concepto matemático.

CAPÍTULO II

Concepciones y obstáculos epistemológicos en la historia de la negatividad matemática

II.1. Primeras precisiones metodológicas

La tarea que nos hemos propuesto en un principio es la de aportar mayores precisiones a la determinación de posibles obstáculos en la historia de los números negativos. Para ello, partimos del hecho de que, en la teoría de situaciones didácticas, un obstáculo es un caso particular de concepción, por lo que nuestro método de trabajo consistirá en delimitar diferentes concepciones históricas con vistas a comprobar si existen indicios de que alguna de ellas se constituye en obstáculo respecto a otras. A esta determinación de concepciones históricas dedicaremos gran parte de este capítulo, pero antes de seguir necesitamos hacer ciertas precisiones iniciales.

En primer lugar, hay que reseñar que, hasta ahora, las aportaciones al tema se han hecho, básicamente, desde el punto de vista de estudiar la "historia de los números negativos". Solamente Brousseau (1983, pp. 190-191) y Lizcano (1993, ver también apartado I.7) hablan de algo que nos parece fundamental: no se puede interpretar la historia de las nociones matemáticas en términos de una sucesión de estados intermedios, defectuosos o incompletos respecto a un ideal que se alcanza en nuestra época. La conflictiva emergencia de los números negativos pone de manifiesto la existencia histórica de diferentes "negatividades" que, ni fueron, en su momento, entendidas como números, ni pueden interpretarse como un proceso continuo que desemboca, inevitablemente, en el número negativo actual.

Esto nos lleva a utilizar, siguiendo a Lizcano, los términos 'negatividad' y 'formas de negatividad' para indicar aquellas nociones que habitualmente se consideran antecedentes históricos del número negativo. Como consecuencia, no hablaremos de 'concepciones históricas de los números negativos' sino de 'concepciones históricas de la negatividad matemática', sin establecer a priori una identificación entre las formas de negatividad que esas concepciones revelan y las nociones matemáticas actuales.

En segundo lugar, hay que plantear la necesidad de reinterpretar algunos aspectos de la definición de obstáculo epistemológico para adecuarlos a nuestros propósitos. Si nos remitimos a la definición de Brousseau (ver apartado I.2), una concepción es un obstáculo cuando aparece un campo de problemas en el que no resulta eficaz, dando lugar a respuestas falsas, y el individuo que la posee, a pesar de constatar repetidamente su fracaso, se resiste a rechazarla y sustituirla por otra. En estas circunstancias, las señas de identidad del obstáculo vienen dadas por los errores que provoca y es siguiéndoles la pista a éstos últimos como se pueden establecer las primeras. Ahora bien, esta consecuencia de la definición, perfectamente válida para delimitar obstáculos en los alumnos, necesita ser reconsiderada cuando se pretenden encontrar obstáculos históricos.

La realidad es que el seguimiento de posibles obstáculos históricos sólo puede hacerse a través de las obras de los matemáticos relevantes de cada época y éstos no acostumbran a cometer errores en sus escritos públicos a propósito de un tema tan elemental como el de la negatividad[1]. El matemático profesional escribe para mostrar lo que sabe, no lo que no sabe, y no es tomando nota de sus errores, prácticamente inexistentes, como se podrán constatar los obstáculos. Ya Artigue (1990, p. 260) llama la atención sobre esto, cuando dice que en determinadas concepciones históricas que han sido calificadas de obstáculo no se observa que hayan dado lugar a resultados falsos, sino simplemente que no permiten resolver ciertos campos de problemas. La autora pone en duda la necesidad de incluir en la definición de obstáculo la condición de ser una fuente de errores.

En nuestra opinión, la condición es pertinente, pero hay que tener en cuenta que el matemático, a diferencia del alumno de matemáticas poco iniciado, ejerce sobre su actividad una vigilancia que le permite ser consciente de los errores que comete y evitarlos cuando comunica los resultados de su trabajo. Será necesario, por tanto, un análisis mucho más fino que incluya sus omisiones, sus vacilaciones e, incluso, el exceso de explicaciones, para poder deducir la existencia de un obstáculo.

[1] Salvo alguna excepción. Por ejemplo, en su obra *De Regula Aliza*, Cardano no aceptaba la regla de que "menos por menos es más" (Schubring, 2005, pp. 43-45).

En este sentido, la búsqueda de obstáculos históricos nos va a obligar a sustituir el análisis de los posibles errores por el de condiciones como las siguientes:

- la existencia de campos de problemas, extensiones del que define la concepción, que entran dentro de las preocupaciones matemáticas de la época y, sin embargo, sólo se abordan parcialmente o no se abordan en absoluto;
- la existencia de técnicas de resolución de problemas cuya complejidad no está justificada, pues, aparentemente, el saber matemático de la época debería haber permitido su sustitución por técnicas más simples;
- la existencia de objetos matemáticos que se utilizan a la hora de resolver problemas, pero que, en ningún momento, se explican ni se justifican, es decir, que funcionan como conocimientos, pero no como saberes; y
- la existencia de discursos explicativos y justificativos de las técnicas de resolución, especialmente farragosos o prolijos.

También nos parece significativa la propuesta de Gascón (1993), ya comentada en los apartados I.15 y I.16, de buscar el obstáculo epistemológico en los orígenes de lo que el llama una' bifurcación', es decir, un cambio en la naturaleza del trabajo matemático que afecta al campo de problemas y a sus técnicas de resolución.

Tendremos, por tanto, que estudiar las concepciones históricas tratando de poner de manifiesto las condiciones que acabamos de citar, pero, para ello, necesitamos definir unas variables que guíen nuestro estudio y permitan caracterizar las distintas concepciones.

II.2. Elección de las variables de una concepción histórica

Para elegir las variables nos basaremos en aquellos elementos que, según la teoría de situaciones didácticas, caracterizan una concepción (ver apartado I.2). Son éstos, en primer lugar, los 'conocimientos' y 'saberes', así como el 'campo de problemas' en el que funcionan. En cuanto a los primeros, será necesario analizar, por un lado, el comportamiento del matemático en cuestión a la hora de resolver problemas, lo que nos permitirá colegir qué informaciones matemáticas utiliza para la acción (conocimientos)[2], y, por otro lado, su comportamiento cuando explica y justifica sus actos, lo que

[2] Lo observable, en principio, son las técnicas de resolución, pero esto no es un

nos permitirá estudiar qué informaciones matemáticas utiliza en la interacción social (saberes) y cómo se integran en la cultura matemática de la época. Por consiguiente será necesario analizar las manifestaciones de la negatividad tanto en las técnicas de resolución de problemas como en el discurso que las explica y justifica, lo que introduce tres nuevas variables: 'las técnicas de resolución', 'la negatividad en las técnicas de resolución' y 'la descripción y justificación de las técnicas'.

Pero además, para rastrear un posible obstáculo epistemológico necesitaremos analizar la distancia existente entre los conocimientos y los saberes, las 'relaciones entre conocimiento y saber', es decir, averiguar qué informaciones se utilizan para la resolución de problemas sin que figuren en los discursos que describen y justifican las técnicas empleadas, bien porque se dan por sobreentendidas, bien porque se esconden. Y también delimitar la existencia de otros campos de problemas en los que ese conjunto de conocimientos y saberes fracasa o no permite resolver con eficacia, lo que nos plantea el problema de los 'límites de la concepción', es decir, de hasta dónde puede alargarse el campo de problemas que la concepción puede asumir sin modificar sustancialmente sus conocimientos o saberes. A través de estas variables podremos decidir si la concepción estudiada cumple algunas de las condiciones indicadas en el apartado II.1. para poder calificarla de obstáculo.

Por otra parte, las diversas aportaciones sobre los obstáculos en la historia de los números negativos han puesto el acento en algunos aspectos que consideran determinantes para la evolución de las concepciones sobre los números negativos. Entre ellos estarían las concepciones sobre la naturaleza y extensión de los conjuntos numéricos (Duroux, 1982; Brousseau, 1983; Schubring, 1986), las condiciones de existencia y transmisión del saber y la posición del álgebra en el conjunto de las matemáticas (Schubring, 1986) y el papel jugado por las notaciones (Vlassis, 2008). De acuerdo con esto, añadimos a nuestro estudio las siguientes variables: 'presentación del saber y estatuto del álgebra', 'conjuntos numéricos' y 'notación utilizada'.

Por último, el estudio de estas variables exige la elección de una 'obra

---

conocimiento, sino un saber-hacer, algo que entra dentro de la categoría de los saberes. Pero es a través de este saber técnico como podemos referirnos al conocimiento; en realidad, la naturaleza no explícita del conocimiento hace imposible convertirlo en un objeto de estudio: en el momento en que hablamos de él, deja de ser un conocimiento para convertirse en un saber. Según Conne (1992, p. 225): "toda investigación sobre el conocimiento y los fenómenos cognitivos no puede hacerse más que a partir del saber, que sirve entonces como modelo de referencia".

matemática de referencia' cuya lectura y análisis nos permita caracterizar la concepción sobre la negatividad del matemático considerado y, dentro de dicha obra, la elección, a su vez, de unos 'textos de referencia' que sirvan de ejemplo y apoyo en la descripción de la concepción.

En resumen y de acuerdo con todo lo anterior, nuestro análisis de concepciones históricas se ceñirá a las siguientes variables:

- Obra matemática de referencia
- Textos de referencia
- Presentación del saber y estatuto del álgebra
- Campo de problemas
- Conjuntos numéricos
- Técnicas de resolución
- Notación utilizada
- Descripción y justificación de las técnicas
- La negatividad en las técnicas de resolución
- Conocimientos sobre la negatividad
- Saberes sobre la negatividad
- Relaciones entre conocimiento y saber
- Límites de la concepción

II.3. Elección de los matemáticos cuyas concepciones vamos a estudiar

La necesidad de responder a todos los requerimientos planteados en los apartados anteriores nos obliga a estudiar las concepciones históricas a partir del análisis detallado de alguna de las obras de un matemático históricamente relevante. Esto no es lo habitual, la opción más frecuente a la hora de definir concepciones históricas es la de construir, a partir del estudio de fuentes secundarias y de pequeños textos aislados entresacados de algunas fuentes primarias, unas concepciones históricas teóricas que no son estrictamente adjudicables a un matemático en particular, pero que intentan ser una síntesis del modo de pensar de una cierta época (ver apartado I.16). A nosotros este procedimiento de determinación de concepciones históricas no nos parece procedente porque no permite un análisis concienzudo de las variables y aspectos que hemos enumerado anteriormente. No nos basta con saber lo que un matemático dice acerca de la negatividad: para poder decidir si la concepción es un obstáculo necesitamos examinar además cómo utiliza la noción, en qué campos de problemas y qué relación existe entre "lo que se hace" y "lo que se dice".

Pero entonces, hay que tener en cuenta que la determinación de una concepción a partir del estudio pormenorizado de la obra de un matemático concreto nos obliga a limitarnos a unos pocos autores. Se plantea así una nueva decisión metodológica: ¿qué autores vamos a estudiar?, ¿cómo elegirlos? Pues bien, el principal criterio seguido es el de estudiar aquellos autores cuyas concepciones dieron origen a la negatividad matemática o representan un momento significativamente distinto de la evolución de la noción y puedan encontrarse cerca de una 'bifurcación', tal como la entiende Gascón (1993).

De acuerdo con lo anterior, nuestro estudio epistemológico se organiza alrededor de los cuatro matemáticos siguientes: Diofanto, Liu Hui, Chuquet y McLaurin. La elección de estos matemáticos es el resultado de una revisión cuidadosa de diversas fuentes históricas, tanto primarias[3] como secundarias[4], y filosófico-matemáticas[5], que nos han llevado a la convicción de que sus concepciones representan momentos privilegiados dentro de la epistemología de la negatividad:

- Diofanto (siglo III) y Liu Hui (siglo III) porque nos muestran, en el seno de dos culturas muy diferentes, el mismo fenómeno de génesis de

[3] Euclides, Diofanto, Chuquet (1484), Stevin (1585: 2014), Descartes (1628), MacLaurin (1748), Bezout (1764: 1806), D'Alembert (1784-85), Gauss (1801: 1979), Carnot (1803), Argand (1806: 1874), Cauchy (1821), Peacock (1830), Chasles (1852: 1880), Hankel (1867), Dedekind (1888: 1998), Klein (1924:1927) y Bourbaki (1951).

[4] Bell (1945), Belna (1996), Bourbaki (1972), Boye et al. (1998), Boyer (1986), Brousseau (1983), Cajori (1991, 1993), Chasles (1870), Cid (1995, 2000), Collette (1973-79), Coolidge (1947), Crossley (1987), Dahan-Dalmedico y Peiffer (1986), Darboux (1904), De Lorenzo (1971, 1977, 1998), Dell'Aquila y Ferrari (1995), Dhombres (1978, 1987), Duroux (1982), Ebbinghaus et al. (1991), Eves (1969), Fisch (1999), Fischbein (1987), Flament (ed.) (1997), Gascón (1993), Glaeser (1981), Gobin et al. (1996), Hefendhel-Hebeker (1991), Kleiner (1996), Kline (1985, 1992), Lay-Yong y Tian-Se (1987), Lizcano (1993), Milazzo y Vacirca (1983), Martzloff (1988), Novy (1973), Pycior (1981), Rashed (1984a), Rey Pastor y Babini (1951), Schubring (1986, 1988, 1997, 2014), Sesiano (1985), Smith (1958), Struik (1969), Thomaidis (1993), Van de Waerden (1985), Vargas-Machuca et al. (1990) y Wussing (1998).

[5] Cañón (1993), Kant (1991), Orman (1985), Piaget (1975), Russell (1973), Spagnolo (1986) y Spisani (1983).

la negatividad como consecuencia del uso de técnicas algebraicas en la resolución de problemas aritméticos;

- Chuquet (siglo XV) porque su obra se produce en un momento en que el álgebra está dejando de ser una herramienta al servicio de la aritmética para convertirse en un objeto de estudio en sí misma y, además, es uno de los primeros matemáticos europeos en aceptar que un número precedido de un signo menos pueda ser solución de un problema y en introducir exponentes negativos para expresar los inversos de las potencias; y
- MacLaurin (1698-1746) porque, dentro de la concepción clásica de las matemáticas que precedió a las rupturas epistemológicas del siglo XIX, nos da una visión de la negatividad en la que la teoría general de ecuaciones algebraicas y la geometría analítica juega ya un papel importante.

En los siguientes apartados estudiaremos las concepciones sobre la negatividad que se deducen del estudio de la obra matemática de cada uno de ellos.

II.4. Concepción de Diofanto

II.4.1. Obra matemática de referencia

La *Arithmetica* de Diofanto es una colección de problemas resueltos precedida de una pequeña explicación de alguno de los símbolos y reglas de cálculo que se utilizan en la misma. Existen bastantes dudas respecto a la datación de la obra; actualmente, se tiende a situarla en el siglo III d.C., lo que corresponde al periodo alejandrino tardío de la cultura griega. Diofanto en el preámbulo al libro I dice que la *Arithmetica* se compone de trece libros, pero algunos de ellos se han perdido. En la edición crítica del texto griego realizada por Tannery a finales del siglo XIX figuraban seis libros que parecían ser los únicos que se habían conservado del texto original, pero hace unos años R. Rashed (1984b) encontró en un manuscrito árabe otros cuatro libros con lo que se habrían recuperado diez de los trece libros originales. Nosotros usaremos la traducción al francés que Ver Eecke (1959) hizo del texto griego de Tannery, aunque en algún caso recurrimos a traducciones parciales al castellano realizadas por Lizcano (1993) a partir también de la edición de Tannery.

II.4.2. Textos de referencia

Texto A: problema XIII del libro I de la *Arithmetica* (Ver Eecke, 1959, p. 18)

> Partager trois fois un nombre proposé en deux nombres, de manière qu'un nombre du premier partage ait un rapport donné avec un nombre du second partage; que le nombre restant du second partage ait un rapport donné avec un nombre du troisième partage, et que le nombre restant du troisième partage ait un rapport donné avec le nombre restant du premier partage.
>
> Proposons donc de partager trois fois le nombre 100 en deux nombres, de manière que le plus grand nombre du premier partage soit le triple du plus petit du second partage, que le plus grand du second partage soit le double du plus petit du troisième partage, et que le plus grand du troisième partage soit le quadruple du plus petit du premier partage[6].
>
> Posons que le plus petit nombre du troisième partage est 1 arithme. Dès lors, le plus grand nombre du second partage sera 2 arithmes. Et puisque le nombre total à partager est 100 unités, il s'ensuit que le plus petit nombre du second partage sera 100 unités moins 2 arithmes. Et puisque le plus grand nombre du premier partage est le triple de ce dernier nombre, il sera 300 unités moins 6 arithmes. En conséquence, le plus petit nombre du premier partage sera 6 arithmes moins 200 unités. Et puisque le plus grand nombre du troisième partage est le quadruple de ce dernier nombre, il sera 24 arithmes moins 800 unités. Il faut aussi que la somme des nombres du troisième partage forme 100 unités. Mais cette somme forme 25 arithmes moins 800 unités. Égalons-la a 100 unités, et l'arithme devient 36 unités[7].
>
> Revenons aux choses posées: le plus petit nombre du troisième partage sera 36 unités, tandis que le plus grand sera 64 unités; le plus petit nombre du premier partage sera 16 unités, tandis que le plus grand sera 84 unités, et le plus petit nombre du second partage sera 28 unités, tandis que le plus grand sera 72 unités; et il est clair que ces nombres résolvent le problème.

Texto B: problema XXVII del libro I de la *Arithmetica* (Ver Eecke, 1959, pp. 36-38)

> Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés[8].
>
> Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres[9]; chose qui est d'ailleurs figura-

[6] En la notación algebraica actual se trataría de resolver el sistema $x + y = 100$, $x' + y' = 100$, $x'' + y'' = 100$, $x = 3y'$, $x' = 2y''$, $x'' = 4y$.

[7] El proceso de resolución en notación actual sería: $y'' = t$, $x' = 2t$, $y' = 100 - 2t$, $x = 3(100-2t) = 300-6t$, $y = 100-(300-6t) = 6t-200$, $x'' = 4(6t-200) = 24t-800$, $x'' + y'' = (24t - 800) + t = 25t - 800 = 100$, $25t = 900$, $t = 36$.

[8] En la notación algebraica actual, se trataría de resolver el sistema $x+y = a$, $xy = b$.

[9] Es decir, que $(\frac{a}{2})^2 - b$ sea un cuadrado, lo que garantiza que la ecuación $x^2-ax+b = 0$ con $a,\ b \in \mathbb{N}$ tenga una solución racional positiva.

tive[10].

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacun des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'etablit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'etablit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.

Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition[11].

Texto C: problema II del libro V de la *Arithmetica* (Ver Eecke, 1959, pp. 184-86)

Trouver trois nombres en proportion géométrique, et tels que chacun d'eux, augmenté d'un nombre donné, forme un carré[12].

Soit 20 le nombre dont on augmente.

Cherchons de nouveau le carré qui, augmenté de 20 unités, forme un carré. Or, ce carré est 16. Dès lors, posons que l'un des nombres extrêmes est 16 unités, et que l'autre nombre extreme est 1 carré d'arithme. Le nombre moyen sera donc 4 arithmes; et, conformément à la proposition précédente, il reste à chercher à égaler 4 arithmes plus 20 unités a un carré, et à égaler 1 carré d'arithme plus 20 unités à un carré. Or, la différence de ces expressions est 1 carré d'arithme moins 4 arithmes. Divisons: 1 arithme divise cette expression suivant 1 arithme moins 4 unités. La moitié de la différence, multipliée par elle même, forme 4 unités, que l'on doit égaler à la plus petite expression 4 arithmes plus 20 unités; ce qui est absurde, car il faudrait que 4 unités ne soient pas plus petites que 20 unités. Or, les 4 unités sont le quart de 16 unités, tandis que les 16 unités ne sont pas arbitraires, mais sont un carré qui, augmenté de 20 unités, forme un carré. Nous sommes donc amenés à chercher un carré, ayant sa quatrième partie plus grande que 20 unités, et qui, augmenté de 20 unités, forme un carré; en sorte que ce carré deviendra

[10] Según Ver Eecke, esta última frase habría sido introducida por algún comentarista griego posterior y quiere decir que la condición impuesta se reduce a la identidad $(\frac{x+y}{2})^2 - xy = (\frac{x-y}{2})^2$, la cual es una identidad "figurativa", es decir, susceptible de una representación geométrica.

[11] En notación actual, se elige un parámetro de forma que $x - y = 2t$. Tenemos entonces que $\frac{x+y}{2} = 10$ y $\frac{x-y}{2} = t$, de donde se obtiene que $x = t + 10$ e $y = 10 - t$. Multiplicando las dos igualdades se obtiene $xy = 100 - t^2 = 96$ y, por tanto, $t = 2$ y los números buscados son 8 y 12.

[12] En notación actual, tendríamos $\frac{x}{y} = \frac{y}{z}$, $x + a = \alpha^2$, $y + a = \beta^2$, $z + a = \gamma^2$.

plus grand que 80 unités. Or, le carré 81 est plus grand que 80; donc, si nous établissons 1 arithme plus 9 unités comme racine du carré cherché, ce carré sera 1 carré d'arithme plus 18 arithmes plus 81 unités, et, augmenté de 20 unités, il doit devenir un carré. Dès lors, égalons 1 carré d'arithme plus 18 arithmes plus 101 unités à un carré. Egalons au carré ayant comme racine 1 arithme moins 11 unités. Ce carré sera donc 1 carré d'arithme plus 121 unités moins 22 arithmes; ce que nous égalons à 1 carré d'arithme plus 18 arithmes plus 101 unités, et l'arithme devient $\frac{1}{2}$ unité. Or, la racine du carré cherché est 1 arithme plus 9 unités; donc, ce carré sera $90\frac{1}{4}$ unités.

Revenons maintenant à la question originale, et posons que l'un des nombres extrêmes est $90\frac{1}{4}$ unités, et que le troisième nombre est 1 carré d'arithme. En conséquence, le nombre moyen sera $9\frac{1}{2}$ arithmes, et nous en arrivons à chercher à égaler 1 carré d'arithme plus 20 unités à un carré, et à égaler $9\frac{1}{2}$ arithmes plus 20 unités à un carré. Or, la différence de ces expressions est 1 carré d'arithme moins $9\frac{1}{2}$ arithmes; ce que divise 1 arithme suivant 1 arithme moins $9\frac{1}{2}$ unités. La demi-différence, multipliée par elle-même, est $\frac{361}{16}$; ce que nous égalons à la plus petite expression, c'est-à-dire a $9\frac{1}{2}$ arithmes plus 20 unités, et l'arithme devient $\frac{41}{152}$.

Revenons à ce que l'on a posé[13]: le premier nombre sera $90\frac{1}{4}$; le second nombre sera $\frac{389\frac{1}{2}}{152}$, et le troisième nombre sera $\frac{1681}{23104}$.

[13] Para resolver este problema Diofanto utiliza la 'regla de falsa posición'. Empieza eligiendo para x el valor 16 pues de esa manera se cumple la condición de que aumentándole 20 unidades se obtiene otro cuadrado. A continuación, elige un parámetro t de manera que $z = t^2$. Esto permite obtener una expresión racional en t para el término medio de la proporción, $y = 4t$. Sustituyendo x e y por sus expresiones paramétricas en las ecuaciones $y + a = \beta^2$ y $z + a = \gamma^2$ y restando una de otra resulta $t^2 - 4t = \gamma^2 - \beta^2$, o también $t(t-4) = (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$. A continuación, establece las igualdades $\gamma + \beta = t$, $\gamma - \beta = t - 4$ y deduce que $\beta^2 = 4$. Como, por otro lado se tiene que $\beta^2 = 4t + 20$, se llega a $4t + 20 = 4$, lo que es imposible porque 4 es más pequeño que 20. A partir de aquí se plantea volver a elegir el valor inicial de x de modo que la última ecuación tenga solución. Para ello, dice que el segundo término de la ecuación, 4, es la cuarta parte del valor inicial, $x = 16$; para obtener un segundo miembro mayor que 20 será necesario dar a x un valor mayor que 80. Se trata, por tanto, de encontrar un cuadrado mayor que 80 y que sumándole 20 dé lugar a otro cuadrado. Elige ahora $x = (u+9)^2$. Entonces, $x^2 + 20 = (u+9)^2 + 20 = u^2 + 18u + 101 = \alpha^2$ y suponiendo que $\alpha^2 = (u-11)^2$ resulta $u^2 + 18u + 101 = u^2 + 121 - 22u$ y, por último, $u = \frac{1}{2}$ y $x = 90\frac{1}{4}$. Volviendo al planteamiento inicial del problema, supone que $x = 90\frac{1}{4}$, $z = t^2$ e $y = 9\frac{1}{2}t$. Rehaciendo todo el razonamiento anterior con los nuevos datos resulta $9\frac{1}{2}t + 20 = \beta^2$, $t^2 + 20 = \gamma^2$, $t(t - 9\frac{1}{2}) = (\gamma+\beta)(\gamma-\beta)$, $\gamma + \beta = t$, $\gamma - \beta = t - 9\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{9\frac{1}{2}}{2}$ y $\beta^2 = \frac{90\frac{1}{4}}{4} = \frac{361}{16}$. De aquí se deduce que $9\frac{1}{2}t + 20 = \beta^2 = \frac{361}{16}$ y $t = \frac{41}{152}$, lo que permite obtener los otros dos números, $y = \frac{389\frac{1}{2}}{152}$, $z = \frac{1681}{23104}$.

Texto D: preámbulo del libro I de la *Arithmetica* (Lizcano, 1993, pp. 236, 242-43)

> Falta (*leĩpsis*) multiplicada por falta hace presencia (*hýparxin*), falta multiplicada por presencia hace falta, y la marca de la falta es una Ψ truncada e invertida, esto es, $\bigwedge$.
>
> Tras haberte explicado las multiplicaciones de estas formas (*eidē*) que hemos expuesto más arriba, sus divisiones están claras. Es útil, pues, que quien aborde este tratado se haya ejercitado en la suma, la sustracción y la multiplicación de formas, así como en la manera de sumar formas ausentes (*leiponta eidē*) y presentes (*hipárchonta*) no equipolentes con otras formas que sean ellas mismas presentes, o incluso presentes y ausentes: en fin, en la manera de sustraer, a partir de formas presentes y de otras ausentes otras formas ya sean presentes ya sean también presentes y ausentes. A continuación, si resulta de un problema que ciertas formas son iguales a formas idénticas pero no equipolentes (*mē homoplēthē*), habrá que sustraer de una parte y de otra las semejantes de las semejantes, hasta que se obtenga una sola forma igual a una sola forma. Si se presentan formas ausentes de alguna manera, sea de una parte sea de ambas, habrá que sumar estas formas ausentes de una parte y de otra, hasta que las formas se hagan presentes de una parte y de otra, y después sustraer de nuevo las semejantes de las semejantes hasta que quede una sola forma de una parte y de otra.
>
> Aplica esto con destreza a los datos de las proposiciones y, en la medida de lo posible, hasta que tan sólo quede una única forma igual a una única forma. Ya te mostraré más tarde cómo se resuelve el caso en que quedan dos expresiones iguales a una sola.

II.4.3. Presentación del saber y estatuto del álgebra

La *Arithmetica* es una colección de problemas resueltos en la que apenas tiene cabida la descripción de las técnicas utilizadas y, mucho menos, la justificación de las mismas. No es una obra matemática del periodo griego clásico, sino una obra tardía, resultado de la influencia que ejercen las culturas orientales sobre la ciencia griega. Representa una forma funcional de organizar el saber, una organización basada en el uso y justificada por él, típica de las civilizaciones egipcia y babilónica, que contrasta con el modo axiomático-deductivo de presentación del saber matemático propio de los *Elementos*.

Pero no es esa la única diferencia: cuando Diofanto dice, por ejemplo,

> trouver un triangle rectangle tel que le nombre de son aire, augmenté soit du nombre de l'hypotenuse, soit de celui de l'une des perpendiculaires, forme un carré (Ver Eecke, 1959, p. 262),

para él, la hipotenusa, los catetos, el área del triángulo rectángulo son números, mientras que para Euclides son segmentos o porciones de plano.

Diofanto razona sobre las medidas allí donde Euclides lo hace sobre las cantidades de magnitud, lo que permite al primero una resolución de tipo aritmético-algebraico, mientras que el segundo debe recurrir a técnicas de resolución basadas en construcciones geométricas.

En resumen, Diofanto afronta las matemáticas desde un punto de vista funcional y aritmético-algebraico, en tanto que Euclides, paradigma de la matemática griega clásica, lo hace desde un punto de vista axiomático-deductivo y geométrico.

La *Arithmetica* es, por tanto, el texto fundacional del álgebra. Ahora bien, de un álgebra que no es más que una técnica de resolución al servicio de una aritmética abstracta que, hoy en día, podría encuadrarse dentro de una teoría elemental de números. No es una nueva rama de las matemáticas, ni siquiera es un objeto de estudio en sí misma. No es más que una nueva manera de afrontar problemas aritméticos desde un punto de vista numérico, no geométrico. Es el comienzo de su consideración como 'aritmética generalizada'.

II.4.4. Campo de problemas

Los problemas de la *Arithmetica* se refieren a la búsqueda, utilizando métodos de tipo algebraico, de determinados números naturales o razones de números naturales que cumplen ciertas condiciones expresadas en términos de operaciones aritméticas. Los datos son siempre números naturales abstractos, es decir, no contextualizados, lo mismo que las soluciones, aun cuando en este último caso se obtienen también razones de números naturales.

II.4.5. Conjuntos numéricos

La matemática clásica griega no aceptaba más números que los naturales mayores que 1. La unidad era "aquello en virtud de lo cual cada una de las cosas que hay es llamada una" (Euclides, 1994, vol. II, p. 111), mientras que los números se entendían como "una pluralidad compuesta de unidades" (Euclides, 1994, vol. II, p. 112). En cuanto a los racionales positivos, los concebía en tanto que razones, es decir, pares de números naturales cuyas propiedades y reglas de manejo venían dadas por la teoría de la proporcionalidad, y no los consideraba números. Pero además, la crisis de los irracionales fuerza a los matemáticos griegos a obviar la expresión numérica de la medida de la cantidad de una magnitud continua y a darle un tratamiento geométrico. Aparece así, una distinción entre número y cantidad[14] que perdurará a lo largo de los siglos y será fuente de conflictos y polémicas.

Sin embargo, la posición de Diofanto es heterodoxa respecto al clasicismo griego y hay atisbos de que interpretaba determinadas razones, las partes alícuotas de la unidad, por ejemplo, como números, influenciado, probablemente, por la matemática egipcia y babilónica o la matemática comercial griega (la 'logística') que podían aceptar como números los resultados de medir una cierta cantidad de magnitud con una parte alícuota de la unidad (número fraccionario).

II.4.6. Técnicas de resolución

Cada problema se enuncia en general, para números naturales cualesquiera, como si se tratase de una proposición. De manera que en el enunciado no aparecen números sino variables numéricas; por ejemplo, en el enunciado del texto A intervienen diez variables numéricas, en el del texto B, cuatro, y en el del texto C, siete. Estas variables reciben un tratamiento diferente, dependiendo de su papel como datos o incógnitas en el problema. Los datos se determinan antes de iniciar la resolución del problema, y no parece que en su determinación intervenga otro criterio que el de que sean números naturales sencillos, que no conduzcan a operaciones engorrosas. Únicamente, en aquellos casos en los que, a continuación del enunciado, se establece el *diorismos*, es decir, las condiciones que hacen posible la existencia de una solución que sea un número natural o una razón de números naturales (como sucede, por ejemplo, en el texto B), la determinación de estas variables se hace de acuerdo con dichas condiciones.

Una vez determinados los datos del problema, Diofanto busca el *arithme*[15], es decir, el número natural que soluciona el problema, ya que su técnica consiste en expresar todas las incógnitas en función de un solo parámetro, el susodicho *arithme*, hasta conseguir una ecuación de primer o segundo grado que resuelve. Aunque la parametrización de las incógnitas, una vez hecha la elección inicial, viene dada por las condiciones definidas en el enunciado, en algunos casos Diofanto impone condiciones adicionales que le permiten reducir el grado de las ecuaciones o determinar un problema que, en principio era indeterminado. Así sucede, por ejemplo, en el

[14] En realidad, Euclides habla de 'magnitud' pero se refiere con ese término a lo que hoy en día se conoce como 'cantidad de magnitud'.

[15] El término *'arithme'* significa 'número' en griego y Diofanto dice de él en el preámbulo del libro I que es el número "qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités" (Ver Eecke, 1959, p. 2).

texto C cuando impone a la incógnita α^2 el valor $(u-11)^2$. A veces combina la parametrización de las incógnitas con el llamado 'método de falsa posición', dándole un valor arbitrario inicial a alguna de ellas y cambiándolo posteriormente.

Desde el punto de vista actual, el planteamiento algebraico de los problemas de la *Arithmetica* conduce a ecuaciones o sistemas de ecuaciones de grados diversos (en algunos problemas se llega hasta el grado nueve) y que pueden ser determinados o indeterminados. Diofanto elige en cada problema una parametrización "ad hoc" que le permita determinar el sistema si es indeterminado y reducirlo a una ecuación de primer o segundo grado que, posteriormente, resuelve para obtener una solución particular. De hecho, nunca se plantea buscar todas las posibles soluciones de un problema, le basta con encontrar una.

II.4.7. Notación utilizada

En cuanto a la notación empleada, hay que decir que define símbolos para el *arithme*, las sucesivas potencias del *arithme* hasta el grado seis, y el inverso del *arithme* y sus sucesivas potencias. Expresa cada monomio colocando en primer lugar el símbolo que indica la incógnita o alguna de sus potencias y a continuación el coeficiente[16]. Además utiliza distintos símbolos para indicar las razones y también, ocasionalmente, un signo para la igualdad.

Las sumas de monomios las representa colocando, uno a continuación del otro, los símbolos que indican cada sumando, mientras los términos que están restando los agrupa, también yuxtapuestos, al final de la expresión precedidos de un único signo -la "Ψ truncada e invertida" de la que habla en el texto D- que indica que todos los términos que le siguen son sustraendos en lugar de sumandos[17]. No hay por consiguiente signos para indicar las operaciones binarias de suma y resta de monomios, simplemente se yuxtaponen, y sólo existe un signo para indicar la condición de sustraendo de los términos que le siguen. Cualquier operación indicada se simplifica utilizando razonamientos verbales hasta convertirla en un polinomio y entonces se expresa mediante esta notación, por lo que no hay

[16] El sistema de numeración griego es un sistema aditivo de base diez que utiliza las letras del alfabeto para indicar los números menores que diez, las decenas, las centenas, los millares, etc.

[17] Una exposición bastante detallada de los símbolos utilizados por Diofanto puede encontrarse en Kline (1992, vol. I, pp. 191-93) o en Cajori (1993, pp. 71-74).

necesidad de paréntesis, ni de denotar productos o cocientes de monomios o polinomios. A esta manera de hacer álgebra los historiadores le llaman 'álgebra sincopada'.

II.4.8. Descripción y justificación de las técnicas

En la *Arithmetica* apenas se encuentran explicaciones de las técnicas algebraicas que utiliza y, todavía menos, justificaciones de las mismas. El álgebra de Diofanto no es más que una herramienta que permite resolver problemas aritméticos y las herramientas no necesitan ser explicadas, sino usadas, porque es a través de su uso como se las llega a conocer. Tampoco necesitan otra justificación que la de comprobar que solucionan correctamente los problemas propuestos, y cuando éstos son de tipo aritmético esa comprobación es muy fácil de hacer.

Las pocas explicaciones que da Diofanto se refieren a las notaciones que usa, a cómo se multiplican y dividen las potencias de la incógnita, a la regla de los signos para productos y cocientes y a la técnica de resolución de la ecuación de primer grado (ver texto D). Además sugiere que el lector debe ejercitarse en la suma y resta de cantidades con signo, aunque no explicita las reglas correspondientes, y anuncia que más adelante explicará la técnica de resolución de la ecuación de segundo grado pero, o no lo hace, o el texto se ha perdido.

II.4.9. La negatividad en las técnicas de resolución

Los datos y las soluciones que busca y encuentra Diofanto son siempre números naturales o razones de naturales. Nunca "ve" las soluciones negativas de los problemas y cuando establece las condiciones de existencia de solución, como en el texto B, son condiciones que garantizan una solución racional positiva[18]. Es más, cuando en el texto C el método de falsa posición

[18] En el ejemplo del texto B las restricciones impiden la aparición de números complejos o irracionales, pero en otros casos como el siguiente:

> trouver quatre nombres qui, additionnés trois à trois, forment des nombres proposés. Il faut toutefois que le tiers de la somme des quatre nombres soit plus grand que chacun d'eux (Ver Eecke, 1959, p. 22),

el *diorismos* cumple la función única de eliminar las soluciones negativas. En efecto, se trata de encontrar cuatro números x, y, z y w que verifiquen el sistema $x+y+z=a$, $y+z+w=b$, $z+w+x=c$ y $w+x+y=d$, obteniéndose como solución $x=\frac{a+b+c+d}{3}-b$, $y=\frac{a+b+c+d}{3}-c$, $z=\frac{a+b+c+d}{3}-d$, $w=\frac{a+b+c+d}{3}-a$. Es evidente que la condición $\frac{a+b+c+d}{3}>a,b,c,d$ garantiza la positividad de las soluciones.

le lleva a la ecuación $4t+20=4$, no tiene ningún reparo en decir que eso es absurdo porque 4 es más pequeño que 20 y, a continuación, volverá a dar valores para conseguir que el segundo miembro de esa ecuación sea mayor que 20. Así pues, no hay, en principio, números negativos en Diofanto, no los concibe, ni como dato ni como solución de un problema.

Sin embargo, la existencia del *arithme* crea la necesidad de trabajar con operaciones aritméticas que no pueden ser efectuadas. Aparece así un entorno donde la presencia del parámetro obliga a plantearse las operaciones sobre operaciones: la diferencia de diferencias, la diferencia de un número y una suma, el producto de diferencias, etc., y, por tanto, a usar la estructura algebraica de $\mathbb{N}$, cosa que en un ámbito puramente aritmético no sucede, pues la posibilidad de ir realizando cada operación en el momento que se plantea hace innecesario el conocimiento de gran parte de las propiedades de $\mathbb{N}$. Y así vemos como, por ejemplo, en el texto A se pone de manifiesto la utilización de la propiedad $a-(b-c)=c-(b-a)$ o de la distributiva del producto respecto a la diferencia; en el texto B el proceso de resolución del problema exige la utilización de la propiedad $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$; y la resolución del texto C lleva implícita, además, el uso de las propiedades $a-(b-c)=(a-b)+c$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ y $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

De manera que, como acabamos de decir, las técnicas algebraicas de cálculo conllevan la manipulación de las diferencias de números naturales. Esto significa, en la práctica, desarrollar un cálculo de sumandos y sustraendos, pues para hacer una operación con una diferencia es necesario operar el minuendo y el sustraendo por separado. Sin embargo, Diofanto no se permite nunca, ni siquiera en los cálculos intermedios, escribir un sustraendo sin que vaya precedido de su correspondiente minuendo[19]. En principio, un sustraendo sólo tiene sentido si forma parte de una diferencia positiva.

Es más, la inexistencia de signos para representar las operaciones binarias obliga a colocar todos los sustraendos juntos, al final de la expresión polinómica y precedidos del signo que indica su calidad de tales, con lo que los polinomios no aparecen escritos por orden decreciente de sus potencias, como es usual hoy en día, sino colocando primero todos los sumandos y después todos los sustraendos. Esta yuxtaposición produce otro fenómeno interesante. En realidad, los objetos de cálculo de Diofanto no son estrictamente sumandos y sustraendos, sino más bien términos sin determinación,

[19] Por ejemplo, en el texto A al efectuar la operación $y=100-(300-6t)$ da como resultado “6 arithmes moins 200 unités” (es decir, $6t-200$) allí donde nosotros no hubiéramos tenido inconveniente en escribir $-200+6t$.

es decir, no afectados de la condición de sumandos o sustraendos, y sustraendos. En otras palabras, lo que se observa en Diofanto es la realización de operaciones entre números (o monomios) sin más y números (o monomios) en los que hay que tener en cuenta su calidad de sustraendos. Como consecuencia de esto, la identificación entre términos sin determinación y sumandos apenas se pone de manifiesto.

Hasta el momento, hemos afirmado que Diofanto no escribe nunca diferencias con minuendo menor o igual que el sustraendo o sustraendos aislados sin un minuendo del que puedan sustraerse. Sin embargo, la situación no está tan clara, pues aunque las diferencias que se manipulan son siempre, aparentemente, diferencias positivas, al final de los cálculos puede comprobarse que algunas de esas diferencias eran en realidad diferencias negativas. Así vemos como en la situación C, la obtención del valor del parámetro $u = \frac{1}{2}$ nos convierte la expresión $\alpha^2 = (u-11)^2$, que aparentemente es una diferencia con minuendo mayor que el sustraendo, en $\alpha^2 = (\frac{1}{2} - 11)^2$.

Este hecho es curioso por dos razones. La primera de ellas es que no es un hecho aislado: si, una vez determinado el *arithme*, se rehacen las operaciones desde el principio, nos encontramos con que en muchos problemas aparecen diferencias con minuendo menor que el sustraendo. La segunda razón es que la aparición de esas diferencias negativas es fácilmente evitable sin más que escribir la diferencia opuesta $\alpha^2 = (11 - u)^2$ o elegir otra parametrización particular, por ejemplo, $\alpha^2 = (u + 10)^2$. Da la impresión de que Diofanto tiene una técnica, que no hace explícita, para encontrar, a partir del trinomio de segundo grado $x^2 + ax + b$, un valor c que permita a la ecuación $x^2 + ax + b = (x - c)^2$ tener una solución positiva. El uso sistemático del método hace aparecer de forma subrepticia las diferencias negativas, sin que el autor se tome la molestia de hacer en cada caso las rectificaciones necesarias para que eso no suceda, dado que no impiden la obtención de la solución correcta.

Por consiguiente, nos encontramos con un autor que, por un lado, no concibe que un sustraendo pueda ser solución de un problema: la elección de los datos particulares de cada problema y de la parametrización que lo resuelve eliminan siempre la posibilidad de valores negativos tanto para el *arithme* como para la solución del problema, pero que, sin embargo, no tiene inconveniente en manipular diferencias que posteriormente se revelan como diferencias negativas, ni hace ningún esfuerzo por evitarlas, aun cuando en ningún momento menciona este hecho y actúa como si todas ellas tuvieran el minuendo mayor que el sustraendo. En la práctica, las diferencias negativas se manejan sin problemas con tal de que su condición no se haga muy ostensible y no obligue a dar explicaciones.

II.4.10. Conocimientos sobre la negatividad

En la resolución de los problemas de la *Arithmetica* se pone de manifiesto que Diofanto conoce perfectamente la estructura aditiva y multiplicativa de las diferencias positivas. También maneja algunos aspectos de la estructura ordinal de las diferencias, sobre todo los que se refieren a la compatibilidad del orden con las operaciones[20].

Pero, además, las técnicas de cálculo con las diferencias imponen el tratamiento por separado de los minuendos y los sustraendos, de donde podríamos inferir el conocimiento de la estructura algebraica de sumandos y sustraendos. Ahora bien, la inexistencia de un signo que indique la calidad de minuendo (o sumando) de los términos que se operan produce, más que un cálculo entre sumandos y sustraendos, un cálculo entre objetos sin determinación, las “presencias”, y objetos con la determinación de sustraendos, las “faltas” o “ausencias”. Lo que Diofanto maneja de hecho, y con toda soltura, es la estructura aditiva y multiplicativa de los números o monomios sin determinación extendida a los números o monomios con determinación sustractiva.

Por otro lado, aunque utiliza los sustraendos como objetos intermedios de cálculo, nunca escribe un sustraendo si no va precedido de un minuendo aparentemente mayor que él, ni admite sustraendos o diferencias negativas como soluciones de un problema o como datos. Se encuentran, sin embargo, diferencias con el minuendo menor que el sustraendo camufladas en los cálculos, lo que nos indica que Diofanto conoce que la estructura algebraica de las diferencias positivas puede extenderse a las diferencias negativas y que la aparición de éstas a lo largo de un cálculo no lo invalida.

II.4.11. Saberes sobre la negatividad

El análisis del discurso sobre las técnicas de resolución nos muestra que si se quiere explicar a otros cómo se operan las diferencias, aparece inevitablemente la necesidad de referirse por separado a los términos de las mismas. Y eso se manifiesta claramente en el texto D, donde nos encontramos con el primer enunciado de la regla de los signos de toda la historia de las matemáticas, enunciado que, como comentamos a continuación, nos remite a los minuendos y sustraendos de las diferencias.

[20] Por ejemplo, se usan con frecuencia razonamientos en los que se asegura que $a-b < a-c$ o $c-a < b-a$, supuesto que $b > c$.

La palabra 'leĩpsis', que Lizcano (1993, pp. 236-38) traduce por 'falta', 'ausencia' o 'deficiencia', aparece también en el entorno del método euclídeo de 'aplicación de áreas', método basado en las proposiciones II.5 y II.6 de los *Elementos* (Euclides, 1991, vol. I, pp. 272-75) que, en su formulación más sencilla, consiste en construir, sobre un segmento dado a, un rectángulo equivalente a un cuadrado de lado b. La solución buscada puede ser un rectángulo de lados a y x o un rectángulo de lados $a+x$ y x o uno de lados $a-x$ y x, lo que, en la práctica, supone resolver por medios geométricos las ecuaciones $ax = b^2$, $ax + x^2 = b^2$, $ax - x^2 = b^2$. En el segundo caso se decía que había un exceso sobre el rectángulo de lado a y en el tercero una 'leĩpsis' (una deficiencia) respecto a ese mismo rectángulo. Esto hace pensar que Diofanto usa la palabra 'leĩpsis' para referirse al sustraendo de una diferencia, entendiéndolo como la falta o la deficiencia que sufre el minuendo. En cuanto al término 'hýparxin', Lizcano (1993, p. 240) lo traduce por 'existencia', 'presencia' y también por 'realidad' o 'sustancia'.

Posteriormente, cuando se habla de la estructura aditiva de estas 'faltas' y del método de resolución de ecuaciones de primer grado ya no se utiliza el sustantivo 'leĩpsis' sino el adjetivo 'leiponta' aplicado a la palabra 'eidē', 'leiponta eidē', es decir, 'formas faltantes' o 'ausentes'[21]. Diofanto no explicita las reglas de suma y resta de formas presentes y ausentes, se limita a recomendar al lector de la obra que se ejercite en ellas. Esto es un indicio de que supone que los discípulos que estudien la *Arithmetica* saben como sumar o restar dichas formas o, por lo menos, pueden deducirlo por si mismos, mientras que no hace ese supuesto en el caso de la multiplicación; parece considerar que la estructura aditiva de las diferencias es más asequible que la estructura multiplicativa.

A continuación, el autor explica el método de resolución de la ecuación de primer grado (ver texto D), basado en la sustracción de las formas presentes comunes a los dos miembros de la ecuación hasta obtener una ecuación del tipo $ax = b$. Hay que entender que Diofanto plantea las ecuaciones cuando ya todas las operaciones intermedias han sido hechas y, por lo tanto, los dos miembros de la misma son polinomios escritos en su forma canónica. Ahora bien, la regla de sustracción de los términos comunes a los dos miembros sólo es operativa si todos los términos de la ecuación son sumandos, por lo que previamente hay que transformar los sustraendos en sumandos. A esto es a lo que se refiere Diofanto cuando dice que si existen formas ausentes,

[21] La palabra 'eidē' ('forma') se utiliza para indicar los monomios de las ecuaciones.

> habrá que sumar estas formas ausentes de una parte y de otra, hasta que las formas se hagan presentes de una parte y de otra.

Se observa también que, aunque Diofanto habla de las operaciones con las formas presentes y ausentes, en los dos casos designa con ese nombre a lo que actualmente llamaríamos valores absolutos de las mismas. Esto se comprueba cuando enuncia la regla de eliminación de formas ausentes que acabamos de comentar. Para hacer desaparecer las formas ausentes o conseguir que se hagan presentes sumándoselas a los dos miembros de la ecuación es necesario entender por tal forma el término sin asociarle su calidad de sustraendo, pues si no habría que restar en los dos miembros de la ecuación las formas ausentes. También a la hora de presentar el producto de sustraendos, cuando dice que

> falta multiplicada por falta hace presencia,

da por supuesto que el producto de faltas es el producto de los valores absolutos correspondientes; la consideración de que el resultado es una presencia se establece a posteriori. Como vemos, el discurso se desarrolla en términos de números naturales y sus operaciones con un añadido: las disquisiciones previas o posteriores sobre si esos números son además faltas o presencias.

Por otro lado, el hecho de que Diofanto enuncie la regla de los signos sin dar ningún tipo de justificación no significa que esto sea un imposible para la matemática griega. En realidad, las reglas de cálculo con diferencias pueden justificarse a partir de las proposiciones del libro II de los *Elementos*. Por ejemplo, la demostración de la proposición II.4 (Euclides, 1991, vol. I, pp. 270-71), que dice:

> si se corta al azar una línea recta, el cuadrado de la (recta) entera es igual a los cuadrados de los segmentos y dos veces el rectángulo comprendido por los segmentos,

ofrece pautas que permiten demostrar propiedades como $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$, $(a-b)(c-d) = ac + bd - ad - bc$, etc., utilizando el sistema axiomático-deductivo de los *Elementos*.

Hay que suponer, por consiguiente, que Diofanto podía explicitar tanto las propiedades aditivas de las diferencias como las multiplicativas, y justificarlas por el método euclídeo, siempre que tuviesen un minuendo mayor que el sustraendo. El que no lo hiciera puede deberse, bien a que la orientación funcional de su tratado hace innecesaria esa justificación (las reglas quedan perfectamente justificadas desde el momento que permiten resolver correctamente los problemas planteados), o bien a que la *Arithmetica*, a diferencia de los *Elementos*, no es un manual para principiantes y da por supuestos ciertos conocimientos matemáticos en sus posibles lectores.

II.4.12. Relaciones entre conocimiento y saber

La seguridad con la que Diofanto maneja la negatividad en el cálculo contrasta con sus vacilaciones a la hora de hablar de ella. Ya hemos comentado su silencio sobre la existencia de diferencias negativas. Pero no sólo eso, también la manera de expresarse al enunciar la regla de los signos en términos de 'lo que falta' o la 'ausencia' sugiere que dicha falta no tiene sentido en sí misma, sólo lo tiene si se presupone una presencia, una realidad a la cual aquélla se refiere. Además, la existencia de un signo para indicar la ausencia, pero no para indicar la presencia pone de manifiesto, según Lizcano (1993, pp. 241-42), la consideración asimétrica que Diofanto otorga a las formas presentes y ausentes. Las formas presentes no necesitan marca, su situación es "natural", "normal", "se da por supuesta"; la marca se utiliza para indicar que una determinada forma no está presente como sería "lo natural", sino que se desvía de la norma. Todo esto son síntomas de que existen dificultades para incorporar las diferencias negativas o los sustraendos sin minuendo al saber matemático de la época.

¿Qué es lo que impide a Diofanto aceptar las diferencias negativas, o los sustraendos sin minuendo, como un nuevo objeto matemático? La pregunta sólo puede ser contestada desde el punto de vista de las necesidades y limitaciones de la cultura griega clásica. Desde luego, lo primero que se constata es que no hay una gran necesidad de aceptar las diferencias negativas. En la obra de Diofanto el álgebra no es más que una herramienta que permite plantear y resolver problemas aritméticos en el campo de los números naturales o de las razones de números naturales. Además, parece que Diofanto está más interesado por encontrar el mejor modo de resolver cada problema en función de sus particularidades que por desarrollar métodos generales de resolución de problemas. Sin embargo, como veremos más adelante, es el estudio sistemático del álgebra y de los métodos generales de resolución de ecuaciones el que obliga a asumir las diferencias negativas o los sustraendos como soluciones de las ecuaciones. Por tanto, en Diofanto no se dan las condiciones que hacen imprescindible plantearse el problema del estatuto matemático de las diferencias negativas o los sustraendos. Pueden seguir siendo elementos intermedios de cálculo cuyo uso queda validado porque permiten solucionar los problemas aritméticos planteados.

Aun así, hemos visto cómo en el limitado mundo de la *Arithmetica* esas diferencias negativas se hacen presentes generando pequeñas contradicciones. ¿Por qué no se resuelven? Probablemente porque su solución dentro de la matemática griega clásica choca con tantos inconvenientes que no merece la pena intentarlo. Será necesario una presencia mucho más ostensible de las diferencias negativas o los sustraendos sin minuendo para que la comunidad matemática afronte la tarea de darles sentido, modificando formas de pensar heredadas del mundo griego y muy arraigadas también en la sociedad occidental posterior.

Según Lizcano, existen en la cultura griega dos creencias que impiden la aceptación de las diferencias negativas. La primera de ellas nos dice que la oposición fundamental alrededor de la cual se estructura la realidad es la oposición "ser-no ser" (Lizcano, 1993, pp. 154-160). Esta creencia fundamenta el principio de no contradicción -es imposible que algo sea y al mismo tiempo no sea- que es la base del razonamiento aristotélico-euclídeo, pero, como consecuencia, establece que lo opuesto al "ser" es el "no ser" y no el "ser de otro modo", como veremos más adelante que ocurre en otras culturas, con lo cual todo el mundo sensible cae del lado del "ser", quedando del lado del "no ser" lo "indeterminado", lo "impensable".

La segunda creencia es la de que el conocimiento y, en particular, los conceptos matemáticos se obtienen por "abstracción" del mundo sensible (Lizcano, 1993, pp. 194-208). Esto determina, de entrada, que los números y las magnitudes caen del lado del "ser", desde el momento que son abstracciones de "lo que existe". Pero además, ese proceso consiste en abstraer, separar, determinadas características comunes a un grupo de objetos. Y, por ejemplo, el término que usa Aristóteles para indicar la abstracción que le permite pasar de la especie al género: *aphaíresis*, es el mismo que utilizará Euclides para referirse a la operación de sustraer. Aparece aquí un paralelismo entre la abstracción de conceptos y la sustracción matemática que Lizcano pone de manifiesto cuando dice:

> Si de la especie 'hombre' (='animal racional') abstraigo/sustraigo el género 'animal' queda como *residuo* o *exceso* la *diferencia específica*: el ser 'racional'. De igual modo que si de 4 sustraigo/abstraigo 3 queda como *residuo* o *exceso* la *diferencia*: 1. (Lizcano, 1993, p. 197)

Ahora bien, esta equivalencia entre las dos operaciones corta toda posibilidad de dar sentido a una diferencia negativa pues

> Sustraer un número (o una magnitud) de otro (o de otra) es así una operación en todo semejante a la de extraer/abstraer el género de la especie. Y será, por tanto, *el mismo tipo de imposibilidad* el que prive de sentido tanto a la operación de sustraer un número (o magnitud) mayor de uno (o de una) menor como a la operación de abstraer la especie 'hombre' del género 'animal', y no al revés. (Lizcano, 1993, p. 197)

Para la mentalidad griega 'sustraer' significa quitar algo que previamente existe para dejar al descubierto la 'diferencia'. En esta situación, una diferencia negativa no puede ser asumida porque representaría la acción de "sustraer de donde no hay" y la diferencia, resultado de esa operación imposible, pertenecería al ámbito de "lo que no es" o de lo que es "menos que nada", cosa también inadmisible para el pensamiento griego[22].

Otra circunstancia a tener en cuenta es el descubrimiento de la inconmensurabilidad de ciertas cantidades de magnitud, hecho que llevó a los matemáticos griegos a organizar sus razonamientos alrededor de la cantidades de magnitud, prescindiendo de sus medidas y dando a sus trabajos una orientación geométrica en la que lo numérico apenas tenía cabida. El enfoque axiomático-deductivo y geométrico de la matemática griega clásica hace que la negatividad resulte impensable. Sólo en una obra como la *Arithmetica* que, bajo el influjo de las culturas orientales, se aparta de dicho enfoque, puede manifiestarse una cierta forma de negatividad que en la geometría clásica no puede aparecer de ninguna manera. Aquí, el contexto aritmético-algebraico la pone de manifiesto y la orientación funcional del tratado la justifica.

Sin embargo, la dificultad para aceptar la negatividad en el seno del paradigma aristotélico-euclídeo obliga a Diofanto a mostrarla lo menos posible y a hacerla aparecer como un cálculo intermedio referido a diferencias con minuendo mayor que el sustraendo o a sustraendos que, en último extremo, siempre tendrán un minuendo del cual sustraerse. En estas condiciones la negatividad no sólo puede ser asumida por la matemática griega clásica sin necesidad de rupturas, sino que puede justificarse perfectamente.

II.4.13. Límites de la concepción

La concepción puede perdurar mientras nos movamos en el ámbito del álgebra entendida como herramienta que permite resolver problemas aritméticos relativos a los números positivos. Pero, aún así, la negatividad no se deja reducir, fácilmente, a un simple cálculo de diferencias positivas o de sustraendos con minuendos. Ya hemos visto cómo aparecen, de un modo escondido, diferencias negativas; de hecho, el álgebra es un mundo especialmente propicio para que estos accidentes sucedan. Las reglas de cálculo con diferencias positivas son las mismas que las que afectan a las

[22] Incluso el cero, un cero que pueda operar en igualdad de condiciones con los demás números, es de difícil aceptación en el mundo griego desde el momento que representa la "nada", el "vacío", conceptos que pertenecen al lado del "no ser", de lo "indeterminado".

diferencias negativas y, por razones de eficacia, su prolongación al caso de diferencias negativas es casi inevitable[23]. El interés por manejar las expresiones algebraicas de la forma más económica posible hace deseable el paso por expresiones intermedias en las que, a lo mejor, aparecen diferencias negativas pero, a cambio, permiten un cálculo más rápido y eficaz.

Por otro lado, controlar la legitimidad de un cálculo en función de las propiedades de las diferencias positivas es muy engorroso. Algo tan elemental como $8x - 5 - 2x = 6x - 5$ quedaría justificado por medio de la secuencia $8x - 5 - 2x = (8x - 5) - 2x = 8x - (5 + 2x) = 8x - (2x + 5) = (8x - 2x) - 5 = 6x - 5$ en la que intervienen las propiedades $(a - b) - c = a - (b + c)$ y la conmutativa de la suma, mientras que, hoy en día, esa expresión se interpreta como una suma entre los términos $8x$, -5 y $-2x$ y la asociatividad y la conmutatividad de la suma permiten justificar cualquier permutación entre ellos. Tanto la tarea de justificar las prácticas de cálculo como la de enseñarlas se simplifica notablemente si se aceptan las diferencias negativas y se les da un estatuto de número.

En consecuencia, la concepción, aun cuando no se amplíe el campo de problemas, derivará insensiblemente hacia la consideración de las diferencias negativas o de los sustraendos sin minuendo como objetos pertinentes durante el transcurso de los cálculos. Pero además, en el momento en que el álgebra pase de ser una herramienta de trabajo aritmético a ser un objeto de estudio en sí misma, los problemas se agudizarán. De manera ineludible, el desarrollo de una teoría general de ecuaciones y de métodos generales de resolución de las mismas obligará, como ya veremos, a tomar en consideración las diferencias negativas, e incluso las raíces de las mismas, no sólo como expresiones intermedias del cálculo sino también como soluciones de las ecuaciones.

[23] Por ejemplo, la expresión $a-(b-c)$ con $b < c$ no tiene sentido pero, si aceptamos la prolongación de la identidad $a-(b-c) = (a-b)+c$ al caso $b < c$, podemos transformar la expresión inicial, falta de sentido, en otra que puede tenerlo plenamente. De este modo, el algebrista adquiere una larga experiencia de situaciones en las que a partir de expresiones intermedias desprovistas de sentido se obtienen finalmente expresiones y números perfectamente válidos.

II.5. Concepción de Liu Hui

II.5.1. Obra matemática de referencia

Los nueve capítulos del arte matemático (Jiu zhang suanshu) es una de las obras clásicas de la matemática china. Se desconoce el autor y la fecha en que se escribió, aunque se supone que es anterior a la era cristiana. Posteriormente, fue comentada por Liu Hui (siglo III d.C.), comentarios que a partir de entonces quedaron incorporados al texto clásico. Se trata de una aritmética, la más antigua aritmética china que se conoce, consistente en una colección de 246 problemas resueltos sobre agrimensura, reglas de tres, repartos proporcionales, intercambios de mercancías, etc. En la obra original no figuraba ninguna explicación de las técnicas de resolución, simplemente aparecía el enunciado de cada problema y a continuación su resolución. Los comentaristas posteriores, Liu Hui entre ellos, explicitaron las reglas que rigen algunas de las técnicas.

Los textos que utilizamos para hacer nuestro análisis se encuentran citados en Lizcano (1993), Lay-Yong y Tian-Se (1987) o Martzloff (1988). Las traducciones parciales de los dos últimos, al inglés y francés, respectivamente, se basan en las ediciones críticas de *Los nueve capítulos* en lengua china de Qian Baocong (1963) y Bai Shangshu (1983), mientras que la traducción al castellano de algunos párrafos que hace Lizcano se basa en la versión inglesa de Lay-Yong y Tian-Se[24].

II.5.2. Textos de referencia

Texto A: problema 1 del capítulo VIII de *Los nueve capítulos* (Lay-Yong y Tian-Se, 1987, pp. 228-234; Lizcano, 1993, pp. 74-77)

> Hay 3 manojos de cereal de calidad superior, 2 manojos de calidad media y 1 manojo de calidad inferior, resultando 39 *dou* [de grano] como *shi*[25]; 2 manojos de calidad superior, 3 manojos de calidad media y 1 manojo de calidad inferior dan 34 *dou* como *shi*; mientras que 1 manojo de calidad superior, 2 manojos de calidad media y 3 manojos de calidad inferior dan 26 *dou* como *shi*. Encontrar la medida [de grano] en *dou* contenida en un manojo de cada una de las tres calidades de cereal.

[24] Existe una traducción al inglés de la obra completa (Kangshen, Crossley y Lun, 1999).

[25] La palabra '*shi*' indica el 'dividendo' de una división, pero aquí hace referencia a lo que, hoy en día, llamaríamos 'término independiente de una ecuación'. Esta doble utilización del término *'shi'* se debe a que, en el paso final de la resolución de estos problemas, los términos independientes asumen el papel de dividendos.

Paso[26] 1:

Poner 3 manojos de cereal de calidad superior, 2 de calidad media y 1 de calidad inferior con su resultado, 39 *dou*, como *shi* en la columna de la derecha[27]. Disponer las columnas central e izquierda del mismo modo que la derecha[28].

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

Paso 2:

Tomar los cereales de lo alto de la columna derecha para multiplicar por todas partes (*biang cheng*) la columna central y proceder a [el método de] sustracciones directas (*zi chu*).

1		3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

Paso 3:

Del mismo modo, multiplicar por todas partes la siguiente columna [esto es, la columna de la izquierda] por el número que representa el cereal de calidad superior en la columna de la derecha y usar de nuevo [el método] de sustracciones directas.

		3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

[26] La descomposición en pasos de la resolución del problema es obra de Lay-Yong y Tian-Se. Nosotros la mantenemos porque, más adelante, nos facilitará la referencia a ellos.

[27] El autor da instrucciones sobre la manera de disponer los datos en una superficie plana que recibe el nombre de 'tablero de cálculo'. Lo que finalmente aparece en él es la traspuesta de la matriz ampliada del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 26 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ 3x + 2y + z &= 39 \end{aligned}$$

[28] En el tablero de cálculo los distintos números se representaban por medio de palillos. La descripción de este sistema de numeración puede verse en Lizcano (1993, p. 69). Por razones tipográficas, nosotros optamos por utilizar nuestro actual sistema de numeración.

Paso 4:

Después, multiplicar por todas partes la columna de la izquierda por el número que ahora representa el cereal de calidad media en la columna central y usar [el método] de sustracciones directas.

$$\begin{array}{ccc} & & 3 \\ & 5 & 2 \\ 36 & 1 & 1 \\ 99 & 24 & 39 \end{array}$$

Paso 5:

Lo que queda en la columna de la izquierda es el número que representa el cereal de calidad inferior [y el *shi*]. El número superior se toma como el *fa* (divisor) y el número inferior como el *shi* (dividendo). Aquí el *shi* significa el *shi* del cereal de calidad inferior.

Paso 6:

Para encontrar la medida de granos del cereal de calidad media, multiplicar el *shi* de la columna central por el *fa* [de la columna de la izquierda] y sustraer del producto el *shi* del cereal de calidad inferior.

$$24 \times 36 - 99 \times 1 = 765$$

Paso 7:

El resto [es decir, el resultado de la resta anterior] se divide por el número de manojos de cereal de calidad media de la columna central, produciendo el *shi* para el cereal de calidad media.

$$765 : 5 = 153$$

Paso 8:

Para encontrar la medida del cereal de calidad superior, multiplicar como antes el *shi* de la columna de la derecha por el *fa* [de la columna de la izquierda] y sustraer de ello el respectivo *shi* de las calidades inferior y media.

$$39 \times 36 - 99 \times 1 - 153 \times 2 = 999$$

Paso 9:

El resto se divide por el número de manojos del cereal de calidad superior [de la columna de la derecha], produciendo el *shi* para el cereal de calidad superior. El *shi* de cada una de las calidades se divide por el *fa* para dar lugar a las medidas por manojo de las respectivas calidades[29].

[29] Según Lay-Yong y Tian-Se, el procedimiento de dejar la división por el *fa* para el final es un medio de evitar el cálculo con fracciones en los pasos 6 a 9. En problemas en los que la primera incógnita a determinar resulta ser un número natural, la división se efectúa desde el primer momento y es ese número el que interviene en el cálculo de las demás incógnitas. Los síntomas de evitamiento de los números racionales en los cálculos se observan también cuando los datos del problema son fraccionarios, pues, en ese caso, se multiplica la columna correspondiente por un número que los transforme en naturales.

$$999 : 3 = 333$$

$$99 : 36 = 2\frac{3}{4}, \quad 153 : 36 = 4\frac{1}{4}, \quad 333 : 36 = 9\frac{1}{4}$$

Texto B: problema 8 del capítulo VIII de *Los nueve capítulos* (Lizcano, 1993, pp. 93-95)

> Al vender 2 vacas y 5 cabras para comprar 13 cerdos, hay un superávit de 1000 monedas. El dinero obtenido de vender 3 vacas y 3 cerdos da justo para comprar 9 cabras. Al vender 6 cabras y 8 cerdos para comprar 5 vacas, hay un déficit de 600 monedas. ¿Cuál es el precio de una vaca, de una cabra y de un cerdo?

Para resolver el problema el autor propone representar en el tablero de cálculo las cantidades que indican número de animales vendidos y superávit con palillos rojos y las que indican número de animales comprados y déficit con palillos negros. La disposición espacial de los datos, utilizando las cifras árabes y la notación actual para los negativos, es como sigue:

$$\begin{array}{ccc} -5 & +3 & +2 \\ +6 & -9 & +5 \\ +8 & +3 & -13 \\ -600 & & +1000 \end{array}$$

A continuación, se procede a manipular manualmente los palillos para dejar espacios vacíos en las filas superiores. La primera manipulación equivale a multiplicar la segunda columna por dos y restarle la tercera tres veces consecutivas con lo que resulta:

$$\begin{array}{ccc} -5 & & +2 \\ +6 & -33 & +5 \\ +8 & +45 & -13 \\ -600 & -3000 & +1000 \end{array}$$

.

Posteriormente, se eliminan de la misma manera los dos términos superiores de la primera columna, hasta llegar a una matriz triangular, y después, por medio de operaciones similares a las que se realizan en los pasos 6 a 9 del texto A, se obtiene el precio de cada cerdo, cabra y vaca: 300, 500 y 1200 monedas, respectivamente.

Texto C: problema 6 del capítulo VIII de *Los nueve capítulos* (Lizcano, 1993, p. 96)

> Si 6 *dou* de grano como *shi* se añaden a 3 manojos de cereal de calidad superior, esto equivale a lo que dan 10 manojos de cereal de calidad inferior. Si 1 *dou* de grano como *shi* se añade a 5 manojos de cereal de calidad inferior, esto equivale a lo que dan 2 manojos de calidad superior. Encontrar la medida de grano contenida en cada manojo de cereal, superior e inferior.

Aquí, en la primera columna se propone representar los manojos de calidad superior y el *shi* con palillos negros y los manojos de calidad inferior con palillos rojos. En cambio, en la segunda columna los manojos de calidad superior se representan con palillos rojos y los manojos de calidad inferior y el *shi* con palillos negros. La disposición en el tablero queda como sigue:

$$\begin{array}{cc} -2 & +3 \\ +5 & -10 \\ -1 & -6 \end{array}$$

y multiplicando la primera columna por 3 y sumando dos veces la segunda columna se obtiene:

$$\begin{array}{cc} & +3 \\ -5 & -10 \\ -15 & -6 \end{array}$$

de donde resulta que un manojo del cereal de calidad inferior contiene 3 *dou* de grano y un manojo de calidad superior 8 *dou* de grano.

Texto D: comentarios al capítulo VIII de *Los nueve capítulos*

> 1) Cuando se consideran dos expresiones, podemos obtener resultados opuestos para los que hemos de usar los nombres *zheng* y *fu* como designaciones. Para los números *zheng* usamos palillos de cálculo rojos, mientras que los números *fu* se representan por palillos negros. De manera alternativa, un número *zheng* puede cambiarse en uno *fu* cuando se coloca un palillo inclinado sobre él. En el cálculo en el tablero, donde están implicados palillos tanto rojos como negros, hay un método para manipular números en las columnas de la izquierda y de la derecha. Este método no es del todo el mismo que el procedimiento normal de adición y sustracción. Si un numeral es rojo o negro está determinado en realidad por reducciones mutuas. Para llevar a cabo la adición o sustracción de números que ocupan las correspondientes posiciones en diferentes columnas, hay dos reglas sobre tipos diferentes de adición y sustracción. (Lizcano, 1993, p. 64)
>
> 2) Regla de sustracción
>
>   a) Los [palillos] del mismo nombre se reducen mutuamente.

b) Los de nombre diferente se acrecientan mutuamente.

c) Si un [palillo] *zheng* no tiene a qué enfrentarse[30] se hace *fu*.

d) Si un *fu* no tiene a qué enfrentarse se hace *zheng*.

Regla de adición

a) Los [palillos] de nombre diferente se reducen mutuamente.

b) Los del mismo nombre se acrecientan mutuamente.

c) Si un [palillo] *zheng* no tiene a qué enfrentarse se hace *zheng*.

d) Si un *fu* no tiene a qué enfrentarse se hace *fu*. (Martzloff, 1988, p. 188)

3) La sustracción [de números] entre columnas se lleva a cabo cuando [los números] son de la misma clase. Si sus nombres son diferentes, [los números] no pertenecen a la misma clase. Si no son de la misma clase, [los números] son desemejantes y no pueden restarse tal cual. Así, cuando un [número] rojo se empareja con uno negro, el resultado es un negro; y si un [número] negro se empareja con uno rojo, el resultado es un rojo. (Lizcano, 1993, p. 93)

4) Cuando de un número se dice que es *fu*[31], eso no significa que necesariamente sea un déficit. Del mismo modo, un número *zheng* no implica necesariamente la existencia de una ganancia. Por lo tanto, aun cuando tengamos numerales rojos y negros en cada columna, un cambio en sus colores, resultado de las operaciones, no comprometerá el cálculo. (Lay-Yong y Tian-Se, 1987, p. 239)

II.5.3. Presentación del saber y estatuto del álgebra

En *Los nueve capítulos* se hace también una presentación funcional del saber y, por consiguiente, las técnicas se explican y justifican por medio de su uso. De hecho, en un principio, la obra es, simplemente,

> una colección de 246 secuencias tripartitas compuestas siempre por: el **enunciado** de un problema, la **respuesta numérica**, la **regla** que permite calcular la solución a partir de los datos, todo según un plan invariable y sin definiciones ni explicaciones lógicas. (Martzloff, 1987, p. 120)

Posteriormente, diversos comentaristas, Liu Hui entre ellos, van añadiendo algún prefacio y comentarios a los distintos capítulos, explicando en ellos algunas de las reglas que utilizan. Sin embargo, estos comentarios no tienen por objeto justificar las técnicas, pretensión totalmente extraña a la matemática china, sino hacerlas más inteligibles para el estudiante; es

[30] Esto quiere decir que se enfrenta a un lugar vacío.

[31] Tanto en este párrafo como en el 2), hemos preferido mantener los nombres chinos *'zheng'* y *'fu'*, como hace Lizcano, en lugar de traducirlos por los términos 'positivo' y 'negativo', como hacen Lay-Yong, Tian-Se y Martzloff, pues creemos que esto último puede introducir en el texto connotaciones modernas que no existían en la matemática china.

decir, la intención que los guía es de orden didáctico, no de orden lógico; se trata de persuadir al lector, de convencerlo, no de elaborar una teoría (Martzloff, 1987, p. 68).

Las referencias a la negatividad se encuentran en el capítulo octavo de *Los nueve capítulos*. En él se enuncian dieciocho problemas aritméticos que se resuelven por medio de lo que hoy llamaríamos sistemas de ecuaciones lineales. El álgebra es aquí, al igual que en Diofanto, una técnica de resolución al servicio de la aritmética, pero no de una aritmética abstracta, una teoría de números, sino de una aritmética contextualizada, lo que hoy llamaríamos una 'aritmética elemental'.

II.5.4. Campo de problemas

Lo constituyen problemas aritméticos contextualizados, es decir, problemas en los que los datos y las soluciones son números acompañados de una unidad de medida. Actualmente todos ellos pueden modelizarse mediante sistemas de ecuaciones lineales. Aparecen ocho sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas, seis de 3×3, dos de 4×4, uno de 5×5 y uno de 5×6. Todos los sistemas tienen el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y son compatibles y determinados, salvo el del problema trece que es un sistema indeterminado de cinco ecuaciones con seis incógnitas, aunque el texto se limita a encontrar una única solución.

Tanto los datos como las soluciones de los problemas son números naturales o racionales sin determinación, pero, a diferencia de lo que sucede en la *Arithmetica* de Diofanto, se trata de números contextualizados, es decir, de números que representan la medida de una cierta cantidad de magnitud que el enunciado del problema hace explícita.

Sin embargo, del hecho de que los datos de los problemas sean números contextualizados, no se puede deducir que nos encontremos ante problemas verdaderamente "reales". Basta con leer los enunciados de los mismos para darse cuenta de que el objetivo del capítulo no es el de hacer frente a determinadas exigencias del mundo físico o social, más o menos problemáticas, sino el de enseñar la técnica matemática de resolución de lo que hoy se considerarían sistemas de ecuaciones lineales. Los enunciados cumplen aquí la misma función que los de la *Arithmetica* de Diofanto: la de enseñar determinadas técnicas matemáticas, pero la aparente inexistencia de un concepto abstracto de número en la matemática china obliga al autor de *Los nueve capítulos* a expresarse en términos concretos, allí donde Diofanto se expresa en términos abstractos.

II.5.5. Conjuntos numéricos

En realidad, no está nada claro que la cultura china de la época llegara a poseer un concepto abstracto de número, cosa que sí sucede en el mundo griego. Cuando el matemático chino coloca en el tablero de cálculo dos palillos que indican, por ejemplo, dos vacas, cada palillo es la representación simbólica de cada una de las vacas, es decir, los palillos constituyen una colección de referencia que sirve para representar otras colecciones de objetos, pero no hay indicios claros de que esas combinaciones de palillos simbolicen números abstractos. Esto se ve confirmado por el tipo de órdenes que se dan a la hora de disponer los números en el tablero. En el texto A se dice, por ejemplo:

> poner 3 manojos de cereal de calidad superior en la columna de la derecha,

en vez de hablar de "poner el número 3". Estamos, por tanto, en el ámbito de los números que sirven para contar, representados mediante palillos.

La matemática china maneja también las "fracciones". Su significado principal es el de representar la relación entre "la parte" y "el todo" cuando este último se divide en partes iguales, pero también se obtienen como resultado de medir una cantidad de magnitud con una parte alícuota de la unidad, como resultado de una división no exacta de números naturales, e incluso, como razón entre números naturales, aunque este último significado no es el más frecuente.

En cuanto a la existencia del cero, desde luego los problemas chinos nunca tienen soluciones nulas y no existe un cero sometido a las mismas operaciones que los demás números. Tampoco se puede decir que la matemática china haya conocido un cero posicional que indique la ausencia de determinados órdenes de unidades en la escritura del número, pues hasta el siglo XVII no aparece ninguna grafía susceptible de de ser interpretada como tal (Martzloff, 1988, p.189).

II.5.6. Técnicas de resolución

Todos los problemas del capítulo octavo se resuelven por medio de una misma técnica que recibe el nombre de *'fang cheng shu'*, que Martzloff (1988, p. 233) traduce por 'método de repartos cuadráticos'[32]. Se trata de una técnica muy particular y cuasi-algorítmica, a diferencia de lo que ocurre en la *Arithmetica* de Diofanto.

[32] Según Lizcano (1993, p. 67), 'método que consiste en repartir los números de modo que formen un cuadrado'.

La técnica *'fang cheng'* se articula en torno a la manipulación de grupos de palillos que representan los datos del problema. Cada uno de estos grupos se coloca sobre una superficie plana horizontal, el tablero de cálculo, según una configuración espacial similar a la de los cuadrados mágicos[33]. Una vez dispuestos los números sobre el tablero, el algebrista chino procede a efectuar dos tipos de manipulaciones: la llamada *'biang cheng'* ('multiplicación por todas partes') y las llamadas *'zi chu'* ('sustracciones directas').

La primera consiste en multiplicar una columna por un número, es decir, doblar, triplicar, etc., los palillos existentes en cada uno de los lugares de la columna. Así vemos como en el paso 2 del texto A, la columna central se multiplica por 2 y en los pasos 4 y 5 la primera columna se multiplica por 3 y por 5, respectivamente. La segunda consiste en restar (o sumar) reiteradamente los lugares de una columna a los de otra. Por ejemplo, en el paso 2 del texto A, a la columna central, previamente multiplicada por 2, se le resta dos veces la columna de la derecha; en el paso 3, a la columna de la izquierda multiplicada por 3 se le resta una vez la columna central; y, en el paso 4, a la columna de la izquierda, multiplicada por 5, se le resta cuatro veces la columna central[34].

El objetivo de cada una de estas manipulaciones es eliminar los palillos de alguno de los lugares superiores del tablero de cálculo, produciendo un hueco, un lugar vacío (*'wu'*). Aparece así un instrumento de cálculo equivalente al de las actuales matrices, y la técnica de uso del mismo, consistente en vaciar ciertos lugares del tablero, podría equipararse, desde el punto de vista actual, con el método de Gauss de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

El método prosigue hasta conseguir el equivalente a una matriz triangular, momento en el cual, en la columna de la izquierda, queda un coeficiente y el término independiente, lo que por medio de una división permite

[33] Desde un punto de vista moderno, los grupos de palillos indican los coeficientes y términos independientes del sistema de ecuaciones. En la primera columna por la derecha se colocan los palillos correspondientes a los coeficientes de la primera ecuación con el término independiente en la posición inferior y en las siguientes columnas los coeficientes y términos independientes del resto de las ecuaciones.

[34] Liu Hui ideó una manera de acortar el proceso de sustracciones repetidas, proponiendo en algunos problemas que, en vez de restar n veces una columna a otra, se restase dicha columna multiplicada por n. Al parecer, esta sustitución de las restas sucesivas por una única resta no fue adoptada de manera general hasta unos mil años después.

obtener una de las incógnitas. A partir de ahí, realizando cálculos similares a los que se muestran en los pasos 6 a 9 del texto A, se obtiene el valor de las demás incógnitas. Estos cálculos finales exigen efectuar multiplicaciones y divisiones entre los números que aparecen en el tablero de cálculo, una vez terminada la fase de "producir vacíos". Si suponemos que el cuadro de números resultante es:

$$\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & \cdots & 0 & a_{11} \\
0 & 0 & \cdots & a_{22} & a_{12} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n-1,n-1} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{1,n-1} \\
a_{nn} & a_{n-1,n} & \cdots & a_{2n} & a_{1n} \\
b_n & b_{n-1} & \cdots & b_2 & b_1
\end{array}$$

las operaciones que se realizan vendrían dadas, en notación actual, por la fórmula:

$$x_i = \frac{b_i - x_{i+1}a_{i,i+1} - \ldots - x_n a_{in}}{a_{ii}}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

Como podemos ver, nos encontramos, al igual que en la obra de Diofanto, ante un campo de problemas aritméticos que se resuelven por medio de técnicas algebraicas, aunque la naturaleza de las manipulaciones algebraicas es diferente: aquí, el cálculo simbólico se sustituye por la manipulación manual de unos objetos físicos, los palillos. Por eso, Lizcano le da el nombre de 'álgebra instrumental', distinguiéndola del álgebra retórica, sincopada o simbólica propias de la cultura occidental.

II.5.7. Notación utilizada

Como acabamos de comentar no estamos ante un álgebra escrita, sino ante un álgebra instrumental cuyos elementos son el tablero de cálculo dividido en casillas, y palillos de dos colores, rojo y negro, o de dos formas, sección triangular o cuadrada, que indicaban los números con una u otra determinación. Se podía cambiar la determinación de los palillos colocando un palillo inclinado sobre ellos. En la notación china tenemos signos para indicar las dos determinaciones: la positiva y la negativa, allí donde Diofanto sólo utiliza un signo para indicar la determinación negativa.

El sistema de numeración mediante palillos es también, al igual que el sistema de numeración griego, un sistema aditivo de base diez con cinco como base auxiliar. Existen dos series de palillos: en la primera serie, los números del 1 al 5 se representan mediante el correspondiente número de palillos verticales y los del 6 al 9, mediante un palillo horizontal que simboliza el 5 y los palillos verticales que completan el número representado. En la segunda serie, las decenas se representan mediante palillos horizontales, introduciéndose, a partir de 60 un palillo vertical que representa 50, completado con palillos horizontales. La primera serie sirve también para indicar las centenas, diezmillares, millones, etc, mientras que la segunda serie se utiliza para indicar las decenas, millares, cienmillares, etc. del número representado.

II.5.8. Descripción y justificación de las técnicas

Ya se ha dicho en apartados anteriores que *Los nueve capítulos* era inicialmente una colección de problemas en las que las técnicas se desarrollaban a medida que se resolvían los problemas. Posteriormente, Liu Hui y otros comentaristas añadieron comentarios y explicaciones al texto original. En lo que se refiere al capítulo octavo, se explicitan las reglas que permiten sumar o restar palillos del mismo o diferente color y enfrentarse a los lugares vacíos, pero sin dar ninguna justificación de dichas técnicas.

II.5.9. La negatividad en las técnicas de resolución

La técnica *fang cheng* no trabaja con operaciones indicadas: todas las operaciones que se plantean son inmediatamente efectuables, son operaciones entre números (o, al menos, entre palillos). El álgebra instrumental china permite prolongar el cálculo aritmético allí donde el álgebra retórica o sincopada griega obliga a desarrollar un cálculo con expresiones literales. Sin embargo, aunque no se manifiesta una negatividad asociada a los cálculos con diferencias, como sucede en Diofanto, la técnica de resolución exige añadir a los números que se manipulan una determinación con dos valores que hay que tener en cuenta a la hora de hacer las operaciones[35]. Así pues, cada uno de los números que interviene en el enunciado de un problema se adjetiva con las palabras *zheng* o *fu* y en función de esa denominación se representa mediante palillos rojos o negros, respectivamente.

No están claros los criterios por los cuales se decidía si un número debía ser *zheng* o *fu*. Algunos historiadores consideran que esta decisión estaba ligada al contexto de ganancias-pérdidas. El texto B es un ejemplo

[35] Determinación que corresponde a nuestra actual distinción entre coeficientes (o términos independientes) positivos o negativos.

que apoya esta teoría por cuanto en él las cantidades consideradas *zheng* son las que hacen referencias a ventas y ganancias, mientras que las *fu* son las que se refieren a compras y pérdidas. Sin embargo, Lizcano no está de acuerdo con esta teoría y, poniendo como ejemplo el texto C, dice:

> El que aquí se considere el cereal de una u otra calidad como *zheng* o como *fu* no se atiene, desde luego, a ningún criterio de ganancia/pérdida, que para nada aparecen en el problema, sino que parece obedecer a un criterio puramente formal y arbitrario en términos de mera oposición. Lo que ahora hay en juego son diferentes calidades de un producto, y esas calidades se dan en pensar como opuestas, según su relación con el *shi*, para poderlas asimilar a la oposición formal *zheng/fu*. Nada cambia, de hecho, al invertir esas asociaciones en la columna siguiente, donde se toma *superior* como *fu* e *inferior* como *zheng*. Lo significativo es la tendencia en el pensamiento chino a pensar en términos de oposiciones, en este caso la oposición calidad superior/calidad inferior. (Lizcano, 1993, p. 97)

En efecto, aquí el criterio que se sigue para decidir qué números son *zheng* o *fu* está basado en la relación de igualdad. En la primera condición del enunciado el *shi* y los manojos de calidad superior se oponen a -es decir, tienen la misma cantidad de grano que- los de calidad inferior, mientras que en la segunda condición son el *shi* y los manojos de calidad inferior los que se oponen a los de calidad superior. Vemos además cómo se cambia el color de los palillos que representan manojos de calidad superior e inferior al pasar de una a otra condición, sin que eso parezca crear ningún problema. Esto es un indicio de que las denominaciones *zheng* o *fu* no dependían de la función particular que cada número tenía asignada en el problema, sino de las relaciones que las condiciones del enunciado establecían entre ellos.

Una vez colocadas las cantidades *zheng/fu* en el tablero, la técnica *fang cheng* conlleva, como ya hemos visto, la realización de dos tipos de operaciones con el objetivo de vaciar lugares del tablero. La operación *biang cheng* supone la multiplicación de una columna por un número, respetando en cada lugar el color de palillos ya existente[36]. La operación *zi chu*, exige sumar o restar[37] números *zheng/fu* y la forma de hacerlo consiste en añadir a una primera posición tantos palillos como existan en la posición que se quiere sumar (o restar) a la primera. Además, los palillos añadidos deben tener el mismo color que los que se encuentran en la segunda posición.

[36] En algunos casos, aunque más bien pocos, se procede a simplificar alguna columna dividiendo todos sus términos por un mismo número, lo que nos da un ejemplo de división de números *zheng/fu* por un número sin determinación.

[37] La decisión sobre si a una columna se le resta o se le suma otra dependerá de si los dos lugares que se operan para producir un hueco tienen palillos del mismo color o de distinto color.

A continuación, en el caso de la suma, si los palillos colocados en la primera posición son todos del mismo color, indican el resultado de la operación; si son de distinto color, se eliminan todas las parejas de palillos de distinto color que se puedan formar y los palillos restantes son el resultado de la operación. En cambio, en el caso de la resta, si los palillos son del mismo color, se eliminan parejas de palillos de una y otra posición y los palillos restantes, si son originarios de la primera posición mantienen su color y si proceden de la segunda posición lo cambian; si los palillos son de distinto color adquieren todos el color originario de la posición en que se encuentran.

Por otro lado, en la técnica *fang cheng* no sólo se suman o restan los números *zheng/fu*, también se plantea la necesidad de operar un lugar vacío con otro ocupado por palillos, como se observa en el texto B, donde, al multiplicar la columna central por 2 y restarle dos veces la columna de la derecha, hay que efectuar la resta entre un lugar vacío y otro que está ocupado por el número 1000. Sumar (o restar) a una posición vacía otra que contiene un número significa colocar en la posición vacía tantos palillos, del mismo (o distinto) color, como tenga la otra posición.

Una vez que se ha triangulado el cuadro de números situado sobre el tablero de cálculo, se procede a determinar las incógnitas mediante las operaciones que indica la fórmula (1). Este dispositivo incluye productos y cocientes, por lo que surge la pregunta de si esas operaciones se hacen con números entendidos como números *zheng/fu* o como números sin determinación. La respuesta no es evidente. En principio, parece que llegado el momento de efectuar la división de b_n entre a_{nn} para encontrar el valor de x_n, los números pierden su determinación *zheng* o *fu* y vuelven a ser, simplemente, números naturales. Por consiguiente, todos los productos del tipo $x_j a_{ij}$ pueden interpretarse como productos entre un número *zheng/fu* y un número natural, lo que dará como resultado un número *zheng/fu*. Esta determinación habrá que tenerla en cuenta para calcular el numerador de cualquier x_i. De nuevo nos encontramos con un cociente de números *zheng/fu* que suponemos pierden su determinación para convertirse, simplemente, en el *shi* (dividendo) y el *fa* (divisor) de una división entre números naturales.

Lo que sí está claro es que los números que aparecen al final como solución de los problemas ya no son ni *zheng* ni *fu*. La realidad es que la oposición *zheng/fu* se establece únicamente con el objeto de poner en marcha una técnica de resolución. Aquí, lo mismo que en Diofanto, la negatividad aparece como un objeto intermedio en el transcurso del cálculo, nunca como solución de un problema, pero, al menos, en ese momento del cálculo, "lo negativo" tiene sentido como número contextualizado, es decir, como número que representa la medida de una cierta cantidad de magnitud. Los números concretos adquieren una determinación añadida *zheng* o *fu* sin perder su condición de números. Y cuando se obtiene la solución, ésta no sólo no puede ser *fu*, sino que tampoco puede ser *zheng*, es decir, no existe una identificación entre los números sin determinación y los números *zheng*, cosa que si sucede con Diofanto, entre los números naturales o las razones de naturales y las 'presencias'.

Queda por comentar un último aspecto y es el de las condiciones de existencia de soluciones. En los problemas planteados en *Los nueve capítulos* no se da, como en la *Arithmetica*, la posibilidad de discutir sobre las condiciones que permiten soluciones positivas: al ser los datos de los enunciados números dados y no parámetros, como sucede en la obra griega, tienen que permitir siempre obtener soluciones positivas. De manera que no existe en la obra china nada parecido a los *diorismos* griegos, ni tampoco problemas que no tengan solución positiva. Sin embargo, es probable que el matemático chino tuviera que familiarizarse con situaciones en las que la solución positiva era imposible. ¿Cómo reconocer esas situaciones? Seguramente sabían que, una vez llegados a la matriz triangular, al efectuar las divisiones entre los distintos *shi* y *fa* presentes, si se encontraban con palillos de distintos colores el problema era imposible y si los palillos eran del mismo color la división entre ellos proporcionaba una solución correcta. De hecho, los textos B y C proporcionan ejemplos de divisiones entre números cuando los dos son *zheng* o cuando los dos son *fu*.

II.5.10. Conocimientos sobre la negatividad

Las técnicas que acabamos de describir nos hacen suponer que Liu Hui asume que en el proceso de resolución de un problema una magnitud puede tener dos sentidos, de tal manera que enfrentando dos cantidades de la misma magnitud pero de sentidos opuestos, éstas se reducen o neutralizan. Esto le permite interpretar los datos de los problemas -que representan medidas de cantidades de magnitud- como opuestos unos a otros y esta oposición se indica con los términos *'zheng'* y *'fu'*. No parece que se privilegie un sentido frente al otro, lo importante es que son opuestos. De hecho, la denominación *zheng* no es específica de uno de los sentidos, sino que se aplica indistintamente a uno de los dos e, inmediatamente, el sentido opuesto queda calificado como *fu*.

Además, la oposición *zheng/fu* sólo existe en el momento del cálculo: en un principio, los datos de los problemas no son *zheng* ni *fu* y las soluciones, una vez obtenidas, pierden también su determinación. Tampoco parece existir una identificación entre números *zheng* y números sin determinación; los segundos, en tanto que datos de un problema, pueden por necesidades de cálculo transformarse indistintamente en *zheng* o *fu*; y cuando se llega a las soluciones, éstas se obtienen, finalmente, por medio de una división entre dos números *zheng* o dos números *fu* en la que el cociente deja de tener una determinación.

Por otro lado, la técnica *fang cheng* exige el conocimiento de algunas operaciones entre números *zheng/fu*: la suma, la resta, el producto por un número sin determinación y el cociente entre dos números con la misma determinación. Estas operaciones, salvo el cociente, se extienden a los lugares vacíos, *wu*, que intervienen jugando un papel equivalente al de nuestro cero. Sin embargo, la posibilidad de efectuar las operaciones a medida que se plantean hace innecesario el conocimiento de la estructura algebraica del complejo *zheng/fu/wu*, basta conocer la forma en que éstas deben realizarse. Tampoco se necesita establecer un orden entre números *zheng/fu*, ni un producto o cociente interno[38], aunque es necesario saber que, una vez llegados a la parte final del método, los problemas tienen solución sólo si los números que hay que dividir entre sí tienen la misma determinación.

II.5.11. Saberes sobre la negatividad

En el texto D se recogen fragmentos de las explicaciones de Liu Hui sobre la técnica *fang cheng*. En el primer párrafo se aclara que los nombres *zheng* y *fu* se utilizan para designar "resultados opuestos" y que cada uno de ellos recibe una marca: palillos rojos en el primer caso, negros en el segundo. También se dice que un número puede cambiar de nombre y que existe un método para sumar y restar[39] estos números que

> no es del todo el mismo que el procedimiento normal de adición y sustracción.

Esta operación de restar o sumar columnas exige, por tanto, el establecimiento de unas reglas, las *zheng fu shu* (párrafo 2) del texto D, que

---

[38] Las reglas del producto de números *zheng fu* se enuncian por primera vez en la *Introducción a la ciencia del cálculo (Suan xue qi meng)* -libro aparecido en 1299, alrededor de mil años después de *Los nueve capítulos*- a propósito del cálculo de raíces de polinomios por métodos numéricos, y no se da ninguna justificación de las mismas.

[39] Respecto a la operación de 'multiplicar por todas partes' (*'bian cheng'*) no se hace ningún comentario: es de suponer que la sencillez del proceso hacía innecesario dar más explicaciones.

son las que actualmente se equiparan con nuestras reglas de suma y resta de números positivos y negativos. En el análisis de dichas reglas, lo primero que salta a la vista es su presentación en términos de "reducciones", "acrecentamientos" y "enfrentamientos". En la regla de adición los palillos del mismo nombre "se acrecientan mutuamente" y los de nombre diferente "se reducen mutuamente"; en la regla de sustracción sucede lo contrario. Esta forma de enunciar las reglas vuelve a incidir en la visión ya comentada de los números de distinto nombre como medidas de cantidades de magnitud opuestas, incluso como fuerzas opuestas que al juntarse se aniquilan o neutralizan, mientras que las del mismo nombre se refuerzan la una a la otra. También pone de manifiesto que la suma y la resta son operaciones inversas.

Por otra parte, la definición de las operaciones de suma y resta se hace extensiva a los lugares vacíos, como muestran los apartados c) y d), lo que legitima su papel como términos de las operaciones de suma y resta. Además, estos lugares vacíos juegan un papel de gozne alrededor del cual pivotan los números "que se les enfrentan", transformándose en sus opuestos (en el caso de la resta) o manteniendo su determinación (en el caso de la suma).

La combinación de los cuatro enunciados de cada una de las reglas permite operar con fluidez, aunque con alguna ambigüedad en el caso de la resta. La regla de sustracción que se refiere a la reducción de palillos del mismo color no aclara de qué color deben ser los palillos resultantes, aunque se puede interpretar que, una vez hecha la reducción, si los palillos sobrantes provienen de la posición que hace el papel de sustraendo, estamos en el caso de un número que no tiene a qué enfrentarse, lo que ya está regulado por las reglas c) y d). Donde la ambigüedad es mayor es en el caso de un acrecentamiento mutuo entre palillos de distintos colores. Ahí, realmente, no se sabe de qué color tienen que ser los palillos resultantes. Quizá por eso, en otro momento (ver párrafo 3) del texto D, Liu Hui aclara que, en ese caso,

> cuando un rojo se empareja con un negro, el resultado es un negro; y si un negro se empareja con un rojo, el resultado es un rojo.

Otro aspecto que llama la atención en el enunciado de las reglas *zheng fu* es el tratamiento igualitario que reciben las dos determinaciones de números. Cuando Diofanto enuncia su regla de los signos, la enuncia para las 'faltas', no para las 'presencias'. Liu Hui, en cambio, expone las reglas de suma y resta de números *zheng/fu* con absoluta simetría. Esta particularidad se hace extensiva a las notaciones: mientras Diofanto utiliza una marca sólo para indicar “lo negativo” -“lo positivo” no está marcado, es “lo natural”-, aquí los dos sentidos reciben la misma consideración, los dos están marcados y no parece existir uno con un estatuto de privilegio sobre el otro.

Por último, la lectura del cuarto párrafo del texto D nos muestra que no existe la obligación de representar una deuda con un número *fu* y una ganancia con un *zheng*. El hecho de que los palillos situados en una casilla pueden, en el transcurso de los cálculos, cambiar de color, lleva a la matemática china a evitar posturas esencialistas en la adjudicación de los nombres *zheng/fu*. Son nombres que indican oposición entre cantidades, pero tanto uno como otro de los dos sentidos de una magnitud puede calificarse con cualquiera de dichos nombres.

II.5.12. Relaciones entre conocimiento y saber

No parece haber mucha distancia entre el conocimiento sobre la negatividad que se deduce de las técnicas de resolución y el saber expresado en el discurso que las describe. La concepción que se trasluce en Liu Hui es muy diferente de la de Diofanto. Este último no puede “hablar” de las diferencias negativas, ni de sustraendos que no vayan precedidos de un minuendo mayor. Sin embargo, en *Los nueve capítulos* se establece explícitamente que los números, entendidos como números concretos, es decir, como números que representan medidas de cantidades de magnitud, pueden ser *zheng* o *fu*. Aquí la medida no parece ser un impedimento para que se acepte en determinados momentos la existencia de cantidades con dos sentidos.

Según Lizcano (1993, pp. 123-28), las razones últimas que explican la diferente percepción de la negatividad en las culturas griega y china son los distintos elementos primarios alrededor de los cuales se estructura el modo de pensar de cada sociedad. Mientras los griegos organizan su episteme alrededor de la oposición “ser-no ser” que obliga a los números y a las cantidades de magnitud que miden a “ser”, es decir, a situarse en el lado positivo de la realidad, los chinos estructuran la suya en torno a una oposición de contrarios que se neutralizan: el *yin-yang*, complejo simbólico que representa los “dos aspectos o lados de lo mismo”. Así pues, el modo de pensar chino está impregnado de estas oposiciones que muestran los dos lados de una misma realidad articulados alrededor de un gozne: el *dao*. Dicho de otra manera, frente a la determinación positiva, “lo que es” no colocan como la lógica griega “lo que no es”, lo “indeterminado”, sino “lo que es de otro modo”, de un modo que puede neutralizar, oponerse a “lo que es”.

Además, esta oposición es dinámica, los opuestos se pueden interpretar como fuerzas, principios, que se contrarrestan y, en su constante actuar, configuran la realidad, mientras que la cultura griega clásica tiene una concepción estática del mundo: para ella lo natural es el reposo y es necesario la aplicación de una fuerza, la realización de una acción, para conseguir un movimiento, una variación en el estado de un objeto. Mientras para la cultura china lo "normal" es el movimiento e incorpora estas connotaciones dinámicas a las magnitudes y a los números que las miden, para los griegos lo "normal" es el reposo y las magnitudes que manejan son magnitudes estáticas que se miden sobre objetos inmóviles.

Otro aspecto que al decir de Lizcano (1993, pp. 137-40) influye también en la concepción de la negatividad que desarrollan los matemáticos chinos es el distinto papel que en la episteme china juega el vacío, la nada. A diferencia del mundo griego que siente "horror al vacío", la sociedad china lo integra a través del *dao* en la pareja *yin yang* que se encuentra en el centro de sus formas de pensar e impregna todos sus saberes. En efecto, el término *'dao'* suele traducirse por 'vacío', 'oquedad', 'ausencia', etc., pero su papel es el de un eje, quicio o gozne, alrededor del cual se organiza la oposición esencial *yin yang*.

De manera que el *dao*, el vacío, actua como un factor de equilibrio entre dos extremos: es, por una parte, el origen a partir del cual se construyen los sentidos opuestos de la realidad y, por otra, el mediador entre ellos, el que los relaciona, llegando, incluso, a cambiar su determinación. En cambio en Grecia este papel de mediador lo hace más bien el término medio de las proporciones respecto a los extremos. Las formas de pensar chinas parecen fomentar la expresión de las relaciones entre cantidades de magnitud en términos de interacciones dinámicas de opuestos que se contrarrestan allí donde la cultura griega las establece en términos de proporciones geométricas.

Este diferente modo de pensar facilita en la cultura china la interpretación de las cantidades de magnitud y los números que las miden en tanto que cantidades o números "con uno u otro sentido". Como consecuencia, el hecho de que dos cantidades de magnitud se opongan conllevará que a los números que las midan se les incorpore un signo que indique esta oposición y eso pueda ser asumido sin problemas en un contexto de medida.

Sin embargo, y a pesar de las facilidades que ofrece el modo de pensar chino, esto sólo sucede en momentos muy concretos. Los números, tanto en los enunciados como en las soluciones de los problemas de *Los nueve capítulos*, son números sin otras determinaciones que las habituales en el ámbito de los números concretos: unidad de medida, magnitud que se mide, objeto sobre el que se mide la cantidad de magnitud, etc. Es sólo en el momento del cálculo cuando se da en pensar unas de las cantidades como opuestas a otras y reciben sendas marcas que indican esta oposición, marcas que al finalizar los cálculos desaparecen.

Tampoco se identifican, expresamente, los números *zheng* con los números sin determinación. En realidad, los números *zheng/fu* quedan definidos por medio de sus reglas de cálculo, reglas que se establecen sin intentar en ningún momento su justificación o reducción a las de los números sin determinación.

Lo mismo sucede con las divisiones que deben efectuarse para finalizar la técnica de resolución. Es curioso que Liu Hui explique las reglas de adición y sustracción y de producto externo de los números *zheng/fu*, pero en ningún momento se refiere a las divisiones finales. Puede interpretarse que no es necesario hablar de división entre números *zheng/fu* porque se puede entender que en el momento de efectuarlas los números han perdido su determinación, pero, evidentemente, el autor del texto tiene que conocer que para que esas divisiones den lugar a una solución válida, los dos números tienen que tener la misma determinación y, sin embargo, no hace ningún comentario al respecto, ni siquiera para establecer las condiciones en las que el problema tiene solución. Todo esto parece indicar que en la episteme china de la época existen dificultades para asumir la estructura multiplicativa de los números *zheng/fu*.

II.5.13. Límites de la concepción

Se trata de una concepción con un campo de problemas y un método de resolución muy restringidos. Mientras ese campo de problemas no se amplíe no aparecerán más dificultades que las que produzcan la indeterminación o incompatibilidad de los sistemas de ecuaciones lineales asociados a los problemas o la existencia de soluciones negativas. En particular, este último caso pone de manifiesto el sin sentido que supone la división de números con distinta determinación, pues los cocientes así obtenidos no pueden interpretarse como soluciones de los problemas y su aparición es un indicio de que el problema es absurdo.

No es esta la única dificultad que encontramos en esta concepción para definir un producto interno. La realidad es que, a diferencia de lo que sucede en la concepción de Diofanto, donde puede justificarse con cierta facilidad un producto de estas características a partir del cálculo algebraico con las diferencias, aquí la justificación no es fácil de hacer. De hecho, la noción matemática actual más cercana a este planteamiento de magnitudes o cantidades con dos sentidos que se neutralizan o refuerzan aditivamente, sería la de los vectores unidimensionales sobre un conjunto de escalares formado por los números racionales positivos, y esa estructura no admite un producto interno entre vectores.

También surgen problemas al afrontar el tema del orden. En esta concepción no existe ninguna referencia a un orden entre números *zheng fu*, pero si se quiere ampliarla definiendo un orden en dichos números, se hace evidente que tanto las cantidades *zheng* como las *fu* crecen a partir de un cero origen, pero cada una de ellas lo hace en un sentido diferente, lo que define dos órdenes opuestos. Si, además, se intentan relacionar cantidades *zheng* con cantidades *fu*, el orden más inmediato viene dado por el hecho de que una cantidad es mayor que otra de sentido contrario si puede con ella al reducirse mutuamente, es decir, si es mayor que la otra en valor absoluto. Todo esto define un orden distinto del orden numérico habitual, orden, este último, al que difícilmente se llegará a través de esta concepción.

Por último, la introducción de la determinación *zheng/fu* en los números establece una distinción entre números con determinación y números sin ella. Esto hace difícil la identificación entre uno de los lados de la determinación y la "no determinación". No se trata, por tanto, de una extensión de los números naturales, como podría interpretarse en la concepción de Diofanto, sino más bien de un nuevo conjunto de objetos matemáticos, que no puede reducirse en ninguna de sus partes al conjunto de los números ya conocidos.

II.6. Concepción de Chuquet

II.6.1. Obra matemática de referencia

El *Triparty en la science des nombres* de Nicolás Chuquet aparece en Francia, más exactamente en Lyon, el año 1484. De esta obra, escrita en el francés de la época, se conserva un manuscrito numerado como *Fonds Français nº 1346* en la Biblioteca Nacional de París. Nosotros utilizamos la transcripción del manuscrito hecha por Aristide Marre en 1881.

Se compone, como su título indica, de tres partes: en la primera se exponen las reglas de cálculo con números naturales y fracciones de naturales, algunos aspectos concernientes a las progresiones y a la divisibilidad de números naturales y, por último, proporciones, reglas de tres y de repartos proporcionales y métodos de falsa posición con sus aplicaciones a la resolución de problemas aritméticos. En la segunda parte, se desarrollan las reglas de cálculo con expresiones numéricas que contienen radicales y la extracción de raíces de distintos índices. En la tercera, se estudian los monomios, las ecuaciones de primer o segundo grado o reducibles a ellas y los problemas aritméticos que se resuelven por medio de dichas ecuaciones. Estamos, por consiguiente, ante un tratado de aritmética y álgebra.

II.6.2. Textos de referencia

Texto A: problemas y comentarios de la primera parte del *Triparty* (Marre, 1881, pp. 89-90, 98-99)

> a) Plus Je veulx trouuer .5. nombres telz que le p'mier auec la $\frac{1}{2}$. des aultres quatre face .40. Et le second auec les $\frac{2}{3}$. des aultres monte .40. Le tiers auec les .$\frac{3}{4}$. des ault's facent tousiours .40. Le quart auec les $\frac{4}{5}$. des ault's face .40. Et le quint auec les $\frac{5}{6}$. des ault's facent tousiours .40. Et pour les trouuer Je pose .60. sus lesquelz Je treuue .5. nombres dont la $\frac{1}{2}$. de lung est .60. Le tiers de laultre est .60. le .$\frac{1}{4}$. du tiers Le .$\frac{1}{5}$. du quart et le $\frac{1}{6}$. du cinq^{e} nombres sont tousiours .60. pour lesquelz trouuer Je partiz .60. par $\frac{1}{2}$. par $\frac{1}{3}$. par $\frac{1}{4}$. par $\frac{1}{5}$. et par $\frac{1}{6}$. et ainsi Je treuue .120. .180. .240. .300. et .360. qui tous ensemble font .1200. que Je partiz par .4. qui sont .1. moins de cinq nombre et Je treuue .300. desquelz Je soustraiz la posicion qui est .60. et me restent .240. En apres de .300. Je lyeue .120. et me restent .180. pour le p'mier des cinq nombres. Puis de .300. Je oste .180. et restent .120. pour le second En apres de .300. Je lyeue .240. et reste .60. pour le tiers nombre Encores de .300. Je soustraiz .300. et reste .0. pour le quart nombre Encores plus Je lyeue .360. de .300. et pour tant que lon ne peult fault faire par le contraire cestassauoir de .360. oster .300. et Reste moins .60. pour le quint nombre. Lesquelz cinq nōbres cestassauoir .180. .120. .60. .0. et moins 60. sont de telle condicion que le p'mier joinct auec la $\frac{1}{2}$. des aultres .4. fait .240. Le seconde auec les $\frac{2}{3}$. de tous les aultres fait aussi .240. Et les ault's semblemēt Joinctz auec les $\frac{3}{4}$. $\frac{4}{5}$. et $\frac{5}{6}$. des ault's font tousiours .240. Et Je ne vouloye que 40. Par quoy Je quiers ayde a la rigle de troys en disant Se .240. me donnent .180. au pm̃ier .120. au second .60. au tiers .0. au quart et moins .60. au cinq^{e} que donneront .40. Et Je treuue .30. .20. .10. .0. et moins .10. qui sont les cinq nombres que Je vouloye auoir.
>
> Pour les choses dessusdites entendre et esprouuer lon doit sauoir que qui adiouste ou soustrait .0. auec aulcun nombre laddicion ou soustraction ne augmente ne diminue Et qui adiouste vng moins auec vng aultre nombre ou qui dicellui le soustrayt laddition se diminue et la soustraction croist ainsi cōme qui adiouste .moins 4. auec .10. l'addition monte .6. Et qui de .10. en soustrait moins .4. Il reste .14. Et quant lon dit moins .4. cest comme si vne personne nauoit riens et quil deust encores .4. Et quant on dit .0. cest rien simplement.
>
> b) Et par ainsi lon aura deux posicions et deux plus ou deux moins. Ou vng plus et vng moins. Et ce fait lon doit multiplier le plus ou le moins de lune des posicions par laultre posicion et eϱ^{n} laultre posicion se doit multiplier par

le plus ou le moins de lune. et par ainsi lon aura quatre plus ou quatre moins. ou deux plus et deux moins. lesquelz quatre nombres conuient tracter ainsi que dit ceste rigle. Plus et plus. moins et moins. soustrayons plus et moins adioustons.

Plus de .15. Je veulx faire deux porcions dont lune multipliee par .9. laultre par .13. les deux multiplicacions ensemble facent .160. Et pour ce faire Je pose que lune dicellui soit 12. qui multipliee par 9. monte 108. Et par ainsi laultre sera .3. qui multipliee par 13. fait .39. Puis je adiouste 39. auec .108. et treuue 147. et Je vouloye 160. Par quoy Jay par .12. moins 13. pour la p̄miē posicion. En apres pour la seconde Je pose 10. pour lune des parties de .15. et par ainsi laultre sera .5. Ores qui multipliee .10. par .9. montent .90. et .5. par 13. montent .65. qui adioustez auec 90. font .155. Et Je vouloye 160. Par quoy Jay par le .10. moins .5. Maintenant Je lyeue .5. de 13. et me restent 8. pour partiteur. puis Je multiplie .10. par .13. montent .130. et 12. par .5. montent .60. que Je lyeue de .130. et me restent 70. lesquelz Je divise par .8. et men vient .8.$\frac{3}{4}$. pour lune de las parties de .15. Et par consequent .6.$\frac{1}{4}$. pour laultre.

Texto B: reglas y ejemplos de la segunda parte del *Triparty* (Marre, 1881, pp. 133-34, 137)

a) Le stile et la maniere de soustraire vng nombre simple ou compose[40] dung aultre nombre simple ou compose si es tel

Rigle. Pose le nombre de qui tu veulx soustraire tout ainsi quil est auec ses *plus* et ses *moins*. Puis ap̄s en tyrant a senestre pose le nombre que veulx soustraire en muant ses *plus* en *moins* et ses *moins* en *plus*. Et puis abreuie sil se peult abreuier. Mais pour vser de ceste rigle Il conuient premier sauoir le notable qui sensuyt.

Plus et plus moins et moins soustrayons. Plus et moins adioustons.

Ou aultrement. Qui de plus lyeue plus ou moins reste plus Si non que plus maieur se lyeue de plus mineur adonc reste moins. Et qui de moins oste moins ou plus reste moins Si non que moins maieur se lyeue de moins mineur adonc reste plus. Plus maieur est quand vng maieur nombre note de plus se doit soustraire dung nombre mineur note aussi de plus com̃e se plus .12. se vouloyent oster de plus .9. Il resteroit .$\tilde{m}$. 3. Et moins maieur sembl'ment comme se moins .12. se deuoient leuer de .$\tilde{m}$. 9. Il resteroit .$\bar{p}$. 3.

Tous ces notables Icy ne font aultre chose fors que muer les plus en moins et les moins en plus du nombre que lon veult soustraire sans varier ceulx du nombre de qui se fait la soustraction.

Qui de .12. oste .18. $\tilde{m}$. $\Re$.^{2} 12. Les nombres posez cōme deuant est dit Il treuue .12. $\tilde{m}$. 18. $\bar{p}$. $\Re$.^{2} 12. qui abreuiez sont .$\tilde{m}$. 6. $\bar{p}$. $\Re$.^{2} 12 Mais conuenablement le plus se doit preposer et mettre deuant le moins Et par ainsi[41] reste $\Re$.^{2} 12. $\tilde{m}$. 6.

[40] Por 'número simple' se entiende un número natural, fraccionario o irracional positivo expresado mediante un radical. Por 'número compuesto' un número representado por medio de sumas o restas de varios términos uno de los cuales puede ser un número natural o fraccionario, siendo los demás radicales.

[41] Con la notación actual, $12-(18-\sqrt{12}) = 12-18+\sqrt{12} = -6+\sqrt{12} = \sqrt{12}-6$.

Qui de $\Re.^2 44.$ $\tilde{m}.$ 2. vouldroit soustraire $\Re.^2 31.$ $\tilde{m}.$ 3. Les nombres posez par la maniē deuant dicte lon treuue de reste $\Re.^2 44.$ $\tilde{m}.$ 2. $\tilde{m}.$ $\Re.^2 31.$ $\bar{p}.$ 3. qui abreuiez sont $\Re.^2 44.$ $\tilde{m}.$ $\Re.^2 31.$ $\bar{p}.$ 1. ou lon peult premiēment poser $\Re.^2 44.$ $\tilde{m}.$ $\Re.^2 31.$ puis apres lon peult dire qui de $\tilde{m}.$ 2. lyeue $\tilde{m}.$ 3. reste[42] plus .1.

b) En outre pour multiplier les nombres composez Il est chose conuenable p̄mierement scauoir le notable enβ qui est tel.

Qui multiplie plus par plus et moins par moins Il en vient plus. Et qui multiplie plus par moins vel e$\varrho.^{a}$ *Il en vient tousiours moins.*

Qui vouldroit multiplier $\Re.^2$ 8. $\tilde{m}.$ $\Re.^2$ 3. par $\Re.^2$ 5. Il conuient pour le p̄mier multiplier $\Re.^2$ 8. par $\Re.^2$ 5. monte $\Re.^2$ 40. puis fault multiplier $\tilde{m}.$ $\Re.^2$ 3. par $\Re.^2$ 5. monte $\tilde{m}.$ $\Re.^2$ 15. Ainsi ceste multiplicacion[43] monte $\Re.^2$ 40. $\tilde{m}.$ $\Re.^2$ 15.

Texto C: reglas, ejemplos y comentarios de la tercera parte del *Triparty* (Marre, 1881, pp. 153, 156-57)

a) Encores Il aduient aulcunesfoiz que les denomīacions sont notees et entendues estre moins combien que leur nombre soit plus et aulcunesfoiz moins. Ainsi le nombre alafoiz sera plus et sa denomīacion plus comme $12.^1$ ou $12.^2$ ou $12.^3$ τc. combien que ce nombre ne soit point note de plus ne aussi sa denomīacion toutesfoiz Il est considere estre plus et sa denomīacion aussi. Aulcunesfoiz lung peult estre plus et laultre moins vel e$\varrho.^{\mathrm{a}}$ comme .12. premiers moins que lon peult ainsi noter $.12.^{1\cdot\tilde{m}\cdot}$ ou moins .12. premiers que lon peult ainsi noter $.\tilde{m}.$ $12.^1$ Et aulcunesfoiz lung et laultre est moins comme moins .12. secondz moins. que lon peult ainsi escripre $\tilde{m}.$ $12.^{2\cdot\tilde{m}\cdot}$ Et ainsi quil est dit de .12. ainsi doit on entendre de tous aultres nombres[44].

Et pour tant quil est dit cy dessus que vne chascune differance de nombre est tousiours consideree et contemplee estre plus ou moins et pour ce aussi que plus et moins presupposent quelque chose cōme quant lon dit plus .12. ou moins .12. Pour estre lnforme de cecy lon doit scauoir que moins et plus se ont lung enuers laul$\bar{\mathrm{t}}$ ainsi cōme priuacion et habit Ou cōme debte et auoir dont .0. est disposicion cōmune p̄cedente lung et laultre Cōme de moins .12. ρ. qui se peult ainsi mettre .0. moins 12. ρ. Cest a entendre que si vne personne auoit .0. $\tilde{m}.$ 12. ρ. Il nauroit riens si deuroit encores oultre et pardessus .12. ρ. Et sil auoit .0. $\bar{p}.$ 12. ρ Il auroit .12. ρ oultre et pardessus .0. Et ainsi fault entendre de tous aultres nombres[45].

b) Commant on peult partir vne differance de nombre par vne aultre a luy semblabe ou dissemblabe.

---

[42] Con la notación actual, $(\sqrt{44}-2)-(\sqrt{31}-3)=\sqrt{44}-\sqrt{31}+1$.

[43] Con la notación actual, $(\sqrt{8}-\sqrt{3})\sqrt{5}=\sqrt{40}-\sqrt{15}$.

[44] Chuquet llama 'diferencias' (*'differances'*) a los monomios y escribe a^n donde nosotros escribimos ax^n. El 'número' (*'nombre'*) es el coeficiente del monomio y la 'denominación' (*'denomīacion'*) el exponente. Además, a los monomios de primer grado les llama 'primeros' (*'premiers'*), a los de segundo grado 'segundos' (*'secondz'*), etc.

[45] Sesiano (1985) interpreta que el signo ρ indica 'libras', pero eso resulta un tanto extraño porque en todo el *Triparty* no aparece un solo número contextualizado, si bien es cierto que estamos en un contexto de justificación de los números con signo menos en términos de deudas, lo que podría explicar la referencia a dicha moneda.

Oultre fault scauoir que nombre se doit partir par nombre et denominacion se doit leuer de denomĩacion.

Qui veult aussi partir $.72.^1$ par $.8.^3$ Il conuient partir nombre par nombre. et puis leuer denomĩacion de denomĩacion et lon trouuera $.9.^{2.\tilde{m}.}$ Et sembleblement qui partyt $.72.^2$ par $.8.^5$ Il treuue ala part $.9.^{3.\tilde{m}.}$

Et si les denomĩacions du nombre a partir et du partiteur estoient dissemblabes cest que lune fust plus et laultre moins adonc Icelles denomĩacions se doiuent soustraire en adioustant lune auec laultre selon la nature du plus et du moins.

Exemple. Qui vouldroit partir $.84.^0$ par $.7.^{0.\tilde{m}.}$ Le nõbre party par le nombre Il vient .12. puys fault de .0. plus oster .0. $\tilde{m}$. reste .0. $\bar{p}$. Ainsi vient a la part $.12.^0$

Texto D: problemas, reglas y comentarios de la tercera parte del *Triparty* (Marre, 1881, pp. 177, 164)

a) Encores lon doit scauoir que quant les parties dune raiβ sont egalies et que le partiteur est *.moins.* souuẽtesfoiz cest signe que telle raison est impossible. Exemple Je veulx trouuer vng nombre tel que multiplie par .20. et a la multiplicacion adiouste .7. et mise appart Puis encores cellui mesmes nombre multiplie par 30. et de la multiplicacion ostez .9. la p̄miere multiplicacion et la seconde soient en telle proportion cõme .3. et .10.

Pour trouuer ce nombre Je pose $.1.^1$ qui multiplie par .20. et adiouste .7. monte $.20.^1$ $\bar{p}$. 7. dune part. puis apres qui multiplie $.1.^1$ par .30. et en lyeue .9. mõte $30.^1$ $\tilde{m}$. 9. dont les $\frac{3}{10}$. qui sont $.9.^1$ $\tilde{m}$. $2.\frac{7}{10}$ sont semblans a .20. $\bar{p}$. 7. Ores abreuie tes parties en donnant $.2.\frac{7}{10}$. a chascune des deux parties et auras $20.^1$ $\bar{p}$. $9.\frac{7}{10}$. dune part et $.9.^1$ daultre. Puis oste $20.^1$ de lune et de laultre parties si auras $.9.\frac{7}{10}$. pour nombre a partir et $\tilde{m}$. $11.^1$ pour partiteur[46]. Et pour tant que le partiteur est moins cest signe que ce calcule est impossible.

b) Le second canon[47].

De troys differances de nombre egalement distans lune de laultre[48] quant les deux p̄cedens sont egaulx a leur sequent[49] vel eϱ.^{a}. Adonc les deux p̄cedens doiuent estre diuisez par leur sequent et puis la moittie du moyen multipliee en

[46] El autor comienza planteando la ecuación $9x - 2\frac{7}{10} = 20x + 7$, después suma a los dos miembros el término $2\frac{7}{10}$, $9x = 20x + 9\frac{7}{10}$, y resta el término $20x$ obteniendo, finalmente, $-11x = 9\frac{7}{10}$.

[47] Chuquet llama así a la regla de resolución de la ecuación $cx^m + bx^{n+m} = ax^{2n+m}$ donde a, b y c son números positivos, naturales o racionales, y m y n números naturales.

[48] Se refiere con esta frase a tres monomios cuyos exponentes estén en progresión aritmética.

[49] Dados los tres monomios en progresión aritmética, Chuquet llama 'precedente' (*'precedent'*) al de menor grado respecto al de mayor grado, 'mediano' (*'moyen'*) al de grado intermedio y 'siguiente' (*'sequent'*) al de grado mayor respecto al de grado menor.

soy et adioustee a son p̄cedent[50]. La racine seconde dicelle addicion adioustee a la moitie du moyen est ce que lon demande pour veu que les troys differances soient prochaines[51]. Se Ilz ne sont prochaines cest la racine lyee de tout le nombre de laquelle la denoĩa^on si est ce que la denomĩacion du moyen surmonte la denominacion de son precedent ou est surmontee de celle du sequent[52].

II.6.3. Presentación del saber y estatuto del álgebra

En el *Triparty*, a diferencia de las obras comentadas anteriormente, no estamos ante una simple colección de problemas, sino ante un discurso teórico que explica, aunque pocas veces justifica, cómo hacer determinadas operaciones o resolver determinados tipos de problemas y donde la función de estos últimos es la de servir de ejemplo. Nos encontramos, por consiguiente, con un texto cuya estructura se caracteriza por la exposición de una técnica de cálculo o de resolución de problemas, seguida, en primer lugar, de unos cuantos ejercicios sencillos que la ejemplifican y permiten al lector familiarizarse con ella y, en segundo lugar y si es el caso, de una colección de problemas en los que se aplica.

Estamos, por tanto, ante una forma de presentación donde la "teoría" en cierto modo ha hecho su aparición y donde las técnicas ya no sólo se dejan entrever analizando la manera en que el autor resuelve los problemas, sino que se explicitan previamente. Así, en la primera parte del *Triparty* hay que hacer un largo recorrido por el sistema de numeración posicional decimal, que todavía era poco conocido en Europa, los algoritmos de cálculo con números naturales, las operaciones con números fraccionarios y la teoría de la proporcionalidad aritmética antes de llegar a los problemas. Igualmente, en la segunda parte se presentan las operaciones con radicales y en la tercera, las operaciones con monomios y la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado, antes de proponer los problemas aritméticos en las que dichas técnicas son necesarias.

Otra novedad es que el álgebra ya es un objeto de estudio en sí misma, no solo una técnica de resolución de problemas aritméticos. En el *Triparty*

[50] En esta frase y en todo lo que sigue, hay que sobreentender que las palabras 'precedente' (*'precedent'*) y 'mediano' (*'moyen'*) se refieren sólo a los coeficientes de los monomios correspondientes.

[51] Por 'diferencias próximas' (*'differances prochaines'*) hay que entender monomios con exponentes consecutivos. En ese caso, la ecuación quede reducida a $cx^m + bx^{1+m} = ax^{2+m}$ y la solución que propone Chuquet es $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}$.

[52] Es decir, si $n > 1$ la solución se obtiene extrayendo la raíz n-sima de la fórmula anterior, $x = \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}} + \frac{b}{2a}}$.

se estudian las operaciones con radicales de muy distintos índices y con monomios de exponentes muy variados, incluso negativos. Además, la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado se presenta en toda su generalidad, no sólo abarcando todos los casos en los que se obtiene solución positiva, sino extendiéndolos a las ecuaciones reducibles a las de primer o segundo grado, tal como se muestra en el apartado b) del texto D de referencia. Es decir, el álgebra, aunque sigue siendo una prolongación de la aritmética, una 'aritmética generalizada' cuya razón de ser es la resolución de problemas aritméticos, ya no está totalmente condicionada por ésta y el algebrista se permite explorar ámbitos algebraicos que no tienen por qué aparecer ni ser necesarios en la resolución de los problemas aritméticos.

Desde Diofanto, el álgebra ha recorrido un largo camino (de mil doscientos años, aproximadamente) en el que el trabajo de los matemáticos hindúes y árabes la han transformado. Chuquet es heredero de una tradición que, iniciada por al-Khwārizmī (siglo IX), llega hasta el occidente medieval y es recogida por Leonardo de Pisa-Fibonacci (siglo XIII) y Jordano Nemorario (siglo XIII), entre otros. Según Rashed (1984a, p. 22):

> Se puede decir que el texto de al-Khwārizmī se diferencia no solamente de lo que podemos encontrar en las tablillas babilonias, sino también de la *Arithmetica* de Diofanto. Ya no se trata, en efecto de una sucesión de problemas a resolver, sino de una exposición que parte de términos primitivos cuyas combinaciones deben dar todos los prototipos posibles, los cuales van a ser en lo sucesivo el verdadero objeto de estudio. Por otra parte, la noción de ecuación aparece desde el principio por sí misma y puede decirse que de manera genérica, en la medida en que no surge simplemente en el curso de la resolución de un problema, sino que, deliberadamente, está llamada a resolver una clase infinita de problemas.

En lo que se refiere a la justificación de las técnicas empleadas, seguimos en una presentación de tipo funcional. Las técnicas quedan justificadas en virtud de la bondad de sus resultados cuando se utilizan para resolver problemas aritméticos, al igual que sucede en las obras de Diofanto y Liu Hui. En este aspecto el autor no recoge la tradición, iniciada por al-Khwārizmī, de demostrar la validez de las resolventes de las ecuaciones por medios geométricos, al modo euclídeo, lo que puede ser un indicio de una cierta ruptura del autor con la visión euclídea de las matemáticas que volveremos a encontrar en su concepción del número. Únicamente en el caso de las reglas de cálculo con los sumandos y sustraendos, aparece una cierta justificación basada en la extensión de las reglas de cálculo entre números sin signo propias de la aritmética.

II.6.4. Campo de problemas

Los problemas del *Triparty* en los que se pone de manifiesto algún tipo de negatividad se refieren a la búsqueda, por medios aritméticos o algebraicos, de números que cumplen determinadas condiciones expresables en términos de operaciones aritméticas. Los problemas no están contextualizados[53], es decir que, al igual que en Diofanto, se trabaja con números abstractos, sin hacer referencia a la medida de cantidades de magnitud. Los datos pueden ser números naturales o fracciones de naturales y en las soluciones pueden aparecer radicales y ocasionalmente números naturales con una determinación negativa.

Los problemas que se resuelven aritméticamente se modelizarían actualmente por medio de sistemas de ecuaciones lineales, pero Chuquet los soluciona utilizando fórmulas que expresan verbalmente la sucesión de cálculos a efectuar o utilizando el método de falsa posición. Los problemas que se resuelven algebraicamente son problemas que se modelizan mediante ecuaciones de primer o segundo grado o ecuaciones reducibles a las anteriores.

II.6.5. Conjuntos numéricos

Chuquet llama 'número' a los números naturales y a las fracciones de naturales ('números quebrados'). En un principio no define el número natural, sino que empieza hablando directamente de la numeración y del sistema de numeración posicional decimal y, respecto a los números quebrados, se limita a decir que son una o varias partes de la unidad y que se componen de dos números escritos uno debajo del otro y separados por una línea. Estamos por consiguiente en el ámbito de las fracciones propias. Chuquet nunca escribe directamente una fracción impropia, la reduce a un número mixto. Tampoco utiliza los números quebrados para indicar razones o proporciones, por lo que su significado parece limitarse al fraccionamiento de la unidad. En cuanto al cero, ya ha hecho su aparición un símbolo para él, desde el momento en que se han aceptado las cifras arábigas, pero no llega a calificarlo de número, aun cuando en determinadas condiciones lo acepta como solución de los problemas.

Su posición respecto a los irracionales algebraicos es un tanto ambigua. Cuando introduce los radicales, los llama números pero, a continuación, los

[53] Tanto Sesiano (1985) como Dell'Aquila y Ferrari (1995) comentan la existencia de un apéndice en el que se presentan problemas contextualizados, principalmente de tipo comercial.

ejemplos que presenta se refieren todos a radicales cuya raíz es un número natural o fracción de natural. Más adelante, desarrolla los algoritmos de extracción de raíces y advierte que hay raíces que no pueden ser "abreviadas" mediante esto procedimientos, pero ya no hace ninguna referencia a su posible consideración como números. Sin embargo, más adelante, al enunciar las reglas de los signos, lo hace usando el término 'número' y después aplica la regla al caso de operaciones con radicales cualesquiera. Tampoco tiene inconveniente en obtener un radical como solución de una ecuación ni como solución de un problema en cuyo enunciado se pide encontrar números que cumplen determinadas condiciones.

Más adelante, cuando comienza a exponer las operaciones con monomios, parece sentirse obligado a volver a dar una cierta explicación acerca de la naturaleza del número.

> El número, en lo que concierne a nuestro propósito, está tomado aquí largamente, no sólo en tanto colección de varias unidades, sino que también lo será 1 y las partes de 1 como es todo número quebrado. (Marre, 1881, p. 152)

Esto nos dice que Chuquet conoce la posición euclídea respecto a la condición de número, pero que, sin pretender entrar en polémicas, prefiere ampliar el campo numérico a la unidad y las fracciones de naturales, aunque no se atreve a decir que "de facto" lo ha extendido también a los radicales.

Todas estas ampliaciones numéricas provienen de la tradición indoarábiga. La realidad es que el tratamiento numérico que imponen la aritmética y el álgebra y sus inmediatas aplicaciones a las transacciones comerciales fuerza la utilización de una noción de número menos restringida que la que plantea la matemática griega clásica. De hecho, ya en Diofanto se encuentran indicios de su aceptación de las fracciones de naturales como números. En los siglos siguientes, los matemáticos se familiarizan con el cero, a través del sistema de numeración, y con algunos tipos de números irracionales, a través de la extracción de raíces, la resolución de ecuaciones y el cálculo con radicales, lo que hace que algunos de ellos los acepten como números, desentendiéndose de las razones filosóficas que llevaron al mundo griego a su concepción del número.

II.6.6. Técnicas de resolución

Los problemas que se resuelven por métodos aritméticos darían lugar, hoy en día, a sistemas de ecuaciones lineales de los tipos siguientes:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & m_1x_2 & + & \cdots & + & m_1x_n & = & b \\ m_2x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & m_2x_n & = & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_nx_1 & + & m_nx_2 & + & \cdots & + & x_n & = & b \end{array} \tag{2}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} & + & x_2 & + & \cdots & + & x_n & = & b_1 \\ x_1 & + & & + & \cdots & + & x_n & = & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & & = & b_n \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & + & b & = & m_1(& + & x_2 & + & \cdots & + & x_n) \\ x_2 & + & b & = & m_2(x_1 & + & & + & \cdots & + & x_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & + & b & = & m_n(x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + &) \end{array}$$

donde todos los parámetros se entiende que son números positivos[54]. En su resolución, Chuquet utiliza diversas fórmulas que expone en forma de reglas de cálculo expresadas verbalmente, combinándolas, en ciertos casos, con el método de falsa posición[55].

Una muestra de estos problemas es el apartado a) del texto A que corresponde al sistema de ecuaciones (2) cuando $m_i = \frac{p+i-1}{p+i}$, con p natural. Para resolverlo, el autor elige un primer número natural a y, a partir de él y utilizando la fórmula

$$x_j = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} - (p+j)a \tag{3}$$

encuentra una n-tupla $(x_1, \ldots, x_n)$ que no resuelve el sistema dado, pero sí el sistema equivalente

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & m_1x_2 & + & \cdots & + & m_1x_n & = & c \\ m_2x_1 & + & x_2 & + & \cdots & + & m_2x_n & = & c \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_nx_1 & + & m_nx_2 & + & \cdots & + & x_n & = & c \end{array}$$

[54] No son estos los únicos tipos de problemas que Chuquet resuelve por métodos aritméticos, pero nosotros nos limitamos a analizar aquéllos en los que aparecen referencias a la negatividad.

[55] Un estudio detallado de las fórmulas utilizadas por los matemáticos medievales y renacentistas para resolver este tipo de sistemas de ecuaciones, y de su justificación matemática en términos modernos, se encuentra en Sesiano (1985).

donde

$$c = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} - a$$

En general, c será distinto de b, pero entonces, aplicando una regla de tres a cada uno de los x_i, se obtiene $(\frac{bx_1}{c}, \ldots, \frac{bx_n}{c})$ que es la solución del sistema inicial[56].

En el apartado b) del texto A, Chuquet ejemplifica, también verbalmente y sin recurrir a expresiones simbólicas, una modalidad del método de falsa posición, a la que llama 'método de dos posiciones', que permite resolver aritméticamente un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas. Si expresamos el sistema como

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y =& b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y =& b_2 \end{aligned}$$

el método consiste en elegir dos soluciones (x_1, y_1) y (x_2, y_2) de la primera ecuación y calcular las diferencias

$$\begin{aligned} d_1 =& a_{21}x_1 + a_{22}y_1 - b_2 \\ d_2 =& a_{21}x_2 + a_{22}y_2 - b_2 \end{aligned} \tag{4}$$

En estas condiciones, las fórmulas

$$x = \frac{d_1x_2 - d_2x_1}{d_1 - d_2}; \qquad y = \frac{d_1y_2 - d_2y_1}{d_1 - d_2} \tag{5}$$

darán la solución del sistema.

En la segunda parte del *Triparty* (ver texto B) se explica la forma de operar con radicales del tipo $\sqrt[n]{a}$, $\sqrt[n]{a + \sqrt[m]{b}}$ o $\sqrt[n]{a - \sqrt[m]{b}}$, con n y m

56 Cualquier suma $x_1 + \cdots + x_n - x_j$ puede expresarse como

$$n\frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} - \sum_{i=1}^{n}(p+i)a - \frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} + (p+j)a = (p+j)a$$

y, por tanto, sustituyendo x_j y la suma anterior en la ecuación j resultará

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} - (p+j)a + \frac{p+j-1}{p+j}(p+j)a = \frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)a}{n-1} - a.$$

números naturales y a y b números naturales o fracciones de naturales. Se desarrolla en detalle la reducción a índice común, la suma y resta de radicales semejantes, el producto y cociente de radicales del mismo índice, la racionalización de denominadores, la potencia de radicales y la conversión de la raíz de raíz en una raíz única. También se expone cómo transformar las expresiones del tipo $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ en otras del tipo $\sqrt{c} \pm \sqrt{d}$.

En la tercera parte (ver texto C) se empieza describiendo detalladamente las operaciones con monomios para pasar después a la resolución de ecuaciones. Su forma de denotar los monomios, escribiendo, por ejemplo, 5^2 para indicar $5x^2$, le permite convertir el producto y cociente de monomios en un producto o cociente de coeficientes con el añadido de una suma o resta de exponentes.

En lo que se refiere a la resolución de ecuaciones, se explica la reducción de las ecuaciones a sus formas canónicas mediante el método tradicional de transformar los sustraendos en sumandos y eliminar los términos iguales de los dos miembros de la ecuación[57]. Más adelante, se explica también cómo reducir a formas canónicas las ecuaciones con radicales, elevando los dos miembros de la ecuación a una potencia adecuada.

Por último, se exponen los cuatro cánones (ver texto D), es decir, las fórmulas de resolución de las ecuaciones canónicas $ax^n = bx^m$, $ax^{2n+m} = bx^{n+m} + cx^m$, $ax^{2n+m} + bx^{n+m} = cx^m$ y $ax^{2n+m} + cx^m = bx^{n+m}$, donde los coeficientes son números naturales o fracciones de naturales y los exponentes números naturales. Se trata, evidentemente, de la resolución general de las ecuaciones de primer y segundo grado y de la resolución de ecuaciones de grado mayor que dos en el caso particular de que sean reducibles a uno de los cánones. A continuación se aplican todas estas técnicas a la resolución de problemas aritméticos descontextualizados.

II.6.7. Notación utilizada

En cuanto a la notación, Chuquet ya utiliza las cifras indo-arábigas y el sistema de numeración posicional actualmente en uso y, de hecho, empieza su tratado explicando los algoritmos de las cuatro operaciones aritméticas

---

[57] La transformación de sustraendos en sumandos es lo que Diofanto llama 'sumar las formas ausentes de una parte y de otra hasta que se hagan presentes' y, posteriomente, al-Khwārizmī indica con el término *'al-ğabr'*. En cuanto a la eliminación de los términos iguales de los dos miembros de la ecuación, Diofanto lo denomina 'sustraer de una parte y de otra las formas semejantes de las semejantes' y al-Khwārizmī lo expresa con el término *'al-muqābala'*

en dicho sistema. La manera de representar las fracciones numéricas es también la actual, pero reduciendo siempre las fracciones con numerador mayor o igual que el denominador a números mixtos.

Usa los signos $\bar{p}$ (inicial de *'plus'*) y $\tilde{m}$ (inicial de *'moins'*) para indicar la suma y la resta o el hecho de que un término sea aditivo o sustractivo, pero no tiene signos para la multiplicación ni la división, aunque algún cociente lo expresa en forma de fracción, ni tampoco usa paréntesis. Hay que advertir que ninguno de estos signos se usan en la parte aritmética, allí las operaciones vienen expresadas mediante sus algoritmos de cálculo y el tipo de operación efectuada se indica verbalmente en el texto.

Los radicales los representa mediante una erre mayúscula algo historiada acompañada de un exponente que indica el índice de la raíz, $\Re^n$; una línea subrayando los términos que siguen al signo de la raíz sirve para delimitar la extensión del radicando. Los monomios los expresa por medio del coeficiente elevado al exponente de la incógnita, es decir que, por ejemplo, $3x^4$ lo escribe 3^4 y el término independiente 3 como 3^0. Para indicar un exponente negativo escribe el exponente y continuación el signo $\tilde{m}$. No hay un signo para indicar la igualdad. En síntesis, podemos decir que estamos a mitad de camino entre el álgebra sincopada y el álgebra simbólica.

II.6.8. Descripción y justificación de las técnicas

Como ya hemos dicho anteriomente, el *Triparty* es un libro donde se enuncian y describen las técnicas antes de presentar el campo de problemas asociado a ellas. Las descripciones son muy detalladas y pueden incorporar alguna definición e incluso alguna razón que justifique la necesidad o bondad de una determinada técnica, pero no hay ningún intento de demostrar su validez.

Las técnicas vienen descritas verbalmente en forma de reglas de cálculo que afectan a números genéricos que posteriormente se concretan, dando lugar a los ejemplos. Los apartados del texto B y el apartado b) del texto C nos muestran el formato seguido: primero se nombra la regla, después se enuncia para números genéricos y, por último, se dan valores numéricos que permiten ejemplificarla. Con mucha frecuencia, una vez descrita una técnica, se hacen aclaraciones o especificaciones de la misma que se adaptan a distintos supuestos.

II.6.9. La negatividad en las técnicas de resolución

A diferencia de lo que sucede con Diofanto o Liu Hui, en la obra de Chuquet hay atisbos de aceptación de "lo negativo" como solución de los problemas. En varios problemas de la primera parte de la obra (ver apartado a) del texto A) aparecen como soluciones números precedidos de la palabra 'moins'. La aparición de este tipo de soluciones es sorprendente porque se podía haber evitado con relativa facilidad sin más que modificar los datos del problema[58] y, además, porque se produce en un contexto de resolución totalmente aritmético en el que hasta el momento no se había mencionado ningún tipo de negatividad[59].

En cambio, esta aceptación de soluciones negativas no se da en el momento en que entramos en el contexto algebraico de resolución de ecuaciones, pues allí Chuquet se olvida de la posible existencia de éstas e incluso, en algún caso, establece de manera tajante su imposibilidad, como comentaremos más adelante.

Algo similar sucede con el cero. En el apartado a) del texto A, en un contexto plenamente aritmético, se asume que una de las soluciones sea 0. Sin embargo, Chuquet nunca "ve" la solución cero de una ecuación. De hecho, hace un estudio de la determinación y compatibilidad de las ecuaciones del tipo $ax^n = bx^m$ (Marre, 1881, pp. 164-165), estableciendo

---

[58] Teniendo en cuenta las fórmulas (2) que resuelven los problemas del tipo del citado en el texto A, las soluciones serán positivas siempre que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(p+i)}{n-1} - (p+j) \geq 0$$

para todo j entre 1 y n. Esto equivale a exigir que

$$j \leq \frac{2p + n(n+1)}{2(n-1)}$$

y como el valor máximo que puede tomar j es n la positividad de las soluciones se garantizará siempre que

$$n \leq \frac{2p + n(n+1)}{2(n-1)}.$$

Para $n = 2$ y $n = 3$ la desigualdad se cumple siempre, cualquiera que sea el valor de $p \geq 1$. Para $n = 4$, tiene que ser $p \geq 2$; para $n = 5$, $p \geq 5$, etc. Por lo tanto, eligiendo datos adecuados se puede conseguir que las soluciones sean todas positivas.

[59] Según Sesiano (1985), los problemas que resuelve Chuquet en la primera parte del *Triparty* y que hoy en día se modelizarían mediante sistemas de ecuaciones lineales, son frecuentes en los textos medievales (*Liber abaci* de Leonardo de Pisa y textos provenzales de autor desconocido como *Compendi del art del algorismi*) y tuvieron su origen en la aritmética comercial. Quizá la posibilidad de interpretación como deudas, propia del mundo del comercio, hizo posible que Chuquet las tuviera en cuenta como soluciones de dichos problemas.

que en el caso $a = b$ y $n = m$ cualquier número es solución de la ecuación, mientras que en el caso $a \neq b$ y $n = m$ considera que la ecuación no tiene solución[60].

A la hora de resolver la ecuación de segundo grado, el autor, siguiendo una tradición que viene de los babilonios y se mantiene hasta el siglo XVII, descompone su resolución en los tres casos que tienen solución real: $x^2 + px = q$, $x^2 = px + q$ y $x^2 + q = px$ con p y q números positivos y $p^2 \geq 4q$ en la última ecuación. Esta distinción permite que las reglas de resolución de la ecuación de segundo grado se expresen por medio de operaciones entre números positivos y no den lugar a soluciones negativas[61]. De acuerdo con esta tradición, Chuquet no considera las soluciones negativas de los dos primeros casos, aunque sí reconoce las dos soluciones positivas del tercer caso[62], estableciendo la existencia de dos, una o ninguna raíz, según que el discriminante $\frac{p}{2}^2 - q$ sea mayor, igual o menor que cero[63].

Pero además, aunque en la resolución de la ecuación de segundo grado se limita a evitar la aparición de soluciones negativas, en otros momentos se muestra muy explícito respecto a su imposibilidad, como, por ejemplo, cuando plantea ecuaciones de la forma $-ax^n = bx^m$ con a y b positivos (ver texto D, apartado a)). Sin embargo, si sobre este último punto comparamos el modo de hacer de Chuquet con el de Diofanto, podemos observar una gran diferencia en la manera como uno u otro declaran esta imposibilidad:

[60] Hay que hacer notar la diferencia entre Chuquet y sus predecesores en lo que se refiere al uso del cero. Para Diofanto el cero no existe, en ningún momento siente la necesidad de definir un símbolo para indicar la "nada", el "vacío". Liu Hui, en cambio, se ve obligado tomar en consideración los lugares vacíos de su tablero y operar con ellos. Ahora Chuquet ya tiene un símbolo para indicar un lugar vacío, símbolo que proviene del sistema de numeración posicional decimal, y empieza a usarlo en otros contextos. Básicamente, para indicar la inexistencia de restos en los algoritmos de la división entera y de la extracción de raíces y como exponente de los monomios (ver apartado b) del texto C). En casos muy aislados aparece como solución de un problema.

[61] La regla que resuelve cada caso, en términos actuales, sería: $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} - \frac{p}{2}$ para el primero, $\sqrt{(\frac{p}{2})^2 + q} + \frac{p}{2}$ para el segundo, y $\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ para el tercero.

[62] El autor ya no se contenta, como Diofanto, con encontrar una solución, sino que trata de obtener todas las soluciones positivas posibles.

[63] Cuando el discriminante es menor que cero comenta que "la raíz es imposible" o que "no se puede hacer convenientemente" (Marre, 1881, p. 220), refiriéndose con ello a la imposibilidad de extraer la raíz cuadrada.

mientras Diofanto se para ante la ecuación $4t + 20 = 4$ (texto de la *Arithmetica* citado como texto C) y dice que no tiene solución porque $20 > 4$, Chuquet no tiene inconveniente en pasar de la ecuación $9x = 20x + 9\frac{7}{10}$ a $-11x = 9\frac{7}{10}$ antes de decir que no tiene solución. Así pues, la solución de la ecuación anterior es imposible, pero no hay inconveniente en restar $20x$ de $9x$.

Como podemos ver, nos encontramos en una situación peculiar: por un lado, se admiten soluciones negativas en unos pocos problemas que se resuelven aritméticamente y, por otro lado, no se admiten en el ámbito de la resolución de ecuaciones que es donde la negatividad se hace más manifiesta al tener que trabajar con sumandos y sustraendos. Porque, por supuesto, donde "lo negativo" surge con fuerza y sin paliativos es en el seno del cálculo algebraico. De nuevo, la necesidad de manipular operaciones indicadas, diferencias en particular, va a exigir, como ya sucedió en la *Arithmetica* de Diofanto, la utilización de técnicas de cálculo adecuadas al caso.

Pero ahora hay varias novedades que modifican algunos aspectos del contexto algebraico. En primer lugar, la aceptación de los radicales como soluciones de las ecuaciones los convierte en objeto de cálculo algebraico, dada la imposibilidad de expresar numéricamente el resultado de muchas de sus operaciones. En segundo lugar, Chuquet no se limita a resolver ecuaciones, desarrollando sobre la marcha el cálculo algebraico necesario a ese fin, sino que empieza por establecer las técnicas de cálculo con radicales y monomios en toda su generalidad y después las aplica al caso particular de la resolución de ecuaciones. En tercer lugar, Chuquet utiliza los signos $\bar{p}$ (inicial de *'plus'*) y $\tilde{m}$ (inicial de *'moins'*) para indicar el papel de sumandos o sustraendos de los términos algebraicos. Este hecho va a facilitar la realización de las operaciones y la expresión de las reglas que los gobiernan en términos de esos 'números con signo'. Se va a pasar de un cálculo con las diferencias a un cálculo con los sumandos y los sustraendos.

Otro aspecto interesante del *Triparty* es la representación exponencial que usa para los monomios, representación que le lleva tan lejos como para introducir exponentes negativos y calcular con ellos. Por segunda vez aparece en el *Triparty* un negativo aislado, aunque, a diferencia de las soluciones negativas aparecidas en la primera parte de la obra, éste puede justificarse en términos de operaciones: ya no indica un sustraendo, un opuesto respecto a la suma, sino un inverso respecto al producto de monomios que se mantiene en el ámbito de los números sin determinación[64].

---

[64] Quizá es esa diferencia de significado la razón por la que Chuquet cambia la notación y escribe el signo $\tilde{m}$ después del número para indicar un exponente negativo.

Si entramos ahora a analizar en detalle las técnicas de cálculo algebraico de Chuquet, empezando por las operaciones con radicales se observa, en primer lugar, que el significado de los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$ sufre modificaciones en el transcurso del cálculo. Así por ejemplo, en el apartado a) del texto B vemos como en las expresiones $\Re.^2 44.\ \tilde{m}.\ 2.$ y $\Re.^2 31.\ \tilde{m}.\ 3.$ el signo $\tilde{m}$ indica la resta como operación binaria entre términos sin signo; en $\Re.^2 44.\ \tilde{m}.\ 2.\ \tilde{m}.\ \Re.^2 31.\ \bar{p}.\ 3.$ y $\Re.^2 44.\ \tilde{m}.\ \Re.^2 31.\ \bar{p}.\ 1.$ -resultado de aplicar la regla establecida al comienzo del apartado- los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$ acompañan a los términos y los convierten en 'números con signo' cuya suma viene representada por el mero hecho de escribir los unos a continuación de los otros; en la expresión $\Re.^2 44.\ \tilde{m}.\ \Re.^2 31.$ el signo $\tilde{m}$ vuelve a indicar la resta entre términos sin signo; y, por último, cuando se dice que: "de $\tilde{m}.\ 2.$ se resta $\tilde{m}.\ 3.$ y queda plus .1.", los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$ vuelven a ser signos que acompañan al término y la resta entre términos con signo se indica utilizando el lenguaje común.

Todo esto conforma una práctica de la que somos directos herederos que consiste en interpretar las expresiones $a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n$ con a_1, a_2,... a_n positivos, bien como el resultado de las sucesivas operaciones binarias entre términos sin signo: $a_1 \pm a_2 = b_2$, $b_2 \pm a_3 = b_3$, etc., bien como la suma (sin un signo que la indique) de los términos con signo $+a_1$, $\pm a_2, \ldots, \pm a_n$, bien como la suma de los términos con signo $\pm a_2, \ldots, \pm a_n$ aplicada al término sin signo a_1, bien como una mezcla de las interpretaciones anteriores.

También podemos observar en el apartado b) del texto B la naturalidad con que Chuquet identifica los términos con signo $\bar{p}$ y los términos sin signo[65]. En efecto, después de enunciar la regla del producto en la forma "más por más y menos por menos es más" y "más por menos es menos", pone como ejemplo el producto de $\Re.^2 8.\ \tilde{m}.\ \Re.^2 3.$ por $\Re.^2 5.$ y presenta como resultado $\Re.^2 40.\ \tilde{m}.\ \Re.^2 15.$ Para aceptar esto en función de la regla que ha dado, hay que sobreentender que $\Re.^2 8.$, $\Re.^2 5.$ y $\Re.^2 40.$ es lo mismo que $\bar{p}\ \Re.^2 8.$, $\bar{p}\ \Re.^2 5.$ y $\bar{p}\ \Re.^2 40.$, lo que el autor da por supuesto sin más explicaciones[66]. Se puede ver también que cuando un término con signo $\bar{p}$ encabeza una expresión el signo desaparece, como, por ejemplo, cuando transforma $.\tilde{m}.\ 6.\ \bar{p}.\ \Re.^2\ 12$ en $\Re.^2\ 12.\ \tilde{m}.\ 6.$ (texto B, apartado a)).

Esto nos muestra también que las peculiaridades del cálculo algebraico

[65] Aquí la existencia de un signo para notar la suma pone de manifiesto una identificación que en Diofanto aparece de una forma mucho más larvada.

[66] De paso, hay que decir que todas estas técnicas de cálculo conllevan el uso frecuente de las propiedades asociativa, conmutativa, distributiva y existencia de elemento neutro que posee la suma de sumandos y sustraendos.

conducen con mucha frecuencia a situaciones en las que aparecen sustraendos sin sumandos que les precedan, aunque, posteriormente, suelen modificarse dado que, como dice Chuquet: “el más se debe poner delante del menos”. Esta tendencia a reescribir las expresiones algebraicas de manera que comiencen con un término sin signo puede deberse al interés por interpretarlas como operaciones binarias entre números positivos, incluso cuando eso no es más que una mera apariencia, pues en este caso el resultado de la operación $\Re.^2$ 12. $\tilde{m}$. 6. es negativo[67].

En el caso de los exponentes de los monomios el tema va mucho más lejos: aquí ya no se trata de identificaciones esporádicas entre números con signo más y números sin signo, sino que directamente desarrolla un cálculo entre números sin signo y números con signo menos (ver texto C)[68]. Nos encontramos, por tanto, con dos variantes de la técnica: la de las operaciones entre términos con signo, con el añadido de la supresión del signo más en términos aislados o que encabezan una expresión algebraica, y la de las operaciones entre términos sin signo y términos con signo menos. En este segundo caso los términos con signo negativo aparecen claramente como un extesión de los términos sin signo.

Un último aspecto a comentar es la simplicidad que la consideración de términos con signo aporta a las técnicas de cálculo, lo que fomenta la ampliación de su campo de uso. Ya hemos comentado el caso de los monomios, donde la utilización de exponentes negativos permite a Chuquet obtener el producto y cociente de monomios mediante una técnica mucho más sencilla y general que la que usa Diofanto. Este último utiliza signos distintos para indicar cada una de las potencias de la incógnita y las inversas de dichas potencias, lo que le obliga a definir el producto y cociente entre ellas por medio de un largo listado de resultados particulares. En cambio, Chuquet representa las potencias de la incógnita en forma exponencial y sus inversas utilizando exponentes negativos, lo que le permite obtener el producto y cociente de dos monomios cualesquiera por el simple procedimiento de

[67] La obtención de un resultado negativo en las operaciones con radicales es tan raro que hace pensar en una inadvertencia del autor más que en un resultado escrito a sabiendas.

[68] En este sentido, llama la atención el ejercicio propuesto al final del apartado b) del texto C donde aparecen los términos .0., .0.$\tilde{m}$. y .0.$\bar{p}$. sin que, en ningún momento, se identifique .0.$\tilde{m}$. con 0. ¿Será que Chuquet, al asumir la distinta naturaleza de los números sin signo y los números con signo menos, incluye al cero en dicha consideración, interpretando que existen dos ceros: el cero sin signo y el cero con signo menos? No podemos saberlo dado que en el *Triparty* no se vuelve a hablar de esto.

multiplicar (o dividir) los coeficientes y sumar (o restar) los exponentes (ver apartado b) del texto C).

Otro ejemplo de simplificación del cálculo al utilizar términos con signo lo tenemos en el método de dos posiciones, es decir, en un contexto totalmente aritmético. En el apartado b) del texto A se observa cómo Chuquet expresa las diferencias d_1 y d_2 (ver fórmula (4)) mediante números con signo, es decir, interpretándolas como diferencias orientadas. Eso le permite obtener la solución basándose en una sencilla regla de resta o suma de d_1x_2 con d_2x_1 y de d_1 con d_2, según que los términos de cada pareja tengan el mismo o distinto signo[69]. El hecho de calcular las diferencias d_1 y d_2 siempre en el mismo sentido, independientemente de la relación de orden existente entre minuendo y sustraendo, adjudicando un signo más o menos al resultado según esa relación de orden, permite abreviar lo que de otro modo hubiera exigido la consideración de varios casos particulares. De todas maneras, el uso que se hace de los números con signo en el método de dos posiciones es incompleto, pues se utilizan para decidir si hay que sumar o restar números sin signo, en vez de establecer una única operación, la resta, entre números con signo.

II.6.10. Conocimientos sobre la negatividad

Del comportamiento de Chuquet en el desarrollo de las técnicas de cálculo algebraico podemos deducir que conoce perfectamente la estructura aditiva y multiplicativa de sumandos y sustraendos, aunque no demuestra conocer la relación de orden compatible con las operaciones, probablemente porque el tipo de tareas que desarrolla no lo hace necesario.

También ha asumido plenamente la identificación entre números sin signo y números precedidos del signo $\bar{p}$, es decir, entre números sin determinación y sumandos. Esto le permite reinterpretar la estructura aditiva y multiplicativa de sumandos y sustraendos en términos de estructura que prolonga los números sin signo mediante una simetrización aditiva. Y esta prolongación afecta a los números naturales, las fracciones de naturales, el cero y los radicales de números naturales, aun cuando el momento en que se hace más patente, el del cálculo con los exponentes, solo se establezca en los números naturales.

Por otro lado, la existencia de los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$ le permite transformar las operaciones entre sumas y diferencias en operaciones entre sumandos y sustraendos de una manera más ostensiva de lo que puede hacerlo Diofanto. Esto conduce a la aparición, desde el primer momento, de diferentes

[69] Se supone que los valores x_1 y x_2 que solucionan la primera ecuación son positivos.

sentidos de los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$, bien como signos que indican una operación binaria entre términos sin signo ('signos operativos binarios entre números sin signo'), bien como signos que indican la condición de sumando o sustraendo de un término ('signos operativos binarios generalizados'), bien como signos que indican una cualidad del número al que acompañan cuando este último aparece como solución de un problema ('signos predicativos'). En el transcurso del cálculo Chuquet pasa del primer al segundo significado, y viceversa, sin ninguna dificultad. Es posible que el hecho de que esos símbolos nazcan en el seno del álgebra, sin una tradición aritmética previa que estereotipe su significado, contribuya a la plasticidad con que Chuquet asume su uso.

En cuanto a la existencia aislada de los sustraendos, sin un minuendo del que sustraerse, Chuquet no tiene inconveniente en iniciar una expresión algebraica con un sustraendo, pero en seguida la normaliza poniendo en primer lugar un término sin determinación. También acepta el cero y los sustraendos como soluciones en determinados problemas que parecen estar ligados al mundo del comercio. Sin embargo, no los acepta como soluciones de las ecuaciones. Puede "ver" las soluciones negativas de las ecuaciones, aunque no las soluciones nulas ni imaginarias, pero no las asume, diciendo que el cálculo que conduce a ellas es imposible.

Por último, se observa que, aun cuando Chuquet trabaja con absoluta soltura con los sumandos y los sustraendos, en la resolución de ecuaciones se siente en la obligación de seguir el patrón clásico de convertir primero los sustraendos en sumandos, para pasar después a efectuar la reducción de términos semejantes.

II.6.11. Saberes sobre la negatividad

Chuquet, no sólo desarrolla el cálculo con sumandos y sustraendos, sino que no tiene ningún inconveniente en hablar con profusión de ello. Y además, la existencia de los signos $\bar{p}$ y $\tilde{m}$ le permite enunciar las reglas de cálculo en términos de dichos signos, allí donde Diofanto tenía que hablar de presencias y ausencias y Liu Hui de palillos rojos y negros (ver texto B). Este hecho va a facilitar que en su descripción las operaciones se descompongan en operaciones entre términos algebraicos sin determinación -números, radicales o monomios-, con el añadido de ciertas disquisiciones sobre los signos que los acompañan. Ahora las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya se pueden entender efectivamente como "reglas de los signos".

En concreto, el vehículo que conduce en el *Triparty* a la exposición de dichas reglas es la manipulación simbólica de los radicales (texto B). En ese ámbito se enuncian y utilizan tanto las reglas de suma y resta de sumandos y sustraendos como las de multiplicación y división de los mismos. En lo que se refiere a las primeras, Chuquet enuncia la regla de la suma diciendo que todos los números que intervienen en la operación deben escribirse unos a continuación de otros "en línea recta" y con "sus más y sus menos", es decir, conservando los signos que les preceden, y después esta expresión debe "abreviarse" siempre que sea posible. Esta manera de expresar e interpretar la suma de términos mediante yuxtaposición de los mismos precedidos de sus correspondientes signos nos remite a una composición de operadores aditivos[70], antes que a la suma de números con signo.

En cuanto a la resta, tal como puede verse en la parte a) del texto B, la reduce, en principio, a la suma de los sumandos y sustraendos que componen el minuendo con los del sustraendo, cambiándoles a estos últimos "sus más en menos y sus menos en más". Con esto sería suficiente, pero Chuquet considera oportuno definir también la resta por sí misma y no sólo en términos de la suma con el opuesto y añade: "más y más, menos y menos, restemos; más y menos, sumemos", precisando después cuál será el signo del resultado. Por último, el producto y el cociente se expresan también en términos de reglas de manipulación de los signos más y menos (texto B, parte b)) dando por supuesto el producto o cociente de los números sin signo correspondientes.

En una palabra, nos encontramos ante operaciones definidas entre pares (a, b) cuya primera componente puede tomar los valores $\bar{p}$ o $\tilde{m}$ y la segunda representa un término algebraico sin determinación. Así, por ejemplo, restar dos números con el mismo signo[71] consiste en restar los correspondientes números sin signo y, al resultado, añadirle el signo $\bar{p}$ o $\tilde{m}$, según que el número sin signo que figura como minuendo sea menor o mayor que el que figura como sustraendo[72].

También en lo que se refiere a la justificación de las reglas de cálculo, hay diferencias respecto a las concepciones anteriores. Chuquet no puede remitirse a una justificación funcional de las reglas de los signos basada en que proporcionan soluciones correctas de los problemas aritméticos porque

[70] Utilizamos el término 'operador' en su acepción de 'número que opera sobre otro'. Actualmente, se interpretaría como una 'composición de traslaciones'.

[71] Chuquet enuncia las reglas de cálculo de términos con signo en el caso particular de los radicales entendidos como números y después las extiende, sin más, a los monomios.

[72] Este tipo de consideraciones (ver apartado a) del texto B) induce, implícitamente, un orden entre números con signo que vendría dado por la ley: $a \leq b \iff |\, a \,|\leq|\, b \,|$.

se refieren a un cálculo con radicales desligado de un campo de problemas. Tampoco elige probarlas geométricamente, al modo euclídeo, pero después de cada regla propone una sucesión de ejemplos graduados que permiten interpretarlas como una extensión a los números con signo de las propiedades que rigen las operaciones aritméticas, es decir, las operaciones entre números sin signo.

Un tema que todavía no hemos tratado es el del sentido que se atribuye en el *Triparty* a los números con signo que ya no pueden interpretarse como sustraendos, es decir, a los números con signo aislados. No es fácil deducirlo porque Chuquet no parece sentirse obligado a dar muchas explicaciones al respecto. En la primera parte, con motivo de la primera aparición de una solución negativa (texto A, parte a)), "menos 10", que procede de un "menos 60" obtenido al intentar restar 360 de 300, se limita a decir que "como no se puede (restar), es necesario hacer lo contrario, a saber, de 360 quitar 300 y queda menos 60". En este momento, Chuquet está interpretando la resta como una "sustracción", como una operación ligada a la acción física de sustraer.

Una vez acabado el problema, añade un comentario sobre la suma y resta de un número con otro que lleva "un menos" o con un 0, resaltando que la suma decrece y la resta crece o, en el caso del 0, que permanecen invariables, y termina explicando que "cuando se dice menos 4 es como si un persona no tiene nada y además debe 4 y cuando se dice 0 es nada simplemente"[73]. Por tanto parece deducirse que para él un número negativo $-a$ representa la situación económica de una persona que no tiene nada y además debe la cantidad a.

Más adelante, en el método de dos posiciones (texto A, parte b)) aparece implícita la consideración de los números con signo en tanto que lo que "tiene de más o de menos un número respecto a otro" y así comparando 147 y 160 obtiene como resultado menos 13 porque 147 es 13 unidades menor que 160. Ahora interpreta la resta como una diferencia orientada: la diferencia sin signo indica en cuánto sobrepasa uno de los números al otro y el signo muestra cuál de los dos números es mayor.

En la segunda parte, donde los números con signo se utilizan como expresiones intermedias del cálculo, Chuquet no hace ninguna declaración sobre el asunto, quizá porque da por supuesto su sentido como sumandos y sustraendos. Por último, en la tercera parte, a la hora de hablar

[73] Es significativo que en este comentario el "menos 4" y el 0 reciben el mismo trato, lo que indica que los dos podían resultar igual de extraños al lector. De paso nos permite ver que para Chuquet el cero representa la ausencia de cantidad de magnitud.

de monomios con signo más o menos vuelve a sentirse obligado a dar una explicación (texto C, parte a)). Primero dice que "menos y más son el uno el envés del otro así como privación y hábito o como deuda y haber" refiriéndose de nuevo al contexto de deudas y haberes y resaltando la oposición entre esos dos conceptos. Después relaciona $.\tilde{m}.\ 12.\ \rho.$ con $.0.\ \tilde{m}.\ 12.\ \rho.$ y $.\bar{p}.\ 12.\ \rho.$ con $.0.\ \bar{p}.\ 12.\ \rho.$ interpretando las dos expresiones, una vez más, como deudas y haberes, pero añadiendo que el cero está por encima de $.\tilde{m}.\ 12.\ \rho.$ y por debajo de $.\bar{p}.\ 12.\ \rho.$

Una vez conocido el significado que Chuquet atribuye a los números con signo nos podemos preguntar si los considera números o no. Desde luego es bastante generoso a la hora de decidir qué objetos matemáticos son números. En diferentes momentos a lo largo de su obra expone que considera números a los naturales y a las fracciones de naturales. En cuanto a los radicales, sin llegar a hacer ninguna afirmación clara al respecto, se observa que hay momentos en que los incluye dentro de la categoría de número. Es también evidente que los números con signo positivo son números desde el momento que están equiparados a los números sin signo. En cuanto al cero y a los números con signo menos, puede aceptarlos en algún caso como soluciones de los problemas, darles sentido en tanto que deudas y haberes, pero nunca les da el nombre de números.

II.6.12. Relaciones entre conocimiento y saber

En Chuquet la distancia entre "lo que se hace" y "lo que se dice" es bastante menor que en Diofanto, pero sigue existiendo. No tiene dificultades para exponer las reglas de cálculo con los números con signo, pero hay aspectos de las mismas que se silencian: la identificación de los números con signo más y los números sin signo, los diferentes sentidos que le da a los signos $\tilde{m}$ y $\bar{p}$ en el transcurso del cálculo o la posibilidad de sustituir los números genéricos que aparecen en una fórmula expresada verbalmente por números con signo menos.

Tampoco hay ninguna referencia a la existencia de un orden entre números con signo compatible con la suma. El único orden que parece deducirse de su discurso es el de que los números con signo menos son menores que el cero y que los números con signo más y que si se comparan números con un mismo signo, entonces $a \leq b \iff |\ a\ |\leq|\ b\ |$.

En cuanto al estatuto de esos objetos intermedios del cálculo algebraico: los sustraendos o las diferencias con minuendo menor que el sustraendo, la situación ha evolucionado respecto a Diofanto en dos aspectos: se han hecho más visibles, incluso aparecen de cuando en cuando como soluciones de algún problema, aun cuando nunca como soluciones de una ecuación, y se ha encontrado una forma de justificar su existencia como objetos aislados: son indicadores de cantidades de magnitudes que se oponen, en el caso de los sustraendos, y diferencias orientadas resultado de una comparación entre números, en el caso de las diferencias negativas. En otras palabras, han adquirido una legitimidad como objetos de cálculo, e incluso como objetos aislados, que en Diofanto no tenían.

Nos encontramos por tanto con una concepción que amalgama las formas de entender la negatividad que aparecen en Diofanto y Liu Hui. Incorpora la estructura aditiva y multiplicativa de sumandos y sustraendos porque desarrolla un cálculo en el que la existencia de la incógnita y sus potencias obliga a trabajar con ellos, al igual que le sucede a Diofanto, pero además, en determinados contextos (deudas y haberes o pérdidas y ganancias), incorpora también un significado para esos sumandos y sustraendos que está en línea con el significado que atribuye Liu Hui a los números *zheng* y *fu*, aun cuando en este último no son más que un artificio de cálculo que desaparece cuando se llega a la solución del problema.

Sin embargo, esta concepción amalgamada contiene elementos contradictorios que se pueden percibir, sobre todo, en torno a la naturaleza de los números y de las soluciones de las ecuaciones. La decisión de la matemática griega clásica de modelizar la aritmética y el álgebra mediante la geometría, dió lugar a una interpretación muy restrictiva del número limitada a los números naturales, pasando el resto de los objetos numéricos a tratarse como 'magnitudes' (en realidad, cantidades de magnitud), a representarse mediante segmentos u otras figuras y a ser objeto de manipulaciones geométricas.

La recuperación progresiva del ámbito aritmético-algebraico, fruto en parte del contacto con las civilizaciones egipcia y babilónica que siempre habían tratado los problemas geométricos desde un punto de vista numérico, tuvo un primer hito en Diofanto y prosiguió desarrollándose en las civilizaciones hindú y árabe hasta llegar al occidente medieval. Pero el nacimiento del álgebra como instrumento de resolución de problemas aritméticos estableció un fuerte vínculo entre las soluciones de las ecuaciones y los números que ha durado hasta nuestro días y que choca con la concepción euclídea del número, concepción que no podía obviarse porque los *Elementos* ofrecían un ejemplo de teoría axiomático-deductiva que se convirtió desde épocas muy tempranas en un referente a seguir en otras ramas de las matemáticas.

En estas condiciones, ante la aparición de soluciones de las ecuaciones que rebasan ampliamente el ámbito de los números naturales, caben dos posibilidades: aceptarlas como números, en contra de la tradición euclídea, o no aceptarlas como soluciones. La decisión de Chuquet, lo mismo que la de otros matemáticos anteriores a él, es una solución de compromiso: aceptar las fracciones y los radicales como números (aunque estos últimos de una manera más larvada), quizá porque pueden interpretarse como medidas de cantidades de magnitud, y no aceptar los sustraendos como soluciones de las ecuaciones.

Podría pensarse que el hecho de que el autor del *Triparty* sea capaz de asignar a los sustraendos aislados un significado ligado a un contexto de medida, facilita su aceptación como soluciones de las ecuaciones, pero no se dan las condiciones de necesidad que justificarían ese paso. Chuquet no está desarrollando una teoría general de ecuaciones, su objetivo es simplemente resolver la ecuación de primer y segundo grado y la aceptación de soluciones negativas no supone grandes ventajas, teniendo en cuenta además que no "ve" las soluciones imaginarias. Por otra parte, la aceptación de los sustraendos aislados como medidas plantea otras contradicciones: la de que una cantidad pueda ser menos que cero, cuando el cero indica la no existencia de cantidad de magnitud, y la justificación de la estructura multiplicativa de las cantidades negativas.

II.6.13. Límites de la concepción

La concepción de Chuquet sobre la negatividad puede mantenerse mucho tiempo, y de hecho históricamente así ha sido, porque contiene las reglas y los signos necesarios para el desarrollo de un cálculo simbólico eficaz con radicales, polinomios y ecuaciones. También permite la resolución de las ecuaciones, como lo demuestra la publicación del *Ars Magna* de Cardano en 1545 con las resolventes de las ecuaciones cúbica y cuártica. Hay que tener en cuenta que esta concepción no impide encontrar todas las soluciones posibles de las ecuaciones de grado menor o igual que cuatro, incluidas las imaginarias, sino su aceptación como soluciones válidas.

Mientras el álgebra esté supeditada a la aritmética, es decir, a la resolución de los problemas aritméticos, las contradicciones que puede contener la concepción no obligan a rechazarla. Las soluciones de las ecuaciones que no encajen como soluciones de los problemas aritméticos serán declaradas "falsas", "ficticias", "imaginarias" o "imposibles". La aparición de una solución negativa será interpretada como un número contextualizado que en el enunciado del problema que ha dado origen a la ecuación se ha tomado en un sentido opuesto al que realmente tiene: figuraba como un haber cuando en realidad era una deuda o viceversa, por ejemplo.

La supervivencia de la concepción se verá amenazada cuando el campo de problemas que justifica y da sentido al álgebra deje de ser el de los problemas aritméticos para pasar a ser el de los problemas algebraicos propios del desarrollo de una teoría general de ecuaciones o el de los problemas geométricos modelizados algebraicamente. Vieta (1591), por ejemplo, llega a encontrar la relación entre las raíces y los coeficientes de los polinomios, pero no puede expresarla de forma general porque no acepta las raíces negativas e imaginarias. Se observa que las propiedades de las raíces de los polinomios ya están entre las preocupaciones de los matemáticos de la época, pero no pueden establecerlas en toda su generalidad porque para ello será necesario asumir "todas" las soluciones de las ecuaciones y decidir si van a ser consideradas números.

II.7. Concepción de MacLaurin

II.7.1. Obra matemática de referencia

El *Treatise of Algebra* de Colin MacLaurin se publicó en Londres en 1748, dos años después de la muerte del autor. Se trata de una obra dirigida a estudiantes universitarios que fue muy popular en Inglaterra donde se siguió reeditando hasta bien entrado el siglo XIX.

Se compone de tres partes tituladas *"The Fundamental Rules and Operations"*, *"The Composition and Resolution of Equations of all Degrees; and the different Affections of their Roots"* y *"The Application of Algebra and Geometry to each other"*. En la primera de ellas se estudian las operaciones entre polinomios, fracciones algebraicas, potencias de exponente entero o racional y radicales; las progresiones aritméticas y geométricas; la resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado y de las reducibles a ellas; y la resolución de los sistemas de ecuaciones lineales[74].

En la segunda parte desarrolla una teoría general de ecuaciones algebraicas con coeficientes reales que incluye: la descomposición de una ecuación de grado cualquiera en ecuaciones de primer y segundo grado, la relación entre el número de raíces de una ecuación y su grado, las relaciones entre las raíces de una ecuación y sus coeficientes, técnicas para delimitar intervalos que contienen a las raíces reales de las ecuaciones, reglas para decidir el número de raíces reales y complejas de una ecuación, técnicas para

[74] Resuelve los sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, de 3 ecuaciones con 3 incógnitas y da indicaciones para resolver el de 4 ecuaciones con 4 incógnitas.

encontrar las raíces racionales de las ecuaciones, técnicas para encontrar las raíces múltiples de las ecuaciones, resolución de las ecuaciones cúbica y cuártica, resolución aproximada de ecuaciones y solución de ecuaciones mediante series de potencias.

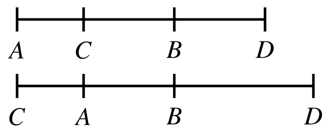
Por último, la tercera parte se dedica a analizar las relaciones existentes entre las ecuaciones algebraicas con dos incógnitas y las curvas geométricas, dibujando las curvas correspondientes a algunas ecuaciones, estableciendo que las ecuaciones algebraicas de segundo grado con dos incógnitas representan secciones cónicas y discriminando cuándo una ecuación representa una elipse, una hipérbola o una parábola.

II.7.2. Textos de referencia

Texto A: comentario sobre las cantidades positivas y negativas (MacLaurin, 1748, pp. 3-7)

> QUANTITY is what is made up of Parts, or is capable of being greater or less. It is increased by *Addition*, and diminished by *Subtraction*; which are therefore the two primary Operations that relate to Quantity. Hence it is, that any Quantity may be supposed to enter into Algebraic Computations two different ways which have contrary Effects; either as an *Increment* or as a *Decrement*; that is, as a Quantity to be added, or as a Quantity to be subtracted. The Sign $+$ *(plus)* is the Mark of *Addition*, and the Sign $-$ *(minus)* of *Subtraction*. Thus the Quantity being represented by a, $+a$ imports that a is to be added, or represents an Increment; but $-a$ imports that a is to be subtracted and represents a Decrement. When several such Quantities are joined, the Signs serve to shew which are to be added and which are to be subtracted. Thus $+a+b$ denotes the Quantity that arises when a and b are both considered as Increments, and therefore expresses the Sum of a and b. But $+a-b$ denotes the Quantity that arises when from the Quantity a the Quantity b is subtracted; and expresses the Excess of a above b. When a is greater than b, then $a-b$ is itself an Increment; when $a=b$, then $a-b=0$; and when a is less than b, then $a-b$ is itself a Decrement.
>
> As Addition and Subtraction are opposite, or an Increment is opposite to a Decrement, there is an analogous Opposition between the Affections of Quantities that are considered in the mathematical Sciences. As between Excess and Defect: between the Value of Effects or Money due To a man and Money due By him; a Line drawn towards the Right and a Line drawn to the Left; Gravity and Levity; Elevation above the Horizon and Depression below it. When two Quantities equal in respect of Magnitude, but of those opposite Kinds, are joined together, and conceived to take place in the Same Subject, they destroy each others Effect, and their Amount is *Nothing*. Thus 100 *l.* due to a Man and 100 *l.* due by him balance each other, and in estimating his Stock may be both neglected. Power is sustained by an equal Power acting on the same Body with a contrary Direction, and neither have Effect. When two unequal Quantities of those opposite Qualities are joined in the same Subject, the Greater prevails by their Difference. And when a Greater Quantity is taken from a lesser of the same kind, the Remainder becomes of the opposite kind. Thus if we add the Lines AB and BD together, their Sum is AD; but if we

are to subtract BD from AB, then $BC = BD$ is to be taken the contrary Way towards A, and the Remainder is AC; which, when BD, or BC exceeds AB, becomes a Line on the other side of A.



When two Powers or Forces are to be added together, their Sum acts upon the Body: But when we are to subtract one of them from the other, we conceive that which is to be subtracted to be a Power with an opposite Direction, and if it be greater than the other, it will prevail by the Difference. This Change of Quality however only takes place where the Quantity is of such a Nature as to admit of such a Contrariety or Opposition. We know nothing analogous to it in Quantity abstractly considered; and cannot subtract a greater Quantity of Matter from a lesser, or a greater Quantity of Light from a lesser. And the Application of this Doctrine to any Art or Science is to be derived from the known Principles of the Science.

A Quantity that is to be added is likewise called a *Positive* Quantity; and a Quantity to be subtracted is said to be *Negative*: They are equally real, but opposite to each other, so as to take away each other's Effect, in any Operation, when they are equal as to Quantity. Thus $3-3=0$, and $a-a=0$. But tho' $+a$ and $-a$ are equal as to Quantity, we do not suppose in Algebra that $+a=-a$; because to infer Equality in this Science, they must not only be equal as to Quantity, but of the same Quality, that in every Operation the one may have the same Effect as the other. A Decrement may be equal to an Increment, but it has in all Operations a contrary Effect; a Motion downwards may be equal to a Motion upwards, and the Depression of a Star below the Horizon may be equal to the Elevation of a Star above it: But those Positions are opposite, and the Distance of the Stars is greater than if one of them was at the Horizon so as to have no Elevation above it, or Depression below it. It is on account of this Contrariety that a Negative Quantity is said to be less than Nothing, because it is opposite to the Positive, and diminishes it when joined to it, whereas the Addition of 0 has no Effect. But a Negative is to be considered no less as a Real Quantity than the Positive. Quantities that have no Sign prefixed to them are understood to be Positive.

Texto B: regla de los signos y justificación de la misma (MacLaurin, 1748, pp. 12-14)

In Multiplication the General Rule for the Signs is, That *when the Signs of the Factors are like* (i.e. both $+$, or both $-$,) *the Sign of the Product is $+$; but when the Signs of the Factors are unlike, the Sign of the Product is $-$.*

Case I When any positive Quantity, $+a$, is multiplied by any positive Number, the Meaning is, That $+a$ is to be taken as many times as there are Units in n; and the Product is evidently na.

Case II When $-a$ is multiplied by n, then $-a$ is to be taken as often as there are Units in n, and the Product must be $-na$.

Case III Multiplication by a positive Number implies a repeated Addition: But Multiplication by a Negative implies a repeated Subtraction. And when

$+a$ is to be multiplied by $-n$, the Meaning is that $+a$ is to be subtracted as often as there are Units in n: Therefore the Product is negative, being $-na$.

Case IV When $-a$ is to be multiplied by $-n$, then $-a$ is to be subtracted as often as there are Units in n; but to subtract $-a$ is equivalent to adding $+a$, consequently the Product is $+na$.

The IId and IVth Cases may be illustrated in the following Manner.

By the Definitions, $+a - a = 0$; therefore, if we multiply $+a - a$ by n, the Product must vanish, or be 0, because the Factor $a - a$ is 0. The first Term of the Product is $+na$ (by Case I.) Therefore the second Term of the Product must be $-na$ which destroys $+na$; so that the whole Product must be $+na - na = 0$. Therefore $-a$ multiplied by $+n$ gives $-na$.

In like Manner, if we multiply $+a - a$ by $-n$, the first Term of the Product being $-na$, the latter Term of the Product must be $+na$, because the two together must destroy each other, or their Amount be 0, since one of the Factors (viz. $a - a$) is 0. Therefore $-a$ multiplied by $-n$ must give $+na$.

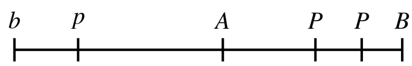
In this general Doctrine the Multiplicator is always considered as a Number. A Quantity of any kind may be multiplied by a Number: but a Pound is not to be multiplied by a Pound, or a Debt by a Debt, or a Line by a Line. We shall afterwards consider the Analogy there is betwixt Rectangles in Geometry and a Product of two Factors.

Texto C: comentarios sobre las relaciones entre el Algebra y la Geometría y la manera de establecerlas (MacLaurin, 1748, pp. 297-300)

In the two first Parts[75] we considered Algebra as independent of Geometry; and demonstrated its Operations from its own Principles. It remains that we now explain the Use of Algebra in the Resolution of Geometrical Problems; or reasoning about Geometrical Figures; and the Use of Geometrical Lines and Figures in the Resolution of Equations. The mutual Intercourse of these Sciences has produced many extensive and beautiful Theories, the chief of wich we shall endeavour to explain, beginning with the Relation betwixt Curve Lines and their Equations.

We are now to consider Quantities as represented by *Lines*; a *known* Quantity by a *given* Line, and an *unknown* by an *undetermined* Line.

But as it is sufficient that it be indetermined on one side, we may suppose one Extremity to be known.



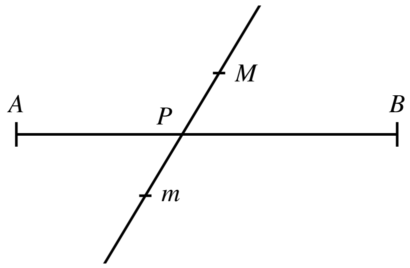
Thus the Line AB, whose Extremities A and B are both determined, may represent a given Quantity: while AP, whose Extremity P is undetermined, may represent an undetermined Quantity. A lesser undetermined Quantity may be represented by AP, taking P nearer to A; and, if you suppose P to move towards A, then will AP, successively, represent all Quantities less than the first AP; and after P has coincided with A, if it proceed in the

[75] Se refiere a las dos primeras partes del libro.

same Direction to the Place p, then will Ap represent a negative Quantity, if AP was supposed positive.

If AP represent x, and $Ap = AP$, then will Ap represent $-x$; and for the same Reason, if AB represent $(+a,)$ then will Ab $(= AB)$ represent $(-a.)$

After the same Manner, if PM represent $+y$, and you take Pm, the Continuation of PM on the other Side, equal to PM, then will Pm represent $-y$: for, by supposing M to move towards P, the Line PM decreases; when M comes to P, then PM vanishes; and after M has passed P, towards m, it becomes negative.



In Algebra, the Root of an Equation, when it is an impossible Quantity, has its Expression; but in Geometry, it has none. In Algebra you obtain a general Solution, and there is an Expression, in all Cases, of the thing required; only, within certain Bounds, that Expression represents an *imaginary* Quantity, or rather, *"is the Symbol of an Operation which, in that Case cannot be performed;"* and serves only to shew the *Genesis* of the Quantity, and the *Limits* within which it is possible.

In the Geometrical Resolution of a Question, the Thing required is exhibited only in those Cases when the Question admits of a *real* Solution; and, beyond those Limits, no Solution appears. So in finding the Intersections of a given Circle and a strait Line, if you determine them by an Equation, you will find two general Expressions for the Distances of the Points of Intersection from the Perpendicular drawn from the Center on the given Line. But, Geometrically, those Intersections will be exhibited only when the Distance of the strait Line from the Center is less than the Radius of the given Circle.

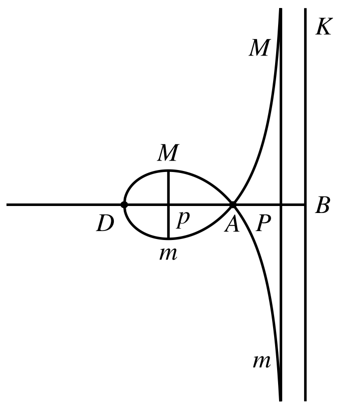
Texto D: representación de una curva a partir de su ecuación (MacLaurin, 1748, pp. 313-316)

Let it be required to describe the *Locus* of the Equation $cy^2 - xy^2 = x^3 + bx^2$. Where since $y^2 = \frac{x^3+bx^2}{c-x}$ and $y = \pm\sqrt{\frac{x^3+bx^2}{c-x}}$, it follows that PM and Pm must be taken equal, on both Sides, to $y = \sqrt{\frac{x^3+bx^2}{c-x}}$. But that when x is taken equal to c, if $AB = c$, and BK be perpendicular to AB, then BK must be an *Asymptote* to the Curve. If x be supposed greater than c, or AP greater than AB, then $c - x$ being negative, the Fraction $\frac{x^3+bx^2}{c-x}$ will become negative, an its square Root impossible. So that no Part of the *Locus* can be found beyond B. If x be supposed negative, or P taken on the other Side of A, then $y = \pm\sqrt{\frac{-x^3+bx^2}{c+x}}$, the Sign of x^3 and x being changed, but not the

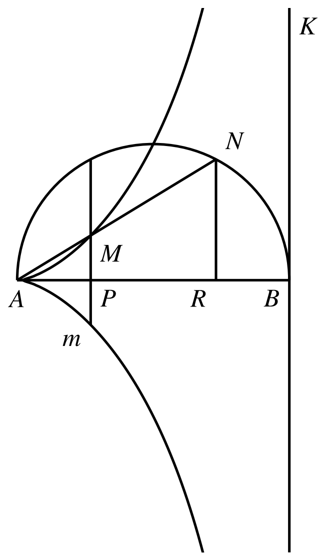
Sign of bx^2; because the Square of a Negative is the same as the Square of a Positive, but its Cube is negative: while x is less than b, the Values of y will be real and equal; but if $x = b$, then the Values of y vanish, because, in that Case, $y = \pm\sqrt{\frac{-x^3+bx^2}{c-x}} = \sqrt{\frac{-b^3+b^3}{c-x}} = 0$; and consequently, if AD be taken $= b$, the Curve will pass through D, and there touch the Ordinate.

If x be taken greater than b, then $\pm\sqrt{\frac{-x^3+bx^2}{c+x}}$ will become *imaginary*, so that no part of the Curve is found beyond D.

If you suppose $y = 0$, then will $x^3+bx^2 = 0$ be an Equation whose Roots are $-b$, 0, 0, from which it appears that the Curve passes twice through the Point A, and has, in A, a *Punctum duplex*. This *Locus* is a Line of the 3d Order. BK is its Asymptote, and it has a *Nodus* betwixt A and D.

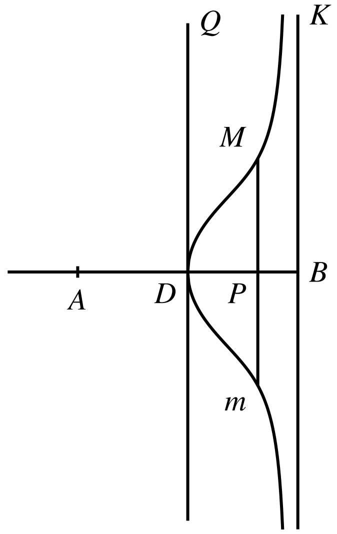


If you suppose b to vanish in the Equation, so that $cy^2 - xy^2 = x^3$, then will A and D coincide, and the *Nodus* vanish, and the Curve will have in the Point A a *Cuspis*, the two Arcs AM and Am touching one another in that Point. And this is the same Curve which by the Ancients was called the *Cissoid* of *Diocles*, the Line AB being the Diameter of the generating Circle, and BK the Asymptote.



For, if BR be equal to AP, and the Ordinate RN be raised meeting the Circle in N, and AN be drawn, it will cut the Perpendicular PM in M a Point of the Cissoid. So that if M be a Point in the Cissoid, $AP : PM :: AR : RN :: \sqrt{AR} : \sqrt{BR} :: \sqrt{BP} : \sqrt{AP}$, and consequently, $BP \times PMq = APcub.$ that is, $\overline{c - x} \times y^2 = x^3$: which is the Equation the *Locus* of which was required.

If, instead of supposing b positive, or equal to nothing, we now suppose it negative, the Equation will be $cy^2 - xy^2 = x^3 - bx^2$, the Curve will pass through D, as before, and taking $AB = c$, BK will be its Asymptote: it will have a *Punctum Conjugatum* in A, because when y vanishes, two Values of x vanish, and the third becomes equal to b or AD. The whole Curve, besides this *Point* A, lies between DQ and BK. These are demonstrated after the same Manner as in the first Case.



II.7.3. Presentación del saber y estatuto del álgebra

El *Treatise of Algebra* de MacLaurin ya no es una colección de problemas resueltos salpicada de pequeños comentarios, como sucede en la obra de Diofanto o Liu Hui, ni tampoco es un libro que se limite a describir, de manera sistemática, unas técnicas de cálculo o de resolución de problemas ejemplificadas en problemas tipo, como sucede en la obra de Chuquet, sino que es un discurso teórico que sigue pautas de razonamiento lógico-deductivas y que sirve, al mismo tiempo, para justificar las técnicas de cálculo.

Se trata de un discurso continuo que, en general, no separa las definiciones de las explicaciones que las ilustran o ejemplifican ni indica expresamente en qué momento comienza una demostración. Lo único que queda un poco más resaltado son las reglas de cálculo que se suelen escribir en letra bastardilla.

Los objetos algebraicos se definen o al menos se dan explicaciones sobre su naturaleza y las reglas de cálculo se enuncian, se justifican y finalmente se presentan ejemplos de su uso. Pero además, las dificultades que encuentra la comunidad matemática en la resolución de las ecuaciones de grado mayor que cuatro conducen al descubrimiento de un buen número de propiedades de las raíces de las ecuaciones, lo que supone el inicio de una teoría general de ecuaciones.

En cuanto a los problemas aritméticos, prácticamente desaparecen del texto; sólo se conservan algunos en la primera parte del libro a modo de ejemplo del uso de determinadas reglas de cálculo. En la obra de MacLaurin, el centro de atención lo ocupa el cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones algebraicas y los objetos y técnicas asociados, es decir, un dominio que ahora ya recibe un nombre propio e incluso una definición:

> Algebra is a general Method of Computation by certain Signs and Symbols which have been contrived for this Purpose, and found convenient. It is called an Universal Arithmetick, and proceeds by Operations and Rules similar to those in Common Arithmetick, founded upon the same Principles. (MacLaurin, 1748, p. 1)

en la que queda claramente establecido el estatuto del álgebra como una rama de las matemáticas que trasciende la aritmética, pero que le debe a esta última los principios en los que se basa. El álgebra sigue dependiendo de la aritmética, sigue entendiéndose como una aritmética generalizada, pero la dependencia tiene otro cariz, menos funcional y más deductivo.

Hay también otra novedad respecto a las concepciones estudiadas anteriormente y es que el álgebra se convierte en un instrumento al servicio de una rama de las matemáticas distinta de la aritmética: la geometría (texto C). La tercera parte del libro está dedicada a la representación geométrica de curvas definidas mediante ecuaciones algebraicas. La utilización del álgebra como instrumento de modelización en el campo de la geometría va a modificar tanto las concepciones algebraicas como las geométricas y las relaciones entre estos dos dominios de las matemáticas.

II.7.4. Campo de problemas

El problema que aborda MacLaurin es, ante todo, el de encontrar las propiedades que cumplen las raíces de las ecuaciones algebraicas de grado cualquiera con coeficientes enteros. El problema aritmético ha sido sustituido por el problema algebraico. Ya no se trata tanto de encontrar números que cumplan determinadas condiciones expresadas en términos de operaciones aritméticas como el de estudiar los tipos de ecuaciones y las propiedades de sus raíces.

En la tercera parte del tratado, el problema que se plantea es la relación entre las ecuaciones con dos incógnitas y las líneas curvas. Se trata, por consiguiente, de encontrar el lugar geométrico plano de los puntos cuyas coordenadas cumplen determinadas relaciones expresadas mediante ecuaciones algebraicas de coeficientes paramétricos reales y de su variación en función de los parámetros.

II.7.5. Conjuntos numéricos

El cambio de perspectiva de MacLaurin, centrando su atención en los problemas puramente algebraicos, es muy importante porque si una ecuación es la consecuencia de un problema aritmético sólo interesarán las raíces que tengan sentido en ese ámbito, mientras que si la ecuación es un problema en sí misma, todo objeto que la verifique deberá, en principio, ser tenido en cuenta, aun cuando sea discutible su condición de número o de cantidad. Esto le permite a MacLaurin asumir como soluciones de las ecuaciones los elementos de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$. Pero, ¿los considera números? Desde luego, a las raíces imaginarias las llama soluciones "imposibles", resultado de la necesidad de efectuar operaciones que son irrealizables, lo que no le impide tenerlas en cuenta y hacerlas intervenir en los enunciados de las propiedades de las raíces de las ecuaciones.

En realidad, el autor vuelve a la distinción entre número y cantidad, propia de la geometría euclídea y que Chuquet había obviado. Aunque en ningún momento llega a decir qué entiende por número, en el texto B se observa que distingue entre número y cantidad, distinción que parece orientarse en el sentido de llamar 'cantidad' al resultado de cualquier proceso de medida, reservando el término 'número' para indicar, concretamente, el resultado de la medida de contar. Tampoco está claro que el autor establezca una distinción nítida entre lo que hoy llamamos 'cantidad de magnitud' y su medida. La definición de cantidad que da al comienzo del texto A, definición que seguimos encontrando hoy en día en los diccionarios, puede referirse tanto a una cosa como a la otra. Además, probablemente, cuando se usa con un sentido de medida hay que entender que lleva implícita la referencia a la unidad de medida.

Ahora bien, para MacLaurin, a diferencia de Euclides, las cantidades cualesquiera ya no vienen representadas sólo por segmentos u otras figuras geométricas, sino también por letras que son objeto de manipulaciones algebraicas y que pueden adquirir un valor numérico decimal, llegado el caso[76]. Esta orientación algebraica de su tratado hace difícil averiguar en qué conjuntos numéricos se sitúa, porque cuando habla de operaciones se refiere a operaciones entre polinomios con coeficientes paramétricos.

Sin embargo, la necesidad de basarse en principios aritméticos le fuerza a hablar en algún caso de cantidades expresadas numéricamente. Y así, presenta las fracciones algebraicas como un cociente de cantidades, pero pone el ejemplo de $\frac{2}{3}$, diciendo que "expresa el cociente de 2 dividido por 3 (MacLaurin, 1748, p.24)". Por otro lado, al hablar de las potencias y raíces de los polinomios, explica las reglas de extracción de la raíz cuadrada y cúbica de un número natural cuando se trata de cuadrados o cubos perfectos, pero añade:

> In extracting of Roots, after you have gone through the Number proposed, if there is a Remainder, you may continue the Operation by adding Periods of Cyphers to that Remainder, and find the true Root in Decimals to any Degree of Exactness. (MacLaurin, 1748, p. 54)

lo que supone la aceptación de las cantidades irracionales, por lo menos las algebraicas, y su aproximación decimal. De hecho, ya utiliza los términos 'racional' e 'irracional' cuando se refiere a las raíces de las ecuaciones.

También asume las cantidades positivas y negativas (ver texto A) en tanto que medidas de cantidades de magnitudes con dos sentidos: segmentos orientados, deudas y haberes, elevación sobre o bajo el horizonte, etc., identificando las cantidades positivas con las cantidades sin signo y considerando que las cantidades negativas son tan reales como las positivas.

De todo esto, deducimos que el término 'cantidad real' engloba las cantidades racionales e irracionales, tanto positivas como negativas, y deja fuera a las llamadas 'cantidades imaginarias o imposibles' que son soluciones de las ecuaciones, pero que no pueden recibir una interpretación como medidas.

II.7.6. Técnicas de resolución

En la primera parte se establecen las técnicas de cálculo (suma, diferencia, producto, cociente, potencia, raíz) con polinomios y fracciones algebraicas, las fórmulas de la suma de las progresiones aritméticas y geométri-

[76] Hay que tener en cuenta que a partir de la publicación en 1585 de La Disme de Stevin, se popularizó la representación decimal de los números racionales e irracionales.

cas, la regla de tres y las técnicas de resolución de las ecuaciones de primer y segundo grado[77] o reducibles a ellas y de los sistemas de ecuaciones lineales.

En la segunda parte se desarrollan las técnicas de búsqueda de las soluciones de las ecuaciones basadas en los resultados teóricos obtenidos: relación entre el número de raíces y el grado de la ecuación, relación entre las raíces y los coeficientes de las ecuaciones, relación entre los signos de los coeficientes y el número de raíces positivas o negativas, construcción de ecuaciones cuyas raíces son de la forma $a + n$ ó na donde a representa cada una de las raíces de una ecuación dada y n una constante, relación de las raíces con la factorización de los polinomios, intervalos en los que se encuentran las raíces reales de una ecuación, resolvente de la ecuación cúbica, etc.

Por último, en la tercera parte se trabajan las técnicas de representación de curvas expresadas mediante ecuaciones algebraicas paramétricas, estudiándolas en función de los valores que toman los parámetros. El autor demuestra además que la representación de una ecuación de primer grado con dos incógnitas es una línea recta y que la representación de las ecuaciones de segundo grado con dos incógnitas da lugar a las secciones cónicas.

II.7.7. Notación utilizada

En cuanto a la notación utilizada en el libro, es prácticamente la actual. Se usan las letras x, y, z, etc., para indicar los números desconocidos (incógnitas) y las letras a, b, c, etc., para los números conocidos genéricos (parámetros). Los signos $+$ y $-$ simbolizan la suma y la resta y el signo $=$ representa la igualdad. Existe un uso ambiguo del signo del producto: los monomios se indican en la forma actual, por ejemplo, $3ab^2$, donde no se escribe un signo para la multiplicación, mientras que en otros momentos se usa el signo[78] $\times$. El cociente se indica por medio de la raya de fracción y las potencias y raíces con la notación actual, pero de vez en cuando aparece alguna potencia expresada como producto reiterado de la base, $aaaa$ en lugar de a^4, por ejemplo.

No existen los paréntesis, falta que se suple rayando por encima todos los términos que nosotros encuadraríamos en un paréntesis. Este superrayado, que en Chuquet es un subrayado, ha llegado hasta nosotros en el

[77] MacLaurin sustituye los cuatro cánones de Chuquet por una sóla ecuación canónica de segundo grado: $y^2 + ay = b$, donde supone que a y b pueden tomar valores negativos.

[78] Como, por ejemplo, cuando el autor representa la ecuación de soluciones a, b y c en la forma $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} = 0$.

caso de las raíces. De cualquier forma, las escrituras algebraicas del *Treatise of Algebra* son más sencillas que las actuales: los super-rayados sólo se utilizan para indicar que un producto, una potencia o una raíz afecta a varios monomios y se escriben sólo los imprescindibles; operaciones intermedias que hoy se indican por escrito, aquí se realizan mentalmente, sin dejar constancia escrita.

II.7.8. Descripción y justificación de las técnicas

En primer lugar, hay que decir que la aparición de los parámetros permite que las reglas de cálculo comiencen a expresarse algebraicamente. En la obra de MacLaurin el simbolismo algebraico está mucho más desarrollado que en la de Chuquet y, aun cuando se siguen haciendo descripciones verbales de las técnicas de cálculo, en distintas ocasiones se complementan con la fórmula que las simboliza.

Por otra parte, la justificación de las técnicas ya no descansa en el hecho de que solucionan correctamente los problemas aritméticos, sino en demostraciones basadas en razonamientos lógico deductivos a partir de unas primeras propiedades aritméticas admitidas como verdaderas por "sentido común". Nos encontramos con que el sistema de validación propio de la geometría euclídea ha sido trasladado al álgebra, haciendo las propiedades aritméticas elementales el papel de los axiomas euclídeos y los cálculos algebraicos el papel de las construcciones geométricas.

Sólo en el caso de que alguna propiedad aritmética no se considere suficientemente obvia, se cambian las tornas y pasa a ser la geometría el ámbito en el que se desarrolla la demostración. Por ejemplo, para justificar que si $a + b < c$ entonces $ab - c(a + b) < 0$, dice:

> Because the Rectangle $a \times b$ is less than the Square $\overline{a+b} \times \overline{a+b}$, and therefore much less than $\overline{a+b} \times c$. (MacLaurin, 1748, p. 146).

II.7.9. La negatividad en las técnicas de resolución

En el cálculo algebraico, MacLaurin asume la estructura aditiva y multiplicativa de sumandos y sustraendos, la identificación de los números sin determinación con los sumandos y el orden total de sumandos y sustraendos compatible con la suma. Amplía el cálculo con exponentes al caso de exponentes fraccionarios y, en las operaciones con raíces, asume que la raíz de índice impar de una cantidad positiva (negativa) es otra cantidad positiva (negativa), que la raíz de índice par de una cantidad positiva tiene dos determinaciones, una positiva y otra negativa, y que la raíz de índice par de una cantidad negativa tiene también dos determinaciones a las que llama 'raíces imposibles'.

El sentido inicial de los signos $+$ y $-$ es el de signos operativos binarios generalizados (signos que indican que un término es un sumando o un sustraendo), pero en el transcurso del cálculo se ven muchos ejemplos en los que asume su sentido como signos operativos binarios entre números sin signo. Además, desde el momento que acepta los sustraendos como soluciones de las ecuaciones, aparece un nuevo significado del signo: el significado predicativo, el signo indica una cualidad del número, la de ser positivo o negativo.

También hay que decir que nunca escribe, por ejemplo, expresiones del tipo $(+a) + (-b) - (+c)$ (entre otras razones porque no tiene paréntesis), sino que escribe $a - b - c$. Es decir, yuxtapone las cantidades con su signo o el signo cambiado, según que se trate de una suma o de una resta, de la misma manera que lo hacía Chuquet, dando lugar a una interpretación en términos de composición de operadores. Por tanto, nunca utiliza los signos $+$ y $-$ para indicar operaciones binarias entre números con signo.

MacLaurin acepta las soluciones negativas, e incluso imaginarias de las ecuaciones. El desarrollo de una teoría general de ecuaciones le obliga a ello. Pero la utilización de parámetros plantea un nuevo problema: el de si pueden tomar valores negativos. Desde luego, el hecho de que se acepten tanto las soluciones negativas como las imaginarias, implica que las letras x, y, z, etc., utilizadas habitualmente para designar las incógnitas, pueden representar cantidades positivas, negativas o imaginarias. También cuando se les da un valor numérico a los parámetros se observa el mismo fenómeno: las letras a, b, etc., se sustituyen, indistintamente, por cantidades positivas o negativas, aunque no por cantidades imaginarias.

Todo esto se podría interpretar en el sentido de que el signo de la cantidad se considera implícito en la letra que la representa, pero en la obra de MacLaurin aparecen otras situaciones en las que se pone de manifiesto que dicha interpretación no siempre es posible. Cuando se dice, por ejemplo, que si una ecuación tiene las raíces a, b, c y d entonces es equivalente a $\overline{x-a} \times \overline{x-b} \times \overline{x-c} \times \overline{x-d} = 0$, podría pensarse, en principio, que a, b, etc., representan tanto cantidades negativas como positivas, sobre todo desde el momento que el autor no nos define de antemano el dominio de dichas variables. Sin embargo, más adelante añade:

> If you suppose $x = -a$, $x = -b$, $x = -c$, $x = -d$, &c. then shall $x+a = 0$, $x+b = 0$, $x+c = 0$, $x+d = 0$; and the Equation $\overline{x+a}\times\overline{x+b}\times\overline{x+c}\times\overline{x+d} = 0$ will have its Roots, $-a$, $-b$, $-c$, $-d$, &c. negative. (MacLaurin, 1748, p.138)

Esto nos muestra que MacLaurin está dando por supuesto, sin decirlo, que las letras a, b, etc., representan cantidades positivas, y que, cuando las raíces son negativas, se considera obligado a escribir el signo $-$ delante de la letra.

Otro ejemplo de esta manera de concebir la representación literal de un negativo se encuentra en el texto D. Allí, a la hora de representar gráficamente la curva de ecuación $y^2 = \frac{x^3+bx^2}{c-x}$, se hace necesario distinguir los casos $b > 0$, $b = 0$ y $b < 0$. Pues bien, al principio se da por supuesto que b es positivo y mayor que cero, aunque no se llega a decir nunca, mientras que después, para estudiar el caso $b < 0$, se modifica la ecuación de partida convirtiéndola en $y^2 = \frac{x^3-bx^2}{c-x}$. Pero hay más, incluso en el caso $b > 0$, a la hora de considerar la posibilidad de que la variable x sea negativa, el autor se siente en la obligación de sustituir x por $-x$ y transformar de nuevo la ecuación de partida en $y^2 = \frac{-x^3+bx^2}{c+x}$.

La realidad es que, cuando se trata de sustituir un parámetro o incógnita por un valor numérico, MacLaurin no tiene reparo en dar valores negativos a las letras, aunque no vayan precedidas por un signo $-$, mientras que, cuando se trata de manejar parámetros o incógnitas con un dominio específicamente negativo, se siente en la obligación de sustituirlas por la misma letra precedida de un signo $-$. Pero, a su vez, esto último no significa que identifique, por ejemplo, el parámetro $-a$ con una cantidad negativa. Para MacLaurin, $-a$ significa, las más de las veces, el opuesto de a y será positivo o negativo dependiendo del signo que tenga la cantidad representada por la letra a.

Podemos decir que el sentido del signo $-$ como indicador del opuesto de un número (sentido operativo unario) se pone de manifiesto en MacLaurin de una manera un tanto ambigua, lo que viene agravado por el hecho de que no explicita de antemano el dominio de las variables y parámetros que utiliza. Unas veces parece deducirse de su trabajo que el signo de las cantidades va implícito en la letra y que el signo $-$ que, en su caso, pueda preceder a la letra indica su calidad de sustraendo o de opuesto de la cantidad. Pero otras, del sentido del discurso se deduce que está considerando que los dominios lo son sólo de números positivos y que el signo $-$ delante de la letra tiene un sentido predicativo.

El otro aspecto del *Treatise of Algebra* que supone una novedad respecto a la obra de Diofanto, Liu Hui y Chuquet es la relación que MacLaurin establece entre la geometría y el álgebra, entre las 'líneas' (es decir, los segmentos) y las cantidades con signo[79]. Para ello (ver texto C), el au-

[79] La identificación entre un segmento y la medida de su cantidad de longitud se en-

tor necesita definir, en cada una de las rectas que soportan segmentos, un punto O, origen de segmentos, que le permita relacionar las cantidades $+x$ y $-x$ con los segmentos OP de longitud x, dependiendo de que el punto P se encuentre situado en una u otra de las semirrectas de origen O. Aparece también un cierto concepto de segmento orientado, pues la identificación con una cantidad positiva o negativa depende de que los extremos del segmento, uno de los cuales es el origen de los segmentos de esa recta, se den en el orden establecido o en el orden inverso.

Ahora bien, no parece que estas ideas de ordenación de los puntos de la recta y orientación de los segmentos se generalicen a segmentos de extremos cualesquiera, como puede verse cuando en el texto D el autor comprueba que la ecuación $cy^2 - xy^2 = x^3$ representa la *cisoide de Diocles*. Es el único momento en que aparecen segmentos, BR y BP, que no tienen un extremo en el origen de segmentos de la recta correspondiente. MacLaurin no tiene inconveniente en denotar dichos segmentos escribiendo sus extremos en orden inverso al que establece en un principio entre A, origen de segmentos, y los demás puntos de la recta. Según eso, la representación algebraica de dichos segmentos debería venir dada por una cantidad negativa pero, sin embargo, el segmento BP viene representado por la cantidad $c - x$ que, en este caso, es positiva e indica la medida de BP.

Se observa, por tanto, un tratamiento ambiguo en la representación algebraica de los segmentos: en algunos casos se tiene en cuenta su orientación y se representan por cantidades con signo, mientras que en otros casos se representan por las cantidades positivas que miden su cantidad de longitud, sin tener en cuenta la orientación que inducen sus extremos. De esto último volvemos a tener un ejemplo en el primer párrafo del texto D, cuando identifica el segmento AD, con A posterior a D, con la cantidad positiva b. Así pues, la representación algebraica de los segmentos deja paso, en bastantes ocasiones, a la representación aritmética tradicional. Se echan en falta los ejes cartesianos y tampoco se produce una identificación entre las cantidades con signo y los puntos sobre la recta; estos últimos se indican mediante letras, nunca mediante números ni letras que representen números.

---

cuentra ya en los primeros textos matemáticos que se conocen. Los egipcios y babilonios la utilizaron para aritmetizar la geometría y la tradición euclídea para geometrizar la aritmética. Pero, en cambio, lo que plantea MacLaurin es identificar los segmentos con la medida de su cantidad de longitud precedida del signo $+$ o $-$.

II.7.10. Conocimientos sobre la negatividad

Observando las técnicas de cálculo algebraico que MacLaurin pone en práctica en su tratado, se puede decir que está perfectamente familiarizado con la estructura aditiva y multiplicativa de la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$, incluido el cálculo con potencias de exponentes negativos y fraccionarios y con radicales. También asume la identificación entre los sumandos y las cantidades sin signo y el orden total compatible con la suma necesario para desarrollar los razonamientos basados en el cálculo algebraico.

Acepta además las soluciones negativas e imaginarias de las ecuaciones aunque a estas últimas no las considera cantidades reales. Como consecuencia, al sentido de los signos como operativos binarios entre números sin signo y operativos binarios generalizados que ya aparecían en Chuquet hay que añadir el significado predicativo, apenas esbozado en el anterior, que indica que una cantidad es positiva o negativa. En cambio, el significado operativo unario no está totalmente asumido y cuando el dominio de una variable es negativo, MacLaurin se siente en la obligación de modificar el signo que precede a la letra.

Por otro lado, el autor relaciona, aunque de manera bastante ambigua, las cantidades positivas y negativas con segmentos orientados en el plano lo que le permite representar curvas expresadas algebraicamente, pero sin llegar a establecer la correspondencia entre cantidades y puntos de la recta.

II.7.11. Saberes sobre la negatividad

La existencia en el *Treatise of Algebra* de un discurso teórico frente al discurso técnico o la mera presentación de una técnica, propio de las obras anteriores, da lugar a un tratamiento novedoso de la negatividad. MacLaurin no sólo usa los números con signo, sino que además trata de darles un sentido en sí mismos, de explicar su naturaleza y justificar sus reglas de uso. Y todo esto no lo hace en unas pocas líneas o en un comentario hecho de pasada mientras está resolviendo un problema, sino que dedica un espacio bastante considerable a dar cuenta de su pensamiento sobre esos objetos. Esto nos permite analizar con más precisión su posición sobre la negatividad de lo que lo hemos podido hacer con los autores tratados anteriormente.

En el texto A el autor comienza diciendo que “cantidad es lo que está hecho de partes o es capaz de ser mayor o menor”, añadiendo después que la cantidad “se incrementa por *adición* y disminuye por *sustracción*”. A continuación dice que en el cálculo algebraico una cantidad puede cumplir una función de incremento o decremento, lo cual se indica haciéndola preceder por los signos $+$ o $-$ "que son la marca de la adición y la sustracción". Así pues, a y $+a$ representan una cantidad que debe ser sumada y $-a$ una cantidad que debe ser sustraída. Estamos ante el viejo sentido de las cantidades con signo entendidas como cantidades intermedias que deben sumarse o restarse de otras.

Pero esta forma de entender los números con signo no permite justificar todos los usos que se hace de ellos en el *Treatise of Algebra*. De hecho, ya hemos visto anteriormente que la interpretación de los números con signo como sumandos o sustraendos permite justificarlos en tanto que expresiones intermedias del cálculo, pero no cuando se obtienen como soluciones de las ecuaciones: no parece razonable que la solución de una ecuación sea un sustraendo. En consecuencia, MacLaurin prosigue (texto A) en su intento de dar sentido a los números con signo, incluso cuando aparecen como expresiones finales. Para ello, continúa su discurso interpretándolos ahora como cantidades que se oponen, neutralizándose mutuamente. En el segundo párrafo del texto A hace notar la oposición que existe entre un incremento y un decremento y eso le sirve para citar por analogía otras cantidades que también se oponen: exceso y defecto, dinero que se debe a un sujeto o que es debido por él, líneas trazadas hacia la derecha o hacia la izquierda, elevación sobre el horizonte o depresión bajo él, etc. Cuando dichas cantidades opuestas "son iguales con respecto a la magnitud" y "se instalan en el mismo sujeto, cada una destruye el efecto de la otra y su suma es *nada*".

Estamos ante la forma de entender la negatividad como fuerzas opuestas que se neutralizan que ya veíamos en Liu Hui y que también asoma en Chuquet, pero MacLaurin es más explícito y también más preciso en su lenguaje. Dice, por ejemplo, que esas fuerzas que se destruyen mutuamente tienen que actuar sobre el mismo objeto o sujeto, es decir, tienen que tener un punto de aplicación común, lo que convierte al cero, no sólo en la expresión de un estado de equilibrio de fuerzas, que no de ausencia de las mismas, sino también en un punto origen a partir del cual se generan las fuerzas en uno u otro sentido y además, como veremos al hablar de la resta, en un pivote alrededor del cual pueden girar las fuerzas, cambiando de sentido. Todos estos significados del cero que se encuentran tácitamente en los *Nueve Capítulos* vuelven a aparecer en la obra de MacLaurin expresados con más claridad, lo que no es óbice para que habitualmente identifique el término 'cero' con el término 'nada'.

La manera de nombrar las cantidades opuestas marca también una diferencia con la obra de Liu Hui y Chuquet. Las palabras 'zheng/fu' indican una oposición - 'lo que es de una manera' y 'lo que es de la manera contraria' - y los términos 'plus' o 'moins' indican la función de las cantidades como sumandos o sustraendos, pero no está claro que conlleven una valoración ética. Sin embargo, los términos 'positivo' y 'negativo' que usa MacLaurin privilegian un sentido frente al otro: el sentido positivo es el bueno o por lo menos es mejor que el negativo, "lo que se niega". Esto nos retrotrae a Diofanto, también allí existe un sentido privilegiado y el otro se nombra como 'la ausencia', 'la falta' del anterior, aunque MacLaurin tiene a bien afirmar en distintas partes de su libro que las cantidades negativas no son menos reales que las positivas.

Por otro lado, MacLaurin no se limita a buscar una explicación que dé sentido a las cantidades negativas, sino que la sigue usando como medio de justificación a la hora de definir las operaciones entre dichas cantidades. Para ello, una vez entendidas las cantidades con signo en términos de sumandos y sustraendos añade que "cuando varias de esas cantidades se juntan, el signo sirve para mostrar cuáles se suman y cuáles se restan". Esto abre el camino a una reinterpretación de la suma y resta de cantidades sin determinación en términos de composición de operadores aditivos, lo que resulta muy ventajoso porque, de un lado, permite justificar cualquier expresión del tipo $\pm a \pm b$, independientemente de la relación de orden existente entre a y b y, por otro, da un soporte teórico a las prácticas habituales de cálculo algebraico[80].

Sin embargo, se observa que el autor, a la hora de profundizar en esta manera de entender las operaciones, procede con ciertas vacilaciones, sin acabar de desligarse del concepto de suma y resta como operaciones binarias entre cantidades sin signo. Y así, aunque representa la suma de a y b mediante la expresión $+a + b$ de la que dice que "designa la cantidad que aparece cuando a y b son considerados incrementos", no interpreta el resultado como un incremento, sino, simplemente, como una "cantidad" en la que, al parecer, el signo ha desaparecido. Las dificultades aumentan cuando habla de la resta pues, a pesar de que representa la resta $a - b$ en la forma $+a - b$, primer paso para interpretarla como composición de un incremento con un decremento, a continuación abandona esta interpretación y dice que "$+a - b$ denota la cantidad que aparece cuando de la cantidad a se sustrae la cantidad b y expresa el exceso de a respecto de b", lo que lo situa, de entrada, en el campo de los cantidades sin signo, con $a > b$. La

[80] Esta manera de entender las operaciones de suma y resta ya está implícita en Chuquet, pero él nunca llega a decirlo.

imposibilidad de justificar en ese ámbito las diferencias negativas lo lleva a continuar diciendo que "cuando a es mayor que b, entonces $a-b$ es él mismo un incremento; cuando $a=b$, entonces $a-b=0$; y cuando a es menor que b, entonces $a-b$ es él mismo un decremento", donde, en realidad, esta planteando una operación binaria entre números sin signo cuyo resultado es un número con signo, un operador. Esta ambigüedad en la interpretación de la resta de reales naturales como composición de operadores termina produciendo un discurso erróneo: si $a<b$, $a-b$ es efectivamente un decremento, pero no representa el exceso de a sobre b, sino el de b sobre a.

Además de la justificación de la suma en términos de sumandos y sustraendos, MacLaurin recurre también a la idea de cantidades opuestas y, como consecuencia, identifica la suma con la resultante de fuerzas unidireccionales, con sentidos iguales u opuestos, que actúan sobre un mismo sujeto (texto A). Si las dos fuerzas tienen el mismo sentido sus efectos se suman, si tienen sentidos opuestos sus efectos se neutralizan y prevalece el exceso de la fuerza de mayor valor absoluto sobre la otra. El autor parece sentirse más cómodo con esta explicación lo que le lleva a utilizarla también para justificar la resta de cantidades con signo. En efecto, siguiendo el texto A, nos encontramos con una interpretación de la misma como suma con el opuesto, es decir, suma de la primera cantidad con la segunda, una vez que esta última ha cambiado de sentido (de 'cualidad', según MacLaurin), aunque, rápidamente, añade que esta forma de entender la resta sólo tiene sentido cuando "la cantidad es de tal naturaleza como para admitir una tal contrariedad u oposición"; en caso contrario, se mantiene la interdicción de sustraer una cantidad mayor de otra menor.

La justificación de la resta en términos de sumandos y sustraendos se relega a un capítulo posterior, en el que comentando de nuevo la regla de sustracción de cantidades positivas y negativas, se dice:

> It is evident that to subtract or take away a Decrement is the same as adding an equal Increment. If we take away $-b$ from $a-b$, there remains a; and if we add $+b$ to $a-b$, the Sum is likewise a. In general, the Subtraction of a Negative Quantity is equivalent to adding its Positive Value. (MacLaurin, 1748, p. 11)

Ahora la expresión $a-b$ parece concebirse en términos del operador $-b$ actuando sobre a. 'Quitar' este operador, que deje de actuar sobre a, es lo mismo que añadir el operador $+b$ a la expresión $a-b$ -un operador se neutraliza mediante otro operador en sentido contrario- y, por tanto, la sustracción de un operador negativo equivale a sumarlo en positivo. Es una explicación que necesita identificar la sustracción de un operador con la acción física de suprimirlo. Pero en el fondo, lo que aquí está en juego es la generalización de la propiedad de absorción, $(a - b) + b = a$ con $a > b$, de los reales naturales al campo de los reales positivos y negativos, es decir, al caso en que $a \leq b$. Y esta razón, la de la conservación de las propiedades formales de la aritmética de los números sin determinación a la hora de definir la aritmética de los números negativos, va a repetirse cada vez más y terminará jugando un papel primordial en la institucionalización definitiva de los números negativos.

En el intento de justificar la suma y la resta se hace uso también de una interpretación de las cantidades con signo que no se adapta a la idea de cantidades opuestas actuando sobre un mismo sujeto. Se trata de la consideración de las cantidades positivas y negativas en términos de segmentos orientados (texto A). Esta interpretación, que no aparece en las obras estudiadas anteriormente, es la que va a permitir establecer un vínculo entre el álgebra y la geometría, como veremos más adelante. En este contexto, la suma se concibe como el segmento resultante de colocar los segmentos uno a continuación del otro y la resta $\overline{AB} - \overline{BD}$ como el segmento $\overline{AC}$ donde C es el extremo del segmento $\overline{CB}$ opuesto al segmento $\overline{BD}$. El centro de giro en este caso es el extremo común a los dos segmentos y ya no hay un origen común a todas las cantidades que sea, además, centro de giro, como se postula para las cantidades opuestas.

En cuanto al orden definido entre cantidades con signo, la posición de MacLaurin es ambigua. Por un lado, y asociado a la justificación de la suma y resta de dichas cantidades, aparecen frases como éstas: "Cuando dos cantidades desiguales de cualidades opuestas se reúnen en el mismo sujeto, la mayor prevalece por su diferencia. Y cuando una cantidad mayor se quita de una menor de la misma clase, el resto se hace de la clase opuesta" (texto A), frases que se repiten con mucha frecuencia a lo largo de su obra. Podríamos deducir de esto que para el autor una cantidad con signo es menor que otra si, como cantidades absolutas, la primera es menor que la segunda. Sin embargo, el asunto no es tan sencillo. En primer lugar, MacLaurin nunca hace explícita una declaración de ese tipo y, en segundo lugar, en el párrafo final del texto A aparece una larga explicación referente a la igualdad de cantidades con signo en la que se hace patente el uso del término 'cantidad' para indicar el valor absoluto de la cantidad negativa. De manera que las "cantidades con signo" se componen de "cantidad" (valor absoluto) y "cualidad" (sentido positivo o negativo) y, por lo tanto, cuando se habla de cantidades menores o mayores que otras, puede ser interpretado como una referencia al orden habitual entre cantidades absolutas, sin presuponer una extensión del mismo a las cantidades con signo.

Por otro lado, MacLaurin califica de “contrariedad” el que se diga que las cantidades negativas son “menos que nada”. La interpretación que da de este hecho es que una cantidad negativa se considera menos que nada porque sumada a una cantidad positiva la disminuye, mientras que sumando cero la cantidad positiva permanece igual. En otras palabras, las cantidades negativas tienen que ser menores que cero para garantizar la compatibilidad del orden con la suma. Todo esto pone de manifiesto la dificultad que se le plantea a MacLaurin: las exigencias del cálculo algebraico le obligan a definir un orden compatible con la suma, pero este orden es contradictorio con la consideración de las cantidades positivas y negativas como fuerzas opuestas que se neutralizan, pues en ese caso, si una fuerza prevalece sobre otra de distinto sentido, si “le puede” a la otra, es porque es mayor.

Una vez terminado lo referente al orden y a la suma y resta de cantidades con signo, se pasa a definir el producto entre dichas cantidades (texto B). Para ello, MacLaurin parte de la interpretación aritmética del producto de números naturales como suma repetida: el segundo factor es el número o cantidad que se suma repetidas veces (multiplicando) y el primero el número que indica cuántas veces se suma el segundo factor (multiplicador). Sobre esta base, se introduce la modificación de que un multiplicador positivo indica una suma repetida y un multiplicador negativo una resta repetida, lo cual, añadido al hecho de que el multiplicando puede ser también una cantidad positiva o negativa, permite dar una explicación de la regla de los signos.

Sin embargo, esto no es una justificación general de la regla pues el producto así entendido no es una operación interna en el campo de las cantidades con signo, sino una operación externa entre los números enteros y las cantidades con signo. Y MacLaurin es perfectamente consciente de esto puesto que, al final del texto B, se siente en la obligación de justificar esta falta de generalidad diciendo que toda cantidad, sea de la clase que sea, puede multiplicarse por un número, pero no por otra cantidad de la misma magnitud, salvo cuando se trata del producto de longitudes.

Quizá por eso recurre también a otra justificación: el producto es el que es para garantizar la extensión de la propiedad distributiva al nuevo conjunto de números (texto B). Estamos de nuevo ante el argumento de conservación de la estructura algebraica de las cantidades sin signo al pasar a las cantidades con signo, argumento que por sí solo podría justificar el producto de cantidades en general, pero que el autor sigue limitando al caso de un multiplicador entero. La justificación de tipo formal aparece una vez más, pero es una razón subsidiaria de la que todavía es la principal: la analogía con el mundo sensible. De todas maneras, se observa cómo la primera va ganando terreno y, por ejemplo, la definición de la potencia de exponente negativo se establece ya claramente en función de la necesidad de extensión de la regla $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ con $n > m$ al caso en que $n \leq m$.

> *If you divide a lesser Power by a greater, the Exponent of the Quotient must,* by this Rule[81], *to be Negative.* Thus $\frac{a^4}{a^6} = a^{4-6} = a^{-2}$. But $\frac{a^4}{a^6} = \frac{1}{a^2}$; and hence $\frac{1}{a^2}$ is expressed also by a^2 with a negative Exponent.
>
> lt is also obvious that $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$; but $\frac{a}{a} = 1$, and therefore $a^0 = 1$. After the same Manner $\frac{1}{a} = \frac{a^0}{a} = a^{0-1} = a^{-1}$; $\frac{1}{aa} = \frac{a^0}{a^2} = a^{0-2} = a^{-2}$; $\frac{1}{aaa} = \frac{a^0}{a^3} = a^{0-3} = a^{-3}$; so that the Quantities a, 1, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$, $\frac{1}{a^4}$, &c. may be expressed thus, a^1, a^0, a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}, a^{-4}, &c. Those are called the *Negative* Powers of a which have Negative Exponents; but they are at the same time *Positive* Powers of $\frac{1}{a}$ or a^{-1}. (MacLaurin, 1748, pp. 34-35)

En cuanto a si las cantidades precedidas de un signo se consideran, a su vez, cantidades, la contestación es afirmativa aunque no exenta de algunas ambigüedades. En el texto A podemos observar distintas fases en la manera de concebir las cantidades con signo: primero son cantidades que se suman o restan de otras, es decir, las cantidades lo son en valor absoluto y el signo indica su papel en el cálculo; pero después, cuando pasa a hablar de cantidades con sentidos opuestos, tanto la cantidad absoluta como el signo que la acompaña sirven para denotar las cantidades con dos sentidos. En ese momento, podemos decir que las cantidades con signo adquieren las consideración de cantidades y, además, como MacLaurin llega a declarar, de cantidades reales.

Esto último se debe, en primer lugar, a la identificación que se establece entre las cantidades sin signo y las cantidades positivas pero, sobre todo, a las relaciones definidas entre el álgebra y la geometría. Tal como explica MacLaurin al final del texto C, las soluciones positivas y negativas de un problema algebraico aparecen también como soluciones del problema geométrico equivalente al dado, mientras que las soluciones imaginarias no se reflejan en el problema geométrico correspondiente. De manera que las cantidades positivas o negativas son cantidades reales porque pueden interpretarse en términos geométricos, cosa que no sucede con las soluciones imaginarias o imposibles. Como podemos ver, la geometría sigue siendo el ámbito que legitima los objetos matemáticos.

[81] Se refiere a la regla que dice que "para dividir dos potencias de la misma base se restan sus exponentes".

II.7.12. Relaciones entre conocimiento y saber

El contexto científico en el que se publica la obra de MacLaurin es muy distinto al de Chuquet, como es esperable dada la distancia en años, alrededor de 250, que separa las dos obras. El simbolismo algebraico ha avanzado notablemente gracias a las aportaciones aparecidas en las aritméticas y álgebras renacentistas y en la obra de Vieta, Harriot, Oughtred, Stevin, Girard, Descartes y Leibniz, entre otros muchos.

Pero además, el álgebra se ha afianzado como una rama de las matemáticas con nombre propio. El descubrimiento de las resolventes de las ecuaciones de grado tres y cuatro, efectuado por Tartaglia, Ferrari y Cardano en el siglo XVI, propicia la búsqueda de resolventes para las ecuaciones de grado mayor que cuatro, y en el intento de encontrarlas se va desarrollando una teoría general de ecuaciones y consolidando la manipulación de distintos objetos algebraicos: polinomios, fracciones algebraicas, exponentes, radicales, cantidades negativas e imaginarias, etc., cuyas reglas de cálculo tienen un origen común basado en las propiedades de las operaciones aritméticas.

También el estatuto de las soluciones de las ecuaciones ha ido evolucionando. A la aceptación de las fracciones como números que ya se observa en Chuquet, seguirá bastantes años después, la de los irracionales, debido en gran parte a la obra de Stevin. La publicación en 1585 de *La Disme* y de *L'arithmétique* fomenta, por una parte, la difusión de la representación decimal de las fracciones y radicales y, por otra, su aceptación como números. En *L'arithmétique*, Stevin distingue entre número y cantidad: "número es aquello por lo cual se explica la cantidad de alguna cosa", estableciendo que el número es la medida de la cantidad, tanto si la cantidad se refiere a una magnitud continua como discontinua. A continuación, afirma que la unidad, las fracciones y los radicales son números, aunque a los primeros los llama 'números aritméticos' y a los segundos 'números geométricos'. También afirma que "no hay números absurdos, irracionales, irregulares, inexplicables o sordos", aun cuando utiliza después el término 'irracional' para decir que los números irracionales son los que "explican las líneas incommensurables".

Sin embargo, bastantes matemáticos, Mac Laurin entre ellos, mantienen la distinción que establece la geometría euclídea entre número y cantidad, reservando el tratamiento numérico para las cantidades de magnitud discreta e interpretando geométricamente las cantidades de magnitud continua, distinción que tiene la ventaja de que permite construir con precisión, en tanto que cantidades de longitud, racionales y radicales a los que el tratamiento numérico no puede dar más que un valor aproximado.

Por otro lado, la principal aportación de Vieta al simbolismo algebraico: la utilización de letras para indicar las cantidades desconocidas, supone un gran cambio en la manera de concebir el álgebra. Para Vieta, las letras no sólo simbolizan las incógnitas, sino también las cantidades genéricas, lo que hoy en día se consideran parámetros. Según Kline (1992, vol.1, p. 350):

> Al hacer la distinción entre *logistica speciosa* y *logistica numerosa* en su Isagoge, Vieta trazó la línea divisoria entre aritmética y álgebra. El álgebra, la *logistica speciosa*, dijo, es un método de operar con especies o formas de cosas. La aritmética, la *numerosa*, trata de números. Así, en un solo paso, el álgebra se convirtió en un estudio de tipos generales de formas y de ecuaciones, pues lo que se hace para el caso general cubre una infinidad de casos particulares.

La utilización de símbolos para indicar parámetros, números que se suponen conocidos, pero genéricos, dota al simbolismo algebraico de una potencia desconocida hasta entonces que se traduce, no sólo en la posibilidad de estudiar en toda su generalidad distintos tipos de formas algebraicas y ecuaciones, sino en que las reglas de cálculo aritmético y los razonamientos verbales propios de obras anteriores van a ser sustituidos gradualmente por fórmulas y cálculos algebraicos. La demostración, que hasta entonces había exigido el lenguaje geométrico propio de la geometría euclídea, puede empezar a expresarse con más generalidad en el lenguaje propio del álgebra, tomando como principios de partida las propiedades de la aritmética.

Estas nuevas posibilidades del lenguaje algebraico lo hacen apto para modelizar, no sólo la aritmética, también la geometría y el análisis. Fermat y, sobre todo, Descartes, inician el desarrollo de la geometría analítica, estableciendo la relación entre las ecuaciones algebraicas y las curvas geométricas. La utilización, por parte de matemáticos posteriores como Wallis y Newton, de letras para indicar tanto las cantidades positivas como las negativas permitió "resumir en un solo tratamiento algebraico muchos casos que la geometría pura tenía que considerar separadamente (Kline, 1992, p.425)". También el cálculo infinitesimal se expresa desde el principio en términos algebraicos. Tanto Newton en su cálculo de fluxiones como Leibniz en su cálculo diferencial utilizan las notaciones y técnicas algebraicas.

Dado el contexto en el que se desarrolla la obra de MacLaurin, se comprueba, como era esperable, que apenas hay distancia entre los conocimientos que le permiten resolver los problemas propuestos y los saberes que intervienen en la comunicación de las técnicas de resolución utilizadas y los resultados obtenidos. En estos momentos, los matemáticos ya tienen permiso para hablar de los objetos algebraicos que utilizan en sus cálculos; es más, se espera que hablen de ellos, que los expliquen, justifiquen y demuestren sus propiedades porque, aunque el método de demostración geométrico está empezando a ser sustituido por el algebraico, el ideal euclídeo de fundamentación lógico-deductiva de las teorías matemáticas sigue en pie.

Sin embargo, el análisis de los saberes sobre la negatividad matemática, efectuado en el apartado anterior, pone de manifiesto silencios, vacilaciones, contradicciones o explicaciones excesivamente farragosas que son reveladoras de las dificultades que existen para encajar la negatividad en el corpus teórico de la época, dificultades que ya se han puesto de manifiesto públicamente en alguna polémica, como la protagonizada por Arnaud y Prestet en el último tercio del siglo XVII[82]. El punto conflictivo de la controversia es la aceptación de las cantidades negativas aisladas. Arnaud plantea varios argumentos en contra: el sinsentido de la regla de los signos "menos por menos es más", aplicada a dichas cantidades; la imposibilidad de sustraer una cantidad mayor de otra menor; y el absurdo que supone, por ejemplo, la proporción $1 : -4 :: -5 : 20$ pues, como el primer término excede del segundo, el tercer término debería ser mayor que el cuarto.

Muy probablemente MacLaurin conoce los argumentos que se oponen a la aceptación de las cantidades negativas aisladas, pero no se refiere a ellos o lo hace de manera algo contradictoria. Por ejemplo, en el caso del producto de cantidades positivas o negativas, no justifica la regla de los signos para cantidades cualesquiera, sólo lo hace cuando uno de los factores es un número entero y, aun siendo consciente de la limitación de su demostración, no la generaliza porque no puede darle un significado físico al producto de cantidades de magnitudes con dos sentidos.

También se encuentra atrapado en una contradicción respecto al orden: por un lado el cálculo algebraico le exige un orden total compatible con la suma, mientras que la identificación de las cantidades negativas con medidas de magnitudes con dos sentidos, promueve más bien un orden parcial en cada una de las determinaciones positiva o negativa. MacLaurin usa en sus cálculos y razonamientos el orden total, pero no habla de él y cuando habla, lo hace de una manera que parece referirse a un orden parcial que tampoco llega a enunciar.

No son éstas las únicas contradicciones que plantea el texto. Otra de ellas es la identificación del cero con la no existencia de cantidad de magnitud, con "nada", aunque la aceptación de las cantidades opuestas ha hecho

[82] La controversia entre Antoine Arnaud y Jean Prestet está descrita muy detalladamente en Schubring (2005, pp. 49-61).

aparecer otros significados para el cero: el cero como equilibrio de fuerzas, el cero origen, el cero como punto alrededor del cual gira una cantidad para convertirse en su opuesta, etc. La acepción de cero como “nada” fuerza a interpretar las cantidades menores que cero como cantidades que son “menos que nada”, lo que contraría al autor que es consciente de lo absurdo de esa expresión.

Por último, en la obra de MacLaurin el concepto de abscisa y la identificación entre los puntos de la recta real y los números reales se encuentra todavía en una fase intermedia de consolidación. Las expresiones algebraicas, antes que relaciones entre las abscisas y ordenadas de los puntos de la curva, parecen indicar relaciones entre medidas de segmentos orientados. Pero es precisamente esta interpretación como medidas de segmentos orientados la que va a permitir que las cantidades negativas se consideren tan reales como las positivas.

II.7.13. Límites de la concepción

La concepción de MacLaurin, aun conteniendo ciertas contradicciones, permite el desarrollo del álgebra clásica, entendida como teoría general de ecuaciones algebraicas, desde el momento que acepta las soluciones negativas e imaginarias. Cuando las ecuaciones se utilizan para modelizar un problema aritmético, la aparición de una solución negativa se puede explicar diciendo que refleja un vicio en el enunciado del problema y que la cantidad que supuestamente es un “haber” en realidad es una “deuda” o viceversa, tal como lo hace, por ejemplo, d’Alembert en la Enciclopedia:

> Imaginemos, por ejemplo, que buscamos el valor de un número x que añadido a 100 hace 50. Se tiene por las leyes del Álgebra, $x + 100 = 50$ y $x = -50$; lo que nos hace ver que que la cantidad x es igual a 50 y que en lugar de ser añadida a 100 debe ser quitada, de suerte que el problema se hubiera debido enunciar así: encontrar una cantidad x que habiendo sido quitada de 100 queda 50. (d’Alambert, 1784, p. 445)

En cuanto a las dificultades inherentes a la justificación de la estructura multiplicativa y ordinal de las cantidades negativas entendidas como medidas de cantidades de magnitud con dos sentidos o de cantidades de magnitud relativa[83] o de cantidades que sirven al crecimiento o decrecimiento de otras cantidades, se puede vivir con ellas, tal como muestra la obra de MacLaurin, puesto que no interfieren en el cálculo algebraico.

[83] Hay que tener en cuenta que la aparición, en el primer tercio del siglo XVIII, de las escalas para medir la temperatura dio lugar a otro posible significado para las cantidades con signo: el de cantidades que indican una diferencia orientada respecto a un cero que se refiere a una cantidad de magnitud convencional.

Todavía muchos matemáticos posteriores a MacLaurin como, por ejemplo, d'Alembert o Cauchy, y filósofos como Kant, interpretan las cantidades con signo como cantidades de magnitudes con dos sentidos o como crecimientos y decrecimientos, mientras otros matemáticos ponen de manifiesto las contradicciones que contienen dichas argumentaciones, discurso crítico que suele ir ligado al deseo de volver a una geometría sintética, al estilo de la propuesta por Euclides en sus *Elementos*, liberada del tratamiento algebraico. Es el caso de Carnot en su *Géométrie de Position*, cuando dedica gran parte de la disertación preliminar a explicar las razones por las cuales la doctrina de las cantidades negativas debe ser rechazada.

> La Geometría de posición es pues, hablando con propiedad, la doctrina de la cantidades dichas positivas y negativas, o más bien el medio de suplirlas, pues esta doctrina está aquí totalmente rechazada. (Carnot, 1803, p. ii)

También en Inglaterra se producen debates similares que han sido estudiados por Pycior (1981) y Schubring (2005). Según este último, la controversia se desarrolla alrededor de la relación que debe existir entre la geometría y el álgebra, confronta las posturas geométricas, de orientación intuicionista, con las que propugnan el manejo simbólico de sistemas de signos, de orientación formalista, y envuelve a las cantidades negativas. Pycior considera que el álgebra simbólica que introduce Peacock en *A Treatise on Algebra* responde al deseo de zanjar dicha polémica, rechazando la reducción del álgebra a aquellos supuestos admisibles en aritmética y proclamando su independencia. Para ello, distingue entre álgebra aritmética y álgebra simbólica:

> a) In one system, the symbols represent numerical quantities only: in the other, they are perfectly general in their representation.
>
> b) In one system, the signs + and − denote addition and subtraction only: in the other, they not only denote operations which are the inverse of each other, but are likewise use independently, one or other of them being prefixed to all symbols.
>
> c) In one system, the rule of signs is proved: in the other it is assumed.
>
> d) In one system, it is required to be proved that it is indiferent in what order operations succeed each other: in the other it is assumed to be so.
>
> e) In one system, all operations are limited by the possibility of interpreting the results, consistently with arithmetical prototypes: in the other, the operations are perfectly unlimited, there being a symbolical result in all cases.
>
> f) In one system, zero is the absolute minimum: in the other, the maximum and the minimum are equally unlimited.
>
> g) In one system, the general rule of indices is proved to be a consequence of the first assumption of them: in the other, it is assumed in its most general form.

h) In one system, the sign = means arithmetical equality or identity: in the other, it means symbolical identity or symbolical equivalence. (Peacock, 1830, pp. 68-69)

Y así, el álgebra, según Peacock, se convierte en la ciencia de las combinaciones de signos arbitrarios siguiendo leyes arbitrarias. Pero con una limitación: la restricción al ámbito aritmético de esos signos arbitrarios y sus combinaciones tiene que cumplir las leyes de la aritmética. Es lo que se conoce como "principio de permanencia de las leyes formales de la aritmética".

Sin embargo, no todos los matemáticos están de acuerdo con la postura de Peacock. Por ejemplo, Hamilton en una carta de 1835 a a su amigo Graves se muestra en desacuerdo con Peacock, manifestando su incomodidad ante la posible existencia de sistemas de signos sin significado y su deseo de que la intuición geométrica al estilo de Euclides siga presente en los sistemas de demostraciones[84].

> (...) while I am never satisfied unless I think that I can look beyond or through the signs to the things signified. I habitually desire to find or make in Algebra a system of demonstrations resting at last on intuitions, analogous in some way or other to Geometry as presented by Euclid. (citado en Pycior, 1981, p. 40)

La realidad es que en este momento, primer tercio del siglo XIX, la geometría euclídea sigue siendo un referente para la significación y validación de las teorías matemáticas. Será un cambio en la manera de entender el quehacer propio del álgebra, el análisis y la geometría el que obligará a superar esta concepción y a admitir una visión más formalista de las matemáticas.

Según Javier de Lorenzo (1977), en el entorno de 1827 se produce un cambio de mentalidad que rompe radicalmente con el quehacer matemático de la época. Esta ruptura epistemológica se caracteriza por la inversión en el modo de afrontar alguno de los problemas clásicos y por su visión crítica de los fundamentos de las matemáticas. Abel, uno de los matemáticos que la protagonizan, manifiesta claramente que:

> (...) su objetivo se centra en "hallar la razón" por la cual operando con formas no sancionables por el rigor deductivo se logran resultados correctos, dado que no hay, en la matemática del momento, -la plasmada en los libros de Lagrange, Euler, incluso Cauchy...-, auténticas demostraciones: "No creo

[84] Esta creencia no impide a Hamilton ser el primero en dar una definición formal de los números complejos como pares de números reales que cumplen determinadas propiedades, evitando con ello la referencia a $\sqrt{-1}$.

que podáis citar muchos teoremas en los cuales aparezcan las series infinitas y donde no pueda hacer a la demostración objeciones bien fundadas". (de Lorenzo, 1977, p. 40).

Esta inversión, este nuevo modo de afrontar los problemas clásicos, lleva a Abel, Ruffini y Galois a demostrar que no puede obtenerse una resolvente algebraica de la ecuación de quinto grado, allí donde antes se trataba de encontrarla; o a Gauss, Lobachewsky y Bolyai a desarrollar las geometrías no euclídeas, alli donde antes se intentaba demostrar el postulado de las paralelas; o a Cauchy a abandonar los infinitésimos, allí donde antes se trataba de encontrar la manera de justificarlos.

Una de las muchas consecuencias que produce esta ruptura con los modos de hacer "clásicos" es la aparición de las estructuras algebraicas y el desarrollo del álgebra abstracta. Otra consecuencia importante es que la geometría euclídea pierde su papel legitimador de las teorías matemáticas y los analistas, en su intento de "hallar la razón", vuelven sus ojos hacia la aritmética como fuente de fundamentación del análisis, lo que finalmente conduce a una definición axiomática de los conjuntos numéricos, desligada de referencias a las nociones de magnitud, cantidad o medida, y cuya razón de ser es la necesidad de asumir la clausura algebraica de $\mathbb{Q}$ y la de construir la recta real. Y así, despues de siglos de discusiones, aquellos objetos que empezaron siendo sumandos y sustraendos son finalmente aceptados como números y pasan a formar parte de distintos conjuntos numéricos: los números enteros, los racionales, los reales y los complejos.

II.8. Criterios de determinación de obstáculos epistemológicos en la historia de los números negativos

Desde el momento en que Diofanto enuncia la primera regla de los signos hasta hoy, la negatividad matemática ha sufrido múltiples avatares: rupturas, controversias, contradicciones, reconstrucciones, etc., que configuran un proceso largo, penoso y, en gran parte, soterrado. Durante siglos los matemáticos hicieron uso de unos objetos que les resultaban imprescindibles en el cálculo algebraico pero a los que, por diferentes motivos, no querían o no podían dar un estatuto claro dentro del saber matemático. Los nombres que en determinadas épocas recibieron algunas formas de negatividad: números ficticios, números absurdos, raíces falsas de las ecuaciones, etc., reflejan esta dificultad.

Y cuando, por fin, en el siglo XIX, algunas de esas formas de negatividad adquieren un estatuto propiamente matemático, este hecho pasa desapercibido al diluirse en el seno de procesos mucho más generales que afectaron a grandes ámbitos del quehacer matemático: la aritmetización del análisis que condujo a la necesidad de fundamentación de la aritmética, la modelización algebraica y analítica de la geometría, la aparición de las geometrías no euclídeas y la progresiva incorporación al álgebra y a la teoría de números de nuevos objetos difícilmente interpretables como abstracciones del mundo sensible.

Es esta accidentada historia de la negatividad matemática la que nos autoriza a plantearnos la búsqueda de obstáculos epistemológicos en el sentido propuesto por Brousseau (apartados I.1, I.2, I.6, I.15 y I.16), con las matizaciones comentadas en los apartados II.2 y II.3, y a partir del estudio sobre concepciones históricas realizado en este capítulo.

Ahora bien, tal como dice Gascón (1993), no pretendemos con ello hacer una reconstrucción histórica de la negatividad matemática, sino elaborar una reconstrucción racional, coherente con las concepciones estudiadas, que constituya una herramienta didáctica utilizable en el estudio de los fenómenos didácticos y en la reformulación de la génesis escolar del número negativo. Por tanto, las concepciones obstáculo que vamos a determinar a continuación son concepciones teóricas que no responden estrictamente a la concepción de un matemático concreto ni a la de la comunidad de matemáticos en una determinada época, dado que la epistemología de los conceptos matemáticos es muy compleja y difícilmente admite simplificaciones, pero que reflejan hitos importantes en el desarrollo histórico de la noción que pueden interpretarse en esos términos.

Primer criterio: condiciones de contorno de la negatividad matemática

El primer criterio que vamos a seguir para tratar de determinar los obstáculos epistemológicos es el de plantear como disyuntivas las diferencias observadas en las concepciones históricas analizadas en este capítulo y que, a nuestro juicio, condicionan la aceptación de la negatividad matemática y las formas que adopta. Son las siguientes:

- *Los objetos matemáticos entendidos como abstracciones del mundo sensible versus los objetos matemáticos definidos con independencia del mundo sensible.* En la matemática griega clásica se considera que los objetos matemáticos son idealizaciones que se obtienen por abstracción de las propiedades de los objetos del mundo físico y su definición incorpora esta relación. En cambio, hoy en día, la definición de cualquier objeto matemático se basa en otros objetos matemáticos definidos anteriormente y, en el caso de términos primitivos, en una definición axiomática, desligada del mundo físico, que no intenta especificar su naturaleza, sino su comportamiento.

En particular, los primeros números surgen alrededor de las técnicas de contar y medir y sólo pueden ser concebidos como cardinales, ordinales o medidas. Por tanto, todas sus operaciones y propiedades tienen un referente en términos de acciones físicas efectuadas sobre los conjuntos que se cuentan o los objetos cuyas cantidades de magnitud se miden, quedando sometidas a las leyes del mundo sensible. Mientras que actualmente, los conjuntos numéricos se definen axiomáticamente, respondiendo a las necesidades del álgebra y el análisis.

- *La cantidad versus el número.* La distinción entre cantidad y número ha jugado un papel importante en la evolución de las concepciones históricas. La matemática griega clasica sólo llamaba 'número' a los números naturales mayores que uno. La unidad se consideraba de naturaleza distinta de la pluralidad y los racionales e irracionales positivos se entendían como 'magnitudes' y se representaban mediante segmentos o figuras geométricas. A lo largo de la historia se fue generalizando el tratamiento numérico de racionales e irracionales positivos, aunque su consideración como números siguió siendo discutida. Finalmente se asume que todo objeto que expresa la medida de una cantidad de magnitud es un número, pero siguió siendo bastante habitual reservar el nombre de 'número' para la medida de la magnitud discreta y el de 'cantidad' para la medida de la magnitud continua.

  La posibilidad de interpretar geométricamente los sustraendos como "medida de segmentos orientados" y, más adelante, como abscisas, ayudó a la aceptación de las cantidades negativas como cantidades reales, en contraposición con las cantidades imaginarias. Por último, la definición axiomática de los números, al no contener referencias a la medida, desterró el término 'cantidad' que fue sustituido a todos los efectos por el término 'número'.

- *Visión estática del mundo sensible versus visión dinámica del mundo sensible.* Recogemos aquí las ideas de Lizcano respecto a las diferencias que aprecia entre la cultura griega clásica y la cultura china. La primera tiene una visión estática del mundo sensible en la que lo "normal" es el reposo y las magnitudes se miden sobre objetos inmóviles. En ella, lo opuesto al "ser" es el "no ser", la sustracción se relaciona con la acción física de quitar lo que existe para mostrar la "diferencia", y el "vacío", la "nada", no se puede concebir. Aquí la cantidad negativa aislada o la diferencia negativa es impensable porque caerían del lado del “no ser”: una cantidad no puede ser “menos que nada” y “no se puede quitar de donde no hay”.

En cambio, en la cultura china se concibe una oposición dinámica entre lo que “es de un modo” y lo que “es de otro modo” y se incorporan estas connotaciones dinámicas a las magnitudes y su medida. Son fuerzas que se neutralizan entre sí y se articulan alrededor de un origen, un gozne que, a su vez, puede interpretarse como un lugar vacío. Estas creencias facilitan la aceptación de las cantidades negativas, entendidas como cantidades correspondientes a magnitudes con dos sentidos que se oponen y neutralizan, y de la diferencia negativa como diferencia orientada.

- *Justificación axiomático-deductiva versus justificación funcional.* La exigencia de validar las propiedades de los objetos matemáticos mediante deducciones lógicas a partir de unos primeros hechos aceptados por su “evidencia”, propia de la geometría euclídea, es extraña a la mayor parte de las culturas antiguas. En éstas los resultados matemáticos se aceptaban en la medida en que eran útiles, es decir, que permitían resolver con éxito los problemas planteados. Los matemáticos árabes y europeos posteriores, conocedores de los dos tipos de justificación, fluctuaron entre una y otra, según las épocas históricas en las que vivieron y las ramas de las matemáticas de las que se ocuparon.

  La negatividad matemática se desarrolló en un principio gracias a la existencia de momentos históricos en los que la exigencia de una justificación axiomático-deductiva se pudo soslayar, mientras que las contradicciones que planteaba se agudizaron en los momentos en los que se enfatizó el trabajo de fundamentación lógica de las matemáticas.

- *Justificación basada en la geometría versus justificación basada en la aritmética.* La justificación axiomático-deductiva propia de la matemática griega clásica se basa en razonamientos lógicos sustentados por las construcciones geométricas, pero el desarrollo de las técnicas de cálculo algebraico y de la utilización de letras para indicar no sólo las incógnitas, sino también las cantidades genéricas, promovió la aparición de otro tipo tipo de demostración basada en las propiedades formales de las operaciones aritméticas. El razonamiento verbal fue en gran parte sustituido por el cálculo algebraico.

- *El álgebra como herramienta de resolución de problemas aritméticos versus el álgebra como dominio de las matemáticas independiente de la aritmética.* El álgebra, que se inicia como un simple instrumento de cálculo al servicio de la aritmética, evoluciona hasta convertirse en un objeto de estudio en sí misma, pero cuyas bases lógicas dependen de la aritmética, para finalmente convertirse en un algebra abstracta cuyos objetivos y métodos de validación son independientes de la aritmética.

- *La simbolización de la incógnita versus la simbolización de incógnitas, parámetros y variables.* Inicialmente se utilizaron distintos símbolos para indicar la incógnita, pero finalmente se utilizaron letras cuyo significado se extendió al caso de parámetros y variables. Esto permitió, por un lado, el paso a las ecuaciones con coeficientes genéricos y el desarrollo de una teoría general de ecuaciones y, por otro lado, la expresión simbólica de fórmulas que solucionan tipos de problemas, el estudio de las curvas geométricas en función de sus parámetros y el desarrollo de métodos de demostración basados en el cálculo algebraico.
- *El álgebra modelizada por la geometría versus la geometría modelizada por el álgebra.* En los *Elementos*, la geometría es un instrumento de modelización tanto de la aritmética como del álgebra. La magnitud (es decir, la cantidad de magnitud) se expresa mediante un segmento u otra figura geométrica, lo que conlleva que muchas propiedades de las operaciones aritméticas, incluso la resolución de ecuaciones, se presentan con un lenguaje geométrico, dejando al margen el posible tratamiento numérico. Sin embargo, otras culturas siguieron un proceso inverso: utilizaron la aritmética para modelizar la geometría sintética. En este contexto, la cantidad de magnitud se expresaba numéricamente y los problemas geométricos se resolvían en términos aritméticos o, incluso, algebraicos.

  Finalmente, gracias en parte a las cantidades negativas, se establece la correspondencia biunívoca entre los puntos de la recta y los números reales y la geometría termina siendo modelizada por el álgebra y el análisis: geometría analítica, algebraica y diferencial, al mismo tiempo que la primera aporta a los segundos un recurso que permite ilustrar sus definiciones, propiedades y teoremas.

Segundo criterio: condiciones de delimitacion del obstáculo epistemológico

El segundo criterio es el de limitar la determinación de obstáculos epistemológicos a aquellos momentos en que se produce un cambio en la naturaleza del trabajo matemático, una bifurcación en el sentido que propone Gascón (1993). Y, si tenemos en cuenta que la negatividad matemática surge y se desarrolla inicialmente en el entorno del cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones, nos encontramos con dos momentos en que la naturaleza del quehacer algebraico cambia de manera muy ostensiva:

- el momento en el que, por un lado, la búsqueda de las soluciones de las ecuaciones algebraicas da paso a una teoría general de ecuaciones que estudia las relaciones de las soluciones entre sí y con los tipos de ecuaciones y, por otro lado, se establece la relación entre las curvas geométricas y las ecuaciones algebraicas, y
- el momento en el que la teoría general de ecuaciones deja paso al estudio de las estructuras algebraicas y al álgebra abstracta.

Tercer criterio: condiciones de determinación del obstáculo epistemológico

Son las ya indicadas en el apartado II.1:

- La existencia de campos de problemas, extensiones del que define la concepción, que entran dentro de las preocupaciones matemáticas de la época y, sin embargo, sólo se abordan parcialmente o no se abordan en absoluto.
- La existencia de técnicas de resolución de problemas cuya complejidad no está justificada, pues, aparentemente, el saber matemático de la época debería haber permitido su sustitución por técnicas más simples.
- La existencia de objetos matemáticos que se utilizan a la hora de resolver problemas, pero que, en ningún momento, se explican ni se justifican, es decir, que funcionan como conocimientos, pero no como saberes.
- La existencia de discursos explicativos y justificativos de las técnicas de resolución, especialmente farragosos o prolijos.

De acuerdo con estos tres criterios, postulamos la existencia de dos concepciones que, desde el punto de vista histórico, han constituido un obstáculo epistemológico a la incorporación del número negativo al saber matemático y cuyas características desglosamos a continuación, analizando para cada una de ellas:

- las condiciones de contorno de la negatividad matemática,
- las características de la negatividad matemática y
- las condiciones de determinación del obstáculo epistemológico.

II.9. Primer obstáculo epistemológico: los sustraendos como objetos intermedios del cálculo algebraico

Condiciones de contorno de la negatividad matemática

Campo de problemas. Inicialmente lo constituyen problemas aritméticos, es decir, problemas en los que los datos y las soluciones son números sin determinación, ligados por relaciones que pueden ser expresadas en términos de operaciones aritméticas. Los números pueden estar o no contextualizados; en este último caso, se refieren a medidas de cantidades de magnitud. Posteriormente, el campo de problemas evoluciona hacia la búsqueda de fórmulas de resolución de determinados tipos de problemas aritméticos y de resolventes de ecuaciones de distinto grado.

Alcance y naturaleza de los números. Son números sin determinación, entendidos como resultado de la medida de cantidades de magnitud. Conforme la concepción evoluciona, a los conjuntos numéricos, inicialmente limitados a los números naturales mayores que uno, se incorporan la unidad, el cero, como consecuencia de su uso en el sistema de numeración posicional decimal, y los racionales e irracionales positivos. Generalmente, se enfatiza su naturaleza como medidas llamándoles 'cantidades', pero se les da un tratamiento numérico.

Estatuto del álgebra. En un principio el álgebra no es más que una técnica de resolución al servicio de la aritmética que permite afrontar problemas aritméticos desde un punto de vista numérico, en contraposición con la resolución geométrica propia de la matemática griega clásica. Posteriormente se convierte por sí misma en un objeto de estudio y los problemas que afronta ya no están totalmente condicionados por la aritmética, pero sigue interpretándose como una prolongación de la aritmética, como una "aritmética generalizada".

Técnicas de resolución. Son técnicas algebraicas de resolución de ecuaciones que desembocan en otras técnicas algebraicas como el cálculo con radicales, exponentes, monomios y polinomios. En esta concepción se llegan a encontrar las resolventes de las ecuaciones hasta el cuarto grado y se buscan las soluciones por radicales de las ecuaciones de grado superior a cuatro.

Notación utilizada. Aun cuando en sus inicios se trata de un álgebra sincopada o retórica, finalmente acaba siendo un algebra simbólica con un símbolo para indicar la incógnita y signos para indicar las operaciones aritméticas y la relación de igualdad.

Descripción y justificación de las técnicas. La consideración inicial del álgebra como una prolongación de la aritmética facilita una presentación funcional de la misma, puesto que, en primer lugar, se comprueba fácilmente que los cálculos algebraicos permiten solucionar los problemas aritméticos y, en segundo lugar, las técnicas algebraicas son una prolongación de las operaciones aritméticas y sus propiedades, sobradamente conocidas y validadas. De hecho, la geometría euclídea ya las ha demostrado mediante construcciones geométricas que afectan a cantidades de magnitud representadas por segmentos u otras figuras geométricas. Pero también un tratamiento numérico en el que se relacionan las operaciones con ciertas acciones físicas permite la validación de las propiedades por su conexión con evidencias del mundo sensible.

Características de la negatividad matemática

Objetos de referencia de la negatividad matemática. Los objetos de referencia son los sustraendos, cuya consideración se hace necesaria porque la aparición de la incógnita cambia la naturaleza del cálculo: las operaciones ya no son efectuables en el orden en que se proponen y, por consiguiente, ya no son operaciones entre números sin determinación, sino operaciones entre términos que a su vez indican operaciones que no se pueden realizar. Esto obliga a operar, entre otros, términos que a su vez son diferencias indicadas y por tanto a operar los dos términos de una diferencia: el minuendo y el sustraendo, lo que, en un principio, se traduce en la necesidad de operar con términos sin determinación y sustraendos. Finalmente, la concepción evoluciona hacia un cálculo con sumandos y sustraendos -los números sin determinación se convierten en sumandos- que permite reducir la suma y resta aritméticas a una sola operación, la suma -entendida, más bien, como una composición de operadores aditivos-, cuyas buenas propiedades facilitan los cálculos, así como su descripción y justificación.

Los sustraendos son, por tanto, elementos intermedios del cálculo algebraico, que deben desaparecer en las soluciones finales del problema. En esta concepción no se admiten ni sustraendos aislados -salvo que sea un exponente- ni diferencias con el minuendo menor que el sustraendo, porque no se pueden justificar en el ámbito aritmético[85]. Por consiguiente, un sustraendo no puede ser solución de una ecuación. Pero, a medida que la

[85] En algunos matemáticos que pueden inscribirse en esta concepción -Chuquet, por ejemplo- hay indicios de interpretación del sustraendo aislado como deuda y de la diferencia negativa como diferencia orientada, pero no dejan de ser casos particulares que aparecen muy de tarde en tarde y nunca como solución válida de una ecuación.

concepción evoluciona, se van asumiendo las diferencias negativas, los sustraendos sin minuendo e, incluso, las raíces de sustraendos, siempre que aparezcan en el transcurso de los cálculos y no como resultado final. Y esto se debe a que el algebrista se encuentra frecuentemente en situaciones en las que calculando con expresiones que no tienen sentido se llega finalmente a una solución correcta.

Consideración de sumandos y sustraendos. La consideración que reciben sumandos y sustraendos es muy diferente. Los sumandos existen por sí mismos y en el momento en que se precisa se convierten en números sin determinación, mientras que los sustraendos necesitan de un minuendo mayor o igual que él que lo legitime y al final del cálculo deben desaparecer. Sin embargo, tanto en el cálculo como en la descripción las operaciones que les afectan, los sumandos y sustraendos son tratados de manera igualitaria como cantidades precedidas de un signo. La única salvedad es que si una expresión comienza por una cantidad precedida de un signo $+$, éste puede suprimirse.

Propiedades de los objetos de referencia. En esta concepción se asume que las propiedades de las operaciones aritméticas se extienden a sumandos y sustraendos y en los cálculos se pone de manifiesto el conocimiento de su estructura de cuerpo conmutativo totalmente ordenado y las propiedades que se derivan de ella.

Significado de los signos $+$ y $-$. A medida que la concepción evoluciona se suceden distintos signos cuyo significado originario es el de ‘signos operativos binarios generalizados’, es decir, signos que indican si los términos de las expresiones algebraicas son sumandos o sustraendos. Pero además, estos signos tienen frecuentemente un significado como ‘signos operativos binarios entre números sin determinación’, es decir, representan también las operaciones aritméticas de suma y resta de números sin determinación. Finalmente se generaliza el uso de los signos $+$ y $-$ con los dos significados arriba indicados.

Dominio de las incógnitas. El dominio se va ampliando a medida que se amplían los conjuntos numéricos. Inicialmente son los números naturales, después los racionales positivos y finalmente los reales positivos. Hay que tener en cuenta que la incorporación del cero al dominio es bastante tardía.

Condiciones de determinación del obstáculo epistemológico

Relaciones entre conocimiento y saber. Estamos en una concepción que utiliza en sus técnicas de cálculo objetos a los que no puede dar un estatuto claro dentro del corpus matemático de la época y que, por tanto, procura no hablar de ellos o los rechaza explícitamente. Es el caso de las diferencias con minuendo menor que el sustraendo, de los sustraendos sin minuendo y de las raíces de sustraendos que aparecen en el transcurso del cálculo, cuya justificación, o bien se evita, o bien se hace reconociendo que son expresiones sin sentido, pero que son útiles porque conducen a soluciones correctas.

Sucede lo mismo con las soluciones de las ecuaciones. Aunque en un principio los algebristas no ven las soluciones negativas, posteriormente llegan a obtenerlas, lo mismo que las soluciones imaginarias. Sin embargo, una vez obtenidas no las aceptan y las califican de "falsas", "absurdas", "ficticias", etc. Por tanto, nos encontramos con objetos que forman parte de los conocimientos de la concepción, pero que no pueden ser aceptados como saberes.

Límites de la concepción. La concepción no permite desarrollar una teoría general de ecuaciones pues para hacerlo necesita aceptar las soluciones negativas e imaginarias. Sin embargo, los esfuerzos por encontrar la resolvente de la ecuación de grado cinco ponen de manifiesto propiedades de las raíces de los polinomios que no pueden expresarse en su forma general debido al rechazo de las raíces negativas o imaginarias. Nos encontramos con un nuevo ámbito de estudio: la teoría general de ecuaciones, que forma parte de las preocupaciones de los algebristas que participan de esta concepción, pero que no se puede desarrollar convenientemente porque la propia concepción lo impide.

Por otra parte, la inexistencia de símbolos para indicar los parámetros o variables, es decir, las cantidades genéricas que pueden intervenir en la resolución de un problema o ecuación, sin que sea necesario determinarlas, impide utilizar el simbolismo algebraico para representar las fórmulas de resolución de los distintos tipos de problemas y las resolventes de las ecuaciones algebraicas con ceficientes genéricos. Tanto el paso de la resolución de problemas a la resolución de tipos de problemas como el desarrollo de una teoría general de ecuaciones se ven entorpecidos por esta causa.

Aspectos de la concepión que obstaculizan su evolución. Estamos ante una concepción amalgamada, fruto de la confluencia de las diversas formas en las que distintas culturas conciben las matemáticas. Está presidida por la visión que la cultura griega clásica tiene de las matemáticas y de algunos aspectos del mundo que nos rodea: consideración de los objetos matemáticos -los números, en particular- como abstracciones del mundo sensible; organización de las matemáticas en forma de teoría axiomático-deductiva en la que los razonamientos basados en las construcciones geométricas juegan un papel principal; modelización geométrica de lo numérico, interpretando los números como magnitudes (es decir, cantidades de magnitud) representadas por figuras geométricas y justificando también geométricamente las operaciones aritméticas y sus propiedades; y visión estática del mundo que imposibilita aceptar lo que no está del lado del "ser", de "lo que existe", que relaciona la diferencia con "lo que queda después de la acción de sustraer" y que sólo concibe la medida sobre objetos en reposo.

Pero la influencia de otras culturas crea un espacio que no entra directamente en contradicción con la matemática griega clásica, pero que tampoco puede incardinarse totalmente en ella. Es un espacio en el que el tratamiento numérico de las cantidades y de los problemas aritméticos se impone frente al tratamiento geométrico, en el que la visión restrictiva de los números propia de la geometría euclídea se relaja, y en el que la exigencia de demostración, típica de una teoría axiomático-deductiva, queda relegada a un segundo término ante la comprobación de la bondad de los resultados obtenidos.

Es ahí donde la negatividad matemática se desarrolla, en los límites todavía permitidos por la matemática griega clásica, pero muy cerca de posibles transgresiones. Y la aceptación de los sustraendos como soluciones de las ecuaciones, necesaria para que la concepción pueda seguir evolucionando y pueda afrontar nuevos campos de problemas, supondría más de una transgresión por las siguientes razones:

- La consideración del álgebra como una aritmética generalizada impone que las soluciones de las ecuaciones sean números o cantidades.
- Los números o cantidades son abstracciones del mundo sensible que indican la "pluralidad" o la medida de cantidades de magnitud sobre objetos en reposo. En estas condiciones es inviable aceptar que la medida incorpore connotaciones dinámicas.
- La aceptación de los sustraendos como medidas obliga a asumir la existencia de medidas que son "menos que nada" ya que el cero es un cero absoluto que se identifica con la ausencia de cantidad de magnitud, la nada, el vacío.
- La admisión de cantidades y de diferencias negativas supone también aceptar "que se puede sustraer de donde no hay", dado que la diferencia se define ligándola a la acción física de sustraer.

Además, por otro lado, en esta concepción las únicas cantidades desconocidas que intervienen en un problema o en una ecuación son las incógnitas, es decir, las cantidades desconocidas que es preciso determinar para encontrar la solución del problema o ecuación. Toda la tradición algebrista se basa en la búsqueda de la cantidad desconocida, tanto más cuanto que el álgebra se usa sobre todo para resolver problemas aritméticos que exigen una solución numérica. En estas condiciones introducir en el cálculo algebraico símbolos para indicar cantidades desconocidas que no van a ser determinadas rompe con la tradición anterior. Pero el desarrollo de la teoría general de ecuaciones y la modelización algebraica de la geometría y el análisis lo harán necesario.

Por consiguiente, estamos en un momento de ruptura epistemológica en el que la concepción, para poder afrontar nuevos campos de problemas, no sólo necesita adquirir nuevos conocimientos y saberes, sino que también necesita reorganizar los antiguos, rechazar algunos de ellos e incorporar ese rechazo a la nueva concepción.

Aspectos asumidos en la nueva concepción que rompen con la antigua concepción. El paso a la nueva concepción va a suponer, por tanto, asumir:

- una cierta independencia del álgebra respecto de la aritmética que permita aceptar como soluciones de las ecuaciones objetos que en aritmética no tienen sentido;
- una visión dinámica del mundo sensible que acepte la existencia de magnitudes con sentidos opuestos y la incorporación a la medida de la referencia a dicho sentido;
- la aceptación de un cero que, en el caso de las magnitudes con dos sentidos, es un cero origen a partir del cual se generan los dos sentidos de la magnitud y, en el caso de las magnitudes relativas, es una cantidad de magnitud convencional;
- la aceptación de las diferencias orientadas, entendidas como resultado de la acción de comparar, lo que permite interpretar una diferencia negativa como el resultado de comparar dos cantidades cuando la primera es menor que la segunda.
- la simbolización algebraica, no solo de las cantidades desconocidas a determinar, las incógnitas, sino también de otras cantidades genéricas, parámetros o variables, que pueden quedar sin determinar.

II.10. Segundo obstáculo epistemológico: las cantidades negativas como soluciones de las ecuaciones

Condiciones de contorno de la negatividad matemática

Campo de problemas. Lo constituyen, por un lado, todos aquellos problemas cuya solución permite el desarrollo de una teoría general de ecuaciones algebraicas y, por otro lado, los problemas que relacionan las curvas y superficies geométricas con las ecuaciones algebraicas.

Alcance y naturaleza de los números. Los sustraendos son aceptados como cantidades porque pueden ser explicados en términos de medidas de cantidades de magnitud con dos sentidos: segmentos orientados, deudas y haberes, etc. Se asumen, por consiguiente, las cantidades negativas y positivas, tanto racionales como irracionales, y reciben el nombre de 'cantidades reales', para marcar la diferencia con las soluciones imaginarias de las ecuaciones que, aunque reciben el nombre de 'cantidades imaginarias', no pueden interpretarse como medidas.

Debido al uso de letras para simbolizar parámetros y variables, propio de esta concepción, las cantidades ya no se expresan numéricamente, sino algebraicamente, por lo que reciben también el nombre de 'cantidades algebraicas'. Esto hace que el tratamiento numérico de las cantidades sea menos manifiesto, aunque sigue vigente en los ejemplos, salvo cuando se trabaja en el ámbito de la geometría analítica, en cuyo caso las cantidades se representan mediante segmentos orientados o abscisas.

Estatuto del álgebra. El álgebra es un dominio propio de las matemáticas que incluso está siendo utilizado para modelizar otros dominios como la geometría. Los objetos que maneja ya no tienen que estar justificados por la aritmética de los números sin determinación, pero hay una exigencia de que las propiedades de esos nuevos objetos -las cantidades negativas, entre otros- conserven las "buenas propiedades" de las operaciones aritméticas.

Técnicas de resolución. Son todas las técnicas de cálculo con objetos algebraicos: cantidades negativas, radicales, monomios, polinomios, fracciones algebraicas, ecuaciones; las resolventes y otras técnicas de búsqueda de soluciones de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones, basadas en las propiedades de las raíces de los polinomios desarrolladas en la teoría general de ecuaciones; la descomposición de los polinomios, etc. A esto hay que añadir las técnicas de representación de curvas a partir de las ecuaciones algebraicas que las definen y la búsqueda de las ecuaciones que corresponden a curvas definidas por medios geométricos.

Notación utilizada. Es prácticamente la actual, salvo en lo que se refiere al uso de paréntesis, inexistentes porque las operaciones intermedias que los hacen necesarios no se escriben. Además, se asume la simbolización mediante letras, no sólo de la incógnita, sino también de variables y parámetros, lo que supone un avance muy importante en el desarrollo del álgebra porque permite expresar simbólicamente las definiciones y propiedades de los objetos algebraicos, las técnicas de resolución y los razonamientos utilizados para justificar las propiedades y las técnicas.

Tipo de discurso justificativo de las técnicas. En esta concepción la fundamentación lógico-deductiva vuelve a cobrar importancia. Los objetos algebraicos y sus operaciones se definen, sus propiedades se demuestran y las técnicas se justifican a partir de las definiciones y propiedades establecidas previamente en la teoría. La relativa independencia que el álgebra ha conseguido respecto a la aritmética hace que los objetos algebraicos ya no tengan que interpretarse en el seno de la aritmética de los números sin determinación, pero las justificaciones de la teoría algebraica se basan en los "principios" de la aritmética. Ocasionalmente, se sigue recurriendo a justificaciones que descansan en la geometría euclídea, pero es más frecuente el recurso a justificaciones lógico-deductivas que se apoyan, bien en la relación existente entre las operaciones aritméticas y determinadas acciones físicas aplicadas a cantidades de magnitud, bien en la exigencia de conservar las propiedades de la suma y producto aritméticos al extender esas operaciones a nuevos objetos algebraicos.

Por otra parte, como ya hemos dicho anteriormente, desde el momento que las letras pueden representar también parámetros y variables, tanto la descripción de las técnicas como los razonamientos que las justifican puedan expresarse utilizando el simbolismo y el cálculo algebraico.

Características de la negatividad matemática

Objetos de referencia de la negatividad matemática. Los objetos de referencia son las cantidades negativas. La aceptación de las magnitudes con dos sentidos o de las magnitudes relativas ha permitido dar a los sustraendos un significado como medidas, lo que, en una concepción que sigue entendiendo la cantidad como una abstracción del mundo sensible obtenida a través de la medida de las magnitudes, supone un argumento que sanciona su consideración como cantidades reales y como soluciones de las ecuaciones. Así pues, las cantidades pueden ser positivas y negativas y las primeras se identifican con las cantidades sin determinación.

En esta concepción el cero admite nuevas interpretaciones: del cero absoluto, propio de la concepción anterior, se pasa a un cero origen, es decir, un punto de apoyo a partir del cual se generan las cantidades en uno u otro sentido, o a un cero convencional que se adjudica a una cierta cantidad de magnitud. También adquiere sentido la diferencia negativa, interpretada como diferencia entre cantidades con signo.

Consideración de las cantidades positivas y negativas. Las cantidades negativas ya pueden ser interpretadas como medidas, se consideran tan reales como las positivas y se admiten como soluciones de las ecuaciones. Sin embargo, las cantidades positivas puede reducirse, siempre que se desee, a medidas sin determinación, lo que no sucede con las cantidades negativas. El propio nombre que reciben estas últimas tiene connotaciones poco favorables que las coloca en un plano inferior respecto a las cantidades positivas. El término 'negativo' se relaciona con términos como 'nocivo', 'adverso', 'desfavorable', etc., mientras que las acepciones del término 'positivo' son socialmente mucho más deseables.

Propiedades de los objetos de referencia. En los cálculos se asume la estructura algebraica de cuerpo conmutativo totalmente ordenado de las cantidades reales e, incluso, la de cuerpo conmutativo de las cantidades reales e imaginarias, y las propiedades que se derivan de ellas.

Justificación de las propiedades de los objetos de referencia. Antes las propiedades de la aritmética se conservaban porque los objetos algebraicos simbolizaban cantidades, ahora se conservan poque los objetos algebraicos, que ya no tienen por qué ser cantidades, deben responder a los mismos principios aritméticos que afectan a las cantidades.

Significado de los signos + y −. La aceptación de las cantidades negativas introduce el 'significado predicativo' de los signos, es decir, el significado que indica la naturaleza positiva o negativa del número. Además, la posibilidad de representar los parámetros y variables mediante letras que pueden tomar valores positivos o negativos hace que el signo $-$ delante de una letra, $-a$, se interprete como el opuesto de a, lo que introduce el 'significado operativo unario' de los signos. Estos significados se unen a los ya existentes en la concepción anterior: el significado operativo binario entre números sin signo y el significado operativo binario generalizado. Falta el 'significado operativo binario entre números con signo' que en esta concepción no aparece debido a que la inexistencia de paréntesis no permite el desarrollo de la 'notación completa', es decir, la notación en la que los signos de las operaciones binarias de suma y resta no se suprimen.

Dominio de incógnitas, parámetros y variables. El dominio de las incógnitas son las cantidades reales e imaginarias. En cuanto al dominio de parámetros y variables, suele ser el conjunto de las cantidades reales, pero no siempre se acepta que una letra precedida de un signo + pueda tomar valores negativos, o viceversa, que una letra precedida de un signo − pueda tomar valores positivos.

Condiciones de determinación del obstáculo epistemológico

Relaciones entre conocimiento y saber. La interpretación de las cantidades negativas como medidas de cantidades de magnitud relativa o con dos sentidos facilita su aceptación como soluciones de las ecuaciones, pero crea problemas a la hora de justificar la estructura algebraica de las cantidades reales. En efecto, la estructura multiplicativa de sumandos y sustraendos que se impone por necesidades del cálculo algebraico, no se justifica fácilmente en términos de producto de medidas de cantidades de magnitud con dos sentidos o relativa. En realidad, el comportamiento de dichas cantidades de magnitud está mucho más cerca de una estructura vectorial con un producto escalar que de una estructura numérica con un producto interno.

Tampoco la estructura de orden total compatible con las operaciones, que afecta a sumandos y sustraendos, de acuerdo con las reglas del cálculo algebraico, puede establecerse fácilmente a partir del significado como cantidades positivas y negativas. Del discurso sobre la neutralización de fuerzas opuestas en la suma, o de fuerzas del mismo sentido en la resta, parece desprenderse que la cantidad mayor es la que tiene mayor valor absoluto, dado que es la que "le puede" a la otra cantidad. Esto induce un orden del tipo $a \leq b \iff \mid a \mid \leq \mid b \mid$, que no es compatible con las operaciones y no permite el desarrollo del cálculo algebraico en los términos habituales.

Por último, la aceptación de un cero origen o convencional no rompe totalmente con la interpretación prioritaria del cero como representación de la nada o el vacío, interpretación que interfiere en los razonamientos, provocando frecuentes contradicciones o sinsentidos.

Límites de la concepción. La concepción llega a su límite cuando la resolución de distintos problemas clásicos -el de encontrar la resolvente de la ecuación de grado quinto, entre otros- desemboca en el estudio y desarrollo de las estructuras algebraicas abstractas. A esto se añaden la crítica de la geometría euclídea como sistema axiomático-deductivo y la decisión de fundamentar el análisis en la aritmética, en vez de en la geometría, como se había hecho hasta el momento, lo que conduce a la axiomatización de la aritmética.

Aspectos de la concepión que obstaculizan su evolución. Si bien es cierto que la aritmética ha facilitado en un principio el desarrollo del álgebra, uno de los aspectos que sigue obstaculizando la evolución de la concepción es la consideración del álgebra como un aritmética generalizada, como un dominio de las matemáticas cuya validación depende de las leyes de la artimética.

Desde luego, la restricción del significado de las expresiones algebraicas al campo numérico permite un discurso justificativo de las técnicas algebraicas más económico. No es necesario definir los nuevos objetos: polinomios, fracciones algebraicas, operaciones, ecuaciones, etc, puesto que pueden ser entendidos como signos que expresan números o relaciones entre números y la justificación de las reglas de cálculo se puede hacer con rapidez, debido a la familiarización con el dominio aritmético.

Pero además, en la matemática clásica no es posible justificar las técnicas de cálculo algebraico sin considerar los objetos algebraicos como signos escritos que evocan los números o la extensión geométrica. La forma moderna de justificación que se basa, no en la atribución de significado a los objetos algebraicos, sino en una toma de decisión convencional respecto de las manipulaciones a que pueden ser sometidos, no puede desarrollarse en un mundo en el que los objetos matemáticos son interpretados como abstracciones del mundo sensible, como objetos dados *per se* y sobre los que no cabe inventar las reglas de juego, sino descubrirlas.

Y esto pone de manifiesto el otro aspecto de la concepción que obstaculiza su evolución: la consideración del número o la cantidad como medidas de cantidades de magnitud y la imposibilidad de concebirlos de otro modo, lo que liga la definición del número y el establecimiento de sus operaciones y propiedades a "evidencias" observadas en el mundo de los sentidos y a las que no se puede objetar.

Por consiguiente, la evolución de la concepción exige una ruptura epistemológica que rechace la dependencia del álgebra de la aritmética y la referencia a la medida en la definición de los números.

Aspectos asumidos en la nueva concepción que rompen con la antigua concepción. El paso a la nueva concepción va a suponer, por tanto, asumir:

- un álgebra totalmente independiente de la aritmética en la que las letras se refieren a objetos abstractos que no tienen por qué ser números y en la que se definen estructuras algebraicas que no tienen por qué responder a las estructuras algebraicas propias de la aritmética;

- una definición axiomática de los números, independiente de los procesos de medida, y sin referencias al mundo sensible; y
- la aceptación como números de todos aquellos objetos que, completan $\mathbb{Q}$, dando lugar al conjunto $\mathbb{R}$, o que pertenecen a la clausura algebraica de $\mathbb{R}$. De esta manera, con el establecimiento de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$, se cubren las necesidades del álgebra, el análisis y la geometría y los números negativos quedan subsumidos en los distintos conjuntos numéricos.

II.11. Consecuencias para la enseñanza

La determinación de obstáculos epistemológicos efectuada en este capítulo puede tener consecuencias para la enseñanza. Desglosamos a continuación los aspectos a tener en cuenta que consideramos más importantes:

- La razón de ser inicial de los números negativos es el cálculo algebraico. Es en el entorno de un cálculo en el que algunas de las operaciones no son efectuables donde se pone de manifiesto la necesidad de sustituir las operaciones entre números sin determinación por las operaciones entre sumandos y sustraendos, lo que da lugar a la primera forma de negatividad.
- La aceptación de los números negativos supone una ruptura epistemológica con concepciones anteriores que se han convertido en un obstáculo. Esto exige rechazar algunos de los conocimientos y saberes que formaban parte de la concepción anterior e incorporar dicho rechazo como saber de la nueva concepción.
- La consideración inicial del álgebra como un mero cálculo al servicio de la aritmética ha jugado un papel contradictorio en el desarrollo de la primera. Desde luego, la estructura algebraica de sumandos y sustraendos, base de todo el cálculo algebraico, pudo ser establecida gracias al conocimiento de la estructura algebraica de las operaciones aritméticas. Pero, por otro lado, la dependencia de la aritmética ha obstaculizado el paso a un álgebra abstracta, necesaria para darle un estatuto numérico a los sustraendos.
- Otro aspecto que ha obstaculizado la aceptación de los sustraendos como números es la consideración de los objetos matemáticos como abstracciones del mundo sensible y la incorporación de esa referencia a

las definiciones y justificación de sus propiedades. La consecuencia es que las propiedades de los objetos matemáticos no pueden contradecir las "evidencias" obtenidas a través de los sentidos.

- En el caso particular de los números, su definición a partir de los procesos de medida y la relación de las operaciones aritméticas con determinadas acciones físicas efectuadas sobre las cantidades de magnitud impiden que los sustraendos puedan ser considerados números. Y cuando se encuentra la forma de interpretar los sustraendos como medidas, lo que facilita su aceptación como números, las evidencias físicas no permiten justificar la estructura multiplicativa y ordinal propia de sumandos y sustraendos y necesaria para que el cálculo algebraico se pueda llevar a cabo.

CAPÍTULO III

La transposición didáctica del número negativo: obstáculos epistemológicos y didácticos

III.1. Introducción

En el capítulo anterior hemos definido unas concepciones teóricas, coherentes con las concepciones históricas analizadas y que cumplen los requisitos para ser consideradas obstáculos epistemológicos, que han impedido durante muchos siglos la aceptación de la negatividad matemática como un objeto de saber asumido sin controversia por la comunidad científica. Ahora bien, un obstáculo epistemológico interesa a la didáctica de las matemáticas si se constata su pervivencia en la enseñanza, es decir, si se puede colegir la existencia en un número apreciable de alumnos de concepciones obstáculo similares a las que se han definido en la historia de las matemáticas.

Pero, aun cuando la constatación experimental de la existencia de concepciones obstáculo sobre los números negativos en los alumnos no se aborda en esta memoria y queda pendiente de ulteriores investigaciones, si repasamos los obstáculos epistemológicos anteriormente definidos, vemos que bastantes de sus características son candidatas a formar parte de las concepciones de los alumnos, debido a la manera en que se desarrolla la génesis escolar habitual del número positivo, sus operaciones y propiedades.

En efecto, en la escuela primaria, como no puede ser de otro modo, los números naturales se presentan como cardinales u ordinales y los racionales positivos como medidas de la cantidad de magnitud. Bajo esas premisas, un número será menor que otro si como ordinal "va antes" y como cardinal o medida "es más pequeño". En cuanto a las operaciones numéricas, se ligan a acciones físicas de reunir, añadir, separar, quitar, añadir o quitar reiteradamente, repartir, agrupar, combinar, etc., y en menor grado, a las acciones de comparar aditiva o multiplicativamente. En consecuencia la justificación de las propiedades depende de los resultados de dichas acciones; se dice, por ejemplo, que "$3 + 5 = 5 + 3$ porque si tengo 3 objetos y añado 5 tendré el mismo número de objetos que si tengo 5 y añado 3".

A lo largo de la escuela primaria, tanto el saber que transmite el profesor como los conocimientos que desarrolla el alumno y que contribuyen al éxito en la resolución de los problemas aritméticos están impregnados de esa estrecha relación que se establece entre la aritmética y el mundo sensible: sumar y multiplicar es aumentar, restar y dividir es disminuir, en una resta el minuendo tiene que ser mayor o igual que el sustraendo porque "no se pude quitar lo que no hay", cero quiere decir que "no hay nada", etc. Y los alumnos consideran que estas relaciones son universales, que afectan a todos los números, puesto que durante los 12 primeros años de su vida así ha sido.

Bien es verdad que ya se ha producido una primera extensión de los números naturales, los racionales positivos, que suponen la pérdida de alguna de esas propiedades que parecían afectar a todos los números: multiplicar o dividir por un número menor que la unidad no supone aumentar o disminuir, respectivamente, y los números ya no tienen un siguiente, pero precisamente las investigaciones sobre didáctica de los racionales o decimales positivos muestran que se trata de dos aspectos del nuevo saber especialmente difíciles de asumir por los alumnos.

También las investigaciones sobre el comportamiento de los alumnos en la resolución de tareas que involucran números negativos apuntan a la hipótesis de que los obstáculos epistemológicos perviven en la enseñanza actual. En los apartados I.8 y I.9 se describen muchas investigaciones en términos de concepciones de los alumnos, o simplemente de análisis de errores, cuyos resultados son indicios serios de que algunos aspectos de las concepciones obstáculo observadas en la historia forman parte de las concepciones de los alumnos actuales.

Naturalmente, no todos los aspectos de los obstáculos epistemológicos delimitados a partir de la historia se van a encontrar en las concepciones obstáculo de los alumnos. Por ejemplo, es difícil que las preocupaciones de los matemáticos por la justificación axiomático-deductiva de las propiedades de los números positivos y negativos formen parte de las concepciones de los alumnos. A cambio nos encontramos con aspectos que han resultado más o menos irrelevantes en las concepciones históricas, pero que pueden ser un obstáculo para los alumnos.

Por ejemplo, históricamente los signos $+$ y $-$ y el signo $=$ nacieron en el seno del álgebra con un sentido de signos operativos binarios generalizados y de signo que indica la relación de igualdad entres dos expresiones algebraicas, respectivamente. Sin embargo, actualmente esos signos se han convertido en signos aritméticos y cuando se inicia la enseñanza de los números negativos, los alumnos llevan muchos años dando a los signos $+$ y $-$ el sentido de signos operativos binarios entre números sin determinación y al signo $=$ un sentido de orden de ejecución de una operación, lo que puede suponer un obstáculo didáctico que refuerza el obstáculo epistemológico.

Creemos pues que tenemos suficientes elementos de juicio para conjeturar que los obstáculos epistemológicos establecidos a partir del estudio de concepciones históricas sobre la negatividad matemática son también obstáculos a la aceptación del número negativo por parte de los alumnos y en este capítulo nos preguntamos cómo los afronta el sistema educativo, es decir, si las características de la enseñanza habitual ayudan a superar el obstáculo o contribuyen a reforzarlo.

Estamos por tanto ante un estudio de transposición didáctica en el sentido propuesto por Brousseau (1986) y Chevallard (1985)[1]. Para llevarlo a cabo hemos elegido dos textos separados en el tiempo y pertenecientes a dos momentos muy diferentes en cuanto al estatuto matemático del número negativo en la comunidad científica, al tipo de alumnado e institución de enseñanza al que iban dirigidos y a la transposición didáctica efectuada. Los dos textos fueron escritos por profesores universitarios, buenos conocedores por tanto del saber matemático propio de la comunidad científica de su época, y muy utilizados en su momento.

Su estudio nos puede hacer entender algunas de las condiciones que han abocado al sistema educativo actual a proponer una génesis escolar de los números negativos que no justifica su necesidad ni hace un tratamiento didáctico adecuado del obstáculo epistemológico.

[1] Cuando un saber pasa de la institución científica que lo ha producido a una institución de enseñanza sufre una transformación que lo hace apto para ser enseñado y que puede llegar a modificar su naturaleza. A ese proceso se le llama 'transposición didáctica' (Chevallard, 1985).

III.2. La transposición didáctica de la negatividad matematica en un texto de principios del siglo XIX

III.2.1. Marco institucional

A finales del siglo XVIII se acelera el proceso de profesionalización de los investigadores matemáticos mediante su incorporación, como profesores de matemáticas, a las enseñanzas media o superior. La figura del profesor-investigador asalariado irá sustituyendo, paulatinamente a la del matemático aficionado o dependiente de un mecenas propia de épocas anteriores. Esta evolución se debe, en primer lugar, a la reforma de la enseñanza que se produjo en Francia a raíz de la Revolución, reforma en la que las materias científicas y, en particular, las matemáticas adquieren bastante más peso que en el pasado. Se forma así un colectivo de matemáticos franceses, investigadores o que siguen muy de cerca el desarrollo de la disciplina, que, al mismo tiempo, como profesores de matemáticas, están interesados por los procesos de enseñanza de la misma. Estas preocupaciones pedagógicas cristalizan en la redacción de numerosos libros de texto que, debido a la generalización de las reformas educativas al resto de Europa, tuvieron una gran difusión, bien porque fueron traducidos y se convirtieron en libros de texto en otros países o bien porque sirvieron de modelos para la redacción de nuevos textos.

Entre los redactores de manuales de finales del XVIII y comienzos del XIX llama la atención la figura de Lacroix por su importancia en el campo de la difusión del saber matemático[2]. El conjunto de la obra de Lacroix puede considerarse como una enciclopedia que recoge de una forma metódica y ordenada toda la matemática analítica de los siglos XVII y XVIII. Es, por tanto, una magnífica síntesis del estado de la matemática clásica, síntesis que se produce momentos antes de que comience la primera de las sucesivas rupturas epistemológicas del XIX y XX que han conducido a la matemática actual. El estudio de cómo Lacroix presenta la negatividad en su obra nos permite analizar algunas de las características de la transposición didáctica de esta noción antes de que la comunidad matemática

[2] Sylvestre François Lacroix (1765-1843), discípulo de Monge y más tarde colega suyo, fue sucesivamente profesor de varias academias militares, de l'École Normale, de l'École Centrale des Quatre-Nations de Paris, de l'École Polytechnique, de l'Université Impériale y del Collège de France, entre otras instituciones. Aun cuando no es un matemático creador estuvo en permanente contacto con los matemáticos investigadores de la época y sus textos fueron tan populares que siguieron editándose durante todo el siglo XIX y fueron traducidos a varios idiomas.

elabore definitivamente los conceptos actuales de número entero, racional, real y complejo.

Lacroix desarrolla su concepción sobre la negatividad matemática en el libro *Élémens d'Algèbre, à l'usage de l'École Centrale des Quatre-Nations*, publicado en 1799 en París, que es el segundo tomo de su obra *Cours élémentaire de Mathématiques pures*[3]. Son libros que se utilizan tanto en la naciente enseñanza secundaria, que se reorganiza por esas fechas y adopta formas parecidas a las actuales, como en las escuelas técnicas y militares, e incluso, en los primeros años de las facultades o escuelas superiores. Entre las muchas traducciones que se hicieron de este libro, o de alguna de sus versiones posteriores[4], figura una traducción al español realizada por Josef Rebollo y Morales, catedrático de la Real Casa de Pajes de Su Majestad que hacia 1820 tradujo los tres primeros tomos del *Cours élémentaire de Mathématiques pures*. Esta traducción, que tuvo veinte ediciones y se usó profusamente como libro de texto en España, es la que nosotros utilizaremos como texto base de nuestro estudio.

III.2.2. Descripción del texto

El libro no está organizado por cacítulos, sino por párrafos numerados reunidos en pequeños grupos que reciben un título común. Es un texto explicativo en el que el discurso se desarrolla a un único nivel: el de la sucesiva presentación de diferentes objetos matemáticos con sus reglas de uso, la justificación de las reglas y las situaciones que resuelven. Las partes del discurso que se consideran especialmente importantes se resaltan escribiéndolas en letra bastardilla. Los ejercicios o problemas que aparecen en el texto, siempre resueltos, forman parte de la explicación y cumplen una función de servir de ejemplo, de ilustración de la misma. No existen

[3] El primer tomo es un *Traité élémentaire d'Arithmétique*; el tercero y cuarto tomo se titulan *Eléments de Géométrie* y *Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'Algèbre à la Géométrie.* Posteriormente añadió hasta seis tomos más.

[4] En Glière (2007) se encuentra un estudio detallado de las diferencias existentes entre las distintas ediciones de los *Élémens d'Algèbre* que le lleva a rebatir la opinión de Schubring (1986) de que las diferencias observadas entre las ediciones de 1799 y las ediciones posteriores, y que afectan a la forma de interpretar las cantidades negativas, se deben a la influencia de la concepción epistemológica de predominio de la geometría sobre el álgebra que pone de manifiesto Carnot en su *Géométrie de Position* de 1803. Según Glière, la teoría de la correlación no parece haber sido determinante en el cambio de postura de Lacroix, cambio que se debería, más bien, a razones pedagógicas.

ejercicios propuestos para el alumno. Las referencias introductorias de la negatividad se producen de forma intermitente a lo largo de las primeras 270 páginas.

Los títulos de los apartados se refieren a: la resolución de ecuaciones de primer y segundo grado, la resolución de sistemas lineales de ecuaciones, las operaciones con cantidades negativas, potencias y radicales, los polinomios y las fracciones algebraicas y sus operaciones, algunos resultados de la teoría general de ecuaciones, algunas técnicas de búsqueda aproximada de raíces, las progresiones y los logaritmos. Es el contenido habitual de un tratado de álgebra elemental de la época.

Hay que tener en cuenta que este libro viene precedido por un tratado de aritmética[5] donde se estudian los números naturales, sus operaciones, algunas cuestiones de divisibilidad en los naturales encaminadas al cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo, los racionales positivos y los decimales con sus operaciones, la representación decimal de los números racionales positivos, algunos números irracionales positivos y sus aproximaciones decimales[6], las fracciones continuas, los diferentes sistemas de pesas y medidas y valores monetarios, la proporcionalidad aritmética y algunas aplicaciones al cálculo mercantil.

III.2.3. El dominio de aparición de la negatividad

El dominio de aparición de la negatividad, tanto en la obra de Lacroix como en la de sus contemporáneos, es el álgebra. El autor empieza caracterizando el método aritmético de resolución de problemas, diciendo que consiste en:

> averiguar primeramente qué operaciones, de las cuatro fundamentales, debíamos ejecutar con los números conocidos, para que resultasen los desconocidos que buscábamos: y cuando ya habíamos descubierto que una cierta y determinada serie de aquellas operaciones nos había de conducir seguramente a nuestro objeto, lo único que nos restaba era efectuarlas, y las efectuábamos conforme a las reglas que para esto habíamos anteriormente establecido. A

[5] La partición de la matemática escolar en los tres dominios: aritmética, álgebra y geometría es habitual en esta época, principios del siglo XIX, y proseguirá durante todo el siglo XIX y principios del XX. Hoy en día los textos escolares de enseñanza primaria y secundaria llevan el nombre genérico de Matemáticas y los distintos temas que los componen no se clasifican como pertenecientes o no a dichos dominios.

[6] Como es habitual en la época, el nombre de ‘número’ suele reservarse para los números naturales, mientras que al resto de los números positivos se les suelen dar el nombre de ‘cantidades’.

> esto se reduce en suma la completa solución de cualquier problema. (Lacroix, 1832, p. 1)

Continúa comentando que los razonamientos que se hacen para determinar la sucesión de operaciones a efectuar se hacen en lenguaje vulgar y además la solución final, al ser una solución numérica, no indica la secuencia operacional de la que es resultado y, por tanto, la resolución posterior de ese mismo problema con otros datos exige la reconstrucción de todo el proceso. En este momento ya está en condiciones de construir un nuevo universo de objetos: los signos operatorios y las letras[7] que quedan justificados, los primeros, como un nuevo conjunto de signos que resulta más económico y preciso que el lenguaje vulgar, y los segundos, como medio para obtener una expresión general como solución del problema, en vez de un valor numérico concreto, que dé a entender

> qué operaciones debíamos ejecutar con los números conocidos, cualesquiera que fuesen, para que resultase el desconocido que nos proponíamos hallar; y así habíamos descubierto una regla general para resolver, sin necesidad de repetir el razonamiento, todos los casos particulares comprendidos en la cuestión general. (Lacroix, 1832, p. 8)

Insistirá varias veces en estos argumentos hasta terminar incorporándolos a una definición de álgebra:

> *Este lenguaje simbólico en que así las cantidades conocidas como las incógnitas que entran en cualquier problema están representadas por caracteres, a los cuales no está asignado ningún valor particular, y en que las operaciones que deben ejecutarse con ellas, están meramente indicadas por signos convencionales que a este efecto se han elegido, es lo que hablando con toda propiedad, se llama Álgebra. (Lacroix, 1832, p. 13)*

De esta manera, el álgebra aparece como un dominio donde se definen nuevos objetos, pero el sentido de los mismos queda referido al campo de la aritmética: las letras son signos que representan números o cantidades[8], las expresiones literales son programas de cálculo aritmético, es decir, la representación simbólica de un cálculo aritmético que sólo espera para poder

[7] Hay que tener en cuenta que en esta época los signos de las operaciones, el signo = y las letras son considerados signos específicamente algebraicos y no se utilizan en aritmética. Por tanto, la presentación de estos signos al comenzar el álgebra constituye una novedad. Esta situación contrasta con la actual en la que los signos +, −, etc., se utilizan profusamente a lo largo de las enseñanzas aritméticas.

[8] Los números a los que nos referimos, los que constituyen el soporte numérico inicial del álgebra, son los de la aritmética: los naturales, los racionales positivos y, si acaso, las raíces positivas de los racionales.

efectuarse a que se le dé un valor numérico a las letras, de ahí el nombre de cantidades algebraicas, y las ecuaciones expresan, en último término, relaciones de igualdad entre números.

Pero Lacroix es consciente de que está limitando el alcance del álgebra con su presentación y, en cierto momento de su discurso, se siente obligado a incluir una nota que dice:

> Si porque hemos dado a conocer el Álgebra resolviendo con su auxilio problemas aritméticos o relativos a números, la llamásemos, como ha solido hacerse, *Aritmética universal*, limitaríamos demasiado la idea que debemos formarnos de ella. Los símbolos de que el Álgebra se vale son por su indeterminación igualmente aptos para expresar las relaciones de las varias y diferentes formas de la extensión que las relaciones de los números; y así tenemos en el Álgebra un lenguaje tan a propósito para resolver los problemas geométricos como los aritméticos. Y puesto que no puede pertenecer a las Matemáticas cosa alguna que no sea número o extensión, o que no pueda representarse por la extensión y de consiguiente por los números, el álgebra viene a ser el idioma universal de todas las Matemáticas puras y mixtas. (Lacroix, 1832, p. 21)

La presentación del álgebra como una aritmética generalizada tiene la ventaja de que permite una economía de justificación. No es necesario definir los nuevos objetos: polinomios, fracciones algebraicas, operaciones, ecuaciones, etc, puesto que pueden ser entendidos como signos que expresan números o relaciones entre números y la justificación de las reglas de cálculo algebraicas a partir de las reglas aritméticas se puede hacer con rapidez, pues se puede contar con que los alumnos están familiarizados con el dominio aritmético.

Pero todo esto tiene el peligro de reducir el álgebra a la aritmética, es decir, de no poner de manifiesto las diferencias existentes entre estos dos dominios, lo que podría tener un alto coste didáctico. Sin embargo, este peligro está aquí muy matizado porque Lacroix hace hincapié, desde el primer momento, en aquellos aspectos del álgebra que permiten reconocerla como una actividad distinta a la aritmética. Para empezar, el conjunto de signos escritos que constituyen el lenguaje algebraico es, en esta época, totalmente distinto al de la aritmética lo que contribuye a marcar la diferencia entre ambos dominios.

Es además una concepción en la que la justificación última del álgebra viene dada por los parámetros o variables. El álgebra, para Lacroix, no se caracteriza por sustituir por letras los números que se buscan o incógnitas, sino por utilizar letras para indicar los números conocidos y poder llegar de esa manera a expresar las cantidades desconocidas en función de las conocidas[9]. Es decir, se pone de manifiesto, desde el principio, la diferencia entre el objetivo final de la aritmética y del álgebra: el paso de una actividad de resolución de problemas a una actividad de estudio de campos de problemas susceptibles de ser modelizados mediante las mismas fórmulas algebraicas.

Por último, el discurso se articula en niveles sucesivos donde cada uno de ellos no es más que un pretexto para entrar en el nivel siguiente. El autor empieza hablando de la necesidad de resolver determinadas situaciones de tipo aritmético pero una vez que eso le permite presentar una ecuación abandona esa actividad de modelización y sólo se vuelve a referir a ella cuando la necesita para justificar las técnicas algebraicas. Posteriormente, la ecuación es un nuevo pretexto que le permite entrar a estudiar, en general, la resolución de ecuaciones y las operaciones con polinomios y fracciones algebraicas. En la práctica, lo que se realiza es una presentación de los objetos algebraicos en tanto que objetos de estudio y su utilización como herramienta en el dominio aritmético sólo se plantea a título de ejemplo.

El álgebra aparece, en un principio, como una herramienta más cómoda y potente de resolución de los problemas aritméticos que la propia aritmética, pero, con mucha rapidez, se pasa al estudio teórico de esa herramienta, desgajada de los campos que modeliza, y sólo se recurre a su sentido, a su significación aritmética, cuando la necesidad de justificar una regla de manipulación lo requiere. Es evidente que el objetivo final no es el de modelizar situaciones aritmética -de hecho, las actividades de modelización quedan rapidamente abandonadas-, sino la introducción de unos nuevos objetos matemáticos, los algebraicos, y el estudio de las técnicas de manipulación de esos objetos acompañadas del correspondiente discurso tecnológico-teórico que las justifica.

En resumen, podríamos decir que el álgebra, tal como la presenta Lacroix, es una nueva rama de las matemáticas, que tiene sentido en sí misma, que modifica sensiblemente el dominio aritmético, pero que ocasionalmente sufre reducciones a ese mismo dominio cuando una cierta economía de justificación lo hace necesario.

III.2.4. Primera forma de negatividad

Aparece en el contexto de la resolución de ecuaciones de primer grado. Allí, después de definir lo que se entiende por primer y segundo miembro de una ecuación llama *término* a

[9] Otros autores de la época, por ejemplo, Bourdon (1825), añaden una justificación demostrativa: el álgebra permite demostrar propiedades de las estructuras numéricas.

> cada una de las varias partes de cada miembro, que están separadas unas de otras con los signos + ó −, (...). Los términos que a su izquierda no tengan signo alguno de adición o sustracción, o que tengan el signo +, se llamarán *aditivos*, y los que tengan a su izquierda el signo −, *sustractivos*. (Lacroix, 1832, p. 26)

Esta frase se acompaña con una nota a pie de página que dice:

> No hacemos por ahora uso de las denominaciones de *positivos* y *negativos*, porque los signos + y − en su primitiva institución no indicaron otra cosa que las dos operaciones *adición* y *sustracción*; y de consiguiente los términos a los cuales estén antepuestos no fueron considerados sino como *sumandos* y *sustraendos*. Más adelante veremos cómo vinieron los mismos signos a tener una nueva representación conservando siempre la primitiva. (Lacroix, 1832, p. 26)

Así pues, los signos + y − indican operaciones binarias entre números sin determinación y el hecho de que un término venga precedido del signo − indica que es el sustraendo de una diferencia, y en función de esto se establecen las reglas de manipulación de estos objetos. Sin embargo, la resolución de la ecuación de primer grado no es más que un pretexto para justificar la necesidad de las técnicas de cálculo con expresiones literales.

III.2.5. Segunda forma de negatividad

La problemática comentada en el apartado anterior da pie al autor para justificar la necesidad de establecer las "reglas para efectuar en cuanto es posible con las cantidades representadas por letras las operaciones aritméticas (Lacroix. 1832, p.48)". Aparecen pues unos nuevos objetos matemáticos: los polinomios de varias variables, las fracciones algebraicas y las técnicas de cálculo asociadas a ellos, y la herramienta algebraica se convierte definitivamente en objeto de estudio. Todavía se utiliza la aritmética para justificar las operaciones con polinomios; de hecho, Lacroix introduce dichas operaciones en tanto que operaciones aritméticas, pero el discurso versa sobre los términos de los polinomios, términos sustractivos o aditivos. Y esto cambia el sentido del discurso en lo que a la negatividad se refiere.

Ya no se trata de la manipulación de diferencias o de sustraendos que tienen un minuendo del que sustraerse, sino de la manipulación de términos sustractivos y aditivos, olvidándose de aquellos otros términos a los que se suman o restan. Ya no hablamos de suma o diferencia, sino de términos que suman o términos que restan. Y de esta manera, poco a poco, los signos que preceden a los términos van a pasar a formar parte del propio término y a trnsformarse, paulatinamente, de signos operativos binarios entre términos sin signo en signos operativos binarios generalizados. Esto último se observa ya en las definiciones de suma y resta de polinomios:

> (...) la operación llamada *adición de los polinomios se efectúa escribiendo todos los términos que haya en los sumandos a continuacion unos de otros y con sus propios signos, teniendo presente que los términos que en los sumandos estén sin signo alguno, se deben considerar como aditivos, o como si tuviesen antepuesto el signo* +. (Lacroix, 1832, p. 52)

> *(...) la sustracción de las cantidades algebraicas se efectúa escribiendo a continuación del minuendo el sustraendo después de haber cambiado de + en −, y de − en + los signos de este último.* (Lacroix, 1832, p. 57-58)

Estamos en una situación en la que los signos + y − están adquiriendo otro sentido: no sólo indican una operación binaria sino que es algo que convierte a ese término en un operador aditivo, es decir, en una traslación. Esta tendencia se observa en los productos y cocientes parciales de la multiplicación y división donde surge la necesidad de encabezar un polinomio por un término sustractivo lo que pasa a convertirse, a partir de ese momento, en una práctica legítima, aun cuando el autor no puede por menos de advertir que

> en la colocación de los términos de un polinomio se puede guardar el orden que se quiera o que más acomode; pero por lo común ocupa el primer lugar, comenzando por la izquierda, un término aditivo, sea el que fuere, por parecer muy impropio comenzar restando sin suponer de qué. (Lacroix, 1832, p. 55)

El sentido operativo binario generalizado de los signos + y − se pone todavía más de manifiesto en el caso del producto, donde no le queda más remedio que expresar la regla de los signos a partir de los términos aditivos y sustractivos.

> 1.º *Todo término aditivo multiplicado por otro término aditivo da un producto aditivo.*
>
> 2.º *Todo término sustractivo multiplicado por un término aditivo da un producto sustractivo.*
>
> 3.º *Todo término aditivo multiplicado por un término sustractivo da un producto sustractivo.*
>
> 4.º *Todo término sustractivo multiplicado por otro término sustractivo da un producto aditivo.* (Lacroix, 1832, p. 71)

Sin embargo, esta nueva forma de interpretar la negatividad convivirá con la antigua que sigue siendo necesaria para justificar las reglas de cálculo con términos aditivos y sustractivos. Así, por ejemplo, la justificación de la regla de los signos se establece a partir del desarrollo del producto de diferencias $(a-b)(c-d)$. Y cuando en otros momentos utiliza en sus justificaciones el nuevo sentido de los términos como traslaciones se ve obligado a recurrir a un discurso de corte aritmético, basado en la identificación de las operaciones aritméticas y determinadas acciones físicas, que ya había abandonado. Como cuando, a propósito de la resta de una expresión literal compuesta de una suma términos, dice que debe restarse cada uno de los términos

> (...) porque, como es bien sabido, lo mismo es quitar de una vez una cantidad cualquiera, que quitar sucesivamente todas las partes de que esta se compone. (Lacroix, 1832, p.56)

Por consiguiente podemos concluir que el desarrollo de determinadas técnicas algebraicas exige la aparición de otra forma de negatividad asociada a los términos algebraicos entendidos en tanto que traslaciones y cuyas reglas sintácticas se justifican reduciendo las operaciones entre traslaciones a operaciones entre diferencias, primera forma de negatividad, o a acciones físicas o sociales habituales en el dominio de la aritmética.

III.2.6. Tercera forma de negatividad

El autor, una vez que ha terminado de explicar las técnicas de manipulación de polinomios y fracciones algebraicas vuelve a la resolución de ecuaciones alegando que ya dispone de las herramientas necesarias para resolver cualquier ecuación de primer grado y allí es donde introduce y justifica las cantidades negativas.

Para ello, una vez resuelto el problema

> *Un artesano ha estado trabajando* 12 *días en una obra; y tanto por sus jornales como por los de un hijo suyo, que ha trabajado en la misma obra por espacio de siete días, ha recibido* 222 *reales. Volvieron a trabajar él por espacio de ocho días, y su hijo por el de cinco días; y ganando iguales jornales que antes, ha recibido* 150 *reales.* Se pregunta: *¿cuántos reales ganaba diariamente el padre, y cuántos el hijo?* (Lacroix, 1832, p. 121)

mediante un sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, dice lo siguiente:

> Supongamos que se nos diga que la primera suma cobrada por el artesano fue 138 reales, y la segunda 90; y siendo las mismas todas las demás circunstancias de la cuestión, se nos pregunte como antes: *¿cuánto ganaba el padre y cuánto el hijo por día?* (Lacroix, 1832, p. 123)

Resolviendo esta cuestión llega a que el valor de y resultará:

$$y = \frac{138-180}{7} = \frac{138-138-42}{7} = \frac{-42}{7}$$

y continúa diciendo que la sustracción que ha dado lugar a esa expresión es impracticable, consecuencia de que las condiciones que plantea el enunciado son incompatibles. Pero no se contenta con dejar establecido el absurdo de la propuesta, sino que prosigue explicando cómo habría que modificar el enunciado del problema para que no contuviera ninguna contradicción, y concluye:

> Aunque un resultado absurdo de un razonamiento bien formado no arguya por lo común otra cosa sino lo absurdo del principio sobre qué esta fundado; siempre que hallemos para valor de una incógnita un número que tenga antepuesto el signo −, es decir, un número que indique ser *sustraendo* sin *minuendo*, no sólo inferiremos que la cuestión, en los términos en que se nos haya propuesto, envuelve alguna contradicción e incompatibilidad en sus condiciones, sino también que en rectificando alguna de éstas, habrá de resultar otra cuestión análoga a la primera, sin absurdo alguno, y a la cual dará solución el mismo número que antes hemos hallado. La rectificación que en tales casos es necesario hacer en las condiciones se reduce a que se deba sumar alguna cantidad que la propuesta nos mandaba restar, o al contrario; o a que deba ser minuendo el que la propuesta nos indicaba como sustraendo, y *viceversa*." (Lacroix, 1832, p. 128)

La argumentación del autor es clara en cuanto a que se trata de soluciones absurdas, sin sentido, que denuncian una situación de partida también absurda. Sin embargo, no deduce como consecuencia que esos objetos deben ser desechados sino que, curiosamente, es el momento que se elige para dar un cierto estatuto matemático a una nueva forma de negatividad: la cantidad negativa. En efecto, a las argumentaciones anteriores Lacroix añade:

> Siempre que a causa de haber alguna incompatibilidad en las condiciones del problema, resulta sustractivo el valor de alguna incógnita, se dice que la solución es *negativa*. (Lacroix, 1832, p. 129)

donde por primera vez se decide a usar el término "negativo". Las razones que, según él, justifican el tomar en consideración estos objetos, a pesar de ser absurdos, son las siguientes:

> Aunque estos signos no designaron en su primitiva institución sino las operaciones de sumar y restar; cuando se echó de ver que de la resolución de las ecuaciones resultaban en ciertos casos para valores de las incógnitas números con el signo −, es decir, números que se debían restar sin haber de qué, no se contentaron los algebristas con haber conocido por este medio que las cuestiones que los habían conducido a estos resultados absurdos, eran imposibles, ni tampoco con haber descubierto el modo de rectificar las condiciones para que desapareciese la incompatibilidad que antes había, sino que además hicieron este razonamiento:
>
> Si de un problema bien puesto en ecuación se deduce que una incógnita debe ser $x = -6$, por ejemplo, es consiguiente que si mirando como un símbolo

> de una cantidad a la combinación -6 del guarismo y del signo que le antecede, la sometemos a todas las operaciones indicadas en la cuestión, el resultado deba satisfacer a ésta según esté propuesta, y sin necesidad de variar previamente ninguna de sus condiciones. (Lacroix, 1832, p. 130)

En otras palabras, la solución puede ser absurda desde el punto de vista de la situación objeto de modelización pero ese nuevo objeto matemático satisface a la ecuación siguiendo las reglas de cálculo algebraico y, por tanto, debe ser tenido en cuenta. Tanto más cuanto la manipulación algebraica de estos objetos conduce en determinadas situaciones a soluciones perfectamente válidas.

> Luego que se observó que la aplicación de las reglas de los signos a estas expresiones absurdas procedentes de cuestiones imposibles producía resultados verdaderos, fueron miradas aquellas expresiones como una cierta especie de verdaderas cantidades; se las designó con el nombre de *cantidades negativas*; se las sometió a todas las operaciones del cálculo; y se dijo que si las soluciones negativas indicaban un error en la propuesta de 1a cuestión, el Álgebra lo corregía. (Lacroix, 1832, p. 133)

El conflicto que se pone de manifiesto en estos párrafos es consecuencia, en primer lugar, de la subordinación del álgebra a la aritmética que obliga a que la solución de una ecuación tenga sentido en el ámbito aritmético y, en segundo lugar, de la dicotomía que las técnicas algebraicas introducen en la resolución de problemas. La modelización algebraica de una situación supone una fase inicial en la que los datos concretos del problema se transforman en un conjunto de relaciones de orden o equivalencia descontextualizadas, una fase posterior de cálculo formal en la que no son necesarias las referencias al contexto y una última fase de recontextualización de la solución obtenida.

Este proceso dicotómico de descontextualización y recontextualización, desconocido en el mundo de la aritmética y consustancial al álgebra, es el que crea el conflicto pues permite la existencia de objetos que no tienen sentido en determinados contextos pero que se comportan bien y son útiles en las manipulaciones formales propias de la fase descontextualizada, lo que impide que sean rechazados. La realidad es que a estas alturas, comienzos del siglo XIX, el desarrollo del álgebra, el análisis y la geometría han convertido las cantidades negativas en un objeto indispensable en el mundo de las matemáticas.

Los dos párrafos siguientes pueden considerarse una muestra del tipo de dificultades que tiene que afrontar Lacroix para interpretar las cantidades negativas en el dominio de la aritmética:

(. . .) $-a$, por ejemplo, debe indicarnos que una fórmula prescribía restar de una cantidad otra mayor; y siendo esto imposible, se ha ejecutado al revés la operación; y al resultado a de ésta se le antepuso el signo $-$, para que con esta modificación nos diese a conocer que es necesario añadir la cantidad a a la combinación de cantidades, de la cual provino el símbolo $-a$, para reducir a cero el resultado de toda la combinación. esto ha dado ocasión a que se dijese que *las cantidades negativas son menores que cero*; expresión que para dejar de ser absurda, debe entenderse en el sentido que acabamos de darla. (Lacroix, 1832, p. 135)

(. . .) por manera que cuando se dice, por ejemplo, que restando $-b$ de a, el residuo es $a+b$, el único modo de interpretar esta expresión en términos que tenga sentido, es decir que la regla de los signos establecida para efectuar la sustracción con los verdaderos símbolos de las cantidades, aplicada aun a aquellos otros que no lo son, corrige el absurdo que había en lo que se nos mandaba ejecutar: se nos decía que restásemos, y debíamos sumar. (Lacroix, 1832, p. 138)

Lo que indican estos argumentos es la dificultad para asumir que existan cantidades menores que cero o que el resultado de una resta sea mayor que el minuendo, debido a la identificación del número con la medida de la cantidad de magnitud y a la de las operaciones aritméticas con determinadas acciones físicas como añadir, quitar, repartir, etc.

En cualquier caso, a partir de este momento Lacroix introduce, aunque con reticencias, una nueva forma de concebir la negatividad: la que se deduce del hecho de aceptar que sea efectuable una resta numérica con minuendo menor que el sustraendo, de interpretar ese resultado como una cantidad, por lo menos algebraica, y de adjudicarle un símbolo específico.

Una vez que las cantidades negativas adquieren carta de naturaleza aparece un nuevo problema, pues Lacroix considera que las reglas de cálculo que se han demostrado hasta el momento no hacen referencia a cantidades sustractivas aisladas sino a términos de polinomios. Por tanto, habrá que volver a probarlas para este caso y así lo dice:

Las reglas de los signos establecidas no se han demostrado hasta ahora en el supuesto de que las operaciones se hayan de ejecutar con cantidades sustractivas aisladas. Establecimos, por ejemplo, que si de a hubiésemos de restar la cantidad representada por la combinación $b-c$, el residuo debía representarse por $a-b+c$; pero no hemos hecho ver que si de a se ha de restar la cantidad, si puede así llamarse, $-c$, el residuo deberá representarse por $a+c$. Pudiera ciertamente decirse que el razonamiento que hicimos para demostrar la exactitud del residuo $a-b+c$, era independiente de la magnitud de las cantidades representadas por estos símbolos, y que de consiguiente debía tener lugar aun cuando llegase a ser $b=0$, con lo cual la expresión $b-c$ se reduciria a $-c$ y la combinación $a-b+c$ quedaría reducida a $a+c$. Pero acaso no satisfará a todos esta prueba; y como la teoría de las cantidades negativas ha venido a ser una de las más importantes del Álgebra, y ha dado

> ocasión a varias disputas; es necesario apoyarla sobre los fundamentos más sólidos que sea posible. (Lacroix, 1832, p. 133-134)

Y prosigue dando varias demostraciones en las que el argumento principal es el de la prolongación a las cantidades negativas de las leyes formales de la aritmética que afectan a las cantidades positivas, junto con el recurso a la identificación de operación matemática y acción física:

> Nadie puede dudar de que las expresiones $a - a$; $b - b$; $c - c$ etc. son equivalentes a *cero*, y de consiguiente son otros tantos símbolos del mismo *cero*. Ahora bien, si a una cantidad cualquiera representada por a le agregamos la combinación $b-b$, la que de nuevo resulta $a+b-b$ no vendrá a ser otra cosa que un nuevo modo de representar la misma cantidad a; el cual por entrar en la nueva combinación los símbolos $+b$ y $-b$, nos hace ver con más claridad el efecto que en la cantidad a debe producir la sustracción de b, o la de $-b$; pues para ello basta borrar de aquella expresión cualquiera de las dos cantidades que nos propongamos quitar. En efecto si de a nos proponemos quitar b, o como dicen, $+b$, borrando esta cantidad en la expresión $a + b - b$, el residuo será $a - b$; resultado enteramente conforme con el convenio adoptado. Si por el contrario nos proponemos quitar de a la cantidad negativa $-b$, suprimiendo este término en la expresión $a+b-b$, el resultado será $a+b$, como lo hubiéramos hallado aplicando a este caso la regla de los signos establecida.
>
> Por lo que hace a la multiplicación es fácil echar de ver que el producto de $a-a$ por $+b$ debe ser $ab-ab$; porque siendo igual a *cero* el multiplicando, debe también ser igual a *cero* el producto; y siendo indudablemente ab el primer término de éste, el segundo deberá ser $-ab$, para que destruya al primero. De aquí se deducirá que $-a \times +b = -ab$.
>
> (...)
>
> Finalmente, si tratamos de multiplicar $-a$ por $b - b$, sabiendo ya que el primer término del producto es $-ab$, el segundo no podrá menos de ser $+ab$, para que todo el producto se reduzca, como debe, a *cero*, por ser igual a *cero* el multiplicador. Asi que, será $-a \times -b = +ab$.
>
> Cotejando estos resultados con los que hubiéramos inmediatamente hallado aplicando a estas cantidades sustractivas aisladas, o sean cantidades negativas, las reglas de los signos establecidas, veremos que son exactamente los mismos.
>
> (...)
>
> En general, *cuando tratemos de efectuar cualquiera de las cuatro operaciones fundamentales con las cantidades sustractivas aisladas, o como dicen, con las cantidades negativas, deberemos observar para los signos de los resultados las mismas reglas que si aquellas cantidades fuesen partes de los polinomios.* (Lacroix, 1832, pp. 135-137)

La introducción de las cantidades negativas acaba con un interesante resumen:

> Recapitulando cuanto hemos expuesto tocante a las que se llaman *cantidades negativas*, diremos que en realidad son unas expresiones absurdas de los resultados de sustracciones impracticables; que como tales son indicios

seguros de alguna incompatibilidad que hay en la propuesta de la cuestión, de la cual hayan dimanado; de consiguiente nos dan a conocer que no es posible resolver la cuestión sin que antes se rectifique alguna de sus condiciones, haciendo sustractiva alguna cantidad que antes se había supuesto aditiva, o al contrario; y últimamente, que se puede venir en conocimiento del modo de ejecutar esta rectificación considerando a las expresiones realmente absurdas -6; -8; $-a$; $-b$; etc., como si fuesen verdaderos símbolos de cantidades, y haciendo uso de las reglas anteriormente establecidas de los signos, en las operaciones que nos propongamos ejecutar con aquellas expresiones. (Lacroix, 1832, pp. 137-138)

III.2.7. Otros aspectos de la negatividad en Lacroix

A partir del momento en que las cantidades negativas quedan definidas el autor las utiliza siempre que lo necesita pero el discurso que hace referencia a las mismas varía según el tema de que se trate. Esto se observa, por ejemplo, en la consideración del signo en el caso de los parámetros. En el apartado que estudia los sistemas de ecuaciones lineales resuelve el caso general de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas

$$\begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ a'x + b'y + c'z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d'' \end{aligned}$$

y una vez obtenidas las fórmulas dice:

> Conviene tener entendido que las mismas fórmulas pueden servir para determinar los valores de las incógnitas; aun cuando no todos los términos de las ecuaciones numéricas que se nos propongan tengan el signo $+$, como a primera vista puede parecer que lo exigen las ecuaciones generales, de donde se han deducido aquellas expresiones. Lo único que en faltando aquella condición se requiere además, es tener muy presentes las reglas de los signos para determinar el que corresponda a cada uno de los términos que entren en la expresión del valor de cada incógnita; puesto que aplicamos una fórmula calculada para ciertas y determinadas circunstancias a un caso en que ya éstas no se verifican.
>
> Si por ejemplo se nos propusiesen las ecuaciones
>
> $$\begin{aligned} 3x - 9y + 8z &= 41 \\ -5x + 4y + 2z &= -20 \\ 11x - 7y - 6z &= 37 \end{aligned}$$
>
> cotejándolas con las generales veríamos que
>
> $$\begin{array}{llll} a = 3; & b = -9; & c = 8; & d = 41 \\ a' = -5; & b' = 4; & c' = 2; & d' = -20 \\ a'' = 11; & b'' = -7; & c'' = -6; & d'' = 37 \end{array}$$

(Lacroix, 1832, pp. 189-190)

En este apartado, por tanto, admite que una letra que actúa como parámetro puede tomar un valor negativo aun cuando vaya precedida de un signo $+$, es decir, interpreta que el signo que precede a la letra es un signo operativo unario. Este convenio se mantiene cuando desarrolla la teoría general de ecuaciones. Sin embargo, algo después, en la resolución de la ecuación de segundo grado, a pesar de que inicialmente da como expresión general de la misma $x^2+px=q$ donde p y q pueden ser positivos o negativos y deduce la resolvente

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

con motivo de la discusión de la naturaleza de sus raíces[10] comenta:

> A poco que reflexionemos sobre lo expuesto acerca de la naturaleza de las ecuaciones completas de segundo grado con una sola incógnita, inferiremos que todas ellas se pueden reducir a estas cuatro expresiones generales:
>
> $$\begin{array}{ll} 1^a\ldots x^2+px=q; & 3^a\ldots x^2+px=-q; \\ 2^a\ldots x^2-px=q; & 4^a\ldots x^2-px=-q; \end{array}$$
>
> las cuales se reúnen todas en esta otra:
>
> $$x^2\pm px=\pm q.$$
>
> (Lacroix, 1832, p. 234)

donde está claro que los parámetros p y q toman únicamente valores positivos sin que esto se advierta en ningún momento. Parece desprenderse de todo esto que, al contrario de lo que sucede actualmente, cuando no se dice nada hay que entender que las letras sólo pueden tomar valores positivos y cuando los valores pueden ser positivos o negativos se explicita.

Por último, queda por comentar el hecho de que es al desarrollar una teoría general de ecuaciones cuando la terminología referente a la negatividad adquiere un carácter más moderno. En este capítulo sustituye el término cantidad por el de número y habla por primera vez de números

[10] En la resolución de la ecuación de segundo grado introduce las cantidades imaginarias, entendidas como raíces cuadradas de cantidades negativas, aduciendo los mismos argumentos que para las cantidades negativas: son expresiones absurdas que se comportan bien en el cálculo y que, en ciertos casos, conducen a soluciones “reales”. Aparece por primera vez el término “real” para indicar las cantidades que no son imaginarias.

positivos y negativos, estableciendo desde el primer momento que las letras que indican los coeficientes de las ecuaciones pueden hacer referencia tanto a números positivos como negativos. Por otro lado, la necesidad de distinguir entre soluciones enteras, fraccionarias e inconmensurables a la hora de exponer los métodos de búsqueda de soluciones de la ecuación general de grado n junto con el hecho de que esas soluciones pueden ser positivas o negativas supone que implícitamente los términos número entero y número fraccionario hagan referencia no sólo a los enteros y fraccionarios positivos sino también a los negativos. Además la existencia de cantidades imaginarias le obliga a incluir las otras categorias de números dentro de la denominación de cantidades reales.

III.2.8. Conclusiones

El texto de Lacroix es la obra de un autor ilustrado que considera la educación fuente de todo progreso y que no sólo se interesa por trasmitir los saberes matemáticos, sino también su epistemología, es decir, su naturaleza y las razones que los hicieron surgir y evolucionar.

> Lacroix no se interesa únicamente por los aspectos técnicos o de las matemáticas, sino también por la filosofía que los sostiene. Impregnado del empirismo inglés y del pensamiento de los ideólogos, ha sabido utilizarlos, insistiendo en la interdependencia entre el desarrollo de las ciencias y su metafísica. Fino conocedor del conjunto de textos matemáticos de la época, sabe juntar a eso una reflexión epistemológica y obtener una visión global de la enseñanza en la que la investigación de la verdad es un instrumento indispensable del progreso social. (Lamandé, 2004)

Es una transposición didáctica en la que el saber enseñado está muy cerca del saber científico. Las dificultades de Lacroix son las de la comunidad de matemáticos de su época, comunidad que todavía no ha asumido una definición axiomática de los números y que se debate entre la necesidad de aceptar las cantidades negativas y la de rechazar las paradojas que esta aceptación produce.

Dirigido a adolescentes que desean iniciar carreras científicas, el texto de Lacroix procura reproducir la evolución histórica de la negatividad matemática, poniendo de manifiesto las razones de ser que reconstruyen una historia de sucesivas necesidades epistemológicas, en la creencia de que de esta manera los lectores estarán en mejores condiciones para asumir ese saber, su lógica interna y su funcionalidad. En otras palabras, Lacroix tiene muy presente las dificultades por las que ha pasado y todavía está pasando la comunidad matemática para darle sentido dentro de su corpus teórico a las cantidades negativas y considera necesario hacer partícipes de ese hecho a sus lectores.

III.3. La transposición didáctica del número entero en un texto de finales del siglo XX

III.3.1. Marco institucional

El marco institucional en el que se introduce el número entero es completamente distinto del que correspondía a la época de Lacroix: estamos en una enseñanza primaria obligatoria dirigida a niños de 12 años. Además, el colectivo de profesores de los que depende la elección del texto ya no es un colectivo de profesores universitarios o de secundaria especializados en la enseñanza de las matemáticas, sino de maestros que, en general, no tienen una formación específica como profesores de matemáticas. De manera que, aunque este texto en concreto está escrito por matemáticos, los que tienen que elegirlo no lo son.

También el saber matemático ha cambiado. La discusión alrededor de los conjuntos numéricos está zanjada y la negatividad tiene un estatuto matemático perfectamente definido dentro de ellos. Los números enteros, racionales o reales se descomponen en números positivos y negativos y, puesto que los racionales se construyen a partir de los enteros y los reales a partir de los racionales, la negatividad se hace patente, por primera vez, al introducir los números enteros.

Además, hay que tener en cuenta que la enseñanza de las matemáticas está sometida, sobre todo en el tramo de la educación obligatoria, a la influencia de diversas teorías pedagógicas y psicológicas propias de ese momento. La presentación del libro que nos ocupa resume bien algunas de las creencias que, como consecuencia de la difusión de estas teorías, impregnan, todavía hoy, la práctica docente en la escolaridad obligatoria.

> Este libro forma parte de nuestro proyecto "PITÁGORAS", proyecto referido a unas coordenadas de auténtica renovación metodológica.
>
> Sus objetivos y planteamientos generales coinciden con los de los libros anteriores de esta serie, aunque en su elaboración concreta se ha introducido, como es obvio, una serie de ajustes, que contemplan la evolución psicológica de los alumnos.
>
> Hemos tratado de presentar una matemática básica, asequible para todos.
>
> Pretendemos también ofrecer una matemática práctica motivada desde la vida ordinaria y proyectada de nuevo a ella; esta proyección adquiere especial relieve en la resolución de problemas concretos que la realidad plantea continuamente.
>
> Nuestra preocupación en presentar una matemática asequible y práctica, no está disociada en absoluto con el deseo de formar a los alumnos a través

de ella. Consideramos que lo formativo e informativo no son dos aspectos disociados y ni siquiera independientes en el aprendizaje de la matemática. La información actualizada y útil que deseamos transmitir está presidida en todo momento por una intencionalidad formativa.

En este sentido, situamos nuestro interés en mantener una amplia apertura hacia otras áreas, con las que la matemática comparte la labor formativa. Esta proyección interdisciplinar se manifiesta a lo largo de todo el libro y especialmente en las actividades y problemas.

Para profundizar aún más la vertiente interdisciplinar y práctico-experimental, hemos insertado al final de cada capítulo una sección titulada LAS MATEMÁTICAS EN LA VIDA; en esta sección, proponemos cuestiones variadas de matemáticas relacionadas con las áreas de Pretecnología, Ciencias Naturales, Ciencias Sociales, etc., que indudablemente motivarán al alumno y estimularán su ingenio y su capacidad creativa. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 9)

La preocupación por adaptarse al estadio psicológico de los alumnos, presentar una matemática práctica, útil en la vida cotidiana y asequible a todos como corresponde a una enseñanza que alcanza a toda la población, reflejar la vertiente interdisciplinar de las matemáticas, basar la práctica docente en la actividad del alumno, desarrollar su creatividad, etc., se mezcla con los objetivos y modos de hacer tradicionales de la escuela primaria.

III.3.2. Descripción del texto

Se trata de un libro[11] que fue muy utilizado como libro de texto en las escuelas del país y dirigido a niños que cursaban Séptimo de EGB[12]. Es un libro correcto desde el punto de vista matemático y un buen exponente de una transposición didáctica basada en modelos concretos. Muestra también el difícil equilibrio que deben mantener los autores de los textos para que el saber que transmiten sea compatible con el saber de la comunidad científica y, al mismo tiempo, responda a las exigencias de la praxis didáctica de la etapa educativa correspondiente.

Observamos que las tradicionales divisiones de los manuales en aritmética, álgebra y geometría, propias de la época de Lacroix, aquí ya no se ponen de manifiesto. El libro trata en sucesivos capítulos de: números enteros, funciones lineales, ecuaciones de primer grado, proporcionalidad de magnitudes, proporcionalidad y semejanza geométricas, geometría métrica

[11] Mansilla, S. y Bujanda, M.P. (1987), *Pitágoras. Matemáticas 7.° de EGB*, SM, Madrid.

[12] Actualmente el curso Séptimo de EGB ha sido sustituido por Primero de ESO (Enseñanza Secundaria Obligatoria) y este libro ha dejado de usarse.

plana, superficie y volumen de poliedros y cuerpos de revolución y estadística (tablas de frecuencia y diagramas).

Cada capítulo se subdivide en apartados que se componen de una parte expositiva seguida por ejercicios propuestos a los alumnos. Al final del capítulo aparecen actividades de recapitulación donde se proponen nuevos ejercicios o problemas que hacen referencia a todos los objetos matemáticos introducidos en el capítulo y un apartado final llamado "Las matemáticas en la vida" donde se presenta alguna situación que muestra la relación existente entre las matemáticas y la vida cotidiana u otras disciplinas académicas.

En las partes expositivas los hechos teóricos más relevantes aparecen escritos en negrita sobre un fondo de color y van acompañados por pequeños ítems informativos en los que aparecen ejemplos, definiciones, propiedades, reglas de cálculo, observaciones, etc., todo ello dicho con gran concisión y sin que apenas existan frases que enlacen unos ítems con otros. Si a ello añadimos que, tipográficamente, la separación entre cada una de esas partes aparece muy marcada y existen muchos dibujos intercalados, lo que aumenta la impresión de fragmentación del texto, podemos decir que nos encontramos con un estilo muy alejado del discurso expositivo de Lacroix que es un discurso continuista, sin rupturas.

Finalmente, podemos decir que nos encontramos ante una presentación de tipo ostensivo en la que el libro muestra los objetos matemáticos y sus reglas de manipulación, a continuación propone tareas para que los alumnos se ejerciten en las técnicas presentadas y, por último, plantea algún problema que se resuelve aplicando las técnicas enseñadas. Es una presentación bastante alejada de los objetivos pedagógicos que se explicitan al comienzo del texto, pero que responde a las prácticas habituales de los profesores de la etapa educativa en la que se encuadra el texto.

III.3.3. El dominio de aparición de la negatividad

El dominio de aparición de la negatividad ya no es el álgebra sino la aritmética elemental. La negatividad aparece al introducir un nuevo tipo de números: los números enteros[13]. Previamente, a lo largo de la escolaridad obligatoria se presentan a los alumnos los números naturales, las fracciones decimales positivas, pasando inmediatamente a los números decimales positivos y, por último, los racionales positivos y algunos irracionales

[13] El libro dedica tres capítulos al tema: *El conjunto de los números enteros, Adición y sustracción de números enteros* y *Producto y cociente de números enteros*. En este último capítulo se habla también de las potencias de base entera y exponente natural.

cuadráticos positivos. Es entonces cuando se introducen los números enteros que preceden en el tiempo a las funciones y ecuaciones.

Los autores introducen el número entero en 32 páginas[14], allí donde Lacroix necesita cientos de páginas para presentar diferentes situaciones que justifiquen poco a poco la necesidad de hablar de cantidades negativas. Y, de acuerdo con la tradición aritmética de la escuela primaria, esta introducción de un nuevo tipo de números se justifica por medio de razones externas a las matemáticas, por medio de ciertas situaciones del mundo físico o social que justifican la aparición de estos números y sirven de modelo de los mismos.

III.3.4. La introducción de los números enteros

Bajo el título *"Algunas situaciones que no se pueden representar con números naturales"* los autores muestran: un impreso bancario que informa del movimiento habido en una cuenta corriente, las fechas de nacimiento de algunos personajes históricos, las temperaturas máximas de varias ciudades españolas y la altura de un monte y la profundidad de una fosa marina. En todas estas situaciones se hace hincapié en que los números, por sí solos, no indican con suficiente precisión el estado de la cuestión y es necesaria una referencia adicional: saldo deudor o acreedor, fecha antes o después de Cristo, temperatura sobre o bajo cero, altura sobre o bajo el nivel del mar. El apartado concluye con la siguiente afirmación:

> Para conocer completamente algunas situaciones necesitamos:
> - un número; y
> - una referencia a una situación inicial (el nacimiento de Cristo, la altitud del nivel del mar, etc.). (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 9)

En el apartado siguiente titulado *"Notación aritmética de situaciones reales"* se indica cuáles son las situaciones iniciales, las situaciones origen:

> - En el caso de la situación económica, el origen es *no tener ni deber nada.*
> - Para las fechas del calendario cristiano, el origen es el *año en que nació Jesucristo.*
> - En las temperaturas suele indicarse como origen: $0°C$ en la escala centígrada o de Celsius.
> - Para fijar la altitud de un lugar, el origen es la *altitud del nivel del mar.*
>
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 10)

para decir, a continuación, que:

[14] Posteriormente, en *Pitágoras. Matemáticas 8.° de EGB* se vuelve a tratar el tema al introducir el número racional.

> Es conveniente unificar la notación para estas situaciones; se designa con 0 la *situación origen*. Para indicar los restantes casos, se coloca el signo + o el signo −, delante del número, tal y como aparece en los siguientes ejemplos.
>
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 10)

y terminar poniendo ejemplos que permiten asociar "tener 14000 ptas" con +14000 ptas, "deber 5000 ptas" con −5000 ptas, etc.

Pero en el ámbito aritmético, una afirmación sobre la necesidad de simbolizar la referencia a una situación inicial no resulta creíble. En ese ámbito los números están contextualizados, aparecen acompañados de un texto que los explica: referencias a la magnitud que se está midiendo, a la unidad empleada, al objeto soporte de la cantidad de magnitud medida, al papel que juegan en la situación que se describe, etc., sin el cual no serían comprensibles. ¿Qué tiene de especial esa referencia a una situación inicial para obligar nada menos que a definir un nuevo conjunto de números? Ya el hecho de que las situaciones que se presentan en este apartado se expresan inicialmente con números naturales contradice de entrada la afirmación de que no es posible representarlas con dichos números.

Se produce además una modificación sustancial del significado del cero y los signos + y − sin que el alumno sea advertido de ello. En la aritmética escolar el cero representa la ausencia de cantidad de magnitud, "la nada", el "vacío". Aquí, de pronto, el cero pasa a tener un significado de origen, de punto de partida o situación inicial. No representa ya la ausencia de cantidad de magnitud, sino la medida de una cierta cantidad de magnitud que se toma como cantidad inicial. Solamente en el caso de las deudas y haberes conserva su sentido original, pero entonces aparecen dos ceros. La situación inicial se define como aquella en que "no se debe ni se tiene nada", por lo que el cero que la representa lleva implícitos dos ceros: uno que caracteriza las deudas y otro los haberes.

También cambia totalmente el estatuto de los signos + y −. Hasta ahora dichos signos indicaban las operaciones aritméticas de suma y resta entre números naturales o racionales positivos, pero con un sesgo importante: en aritmética se utilizan, prioritariamente, para indicar operaciones que deben ser ejecutadas, no para indicar el resultado de la operación. A partir de este momento, esos signos van a ser una parte de la notación usada para representar ciertos números. Pasan de ser signos que indican una operación binaria a ser signos constitutivos de la representación del número. Por último, hay que hacer notar que el libro no explica el por qué de la conveniencia de unificar la notación, ni mucho menos por qué utilizar para dicha unificación los signos + y − que denotan las operaciones binarias de suma y resta en vez de definir signos específicos para la ocasión.

En el tercer apartado: *"Ampliación del conjunto N: El conjunto de los enteros"* se pone muy bien de manifiesto algunas de las sujeciones que intervienen en la elaboración de un libro de texto. El asunto a tratar es la definición del número entero o del conjunto de números enteros, toda vez que ya se han presentado varias situaciones que justifican su introducción, pero esto exige un compromiso entre diferentes instancias. Por un lado, la definición de número entero que se presenta en la escuela primaria tiene que ser coherente con la definición matemática actual de ese objeto y, por otro lado, tiene que respetar la forma en que la escuela primaria concibe ese objeto y su enseñanza. Y aparecen indicios de este compromiso desde que el apartado comienza diciendo:

> Los números naturales nos permiten expresar el resultado de la operación de contar, y esta operación es muy importante en la vida ordinaria. Contamos los alumnos de una clase, los hombres que viven en una ciudad, las viviendas que hace falta construir, los trabajadores que serán necesarios para ello, etc.
>
> Hemos visto que hay también situaciones importantes, que con la notación unificada se expresan con:
>
> - un número natural; y
> - el signo $+$ o $-$ delante del número natural.
>
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 11)

En coherencia con los apartados anteriores aquí habría que reforzar la idea de que los números naturales no son suficientes para representar determinadas situaciones y que es necesario introducir un nuevo conjunto numérico cuyos elementos estarían formados por los números naturales precedidos del signo $+$ o $-$. Pero una afirmación de este tipo es dudosamente legítima desde el punto de vista matemático y esto obliga a los autores a redactar un discurso velado lleno de cosas no dichas, pero sí sugeridas, que deja el camino preparado para que los profesores que utilicen el texto puedan decirlas, sin que los autores tengan que asumir esa responsabilidad.

Y así vemos cómo, a pesar de que las situaciones descritas en el comienzo del tema son situaciones de medida, los autores tienen que referirse a la "operación de contar" porque, desde un punto de vista matemático, no sería legítimo decir que los números naturales expresan el resultado de los procesos de medida. Tampoco pueden decir, explícitamente, que dichos números no permiten representar determinadas situaciones y se limitan a afirmar que se pueden expresar con un número natural precedido de un signo, sin que, hasta el momento se haga mención alguna de que eso pueda constituir un nuevo número. Después prosiguen:

> Por ello, vamos a ampliar el conjunto N de los números naturales de la siguiente forma:
>
> - Consideramos los números naturales, como enteros positivos, identificando, por ejemplo: 5 con +5, 1820 con +1820, etc.
> - Por cada entero positivo, añadimos el correspondiente entero negativo. Con +12, tendremos −12; con +18, −18; con +45, −45, etc.
>
> (...)
>
> El conjunto ampliado es el conjunto de los números enteros y suele designarse por Z. (Mansilla-Bujanda,1987, p.11)

y terminan diciendo:

> El conjunto de los números enteros es una ampliación del conjunto de los números naturales.
>
> - Los números enteros positivos van precedidos de un signo más (+).
> - Los números enteros negativos van precedidos de un signo menos (-).
>
> (Mansilla-Bujanda,1987, p.11)

El conjunto de los números enteros aparece, por tanto, como una ampliación del conjunto de los números naturales. Pero en las matemáticas actuales las ampliaciones de los conjuntos numéricos son nuevos conjuntos una de cuyas partes es isomorfa al conjunto de partida y, en particular, el conjunto de los números enteros es una ampliación del de los naturales porque se puede establecer un isomorfismo entre los naturales y los enteros positivos. Por consiguiente, en el libro, a la hora de definir la ampliación anunciada no se dice que está formada por los números naturales con el añadido de otros objetos llamados enteros negativos, declaración que respondería al sentido que tiene el término 'ampliación' en el lenguaje común, sino que se dice que "consideramos los naturales como enteros positivos", lo cual, teniendo en cuenta que es la primera vez que aparece el término 'entero positivo', resulta una frase sorprendente.

Y ¿cómo se consideran los naturales como enteros positivos, siendo así que estos últimos están sin definir? Pues "identificando 5 con +5, 1820 con +1820, etc.", de donde se deduce que +5 y +1820 forman parte de esos recién nombrados 'enteros positivos' que quedarían definidos por vía de ejemplo. Sucede lo mismo con los enteros negativos: "por cada entero positivo, añadimos el correspondiente entero negativo" se dice, como si ese entero negativo que corresponde al positivo hubiera sido definido de antemano. Es la declaración posterior: "con +12, tendremos −12; con +18, −18; con +45, −45, etc." la que permite relacionar el término 'entero negativo' con los objetos −12, −18, etc.

La dificultad de definir el número entero estriba en que, en el saber matemático actual, los números enteros se conciben como una estructura que puede ser presentada en forma axiomática o construida a partir de los números naturales, por medio de la simetrización de su estructura aditiva, y, dada la edad de los alumnos, ninguna de estas dos vías es asumible en la escuela[15]. La presentación de situaciones físicas que se cuantifican en el ámbito de la aritmética pone el foco de atención en objetos que están constituidos por números naturales precedidos de un signo $+$ o $-$, pero la definición de los enteros como naturales precedidos de signo se aleja bastante de la definición matemática y crea dificultades a la hora de identificar los naturales con los enteros positivos.

Por otra parte, la interpretación de los enteros como los naturales ampliados con sus opuestos, los enteros negativos, que tampoco se ajusta estrictamente a los cánones matemáticos, deja sin sentido expresiones como $+3$ y desnaturaliza gran parte de las tareas de cálculo con números enteros que la escuela plantea a sus alumnos. Ante ese dilema los autores del libro han optado por un discurso ambiguo que permita diferentes interpretaciones y donde, en realidad, el número entero ha quedado sin definir.

A continuación, en el apartado siguiente, se define el valor absoluto de un número entero y, posteriormente, su opuesto. También aquí se observa cierta ambigüedad. En el párrafo introductorio se dice que:

> Se llama valor absoluto de un número entero, al número natural que sigue al signo. Por ejemplo:
>
> El valor absoluto de -3 es 3.
>
> El valor absoluto de $+18$ es 18. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 12)

Sin embargo, en la recapitulación final del apartado se dice:

> Si un número entero es positivo o nulo, su valor absoluto coincide con dicho número. Y si es negativo, es igual a dicho número cambiado de signo.
>
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 12)

que es una definición más cercana a la definición matemática usual. ¿Por qué esta ambigüedad, por qué no se prescinde de la primera declaración? Pues porque tiene un gran valor instrumental: permite definir las operaciones entre enteros como operaciones entre naturales con algunas consideraciones adicionales sobre los signos.

[15] La via de la simetrización se usó a raíz de la reforma de los años 70, pero, posteriormente, por diversas razones, fue abandonada.

III.3.5. El orden en los números enteros

Los apartados y capítulos siguientes siguientes se dedican a poner de relieve la estructura algebraica del conjunto de los números enteros, definiendo primero la relación de orden y después las diferentes operaciones: suma, diferencia, producto, cociente y potencia de base entera y exponente natural. Es ahora cuando se comprueba que las situaciones introductorias de los números enteros no sólo juegan un papel justificador de la necesidad de esos nuevos números sino que van a servir de modelo para construir su estructura. De hecho, el mensaje que se va a trasmitir es que los enteros se ordenan y operan de determinadas maneras porque las deudas, temperaturas, altitudes, etc. se comportan de esas mismas maneras. Y así, en el caso del orden, se dice lo siguiente:

> Para ordenar el conjunto de los números enteros vamos a analizar algunas situaciones que hemos considerado al principio de esta lección.
>
> - Es más próspera la economía del que tiene 15000 ptas (+15000) que la del que tiene 3000 ptas (+3000).
> - Cuando el termómetro marca 12° C sobre cero (+12), la temperatura es *mayor* que cuando marca 5° C sobre cero (+5).
> - Los niños nacidos en el año 1980 d.C. (+1980) nacieron *más tarde* que los nacidos en el año 1900 d.C. (+1900).
>
> Vemos pues que:
>
> Dados dos números positivos es mayor el que tiene mayor valor absoluto.
>
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 13)

Argumentos parecidos se utilizan para dejar sentado que "cualquier número positivo es mayor que cero", "el cero es mayor que cualquier número negativo"[16]y "dados dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto". Las razones que se aducen para justificar la última afirmación son:

> Ricardo debe 100 ptas (−100) y Rosalía 500 ptas (−500). ¿Cuál de los dos está en *mejor* situación?
>
> Si en un día determinado, la temperatura en Estocolmo es de 15° C bajo cero (−15) y en Madrid de 1° C bajo cero (−1), es *más alta* la temperatura de Madrid que la de Estocolmo. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 13)

Como puede verse, son expresiones como "más próspero", "mejor situación", "más alta", "más tarde" aplicadas a deudas, temperaturas o años

[16] En el libro no llega a explicitarse que "cualquier número negativo es menor que cualquier número positivo"; parece darse por supuesta la evidencia de dicha afirmación a partir de estas dos premisas.

las que sirven para definir el orden en los enteros. Cabría preguntarse qué orden quedaría definido a partir de la afirmación: 12° C bajo cero (-12) es una temperatura más baja que 1° C bajo cero (-1). Dicho así, desde luego, -12 *es más* que -1. Del mismo modo, una persona que debe 500 ptas tiene una deuda mayor que la que debe 100 ptas, lo que podría llevarnos a decir que -500 *es mayor* que -100. Esto siembra la duda acerca de si los alumnos, llegado el momento de tener que reconstruir el orden de los números enteros a partir de las propiedades del modelo concreto, serán capaces de hacerse las preguntas adecuadas.

En el apartado que trata del orden se introduce también, por primera vez, la representación de los enteros como puntos de la recta. Son ilustraciones gráficas que acompañan a las situaciones que sirven para establecer el orden en los enteros, hasta que al final del apartado se dice:

> En estos ejemplos, has observado que hemos representado los números enteros sobre una recta horizontal; los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 13)

Después de esto las referencias a la recta numérica desaparecen y sólo vuelven a utilizarse al hablar de los opuestos para mostrar que dos números opuestos son simétricos respecto al cero.

III.3.6. La estructura aditiva de los números enteros

La suma de enteros se define a partir del modelo físico de deudas y haberes. Retomando el estado de cuentas bancario ya utilizado en la introducción del número entero, el texto comenta:

> Si quisiéramos obtener directamente el saldo final, sin considerar los resultados intermedios, podríamos calcularlo del siguiente modo:
>
> - Sumamos, en primer lugar, las cantidades que aparecen en la columna de *abonos*, que representa todo lo que el Sr. Arilla ha ido recibiendo en este tiempo.
>
> $$(+40000) + (+60000) = +100000$$
>
> Es la suma de números positivos y su resultado también es positivo.
>
> La suma de dos o más enteros positivos es un entero positivo, cuyo valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos.
>
> - Sumamos, después, las cantidades que aparecen en la columna de *adeudos*, que representa todo lo que el Sr. Arilla ha ido gastando en este tiempo:
>
> $$(-45000) + (-3070) + (-60000) = -108070$$

La suma de dos o más enteros negativos es un entero negativo, cuyo valor absoluto es igual a la suma de los valores absolutos de los sumandos.

- El saldo final es la diferencia de las dos cantidades obtenidas en las sumas anteriores. En este caso, la suma de la columna *adeudos* es mayor que la suma de la columna *abonos*. Restamos, por tanto:

$$108070 - 100000 = 8070$$

El saldo es negativo, porque la suma mayor en valor absoluto corresponde a las cantidades que se deben.

La operación de la suma de $+100000$ y -108070 se plantea así:

$$+100000 + (-108070) = -(108070 - 100000) = -8070$$

Observa que si la suma de los *abonos* hubiera sido mayor que la de los *adeudos*, el saldo hubiera sido positivo. (Mansilla-Bujanda, 1987, pp. 16-17)

Es obvio que los números enteros no son necesarios para resolver esta situación. Por tanto, no estamos ante una situación que justifique la necesidad del uso de los números enteros, sino ante una situación que pone de manifiesto el comportamiento de las deudas y haberes para, a partir de él, definir un objeto teórico, el número entero, coherente en su estructura aditiva con el modelo físico.

Pero ¿para qué se necesita este nuevo objeto matemático? Esta pregunta queda sin respuesta y de momento el número entero sólo añade el engorro de expresar con una escritura artificiosa aquello que, hasta el momento, los alumnos resolvían en el campo de los números naturales. Y así, por ejemplo, en el problema propuesto siguiente:

> Un barril contiene 80 l. de agua. Antonio saca 5 l. y Lucía saca 18 l. Más tarde, Pedro echó en el depósito 10 l. ¿Cuántos litros de agua había al final en el depósito? (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 17)

no sólo hay que hacer las sumas y restas de rigor para obtener el resultado de 67 l., sino que además habrá que escribir la expresión $(+80)+(-5)+(-18)+(+10)$ o alguna otra similar, lo cual introduce una dificultad adicional sin aportar nada a la resolución del problema.

Si analizamos la escritura simbólica utilizada en la definición de la suma de enteros, vemos que, además de los nuevos significados de los signos $+$ y $-$, también los paréntesis adquieren nuevos sentidos. Por ejemplo, al indicar las sumas de enteros, éstos aparecen entre paréntesis, lo que supone un nuevo uso de los paréntesis que se da por sobrentendido[17]. Posteriormente, aparecen expresiones como $+100000 + (-108070) = -(108070 - 100000) = -8070$ en la que se observa un nuevo uso del paréntesis, también sobrentendido, para indicar que el signo $-$ acompaña al número resultado de la operación indicada entre paréntesis. En esa misma expresión se constata la adopción del convenio de no encerrar entre paréntesis el número entero que encabeza una expresión, sin explicación ninguna. Es decir, aparecen nuevos usos de los paréntesis que simplemente se muestran, pero que no se declaran. Los alumnos deben aprender esos nuevos usos, pero sin que se constituyan en objeto de estudio.

Para agravar el problema de las notaciones, una vez concluida la definición de suma, el texto añade:

> *Notación.* Para evitar confusiones entre el signo $+$ de la suma y el signo $+$ que acompaña a los enteros positivos, prescindiremos en adelante del signo $+$ de los enteros positivos. Por ejemplo, escribiremos 14, en lugar de $+14$; 35, en lugar de $+35$, etc. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 17)

Es decir, no bien se ha acabado de proponer el uso de números con signo para representar las situaciones de suma, cuando se propone la supresión del signo $+$ que forma parte de los enteros positivos para "evitar confusiones" entre dicho signo y el signo $+$ de la suma. La razón que se alega conduce, de inmediato, a una pregunta sin respuesta posible: ¿por qué no hacer lo mismo con el signo $-$, que también se confunde con el signo de la resta, y trabajar con números naturales como se venía haciendo hasta ahora?

Por otro lado, la siguiente regla sobre cómo efectuar la suma de más de dos números enteros:

> Para sumar varios números enteros positivos y negativos, se suman separadamente los sumandos positivos y los negativos. La suma que dé mayor valor absoluto, se resta de la otra.
>
> El resultado final es un número entero, cuyo valor absoluto es el de la diferencia anterior y su signo, el de la suma que haya tenido mayor valor absoluto. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 17)

parece sugerir la existencia de dos conjuntos numéricos separados: el de los enteros positivos y el de los enteros negativos, que sólo entran en relación en el último momento de un cálculo, cuando éste ha quedado reducido a la suma de un único positivo con un único negativo. Esto se hace todavía más patente en los ejercicios de sumas que se proponen a los alumnos, donde, por ejemplo, se dice:

[17] En la aritmética escolar se utilizan los paréntesis para indicar el orden en que deben efectuarse las operaciones en un cálculo con varios números.

Efectúa las siguientes sumas de números enteros, sumando separadamente los sumandos positivos y los negativos, y efectuando la correspondiente resta.

Ejemplo: $47+(-52)+(-18)+57+(-19) = (47+57)+(-52+(-18)+(-19)) = 104 + (-89) = 15$.

a) $-83 + 45 + (-15) + 48$ b) $-18 + 45 + (-12) + 38$

c) $-57 + 18 + (-83) + (-19) + 19$ d) $-71 + 18 + (-104) + 38$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 17)

Con órdenes tan tajantes, la posibilidad de hacer $-83 + 45 + (-15) + 48 = -83 + 30 + 48 = -53 + 48 = -5$ en el ejercicio a) o empezar sumando $(-19) + 19 = 0$ en el ejercicio c) parece quedar fuera de lugar. La regla está clara: si en una expresión aparecen mezclados positivos y negativos, debemos tratarlos por separado. Pero esta regla, que puede que sea eficaz para conseguir que los alumnos no se equivoquen inicialmente en los cálculos, no parece que ayude a concebir los enteros como un único conjunto numérico, y tampoco parece que vaya a contribuir al desarrollo de unas técnicas de cálculo reflexivas, económicas y eficaces.

Antes de pasar a definir la diferencia de números enteros, el texto presenta las propiedades de la suma de números enteros y, en particular, la definición de opuesto de un número entero que completa con los dos enunciados siguientes:

El opuesto del opuesto de un número entero a es igual a a

$$op[op(a)] = a$$

Si a y b son números enteros cualesquiera, se verifica:

$$op(a + b) = op(a) + op(b)$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 20)

que más adelante servirán para justificar la supresión de paréntesis en las expresiones horizontales.

Una vez acabada la exposición sobre la suma de enteros y sus propiedades los autores abordan la sustracción de números enteros. Para ello, recuerdan que la diferencia[18] de dos números naturales puede ser entendida

[18] Aunque el título del apartado habla de sustracción después casi siempre se utiliza la palabra diferencia.

como el número que sumado al sustraendo es igual al minuendo y, a continuación, definen en los mismos términos la diferencia de números enteros[19]. Después se constata, en un caso particular, que la diferencia equivale a la suma del minuendo con el opuesto del sustraendo, lo que permite enunciar la siguiente regla:

> Para hallar la diferencia de dos números enteros, se suma al minuendo el opuesto del sustraendo
> $$a - b = a + op(b)$$
> (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 22)

Como puede verse, aquí las situaciones físicas que habían servido para introducir la suma no juegan el mismo papel. La diferencia se introduce como operación inversa de la suma de enteros y no como un objeto matemático que tenga que ser coherente con los modelos concretos. Pero estos últimos aparecen, dentro del apartado de la sustracción, como problemas propuestos, lo cual hace suponer que se considera idónea su resolución en $\mathbb{Z}$. Y, en consecuencia, suponemos que enunciados como los siguientes:

> Pitágoras nació en el 580 a.C. y murió en el 501 a.C. ¿Qué edad tenía Pitágoras cuando murió?
>
> ¿Qué diferencia de nivel hay entre el suelo de una galería de una mina situada a 170 m. de profundidad y el tejado de una casa de 13 m. situada en la superficie exterior? (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 22)

se proponen para que sean resueltos escribiendo $-501 - (-580)$ o $13 - (-170)$. De nuevo, al igual que en la suma, surge la pregunta de qué ventaja supone la utilización de los enteros frente a los naturales en este tipo de situaciones.

El último apartado del capítulo se refiere a la supresión de paréntesis y comienza diciendo lo siguiente:

> *Notación.* Puesto que $a - b = a + op(b)$, escribiremos el signo $-$ en lugar de *op*. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 22)

Ahora el signo $-$ que ya tenía un significado operativo binario y un significado predicativo, adquiere un nuevo significado: el operativo unario. El mismo signo se utiliza con significados diferentes sin que el texto ofrezca una explicación que justifique estas decisiones.

[19] Al hablar de la diferencia de naturales hay un momento en que se dice que "la sustracción de números naturales no es siempre posible" pero, posteriormente, el hecho de que la diferencia de enteros es siempre posible y que dota de sentido a las diferencias entre naturales con minuendo menor que el sustraendo es algo que no se menciona.

Una vez aclarada esa cuestión notacional, el texto procede a presentar y justificar las prácticas de supresión de paréntesis:

$$
\begin{array}{c}
-18-(4+(-7)+12) \\
| \\
\mathit{Definición\ diferencia} \\
\downarrow \\
-18+op(4+op(7)+12) \\
| \\
\mathit{Prop.\ de\ los\ opuestos} \\
\downarrow \\
-18+op(4)+op(op(7))+op(12) \\
| \\
\mathit{Prop.\ de\ los\ opuestos} \\
\downarrow \\
-18+op(4)+7+op(12) \\
| \\
\mathit{Notación} \\
\downarrow \\
-18-4+7-12
\end{array}
$$

Luego:

$$-18-(4+(-7)+12)=-18-(4-7+12)=-18-4+7-12$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 24)

La justificación anterior permite pasar de $-18-(4+(-7)+12)$ a $-18-4+7-12$ pero, ¿de qué sirve esto si la última expresión se interpreta como una sucesión de sumas y restas? Según la regla establecida, habrá que transformar las restas en sumas con el opuesto y volver a convertir la expresión $-18-4+7-12$ en $(-18)+(-4)+7+(-12)$ para poder efectuar las sumas correspondientes, con lo que el proceso de supresión de paréntesis se retrotrae.

El dilema que se plantea en este momento es consecuencia de la decisión, tomada al principio del tema, de suprimir el signo + que forma parte del número entero. Esto convierte la expresión $-18-4+7-12$ en una sucesión de sumas y restas de enteros y obliga a convertir las restas en sumas con el opuesto. Sin embargo, si se toma la decisión de suprimir el signo + que representa la suma, la expresión $-18-4+7-12$ se convierte en la suma de los términos -18, -4, $+7$, y -12 y puede ser operada directamente desde el momento que se interpreta como una suma de enteros.

Por último, queda por comentar que, una vez justificado el modo de eliminar los paréntesis, parece que se sugiere, como única vía para efectuar las operaciones indicadas, la eliminación de los paréntesis y posterior realización de las operaciones. Por lo menos, eso se deduce del hecho de que los dos únicos ejercicios que se proponen sobre el tema indican ese camino.

Queda así definido un algoritmo de cálculo constituido por las órdenes:

- suprime los paréntesis,
- suma los números positivos y negativos por separado,
- resta los números naturales así obtenidos y
- escribe delante del resultado el signo que precede al mayor de los dos números naturales,

que deberá ponerse en marcha cada vez que haya que ejecutar las operaciones indicadas en una expresión numérica en la que interviene únicamente la estructura aditiva.

Pero es evidente que esta algoritmización de las sumas de enteros, aun cuando puede que evite errores a los alumnos, limita seriamente la posibilidad de efectuar los cálculos de la forma más eficaz y económica posible. ¿Por qué no se plantea también la vía de eliminar los paréntesis realizando las operaciones indicadas en su interior? ¿Es que no es pertinente en ningún caso? ¿Qué ocurrirá cuando se estudie la estructura multiplicativa de los enteros? ¿Se propondrá, en la resolución de, por ejemplo, $7-3(8-5-2)$, el paso intermedio $7-24+15+6$, a imagen y semejanza de lo que se indica para la estructura aditiva?

III.3.7. La estructura multiplicativa de los números enteros

El tercer y último capítulo sobre los números enteros, titulado *"Producto y cociente de números enteros"*, se ocupa además de las potencias de base entera y exponente natural. El capítulo comienza recordando que se ha construido un nuevo conjunto de números que es una ampliación de conjunto de los números naturales conseguida a base de añadir a cada número natural su opuesto. De acuerdo con esto, el producto de los números enteros positivos se define a partir de su identificación con los números naturales.

> Los *enteros positivos* se identifican con los naturales, y, por tanto, se multiplican como *números naturales* .
>
> $(+7)\cdot(+8)=7\cdot 8=56\rightarrow +56;\qquad (+5)\cdot(+9)=5\cdot 9=45\rightarrow +45$

El producto de dos enteros positivos es un entero positivo y su valor absoluto es igual al producto de los valores absolutos de los factores. (Mansilla-Bujanda, 1987, p. 27)

Para justificar el producto de un positivo y un negativo se recurre a una doble argumentación. Primero se dice que el producto de números enteros debe cumplir las mismas propiedades que el producto de naturales y que, por tanto, si a, b y c son números enteros deberán cumplir que: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$, $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot 0 = 0$ y $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. Después se interrumpe esta línea argumental para presentar una situación física que el libro califica como ejemplo:

Sergio gasta 50 *ptas en el autobús cada día que va al colegio. ¿Cuánto dinero gasta si va al colegio tres días?*

Cada día gasta 50 ptas (-50) y va al colegio 3 días $(+3)$

Gasta $3 \cdot 50 = 150$ ptas de gasto (-150). Luego:

$$(-50) \cdot 3 = -150$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 28)

A continuación se retoma el argumento de la conservación de las propiedades del producto de números naturales y se continúa en letra pequeña bajo el título de "*Justificación*":

Sigue el razonamiento que marcan las flechas:

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 0 = 0 \\ \downarrow \\ 4 \cdot (-7 + 7) = 0 \\ \downarrow \\ 4 \cdot (-7) + 4 \cdot 7 = 0 \\ \downarrow \\ 4 \cdot (-7) + 28 = 0 \end{array}$$

¿Cuál es el entero que sumado con 28 es igual a 0? Es $op(28) = -28$. Luego:

$$4 \cdot (-7) = -28$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 28)

para terminar afirmando que:

Si a es un entero positivo y $-b$ es un entero negativo, el producto de ambos es otro entero negativo, verificándose:

$$a \cdot (-b) = -(a \cdot b)$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 28)

La exposición sobre el producto de dos enteros negativos sigue el mismo esquema. El ejemplo que se presenta es:

Sergio gasta 50 *ptas en el autobús cada día que va al colegio. ¿Cuánto gasta o ahorra si deja de ir al colegio cuatro días?*

Cada día gasta 50 ptas $\rightarrow (-50)$

No va al colegio 4 días $\rightarrow (-4)$

Ahorra lo que le hubiera costado el autobús 4 días:

$$4 \cdot 50 = 200 \; ptas \; de \; ahorro \rightarrow (+200).$$

Luego:

$$(-50) \cdot (-4) = +200$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 29)

Sigue después la justificación basada en la conservación de la propiedad distributiva y se termina diciendo:

Si $-a$ y $-b$ son dos enteros negativos, el producto de ambos es otro entero positivo, verificándose:

$$(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$$

(Mansilla-Bujanda, 1987, p. 29)

Lo primero que llama la atención en estos párrafos es que, a diferencia de lo que ocurre en la estructura aditiva, las situaciones introductorias del producto de enteros no se presentan como un modelo concreto a partir del cual se justifican éste y sus propiedades, sino que aparecen sólo a título de ejemplo. En este caso, la justificación de una operación y de sus propiedades se establece recurriendo a razones internas de las matemáticas, lo que rebaja el estatuto de los modelos concretos que ya no juegan un papel de árbitros que muestran cómo debe comportarse el objeto matemático en cuestión, sino que pasan a ser ejemplos de cómo pueden utilizarse los enteros para modelizar una situación.

Quizá influye en este cambio lo poco creíble que resulta la resolución de estas situaciones en el ámbito de los números enteros. De hecho, los autores tienen que resolverlas en el campo de los naturales y sólo una vez resueltas pueden plantear su reescritura en términos de números enteros. Para ello, hay que tomar decisiones sobre que "ir al colegio 3 días" debe expresarse por medio de $+3$ y "dejar de ir 4 días" por -4, decisiones que son fáciles de tomar a posteriori, cuando ya se conoce el resultado, pero que no resultan nada evidentes si fueran necesarias como paso previo para obtener la solución. Porque, por ejemplo, se podría argumentar que cada día que Sergio no va al colegio gana 50 ptas, desde el momento que no tiene que pagarlas, por tanto, $+50$, que multiplicado por los 4 días que no va, (-4), nos da -200 ptas. Y ahora ¿cómo se interpretaría este resultado?

En realidad, la tarea de adjudicar sentido positivo o negativo a las cantidades que intervienen en una situación física es muy compleja y está directamente relacionada con el papel que cada una de las cantidades juega respecto a las otras. Pero el texto no está interesado en esta problemática, y esto se confirma viendo la escasa presencia de situaciones físicas modelizables mediante números enteros en los ejercicios propuestos, lo que por otra parte es lógico si pensamos que todas estas situaciones son resolubles en números naturales.

En el caso del producto, la presentación de las situaciones introductorias, aun cuando se formulan como ejemplos, parece simplemente ofrecerse como recurso didáctico a los profesores que quieran introducir el producto de enteros a partir de un modelo concreto, a imagen y semejanza de lo que se hace para introducir la suma de enteros, aun a sabiendas de que esta introducción se sostiene con dificultad.

Por otro lado, estas situaciones silencian muchos de los objetos físicos que habían sido utilizados en el caso de la suma y el orden: deudas y haberes, temperaturas, altitudes, tiempo medido en años antes y después de Cristo, para quedarse únicamente con objetos dinámicos (acciones): ganar-perder, gastar-ahorrar, a los que se les añade una connotación temporal inexistente en los casos anteriores.

La pregunta que surge de forma evidente es: ¿qué pasa si los alumnos recurren por su cuenta a los modelos concretos utilizados en la definición del orden y la suma para intentar a partir de ellos establecer el producto de enteros? Estos modelos son mucho más usuales e inteligibles que el presentado para el producto, así que es previsible que los alumnos ante cualquier duda recurran a ellos. Pero ¿cómo obtener la regla de producto de dos enteros negativos a partir, por ejemplo, del producto de dos deudas o de dos temperaturas bajo cero? No sólo no es posible hacerlo, sin que además desde ese punto de vista la tal regla parece absurda.

Volviendo al tema de las notaciones, los autores usan el punto como notación para el producto con toda naturalidad y sin dar ningún tipo de explicación, pero la realidad es que esa notación es nueva para los alumnos que en cursos anteriores han denotado el producto por medio del signo $\times$. Otra particularidad es que no suprimen en ningún momento el signo del producto, manteniéndolo también en los temas de funciones y ecuaciones (escriben, por ejemplo, $5 \cdot x - 7 = 3$ ó $3 \cdot (x - 3) = 5 \cdot (x - 1) - 4 \cdot x$). El uso del punto para denotar el producto será abandonado en el libro de texto del curso siguiente al iniciarse los temas de polinomios.

Se termina el capítulo presentando las propiedades del producto de números enteros y las definiciones de cociente y potencia de enteros. El cociente se introduce como operación inversa del producto en aquellos casos en que el factor conocido es divisor de dicho producto y así se dice que $-15 : (-3) = 5$ porque $-3 \cdot 5 = -15$. No se hace ninguna referencia al hecho de que no siempre es posible efectuar un cociente en el campo de los enteros ni tampoco se define la división entera. En cuanto a la potencia de base entera y exponente natural se introduce como un producto repetido y se pasa después a enunciar las propiedades: $a^n a^m = a^{n+m}$, $a^1 = a$, $(a^n)^m = a^{nm}$, $a^n : a^m = a^{n-m}$ con $n \geq m$ y $a^0 = 1$, comprobándolas en casos particulares.

Por último, queda por comentar algunos aspectos referente al uso de las letras. Aun cuando estamos en un ámbito aritmético, el texto utiliza letras para expresar simbólicamente las operaciones entre números enteros y sus propiedades. Sin embargo, se utilizan dos códigos literales diferentes: uno en el que se supone que el signo está implícito en la letra y otro en el que se supone que dicho signo debe explicitarse haciendo que preceda a la letra. Nos encontramos por tanto con un tratamiento ambiguo de la letra, en el que su dominio tan pronto es $\mathbb{N}$ como $\mathbb{Z}$.

III.4. Obstáculos epistemológicos y didácticos en la transposición didáctica del número entero basada en modelos concretos

III.4.1. Características de la transposición didáctica del número entero basada en modelos concretos

El análisis de la transposición didáctica realizado en el apartado anterior nos permite caracterizar de manera genérica la transposición didáctica del número entero basada en modelos concretos como sigue:

- *La introducccción del números entero se produce en un ámbito, el aritmético, que no justifica su necesidad.* La resolución aritmética de los problemas depende en todo momento del contexto. Es el sentido que tienen los números dentro de ese contexto el que permite decidir en cada momento cuál es la operación a realizar y entre qué datos. Además, el control de la validez de la resolución es semántico, depende del significado de los números y sus operaciones dentro de la situación. En esas condiciones, no se necesitan más símbolos que los que se usan para representar los números positivos y sus operaciones. La resolución de un problema aritmético en $\mathbb{Z}$ no es más eficaz y, en cambio, supone un aumento del grado de complejidad del simbolismo escrito. Y este hecho lo tienen muy presente los autores y por eso, después de justificar los números enteros y sus operaciones mediante los modelos concretos, apenas presentan a los alumnos problemas aritméticos contextualizados, pues saben que su resolución en $\mathbb{Z}$ no es creíble.

- *Se invierte el proceso de modelización matemática.* En el proceso de modelización matemática propio de las ciencias experimentales o sociales, el objeto de estudio es un cierto sistema del mundo sensible, mientras que el sistema matemático es el modelo que lo representa. En esas condiciones, el estudio del modelo matemático permite obtener información sobre el sistema modelizado. Pero en la enseñanza de la aritmética elemental esta relación entre objeto de estudio y modelo se invierte: el sistema que se modeliza es la noción aritmética (la suma y resta de los números naturales, por ejemplo) y el sistema físico (las situaciones de "añadir o quitar", por ejemplo) es el dispositivo mediador que permite obtener información y justificar ante los alumnos el comportamiento de la noción matemática. En el caso de los números enteros, su introducción mediante modelos concretos sigue las pautas de inversión del proceso de modelización propio de la aritmética. Pero este proceso de enseñanza, que puede ser válido en el caso de la introducción escolar de los números naturales y fraccionarios porque de alguna manera reproduce una teoría intuitiva de los conjuntos y sus cardinales y de las cantidades de magnitud y su medida, es más que discutible en el caso de unos objetos matemáticos cuya historia nos muestra que se construyeron como respuesta a necesidades internas de las matemáticas. Además, la utilización de modelos concretos como referente del número entero refuerza la consideración del número entero como medida de cantidades de magnitud relativas o con dos sentidos y relaciona sus operaciones con determinadas acciones y situaciones físicas o sociales del mundo sensible.

- *La utilización de modelos concretos dificulta la justificación de la estructura ordinal y multiplicativa de los números enteros.* Los modelos concretos funcionan por analogía, es decir, se muestra el funcionamiento del modelo y, a continuación, se dice que los números enteros "se comportan igual". Se supone que la familiarización del alumno con el modelo le va a permitir justificar y reconstruir, en caso de olvido, el comportamiento del objeto matemático[20]. El interés del modelo se basa por tanto en el hecho de "parecerse" al objeto matemático que representa o, dicho de otra manera, en el hecho de que el modelo concreto reproduce la estructura

[20] En el apartado I.14 se hace referencia a distintas investigaciones que ponen en duda la familiaridad de los alumnos con los modelos concretos y consideran que pueden resultar una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos.

algebraica de los números enteros. Pero esto es más que discutible porque las estructuras algebraicas que más se parecen a los modelos concretos son la estructura de espacio vectorial unidimensional y la de espacio afín unidimensional (Cid, 2002). Por supuesto estas estructuras son isomorfas al cuerpo de los números reales, pero poner de manifiesto la estructura vectorial o afín de $\mathbb{R}$ no es el mejor camino para justificar su orden total y su producto interno e incluso, en el caso afín, su suma interna. Hay que tener en cuenta que la negatividad matemática no sólo ha desembocado en las estructuras numéricas, sino también, entre otras, en estructuras del álgebra lineal: espacio vectorial, espacio afín, etc.

- *Las operaciones entre números enteros se presentan como operaciones entre números naturales con el añadido de alguna consideración sobre los signos.* En la aritmética escolar se practica un reduccionismo consistente en definir las operaciones entre cualquier tipo de números como operaciones entre naturales a las que se añade alguna otra consideración: en los números decimales las reglas de manejo de la coma decimal, en las fracciones las de numeradores y denominadores. Este reduccionismo alcanza a los números enteros, puesto que se enseñan en el seno de la aritmética, y conduce a la regla de suma de varios números consistente en sumar por un lado todos los números positivos, por otro lado los números negativos y restar entre sí el resultado de esas dos sumas, lo que no favorece la integración de positivos y negativos en un único conjunto numérico.

- *Las técnicas de cálculo de expresiones numéricas que indican operaciones combinadas se algoritmizan.* También aquí continúa jugando su papel la tradición aritmética puesto que la escuela dedica mucho tiempo a la enseñanza de los algoritmos de las operaciones aritméticas entre números naturales, decimales o fraccionarios. De acuerdo con el modo de hacer aritmético, el texto algoritmiza las técnicas de cálculo que afectan a las expresiones numéricas, obviando toda posibilidad de búsqueda del modo más simple de realizar las operaciones. Pero las expresiones numéricas son el preludio de las expresiones algebraicas y el cálculo algebraico no es un cálculo algorítmico, es un cálculo que exige reflexión y toma de decisiones porque está regido por principios de economía y de adecuación al fin que persigue. Por consiguiente, la decisión de algoritmizar el cálculo de las expresiones numéricas puede tener consecuencias indeseables en el establecimiento de buenas prácticas de cálculo algebraico.

-*La presentación inicial de la notación completa impide el desarrollo de las prácticas de cálculo habituales.* En el ámbito algebraico las cuatro operaciones aritméticas quedan reducidas a dos: la suma y el producto, y los signos que indican esas operaciones binarias se suprimen, dando lugar a la llamada 'notación incompleta'. En ella los signos + y − tienen un sentido predicativo u operativo unario y no existe un signo para el producto. La yuxtaposición de términos indica una suma y esa misma yuxtaposición con los términos entre paréntesis indica un producto. En el cálculo algebraico habitual se trabaja con las notaciones incompletas y si una expresión algebraica está escrita en notación completa, es decir, si incorpora los signos operativos binarios, se procede a suprimirlos. El énfasis inicial en la notación completa, fruto de un excesivo formalismo notacional, y las instrucciones que promueven la supresión del signo + predicativo, en lugar del signo + operativo binario, dificultan las prácticas habituales de cálculo.

- *Se introducen las notaciones sin considerarlas objetos de estudio.* La algebrización de la aritmética, consecuencia de la reforma de la enseñanza de las matemáticas llevada a cabo en los años 60-70 del siglo pasado, trajo como consecuencia que los símbolos que antes eran exclusivos del ámbito algebraico (signos de las operaciones, símbolos de las relaciones, paréntesis, letras, etc.) pasaron a formar parte del ámbito aritmético (Chevallard, 1985b). Por tanto, en la enseñanza de los números enteros, todos ellos se dan por conocidos, cuando, en muchos casos, su significado sufre transformaciones importantes.

- *No se explicitan las diferencias existentes entre los números enteros y los números naturales.* La aparición de los números enteros exige reinterpretar el significado del cero (pasa de ser un cero absoluto a ser un cero origen o convencional) y de la resta (pasa de ser una "sustracción" a ser una "diferencia"). Además hay una modificación importante de las propiedades que antes se suponía que afectaban a "todos los números": el resultado de una suma es mayor o igual que cualquiera de sus sumandos, el minuendo de un diferencia tiene que ser mayor o igual que el sustraendo, el resultado de un producto de factores distintos de cero es mayor o igual que cualquiera de sus factores, el dividendo de una división es mayor o igual que el cociente, no existen números menores que cero, etc. No poner de manifiesto estas diferencias puede hacer creer que dichas propiedades siguen cumpliéndose en $\mathbb{Z}$.

III.4.2. Obstáculos epistemológicos y didácticos

Ante las características de la transposición didáctica del número entero por medio de modelos concretos indicadas en el apartado anterior, consideramos que estamos en condiciones de afirmar que dicha transposición didáctica:

- No contiene elementos que permitan suponer que, a partir de ella, los alumnos pueden construir una concepción que supere los obstáculos epistemológicos. Una concepción superadora del obstáculo es una concepción consciente de su existencia y que lo rechaza explícitamente y nada en la génesis del número entero mediante modelos concretos pone de manifiesto que esos obstáculos existan y, todavía menos, incorpora los medios para su rechazo.

- Introduce un obstáculo didáctico asociado al obstáculo epistemológico, en el sentido indicado por El Bouazzaoui (1988, citada en el apartado I.2). La práctica didáctica habitual de apoyarse en las concepciones que poseen los alumnos para hacer que adquieran una nueva concepción se traduce en este caso en una introducción de los números enteros en el ámbito aritmético, enfatizando su significado como medidas de cantidades de magnitud relativas o con dos sentidos, haciendo depender sus operaciones de las características de determinadas situaciones del mundo sensible, obviando las diferencias epistemológicas entre los números enteros y los números naturales, algoritmizando las técnicas de cálculo y preludiando un álgebra totalmente dependiente de la aritmética. Todo ello, no sólo no permite el rechazo y superación de los obstáculos epistemológicos, sino que incluso los refuerza.

-Transmite unas técnicas de cálculo con números enteros que van a constituirse en un obstáculo didáctico para el desarrollo de unas buenas técnicas de cálculo algebraico. Las expresiones numéricas son el antecedente de las expresiones algebraicas por lo que el tratamiento que reciban las primeras va a influir posteriormente en las segundas. En esas condiciones, la pervivencia de los significados aritméticos de los signos de las operaciones y relaciones, sin que se expliciten los cambios de significado que permiten darles sentido algebraico, la reducción de las operaciones entre números enteros a las operaciones entre números naturales, la algoritmización de las técnicas de cálculo con números enteros, el énfasis inicial en el uso de la notación completa y la mala praxis en el paso de la notación completa a la incompleta, van a obstaculizar el establecimiento de unas técnicas algebraicas de cálculo basadas en la reflexión, la economía y la funcionalidad.

III.5. La evolución histórica de la transposición didáctica del número negativo

El estudio realizado en este capítulo nos muestra que entre los dos textos analizados media un abismo. Mientras en el texto de siglo XIX se presenta una génesis de la negatividad matemática en el seno del álgebra que respeta sus razones de ser y da cuenta de las dificultades de la comunidad matemática para darle un estatuto numérico, en el texto de finales del siglo XX se presenta una génesis del número entero en el seno de la aritmética, que no respeta sus razones de ser, que no tiene en cuenta los obstáculos epistemológicos e incluso los refuerza y que incorpora formas de hacer que van a obstaculizar el desarrollo posterior del cálculo algebraico.

Ante estos hechos, nos preguntamos por la sucesión temporal de decisiones y condicionantes de las mismas que han propiciado esta evolución de la transposición didáctica. Aun cuando la contestación a esta cuestión no forma parte de esta memoria y queda como cuestión abierta, un primer análisis de otros textos[21] nos hace conjeturar que ha sido una evolución progresiva que, a través de "mejoras locales" impuestas por distintas instituciones, ha desembocado en una génesis escolar del número entero que provoca obstáculos epistemológicos y didácticos difíciles de remontar. Creemos estar ante un 'fenómeno de variaciones locales' de la transposición didáctica que ha ido introduciendo a lo largo del tiempo pequeñas modificaciones que, tomadas de una en una, no son especialmente significativas, pero que finalmente, consideradas en su conjunto, acaban modificando totalmente el sentido del saber enseñado.

Sin perjuicio de lo que se averigüe en ulteriores investigaciones sobre este tema, creemos que algunos de los condicionantes que han intervenido en las sucesivas modificaciones de la transposición didáctica han sido los siguientes:

- El cambio producido en el saber matemático de la comunidad científica, consecuencia de las distintas rupturas epistemológicas de los siglos XIX y XX, que permitió superar los obstáculos epistemológicos e interpretar la negatividad matemática como números negativos, integrados en los distintos conjuntos numéricos. Su consecuencia fue el paso de la enseñanza de las distintas formas de la negatividad matemática a la enseñanza del número negativo y posteriormente a la del número entero.

- Las modificaciones en la edad y el tipo de alumnado al que se enseña ese saber: de un alumnado adolescente (15-16 años), interesado en cursar carreras científicas, a un alumnado más joven (11-12 años) que cursa una etapa de enseñanza obligatoria común a toda la población.

[21] Fernández y Cardín, 1878; Rodríguez Vidal, 1955; Equipo Granada Mats, 1985; Martínez, 1989; Equipo Signo, 1994; Álvarez et al., 2011.

Su consecuencia fue un cambio en el nivel de complejidad semántica del discurso teórico y en el nivel de dificultad de las técnicas y los problemas presentados a los alumnos.

- Las distintas instituciones educativas que han asumido la enseñanza de ese saber: desde instituciones universitarias o cercanas a ellas hasta instituciones de enseñanza primaria o secundaria. Su consecuencia fue la adaptación del saber enseñado a la ideología y praxis didáctica de cada institución.
- La influencia que ejercen diferentes teorías pedagógicas o psicológicas en la enseñanza obligatoria. Su consecuencia fue el énfasis en la transposición didáctica basada en modelos concretos.
- La confluencia de la visión bourbakista de las matemáticas con las teorías psicológicas de Piaget que condujo a la "reforma de las matemáticas modernas" de los años 60-70 del siglo pasado. Su consecuencia a largo plazo ha sido la algebrización de la aritmética, al centrar la atención en el estudio de las estructuras numéricas, y la introducción del número entero en el ámbito aritmético.

CAPÍTULO IV

Diseño y desarrollo de una génesis escolar de los números negativos

IV.1. El álgebra como razón de ser de los números negativos

En este capítulo[1] retomamos el problema didáctico planteado en el capítulo I:

> Cómo diseñar una génesis escolar del número negativo que evite la aparición de obstáculos didácticos, que afronte la superación de los obstáculos epistemológicos y que permita al alumno construir una concepción inicial del número negativo que evolucione con facilidad hacia concepciones cada vez más cercanas al concepto matemático.

Para abordarlo e intentar dar una solución nos basaremos en los análisis efectuados en los capítulos anteriores de esta memoria. De hecho, el estudio de la transposición didáctica del número negativo (capítulo III), así como el de otros investigadores reseñados en el capítulo I, nos indica que los problemas que se presentan a los alumnos en el ámbito aritmético para justificar la necesidad de usar los números negativos suelen tener una resolución perfectamente válida en el campo de los números positivos, incluso mucho más sencilla. La razón de ser de los números negativos no puede encontrarse en un ámbito, como el aritmético, donde la permanente contextualización numérica y la fragmentación de la secuencia de operaciones a realizar hace innecesario todo simbolismo más allá de la representación de los números y de sus algoritmos de cálculo.

Por tanto, entendemos que la aritmética no es un buen lugar para iniciar la enseñanza de los números negativos, pues no permite justificar de

[1] Una parte de este capítulo ha sido publicada en Cid y Bolea (2010) y Cid y Ruiz-Munzón (2011)

una manera creíble su necesidad. Además, fomenta la concepción de que el número sólo puede entenderse como una medida, incorpora esta circunstancia a la definición de número y asimila las operaciones aritméticas y sus propiedades con determinadas acciones físicas y su comportamiento, lo que, de acuerdo con el análisis efectuado en el capítulo II, es un obstáculo epistemológico que la comunidad de matemáticos tuvo que salvar para poder aceptar plenamente los números positivos y negativos y justificar su estructura.

En consecuencia, consideramos que el ámbito de introducción de los números negativos debe ser el álgebra pues, como ya hemos dicho anteriormente, la razón de ser inicial de los números negativos viene dada por las necesidades del cálculo algebraico y la resolución de ecuaciones. Estamos ante el primer objeto matemático escolar que surge por razones internas de las matemáticas.

Ahora bien, la decisión de introducir los números negativos en el seno del álgebra plantea varios problemas. Uno de ellos es la necesidad de iniciar el álgebra escolar cuando aún no se dispone de las reglas de los signos, lo que dificulta, si es que no impide, el cálculo algebraico. Esto nos sitúa en el paso de la aritmética al álgebra, es decir, en los comienzos del álgebra escolar, y obliga a una introducción simultánea de los números negativos y del álgebra en la que se presenten los distintos objetos algebraicos, pero se posponga el desarrollo y consolidación de las técnicas que les afectan hasta tanto no se establezcan las técnicas de cálculo con números positivos y negativos.

Además, para justificar la necesidad de introducir los números negativos y dar sentido a su estructura se requiere, cuando menos, resaltar las diferencias entre el cálculo aritmético y el algebraico:

- La simetrización aditiva y multiplicativa de $\mathbb{N}$ permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia, los signos $+$ y $-$, que en aritmética son signos operativos binarios entre números sin determinación, en álgebra pasan a ser signos predicativos o signos operativos unarios. Y asumir esta diferencia es fundamental para poder entender las reglas de juego del cálculo algebraico y la necesidad del trabajo con sumandos y sustraendos.
- El papel de los paréntesis, no sólo como elementos de la escritura algebraica que modifican el orden en el que las operaciones deben realizarse[2], sino como elementos que permiten diferenciar la suma del

[2] Las reglas de escritura algebraica exigen que, al efectuar las operaciones indicadas

producto[3].

- En aritmética los signos operativos binarios se entienden como signos que indican la necesidad de ejecutar una operación[4], mientras que en álgebra expresan el resultado de la operación. Del mismo modo, la interpretación usual del signo = en el ámbito aritmético es la de indicar que a la derecha del signo debe colocarse el resultado de las operaciones indicadas a su izquierda, mientras que en álgebra es un signo que indica una relación de igualdad entre dos expresiones algebraicas.
- La resta aritmética se relaciona sobre todo con la acción de sustraer, mientras que la diferencia algebraica está relacionada con la acción de comparar, indica lo que hay que sumar al sustraendo para igualarlo al minuendo, será positiva (o negativa) según que el minuendo sea mayor (o menor) que el sustraendo, y es una de las técnicas que se utilizan para establecer la relación de orden entre expresiones algebraicas.
- La mayor complejidad y precisión de los códigos de escritura algebraica, frente a los códigos de escritura aritmética, como consecuencia, por un lado, del encadenamiento de las operaciones, mientras que en aritmética las operaciones se suelen realizar de una en una y escribir de manera independiente, y, por otro lado, de los periodos de trabajo descontextualizado propios del trabajo algebraico en los que el control del cálculo es puramente sintáctico, no semántico como es habitual en aritmética.
- Las técnicas de cálculo aritmético son algorítmicas o cuasi-algorítmicas, mientras que las técnicas de cálculo algebraico ya no lo son, pues exigen una reflexión y toma de decisiones que dependen de su funcionalidad. Además el cálculo algebraico se rige por un principio de economía que propicia la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos, evitando realizar operaciones que más adelante hay que deshacer y procurando elegir en primer lugar aquellas operaciones que dan lugar a "números redondos" que faciliten las operaciones posteriores.

Por consiguiente, no nos interesa la introducción escolar de un álgebra entendida como un aritmética generalizada ya que esta concepción del

---

en una expresión algebraica, primero se efectúen las potencias, en segundo lugar los productos y, por último las sumas. Los paréntesis sirven para modificar este orden.

[3] Por ejemplo $-3-7$ indica la suma entre -3 y -7, mientras que $(-3)(-7)$ indica el producto de esos números.

[4] En el ámbito aritmético no se admite que un alumno al que se le pide que sume 3 y 5 conteste que el resultado es $3+5$, tiene que contestar que es 8.

álgebra también ha sido un obstáculo epistemológico que la comunidad de matemáticos tuvo que superar para poder interpretar como números los sumandos y sustraendos. Necesitamos una introducción del álgebra escolar que haga muy visible la ruptura epistemológica que supone el quehacer algebraico frente al aritmético, porque sólo asumiendo esta ruptura podrán los alumnos rechazar los obstáculos epistemológicos y evitar los obstáculos didácticos.

IV.2. El álgebra como instrumento de modelización algebraico-funcional

Diversas investigaciones (Chevallard, 1989a, 1990; Gascón, 1993, 1995; Bolea, Bosch y Gascón, 1998; Bolea, 2003; Ruiz-Munzón, 2010) han cuestionado explícitamente el modelo epistemológico de referencia[5] del álgebra elemental dominante en las instituciones escolares. Este modelo, recibe el nombre de 'aritmética generalizada' porque se caracteriza por considerar el álgebra como un mero epifenómeno de la aritmética. Según Gascón (1993), Bolea (2003) y Ruiz-Munzón (2010) el álgebra escolar resalta las similitudes entre la aritmética y el álgebra y trata de presentar la segunda como una continuación de la primera en la que no cabe la visión de un álgebra cuyos objetivos y técnicas sean radicalmente distintos de los de la aritmética. Y así:

- El objetivo inicial del álgebra escolar sigue siendo el mismo que el de la aritmética: encontrar las soluciones numéricas de los problemas aritméticos, en detrimento de un álgebra que busque construir un modelo algebraico del problema que permita estudiarlo en toda su generalidad.

- Las letras indican siempre incógnitas numéricas que hay que determinar y se establece una distinción absoluta entre los números conocidos y los desconocidos, mientras que la potencia del álgebra viene dada por la utilización de letras para indicar, no sólo incógnitas, sino también variables, parámetros o números generalizados, lo que permite utilizar el cálculo algebraico para estudiar tipos de problemas y para demostrar propiedades.

- El cálculo algebraico se concibe como una simple prolongación del cálculo aritmético, con la única salvedad de que algunos números han sido

[5] Se entiende por modelo epistemológico de referencia "una interpretación de la actividad matemática que acompaña a una noción o ámbito de la matemática escolar en la institución en cuestión" (C. Fonseca, J. Gascón y C.Oliveira, 2014, p.291).

sustituidos por letras cuando, en realidad, el primero se rige por reglas sintácticas muy diferentes de las del segundo.

- Se desarrolla un aprendizaje formal de distintas técnicas: calcular, simplificar, desarrollar, factorizar, etc., que impide que los alumnos se enfrenten al problema de elegir el cálculo más adecuado, según el fin propuesto.

Este cuestionamiento ha propiciado una línea de investigación (Chevallard, 1989a, 1989b, 1990; Gascón, 1995; Bolea, Bosch y Gascón, 1998, 2001; Bolea, 2003; Ruiz-Munzón, 2010; Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2010) que busca una introducción escolar del álgebra como herramienta funcional que permita llevar a cabo una actividad de modelización matemática, ya que, dado el carácter totalmente algebrizado de la matemática superior, considera que el álgebra no debe aparecer inicialmente como un contenido más de la enseñanza, al mismo nivel de los demás dominios matemáticos que se estudian en la escuela (aritmética, geometría, análisis, etc.), sino como un instrumento genérico de modelización de todas las matemáticas escolares, dando lugar a lo que se ha dado en llamar un 'proceso de algebrización de las organizaciones matemáticas' (Ruiz-Munzón, 2010).

Partiendo de esta hipótesis, Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón (Ruiz-Munzón, Bosch y Gascón, 2011; Ruiz-Munzón, 2010) desarrollan un modelo epistemológico de referencia de 'modelización algebraico-funcional' en el que se definen tres etapas de modelización algebraica que, a su vez, dan lugar a tres niveles de modelización algebraico-funcional. El punto de partida de este proceso es la organización matemática[6] de los problemas aritméticos, entendidos como problemas que pueden resolverse mediante una cadena de operaciones aritméticas ejecutables a partir de los datos del problema, cadena a la que Chevallard (2005) ha dado el nombre de programa de cálculo aritmético (PCA). Los elementos tecnológico-teóricos que acompañan a este campo de problemas se materializan en discursos verbales que, partiendo de los datos -cantidades conocidas de ciertas magnitudes discretas o continuas-, construyen y justifican la cadena de operaciones que permite calcular la incógnita.

Una primera modelización algebraica de dicho sistema vendría dada por la sustitución de los PCA expresados en forma retórica por las expresiones algebraicas que los simbolizan. Se tiene así una nueva organización

[6] Una 'organización matemática' o 'praxeología matemática' es una noción desarrollada inicialmente por Chevallard (1999) para caracterizar la actividad matemática y que se compone de un campo de problemas, las técnicas que los resuelven y el discurso tecnológico-teórico que las justifica.

matemática, M_1, caracterizada por problemas que se resuelven mediante técnicas de escritura y simplificación de expresiones algebraicas de una sola variable, incógnita o parámetro, y cuyos datos y soluciones ya no son siempre números, pueden ser relaciones, justificaciones, etc.

La segunda etapa surge cuando se plantean cuestiones que relacionan dos PCA que contienen una o dos variables y cuya respuesta debe darse en términos de relaciones entre las variables de dichos PCA. Esto nos introduce en una nueva organización matemática, M_2, que es una ampliación de M_1, caracterizada por problemas que se resuelven mediante una igualdad entre programas de cálculo, lo que conduce a un nuevo significado del signo $=$ como indicador de una equivalencia condicionada y al desarrollo de técnicas ecuacionales como, por ejemplo, la de cancelación.

La tercera etapa del proceso de algebrización es una ampliación de M_2 y surge cuando se incorporan cuestiones que tienen que ver con el estudio de la variación conjunta de dos o más variables y su repercusión sobre la variación del PCA. La organización matemática M_3, que contiene a M_2, se refiere, por tanto, a problemas que se resuelven mediante una fórmula algebraica, sin limitar el número de variables y sin diferenciar las incógnitas de los parámetros, e incorpora técnicas algebraicas para estudiar cómo depende cada variable de las restantes.

A partir de M_2 y M_3 se desarrollan los niveles de modelización algebraico funcional que suponen una nueva ampliación praxeológica de dichas organizaciones matemáticas, reinterpretando las fórmulas y ecuaciones como modelos funcionales que se analizan en términos de crecimiento, decrecimiento, continuidad, derivabilidad, etc, en definitiva introduciendo técnicas de cálculo diferencial.

IV.3. Características del álgebra en la que se van a introducir los números negativos

Consideramos que el álgebra entendida como instrumento de modelización algebraico-funcional que se describe en el apartado anterior es un buen lugar para la introducción del número negativo porque

- muestra la razón de ser de los números positivos y negativos,
- el punto de partida son los problemas aritméticos, lo que permite relacionar la estructura de sumandos y sustraendos con la estructura de las operaciones aritméticas ya conocida por los alumnos, y

- presenta un álgebra que no se reduce a una aritmética generalizada, lo que pone de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso de la aritmética al álgebra.

Aun cuando el punto de partida de los dos modelos, el de aritmética generalizada y el de modelización algebraico-funcional, es el mismo: la resolución mediante técnicas algebraicas de los problemas aritméticos, en la modelización algebraico-funcional se entiende que el enunciado del problema describe un sistema acerca del cual se quieren obtener ciertas informaciones y las relaciones algebraicas que se establecen son el modelo algebraico, intrínsecamente distinto del sistema que modeliza, que permite encontrar las respuestas.

En este contexto, la expresión algebraica cumple la función de conservar una memoria de los datos y cálculos, mostrar la estructura del problema y construir programas de cálculo (Bolea, 2003). Es más, desde el momento en que la expresión algebraica indica las operaciones a realizar entre los datos, hay que entenderla como un modelo algebraico de un programa de cálculo aritmético. Esto tiene como consecuencia que, mientras en aritmética la actividad matemática consiste en efectuar cálculos, en álgebra, los programas de cálculo se convierten en un objeto de estudio, y el medio para estudiarlos es el cálculo algebraico.

Además, la algebrización de los programas de cálculo permite asumir el tipo de tareas algebraicas habituales en el currículo escolar (Bolea, 2003):

- Pasar de la formulación retórica de un programa de cálculo a su formulación algebraica.
- Reconocer si dos programas de cálculo son equivalentes.
- Encontrar un programa de cálculo equivalente a otro dado, pero que sea "más simple" respecto a ciertos criterios de simplicidad dependientes de los medios de cálculo y de la función que cumpla el programa de cálculo. La simplificación de la expresión algebraica que simboliza un programa de cálculo aritmético exige:
    a) Un control del cálculo puramente sintáctico, no semántico como es habitual en aritmética.
    b) Una reflexión y toma de decisiones que dependen de su funcionalidad.
    c) Asumir un principio de economía que propicia la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos.
- Operar programas de cálculo.

- Establecer relaciones de orden entre programas de cálculo.

Sin embargo, la consideración de los números negativos como objeto de estudio centra el interés inicial en el desarrollo de las técnicas de cálculo entre números con determinación, antes que en el desarrollo de las técnicas de resolución de ecuaciones, lo que va a obligar a introducir alguna modificación en el modelo de modelización algebraico-funcional. Estas modificaciones afectan fundamentalmente al orden en que se introducen los objetos algebraicos, el tipo de técnicas a desarrollar y el orden en que se trabajan.

La introducción de los números negativos necesita de determinados objetos algebraicos cuyas técnicas de manipulación no se pueden desarrollar hasta que no se dispone de las técnicas de cálculo con los números negativos. Esto exige que, a diferencia de lo que sucede en la introducción tradicional del álgebra escolar, se establezcan momentos distintos para la presentación de los objetos algebraicos y para el desarrollo de las técnicas que les afectan. Como consecuencia, tanto el orden de presentación de los objetos algebraicos como el momento de aparición de las técnicas de manipulación de dichos objetos queda condicionado por la necesidad de introducir los números negativos.

Por otro lado, no restringiremos inicialmente el campo de problemas a aquéllos que requieren la manipulación escrita de expresiones algebraicas con una sola variable, sino que pueden ser expresiones que contengan más de una variable. Esto se debe a que, como acabamos de comentar, al introducir el álgebra sin haber desarrollado las reglas de cálculo con números negativos, no se pueden iniciar de inmediato las técnicas de resolución de ecuaciones, siendo necesario limitarse en un principio a las técnicas de simplificación de expresiones algebraicas, y el número de variables que contenga la expresión algebraica no modifica esencialmente este tipo de técnicas.

Además, la exigencia de enfatizar el significado de la diferencia, entendida como resultado de la acción de comparar, frente a la resta, entendida como resultado de la acción de sustraer, imprescindible para dar significado a la diferencia entre números con signo, obliga a trabajar desde el primer momento la comparación entre programas de cálculo.

Otro aspecto que va a sufrir modificaciones es el tratamiento de las desigualdades e inecuaciones. En el álgebra entendida como instrumento de modelización algebraico-funcional se inicia el estudio de desigualdades e inecuaciones al comenzar los niveles de modelización algebraico-funcional, a partir de las organizaciones matemáticas M_2 y M_3. Sin embargo, el inicio temprano de las tareas de comparación entre expresiones algebraicas, necesario, como ya hemos dicho, para establecer la diferencia entre número con signo, fuerza a considerar desde el primer momento aspectos no sólo algebraicos, sino también funcionales. En este sentido, van a introducirse tempranamente las desigualdades e inecuaciones, aun cuando se deja para más adelante el desarrollo de las técnicas de resolución correspondientes.

En cambio, y de nuevo debido al desconocimiento inicial de las reglas de cálculo con números negativos, no se van a plantear desde el primer momento expresiones algebraicas en las que intervengan productos y cocientes, además de sumas y restas, ni tampoco expresiones de grado superior a uno. El paso de las reglas de suma y diferencia de números positivos y negativos a las de producto y cociente exige la interpretación de los signos $+$ y $-$ como signos operativos binarios generalizados y su posterior conversión en signos operativos unarios. Por tanto, en un primer momento, las expresiones algebraicas de primer grado que se obtengan como solución de un problema aritmético deberán ser aditivas, es decir, expresiones del tipo $a \pm b \pm c \pm d \pm \ldots$, donde a, b, c, d, etc., son números positivos o letras que pueden ir acompañadas de un coeficiente distinto de 1, dejándose para un momento posterior aquellos problemas que introducen el producto y el cociente en las expresiones algebraicas.

Tampoco se considerará inicialmente la simetrización aditiva de los números racionales positivos porque el tratamiento de los signos en los números racionales incorpora aspectos complejos que entendemos que tienen que ser trabajados una vez que $\mathbb{Z}$ esté consolidado. Por lo tanto, en un primer momento desarrollaremos un álgebra en $\mathbb{N}$ que, una vez producida la simetrización aditiva de $\mathbb{N}$, se transformará en un álgebra en $\mathbb{Z}$, dejando para una etapa posterior el desarrollo de un álgebra en $\mathbb{Q}$.

IV.4. Criterios epistemológicos utilizados en la construcción de la génesis escolar de los números negativos

De acuerdo con todo lo anterior, resumimos a continuación los criterios epistemológicos, es decir, los criterios sobre la naturaleza y características del saber, que vamos a utilizar en la construcción de la génesis escolar para introducir los números negativos. Son los siguientes:

a) Los números negativos se introducen en el seno del álgebra elemental, entendida como instrumento de modelización algebraico funcional, iniciando simultáneamente el estudio de los objetos de referencia de la negatividad matemática y de los objetos algebraicos.

b) Se simetriza aditivamente el conjunto de los números naturales por lo que el álgebra comienza siendo un álgebra en $\mathbb{N}$ para terminar siendo un álgebra en $\mathbb{Z}$. La simetrización de $\mathbb{Q}^+$ se pospone hasta que la estructura del conjunto de los números enteros se haya consolidado.

c) No se asume el desarrollo de las técnicas correspondientes a todos los objetos algebraicos que se presentan. Sólo se ejercitan las técnicas de cálculo con números enteros, de simplificación de expresiones algebraicas, de operaciones entre ellas y de cálculo de sus valores numéricos.

d) Introducimos los objetos algebraicos sin institucionalizar, salvo en lo que hace referencia a los números enteros y sus operaciones y las reglas de escritura simbólica.

e) Convertimos en objetos de estudio los distintos significados de los signos $+$ y $-$, la diferencia orientada resultado de la comparación de números y las reglas de simbolización algebraica de los programas de cálculo.

f) Enfatizamos desde el primer momento los aspectos funcionales y no algorítmicos de las técnicas de cálculo algebraico, el principio de economía que lo rige y la complejidad de los códigos de escritura algebraica.

g) Proponemos inicialmente problemas aritméticos directos y parametrizados, es decir, problemas cuya modelización inmediata viene dada por una fórmula (una función explícita de la solución respecto a los parámetros) al objeto de poner de manifiesto el significado de la letra como parámetro o variable y la necesidad de operar con sumandos y sustraendos.

h) En la construcción escolar del número entero distinguimos cuatro etapas cuyos objetivos son los siguientes:

   i) Pasar de las operaciones entre números naturales a la composición de traslaciones y del significado operativo binario entre números naturales de los signos $+$ y $-$ al significado operativo binario generalizado. Su razón de ser es la economía de gestión y justificación del cálculo algebraico.

   ii) Pasar del significado aritmético de la resta como sustracción al significado algebraico de la resta como diferencia y del significado operativo generalizado de los signos $+$ y $-$ al significado operativo unario. En esta etapa queda establecida la estructura aditiva de sumandos y sustraendos.

   iii) Introducir la estructura multiplicativa de sumandos y sustraendos. En esta etapa se formaliza la estructura aditivo-multiplicativa de sumandos y sustraendos.

iv) Introducir las cantidades positivas y negativas, reinterpretar los signos + y − como signos predicativos y asumir que las letras pueden tomar valores positivos y negativos, reinterpretando el signo que las acompaña como signo operativo unario. Su razón de ser es la necesidad de unificar las distintas fórmulas que modelizan algebraicamente un sistema en función del diferente papel como sumando o sustraendo que puede tomar alguna de sus variables o parámetros.

    En esta etapa se aceptan los sumandos y sustraendos como nuevos números que amplían los conjuntos numéricos ya conocidos, se reinterpreta la estructura aditivo-multiplicativa de sumandos y sustraendos en términos de estructura numérica, se establece la estructura ordinal, se retoma la consideración de los signos + y − como símbolos operativos binarios entre números con determinación y se introduce la notación completa.

    También se revisan las propiedades que caracterizan la "condición" de número a la luz de las sucesivas ampliaciones del conjunto de los números naturales como consecuencia de su simetrización aditiva y multiplicativa. Su razón de ser es la necesidad de asumir que un número no siempre puede interpretarse como una medida y que cada nueva ampliación numérica supone una modificación de las propiedades que cumplen "todos" los números.

IV.5. La situación fundamental en la teoría de situaciones didácticas

La teoría de situaciones didácticas parte de una concepción constructivista del aprendizaje, en el sentido piagetiano, pues considera que el alumno aprende por adaptación a un medio, fuente de dificultades y desequilibrios cuya superación propicia la adquisición del nuevo conocimiento. Sin embargo, atribuye a ese medio una intencionalidad didáctica, pues entiende que "un medio sin intenciones didácticas es claramente insuficiente para introducir al alumno en todos los conocimientos culturales que se desea que adquiera (Brousseau, 1986, p. 50)". Por tanto, la función del profesor es la de provocar en el alumno las adaptaciones deseadas mediante una elección adecuada de los problemas que le propone.

> Estos problemas, elegidos para que el alumno pueda aceptarlos, deben hacerle, actuar, hablar, reflexionar, evolucionar por sí mismo. En el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y en el que se produce su

> respuesta, el maestro rehúsa intervenir como propulsor de los conocimientos que quiere ver aparecer. El alumno sabe bien que el problema ha sido elegido para hacerle adquirir un conocimiento nuevo, pero debe saber también que este conocimiento está enteramente justificado por la lógica interna de la situación y que puede construirlo sin atender a razones didácticas. No sólo puede, sino que también debe, pues sólo habrá adquirido verdaderamente este conocimiento cuando él mismo sea capaz de ponerlo en acción en situaciones que encontrará fuera de todo contexto de enseñanza y en ausencia de cualquier indicación intencional. (Brousseau, 1986, p. 51)

Una situación de este tipo recibe el nombre de 'situación a-didáctica' y se caracteriza por el hecho de que, por una parte, en la resolución de la situación debe surgir y ser utilizado el conocimiento que se quiere que el alumno aprenda y, por otra parte, es la propia situación la que permite decidir sobre la pertinencia de las decisiones que se toman, sin necesidad de que el profesor intervenga.

En las situaciones a-didácticas existen elementos que pueden variar a discreción del profesor, produciendo modificaciones en las estrategias de resolución de la situación y, por tanto, en las características del conocimiento construido. Son las 'variables didácticas' de la situación.

En la teoría de situaciones didácticas se postula además que

> Cada conocimiento puede caracterizarse por una o más situaciones a-didácticas que preservan su sentido y que llamaremos 'situaciones fundamentales'. Pero el alumno no puede resolver de golpe cualquier situación a-didáctica, el maestro le administra así lo que está a su alcance. Estas situaciones a-didácticas ajustadas a fines didácticos, determinan el conocimiento enseñado en un momento dado y el sentido particular que este conocimiento va a tomar, debido a las restricciones y deformaciones aportadas por la situación fundamental. (Brousseau, 1986, p. 51)

Esta hipótesis cambia el rol del profesor en la clase: ahora sus funciones principales van a ser la 'devolución de la situación' y la 'institucionalización del saber'. Según Brousseau (1988b), una situación a-didáctica debe ser lo suficiente cercana al alumno para que éste piense que la puede resolver con los conocimientos antiguos, pero esta estrategia inicial debe revelarse enseguida ineficaz, lo que obliga al alumno a modificar y acomodar sus conocimientos para responder a la situación. Al trabajo del profesor para conseguir que el alumno acepte esta responsabilidad se le da el nombre de 'devolución de la situación'.

Pero esta manera de considerar la enseñanza como devolución al alumno de la responsabilidad de construir el conocimiento, conduce a distintas paradojas (Brousseau, 1986). Por un lado, el papel social del profesor es el de "enseñar" el saber y el alumno y la sociedad así se lo exigen, pero en la medida en la que cede a la exigencia de decirle al alumno “lo que debe hacer” está impidiendo que éste construya por sí mismo el conocimiento, le dé sentido y sea capaz de usarlo en situaciones sin intencionalidad didáctica.

Por otro lado, el conocimiento aprendido por adaptación en sus primeras etapas resulta tener, con frecuencia, algunas connotaciones falsas o poco rigurosas y al profesor se le reprocharán los errores tolerados. La alternativa es enseñar directamente el saber con el grado de rigor esperado por la comunidad científica. En palabras de Brousseau:

> El profesor tiene que elegir entre enseñar un saber formal y desprovisto de significación o enseñar un saber más o menos erróneo que será preciso rectificar. (Brousseau, 1986, p. 57)

Por otra parte, una vez que el alumno adquiere un conocimiento como estrategia de resolución en el seno de una situación a-didáctica, ese conocimiento se puede convertir, como mucho, en un saber de la clase, como consecuencia de la comunicación entre los alumnos, pero para situar ese saber de la clase en la cultura de la sociedad el profesor debe desarrollar situaciones de ‘institucionalización del saber’, es decir, situaciones en las que ese conocimiento o saber de la clase se sitúe en la cultura de la sociedad y se convierta en un instrumento al servicio de la gestión y la interacción social.

Finalmente, una vez construidos los conocimientos a partir de situaciones a-didácticas e institucionalizados como saberes, es necesario que el alumno se ejercite en las técnicas aparecidas como estrategias de resolución. Para ello, el profesor debe plantear situaciones didácticas, es decir, situaciones en las que manifiesta su intención de que el alumno adquiera un saber que ha sido explicitado de antemano.

IV.6. La situación fundamental en la génesis escolar del número entero

En el caso que nos ocupa, nos proponemos iniciar la introducción escolar de los números negativos a través de problemas aritméticos cuyo enunciado se refiere a números que son el resultado de una medida y a acciones físicas o sociales que pueden ser interpretadas en términos de operaciones aritméticas o de relaciones de orden numérico, pero cuya resolución obligue a la utilización del cálculo algebraico. Esta decisión no es especialmente novedosa, en cuanto que el comienzo del álgebra, tanto histórico como escolar, se basa en presentar el álgebra -las ecuaciones, en particular- como una nueva técnica de resolución de problemas aritméticos que en unos casos facilita la resolución y en otros permite encontrarla allá donde la aritmética no lo permite.

Sin embargo, como ya se ha dicho anteriormente, nuestra opción no es la de plantear problemas aritméticos susceptibles de ser resueltos mediante ecuaciones, sino plantear problemas aritméticos directos y parametrizados, es decir, problemas que pueden ser resueltos mediante un programa de cálculo aritmético, pero en el que la falta de algún dato impide llevarlo a efecto y obliga a simbolizarlo mediante una expresión algebraica. De esta manera la solución de un problema aritmético ya no será uno o varios números, sino una fórmula que guarda memoria de las operaciones a realizar y que en su forma canónica permite dar solución al problema cuando el dato o datos desconocidos se hagan patentes, sin necesidad de rehacer todos los razonamientos que llevaron a la constitución del programa de cálculo ni todas las operaciones que constituyen el programa. Además, el estudio de las expresiones algebraicas que modelizan los programas de cálculo aritmético que solucionan los problemas va a permitir operar en términos de sumandos y sustraendos e iniciar una de las formas de la negatividad matemática.

Pasamos así de una actividad de resolución de problemas a una actividad más propia del álgebra, la resolución de tipos de problemas mediante la obtención de una o varias fórmulas que permiten la resolución. Esto escenifica mejor la ruptura epistemólogica entre el álgebra y la aritmética que es necesario plantear y además permite una entrada más suave en el cálculo algebraico, dejando las técnicas de resolución de ecuaciones para el momento en que las técnicas de cálculo con números positivos y negativos estén establecidas.

De acuerdo con lo anterior, *la situación a-didáctica la constituyen problemas aritméticos directos y parametrizados cuya solución exige el establecimiento de programas de cálculo que se simbolizan algebraicamente mediante una o varias fórmulas.*

Pero además, para que la situación a-didáctica sea eficaz el profesor debe hacer explícitas dos restricciones:

- los datos desconocidos necesarios para resolver el problema deben representarse mediante letras y
- la solución final debe venir dada mediante una fórmula en la que toda operación que sea efectuable debe efectuarse, es decir, la fórmula o fórmulas finales deben quedar lo más simplificadas posible.

Lo que nos permite caracterizar esta situación como situación a-didáctica es el hecho de que los alumnos tienen un conocimiento antiguo, el cálculo aritmético, que les ofrece una estrategia de base para afrontar la situación, pero la presencia de las letras va a obligarles a modificar dichas estrategias, pasando en varias etapas de un cálculo entre números sin determinación a un cálculo entre números positivos y negativos. Por ejemplo, en el problema

> Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?

los alumnos no tienen dificultad en dar como respuestas $a - 9 + 7$ o $a - 2$, pero establecer la equivalencia entre estas dos respuestas exige asumir que "restar 9 y sumar 7 equivale a restar 2", lo que implica pasar de las sumas y restas entre números sin determinación a la composición de traslaciones.

Las variables didácticas de la situación y los valores que pueden tomar y que van a poner de manifiesto los distintos aspecto del conocimiento que se pretende enseñar, son las siguientes:

- *Sentido de la situación*: *Directo*, cuando se trata de encontrar la fórmula que soluciona un problema aritmético, o *inverso* cuando se busca el enunciado de un problema aritmético cuya solución es una fómula dada.

- *Estructura semántica*: Son problemas de varias etapas pero cada una de ellas puede caracterizarse siguiendo la clasificaciones de Vergnaud (Vergnaud y Durand, 1976; Vergnaud, 1982; 1988), modificada por Cid (Cid, Godino y Batanero, 2003). En el caso de las situaciones aditivas los valores de esta variable son *ETE (estado-transformación-estado)*, *ECE (estado-comparación aditiva-estado)* y *TTT (transformación-transformación-transformación).* En las situaciones multiplicativas se añaden los valores *EEE (estado-estado-estado)* y *ECE (estado-comparación multiplicativa-estado).*

- *Tipo de expresión algebraica*: *Aditiva*, cuando la fórmula es una expresión algebraica de primer grado sin paréntesis, *aditiva con paréntesis*, cuando la fórmula es una expresión algebraica de primer grado que contiene paréntesis o *aditivo-multiplicativa*, cuando la fórmula es una expresión algebraica de grado superior a uno.

- *Número de datos desconocidos*: Uno o dos.

- *Significado de las letras*: Incógnitas o parámetros (o variables).

- *Dominio de las letras*: $\mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$.
- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Traslaciones, diferencias, sumandos y sustraendos, cantidades positivas y negativas.
- *Significado de los signos* $+$ *y* $-$: operativo binario entre números sin determinación, operativo binario generalizado, operativo unario, predicativo u operativo binario entre números con determinación.

IV.7. Descripción general de la génesis escolar del número entero

Nuestra propuesta didáctica de introducción del número entero (ver anexos IV.1 y IV.2) se compone de un problema inicial, cinco partes temáticas a desarrollar en 1° de ESO tituladas:

1. Cómo construir expresiones algebraicas
2. Cómo simplificar expresiones algebraicas
3. Cómo comparar expresiones algebraicas
4. Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas
5. Cómo multiplicar expresiones algebraicas

y dos partes temáticas a desarrollar en 2° de ESO tituladas:

1. De nuevo con el álgebra
2. Cómo operar los números con signo

Cada una de las partes ocupa varias horas de clase. Se prevén tres horas semanales de clase: dos horas de trabajo en pequeño grupo (3 o 4 alumnos por grupo) y una hora de trabajo individual del alumno para ejercitarse en las técnicas de cálculo. En las dos primeras horas también están previstos momentos dedicados a la institucionalización del conocimiento adquirido, mediante puestas en común del trabajo de los grupos y explicaciones del profesor. En las horas de trabajo en grupo son los alumnos los que deben encontrar las estrategias de resolución de los problemas y el trabajo del profesor es el de conseguir que se produzca la devolución de la situación.

De acuerdo con las etapas definidas en el apartado IV.4, las partes 1 y 2 corresponden a la primera etapa, las partes 3 y 4 a la segunda etapa, la parte 5 a la tercera etapa y la parte 2 de 2° de ESO a la cuarta etapa. La parte 1 de 2° de ESO es una parte de recuerdo de las partes desarrolladas en 1° de ESO

Antes de iniciar las distintas partes temáticas se plantea el siguiente problema:

Eva y Bernardo juegan a un juego de cartas en el que se apuestan fichas de dos colores: rojas y blancas. Las fichas de un mismo color valen el mismo número de puntos. Al acabar la partida, Eva tiene 20 fichas blancas y 90 rojas y Bernardo tiene 40 fichas blancas y 60 rojas.

A. Indica quién gana la partida en los casos siguientes:
   a. Las fichas blancas valen el doble que las rojas.
   b. Les fichas blancas valen un punto menos que las rojas.
B. ¿Qué relación hay entre los puntos de las fichas blancas y las rojas si Eva y Bernardo empatan (es decir, tienen el mismo número de puntos)?

Se trata de un problema en principio aritmético en el que el tipo de preguntas planteadas va a exigir un tratamiento algebraico desconocido para los alumnos. Esto permite plantear la pregunta: ¿cómo resolver un nuevo tipo de problemas que aparecen como una ampliación del campo de problemas aritméticos, pero que no pueden resolverse con técnicas aritméticas?, lo que faculta al profesor para poner de manifiesto la necesidad de buscar nuevas estrategias de resolución de problemas basadas en la utilización de letras para indicar aquellos datos que inicialmente son desconocidos. También le permite incidir en la importancia de realizar una actividad formal de manipulación de expresiones algebraicas a partir de problemas con enunciados sencillos para aprender esas nuevas estrategias.

IV.8. Primera etapa en la génesis escolar del número entero

IV.8.1. Descripción de la situación fundamental

La constituyen problemas aritméticos aditivos, directos y parametrizados en los que un cardinal inicial sufre distintos aumentos o disminuciones que conducen a un cardinal final que es la solución pedida. La falta del dato inicial o de uno de los datos intermedios impide llevar a cabo el programa de cálculo aritmético necesario para obtener la solución. La exigencia de "dar una solución" al problema fuerza a la utilización de la letra y permite la aparición de expresiones algebraicas (la "fórmula" que soluciona el problema) aditivas donde la letra asume un papel de parámetro o variable.

El conocimiento posterior del dato desconocido inicialmente abre la posibilidad de utilizar la fórmula para encontrar la solución, dando valores numéricos a las letras, lo que lleva a la simplificación de las expresiones algebraicas para permitir un uso más eficaz de las mismas. Por último, las técnicas de simplificación dan carta de naturaleza al significado operativo binario generalizado de los signos $+$ y $-$ y a la suma de números enteros entendida como composición de traslaciones.

La situación fundamental se organiza alrededor de la resolución de los siguientes problemas:

Ejercicio[7] **1.** Laura se llevó sus tazos al colegio para jugar varias partidas. En la primera perdió 9 tazos y en la segunda ganó 7. ¿Cuántos tazos le quedaron después de jugar?

Ejercicio 2. Un tren sale de Barcelona con cierto número de pasajeros y llega a Gerona después de hacer dos paradas. En la primera parada, bajan 15 y suben 12 pasajeros; en la segunda parada, bajan 38 y suben 42 pasajeros. ¿Con cuántos pasajeros llegó el tren a Gerona?

Ejercicio 3. Completa las tablas siguientes sobre el número de pasajeros del tren anterior.

N° de pasajeros que sale de Barcelona	N° de pasajeros que llega a Gerona
427	
1582	
a	

N° de pasajeros que sale de Barcelona	N° de pasajeros que llega a Gerona
	45
	876
	c

Ejercicio 4. María va de compras. Lleva 120 €. Compra primero un pantalón que le cuesta 40 € y después unos zapatos. Por último, compra un libro por 15 €. ¿Cuánto dinero le queda?

Ejercicio 5. Si María nos dice que le han quedado 30 €, ¿podemos averiguar cuánto le han costado los zapatos? ¿Y si le quedan 15 €? ¿Y si sólo le quedan 5 €?

Ejercicio 6. Un ganadero tiene vacas y ovejas. Las vacas paren 21 crías y las ovejas, 57. Además el ganadero vende 30 vacas y 70 ovejas. Completa la siguiente tabla en la que se proponen algunos casos particulares. Escribe el caso general al final, poniendo las fórmulas.

N° inicial de vacas	N° inicial de ovejas	N° inicial de animales	N° final de vacas	N° final de ovejas	N° final de animales
80	150				
			65	120	
50					
					90

[7] El término 'ejercicio' no intenta calificar el tipo de tarea a realizar. Ha sido elegido por ser un término con el que los alumnos están familiarizados.

Ejercicio 7. Para cada una de las expresiones algebraicas siguientes, propón un problema que la tenga como solución y escríbela lo más simplificada posible.

E1) $a + 5 + 8 - 6$

E2) $b - 6 - 10 - 4$

E3) $12 - a - 5$

IV.8.2. Valores que toman las variables didácticas de la situación fundamental

Son los siguientes:

- *Sentido de la situación*: Directo (inverso, en el caso del ejercicio 7).
- *Estructura semántica*: Problemas que contienen etapas aditivas del tipo ETE.
- *Tipo de expresión algebraica*: Aditiva.
- *Número de datos desconocidos*: Uno (dos, en el caso del ejercicio 6).
- *Significado de las letras*: Parámetros (o variables) o incógnitas (ejercicio 4).
- *Dominio de las letras*: $\mathbb{N}$.
- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Traslaciones.
- *Significado de los signos + y −*: Operativo binario entre números sin determinación y operativo binario generalizado.

IV.8.3. Objetos algebraicos que emergen en esta etapa

Son los siguientes:

- La composición de traslaciones.
- La propiedad conmutativa de la composición de traslaciones.
- El significado operativo binario generalizado de los signos + y −.
- Las expresiones algebraicas aditivas, es decir, la representación simbólica de un programa de cálculo compuesto por una combinación de sumas o restas que afectan a números naturales o a monomios de primer grado cuyo valor numérico es un número natural.
- La suma de expresiones algebraicas aditivas.
- La letra entendida como variable, incógnita o parámetro.
- La convencionalidad de la letra, es decir, el reconocimiento de la identidad entre expresiones algebraicas con distintas letras que representan el mismo dominio.

- El valor numérico de las letras y de las expresiones algebraicas aditivas.
- Los coeficientes de las letras.
- Las tablas de valores de funciones afines.
- Las igualdades entre expresiones algebraicas aditivas en su doble vertiente de identidades y ecuaciones.
- Las ecuaciones de primer grado con coeficientes y soluciones en $\mathbb{N}$.
- El cambio de variable.
- La traslación inversa.

IV.8.4. Objetos aritméticos que cambian su significado en esta etapa

Son los siguientes:

- La letra, que en aritmética es una inicial que indica la unidad de medida o el nombre genérico de los elementos del conjunto cuyo cardinal se busca, ahora indica un cardinal.
- Los signos $+$ y $-$, que en aritmética tienen sentido como signos operativos binarios entre número sin determinación e indican que una operación debe ser ejecutada, pasan a tener sentido como signos que indican la cualidad de sumando o sustraendo del término situado a su derecha y, entendidos como símbolos operativos binarios, indican el resultado de la operación.
- Las técnicas de cálculo ya no son algorítmicas, como en aritmética, sino que exigen una reflexión y toma de decisiones que dependen de la funcionalidad del cálculo.

IV.8.5. Técnicas que se ejercitan en esta etapa

Aunque en esta primera etapa aparecen distintos objetos algebraicos y técnicas de manipulación de los mismos, sólo se ejercitan las siguientes:

- *Simplificación de expresiones algebraicas.* La técnica de simplificación de expresiones algebraicas aditivas se presenta desde el primer momento asumiendo un principio de economía que propicie la búsqueda de formas sencillas de hacer los cálculos y enfatizando su carácter no algorítmico.
- *Composición de traslaciones.* La simplificación de las expresiones algebraicas obliga a reinterpretar las operaciones aritméticas de suma y resta como composición de traslaciones. En aritmética, si tenemos que

efectuar la operación $13-5-3$, entendemos que el primer signo $-$ indica una operación binaria entre los números 13 y 5, y el segundo una operación binaria entre los números 8 y 3. Pero si escribimos $b-5-3$, el hecho de que la primera operación no se pueda efectuar cambia completamente la interpretación que hay que dar a los signos. Ahora hay que entender que a b tenemos que restarle 5 y después restarle 3, lo que es equivalente a restar 8 y por tanto $b-5-3=b-8$. Es decir, hay que reinterpretar las operaciones binarias en términos de composición de traslaciones. Si componemos la traslación "restar 5" y la traslación "restar 3" se obtiene la traslación "restar 8". Y ahora $-$ y $+$ ya no son signos que intermedian entre dos números sin determinación (signos operativos binarios entre números sin determinación), sino signos que afectan a un solo número para indicar su papel como sumando o sustraendo (signos operativos binarios generalizados).

Además, la reinterpretación de las sumas y restas de números naturales como composición de traslaciones permite aumentar el grado de manipulación de las expresiones algebraicas ya que la composición de traslaciones tiene buenas propiedades: asociativa, conmutativa, existencia de elementos neutro y opuesto, lo que contribuye a una mayor economía de gestión y justificación del cálculo algebraico. En efecto, son las propiedades de grupo conmutativo de la composición de traslaciones las que permiten eliminar los términos -36 y $+36$ en la expresión $a-36+87-5+36$, o las que permiten operar de la siguiente manera: $b-42+25-38=b-80+25=b-55$, facilitando su justificación.

Las tareas que se proponen para ejercitar las técnicas son las siguientes:

Ejercicio 12[8]**.** Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

E1) $30+w-10+12-v$

E2) $h-25-25+50-7$

E3) $m-45+44-17+18+27-3$

E4) $100-a-b-c-80+6$

E5) $p-15+85+36+24-35-1$

E6) $100-r-n+48-99-18$

E7) $65+84-82-13+15-16-4$

Ejercicio 13. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas, haciendo las menos operaciones posibles.

[8] La numeración de los ejercicios remite al orden en el que se presentan a los alumnos (ver anexo IV.1).

E1) $s + 72 - 67 + s + 67 - 48 - 72 - 5 - s + 50$

E2) $200 + n + m + n + m - 50 + m$

E3) $35 - a - a - a - a - a + 60$

E4) $3f + 77 + 5f - 82 + 23 + 82 - 2f$

E5) $17p + 26 - 32q - 16 + 12q + 3p$

E6) $150 - 6y - 6y + 267 + 12y - 66 + 150$

E7) $4a - 8b - 6c - 3a + 18b$

IV.8.6. Características de la institucionalización en esta etapa

Se institucionaliza la técnica de composición de traslaciones, explicitando que cumple la propiedad conmutativa, y la técnica de simplificación de expresiones algebraicas aditivas a partir de la corrección y discusión en grupo de las tareas siguientes:

Ejercicio 8. Un chico, al hacer los deberes, tiene que simplificar unas expresiones algebraicas. Lo hace de la siguiente manera:

(a) $d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10 = d - 13$

(b) $27 - q - 8 - 8 = 27 - q - 0 = 27 - q$

(c) $18 - 5 + x + 5 - 8 = 18 + x - 8 = 18 - 8 + x = 10 + x$

¿Crees que el profesor le pondrá un bien?

Ejercicio 9. Completa las siguientes frases:

Sumar 5 y sumar 2 es lo mismo que ________________

Sumar 5 y restar 2 es lo mismo que ________________

Restar 5 y sumar 2 es lo mismo que ________________

Restar 5 y restar 2 es lo mismo que ________________

Ejercicio 10. Completa las siguientes frases:

Sumar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ______________ primero 2 y ______________ después 5.

Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que ______________ primero 2 y ______________ después 5.

Restar primero 5 y sumar después 2 es lo mismo que ______________ primero 2 y ______________ después 5.

Restar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que ______________ primero 2 y ______________ después 5.

Ejercicio 11. Simplifica la siguiente expresión algebraica:

$$45 - f + g - 10 + 500 + f - 500 + 19 + 27 - 19$$

teniendo en cuenta los siguientes pasos:

1) Lee toda la expresión de izquierda a derecha y observar si se suma y resta un mismo número. En ese caso, se tachan los dos. Realiza esa operación todas las veces que se pueda y vuelve a escribir toda la expresión sin esos términos.
2) Vuelve a leer toda la expresión y realiza primero aquellas operaciones que dan lugar a números más sencillos y más fáciles de operar.

La institucionalización se hace en los mismos términos indicados en los enunciados. También se explicita el diferente significado que tiene la letra en álgebra y pasan a formar parte de la cultura de la clase los términos ‘expresión algebraica’, ‘fórmula’, ‘valor numérico de una expresión’ y ‘tabla de valores’.

IV.9. Segunda etapa en la génesis escolar del número entero

IV.9.1. Descripción de la situación fundamental

La constituyen problemas aritméticos aditivos directos y parametrizados en los que se comparan cardinales aditivamente y se pregunta por la relación de orden entre ellos, o por su diferencia, o por uno de los términos de la comparación. La falta de alguno de los datos obliga a establecer relaciones de orden o a calcular diferencias entre expresiones algebraicas y esta última exigencia fuerza la utilización de paréntesis y la aparición del sentido operativo unario de los signos $+$ y $-$.

En la etapa anterior se operaba componiendo sumandos y sustraendos, pero ahora aparece una nueva problemática, la necesidad de hacer operaciones de operaciones, es decir, la necesidad de sumar o restar términos que a su vez son sumas o diferencias que no pueden efectuarse. Antes el signo $-$ indicaba la condición de sustraendo de un término, a partir de ahora deberá interpretarse también como un signo que provoca un cambio en la condición de sumandos o sustraendos, que transforma un sumando en sustraendo y viceversa (signo operativo unario). Esto permite establecer la equivalencia entre expresiones con paréntesis y sin paréntesis, lo que conduce a las reglas de supresión de paréntesis.

Por otro lado, la familiarización de los alumnos con las diferencias orientadas y su interpretación desglosada en un valor absoluto que cuantifica la diferencia y un signo (positivo o negativo) que indica que el primer término de la diferencia es mayor o menor que el segundo término, introduce, aunque en forma todavía muy incipiente, el cuarto significado del signo, su sentido predicativo: una diferencia negativa aislada no indica un sustraendo, sino una expresión que tiene una determinada "cualidad" que viene indicada por el signo.

La situación fundamental se organiza alrededor de la resolución de los siguientes problemas:

Ejercicio 14. Javier tiene cierto número de cromos, Carmen tiene cinco más que Javier y Carlos el doble que Javier. Si Javier y Carmen juntan sus cromos, ¿tendrán entre los dos más o menos cromos que Carlos? ¿Quién tiene más cromos, Javier, Carmen o Carlos? ¿Y quién tiene menos?

Ejercicio 15. Laura tiene 35 € más que Alberto y Clara 20 € menos que Alberto. Van a comprar un regalo. Indica cuánto dinero les queda después de comprar el regalo, en los casos siguientes:

a) El regalo cuesta tres veces el dinero de Alberto.

b) El regalo cuesta 24 €.

¿Podrán pagar el regalo si vale 105 €?

Ejercicio 16. Al empezar el colegio en septiembre, María, Adrián y Luisa tienen el mismo dinero en su hucha. Entre septiembre y Navidad gastan o reciben las siguientes cantidades:

María	Adrián	Luisa
Recibe 10 €	Gasta 5 €	Recibe 10 €
Gasta 5 €	Gasta 10 €	Recibe 5 €
Gasta 15 €	Gasta 15 €	Recibe 15 €
	Recibe 30 €	Gasta 35 €

a) ¿Quién tiene más dinero? ¿Quién tiene menos? ¿En cuánto se diferencia de los demás el dinero que tiene cada uno?

b) Si al empezar el colegio María tiene el doble que Adrián y éste 30 € menos que Luisa, ¿puede suceder que dos de ellos acaben con la misma cantidad de dinero?

Ejercicio 24.

a) Carlos tiene 6 canicas más que Javier y Enrique 10 canicas menos que Marcos. Si sabemos que Carlos tiene más canicas que Enrique, ¿cuántas más tiene?

N° de canicas de Javier	
N° de canicas de Carlos	
N° de canicas de Marcos	
N° de canicas de Enrique	
Diferencia entre el n° de canicas de Javier y Marcos	
Diferencia entre el n° de canicas de Carlos y Enrique	

b) ¿Si sabemos que la diferencia entre el número de canicas de Javier y el de Marcos es 4, ¿cuál será la diferencia entre el número de canicas de Carlos y el de Enrique?

c) Completa la siguiente tabla:

Diferencia entre el n° de canicas de Javier y Marcos	Diferencia entre el n° de canicas de Carlos y Enrique
7	
20	
	18
	24
d	
	e

IV.9.2. Valores que toman las variables didácticas de la situación fundamental

Son los siguientes:

- *Sentido de la situación*: Directo.
- *Estructura semántica*: Problemas que contienen etapas aditivas del tipo ECE.
- *Tipo de expresión algebraica*: Aditiva con o sin paréntesis.
- *Número de datos desconocidos*: Uno (dos, en el caso del ejercicio 24).
- *Significado de las letras*: Parámetros (o variables) o incógnitas (ejercicio 9).
- *Dominio de las letras*: $\mathbb{N}$.
- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Diferencias, sumandos y sustraendos.
- *Significado de los signos + y −*: Operativo binario entre números sin determinación, operativo binario generalizado y operativo unario.

IV.9.3. Objetos algebraicos que emergen en esta etapa

Son los siguientes:

- Las diferencias cuyos sustraendos son a su vez sumas o diferencias.
- Las diferencias entre sumandos y sustraendos.

- El significado operativo unario de los signos $+$ y $-$.
- Las expresiones algebraicas aditivas con paréntesis o, más particularmente, expresiones que contienen diferencias en las que el sustraendo es a su vez una expresión algebraica.
- La diferencia entre expresiones algebraicas aditivas.
- La comparación multiplicativa entre expresiones algebraicas aditivas.
- La relación de orden entre expresiones algebraicas aditivas.
- El valor numérico de una expresión algebraica obtenido a partir del valor numérico de alguna de las operaciones indicadas en la expresión.
- Las igualdades y desigualdades entre expresiones algebraicas aditivas, entendidas como identidades o desigualdades que se cumplen para todo el dominio de las variables y como ecuaciones o inecuaciones.
- Las soluciones de las ecuaciones e inecuaciones de primer grado.

IV.9.4. Objetos aritméticos que cambian su significado en esta etapa

- En aritmética es necesario que el primer término de la resta sea un número mayor o igual que el segundo término; sin embargo, en álgebra es frecuente que no pueda establecerse de antemano cuál de los términos es mayor y por eso es fundamental entender las "restas" como "diferencias" porque, en tal caso, una diferencia negativa tiene sentido: nos cuantifica la diferencia entre dos cantidades y nos dice también que el primer término es menor que el segundo.
- El signo $=$, que en aritmética conecta una operación indicada con su resultado, ahora establece una relación de igualdad entre sus miembros.
- La igualdad y la desigualdad, que en aritmética tienen un solo sentido, en álgebra indican una relación verdadera para todo valor de las letras (identidad y desigualdad) o una relación verdadera sólo para determinados valores de las letras (ecuación e inecuación).

IV.9.5. Técnicas que se ejercitan en esta etapa

Se ejercitan las siguientes:

- Cálculo de la diferencia entre dos expresiones algebraicas. El desarrollo de esta técnica incluye la colocación entre paréntesis del sustraendo de la diferencia y la eliminación posterior del paréntesis, modificando la condición de los términos del sustraendo.
- Comparación de expresiones algebraicas del tipo ax+b con a, b y x pertenecientes a $\mathbb{N}$, basada en consideraciones aritméticas.

- Supresión de paréntesis y simplificación de expresiones algebraicas que los contienen. Además, en el caso de que la operación o parte de la operación situada entre paréntesis sea efectuable, se valora si deben efectuarse las operaciones contenidas en el paréntesis o deshacer el paréntesis.
- Simbolización algebraica de programas de cálculo aritmético aditivos que pueden incorporar paréntesis, expresados verbalmente.

Las tareas que se proponen para ejercitar las técnicas son las siguientes:

Ejercicio 17. Compara las siguientes expresiones, diciendo cuál de ellas es menor o mayor que la otra.

E1) $x+1$ $\quad x-10$

E2) $p-7$ $\quad p-3$

E3) $2a+5$ $\quad 3a+12$

E4) $25-z$ $\quad 25-2z$

E5) $a-4b$ $\quad a+b$

E6) $3n+5$ $\quad 2n+30$

Ejercicio 18. Escribe una expresión algebraica que sea mayor y otra que sea menor que cada una de las expresiones que vienen a continuación.

E1) $$b-45$$

E2) $$r-27+2r-38+17-r$$

E3) $$33-2a$$

Ejercicio 19. Escribe una expresión algebraica que sea

E1) 6 unidades mayor que $y-13$

E2) 11 unidades menor que $2c-1$

E3) 4 veces mayor que $2n+3m$

E4) 11 veces mayor que $16-3a$

Ejercicio 20. Cuando se calcula mentalmente se procura buscar la forma más sencilla posible de efectuar las operaciones. ¿Cómo haces las siguientes operaciones?

$678+99$

$47+98$

$157-99$

$123+39$

$87-29$

$601-103$

$427+397$

$212-198$

$117 - 22$

Ejercicio 21. Coloca los signos + y − que faltan en las siguientes igualdades:

$765 - (100 - 1) = 765 - 99 = 765$ ___ 100 ___ 1

$80 - (30 - 1) = 80 - 29 = 80$ ___ 30 ___ 1

$141 - (100 + 2) = 141 - 102 = 141$ ___ 100 ___ 2

$92 - (42 + 3) = 92 - 45 = 92$ ___ 42 ___ 3

$325 + (200 - 3) = 325 - 197 = 325$ ___ 200 ___ 3

Ejercicio 22.

I) Efectúa las operaciones siguientes, teniendo en cuenta que las operaciones entre paréntesis han de hacerse primero.

a) $12 - (8 - 3)$
b) $12 - (8 + 3)$
c) $12 + (8 - 3)$
d) $12 + (8 + 3)$

II) Efectúa las operaciones siguientes:

e) $12 - 8 - 3$
f) $12 - 8 + 3$
g) $12 + 8 - 3$
h) $12 + 8 + 3$

III) Completa la siguiente tabla, colocando al lado de las operaciones del apartado I), las operaciones del apartado II) que tienen el mismo resultado.

Apartado I	Apartado II
$12 - (8 - 3)$	
$12 - (8 + 3)$	
$12 + (8 - 3)$	
$12 + (8 + 3)$	

Ejercicio 25. Calcula la diferencia entre las siguientes expresiones algebraicas:

i) $7p + 3q$ $\qquad$ $2p - 2q$
ii) $4t - 6 - 15$ $\qquad$ $4t - 3 - 2$
iii) $21 - 2m + 3 - 23 + 5m$ $\qquad$ $10m - 30 + 5m + 25$

Ejercicio 26. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera súmale 7. El resultado réstaselo a 31 y súmaselo a otro número cualquiera.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y réstale 25. El resultado réstaselo al número inicial multiplicado por 9.

c) A 20 réstale un número cualquiera multiplicado por dos. Al resultado que se obtiene, réstale la diferencia entre 30 y el número cualquiera inicial multiplicado por cuatro. A todo eso, súmale 50.

Ejercicio 27. Simplifica las siguientes expresiones algebraicas:

E1) $a - (a - 8) + b - 8 - (a + 10)$

E2) $17 - (4 - x) + (5 - y) - 15 - 2$

E3) $c + (25 - c + 15) - (25 - c - 15)$

E4) $2m - (7 - 5m) - (7m + 5)$

E5) $20 - 10z - (5z - (10 - 2w))$

Ejercicio 28. Cuando las expresiones algebraicas sólo contienen números, las operaciones indicadas en los paréntesis siempre se pueden efectuar. Pero, a veces, es mejor deshacer los paréntesis sin hacer las operaciones, porque así el cálculo resulta más sencillo de hacer. Efectúa los cálculos que se indican en las siguientes expresiones algebraicas, decidiendo en cada caso si es mejor efectuar las operaciones de los paréntesis o deshacerlos sin efectuar esas operaciones.

a) $45 - (371 - 87) + 372 - 87$ Deshacer paréntesis: SI NO

b) $8 + 20 - (45 - 44 + 3)$ Deshacer paréntesis: SI NO

c) $13 + (27 - 20) - (25 - 10 - 15)$ Deshacer paréntesis: SI NO

d) $5 - (4 - (3 - (2 - 1)))$ Deshacer paréntesis: SI NO

e) $4578 + 3127 - 578 - (127 + 841 + 512) + 841 + 12$

Deshacer paréntesis: SI NO

IV.9.6. Características de la institucionalización en esta etapa

Se institucionaliza la diferencia como expresión de la comparación numérica y la técnica de supresión de paréntesis en los términos indicados en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 23. Completa las siguientes frases:

Sumar $a + b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Sumar $a - b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar $a + b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Restar $a - b$ es lo mismo que ________________ a y ________________ b.

Los términos 'diferencia', 'igualdad', 'desigualdad', 'identidad', 'ecuación' e 'inecuación', junto con los símbolos $<$ y $>$, pasan a formar parte de la cultura de la clase.

IV.10. Tercera etapa en la génesis escolar del número entero

IV.10.1. Descripción de la situación fundamental

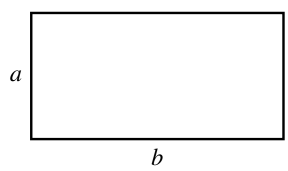
La constituyen problemas geométricos aritmetizados, es decir modelizados aritméticamente, aditivo-multiplicativos directos y parametrizados. Son problemas de cálculo de áreas, más precisamente de cálculo de áreas de rectángulos, y comparación entre áreas cuando los lados de los rectángulos sufren aumentos o disminuciones. Aquí los datos, tanto los conocidos como los desconocidos, ya no representan cardinales, sino medidas de longitud, aunque su dominio sigue siendo el de los números naturales.

El desconocimiento de la medida de alguno de los lados obliga a calcular el área multiplicando dos expresiones algebraicas aditivas y la comparación obliga a gestionar paréntesis multiplicados por un sumando o un sustraendo. Como consecuencia se establecen las reglas de los signos correspondientes al producto de sumandos y sustraendos y se pone de manifiesto la importancia de la propiedad distributiva en el cálculo algebraico, tanto en su sentido de desarrollo de expresiones como de factorización de las mismas.

La situación fundamental se organiza alrededor de la resolución de los siguientes problemas:

Ejercicio 29.

i) Como ya sabéis, la fórmula del área de un rectángulo es $A = ba$, donde b es la longitud de uno de los lados (base) y a la longitud del otro lado (altura).



Si nos dicen que $a = 3$ cm, ¿cómo expresaremos el área de ese rectángulo?

ii) Si ahora te dicen que en ese rectángulo el lado b aumenta 2 cm, haz un dibujo del nuevo rectángulo. ¿Cuál será ahora la longitud de sus lados? ¿Cuánto habrá aumentado su área?

Ejercicio 31.

i) Dibuja un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 4 cm. Si el lado conocido lo aumentamos en 2 cm y el desconocido lo disminuimos en 1 cm obtenemos un nuevo rectángulo. Dibuja este segundo rectángulo. Expresa la longitud de los lados de los dos rectángulos.

ii) ¿Que pasará con el área del segundo rectángulo?, ¿disminuirá o aumentará respecto al área del primer rectángulo?, ¿cuánto?

iii) ¿Que longitud tiene que tener el lado desconocido para que los dos rectángulos tengan la misma área?

Ejercicio 32. A partir de un rectángulo del que conocemos la longitud de un lado, 5 cm, construimos otros dos rectángulos: uno en el que aumentamos el lado conocido en 3 cm y el desconocido lo disminuimos en 3 cm, y otro en que disminuimos el lado conocido en 3 cm y aumentamos el lado desconocido en 3 cm.

a) Haz un dibujo del primer rectángulo.

b) Haz un dibujo del segundo y tercer rectángulos.

c) Encuentra la diferencia entre las áreas de los dos últimos rectángulos. ¿Cuánto tiene que medir el lado desconocido para que las dos áreas sean iguales?

Ejercicio 35. Tres rectángulos tienen un lado igual que mide 2 cm y sus áreas miden 6 cm^2, $6 + 2a$ cm^2 y $6 - 4a$ cm^2.

a) ¿Cuánto mide el otro lado de cada rectángulo?

b) ¿En cuánto se diferencian los lados distintos de los rectángulos?

IV.10.2. Valores que toman las variables didácticas de la situación fundamental

Son los siguientes:

- *Sentido de la situación*: Directo.
- *Estructura semántica*: Problemas que contienen etapas multiplicativas del tipo EEE y ECE.
- *Tipo de expresión algebraica*: Aditivo-multiplicativa.
- *Número de datos desconocidos*: Uno.
- *Significado de las letras*: Parámetros (o variables).
- *Dominio de las letras*: $\mathbb{N}$.
- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Sumandos y sustraendos.
- *Significado de los signos + y −*: Operativo binario entre números sin determinación, operativo binario generalizado y operativo unario.

IV.10.3. Objetos algebraicos que emergen en esta etapa

Son los siguientes:

- El producto de un término por una diferencia.

- El producto de sumandos y sustraendos.
- Las expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas, es decir, la representación simbólica de un programa de cálculo compuesto por una combinación de sumas, restas y productos que afectan a números naturales o a variables cuyo valor numérico es un número natural.
- El producto de expresiones algebraicas aditivas.
- La comparación multiplicativa entre expresiones algebraicas aditivas.

IV.10.4. Objetos aritméticos que cambian su significado en esta etapa

- En aritmética es relativamente frecuente presentar secuencias de sumas y restas indicadas que los alumnos realizan de izquierda a derecha. En cambio es poco frecuente presentar operaciones combinadas que mezclen sumas y restas con productos. La jerarquía de las operaciones que establecen las reglas del cálculo algebraico rompe con la técnica aritmética de efectuar las operaciones de izquierda a derecha, imponiendo una lectura de toda la expresión algebraica para efectuar en primer lugar aquellas operaciones que tienen prioridad, independientemente del lugar que ocupen en la expresión

IV.10.5. Técnicas que se ejercitan en esta etapa

Se ejercitan las siguientes:

- Producto de un sumando o un sustraendo por una suma o diferencia. La utilización de la propiedad distributiva lo reduce a un producto entre sumandos y sustraendos.
- Uso de la propiedad distributiva para desarrollar o factorizar expresiones algebraicas.
- Simplificación de expresiones algebraicas aditivo-multiplicativas. Esto exige el establecimiento de las reglas de jerarquía de las operaciones a efectuar.
- Simbolización algebraica de programas de cálculo aritmético aditivo-multiplicativos expresados verbalmente.

Las tareas que se proponen para ejercitar las técnicas son las siguientes:

Ejercicio 30.

a) Aplica la propiedad distributiva a las siguientes expresiones para suprimir los paréntesis.

   i) $10(a - b)$

ii) $4+5(x+22)$

iii) $12(n+m-4)-5n+40$

b) Aplica la propiedad distributiva en sentido inverso en las siguientes expresiones (Esta operación recibe el nombre de "sacar factor común").

i) $3t-3v+3z$

ii) $5v-10$

iii) $24m+12$

Ejercicio 33. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $15-4(3x-5)+2(5-7a)$

b) $3p+6q-3(p+12+2q)$

c) $n(3+7n-6)-m(5-6m+2)$

d) $3(6-5(3b-4+c)+10b)+2(5b-2c)$

e) $7(5-a)+11(5-a)-9(5-a)$

Ejercicio 36. En las siguientes parejas de expresiones algebraicas, indica cuántas veces mayor o menor es una que otra.

a) $36t-4$ es ____ veces _________ que $18t-2$

b) $6m+4n$ es ____ veces _________ que $16(2n+3m)-10(2n+3m)$

c) $30c-60+20b$ es ____ veces _________ que $2b+3c-6$

d) $7(456x-319y)$ es ____ veces _________ que $56(456x-319y)$

Ejercicio 37. Efectúa las siguientes operaciones de la forma más sencilla posible:

a) $2(17-4\cdot 3)+5-3^3$

b) $(9^2-7^2)-(9-7)^2$

c) $47(4\cdot 15-35)-17\cdot 25$

d) $45-5(20-4(15-3(10-6)))$

e) $8+2\cdot 6-5\cdot 6+9\cdot 6-4\cdot 6$

Ejercicio 38. Escribe expresiones algebraicas siguiendo las instrucciones siguientes. Después simplifícalas.

a) A un número cualquiera réstale 25. El resultado multiplícalo por 2 y réstaselo a 100. Al resultado réstale 50.

b) Multiplica un número cualquiera por 3 y súmale 2. El resultado vuelve a multiplicarlo por 2 y réstaselo al número inicial multiplicado por 7.

c) A 10 réstale un número cualquiera multiplicado por 5. Multiplica el resultado por 6. Ahora a 10 súmale el mismo número de antes multiplicado por 6 y el resultado multiplícalo por 5. Resta las dos expresiones obtenidas.

IV.10.6. Características de la institucionalización en esta etapa

Se institucionaliza el producto de un sumando o sustraendo por una suma o diferencia en los términos indicados en el ejercicio siguiente:

Ejercicio 34. Completa las siguientes frases:

Sumar $2(a+b)$ es lo mismo que _______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Sumar $2(a-b)$ es lo mismo que _______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Restar $2(a+b)$ es lo mismo que _______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Restar $2(a-b)$ es lo mismo que _______________ $2a$ y _______________ $2b$.

Además se explicitan las reglas de jerarquía de las operaciones y la propiedad distributiva.

Como hemos podido ver, a lo largo de estas tres etapas se hace una presentación funcional de distintos objetos algebraicos, enfatizando su sentido y sin que su aparición obligue a poner inmediatamente en marcha las técnicas y la nomenclatura que les son propias. Interesa, ante todo, que el alumno reflexione sobre la elección adecuada de las variables o parámetros para obtener un buen modelo algebraico del problema y sepa después sacar el mejor partido del modelo, obteniendo la mayor cantidad posible de información.

IV.11. Cuarta etapa en la génesis escolar del número entero

IV.11.1. Descripción de la situación fundamental

La constituyen problemas aritméticos aditivos, directos y parametrizados en los que tanto los datos desconocidos como la solución son cantidades que pueden interpretarse con un sentido de ganancia o pérdida, o de movimiento unidireccional en un sentido u otro, o como cantidades relativas.

El objetivo prioritario de esta etapa es el de dar sentido a los sumandos y sustraendos aislados, primero como cantidades positivas y negativas y finalmente como números enteros, y al hecho de que las letras puedan tomar valores positivos y negativos, lo que permite una sola fórmula allí donde, de otra manera, serían necesarias varias.

Aparecen ahora los modelos concretos que se utilizan habitualmente en la introducción escolar del número entero (ganancias y pérdidas, movimientos a derecha o izquierda, temperaturas, etc.), pero con un tratamiento muy diferente. El trabajo con los modelos concretos en el ámbito aritmético no proporciona una razón de ser de los números enteros, pues basta una modelización aritmética en términos de números naturales para encontrar respuesta a las preguntas planteadas. En cambio, la utilización de esos mismos modelos en un contexto algebraico, en el que las reglas de cálculo con sumandos y sustraendos ya están establecidas, permite mostrar la gran ventaja que supone representar determinadas cantidades por medio de sumandos y sustraendos: la unificación de las fórmulas.

Por ejemplo, si damos a las letras valores numéricos positivos y negativos, podemos calcular la diferencia de temperaturas utilizando una sola fórmula, independientemente de que sean temperaturas sobre cero o bajo cero, o la distancia entre dos móviles que parten de un mismo punto, independientemente de que se muevan en un sentido o en otro. Y todo esto conduce a la reinterpretación de los sumandos y los sustraendos como nuevos números: los números enteros, y a la consolidación de un nuevo significado de los signos $+$ y $-$: su sentido predicativo. Ya no son signos que indican una operación, sino signos que indican una "cualidad" de los números.

La situación fundamental se organiza alrededor de la resolución de los siguientes problemas:

Ejercicio 10. Alberto juega a los cromos. En la primera partida pierde tres cromos, en la segunda no se acuerda de lo que pasó, en la tercera gana cinco cromos y en la cuarta pierde cuatro cromos.

a) Cuántos cromos ganó o perdió?

b) Completa la siguiente tabla:

N° de cromos que ganó o perdió en la segunda partida	N° de cromos que ganó o perdió en total
$+4$	
-6	
	$+5$
	-3

Ejercicio 11. Después de jugar dos partidas, Alberto sólo se acuerda de que en la primera ganó cuatro cromos. Ana también ha jugado a los cromos y sabe que en la primera partida perdió dos cromos, pero tampoco se acuerda de lo que pasó en la segunda. Completa la siguiente tabla:

N° de cromos que ganó o perdió Alberto en la segunda partida	N° de cromos que ganó o perdió Ana en la segunda partida	Diferencia entre el n° de cromos ganado en total por Alberto y el ganado en total por Ana
a	b	
$+3$	-1	
-3	$+4$	
$+2$		$+3$
-1		-4
	$+5$	-2
	-2	$+2$

Ejercicio 15.

a) Dibuja un termómetro con temperaturas por encima y debajo de cero y encuentra la diferencia entre las siguientes temperaturas, contando cuántos grados hay que recorrer para pasar de una temperatura a la otra.

   1) 6 sobre cero y 5 bajo cero
   2) 7 sobre cero y 2 sobre cero
   3) 3 bajo cero y 8 bajo cero

b) Si llamamos T a la temperatura más alta y t a la más baja, escribe la diferencia de temperaturas y utiliza esa fórmula para encontrar las diferencias en los casos anteriores. Comprueba si se obtienen con la fórmula las mismas diferencias que antes.

IV.11.2. Valores que toman las variables didácticas de la situación fundamental

Son los siguientes:

- *Sentido de la situación*: Directo.
- *Estructura semántica*: Problemas que contienen etapas aditivas del tipo TTT.
- *Tipo de expresión algebraica*: Aditiva.
- *Número de datos desconocidos*: Uno o dos (ejercicio 15).
- *Significado de las letras*: Parámetros (o variables).
- *Dominio de las letras*: $\mathbb{Z}$.

- *Objetos de referencia de la negatividad matemática*: Cantidades positivas y negativas.
- *Significado de los signos* $+$ *y* $-$: Operativo binario generalizado y operativo unario, predicativo y operativo binario entre números con determinación.

IV.11.3. Objetos algebraicos que emergen en esta etapa

- El anillo conmutativo unitario totalmente ordenado de los números enteros. Su razón de ser es la existencia de diferencias negativas y la aparición de un campo de problemas aritméticos, asociado a "cantidades con dos sentidos", en el que es necesario que las letras tomen valores positivos o negativos para obtener una sola fórmula de resolución.
- La división euclídea con resto cero de números enteros
- Las diferencias entre la estructura algebraica del conjunto de los números enteros y la del conjunto de los números naturales. Se constata que esos nuevos números ya no cumplen las mismas propiedades que cumplen los números naturales.
- El valor numérico de una expresión algebraica cuando el dominio de las variables es $\mathbb{Z}$.
- La relación de orden y la diferencia entre expresiones algebraicas cuando el dominio de las variables es $\mathbb{Z}$.
- La notación completa que incorpora los signos operativo binarios entre números con determinación.

IV.11.4. Objetos aritméticos que cambian su significado en esta etapa

- Los números precedidos de un signo $+$ ó $-$ se convierten en nuevos números con propiedades diferentes a las de los números naturales. Algunas propiedades que en aritmética se suponían para "todos" los números ahora restringen su dominio al campo de los números positivos.
- Las letras en su papel de variables, parámetros o incógnitas ya no toman valores absolutos como es propio de la aritmética, sino valores con una determinación positiva o negativa.
- Los paréntesis, que en aritmética indican prioridad en la realización de las operaciones, asumen aquí un nuevo papel como elemento que distingue el producto de la suma de números enteros en la notación

incompleta y como delimitador del número entero en la notación completa.

IV.11.5. Técnicas que se ejercitan en esta etapa

Se ejercitan las siguientes:

- Las operaciones con números enteros.
- La ordenación de números enteros.
- La obtención del valor numérico de una expresión algebraica. La técnica se amplía al caso en que las variables pueden tomar valores en $\mathbb{Z}$.
- La comparación de expresiones algebraicas de primer grado en $\mathbb{Z}$, estudiando el signo de la diferencia.
- La reducción de la notación completa a la notación en la que los signos operativos binarios se suprimen (notación incompleta). Hay que advertir que en esta génesis de los números enteros se invierte el recorrido escolar habitual en la presentación de las notaciones. Se comienza presentando la notación incompleta, es decir, la notación en la que se ha suprimido el signo + que indica la suma como operación binaria, para terminar presentando la notación completa. La razón de este cambio es que si se analizan las técnicas de cálculo algebraico se observa que se trabaja siempre con notaciones incompletas y ante una expresión escrita en notación completa, se procede, en primer lugar, a transformarla suprimiendo todos los signos + que indican operación binaria. Por tanto, los cálculos se realizan a partir de expresiones escritas en notación incompleta.

Las tareas que se proponen para ejercitar las técnicas son las siguientes:

Ejercicio 12. En las siguientes expresiones las letras indican ganancias o pérdidas en partidas de cromos. Encuentra el valor numérico de las expresiones, sustituyendo las letras por los números que se indican.

E1) $p - q + 10$	siendo $p = +7$ y $q = +3$
E2) $12 - x - y$	siendo $x = -5$ e $y = +8$
E3) $2(6 - a)$	siendo $a = -4$
E4) $a - 3(b - 1)$	siendo $a = 2$ e $y = -6$
E5) $3(2 - 3n) - 2(3 - m)$	siendo $n = -5$ y $m = 1$.

Ejercicio 13. Efectúa las siguientes operaciones:

E1) $(-200) + (+300) + (-100) + (-100)$

E2) $(+37) - (-40) - (+23) + (-17)$

E3) $8 + 2((-72) - (-12)) - 18$

E4) $(4x - 7x) - (2x - 6x) + (5x - 10x)$

E5) $((-5) + (-3) - (-1)) - ((-5) - (-3) + (-1))$

Ejercicio 16. Ya sabemos que si una diferencia es positiva significa que el primer término de la diferencia es mayor que el segundo término. En cambio si la diferencia es negativa eso quiere decir que el primer término es menor que el segundo. Calcula las siguientes diferencias y utiliza el resultado para decidir cuál de los números es mayor o menor, escribiendo el smbolo $>$ ó $<$ entre ellos.

a) $(+12) - (+8)$	$+12$ ..... $+8$
b) $(+5) - (-10)$	$+5$ ..... -10
c) $(-6) - (+2)$	-6 ..... $+2$
d) $(-15) - (-3)$	-15 ..... -3
e) $(-11) - (+11)$	-11 ..... $+11$
f) $(-2) - (-6)$	-2 ..... -6

Ejercicio 18.

a) Ordena de menor a mayor los siguientes números enteros.

$$+14,\ -18,\ +36,\ +4,\ -12,\ -5,\ -20,\ +10,\ +8,\ 0$$

b) Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros.

$$7,\ -7,\ 1500,\ -3568,\ -3569,\ -83,\ 1,\ 13,\ -100,\ 5$$

Ejercicio 19.

a) Coloca el signo $<$ ó $>$ entre las siguientes parejas de expresiones algebraicas, suponiendo que las letras sólo pueden tomar valores positivos.

1) $9 - a$	$6 - a$
2) $4q - 5$	$4q - 8$
3) $z + 2$	$2z + 5$
4) d	$-d$
5) $m - 2n$	$3m - n$

b) Coloca de nuevo el signo $<$ ó $>$ entre las parejas de anteriores, suponiendo ahora que las letras sólo pueden tomar valores negativos.

1) $9 - a$	$6 - a$
2) $4q - 5$	$4q - 8$
3) $z + 2$	$2z + 5$
4) d	$-d$
5) $m - 2n$	$3m - n$

c) En las desigualdades anteriores, si las letras pueden tomar valores positivos y negativos, ¿a partir de qué números o relaciones entre números cambia el sentido de la desigualdad?

Ejercicio 21. Realiza las siguientes multiplicaciones de números enteros.

$(+3)(+5)$

$(+3)(-5)$

$(-3)(+5)$

$(-3)(-5)$

Ejercicio 23. Completa las siguientes multiplicaciones, escribiendo el número que falta.

$(+3)(\quad) = +12$

$(-7)(\quad) = +21$

$(+5)(\quad) = -15$

$(-6)(\quad) = -24$

Ejercicio 24. Realiza las siguientes divisiones de números enteros:

$(+12) : (+3)$

$(+21) : (-7)$

$(-15) : (+5)$

$(-24) : (-6)$

IV.11.6. Características de la institucionalización en esta etapa

En esta etapa se institucionaliza el número entero como número natural precedido de un signo + ó −, la equivalencia entre el número natural y el entero positivo, el opuesto de un número entero y las operaciones y el orden entre números enteros. En el caso del producto, se establecen previamente las reglas de los signos entre sumandos y sustraendos. También se constata que esos nuevos números ya no cumplen las mismas propiedades que cumplen los números naturales.

La institucionalización se realiza en los términos indicados en los ejercicios siguientes:

Ejercicio 14. Completa las siguientes frases:

Sumar un número que suma es lo mismo que ________________ dicho número.

Sumar un número que resta es lo mismo que ________________ dicho número.

Restar un número que suma es lo mismo que ________________ dicho número.

Restar un número que resta es lo mismo que ________________ dicho número.

Ejercicio 17. Lee el siguiente texto:

Hasta ahora hemos visto unos nuevos objetos matemáticos: los números naturales precedidos de un signo $+$ ó $-$. Sabemos además cómo sumarlos, restarlos y compararlos. En determinados problemas también nos sirven para dar valores a las letras. En resumen, se puede hacer con ellos lo mismo que hacíamos con los números naturales, así que vamos a considerar que estos objetos son también números y les llamaremos NÚMEROS ENTEROS.

Los números enteros son números naturales precedidos de un signo $+$ ó $-$. A los números naturales precedidos de un signo $+$ se les llama enteros positivos y son equivalentes a los números naturales. A los números naturales precedidos de un signo $-$ se les llama enteros negativos.

Se dice que -2 es el opuesto de $+2$ y que $+2$ es el opuesto de -2. Por tanto, también se puede considerar que los números enteros son los números naturales con el añadido de sus opuestos. Más adelante veremos que los números decimales y las fracciones también se pueden ampliar añadiendo sus opuestos y obtendremos los NÚMEROS RACIONALES.

Ejercicio 20. Las propiedades siguientes son ciertas para los números naturales. Indica si también se cumplen en los números enteros.

1) Los sumandos son siempre menores o iguales que el resultado de la suma.
2) El minuendo de una resta es siempre mayor o igual que el resultado de la resta.
3) Si los factores de un producto son todos distintos de cero, entonces son menores o iguales que el resultado del producto.
4) El dividendo de una división es siempre mayor o igual que el cociente.
5) No hay ningún número que sea menor que cero.

Ejercicio 22. Completa las siguientes frases:

Al multiplicar un número positivo por un número positivo se obtiene un número ....

Al multiplicar un número positivo por un número negativo se obtiene un número ....

Al multiplicar un número negativo por un número positivo se obtiene un número ....

Al multiplicar un número negativo por un número negativo se obtiene un número ....

IV.12. Desarrollo de la experimentación en 1° de ESO

IV.12.1. Contextualización de la experimentación

La experimentación se lleva a cabo en dos grupos de 1° de ESO durante los cursos 2008-09 y 2009-10. Los grupos están formados por alumnos motivados, participativos, con un comportamiento correcto y acostumbrados al trabajo en equipo.

El IES Costa y Llobera de Barcelona en el que se realiza la experimentación es un centro público que atiende a un alumnado procedente de familias con un nivel cultural y económico medio, medio-alto, y mantiene un equipo docente cohesionado gracias a su calificación como centro experimental. El idioma vehicular es el catalán.

La experimentación se realiza en el horario de clases de la asignatura de Matemáticas: tres horas a la semana. En las dos primeras horas el grupo está completo y se trabaja en grupo pequeño (4 alumnos por grupo), salvo los momentos de puesta en común del trabajo de los grupos y de explicación del profesor. En la tercera hora los alumnos se distribuyen en dos aulas distintas por niveles de rendimiento académico, asistiendo los alumnos con mayores dificultades a un aula y el resto del grupo a otra. En estas últimas clases se trabaja individualmente y el trabajo propuesto en los dos niveles es el mismo, pero esta organización permite una atención más personalizada. Por consiguiente, cada alumno tiene tres horas de clase a la semana pero en una de ellas, la de trabajo individual, no están todos los alumnos del grupo en la misma aula.

Las clases las imparte la profesora de la asignatura y se observan durante todo el periodo que dura la experimentación. Normalmente, hay una sola observadora en la sesión de clase que registra los hechos sucedidos mediante apuntes personales, fotos y fotocopia ocasional del trabajo de los alumnos.

En esta memoria se expone el desarrollo de la experimentación en uno de los grupos para evitar repeticiones innecesarias, dado que el comportamiento de los dos grupos observados cada curso fue muy parecido.

IV.12.2. Desarrollo de la experimentación en el curso 2008-09

La experimentación se realiza en un grupo de 1° de ESO denominado 1°B y compuesto por 32 alumnos. Uno de los alumnos es de integración y aunque permanece en clase con los demás, la profesora le propone tareas adaptadas a sus capacidades.

Se inicia en el mes de enero y, aunque el grupo ya había recibido enseñanza sobre los números enteros porque es uno de los primeros temas que se trabajan en 1° de ESO, la profesora no tiene inconveniente en realizarla al considerar que también le sirve como introducción al álgebra.

Son 16 sesiones de clase impartidas entre el 22 de enero y el 6 de marzo. Se utiliza el material que figura en el anexo IV.3 que les fue entregado a los alumnos en fotocopias a medida que realizaban las tareas. El diario detallado de las sesiones correspondientes al curso 2008-09 se encuentra en el anexo IV.4.

Sesión 1

Se forman ocho grupos de cuatro alumnos que afrontan la tarea de resolver el problema inicial. Los grupos responden a los apartados Aa y Ab (ver anexo IV.3) sin grandes dificultades, pero no sucede lo mismo con los apartados Ac y Ad. Varios grupos no saben resolverlos ni siquiera cuando la profesora les sugiere que den valores a los puntos de las fichas. La profesora tiene que hacer la puesta en común del trabajo en grupo cuando prácticamente ningún grupo ha llegado al apartado B.

Como consecuencia, el objetivo didáctico que se perseguía: que los alumnos vieran que un problema aparentemente aritmético no tiene solución en forma aritmética y necesita nuevas herramientas, no se cumple porque el problema inicial es muy largo y la parte que los alumnos han resuelto no permite llegar a esta conclusión.

Hay que reseñar que en la explicación en la pizarra la profesora no es consciente de que está utilizando las letras indistintamente con un sentido aritmético (inicial de un objeto) o algebraico (cardinal de un conjunto) lo que genera dificultades en los alumnos.

Sesiones 2 y 3

Se reparten las fotocopias de la parte temática *Cómo construir expresiones algebraicas*. Los grupos, una vez leído el enunciado del ejercicio 1, contestan indicando la variación de tazos. La profesora les dice que se pregunta por el número final de tazos, no por la variación, ante lo que los grupos responden que no pueden contestar a esa pregunta porque les falta el dato inicial. Entonces la profesora explica que eso sucede muchas veces en matemáticas, que hay que resolver problemas cuyos datos en parte se desconocen y que entonces se usa el álgebra: se sustituyen por letras las cantidades desconocidos y la solución es una fórmula en vez de una cantidad como sucede en aritmética. Ante la pregunta de qué letra pueden utilizar, la profesora responde que pueden usar cualquier letra y los grupos empiezan a utilizar una gran variedad de letras.

La introducción de las letras en las soluciones de los problemas tiene una desigual aceptación. Muchos alumnos no entienden la necesidad de escribir una letra donde se puede dar una respuesta numérica acompañada de una frase que contextualice dicha respuesta, pero aceptan escribir la letra a petición de la profesora. Por supuesto, esa letra no interviene en los cálculos, éstos se hacen de forma aritmética y sólo al final se escribe una expresión algebraica. Seguimos en el campo de la aritmética, pero los alumnos empiezan a aceptar la introducción de la letra en las soluciones, aunque después no hacen uso de ella. De hecho, en el ejercicio 4, varios grupos vuelven a rehacer todos los cálculos, sin utilizar la fórmula obtenida.

Este modo de hacer aritmético se prolonga hasta llegar al ejercicio 7, donde se ven obligados a operar por primera vez con expresiones algebraicas. Resulta curioso el hecho de que ningún alumno relaciona la simplificación de la expresión $v-9+j-13$ con las operaciones entre números enteros que estudiaron al principio de curso. Incluso cuando se les anima a que utilicen su conocimiento de los números enteros para resolver esa operación, no saben cómo hacerlo.

El ejercicio 8 queda como trabajo para casa y se corrige posteriormente sin que se observen dificultades en su resolución. Se decide que para el curso siguiente debe ser modificado, pues no tiene sentido poner tantos apartados ni expresiones algebraicas demasiado complejas en un momento en que apenas han empezado a simplificarlas.

Sesiones 4 y 5

Se reparten las fotocopias de la parte temática *Cómo comparar expresiones algebraicas*. Los grupos resuelven sin grandes dificultades los ejercicios 9 y 10, llegando incluso a establecer los valores que hay que dar a la variable para que la desigualdad tenga un sentido u otro. Para ello, algunos grupos hacen una tabla de valores y otros lo deducen, sin más.

En el ejercicio 10, todos los grupos escriben correctamente el dinero que tienen los tres personajes del enunciado, pero bastantes grupos tienen dificultades para expresar algebraicamente la suma total de dinero y la diferencia entre el dinero que tienen y el precio del regalo. Son las primeras veces que se encuentran con la suma repetida de una letra y no están familiarizados con los coeficientes de las letras. Sin embargo, la mayoría de los grupos dan el resultado correcto porque siguen haciendo razonamientos aritméticos que les permiten controlar el resultado, aunque el cálculo algebraico no sea correcto.

En general, se observa que los alumnos están ya más familiarizados con las expresiones algebraicas y son capaces de razonar sobre ellas y simplificarlas y operarlas en casos sencillos. También empiezan a familiarizarse con la comparación de expresiones, entendiendo siempre que las letras sólo pueden tomar valores naturales.

Los grupos se bloquean en el apartado b) del ejercicio 12 pues, para establecer las cantidades de dinero inicial y final, es necesario “darle la vuelta" a una de las frases comparativas o aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma y se observa que los alumnos no están familiarizados con ninguna de las dos técnicas. Además, la resolución del problema exige comparar tres expresiones entre sí y, en dos de las comparaciones, el sentido de la desigualdad depende de los valores de la variable. Por último, en una de las comparaciones el valor en el que la igualdad cambia de sentido es alto ($a = 35$) y difícil de encontrar haciendo tablas de valores.

El ejercicio 13 se desarrolla sin mayores incidentes. Los grupos hacen razonamientos del tipo: "sumar 1 es más que restar 10", "restar $2z$ es más que restar z", etc. y contestan correctamente. En el apartado E6) todos los grupos son conscientes de que el sentido de la desigualdad depende de n, pero no todos son capaces de encontrar la solución de la inecuación. Los que lo hacen, dan valores naturales a n, encuentran el valor que resuelve la ecuación y, a partir de ahí, hacen razonamientos más o menos completos. Dos grupos son capaces de contestar con toda precisión, indicando las tres posibilidades.

También resuelven con rapidez el ejercicio 14, aunque la mayor parte de los alumnos no simplifican la expresión E2). En el ejercicio 15, hay que llamarles la atención sobre la distinción entre comparación aditiva y multiplicativa. Es algo que bastantes alumnos no conocen pero, ante la explicación de la profesora, asumen la diferencia sin dificultad, aunque algunos se equivocan en los cálculos

En conjunto, podemos decir que los alumnos han aceptado la comparación entre expresiones algebraicas y la resuelven incluso cuando el sentido de la desigualdad depende del valor de la variable, siendo capaces de encontrar los valores que verifican la igualdad siempre que no sean muy altos. También se van familiarizando con el hecho de que la existencia de datos desconocidos no impide dar respuestas a las preguntas que plantea el enunciado del problema.

Sesiones 6 y 7

Se reparte la parte temática *Cómo simplificar expresiones algebraicas*. En el ejercicio 16, la mayoría de los alumnos responden que "$d - 7 - 4 + 10 = d - 3 + 10$ está bien porque $7 - 4 = 3$". A estos alumnos se les plantea entonces que inventen un problema donde la resolución corresponda a la primera expresión algebraica. Un alumno dice: "Tengo un paquete de cromos, pierdo 7 y me cogen 4 y mi padre me compra 10". Entonces se le pregunta si "es lo mismo perder 7 y que te cojan 4 a perder 3" El alumno responde claramente que "no, está mal, eso es lo mismo que perder

11". Son necesarias muchas intervenciones de este tipo por parte de la profesora porque la tendencia de los alumnos es interpretar los signos como símbolos de operaciones binarias entre números sin determinación, que es la interpretación propia de la aritmética.

Los grupos también tienen dificultades para aceptar la propiedad conmutativa de la composición de traslaciones. En el ejercicio 18 son frecuentes contestaciones del tipo: "Sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que sumar primero 2 y restar después 5". La profesora se ve obligada a hacer una intervención para toda la clase comentando el asunto y discutiendo con los alumnos si las frases que han escrito son correctas o no. Algunos alumnos no quedan muy convencidos y mantienen la redacción inicial de las frases.

Los alumnos siguen trabajando en los distintos apartados del ejercicio 20. Se toman muy en serio las instrucciones que han recibido en el ejercicio 19 y procuran operar de acuerdo con ellas. Como no tienen seguridad en la corrección de los cálculos que hacen recurren constantemente a la profesora y a la observadora para asegurarse de que lo tienen bien.

Los ejercicios de simplificación ponen de manifiesto lo costoso que es para los alumnos pasar del ámbito aritmético en el que se trabajan las operaciones entre números sin determinación a un ámbito algebraico en el que lo que se trabaja es la composición de traslaciones. Y de un ámbito operacional de corte algorítmico, como es el de la aritmética, a un ámbito operacional que exige reflexión y búsqueda de una economía de trabajo. La falta de buenas técnicas de cálculo mental ralentiza aún más este paso.

A esto hay que añadir la tendencia de los alumnos a realizar los cálculos intermedios aparte para colocar a continuación de la expresión propuesta el resultado final de la operación, tal como se suele hacer en aritmética. No parecen sentirse con permiso para escribir los cálculos intermedios y menos para ligarlos con el signo igual. Son necesarias bastantes intervenciones de la profesora para que empiecen a aceptar esta nueva forma de expresar los cálculos.

Sesiones 7 a 9

Mediada la sesión 7, bastantes grupos han terminado el ejercicio 20 y la profesora reparte la parte temática *Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas*. Los grupos comienzan el ejercicio 21, resolviendo correctamente el apartado 21a) e incorrectamente el apartado 21b). Teóricamente la incorrección de dicho apartado debería quedar de manifiesto al afrontar el apartado 21c), pero los alumnos no entienden el sentido del ejercicio. Unos grupos deciden sin más copiar la tabla del apartado 21a) pues les parece una pérdida de tiempo volver a calcular algo que ya tenían calculado de antemano. Otros hacen de nuevo los cálculos utilizando las expresiones con paréntesis por lo que vuelven a obtener los mismos resultados que antes. Por último, los pocos grupos que utilizan las expresiones resultantes de quitar los paréntesis obtienen una tabla distinta pero no le dan importancia al hecho o la borran para sustituirla por la primera. La profesora tiene que intervenir largamente en todos los grupos ayudada por la observadora sin que sus argumentos convenzan a la mayor parte de los alumnos. El ejercicio 21 se revela absolutamente ineficaz para conseguir el objetivo propuesto.

Los grupos pasan al ejercicio 22 donde la mayor dificultad está en reconocer que intervienen dos variables. Una vez asumido este hecho, aparece otra dificultad con el término 'diferencia' pues ellos están habituados al término 'resta'. Cuando finalmente escriben la diferencia entre el número de canicas de Carlos y Enrique la mayor parte de los alumnos no ponen el paréntesis en la expresión que hace el papel de sustraendo.

La sesión 7 resulta fallida en lo que se refiere a que los alumnos entiendan la relación que existe entre sumar o restar el resultado de una suma o diferencia o sumar o restar la suma o diferencia término a término. Los alumnos se muestran extraordinariamente reacios a aceptar esta relación y las tareas que se les plantean no ayudan a ello.

De nuevo, el estudio realizado al principio de curso sobre los números enteros no parece servir de mucho. Los alumnos siguen sin relacionar su trabajo actual con lo estudiado en dicho tema. Incluso cuando se hace una llamada a que recuerden cómo se operaban los número enteros, lo único que se consigue es provocar más confusión.

La profesora y la observadora deciden que, visto el resultado obtenido, en la parte temática que trata de la simplificación de expresiones con paréntesis, a entregar en los días siguientes, hay que volver a incorporar ejercicios que pongan de manifiesto el efecto que produce un signo $-$ delante de un paréntesis. Por ello, en la sesión 8 la profesora reparte la parte temática *Cómo simplificar expresiones algebraicas con paréntesis* y pide a los alumnos que dejen momentáneamente el trabajo que están haciendo y resuelvan el ejercicio 25, reflexionando sobre cómo queda una expresión cuando se suprime un paréntesis. La profesora también recuerda la función de los paréntesis para indicar prioridad de las operaciones contenidas en ellos.

Esta vez los grupos resuelven correctamente los apartados 25a) y 25b), aunque siguen teniendo dificultades en el apartado 25c). Finalmente se hace una puesta en comúm del ejercicio y la profesora deja establecida la regla de supresión de paréntesis precedidos de un signo $-$.

La realización del ejercicio 25 y la puesta en común del mismo hace que mejore la comprensión que la clase tiene del papel de los paréntesis y de las reglas de supresión de los mismos, pero sigue habiendo bastantes dificultades al respecto y todo este proceso ocupa mucho tiempo de clase y obliga a la profesora a un esfuerzo adicional de atención a los grupos.

Finalizada la explicación, los grupos vuelven al ejercicio 22, donde aparece una dificultad importante en el apartado 22b): los alumnos están ya familiarizados con el hecho de dar valores a una letra, pero por primera vez se encuentran con que se le da un valor a una diferencia y tratan de encontrar el valor de cada uno de los términos de la diferencia. Es decir, sabiendo que $a-b=4$, no se les ocurre sustituir $a-b$ por 4 en la expresión $a-b+16$, sino que pretenden encontrar el valor de a y b para sustituirlo en la expresión. Sólo unos pocos alumnos se dan cuenta de que no es necesario conocer dichos valores para encontrar el valor total de la expresión.

En la sesión 9 la profesora aprovecha el inicio de la clase para corregir algunos apartados del ejercicio 20 sobre simplificación de expresiones. Pregunta a los alumnos cómo lo han hecho y discute con ellos sobre la manera más rápida y económica de efectuar la simplificación. Se observa que muchos de ellos escriben una debajo de otra las expresiones algebraicas intermedias del cálculo sin ligarlas con el signo =. Finalmente, la profesora propone que los alumnos que no hayan realizado todos los apartados lo terminen de hacer en casa y se lo entreguen para hacer una corrección escrita.

Los alumnos prosiguen con el ejercicio 23. Siguen cometiendo errores al suprimir los paréntesis para simplificar las expresiones, pero en menor medida. Después, una vez simplificadas las expresiones: $3m+1$, $15m-5$, $2m-1$, los alumnos se encuentran con que tienen que comparar tres expresiones, cuando hasta el momento solo habían comparado dos, y la tarea les resulta excesiva y son incapaces de abordarla. A pesar de todo, algunos alumnos encuentran soluciones parciales.

En cuanto al cálculo de las diferencias, vuelve a plantearse el significado del término 'diferencia' y finalmente las calculan, pero muchos de ellos no escriben los términos de la diferencia entre paréntesis con lo que obtienen resultados erróneos y la profesora y la observadora se ven obligadas a intervenir de nuevo, intentando hacerles ver que cuando se resta una expresión compuesta de varios términos es necesario poner un paréntesis.

Nuevamente estamos ante una sesión bastante caótica y que consume una cantidad de tiempo que los resultados obtenidos no justifican. Analizado el devenir de la clase, se llega a la conclusión de que el ejercicio 23 no tiene sentido porque plantea una simplificación en un momento en que todavía no se está trabajando ese aspecto y porque complica la comparación al establecerla entre tres términos, cuando el objetivo del material es el de calcular diferencias. Además, dado que las soluciones de dos de las inecuaciones correspondientes son valores racionales positivos menores que 1, los alumnos no tienen posibilidades de obtener la solución correcta, solo de hacer alguna aproximación más que discutible desde el punto de vista de la corrección matemática.

Sesiones 10 a 13

Las sesiones 11 y 12 se dedican a la realización de un examen y su corrección posterior. En la sesión 10, los grupos empiezan el ejercicio 24 y se encuentran con dificultades que ponen de manifiesto la complejidad de los códigos de escritura algebraicos. En primer lugar, los alumnos interpretan que la expresión “un número cualquiera” les da permiso para elegir el número que quieran y realizar con ese número los cálculos indicados en el enunciado. La profesora permite que inicialmente lo hagan así y después interrumpe el trabajo de los grupos para comentar dicha expresión. Se produce una discusión sobre su significado y queda finalmente establecido que en matemáticas por “un número cualquiera” se entiende un número genérico que hay que representar con una letra.

Después de la aclaración, los alumnos no tienen ninguna dificultad en interpretar la frase “a un número cualquiera súmale 7” como $a + 7$, por ejemplo. Sin embargo, cuando se trata de representar la frase “el resultado réstaselo a 31” la mayor parte escribe $31 - a + 7$. La profesora tiene que ir grupo por grupo explicando la necesidad de poner un paréntesis porque “no es lo mismo restar el resultado de sumar a y 7 que restar a y sumar 7”.

En el ejercicio 26, donde se institucionaliza la regla de supresión de paréntesis hay que recordar de nuevo la puesta en común del ejercicio 25 realizada en una sesión de clase anterior. Todos los grupos se esfuerzan por responder correctamente, aunque sigue habiendo alumnos que contestan de forma incorrecta. A continuación, inician las simplificaciones planteadas en el ejercicio 27.

La realización de los ejercicios 27, 28 y 29 se desarrolla sin grandes contratiempos en una sesión de trabajo individual, la sesión 13. Se observa que cada vez son más los alumnos que tienen en cuenta el signo que precede a un paréntesis antes de eliminarlo. Además, intentan reducir los términos opuestos e incluso algunos alumnos procuran realizar las operaciones empezando por las más sencillas.

En el ejercicio 28, inicialmente bastantes alumnos no entienden lo que pide el problema y se hace necesaria una explicación por parte de la profesora. Una vez aclarado el sentido del ejercicio, los alumnos se toman muy en serio la decisión de efectuar o deshacer el paréntesis y lo consultan con sus compañeros. En general toman buenas decisiones.

La experiencia con los alumnos que resuelven el ejercicio 29 hace pensar a la profesora y a la observadora que podría ser un buen comienzo para introducir el tratamiento de los paréntesis, dado que los alumnos aceptan con mucha naturalidad que "para restar 99 hay que restar 100 y como hemos restado una unidad de más ahora hay que sumarla".

Estas sesiones se desarrollan sin grandes dificultades, pero con prisas. Realmente, hubiera sido necesaria una sesión más para hacer los ejercicios porque bastantes alumnos no los han terminado, pero la profesora necesita acabar el tema porque el tiempo empieza a apremiarla.

Sesiones 14 a 16

La profesora reparte la parte temática *Cómo multiplicar expresiones algebraicas*. En el ejercicio 30 la mayor parte de los grupos decide dar un valor numérico al lado desconocido. No parecen muy convencidos de que sustituir el dato desconocido por una letra sea un procedimiento aceptable en este contexto. Ellos están acostumbrados a resolver problemas de áreas y siempre se les ha exigido dar un valor numérico, no que sustituyan las letras de las fórmulas de las áreas por otras letras.

Finalmente, aceptan la propuesta de la profesora y ponen una letra. Pero entonces surge otra dificultad: la $\times$ como signo de la multiplicación, lo que además viene reforzado porque en el enunciado del ejercicio aparece la fórmula $A = b \times a$. Aunque la profesora les recuerda que ya no se utiliza el aspa sino el punto, durante un tiempo conviven en la clase las dos formas de representar el producto.

En el segundo apartado del ejercicio 30 se plantean diversas dificultades. La primera sobre la interpretación del dibujo, agravada por el hecho de que el segmento que mide 2 cm resulta de mayor longitud que el que mide 3 cm, y la segunda sobre la escritura y manipulación de la expresión algebraica. Todos los grupos asumen que se trata de multiplicar 3 por $a+2$ pero casi todos lo escriben sin paréntesis, $3a + 2$ y cuando la profesora les insta a que lo escriban con paréntesis se descubre que no se acuerdan de la propiedad distributiva.

En los ejercicios 32 y 33 los grupos se bloquean. Los enunciados les resultan muy complejos y no los entienden y la orden de que hagan un dibujo de los tres rectángulos la interpretan en términos de que el dibujo tiene que ser único y con los rectángulos superpuestos, tal como se han dibujado en los ejercicios anteriores, y son incapaces de hacerlo. Tienen que intervenir la profesora y la observadora y sugerir a los grupos que hagan los dibujos por separado, pero entonces surgen otras dificultades.

Finalmente, la profesora decide dejar los ejercicios 32 y 33 para casa y pasar al ejercicio 34 que resuelven razonablemente, aunque con errores. En el ejercicio 35, incluso alumnos que han efectuado bien las operaciones contestan incorrectamente a alguno de los apartados. La profesora vuelve a recordar que "restar una suma equivale a restar cada uno de los sumandos", etc. Los grupos corrigen las frases sin mayores protestas.

Los ejercicios 36 y 37 están pensados para que los alumnos se encuentren con la necesidad de sacar factor común, pero los grupos que llegan a ellos los resuelven por tanteo. En cuanto al ejercicio 39, la mayor parte de los alumnos tienen que resolverlo como trabajo para casa.

El paso del ámbito aritmético en el que hasta ahora se situaban los ejercicios al ámbito geométrico ha supuesto una regresión. Los alumnos, que ya asumían el trabajo con letras en la aritmética, no se sienten autorizados para utilizar la notación algebraica en la geometría y tratan de obtener resultados numéricos y vuelven a utilizar símbolos (la $\times$ del producto) propios de la aritmética, que ya habían abandonado. Los dibujos que figuran en el material y que se suponía que iban a facilitar el trabajo de los alumnos han resultado más bien una dificultad añadida. Tampoco estaba previsto el desconocimiento de los alumnos sobre la propiedad distributiva.

Se echa en falta una sesión más de clase que hubiera permitido la corrección en la pizarra de los ejercicios y la discusión de los aspectos más conflictivos, pero no puede ser porque a la profesora le urge comenzar el tema siguiente para poder dar todos los contenidos previstos en la programación de la asignatura. Hay que tener en cuenta que los alumnos ya dedicaron al principio de curso varias semanas al tema de los números enteros, por lo que a las horas del taller de matemáticas se suman las del principio de curso y eso está coartando el desarrollo de la programación.

Por las mismas razones, no se experimenta el apartado *Cómo operar los números con signo*. Además se observa que los alumnos empiezan a estar cansados, pues llevan muchas sesiones trabajando en el mismo tema y el entusiasmo inicial ha disminuido, por lo que se hace necesario un cambio de tema. Vista la experiencia, la profesora y la observadora están de acuerdo en que la introducción de los números enteros debe repartirse entre 1° y 2° de ESO.

Resultados del examen

Por necesidades institucionales el examen (anexo IV. 9) se propone antes de iniciar la parte referente a la multiplicación de expresiones algebraicas, por lo que sólo recoge ítems referentes a las cuatro primeras partes temáticas. El análisis de las respuestas de los alumnos (anexo IV.9) nos muestra que los porcentajes de respuestas correctas son altos, salvo en los ítems sobre simplificación de expresiones algebraicas que contienen paréntesis precedidos de un signo $-$ y sobre diferencias entre expresiones algebraicas cuando éstas depende de la variable.

En las respuestas al ítem 1 se observa que sólo 4 de los 31 alumnos examinados dan una respuesta numérica. Los 27 restantes (87%) expresan el resultado mediante una expresión algebraica y 19 de ellos (61%) simbolizan mediante una única expresión algebraica el programa de cálculo aritmético que permite resolver el problema y lo simplifican, mientras que 8 alumnos van obteniendo expresiones algebraicas parciales. Además 24 alumnos (77%) completan la tabla de 1c correctamente, de acuerdo con la expresión obtenida en 1a, de lo que se puede deducir que utilizan para ello dicha expresión.

Las respuestas al ítem 2 muestran que los alumnos están familiarizados con la comparación de expresiones algebraicas y 20 alumnos (64%) son capaces de rellenar correctamente una tabla que incluye en su última fila un cambio de variable.

En las tareas sobre simplificación de expresiones algebraicas se comprueba que los alumnos han asumido la composición de traslaciones, pues en las respuestas al ítem 3a sólo 5 alumnos dan un significado operativo binario entre números naturales a alguno de los signos. También se comprueba que un número apreciable de alumnos ha aceptado el principio de economía del cálculo algebraico, pues 25 de ellos (81%) suprimen los términos opuestos antes de efectuar las operaciones. Sin embargo, ante la necesidad de suprimir un paréntesis precedido de un signo $-$, son menos (51%) los alumnos que modifican los signos de los términos incluidos en el paréntesis.

En cuanto al ítem 4, el 77% de los alumnos contestan correctamente al apartado 4a, mientras que son muy pocos los que resuelven con corrección la inecuación del apartado 4b, como era esperable dada la dificultad de la tarea.

Modificación del material

Una vez acabada la experimentación se revisa el material utilizado y se modifica, dando lugar al material utilizado en el curso 2009-10 (anexo IV.5). Las principales modificaciones son las siguientes:

- Reducción de los apartados del problema inicial y del problema 8.
- Aumento del número de ejercicios de simplificación.
- Unificación y reorganización de las partes temáticas *Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* y *Cómo simplificar expresiones algebraicas con paréntesis*.
- Inclusión de un ejercicio para trabajar la propiedad distributiva.
- Supresión o simplificación de algunos de los ejercicios de la parte temática *Cómo multiplicar expresiones algebraicas*.
- Introducción de una parte de repaso de lo anterior antes de la parte temática *Cómo operar los números con signo*.

IV.12.3. Desarrollo de la experimentación en el curso 2009-10

La experimentación se realiza en un grupo de 1° de ESO denominado 1°B y compuesto por 30 alumnos. Dos de los alumnos son de integración y aunque permanecen en clase con los demás alumnos, la profesora les propone tareas adaptadas a sus capacidades.

Son 17 sesiones de clase impartidas entre el 3 de noviembre y el 17 de diciembre. Se utiliza el material que figura en el anexo IV.5 que les fue entregado a los alumnos en fotocopias a medida que realizaban las tareas. El diario detallado de las sesiones correspondientes al curso 2009-10 se encuentra en el anexo IV.6.

Sesión 1

Se forman dos grupos de cinco alumnos y cuatro grupos de cuatro alumnos. Vista la experiencia del curso pasado, en el problema inicial se han suprimido varios apartados (ver anexo IV.5) con lo que resulta una versión mucho más adaptada al tiempo disponible. Los alumnos tienen la oportunidad de trabajar todos los apartados del problema.

Sin embargo, se observa un fenómeno de "envejecimiento de la situación de enseñanza" (Brousseau, 1986): la profesora, al tener ya una experiencia previa, tiende a dirigir a los alumnos hacia las respuestas que recuerda que dieron los alumnos del curso anterior, con lo que las respuestas de los alumnos de este curso son menos variadas y espontáneas. El simple hecho de empezar la clase diciéndoles que seguramente una parte del problema no la van a saber resolver, hace que los alumnos no pongan en la búsqueda de la solución el mismo entusiasmo que los alumnos del curso anterior. Este fenómeno se seguirá observando en otras sesiones.

Los grupos resuelven el apartado Aa sin dificultad y también el apartado Ab porque la profesora les sugiere enseguida cómo hacerlo. En cuanto al apartado B, no entienden el significado del término "relación". Una vez aclarada esta cuestión, la opinión mayoritaria de los alumnos es que no es posible el empate. Se les sugiere que prueben dando valores, pero no llegan a nada. Tampoco se les deja mucho tiempo para que resuelvan esta parte ni ellos se interesan especialmente en su resolución.

Esta vez la profesora ha tenido cuidado de no utilizar letras como abreviaturas de nombres en sus explicaciones con lo que se han evitado las dificultades observadas el curso anterior como consecuencia del diferente sentido que tienen las letras en aritmética y álgebra.

Se observa también que el discurso sobre la generalidad o particularidad de la solución y la necesidad de introducir otras técnicas de resolución de problemas es aceptado por los alumnos más por respeto a la autoridad de la profesora que por un convencimiento propio.

Sesiones 2 a 4

La resolución de los ejercicios correspondientes la parte temática *Cómo construir expresiones algebraicas* se desarrolla de modo muy parecido al curso anterior. La profesora decide hacer una puesta en común de los ejercicios resueltos por los grupos antes de iniciar el ejercicio 6 (7 del curso anterior).

En esa puesta en común se escriben en la pizarra tanto las expresiones algebraicas obtenidas directamente a partir del enunciado como la expresión simplificada y la profesora pregunta si son iguales. Los alumnos responden que sí dando sus razones y la profesora apostilla: "claro, porque restar 9 y sumar 7 es lo mismo que restar 2", con lo que se explicita la composición de traslaciones. Los alumnos siguen teniendo dificultades en la resolución del ejercicio 6, pero ahora la profesora cuenta con más recursos para apoyar el trabajo de los grupos.

También se pone de manifiesto que los alumnos entienden la equivalencia entre expresiones aunque se hayan utilizado letras distintas siempre que éstas tengan el mismo dominio.

Sesiones 4 a 8

Mediada la sesión 4, a los grupos que habían concluido el ejercicio 6, la profesora les reparte la parte temática *Cómo comparar expresiones algebraicas*, proponiéndoles que sigan con el ejercicio 8.

Los grupos representan sin gran dificultad las cantidades de las que habla dicho ejercicio. En cuanto a las comparaciones, las deducen con bastante rapidez, salvo la que se establece entre el número de cromos de Carmen y de Carlos. No todos los grupos se dan cuenta de que depende del valor de la letra y la profesora tiene que decirles que den valores para averiguar la relación. Deducen entonces que la desigualdad depende del valor de la letra y sólo algunos grupos llegan a dar la solución precisa.

En la sesión 5, al ser una sesión de trabajo individual, la profesora decide empezar la parte temática *Cómo simplificar expresiones algebraicas* y propone a los alumnos que empiecen a resolver el ejercicio 18, dejando para más adelante los ejercicios 14, 15, 16 y 17.

La decisión de la profesora de iniciar la simplificación sistemática de expresiones algebraicas antes de hacer una reflexión que ponga de manifiesto las diferencias entre el cálculo algebraico y el aritmético, contenida en los ejercicios 14 a 17, tiene como consecuencia que los alumnos realicen un trabajo que no les ayuda a asumir esas diferencias. Además, el hecho de que este comienzo del cálculo algebraico se desarrolle en una sesión de clase de trabajo individual priva a muchos alumnos del apoyo del grupo y produce grandes diferencias en cuanto al número de ejercicios realizados.

La misma profesora le comenta a la observadora que no se había dado cuenta del papel que jugaban los ejercicios 14 al 17 en la adquisición de buenas técnicas iniciales de cálculo algebraico hasta que había visto la diferencia de comportamiento de los alumnos de este curso respecto a los del curso anterior.

En la sesión 6, los grupos vuelven a la parte temática *Cómo comparar expresiones algebraicas* y resuelven los ejercicios 9, 10 y 11. Las dificultades que se plantean son del mismo tipo que las aparecidas durante el curso 2008-09. En el transcurso de esta sesión, la manipulación de las letras pasa de ser una rareza a tener en cuenta al final del ejercicio a formar parte del método de resolución de los problemas y de los razonamientos de los alumnos, aun cuando la representación simbólica deja todavía mucho que desear y los errores en el desarrollo del cálculo algebraico son muy frecuentes. Además los alumnos se empiezan a familiarizar con las desigualdades que expresan simbólicamente las comparaciones efectuadas.

En la sesión 7, una vez terminado la parte temática *Cómo comparar expresiones algebraicas*, se vuelve a las tareas de simplificación, comenzando esta vez por el ejercicio 14. La situación de la clase ante este ejercicio es muy diversa. Unos alumnos son capaces de responder correctamente a lo que en él se pregunta, debido a su experiencia de resolución del ejercicio 18 en la clase de trabajo individual, mientras que otros hacen las operaciones cometiendo los mismos errores que se indican en el enunciado y dicen que las operaciones están bien hechas.

Las frases del ejercicio 15 se completan sin dificultad, pero no sucede lo mismo en el ejercicio 16, donde aparece la tendencia, ya observada en el curso anterior, a escribir, por ejemplo, "sumar primero 5 y restar después 2 es lo mismo que sumar primero 2 y restar después 5".

Al final de la sesión, la profesora decide hacer una intervención general para explicar la regla de jerarquía de las operaciones, debido a que varios alumnos habían escrito $16 - 3a = 13a$. Para ello, calcula el valor de la expresión cuando $a = 2$ de las dos maneras: efectuando primero el producto o efectuando primero la resta. Después continúa diciendo que, como los resultados que se obtienen son distintos, es necesario llegar a un acuerdo sobre qué operación se hace primero y que la decisión de los matemáticos es que primero se hacen los productos y después las sumas y restas.

En la sesión 8, los alumnos continuan realizando el ejercicio 17. Estamos de nuevo en una sesión de trabajo individual y la actitud de los alumnos ante el ejercicio es muy variada. Unos leen el enunciado completo, hacen preguntas sobre su significado y, una vez aclaradas sus dudas, tratan de seguir las instrucciones, aun cuando suelen cometer errores. Mientras tanto, otros alumnos no leen o no tienen en cuenta las instrucciones que se les dan y proceden a hacer las operaciones según sus propios criterios.

Antes de continuar con los siguientes ejercicios, la profesora da una explicación en la pizarra, analizando con los alumnos el mejor modo de simplificar la expresión del ejercicio 17. Después corrige algunos ejercicios de simplificación realizados por los alumnos en la sesión 5 y les dice que continúen con el ejercicio de simplificación que estuvieran haciendo en dicha sesión.

El resultado es de una gran disparidad: mientras unos alumnos todavía están resolviendo apartados del ejercicio 18, otros están en el 19, incluso acabándolo, y algunos han seguido haciendo los ejercicios en casa y los tienen todos acabados. La profesora sale de clase un momento a buscar fotocopias de la parte temática *Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* para que esos alumnos puedan seguir trabajando.

En esta sesión se han observado avances significativos en cuanto a la actitud de los alumnos ante el cálculo algebraico. Ya empiezan a asumir que no se trata de efectuar sin más las operaciones en el orden en el que aparecen en la expresión algebraica, sino que hay que reflexionar sobre la manera más económica de efectuar ese cálculo, aun cuando la falta de técnicas de cálculo mental hace que en bastantes ocasiones la reflexión resulte baldía.

También empieza a observarse una mayor receptividad a interpretar las operaciones aditivas como composición de traslaciones, en lugar de entenderlas como operaciones binarias entre números sin determinación. Sin embargo, se pone de manifiesto la tendencia, ya observada el curso anterior, de escribir en vertical las expresiones algebraicas intermedias del cálculo sin ligarlas con el signo =.

Un aspecto negativo de la sesión es que el diferente ritmo de trabajo individual de los alumnos ha conducido a que alumnos de un mismo grupo se encuentren trabajando en ejercicios distintos, lo que va a repercutir durante unos días en el buen funcionamiento del trabajo en grupo.

Sesiones 9 a 13

La primera parte de la sesión 9 se dedica a la corrección de ejercicios. Después se reparte la parte temática *Cómo encontrar la diferencia entre expresiones algebraicas* a los alumnos que no la tienen y los grupos siguen trabajando.

El funcionamiento de algunos grupos se hace difícil porque los alumnos están resolviendo ejercicios distintos y además la tarea sistemática de simplificar expresiones en la que todavía se encuentran inmersos bastantes alumnos se presta poco al trabajo en grupo. A esto se añade que el material que se acaba de repartir no entra para el examen que se va a celebrar en la sesión siguiente, por lo que bastantes alumnos que tendrían que empezarlo se dedican a repasar los ejercicios anteriores y a preguntar dudas a la profesora, lo que casi transforma la sesión de trabajo en grupo en una sesión de trabajo individual.

Los grupos más avanzados siguen resolviendo los ejercicios 20, 21. 22 y 23. Las dificultades mayores se plantean en el ejercicio 20 pues, una vez que averiguan en qué consiste la técnica de sumar 99 a la que se refiere el ejercicio, la utilizan de forma incorrecta en otros casos. Por ejemplo, escriben $157 - 99 = 157 - 100 - 1$ ó $47 + 98 = 47 + 100 - 1$. Una vez superada esta dificultad, los alumnos realizan sin demasiados inconvenientes los ejercicios siguientes.

El nuevo enfoque que se le ha dado al material en el que se trabajan las diferencias entre expresiones algebraicas produce un cambio importante en la dinámica de la clase respecto al curso anterior. Aunque los alumnos siguen suprimiendo los paréntesis precedidos de un signo $-$ sin modificar los signos de los términos situados en su interior, la profesora dispone de una herramienta: la familiarización de los alumnos con la técnica presentada en el ejercicio 20, que le permite dar explicaciones más breves, pero más comprensibles que las del curso anterior. Esa mayor brevedad y eficacia en la argumentación facilita la corrección del error por parte de los alumnos y evita que el funcionamiento de la clase se bloquee.

Las sesiones 10 y 11 se dedican a la realización de un examen y a su corrección. En la sesión 12, los grupos que afrontan el ejercicio 24 pasan por las mismas dificultades que los del curso anterior. Para expresar la diferencia entre el número de canicas de Javier y de Marcos tratan de encontrar en el enunciado algún dato que les permita dar a esa diferencia un valor numérico. Como no lo encuentran, buscan un razonamiento que justifique la asignación de un valor numérico o le dicen a la profesora que no pueden encontrar esa diferencia, que depende de los valores de a y b. La idea de que la respuesta es simplemente $a - b$ es totalmente extraña a los alumnos porque hasta ahora siempre que les han pedido que hagan una operación, han podido hacerla, por lo menos en parte. Una vez que la diferencia entre Javier y Marcos queda establecida, los grupos rellenan la última casilla, pero generalmente sin poner el paréntesis y sin terminar de simplificar la expresión.

En el cálculo de las diferencias del ejercicio 25 se producen frecuentes errores porque no ponen entre paréntesis las expresiones algebraicas cuya diferencia se busca. En general, los alumnos siguen sin aceptar el uso de paréntesis para indicar operaciones entre términos que a su vez son operaciones y el cambio de signos en la supresión de paréntesis precedidos de un signo $-$, lo que produce constantes errores. Sin embargo, se observa que poco a poco van siendo más receptivos a la corrección de dichos errores y algunos alumnos empiezan a utilizar paréntesis con cierta propiedad.

En la sesión 13 las diferencias entre los grupos son muy grandes. Hay grupos que todavía están resolviendo el ejercicio 24, mientras a los grupos más adelantados hay que repartirles la parte temática *Cómo multiplicar expresiones algebraicas*.

En el ejercicio 26 se repiten las dificultades para simbolizar algebraicamente un programa de cálculo observadas el curso anterior, mientras que el ejercicio 27 pone de manifiesto una gran diferencia en el comportamiento de los alumnos. Unos alumnos escriben y realizan las operaciones con bastante corrección, otros calculan bien, pero su escritura es más confusa y, por último, algunos alumnos, los menos, muestran con su manera de hacer que han entendido muy poco, tanto de las características del cálculo algebraico, como de sus reglas de escritura.

En general, se observa un avance importante en la corrección de los cálculos. Prácticamente todos los alumnos interpretan las sumas y restas en términos de composición de traslaciones y cada vez son más los alumnos que simplifican correctamente las expresiones con paréntesis. En cambio, se constata que la simbolización algebraica de los programas de cálculo aritmético les resulta muy difícil.

Sesiones 14 a 17

Se reparte la parte temática *Cómo multiplicar expresiones algebraicas* a los grupos que no la tienen. De nuevo se produce el fenómeno reseñado en el curso anterior: búsqueda de una solución numérica, pues el uso de las letras, aceptado ya para determinados problemas aritméticos en los que faltan datos, no se generaliza sin más al caso de un problema geométrico. La profesora tiene que insistir para que expresen el área utilizando letras.

También se producen dificultades con la simbolización del producto, aunque menos que el curso anterior porque en la fórmula del área que aparece en el enunciado del ejercicio 29 ya se ha suprimido el símbolo que indica el producto. A algunos alumnos les extraña esta manera de expresar el área y la profesora les dice que $ab = a \times b$, recordándoles que en álgebra el símbolo del producto no se escribe.

En la versión de este curso se deja que sean los propios alumnos los que hagan los dibujos, lo que evita también las malas interpretaciones que hicieron los alumnos del curso pasado de los dibujos que aparecían en el enunciado. También se propone un ejercicio para que los alumnos recuerden la propiedad distributiva que muchos de ellos han olvidado.

En el ejercicio 31 los alumnos hacen los dibujos de los dos rectángulos por separado y hay que hacer notar que bastantes de ellos interpretan la orden de dibujar un rectángulo en el sentido estricto de dibujar un rectángulo con las medidas indicadas en el enunciado, por lo que preguntan qué medida le tienen que dar al lado desconocido. Es necesario decirles que el dibujo del rectángulo no tiene que tener las medidas exactas, pues sólo se utiliza como soporte del razonamiento geométrico, no como medio para averiguar las soluciones que nos piden haciendo mediciones sobre él.

De nuevo, a semejanza de lo ocurrido el curso anterior, el paso al ámbito geométrico produce una regresión en el tratamiento algebraico, ya asumido en el ámbito aritmético. Los alumnos tienen que familiarizarse otra vez con el uso de las letras y otros símbolos propios del álgebra en ciertos problemas geométricos que con suficientes datos se modelizan aritméticamente. Pero, en cualquier caso, se observa que los bloqueos que se produjeron el curso anterior al resolver algunos ejercicicos de esta parte ya no se repiten.

La sesión 15 se dedica íntegramente a la corrección de ejercicios. Esta corrección ininterrumpida durante toda la hora resulta excesiva, a pesar de la buena voluntad de los alumnos por participar en ella. Hubiera sido más efectiva una corrección gradual a lo largo de diferentes sesiones, pero nos encontramos con una fuerte restricción: el diferente ritmo de trabajo de los grupos hace que sea difícil encontrar el momento apropiado para corregir un ejercicio, bien porque no todos los grupos han llegado a él, bien porque algunos grupos ya lo han sobrepasado hace tiempo y están interesados en resolver otros ejercicios.

En las sesiones 16 y 17 se prosigue con la realización de los ejercicios de la última parte del material entregado a los alumnos. Al resolver el ejercicio 33, los grupos se enfrentan por primera vez al producto de un número entero por una expresión algebraica. La profesora les sugiere una regla: primero se aplica la propiedad distributiva, manteniendo los paréntesis, y después se suprimen los paréntesis. Los grupos tratan de seguir la regla con mejor o peor fortuna. Su tendencia a escribir los menos pasos intermedios posibles hace que bastantes alumnos se equivoquen en los cálculos. La profesora les anima a repetir los cálculos escribiendo todos los pasos intermedios.

La diferencia en el ritmo de trabajo de los alumnos ha vuelto a hacer que unos grupos estén bastante más adelantados que otros, lo que provoca cierto desaliento en los grupos más retrasados que no contribuye a fomentar su interés por la realización de los ejercicios. Suelen ser los ejercicios de cálculo los que dan lugar a estas diferencias, pues los alumnos que calculan con corrección los hacen con rapidez, mientras que los que siguen teniendo dificultades en ellos tienen que corregir una y otra vez y eso retrasa su trabajo y les desespera.

De nuevo se echa en falta el haber dedicado alguna sesión más a esta parte final, pues no todos los grupos han llegado a terminar los últimos ejercicios.

Modificación del material

Una vez acabada la experimentación se decide intercambiar el orden de las partes temáticas *Cómo comparar expresiones algebraicas* y *Cómo simplificar expresiones algebraicas* por considerar que eso permite un mejor reparto de la tarea a realizar en grupo e individualmente. La discusión en grupo de los ejercicios que sientan las bases de la simplificación, realizada en las primeras sesiones, permite dedicar las sesiones de trabajo individual a la ejercitación de esta técnica. Esta modificación da lugar al material utilizado actualmente (anexo IV.1).

IV.13. Desarrollo de la experimentación en 2° de ESO

IV.13.1. Contextualización de la experimentación

La experimentación se lleva a cabo en tres grupos de 2° de ESO durante el curso 2009-10. Los grupos están formados por alumnos motivados, participativos, con un comportamiento correcto y acostumbrados al trabajo en equipo. Son grupos poco numerosos, alrededor de 20 alumnos, debido a que en el colegio hay dos grupos de 2° de ESO que en algunas asignaturas como la de Matemáticas se desdoblan en tres. Todos ellos han participado en la experimentación de la secuencia en 1° de ESO durante el curso 2008-09.

El IES Costa y Llobera de Barcelona en el que se realiza la experimentación es un centro público que atiende a un alumnado procedente de familias con un nivel cultural y económico medio, medio-alto, y mantiene un equipo docente cohesionado gracias a su calificación como centro experimental. El idioma vehicular es el catalán.

La experimentación se realiza en el horario de clases de la asignatura de Matemáticas: tres horas a la semana, y las clases las imparte la profesora de la asignatura.

Aunque se utiliza el material experimental en los tres grupos de 2° de ESO, sólo se observa durante todo el periodo que dura la experimentación uno de ellos, el denominado 2° R, compuesto por 22 alumnos. Normalmente hay una sola observadora en la sesión de clase que registra los hechos sucedidos mediante apuntes personales, fotos y fotocopia ocasional del trabajo de los alumnos.

Son 10 sesiones de clase impartidas entre el 26 de octubre y el 24 de noviembre. Al finalizar este periodo se dedicaron dos sesiones más a realizar el examen y efectuar su corrección. Se utiliza el material que figura en el anexo IV.7 que les fue entregado a los alumnos en fotocopias a medida que realizaban las tareas. El diario detallado de las sesiones se encuentra en el anexo IV.8.

IV.13.2. Desarrollo de la experimentación.

Sesiones 1 a 3

En la sesión 1 faltan 9 de los 22 alumnos por enfermedad. La profesora reparte la parte temática *De nuevo con el álgebra* y les recuerda el taller del curso pasado, diciéndoles que van a trabajar de nuevo el álgebra y que estos primeros ejercicios son de repaso y deben hacerlos individualmente.

Los alumnos empiezan la tarea y van realizando los ejercicios sin grandes dificultades y con ocasionales preguntas a la profesora. En el ejercicio 1, todos los alumnos eligen un letra, aunque muchos de ellos no indican su significado o dicen que la letra representa "cartulinas", y escriben la expresión algebraica completa. A la hora de simplificarla, el comportamiento de los alumnos es bastante variado. Dentro de los que operan correctamente, están los que lo hacen de izquierda a derecha o bien sumando los positivos y negativos por separado, o bien los que operan términos que no son contiguos, buscando una economía de cálculo.

También se encuentran alumnos, los menos, que siguen dando ocasionalmente un sentido aritmético a los signos $+$ y $-$, pero ante la llamada de atención de la profesora corrigen rápidamente el error.

Los demás apartados del ejercicio 1 y los ejercicios 2 y 3 se resuelven sin ninguna dificultad. En el ejercicio 3 todos los alumnos simplifican las expresiones sin mayores incidencias. En el apartado E6) prácticamente todos los alumnos neutralizan los términos $+237$ y -237 y bastantes hacen lo mismo con los términos $+15$, -14 y -1. Al hacer la tabla se dan cuenta de que hay varios errores y avisan a la profesora. También está equivocado el enunciado del ejercicio 4 y la profesora tiene que corregirlo. Una vez hecha la corrección, lo realizan sin inconvenientes.

El transcurso de la sesión de clase sorprende gratamente a la profesora y a la observadora. Los alumnos se acuerdan de la experiencia del curso pasado, reciben con alegría su continuación y realizan sin grandes dificultades los ejercicios planteados. Se observa que mayoritariamente han asumido el uso de las letras, la interpretación de las operaciones aditivas como composición de traslaciones y la eliminación de los términos opuestos en la simplificación de expresiones algebraicas, aunque sigue la tendencia a escribir los distintos pasos de la simplificación uno debajo de otro y sin unirlos con el signo igual.

Como aspecto negativo hay que reseñar los errores en los enunciados de los ejercicios 3 y 4 que conllevan la aparición de cantidades negativas aisladas antes de tiempo y una pregunta ociosa sobre algo que ya se dice en el enunciado del ejercicio.

A la sesión 2 se incorporan los alumnos que habían faltado a la sesión 1 y se produce una gran disparidad en cuanto a la tarea a realizar: mientras los alumnos que no asistieron a la sesión anterior empiezan a hacer el ejercicio 1, otros alumnos siguen haciendo ejercicios del 5 en adelante y alguno ya trae hechos todos los ejercicios de casa.

El ejercicio 5 no presenta mayores dificultades y en el ejercicio 6 escriben las desigualdades con corrección, asumiendo que, a igualdad de minuendos, si los sustraendos son menores, los resultados de las restas son mayores. En el cálculo de las diferencias hay que decir que bastantes alumnos se acuerdan de poner los paréntesis y de suprimirlos, sustituyendo los términos por sus opuestos en el caso de paréntesis que afectan al segundo término de la diferencia. Los errores de este tipo se siguen produciendo, pero con mucha menor frecuencia.

Al expresar las diferencias, los alumnos tienden a elegir el primer miembro de la desigualdad como minuendo y el segundo como sustraendo, lo que da lugar a diferencias negativas. Ante ese resultado, unos alumnos preguntan a la profesora y ésta les explica que es correcto y que el signo $-$ indica precisamente que el minuendo es menor que el sustraendo. Otros alumnos optan por positivizar las soluciones negativas. En general, se observa que los alumnos no se sienten cómodos ante las soluciones negativas.

La aparición de las áreas en el ejercicio 8 supone de nuevo una regresión respecto al tratamiento algebraico de los problemas. A esto se añade el olvido de la propiedad distributiva, lo que obliga a recordarla y justificarla una vez más. Los alumnos no parecen recordar que este tipo de ejercicios ya se resolvieron el curso anterior. Se nota que la parte correspondiente al producto de expresiones algebraicas se desarrolló al final, más deprisa que las otras y con los alumnos cansados.

En la sesión 3 se deja un tiempo para que los alumnos terminen los ejercicios y después se corrigen en la pizarra. En el ejercicio 9, la complejidad de la simplificación hace que pocos alumnos lleguen al resultado final correcto. El que no se equivoca al aplicar la propiedad distributiva, se equivoca al quitar paréntesis o al hacer las operaciones finales de suma o resta de términos semejantes.

La complejidad de los cálculos hace que los errores debidos a falta de concentración en la tarea sean muy frecuentes, pero ya no son tan sistemáticos, son más erráticos y se corrigen con rápidez. Parecen más bien debidos a falta de pericia en la ejecución de las técnicas que a la existencia de concepciones erróneas sobre el cálculo algebraico.

La corrección en la pizarra ayuda a los alumnos a comprender la justificación de las técnicas y les da pautas para hacer los cálculos de la manera más sencilla posible.

Sesiones 4 y 5

Los alumnos se organizan en grupos (cuatro grupos de cuatro alumnos y dos grupos de tres alumnos) mientras la profesora reparte las fotocopias de la parte temática *Cómo operar los números con signo*.

En su primer intento de resolución del ejercicio 10 los grupos tratan de responder a la pregunta de cuántos cromos le quedan a Alberto después de jugar las 4 partidas, así que indican con una letra el número de cromos que tenía Alberto al principio. Pero a continuación se encuentran con que tampoco se sabe cuánto gana o pierde en una de las partidas, lo que les desconcierta. Algunos grupos se dan cuenta de que hay dos variables y se necesitan dos letras, mientras otros deciden usar la misma letra para las dos variables u olvidarse de una de ellas y la profesora tiene que intervenir, razonando con ellos la necesidad de utilizar letras distintas.

Una vez que los grupos han respondido correctamente a la pregunta ¿cuántos cromos tiene al final Alberto?, la profesora les recuerda que esa no es la pregunta que se hace en el apartado a) del ejercicio, lo que les obliga a replantearse el problema, hasta que dan con la solución de restar la cantidad inicial de cromos a la expresión obtenida.

En el apartado b) los alumnos no tienen inconveniente en asumir la notación de un número precedido de un signo para indicar ganancia o pérdida y rellenan la tabla con relativa facilidad, aunque en general no hacen uso de la fórmula obtenida.

En la resolución del ejercicio 11 se plantean bastantes dificultades:

- A pesar de que la pregunta del apartado a) se sigue refiriendo a los cromos ganados o perdidos, los alumnos se empeñan en contestar cuántos cromos tienen Ana y Alberto al final.
- Utilizan una misma letra para indicar el número de cromos inicial tanto de Alberto como de Ana, lo que sin embargo les permite obtener la diferencia correcta.
- Algunos grupos utilizan también una misma letra para indicar las ganancias o pérdidas de Ana y Alberto. En ese caso, obtienen una diferencia numérica.

- Algunos grupos distinguen entre pérdidas y ganancias, lo que les lleva a obtener varias fórmulas que después no saben cómo gestionar.
- Algún valor de la tabla contradice el enunciado y los alumnos lo descubren y hay que corregirlo.

Finalmente, con el apoyo de la profesora y después de bastante tiempo de reflexión y correcciones, todos los grupos llegan a expresar correctamente la diferencia y empiezan a rellenar la tabla del apartado b). Pero entonces aparecen nuevas dificultades. En primer lugar, la tendencia de los alumnos es la de sustituir las letras por los números sin el signo que es lo que han hecho hasta ahora. La profesora tiene que advertirles que es el signo el que nos dice si es una pérdida o una ganancia y no se puede prescindir de él, pero esto muchos alumnos no lo entienden.

Además, escriben dos signos seguidos ($6 + +3 - -1$, por ejemplo) y es necesario advertirles que en ese caso tienen que poner un paréntesis. Pero cuando finalmente escriben la expresión con paréntesis ($6 + (+3) - (-1)$, por ejemplo) no saben hacer esa operación y cuando la profesora les dice que estos paréntesis se pueden eliminar siguiendo las reglas que ya conocen, el argumento no parece convencerlos.

La profesora, después de consultar con la observadora, ofrece a los alumnos el argumento de que $6 + (+3) - (-1) = 6 + (0 + 3) - (0 - 1)$. Tras esta explicación los grupos tardan bastante en rellenar la tabla, cometiendo con frecuencia errores que tienen que rectificar. Los problemas se agravan cuando tienen que rellenar las casillas correspondientes a las cuatro últimas filas, pues se encuentran con operaciones inversas.

Los redactores del material no han valorado suficientemente el enorme salto que supone pasar del trabajo con sumandos y sustraendos al trabajo con números con signo aislados y de la notación algebraica incompleta a la completa. El ejercicio 11 es de una dificultad excesiva, pues los alumnos no sólo tienen que enfrentarse por vez primera a la notación completa, sino que además se encuentran con ecuaciones expresadas en dicha notación, lo que obliga a la profesora a dedicar mucho tiempo en cada grupo a resolver dudas y hacer sugerencias de resolución, con el consiguiente bloqueo del funcionamiento de la clase.

La profesora y la observadora coinciden en que antes de continuar con el trabajo de los grupos se impone una explicación en la pizarra de los ejercicios 10 y 11 y estudian en qué términos debería hacerse.

En la sesión 5 la profesora corrige en la pizarra los ejercicios del día anterior. En el ejercicio 10 comenta que como en la segunda partida no se sabe si gana o pierde, habría que poner dos fórmulas, una para el supuesto de que sea una ganancia y otra para el supuesto de una pérdida. Con la ayuda de los alumnos escribe las dos fórmulas y da valores. Después pregunta si se podría escribir una sóla fórmula y varios alumnos contestan que sí dando una explicación correcta. La profesora confirma que si se sustituyen las letras no solo por los números, sino por los números precedidos por el signo correspondiente para indicar ganancias o pérdidas, basta con una fórmula, la que corresponde a suponer que la letra está sumando, porque "al sustituir la letra por un número con signo $-$, ella misma se cambia de signo".

La explicación de la profesora resulta eficaz. La mayor parte de los alumnos se da por satisfecho con las razones que expone y aceptan sustituir las letras por los números con signo, pero siguen teniendo muchas dificultades con la notación completa y bastantes de ellos no acaban de entender el razonamiento que permite pasar, por ejemplo, de $-(-3)$ a $+3$.

Sesiones 6 y 7

En la sesión 6 vuelven a faltar seis alumnos por enfermedad. Después de las explicaciones dadas en la sesión anterior, la realización de los ejercicios 12 y 13 y 14 se produce con normalidad. En el ejercicio 13 todos los alumnos pasan de las notaciones completas a las incompletas, utilizando, a partir de ahí, procedimientos muy variados con cierta tendencia a la eliminación de los términos opuestos y a la realización de las operaciones indicadas en los paréntesis, aunque algunos utilizan de continuo la propiedad distributiva, sin discriminar su pertinencia en el caso de que las operaciones sean efectuables.

En los primeros apartados del ejercicio 15 los alumnos dibujan el termómetro de diferentes maneras: en vertical o en horizontal, con o sin números negativos, con los números negativos a la derecha o a la izquierda del 0, pero no tienen mayores dificultades en encontrar las diferencias de temperatura, normalmente en valor absoluto. Se pone de manifiesto que algunos alumnos no conocen el termómetro tradicional.

En la sesión 7 el trabajo de los grupos se ve perjudicado por la reincorporación a la clase de los alumnos que habían estado enfermos en la sesión anterior. Al desfase existente entre grupos se añade ahora el desfase entre alumnos dentro de un mismo grupo, lo que provoca de facto reorganizaciones de los grupos en subgrupos más pequeños.

En el apartado b) del ejercicio 15 los alumnos no entienden lo que pide el enunciado. La profesora se ve obligada a advertir en cada grupo que una fórmula es una expresión que contiene letras, pero eso no ayuda a los alumnos a encontrar la respuesta. Al parecer, el problema lo crea la palabra 'fórmula' porque cuando finalmente les dice que escriban la diferencia, bastantes alumnos escriben $T-t$. Este apartado vuelve a poner de manifiesto la necesidad de sustituir las letras con números con signo para poder unificar las fórmulas, hecho al que los alumnos comienzan a mostrarse receptivos.

En el ejercicio 16, calculan las diferencias y completan las desigualdades sin dificultad, pero algunos alumnos no relacionan los dos hechos y, cuando se trata del orden entre dos números negativos, dicen que es mayor el de mayor valor absoluto. Este ejercicio consolida la relación existente entre una desigualdad y la correspondiente diferencia de sus miembros y proporciona a los alumnos un buen instrumento para decidir sobre el orden de los números enteros en los casos dudosos.

Cuando acaban el ejercicio 16, los alumnos preguntan qué tienen que hacer con los párrafos que aparecen a continuación. La profesora les contesta que deben leerlos con cuidado para entender bien lo que allí se dice. Algunos lo hacen pero los más se los saltan y pasan al ejercicio siguiente. El texto donde se institucionaliza el número entero no juegan ningún papel hasta que la profesora da una explicación general porque los alumnos no están acostumbrados a leer textos tan largos si no se plantea una tarea relacionada con ellos.

En el ejercicio 17 la única incidencia que se produce es que algunos alumnos ordenan los números negativos a partir de sus valores absolutos. En esos casos, la profesora les dice que calculen las diferencias para ver qué número es mayor.

Sesiones 8 a 10

La sesión 8 es una clase de corrección de ejercicios en la pizarra que a los alumnos se les hace muy larga. Cuando finaliza la corrección los alumnos prosiguen con el ejercicio 18 que continúan en la sesión 9. La contestación a los apartados a) y b) se ve facilitada por la utilización de la técnica de calcular la diferencia y estudiar si es mayor o menor que cero, siempre que el alumno no se equivoque en los cálculos. Una vez que se ha respondido a los apartados a) y b), los alumnos están en condiciones de afrontar el apartado c). Unos alumnos contestan correctamente, mientras que otros cometen alguna que otra equivocación. El apartado c5) en general no saben contestarlo. Algún alumno es capaz de dar alguna solución parcial. La profesora, dada la dificultad de la respuesta, no corrige los errores de los alumnos

El ejercicio 18 resulta muy complejo, pero es de una gran riqueza conceptual. Los grupos tardan alrededor de una hora en realizarlo, tiempo que necesitan para darse cuenta de que al pasar de positivos a negativos algunos tipos de desigualdades cambian, mientras otros permanecen. Empieza así a plantearse el hecho de que la asunción de nuevos números supone la modificación de las propiedades que tradicionalmente se les adjudica.

El enunciado del ejercicio 19 lleva a confusión. Los alumnos no entienden a qué se refiere el enunciado con la expresión tipo de números y se dedican a dar valores o tratan de referir este ejercicio al anterior por lo que debería ser modificado.

En el ejercicio 20 aparecen nuevas dificultades, pues los alumnos no saben cómo hacer las multiplicaciones. La profesora recurre a relacionar estos productos con los obtenidos en las expresiones algebraicas: $(-3)(-5) = -3(0-5) = -(0-15) = -0+15 = +15$, pero no todos los alumnos aceptan el razonamiento, no entienden por qué $(-3)(-5) = -3(-5)$ y está el problema añadido de que muchos alumnos creen que $3 \cdot 0 = 3$. Finalmente, los grupos que llegan a resolver los ejercicios 21, 22 y 23, lo hacen correctamente porque para entonces la profesora ya ha impuesto su criterio de que menos por menos da más.

De nuevo los redactores del material han subestimado el salto que supone pasar de la multiplicación de expresiones algebraicas a la multiplicación de números enteros. En la multiplicación de enteros el signo tiene un sentido predicativo, mientras que en la manipulación de expresiones algebraicas los signos se han trabajado con un sentido operativo: indican que los términos son sumandos o sustraendos o bien que un término es opuesto de otro. De alguna manera, esta diferencia de sentido es percibida por los alumnos y hace que se nieguen a aceptar fácilmente la analogía entre una y otra situación.

Por otro lado, la larga resolución del ejercicio 18 retrasa la llegada a los ejercicios referentes al producto de enteros que, como consecuencia, se resuelven de una manera rápida y marginal. En cuanto al ejercicio 24, su lugar está en el material de repaso, pues se trata de comparaciones multiplicativas entre expresiones algebraicas que ya fueron trabajadas en el material de 1° de ESO.

La sesión 10 es una sesión de corrección de ejercicios y es también donde se institucionaliza el número entero. Resulta de nuevo demasiado larga, pero ayuda a los alumnos a asumir los números enteros y la variación que sufren las relaciones entre expresiones algebraicas cuando las letras pueden tomar valores negativos y positivos. Sin embargo, el hecho de que la corrección de los ejercicios sobre el producto de enteros se haga al final, con los alumnos y la profesora cansados, sigue incidiendo en el poco tiempo que se le ha dedicado y pone en duda su asimilación.

Resultados del examen

El examen (anexo IV.10) se realiza al finalizar el periodo de la experimentación y el análisis detallado de las respuestas de los alumnos (anexo IV.10) nos muestra que los porcentajes de respuestas correctas son en general más bajos que los obtenidos en el examen de 1° de ESO.

En el ítem 1 sobre simplificación de expresiones algebraicas, se observa que la situación sigue siendo muy similar a la del curso anterior. Sólamente 3 alumnos de los 21 examinados dan un significado operativo binario entre números naturales a alguno de los signos; los demás entienden las operaciones en términos de composición de traslaciones. También siguen teniendo en cuenta el principio de economía del cálculo algebraico, pues 16 de ellos (76%) suprimen los términos opuestos antes de efectuar las operaciones. Son menos (62%) los que suman los términos sin separar los positivos de los negativos, pero sigue siendo un porcentaje apreciable. Sin embargo, ante la necesidad de suprimir un paréntesis precedido de un signo $-$, el porcentaje de alumnos que modifican los signos de los términos incluidos en el paréntesis es menor (51%).

En cuanto a los ítems 2 y 3, referentes al uso de fórmulas cuando las variables pueden tomar valores en $\mathbb{Z}$, 14 alumnos (66%) utilizan la fórmula del ítem 2 para contestar a las preguntas que se les plantean, pero son menos (43%) los que no cometen ninguna equivocación al calcular su valor numérico. En la resolución del ítem 3 los porcentajes son menores: 10 alumnos (48%) proponen una fórmula unificada, pero sólo 6 (28%) la utilizan sin errores.

En la resolución del ítem 4 que supone trabajar con la notación completa, se observan diferencias apreciables entre los resultados del ítem 4a que presenta sumas y restas de números enteros y los de los demás ítems que se refieren a productos y cocientes entre números enteros. En el primer ítem, 17 alumnos (81%) pasan correctamente de la notación completa a la incompleta, procediendo después a efectuar las operaciones en esta última notación. Hay que reseñar que 12 de ellos (57%) suprimen los términos opuestos antes de proceder a efectuar las operaciones. Sin embargo, en los productos y cocientes se constata que bastantes alumnos no están familiarizados con la regla de los signos, sobre todo en el caso del cociente de dos números negativos. Sólo 6 alumnos (28%) contestan correctamente a los 4 ítems.

Los ítems 5 y 6 se refieren al orden en los números enteros. El ítem 5 lo contestan correctamente 18 alumnos (86%) y el 6a lo responden bien todos los alumnos. En cuanto a los ítems 6b y 6c sólo los resuelven correctamente 6 alumnos (28%) debido a su dificultad.

Modificación del material

Una vez acabada la experimentación se revisa el material utilizado y se modifican los ejercicios 11 y 19, dando lugar al material utilizado actualmente (anexo IV.2).

IV.14. Conclusiones de la experimentación

En primer lugar, hay que decir que la experimentación nos ha permitido comprobar que la implantación en un aula de ESO de una génesis del número entero en un entorno algebraico es factible. Las clases se desarrollaron con normalidad y aunque hubo momentos comprometidos se pudieron solventar con rapidez. Ahora bien, esa misma experimentación ha puesto de manifiesto que esa implantación requiere contar con determinadas condiciones que la favorezcan y evitar otras que la dificulten.

Entendemos que algunas de las condiciones que la han favorecido son:

- El tipo de alumnado, razonablemente interesado en sus estudios y en responder a las expectativas de sus profesores y de sus familias.
- El tipo de institución educativa, con un equipo docente muy cohesionado, promotor del trabajo autónomo de alumno y del trabajo en equipo.
- La profesora que desarrolló la experimentación, muy receptiva a las explicaciones sobre la epistemologia del número negativo, sobre la diferente naturaleza de la aritmética y del álgebra y sobre las razones últimas de la propuesta didáctica.

Pero no todos los alumnos, centros educativos y profesores responden a estas características por lo que previsiblemente en otros entornos educativos esta propuesta didáctica se encontrará con dificultades que en esta experimentación no se han observado, aunque sí intuido. De hecho, a pesar de que la profesora fue instruida acerca de la propuesta y de las razones epistemológicas y didácticas que habían llevado a ella, se observaron fenómenos como el del envejecimiento de las situaciones didácticas o el desconocimiento de las diferencias entre el modo de hacer aritmético y algebraico que en algún momento supusieron modificaciones del saber enseñado.

En cuanto a las condiciones que han dificultado su desarrollo, podemos comentar las siguientes:

- La gestión del tiempo, que obliga a acortar los procesos de aprendizaje para poder cubrir todos los objetivos didácticos que propone el currículo y a realizar exámenes en función de las evaluaciones oficiales y no del propio proceso de aprendizaje. Esto ha impedido a veces la devolución de la situación, pues la profesora para ganar tiempo les decía a los grupos lo que tenían que hacer, y ha reducido seriamente los momentos de puesta en común del trabajo en grupo y de institucionalización.

- La coordinación de los periodos de trabajo en equipo y de puesta en común e institucionalización, muy complicada debido al diferente ritmo de trabajo de los grupos. Si se espera a que todos los grupos hagan la tarea, para cuando se hace la puesta en común hay grupos que ya están haciendo otras tareas y su interés está centrado en ellas y, si no se espera a que todos los grupos acaben la tarea que se va a poner en común, a determinados grupos no se les da la oportunidad de hacerla por sí mismos.

- La organización del saber que impone el currículo oficial. La génesis del número negativo en el seno de un álgebra que no debe ser entendida como una aritmética generalizada, sino como un instrumento de modelización algebraico-funcional, modifica sustancialmente la organización del saber a enseñar que propugna el currículo oficial para cada curso. Asumir esta propuesta didáctica supone enseñar objetos matemáticos que no forman parte del curso en el que se desarrolla la propuesta y dejar de enseñar otros que sí lo son.

- La falta de técnicas de cálculo mental en los alumnos, lo que supone una rémora a la hora de desarrollar el cálculo algebraico.

Respecto a los resultados obtenidos como consecuencia de la puesta en práctica de la propuesta, consideramos que la ruptura epistemológica que se pretende, poniendo de manifiesto las diferencias entre la aritmética y el álgebra, se ha cumplido. Los alumnos se ven enfrentados desde el primer momento a un mundo nuevo en el que una parte de las técnicas y razonamientos aritméticos no son pertinentes. Las dificultades que encuentran en la resolución de las tareas, las discusiones que se producen en los grupos y la resistencia inicial a abandonar el modo de hacer aritmético muestran la importancia del obstáculo a superar. Sin embargo, la experimentación nos ha mostrado que finalmente la gran mayoría de los alumnos acepta utilizar las expresiones algebraicas para resolver problemas aritméticos, se familiariza con el papel de las letras como incógnitas, variables o parámetros y se inicia en la manipulación de las expresiones algebraicas y en las relaciones entre ellas.

A continuación desglosamos los resultados por etapa:

Primera etapa

Tanto la observación en clase como los exámenes realizados indican que la mayor parte de los alumnos ya no tienen inconveniente en obtener una fómula como solución de un problema, reconocen la identidad de las fórmulas, aunque se expresen con letras distintas, y las utilizan para completar tablas de valores. También han aceptado mayoritariamente darle a los signos $+$ y $-$ un significado operativo binario generalizado en las expresiones aditivas sin paréntesis y reinterpretar las operaciones de suma y resta de números naturales como composición de traslaciones.

Por último, han interiorizado los principio de reflexión y economía propios del cálculo algebraico y un porcentaje importante de alumnos se preocupa por realizar las simplificaciones y operaciones entre expresiones algebraicas de la manera más sencilla posible. Sin embargo, la gestión del signo $=$ sigue siendo prioritariamente aritmética y la mayor parte de los alumnos no unen con dicho signo los pasos intermedios en la simplificación de expresiones algebraicas. Habrá que esperar a la cuarta etapa para encontrar un uso más pertinente del signo $=$.

Segunda etapa

Prácticamente todos los alumnos entienden el significado matemático de la palabra 'diferencia' y la relacionan con la comparación, utilizando comparaciones de expresiones algebraicas para resolver problemas aritméticos. Un porcentaje apreciable de alumnos sabe también ordenar expresiones algebraicas de primer grado cuando el sentido de la desigualdad no depende de la variable. En cambio el número de alumnos capaz de resolver una inecuación de primer grado es pequeño, aunque la percepción de que el sentido de la desigualdad cambia con el valor de la variable es muy general.

El escollo fundamental se encuentra en el uso de los paréntesis. La mayor parte de los alumnos no ve la necesidad de encerrar entre paréntesis el sustraendo de una diferencia, lo que da lugar a un cálculo erróneo. Pero tampoco ven la necesidad de modificar los signos de los términos contenidos en un paréntesis precedido del signo $-$ cuando suprimen el paréntesis; se limitan a modificar el signo del primer término. Sólo el 50% de los alumnos suprimen correctamente los paréntesis precedidos del signo $-$ y, a pesar de la insistencia de la profesora, ese procentaje apenas aumenta al curso siguiente.

Tercera etapa

Se trata de la etapa final de la propuesta didáctica de 1° de ESO y por esa razón en ninguna de las dos experimentaciones realizadas se le dedica el tiempo que necesita. A eso se añade que los problemas propuestos para dar sentido al producto de expresiones algebraicas son problemas geométricos aritmetizados, lo que supone una regresión, ya comentada en un apartado anterior, a procedimientos aritméticos en detrimento de los algebraicos. Además, los alumnos habían olvidado la propiedad distributiva, clave para el manejo de las expresiones aditivo-multiplicativas.

A pesar de todo, los alumnos llegan a entender la interpretación geométrica del producto de expresiones algebraicas y se desempeñan razonablemente bien en la simplificación de expresiones aditivo-multiplicativas, como se comprueba en uno de los exámenes, salvo cuando el número que multiplica a un paréntesis va precedido de un signo $-$, en cuyo caso la mayor parte de ellos aplican la propiedad distributiva sin modificar el signo de los términos incluidos en el paréntesis.

Cuarta etapa

La experimentación muestra que la propuesta didáctica ha subestimado el salto epistemológico que supone pasar del significado operativo binario generalizado y operativo unario de los signos $+$ y $-$ al significado predicativo y operativo binario entre números enteros. Las dificultades de los alumnos para pasar de la notación completa a la incompleta ponen de manifiesto que no es suficiente el conocimiento sobre cómo operar las expresiones algebraicas para deducir las reglas de cálculo entre números enteros.

Finalmente, tal como muestran los resultados del examen, alrededor del 80% de los alumnos pasan correctamente de la notación completa a la incompleta en las sumas y restas de números enteros, pero es un porcentaje bastante menor el que realiza con corrección los productos y cocientes de números enteros.

En cuanto al orden, el argumento de su necesaria compatibilidad con la suma no produce ningún rechazo en el aula y mayoritariamente se asume que el signo de la diferencia indica el orden entre el minuendo y el sustraendo. En el examen, ningún alumno ordena los números negativos como si fueran positivos.

Por otro lado, más de la mitad de los alumnos entienden que la posibilidad de dar a las variables valores negativos y positivos permite unificar las fórmulas. Las dificultades aparecen cuando se intenta encontrar el valor numérico de una expresión algebraica dando un valor negativo a la variable pues, en un primer momento, nos encontramos con una notación completa que adjudica un nuevo papel a los paréntesis y a los signos $+$ y $-$ que hay que aprender a gestionar.

Por último, en lo que se refiere a las diferencias entre las propiedades de los números enteros y los números naturales, apenas se pudieron tratar por falta de tiempo. Tampoco se hizo apenas hincapié en la modificación que sufren las desigualdades entre expresiones algebraicas al tomar las variables valores en $\mathbb{Z}$, a pesar de lo cual, 6 alumnos fueron capaces de resolver correctamente las dos inecuaciones de primer grado en $\mathbb{Z}$ que se plantearon en el examen.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos intentado abordar el problema docente al que se enfrentan los profesores cuando tienen que enseñar el número entero, es decir, cuando hacen su aparición en el aula los números negativos. Pese a los esfuerzos de los profesores, los alumnos tienen grandes dificultades para dar sentido a las operaciones entre números enteros, cometen frecuentes errores en los cálculos en los que intervienen números negativos y olvidan su existencia en los razonamientos matemáticos.

El marco teórico en el que nos situamos es el de la Teoría de Situaciones Didácticas de Guy Brousseau y la noción de partida que utilizamos para abordar el problema docente y transformarlo en un problema didáctico susceptible de ser investigado es la noción de obstáculo epistemológico. Diversas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades que la comunidad de matemáticos tuvo a lo largo de la historia para dar un estatuto numérico a distintas formas de negatividad surgidas en el entorno del trabajo algebraico, calificándolas de obstáculos epistemológicos y conjeturando la pervivencia de dichos obstáculos en la enseñanza actual del número negativo.

El análisis del estado de la cuestión realizado en el capítulo I, estudiando las aportaciones didácticas sobre: propuestas de enseñanza de los números negativos, análisis de los errores y dificultades de los alumnos en la realización de tareas en las que intervienen los números negativos y epistemología del número negativo, ha puesto de manifiesto que bastantes investigadores consideran que la concepción del 'número como medida' es un obstáculo epistemológico que históricamente ha impedido, hasta épocas bastante recientes, la aceptación del número negativo.

Sin embargo, esa opinión no se ha concretado en una descripción detallada del obstáculo y además convive con una polémica sobre la noción de obstáculo epistemológico, su definición y su utilidad en la enseñanza, y con la propuesta, mayoritariamente aceptada, de enseñar el número entero por medio de modelos concretos, propuesta que es claramente contradictoria con el hecho de que dicho obstáculo se vuelva a encontrar en la enseñanza. En consecuencia, este trabajo se ha centrado en determinar con más precisión los obstáculos epistemológicos que afectan al número negativo, analizar su relación con las propuestas de enseñanza basadas en modelos concretos y hacer una propuesta didáctica coherente, desde un punto de vista teórico, con la necesidad de superar dichos obstáculos.

Esto nos ha permitido reformular en el capítulo I el problema docente en términos didácticos, planteándonos como objetivo final el diseño de una génesis escolar del número entero que afronte la superación de los obstáculos epistemológicos, evite la aparición de obstáculos didácticos y permita al alumno construir una concepción inicial del número negativo que evolucione con facilidad hacia concepciones cada vez más cercanas al concepto matemático.

En el capítulo II se han definido unas variables, gracias a las cuales se han podido caracterizar las concepciones de matemáticos de diferentes épocas históricas. A partir de este estudio, se han establecido los criterios de determinación de un obstáculo epistemológico: condiciones de contorno, delimitación y determinación, lo que ha permitido describir con precisión dos obstáculos epistemológicos en la historia del número negativo.

La descripción de estos obstáculos ha puesto de manifiesto, no sólo el papel obstaculizador que ha jugado la consideración del número como una abstracción del mundo sensible ligada a las situaciones de medida y al comportamiento de las cantidades de magnitud, sino también el papel obstaculizador del álgebra entendida como una aritmética generalizada, es decir, como un dominio cuyos objetivos y medios de validación son los aritméticos.

En el capítulo III se hace un estudio de la transposición didáctica del número entero en un texto que puede considerarse como un ejemplo típico de una transposición basada en modelos concretos. El análisis de sus características permite deducir que esa génesis del número entero, basada en la consideración de los números enteros como medida de cantidades de magnitud relativas o con dos sentidos y realizada en el ámbito aritmético, además de no contribuir a la superación de los obstáculos epistemológicos, los refuerza, lo que constituye un obstáculo didáctico añadido al obstáculo epistemológico.

También se llega a la conclusión de que las técnicas de cálculo con números enteros que transmite esa transposición didáctica son un obstáculo didáctico para el desarrollo de unas buenas técnicas de cálculo algebraico. Por último, la comparación de la transposición didáctica de dos textos pertenecientes a distintas épocas nos autoriza a emitir una conjetura sobre la evolución histórica que ha sufrido la transposición didáctica del número negativo.

Finalmente, en el capítulo IV se afronta el problema didáctico de diseñar una génesis escolar del número entero que tenga en cuenta los obstáculos epistemológicos y evite crear obstáculos didácticos. Para ello, se discute la falta de idoneidad del ámbito aritmético para constituirse en la razón de ser de los números negativos y se propone una introducción de los números enteros en el álgebra entendida como instrumento de modelización algebraico-funcional (Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón).

A partir de ahí, se definen los criterios epistemológicos que van a sustentar el diseño, entre ellos, la división de la propuesta didáctica en cuatro etapas que responden a los distintos significados de los signos $+$ y $-$. A continuación, para cada una de ellas se construye la situación fundamental, se indican los objetos algebraicos que emergen, las técnicas que se desarrollan y las tareas que contribuyen a la ejercitación de las técnicas y a la institucionalización del saber de la clase.

La experimentación de la propuesta didáctica muestra que su puesta en práctica es factible en una situación normal de aula y que permite poner de manifiesto la ruptura epistemológica que supone el paso del modo de hacer aritmético al algebraico, lo que favorece la superación del obstáculo epistemológico. Tambien posibilita el conocimiento de las condiciones institucionales que favorecen y dificultan el desarrollo de la propuesta didactica.

Por último, este trabajo abre varias líneas de investigación:

- La modificación y nueva experimentación de la propuesta didáctica para corregir las disfunciones que su puesta en práctica ha revelado. En particular, la propuesta ha subestimado el salto epistemológico que supone pasar del significado operativo binario generalizado y operativo unario de los signos $+$ y $-$ al significado predicativo y operativo binario entre números enteros, lo que obliga a revisar su cuarta etapa.

- Articular la propuesta didáctica sobre los números enteros con las propuestas didácticas de Bosch, Gascón y Ruiz-Munzón para introducir el álgebra elemental como instrumento de modelización algebraico-funcional.

- Analizar las concepciones de los alumnos sobre los números negativos, relacionándolas con el tipo de enseñanza recibida, en particular, con la enseñanza basada en modelos concretos y con la propuesta didáctica planteada en este trabajo.

- Estudiar bajo qué condiciones e influencias, tanto internas como externas al sistema de enseñanza, han sido tomadas las decisiones que caracterizan la transposición didáctica actual del número negativo.

- Construir dispositivos didácticos eficaces para la difusión en la formación inicial y permanente de los profesores de la propuesta didáctica sobre los números enteros desarrollada en este trabajo y de los estudios epistemológicos e institucionales que la sustentan.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALCALÁ, M. (1998). Los números $\mathbb{Z}$: puerta de acceso a otra matemática. *Epsilon*, 42, 471-493.

ALSINA, C., BARBA, D., BATLLE, I. BURGUÉS, C., GIMÉNEZ, J. y PARTEGÀS, J. (1980). *Didáctica dels nombres enters a EGB.* Barcelona: A.A.P.S.A. Rosa Sensat.

ÁLVAREZ, M.D. et al. (2011). *Matemáticas 1. ESO.* Madrid: Santillana S.A.

APOSTOL, L., MANDELBROT, B. y PIAGET, J. (1957). *Logique et équilibre. Etudes d'epistémologie génétique*, vol. 2. París: Presses Universitaires de France.

ARAYA CHACÓN, A.M. (2005). Difficulties found by the students during the study of substraction of integer numbers. *Proceedings of the* CERME *4*, 643-651.

ARCAVI, A. y BRUCKHEIMER, M. (1981). How Shall We Teach the Multiplication of Negative Numbers?. *Mathematics in School*, 10(5), 31-33.

ARGAND, R. (1874). *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* París: Gauthier-Villars. Edición original: 1806.

ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 241-286.

ARTIGUE, M., MENIGAUX, J. y VIENNOT, L. (1990). Some aspects of students' conceptions and difficulties about differentials. *European Journal of Physics*, 11, 262-267.

ARTIGUE, M. y ROBINET, J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 5-64.

ARTIGUE, M. et al. (eds.) (1994), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France.* Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

ASSUDE, T. (1995). Sur le modèle des conceptions, relecture d'une expérimentation. En C. Margolinas (ed.), *Les débats de didactique des mathématiques* (pp. 9-19). Actes du Séminaire National 1993-94. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

AZE, I. (1989). Negatives. For Little Ones? *Mathematics in School*, 18(1), 16-17.

BACHELARD, G. (1986). *La formation de l'esprit scientifique.* París: Librairie Philosophique J. Vrin. Edición original: 1938.

BAI SHANGSHU (1983). *Jiu zhang suanshu zhu shi.* Pekín: Kexue chubanshe.

BALDINO, R.R. (1996). Las cuatro operaciones con enteros a través de juegos. *Uno*, 7, 37-59.

BALDINO, R.R. (1997). On the epistemology of integers. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 17(2), 211-250.

BARTOLINI, P. (1976). Addition and Subtraction of Directed Numbers. *Mathematics Teaching*, 74, 34-35.

BATTISTA, M.T. (1983). A Complete Model for Operations on Integers. *The Arithmetic Teacher*, 30(5), 26-31.

BEATTY, R. (2010). Behind and below zero: sixth grade students use linear graphs to explore negative numbers. *Proceedings of the 32th Annual Meeting of PME-NA*, vol. 6, 219-226.

BECERRA, M.V. et al. (1997). *Matemáticas 2. ESO.* Madrid: McGraw-Hill.

BELL, A. (1982a). Looking at children and directed numbers. *Mathematics Teaching*, 100, 66-72.

BELL, A. (1982b). Directed numbers and the bottom up curriculum. *Mathematics Teaching*, 102, 28-32.

BELL, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, 4(3), 199-208.

BELL, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 24(1), 115-137.

BELL, E.T. (1945). *The Development of Mathematics.* Nueva York: McGraw-Hill Book Company. Edición original:1940.

BELNA, J.P. (1996). *La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege.* París: Librairie Philosophique J. Vrin.

BESSOT, A. y EBERHARD, M. (1983). Une approche didactique des problèmes de la mesure. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(3), 293-324.

BÉZOUT, E. (1806), *Éléments de Mathématiques a l'usage de l'École Spéciale Impériale Militaire.* París: Chez Magimel, libraire pour l'Art Militaire. Edición original:1764.

BISHOP, J.P., LAMB, L., PHILIPP, R., SCHAPPELLE, B. y WHITACRE, I. (2010). A developing framework for children's reasoning about integers. *Proceedings of the 32th Annual Meeting of PME-NA*, vol. 6, 111-118.

BOFFERDING, L. (2010). Addition and subtraction with negatives: acknowledging the multiple meanings of the minus signus: benefits of playing linear board games. *Proceedings of the 32th Annual Meeting of PME-NA*, vol. 6, 695-702.

BOFFERDING, L. y HOFFMAN, A. (2014). Learning negative integers concepts: benefits of playing linear board games. *Proceedings of the 38th International Conference of PME-NA*, vol. 2, 169-176.

BOFFERDING, L. y RICHARDSON, A. (2013). Investigating integer addition and subtraction: a task analysis. *Proceedings of the 35th Annual Meeting of PME-NA*, 111-118.

BOLEA, P. (2003). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano, 29. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1998). Le caractère problématique du processus d'algebrisation. Proporcionnalité et grandeurs dans l'enseignement obligatoire. *Actes de la IXème école dété de didactique des mathématiques* (pp. 153-159). Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM).

BOLEA, P., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización. *Recherches en Didactique des Mathmatiques*, 21(3), 247-304.

BORBA, R.E. (1995). Understanding and operations with integers: difficulties and obstacles. *Proceedings of the 19th International Conference of PME*, vol. 2, 226-231.

BOURBAKI, N. (1951). *Éléments de mathématique. Première partie: Les structures fondamentales de l'analyse. Livre II: Algèbre. Chapitre I: Structures algébriques*, París: Librairie Scientifique Hermann et Compagnie. Edicin original: 1942

BOURBAKI, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas.* Madrid: Alianza Editorial. Edición original: 1969.

BOURDON, P.L.M. (1825). *Éléments d'algèbre.* París: Bacheller.

BOYÉ, A. et al. (1998). *Images, Imaginaires, Imaginations. Une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes.* París: Ellipses.

BOYÉ, A. (2002). Quelques éléments d'histoire des nombres négatifs. En J. Gutiérrez Calderón y M. Hernández González (eds): *Proyecto Penélope: El papel de la historia de la ciencia en la enseñanza secundaria.* La Orotava.

BOYER, C.B. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Editorial. Edición original: 1968.

BROOKES, B. (1969). How do you teach minus minus is a plus?. *Mathematics Teaching*, 45, 46-49.

BROUSSEAU, G. (1976), Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Comptes-rendus de la XVIIIe rencontre de la CIEAEM*, Louvain-la-Neuve, 101-117.

BROUSSEAU, G. (1980). Problèmes de l'enseignement des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 1(1), 11-59.

BROUSSEAU, G. (1981). Problèmes de didactique des décimaux. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 37-127.

BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.

BROUSSEAU, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.

BROUSSEAU, G. (1988a). Les obstacles épistémologiques dans la conception des decimaux. *Manuscrito.*

BROUSSEAU, G. (1988b). Les différents rôles du maître. *Bulletin de la Association Mathématique du Québec*, 28(2), 14-24.

BROUSSEAU, G. (1989a). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, (pp. 41-63), Quebec: Les Editions Agence d'ARC.

BROUSSEAU, G. (1989b), Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*, (pp. 277-285). Quebec: Les Editions Agence d'ARC.

BROUSSEAU, G. (1993). Connaissances et savoirs. *Manuscrito.*

BROWN, S.I. (1969). Signed Numbers: A “Product” of Misconceptions. *The Mathematics Teacher*, 62(3), 183-195.

BRUNO, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación. *Números*, 29, 5-18.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994a). Contextos y estructuras en el aprendizaje de los números negativos. *Suma*, 16, 9-18.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1994b). La recta en el aprendizaje de los números negativos. *Suma* 18, 39-48.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1995-96), Les nombres negatifs dans l'abstrait, dans le contexte et sur la droite, *Petit x*, 42, 59-78.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996a). Problèmes additifs (1): d'états. *Math-Ecole*, 171, 17-20.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1996b). Números negativos: sumar = restar. *Uno*, 10, 123-133.

BRUNO, A. y MARTINÓN, A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 30(6), 789-809.

BUJANDA, M.P. y MANSILLA, S. (1996). *Números. Matemáticas 1. Secundaria.* Madrid: Ediciones SM.

CABLE, J. (1971). The ground from which directed numbers grow. *Mathematics in School*, 1(1), 10-12.

CAJORI, F. (1991). *A History of Mathematics.* Nueva York: Chelsea Publishing Company. Edición original: 1893.

CAJORI, F. (1993). *A History of Mathematical Notations.* Nueva York: Dover Publications. Edición original: 1928-29.

CANGUILHEM, G. (1975). *Études d'histoire et de philosophie des sciences.* París: Librairie Philosophique J. Vrin.

CAÑÓN, C. (1993). *La Matemática: creación y descubrimiento.* Madrid: Publicaciones de la Universidad Pontificia de Comillas.

CARNOT, L.N.M. (1803). *Géométrie de position.* París: J.B.M. Duprat, Libraire pour les Mathématiques.

CARR, K. y KATTERNS, B. (1984). Does the Number Line help?, *Mathematics in School.* 13(4), 30-34.

CARRAHER, T.N. (1990). 'Negative numbers without the minus sign', *Proceedings of the 14th International Conference of PME.* México, 223-230.

CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. Un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.

CASTELNUOVO, E. (1970). *Didáctica de la matemática moderna*. México: Editorial F. Trillas. Edición original: 1963.

CAUCHY, A.L. (1821). *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*. París: Imprimerie Royale.

CEMEN, P.B. (1993). Adding and Subtracting Integers on the Number Line. *The Arithmetic Teacher*, 40(7), 388-389.

CHANG, L. (1985). Multiple Methods of Teaching the Addition and Subtraction of Integers. *The Arithmetic Teacher*, 33(4), 14-19.

CHASLES, M. (1870). *Rapport sur les progrés de la géometrie*. París: Imprimerie Nationale.

CHASLES, M. (1880). *Traité de Géometrie Supérieure*. París: Gauthier-Villars. Edición original: 1852.

CHEVALLARD, Y. (1985a). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

CHEVALLARD, Y. (1985b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie: l'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, 5, 51-94.

CHEVALLARD, Y. (1989a). *Arithmétique, Algèbre, Modelisation. Étapes d'une recherche*. Publications de lIREM Aix-Marseille, 16.

CHEVALLARD, Y. (1989b). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires: la notion de modelisation. *Petit x*, 19, 45-75.

CHEVALLARD, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Perspectives curriculaires: voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x*, 23, 5-38.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2005). La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire: transposition didactique et nouvelle épistémologie scolaire. En C. Ducourtioux y P.L. Hennequin (eds.), *La place des mathématiques vivantes dans l'enseignement secondaire*, vol. 168, (pp. 239-263). París: Publications de l'APMEP.

CHEVALLARD, Y., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE-Horsori.

CHILVERS, P. (1985). A Consistent Model for Operations on Directed Numbers. *Mathematics in School*, 14(1), 26-28.

CHUQUET, N. (1484): ver MARRE, A. (1881).

CID, E. (1995). De la aritmética al álgebra: obstáculos epistemológicos y didácticos. En F. Hernán, M.L. Callejo, P. Bolea, E. Cid, L. Rico y E. Castro *Aspectos didácticos de Matemáticas. 5* (pp. 127-162). I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

CID, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos. *Boletín SI-IDM*, 10, 1-15.

CID, E. (2002). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. *Actas de las X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*, vol. 2, 529-542, I.C.E. Universidad de Zaragoza.

CID, E. (2004). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. En E. Palacián, E. Cid, J. Gascón, C. Batanero, C. Díaz y C. Azcárate (eds.), *Aspectos didácticos de Matemáticas. 9* (pp. 35-80). I.C.E. de la Universidad de Zaragoza.

CID, E. y BOLEA, P. (2010). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action*, vol. 1 (pp. 575-594). IUFM de l'Académie de Montpellier.

CID, E., GODINO, J.D. y BATANERO, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros*. Proyecto Edumat-Maestros. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

CID, E. y RUIZ-MUNZÓN, N. (2011). Actividades de estudio e investigación para introducir los números negativos en un entorno algebraico. En: M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 579-604). Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona.

COFMAN, J. (1981). Operations with Negative Numbers. *Mathematics Teaching*, 94, 18-20.

CÓLERA, J. y GAZTELU, I. (2010). *Matemáticas 1. ESO*. Madrid: Grupo Anaya.

COLLETTE, J.P. (1973-79). *Histoire des mathématiques*, 2 vols. Montreal: Editions du Renouveau Pédagogique.

COLTHARP, F.L. (1966). Introducing the Integers as Ordered Pairs. *School Science and Mathematics*, 66(5), 277-282.

CONFREY, J. (1990). A Review of the Research on Student Conceptions in Mathematics, Science, and Programming. *Review of Research in Education*, 16, 3-56.

CONNE, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(2-3), 221-270.

COOKE, M.B. (1993). A Videotaping Project to Explore the Multiplication of Integers. *The Arithmetic Teacher*, 41(3), 170-171.

COOLIDGE, J.L. (1947). *A History of Geometrical Methods*. Oxford University Press. Edición original: 1940.

COQUIN-VIENNOT, D. (1985). Complexité mathématique et ordre d'acquisition: une hierarchie de conceptions a propos des relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(2/3), 133-192.

CORNU, B. (1983). *Apprentisage de la notion de limite: conceptions et obstacles*. Tesis de tercer ciclo. Université Scientifique et Medicale de Grenoble.

COTTER, S. (1969). Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers. *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 349-353.

CROSSLEY, J.N. (1987). *The Emergence of Number*. Singapur: World Scientific Publishing Company.

CROWLEY, M.L. y DUNN, K.A. (1985). On Multiplying Negative Numbers. *The Mathematics Teacher*, 78(4), 252-56.

DAHAN-DALMEDICO, A. y PEIFFER, J. (1986). *Une histoire des mathématiques. Routes y dédales*. París: Editions du Seuil.

D'ALEMBERT, J.L. et al. (1784-85). *Encyclopédie méthodique. Mathématiques*, tomos I y II. París: Panckoucke Libraire.

DARBOUX, G. et al. (1904). *Étude sur le developpement des méthodes géometriques*. París: Gauthier-Villars.

DAVIDSON, P.M. (1987). How should non-positive integers be introduced in elementary mathematics. *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Montreal, vol. 2, 430-436.

DAVIS, R.B. y MAHER, C.A. (1997). How Student Think: The Role of Representations. En L.D. English (ed.), *Mathematical Reasoning: Analogies, Metaphors and Images* (pp. 93-115). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

DE LORENZO, J. (1971). *Introducción al estilo matemático*. Madrid: Editorial Tecnos.

DE LORENZO, J. (1977). *La matemática y el problema de su historia*. Madrid: Editorial Tecnos.

DE LORENZO, J. (1998). *La matemática: de sus fundamentos y crisis*. Madrid: Editorial Tecnos.

DEDEKIND, R. (1998). *¿Qué son y para qué sirven los números?*. Madrid: Alianza Editorial. Edición original: 1888.

DELEDICQ, A. (1994). Les conceptions relatives aux limites. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 321-327). Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

DELL'AQUILA, G. y FERRARI, M. (1995). La lunga storia dei numeri interi relativi. *L'Insegnamento della Matematica e delle Scienze Integrate*, 18A(4), 340-363.

DESCARTES, R. (1628): ver SMITH, D.E. y LATHAM, M.L. (1954)

DHOMBRES, J. (1978). *Nombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire.* París: Cedic/Fernand Nathan.

DHOMBRES, J. et al. (1987). *Mathématiques au fil des âges*. París: Gauthier-Villars.

DIENES, Z.P. (1976). *Estados y operadores. 1: Operadores aditivos*. Barcelona: Teide. Edición original: 1969.

DIEUDONNÉ, J. (1987). *Pour l'honneur de l'esprit humain*. París: Hachette.

DIOFANTO: ver TANNERY, P. (1893-95), VER EECKE, P. (1959).

DOUADY, R. y PERRIN, M.J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20 (4), 387-424.

DUBISCH, R. (1971). A 'Proof' that $(-)(-) = +$. *The Mathematics Teacher*, 64(8), 750.

DUROUX, A. (1982). *La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure*. Memoria de DEA. Publications de l'IREM, Burdeos.

EBBINGHAUS, H.D. et al. (1991). *Numbers.* Nueva York: Springer. Edición original: 1988.

EL BOUAZZAOUI, H. (1988). *Conceptions des élèves et des professeurs à propos de la notion de continuité d'une fonction.* Tesis doctoral. Quebec: Université Laval.

EQUIPO GRANADA MATS (1985). *Matemáticas 7° EGB.* Sevilla: Algaida Editores.

EQUIPO SIGNO (1994). *Azimut. Matemáticas 7° E.G.B.* Madrid: Editorial Anaya.

ERNEST, P. (1985). The number line as a teaching aid. *Educational Studies in Mathematics*, 16(4), 411-424.

ERNEST, P. (1994). The philosophy of mathematics and the didactics of mathematics. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 335-349). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

ETTLINE, J.F. y SMITH, L.M. (1978). Flipping over Numbers. *Teacher*, 96(4), 54-55.

EUCLIDES (1991-1994). *Elementos*, 2 vols. Madrid: Editorial Gredos.

EVES, H. (1969). *An Introduction to the History of Mathematics.* Nueva York: Holt, Rinehart and Winston. Edición original:1953.

FERNÁNDEZ Y CARDÍN, J.M. (1878). *Elementos de Matemáticas.* Madrid: Gómez-Fuentenebro.

FISCH, M. (1999). The Making of Peacock's Teatrise on Algebra: A Case of Creative Indecision. *Archive for History of Exact Science*, 54(2), 137-179.

FISCHBEIN, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

FLETCHER, T.J. (1976). Talking of Directed Numbers. *Mathematical Education for Teaching*, 2(3), 3-13.

FONSECA BON, C., GASCÓN PÉREZ. J. y OLIVEIRA LUCAS, C. (2014). Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 17(3), 289-318.

FRANK, C. (1969). Play shuffleboard with negative numbers. *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 395-397.

FREUDENTHAL, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H.(1983).*Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

GADANIDIS, G. (1994) Deconstructing Constructivism. *The Mathematics Teacher*, 87(2), 91-97.

GALBRAITH, M.J. (1974). Negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 5(1), 83-90.

GALLARDO, A. (1994). Negative numbers in algebra. The use of a teaching model. *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, Lisboa, vol. 2, 376-383.

GALLARDO, A. (1995). Negative Numbers in the Teaching of Arithmetic. Repercussions in Elementary Algebra. *Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of PME*, Columbus, 158-163.

GALLARDO, A. (1996). Qualitative analysis in the study of negative numbers. *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 2, 377-384.

GALLARDO, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 171-192.

GALLARDO, A. (2008). Historical epistemological analysis in mathematical education: negative numbers and the nothingness. *Proceedings of the 32th annual meeting of PME-NA*, vol. 1, 17-29.

GALLARDO, A. (2010). La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, 13(4-II), 255-268.

GALLARDO, A. y DAMIÁN, E. (2011). Los positivos y negativos como medios de organización de familias de rectas en el plano. *Números*, 78, 47-71.

GARDNER, M. (1977). Mathematical Games. The concept of negative numbers and the difficulty of grasping it. *Scientific American*, 236(6), 131-135.

GASCÓN, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 13(3), pp. 295-332.

GASCÓN, J. (1995). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à l'≪arithmétique généralisée≫. *Petit x*, 37, 43-63.

GAUSS, C.F. (1979). *Recherches arithmétiques*. París: Albert Blanchard. Edición original: 1801.

GIORDAN, A. y DE VECCHI, G. (1988). *Los orígenes del saber. De las concepciones personales a los conceptos científicos*. Sevilla: Diada Editoras. Edición original: 1987.

GLAESER, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.

GLAESER, G. (1984). A propos des obstacles épistémologiques. Réponse a Guy Brousseau. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 5(2), 229-234.

GLIÈRE, A.J. (2007). *Histoire et épistémologie des nombres négatifs de D'Alembert á nos jours. Le passage des quantités aux nombres*. Lille: Atelier National de Reproduction des Thèses (ANRT).

GOBIN, C. et al. (Groupe 1er cycle) (1996). *Les nombres relatifs au collège*. IREM de Poitiers.

GODINO, J.D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2.3), 237-284.

GÓMEZ, B. (2001). La justificación de la regla de los signos en los libros de texto: por qué menos por menos es más?. En P. Gómez, y L. Rico, (eds.) *Iniciación a la investigaicón en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 257-275). Universidad de Granada.

GONZÁLEZ ALBA, J. et al. (1989). Aproximación a los números enteros a partir de una escalera. *Suma*, 2, 29-33.

GONZÁLEZ MARÍ, J.L. (1994). Relative integers and measurements: a theoretical model of additive structure. *Proceedings of the First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education*, Universidad de Módena, 221-232.

GONZÁLEZ MARÍ, J.L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

GONZÁLEZ MARÍ, J.L. (1996). Tesis doctoral: el campo conceptual de los números naturales relativos. *Epsilon*, 34(5), 99-102.

GRAS, R. (1992). L'analyse des données: une méthodologie de traitement de questions didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 59-72.

GRAS, R. y LARHER, A. (1992). L'implication statistique, une nouvelle méthode d'analyse des données. *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, 120, 5-31.

GRAS, R. y TOTOHASINA, A. (1995a). Conceptions d'élèves sur la notion de probabilité conditionnelle révélées par une méthode d'analyse des données: implication-similarité-corrélation. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 337-363.

GRAS, R. y TOTOHASINA, A. (1995b). Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 49-95.

GRUP ZERO (1980). *Els nombres enters*. Bellaterra: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona.

HAEGEL, S. (1992). *Les nombres negatifs ont une histoire*. Brochure S.154. I.R.E.M de Strasbourg.

HANKEL, H. (1867). *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*. Leipzig: Leopold Voss.

HATIVA, N. y COHEN, D. (1995). Self Learning of Negative Number Concepts by Lower Division Elementary Students through Solving Computer-Provided Numerical Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 28(4), 401-431.

HAVENHILL, W.P. (1969). Though this be madness,... *The Arithmetic Teacher*, 16(8), 606-608.

HEFENDEHL-HEBEKER, L. (1991). Negative Numbers: Obstacles in Their Evolution from Intuitive to Intellectual Constructs. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 26-32.

HENRY, M. (1992-93). *Didactique des Mathématiques*. CTU et IREM de l'Université de Franche Comté.

HERCOVICS, N. y LINCHEVSKI, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27(1), 59-78.

HITCHCOCK, A.G. (1997). Teaching the negatives, 1870-1970: a medley of models. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 17-25, 42.

HOLLIS, L.Y. (1967). Multiplication of integers. *The Arithmetic Teacher*, 14(7), 555-556.

HUMAN, P. y MURRAY, H. (1987). Non concrete approaches to integer arithmetic. *Proceedings of the 11th International Conference of PME*, Montreal, vol. 2, 437-443.

IRIARTE, M.D., JIMENO, M. y VARGAS-MACHUCA, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, 13-18.

JANVIER, C. (1983). The understanding of directed numbers. *Proceedings of the 15th Annual Conference of PME-NA*, Montreal, 295-300.

JANVIER, C. (1985). Comparison of models aimed at teaching signed integers. *Proceedings of the 9th International Conference of PME*, Utrecht, vol.1, 135-140.

JANVIER, C. (1987). Conceptions and Representations: The Circle as and Example. En C. Janvier (ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 147-158). Londres: Lawrence Erlbaum Associates Inc. Publishers.

JANVIER, C., CHARBONNEAU, L. y RENE DE COTRET, S. (1989). Obstacles épistémologiques à la notion de variable: perspectives historiques. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 64-75). Quebec: Les Editions Agence d'ARC.

JENCKS, S.M. y PECK, D.M. (1977). Hot and Cold Cubes. *The Arithmetic Teacher*, 24(1), 70-71.

JOHNSON, D.R. (1986). Making -x Meaningful. *The Mathematics Teacher*, 79(7), 507-510.

JOHNSON, J.S. (1978). Working with Integers. *The Mathematics Teacher*, 71(1), 31.

JOHSUA, S. y DUPIN, J.J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. París: Presses Universitaires de France.

KANGSHEN, S., CROSSLEY, J.N. y LUN, A.W.-C. (eds.) (1999). *The Nine Chapters on the Mathematical Art: companion and commentary*. Oxford: Oxford University Press y Pekín: Science Press.

KANT, E. (1991). *Essai pour introduire en philosophie le concept de grandeur négative*. París: Librairie Philosophique J. Vrin. Edición original: 1763.

KLEIN, F. (1927). *Matemática elemental desde un punto de vista superior*, vol I. Traducción de Roberto Araujo. Madrid. Edición original: 1924.

KLEINER, I. (1996). The Genesis of the Abstract Ring Concept. *The American Mathematical Monthly*, 103(5), 417-424.

KLINE, M. (1985). *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI de España Editores. Edición original: 1980.

KLINE, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días*, 3 vols. Madrid: Alianza Editorial. Edición original: 1972.

KOHN, J.B. (1978). A Physical Model for Operations with Integers. *The Mathematics Teacher*, 71(9), 734-736.

KÜCHEMANN, D. (1980). Children's Understanding of Integers. *Mathematics in School*, 9(2), 31-32.

KÜCHEMANN, D. (1981). Positive and negative number. En Hart, K.M. (ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 82-87). Londres: John Murray.

LACASTA, E. (1995). *Les graphiques cartésiens de fonctions dans l'enseignement secondaire des mathématiques: illusions et contrôles.* Tesis doctoral. Université Bordeaux I.

LACROIX, S.F. (1832). *Curso completo elemental de matemáticas puras. Álgebra*, vol. 2. Traducción de J. Rebollo. Madrid: Imprenta Real.

LAMANDÉ, P. (2004). La conception des nombres en France autour de 1800: l'œvre didactique de Sylvestre François Lacroix. *Revue d'histoire des mathématiques*, 10, 45-106.

LAY-YONG, L. y TIAN-SE, A. (1987). The earliest negative numbers: how they emerged from a solution of simultaneous linear equations. *Archives Internationales d'Histoire des Sciences*, 37, 222-262.

LÉONARD, F. y SACKUR, C. (1990). Connaissances locales et triple approche, une méthodologie de recherche. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 205-240.

LERMAN, I.C. (1981). *Classification et analyse ordinale des données.* París: Dunod.

LIEBECK, P. (1990). Scores and Forfeits - An Intuitive Model for Integer Arithmetic. *Educational Studies in Mathematics*, 21(3), 221-239.

LINCHEVSKI, L. y WILLAMS, J. (1996). Situated intuitions, concrete manipulations and the construction of mathematical concepts: the case of integers. *Proceedings of the 20th International Conference of PME*, Valencia, vol. 3, 265-272.

LINCHEVSKI, L. y WILLAMS, J. (1999). Used intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 131-147.

LIU HUI: ver BAI SHANGSHU (1983), QIAN BAOCONG (ed.) (1963).

LIZCANO, E. (1993). *Imaginario colectivo y creación matemática.* Barcelona: Editorial Gedisa.

LUTH, L.M. (1967). A model for arithmetic of signed numbers. *The Arithmetic Teacher*, 14(3), 220-222.

LYTLE, P.A. (1994). Investigation of a model based on the neutralization of opposites to teach integer addition and subtraction. *Proceedings of the 18th International Conference of PME*, Lisboa, vol. 3, 192-199.

MACLAURIN, C. (1748). *A Treatise of Algebra in Three Parts.* Londres: A. Millar y J. Nourse.

MALPAS, A.J. (1975). Subtraction of negative numbers in the second year: anatomy of a failure. *Mathematics in School*, 4(4), 3-5.

MANSILLA, S. y BUJANDA, M.P. (1987). *Pitágoras 7º EGB. Matemáticas.* Madrid: Ediciones SM.

MARRE, A. (1881). *Le Triparty en la science des nombres par maistre Nicolas Chuquet parisien.* Roma: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

MARTHE, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the 3th International Conference of PME*, Warwick, 153-157.

MARTÍNEZ, J. (1989). *Cálculo. 7º E.G.B.* Madrid: Editorial SM.

MARTZLOFF, J.C. (1988). *Histoire des mathématiques chinoises.* París: Masson.

MAURY, S. (1987). Procédures dans la resolution de problèmes probabilistes. En G. Vergnaud, G. Brousseau y M. Hulin (eds.), *Didactique et acquisition des conaissances scientifiques* (pp. 239-253). Comptes-rendus du Colloque du GRECO. Sèvres: Editions du CNRS.

MAZ MACHADO, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral. Universidad de Córdoba.

McAULEY, J. (1990). Please Sir, I Didn't Do Nothing. *Mathematics in School*, 19(1), 45-47.

MILAZZO, F. y VACIRCA, V. (1983). La struttura moltiplicativa dei numeri relativi: osservazioni storico-didattiche. *Archimede*, 35(1/2), 78-83.

MILNE, E. (1969). Disguised practice for multiplication and addition of directed numbers. *The Arithmetic Teacher*, 16(5), 397-398.

MORO, E. y SALAZAR, S. (1993). Los números enteros. *Zeus*, 19, 25-28.

MUKHOPADHYAY, S. (1997). Story telling as sense-making: children's ideas about negative numbers. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 5, 35-50.

MUKHOPADHYAY, S., RESNICK, L.B. y SCHAUBLE, L. (1990). Social sense-making in mathematics; children's ideas of negative numbers. *Proceedings of the 14th International Conference of PME*, México, 281-288.

MURRAY, J.C. (1985). Children's informal conceptions of integer arithmetic. *Proceedings of the 9th International Conference of PME*, Utrecht, vol.1, 147-153.

NCTM (NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS) (1970). *El sistema de los números enteros*. México: Editorial F. Trillas. Edición original: 1968.

NOVY, L. (1973). *Origins of Modern Algebra*. Leyden: Noordhoff International Publishing.

NUFFIELD MATHEMATICS PROJECT (1964). *Computation and Structure 4*. Londres: Chambers and Murray.

ORMAN, G.V. (1985). Two aspects concerning "General Theory of Directed Numbers" by Franco Spisani and an application. *International Logic Review*, 32, 67-71.

OTTE, M. y SEEGER, F. (1994). The human subject in mathematics education and in the history of mathematics. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Sträßer y B. Winkelmann (eds.), *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 351-365). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

PAPY, G. (1964). *Mathématique moderne*, 2 vols. Bruselas: Marcel Didier.

PAPY, G. (1968). *Minicomputer*. Bruselas: Papy et IVAC. .

PEACOCK, G. (1830). *A treatise on algebra*. Cambridge: J. & J.J. Deighton.

PELED, I. (1991). Levels of knowledge about signed numbers: effects of age and ability. *Proceedings of the 15th International Conference of PME*, Assisi (Italia), 145-152.

PELED, I., MUKHOPADHYAY, S. y RESNICK, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. *Proceedings of the 13th International Conference of PME*, París, 106-110.

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. En M. Artigue, R. Gras, C. Laborde y P. Tavignot (eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp. 97-285). Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

PETERSON, J.C. (1972). Fourteen different strategies for multiplication of integers or why $(-1) \times (-1) = (+1)$. *The Arithmetic Teacher*, 19(5), 396-403.

PETRI, A. (1986). Arithmos. *Números*, 14, 19-46.

PHILLIPS, E.R. (1971). Negative Number x Negative Number Gives Positive Number: An Understandable Proof for High School Students. *School Science and Mathematics*, 71(9), 797-800.

PIAGET, J. (1957). Logique et équilibre dans le comportements du sujet. En L. Apostol, B. Mandelbrot y J. Piaget, *Logique et équilibre. Études d'epistémologie génétique*, vol .2 (pp. 27-117). París: Presses Universitaires de France.

PIAGET, J. (1975). *Introducción a la epistemología genética. El pensamiento matemático*, vol. 1. Buenos Aires: Paidos. Edición original: 1950.

PIAGET, J. (1978). *La equilibración de las estructuras cognitivas. Problema central del desarrollo.* Madrid: Siglo XXI de España Editores. Edición original: 1975.

PUIG ADAM, P. (1956). *Didáctica matemática eurística.* Madrid: Publicaciones de la Institución de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.

PYCIOR, H.M. (1981). George Peacock and the British Origins of Symbolical Algebra. *Historia Mathematica*, 8, 23-45.

QIAN BAOCONG (ed.) (1963). *Suanjing shi shu.* Pekín: Zhonghua shuju.

RASHED, R. (1984a). *Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.* París: Société d'Édition Les Belles Lettres.

RASHED, R. (1984b). *Diophante. Les arithmétiques*, 4 vols. París: Société d'Édition Les Belles Lettres.

RATSIMBA-RAJOHN, H. (1982). Eléments d'étude de deux méthodes de mesures ratinonelles. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(1), 65-113.

REY PASTOR, J. y BABINI, J. (1951). *Historia de la Matemática.* Buenos Aires: Espasa-Calpe.

ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), 305-342.

ROBINET, J. (1986). Les réels: quels modèles en ont les élèves?. *Educational Studies in Mathematics*, 17(4), 359-386.

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1955). *Cálculos.* Barcelona: Editorial Teide.

ROSSINI, R. (1986). A propos des nombres relatifs. *Math-Ecole*, 121, 18-23.

ROUAN, O. y PALLASCIO, R. (1994). Conceptions probabilistes d'élèves marocains du secondaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 393-428.

ROWLAND, T. (1982). Teaching directed numbers. An experiment. *Mathematics in School*, 11(1), 24-27.

RUIZ HIGUERAS, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

RUIZ-MUNZÓN, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional.* Tesis doctoral. Departament de Matemàtiques. Universitat Autònoma de Barcelona.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en Secundaria. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevallard, G. Cirade y C. Ladage (eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 655-675). IUFM de l'Académie de Montpellier.

RUIZ-MUNZÓN, N., BOSCH, M. y GASCÓN, J. (2011). Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. En M. Bosch, J. Gascón, A. Ruiz-Olarría, M. Artaud, A. Bronner, Y. Chevallard, G. Cirade, C. Ladage y M. Larguier (eds.), *Un panorama de la TAD. An overview of ATD* (pp. 743-765). Centre de Recerca Matemàtica (CRM), Universitat Autònoma de Barcelona.

RUSSELL, B. (1973). Introducción a la Filosofía Matemática. En B. Russell, *Ciencia y Filosofía* (pp. 1265-1390). Madrid: Aguilar. Edición original: 1919.

SALMERÓN, R. (1988). Una experiencia sobre didáctica del número entero. *Epsilon*, 11, 75-85.

SÁNCHEZ OLMEDO, E. (1991). Introducción al número negativo a través del análisis de juego de problemas creativos y de fenómenos de azar. *Epsilon*, 19, 55-58.

SARVER, V.T. (1986).Why does a negative times a negative produce a positive? *The Mathematics Teacher*, 79(3), 178-183.

SASAKI, T. (1993). The constructing meanings by social interaction in mathematical teaching. *Proceedings of the 17th International Conference of PME*, Tsukuba (Japón), vol. 2, 262-268.

SCHNEIDER, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des "découpages infinis" des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2/3), 241-294.

SCHUBRING, G. (1986). Ruptures dans le statut mathématique des nombres négatifs. *Petit x*, 12, 5-32.

SCHUBRING, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation dans les manuels allemands et français de mathématiques entre 1795 et 1845. En C. Laborde (ed.), *Actes du premier Colloque Franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique* (pp. 137-145). Grenoble: La Pensée Sauvage Editions.

SCHUBRING, G. (1997). L'interaction entre les débats sur le statut des nombres négatifs et imaginaires et l'emergence de la notion de segment orienté. En D. Flament (ed.), *Le nombre une hydre à n visages. Entre nombres complexes et vecteurs* (pp. 1-14). París: Editions de la Maison des sciences de l'homme.

SCHUBRING, G. (2005). *Conflicts between Generalization, Rigor, an Intuition. Number Concepts Underlying the Development of Analysys in 17-19th Century France and Germany.* Serie: Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. Nueva York: Springer

SCHUBRING, G. (2014). Problems of transmission and translation. The case of MacLaurin on negative numbers. *Recherches en Didacticque des Mahématiques*, 34 (2-3), 285-296.

SCHULTZ, J.E. (1973). Why I don't have any examples of negative numbers. *The Arithmetic Teacher*, 20(5), 365.

SEMADENI, Z. (1984). A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 15(4), 379-395.

SESIANO, J. (1985). The Appearance of Negative Solutions in Mediaeval Mathematics. *Archive for History of Exact Science*, 32(2), 105-150.

SICKLICK, F.P. (1975). Patterns in Integers. *The Mathematics Teacher*, 68(4), 290-292.

SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.

SIERPINSKA, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18(4), 371-397.

SIERPINSKA, A. (1989). Sur un programme de recherche lié à la notion d'obstacle épistémologique. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 130-147). Quebec: Les Editions Agence d'ARC.

SIERPINSKA, A. y LERMAN, S. (1996). Epistemologies of Mathematics and of Mathematics Education. En A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, vol. 2, (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

SKEMP, R.R. (1980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas.* Madrid: Ediciones Morata.

SMITH, D.E. (1958). *History of Mathematics*, 2 vols. Nueva York: Dover Publications. Edición original:1925.

SMITH, D.E. y LATHAM, M.L. (1954). *The geometry of René Descartes.* Nueva York: Dover Publications.

SMP (SCHOOL MATHEMATICS PROJECT) (1965). *Book 1.* Cambridge University Press.

SMP (SCHOOL MATHEMATICS PROJECT) (1966). *Book 2.* Cambridge University Press.

SMP (SCHOOL MATHEMATICS PROJECT) (1987). *New Book 1: Part 2.* Cambridge University Press.

SMSG (SCHOOL MATHEMATICS STUDY GROUP) (1961). *First Course in Algebra.* New Haven (Connecticut): Yale University Press.

SNELL, K.S. (1970). Integers. Introduction of directed numbers. *The Mathematical Gazette*, 54(388), 105-109.

SORIA, P. (1991). Otra puerta hacia el álgebra. *Epsilon*, 19, 35-41.

SORIA, P. (1997). Manipulamos los números enteros. *Epsilon*, 13(37), 57-66.

SOUZA, A.C.C. de et al. (1995). Games for integers: conceptual or semantic fields?. *Proceedings of the 19th International Conference of PME*, Brasil, vol. 2, 232-239.

SPAGNOLO, F. (1986). L'intervento della nozione di operatore negli ampliamenti numerici. *L'educazione Matematica*, 1(2), 169-185.

SPAGNOLO, F. (2006). La modélisation dans la recherche en didáctique des mathématiques: les obstacles épistémologiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 26(3), 337-380.

SPISANI, F. (1983), *Teoria generale dei numeri relativi*, vol. I. *International Logic Review*. Bolonia.

STEPHAN, M. y AKYUZ, D. (2012). A proposed instruccional theory for integer addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43(4), 428-464.

STEVIN, S. (1585a). *L'Arithmétique*. Leyde: Imprimerie de Christofle Plantin.

STEVIN, S. (1585b). *La Disme*. Edición de V. Meavilla y A.M. Oller (2014). Prensas de la Universidad de Zaragoza.

STREEFLAND, L. (1996). Negative Numbers: Reflections of a Learning Researcher. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(1), 57-77.

STRUIK, D.J. (1969). *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*. Cambrigde (Massachusetts): Harvard University Press.

TANNERY, P. (1893-95). *Diophanti Alexandrini Opera Omnia, cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est Paulus Tannery*, 2 vols. Lipsiae, in aedibus B.G. Teubner.

THOMAIDIS, Y. (1993). Aspects of Negative Numbers in the Early 17th Century. An Approach for Didactic Reasons. *Science & Education*, 2, 69-86.

THOMPSON, P.W. y DREYFUS, T. (1988). Integers as Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 19(2), 115-133.

TULEJ, J. y GORMAN, M. (1990). Mathematics and Drama. *Mathematics Teaching*, 131, 2-6.

VAN DER WAERDEN, B.L. (1985). *A History of Algebra. From al-Khowārzmī to Emmy Noether*. Berlín: Springer-Verlag.

VARGAS-MACHUCA, I. et al. (1990), *Números enteros*, Madrid: Editorial Síntesis.

VARO GÓMEZ DE LA TORRE, A.J. (2000). La regla de los signos. *Suma*, 34, 69-71.

VER EECKE, P. (1959). *Diophante d'Alexandrie. Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. París: Librairie scientifique et technique Albert Blanchard.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (eds.), *Addition and Subtraction: A*

Cognitive Perspective (pp. 39-59). Hillsdale (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates (LEA).

VERGNAUD, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades (Research Agenda in Mathematics Education)*, vol.2 (pp. 141-161). Hillsdale (New Jersey): Lawrence Erlbaum Associates (LEA).

VERGNAUD, G. (1989). L'obstacle des nombres négatifs et l'introduction à l'algèbre. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 76-83). Quebec: Les Editions Agence d'ARC.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2/3), 133-170.

VERGNAUD, G. y DURAND, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, 36, 28-43.

VLASSIS, J. (2004a). *Sens et symboles en mathématiques. Étude de l'utilisation du signe moins dans les réductions polynomials et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Tesis de doctorado. Universidad de Lieja.

VLASSIS, J. (2004b). Making sens of the minus sign or becoming flexible 'negativity'. *Learning and Instruction. Special Issue: The Conceptual Change Approach to Mathematics Learning and Teaching*, 14(5), 469-484.

VLASSIS, J. (2008). The role of mathematical symbols in the development of number conceptualization: The case of the minus sign. *Philosophical Psychology. Special Issue: Number as a Test Case for the Role of language in Cognition*, 21(4), 555-570.

WATZLAWICK, P., BEAVION, H.J. y DON JACKSON, D. et al. (1971), '*Pragmatica della comunicazione umana.* Roma: Astrolabio.

WHIFFING, P. (1989). A Directed Number Starter. *Micromath*, 5(1), 14-15.

WHITMAN, N. (1992). Multiplying Integers. *The Mathematics Teacher*, 85 (1), 34-51.

WHITACRE, I., BISHOP, J.P., LAMB, L., PHILIPP, R., SCHAPPELLE, B. y LEWIS, M. (2011). Integers: history, textbook approaches, and children's productive mathematical intuitions. *Proceedings of the 33th Annual Meeting of PME-NA*, 913-920.

WHITACRE, I., BISHOP, J.P., LAMB, L., PHILIPP, R., SCHAPPELLE, B. y LEWIS, M. (2012). What sense do children make of negative dollars? *Proceedings of the 34th Annual Meeting of PME-NA*, 958-964.

WILDER, R.L. (1981), *Mathematics as a Cultural System*. Toronto: Pergamon Press.

WUSSING, H. (1998). *Lecciones de Historia de las Matemáticas*. Madrid: Siglo XXI de España Editores. Edición original: 1979.