Resolución de triángulos

Teoremas del seno y del coseno

1º Bachillerato

Trabajo fin de Máster en la especialidad de Matemáticas del Máster de profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, Artísticas y Deportivas.

Alumna: **Marta Aznar Maldonado**
Director: **Alberto Arnal Bailera**

Junio 2013

INDICE

A. Definición del objeto matemático a enseñar.

1. Objeto matemático a enseñar.

   Se va a enseñar a los alumnos los teoremas del seno y del coseno, los cuales son necesarios para la resolución de triángulos cualesquiera.

2. Curso y asignatura en la que se sitúa el objeto matemático.

   Estos conceptos se estudian en la asignatura de Matemáticas del primer curso de Bachillerato de la rama científico-técnica, dentro del tema de Trigonometría.

   Según el Currículo Aragonés de Bachiller (BOA 17/7/2008, pág.14074), ver anexo, el teorema del seno y del coseno son contenidos mínimos para los alumnos de 1º de Bachiller.

3. ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático se pretenden enseñar?

   Los problemas, técnicas y tecnologías que se pretenden enseñar están orientados a la resolución de triángulos. Muchos de los problemas que se plantean en topografía, navegación, astronomía y otros campos, exigen la resolución de triángulos a partir de unos datos, es decir, conocer los lados y ángulos desconocidos a partir de otros dados.

   Teniendo en cuenta los objetivos marcados por el Currículo Aragonés de Bachillerato (BOA 17/7/2008, pág. 14073), ver anexo, el estudio de la trigonometría trata de proporcionar a los alumnos un lenguaje y una herramienta útil para la resolución de ciertos problemas no sólo de la propia disciplina, sino también de otras disciplinas científicas.

   Al plantear problemas, se busca que los alumnos desarrollen las capacidades de análisis y síntesis, de abstracción y de concreción, de generalización y de particularización, de formulación de conjeturas y de argumentación. Se trata de que los alumnos trasladen el problema de la vida real al campo de las matemáticas, lo resuelvan con las herramientas que proporcionan estas y que devuelvan la solución al problema real.

   Las tecnologías no deben quedar al margen. Los alumnos deben saber utilizar las calculadoras, y programas informáticos, etc. De esa forma, se agiliza y facilita el cálculo, pero además los alumnos se hacen conscientes de las limitaciones de los medios tecnológicos.
   Por último, al enunciar, formular y demostrar los teoremas de los senos y del coseno, se inicia a los alumnos en la comprensión de los métodos deductivos propios de las matemáticas.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

1. ¿Cómo se justifican habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

   Habitualmente, la Trigonometría es introducida mediante problemas de cálculo de distancias inaccesibles.

2. ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

   Problemas de distancias y de alturas, con un observador y con dos, cuya solución se halla mediante la resolución de triángulos tanto rectángulos como cualesquiera. Son problemas que no pueden resolverse con las técnicas conocidas hasta ahora por los alumnos, como el teorema de Pitágoras y el teorema de Thales.

   En relación con las técnicas:

   - Paso de radianes a grados y viceversa.
   - Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
   - Cálculo de las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.
   - Calcular las razones trigonométricas de un ángulo a partir del conocimiento de una de ellas. Se debe tener en cuenta las relaciones entre las distintas razones trigonométricas.
   - Cálculo de las razones trigonométricas mediante la relación con ciertos ángulos. Reducción de cualquier ángulo al primer cuadrante.
   - Identidades y ecuaciones trigonométricas.
   - Sistemas de ecuaciones trigonométricas.

   A cerca de las tecnologías:

   - Definición de las razones trigonométricas y sus relaciones.
   - Fórmulas de la suma y diferencia de ángulos.
   - Razones trigonométricas del ángulo doble.
   - Razones trigonométricas del ángulo mitad.
   - Transformación de sumas en productos y viceversa.
   - Teoremas del seno y del coseno.

3. ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

   Los estudiantes asocian el estudio de la Trigonometría a una gran cantidad de fórmulas que deben aprender. No ven realmente la gran importancia y utilidad de este objeto matemático.

C. Conocimientos previos del alumno.

1. Conocimientos previos que necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático.

   Antes de comenzar el estudio de la Trigonometría, el alumno debe poseer los conocimientos previos de:

   - Semejanza de Triángulos: teorema de Thales.
   - Criterios de semejanza de triángulos.
   - Teorema de Pitágoras.

   Sería deseable que todos los alumnos tuvieran conocimiento de las razones trigonométricas y las relaciones que hay entre ellas. Pero, estos conocimientos son solo contenidos mínimos en la opción B de 4ºESO.
   Además de estos conocimientos, los estudiantes deben saber realizar operaciones aritméticas, operaciones con radicales y en sistema sexagesimal. Deben manipular expresiones algebraicas y resolver ecuaciones sin dificultad.

2. La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

   Según el Currículo Aragonés de Educación Secundaria Obligatoria (BOA 1/6/2007 págs. 8994-8996) los conocimientos mínimos respecto a Geometría para promocionar 4º de Educación Secundaria Obligatoria son entre otros:

   - *Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras para la obtención indirecta de medidas.*
   - *Criterios de semejanza de triángulos.*
   - *Razón de semejanza. Escala. Razón de semejanza de las áreas y los volúmenes.*
   - *Resolución de problemas geométricos frecuentes en la vida cotidiana.*

   Estos contenidos son comunes a las opciones A y B. Luego todos los alumnos que cursen primer curso de Bachiller, tienen los conocimientos previos a Trigonometría necesarios.

   Además la opción B incluye los siguientes conocimientos de Trigonometría.

   - *Razones trigonométricas de un ángulo agudo: seno, coseno y tangente.*
   - *Relaciones entre las razones trigonométricas de un mismo ángulo:* $tagx = senx/cosx;\ sen^2x + cos^2x = 1$
   - *Razones trigonométricas de los ángulos 30°, 45°, 60°, 90°.*
   - *Cálculo gráfico de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.*
   - *Resolución de problemas de triángulos rectángulos.*

- *Uso de la calculadora para el cálculo de ángulos y razones trigonométricas.*

Como al Bachiller científico-técnico se puede acceder desde cualquier opción de 4º de Educación Secundaria, puede haber alumnos que no tengan ningún conocimiento de trigonometría, aunque esto no es lo habitual.

3. ¿Mediante que actividades se va a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

   Se plantearán dos problemas (ver a continuación), que los alumnos resolverán de forma individual. Posteriormente se comentarán y resolverán en la pizarra.

   Teorema de Thales y de Pitágoras.

   PCP 1: "Para subir a un granero que ésta a 7m de altura utilizamos una escalera de 12m de longitud y con peldaños separados en 20cm. Se pregunta:

   (a) *¿Cuál es la distancia del pie de la escalera a la pared?*

   (b) *Nos fijamos en el peldaño número 25. ¿Cuánta dista del pie de la escalera? ¿A qué altura se encuentra? ¿A cuánta distancia, en horizontal, se encuentra del pie de la escalera?*

   PCP 2: "Halla el lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 9 y 7 cm".

D. Razones de ser del objeto matemático.

1. ¿Cuál es la razón o razones de ser que se va a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

   La distancia desde un punto situado al pie de una montaña hasta su cima, o desde una embarcación hasta un determinado punto de la costa, o la que separa dos astros, pueden resultar inaccesibles a la mediación directa; en cambio el ángulo que forma la visual dirigida a un accidente geográfico, o a un punto del cielo, con otra visual fijada de antemano, acostumbra ser fácil de medir mediante instrumentos relativamente sencillos. El objetivo de la trigonometría es establecer las relaciones matemáticas entre las longitudes de los lados de un triángulo con sus ángulos, de manera que resulte posible calcular las unas mediante las otras.

EL problema de obtener la distancia de un punto a otro inaccesible mediante la resolución de triángulos puede tener solución o no dependiendo de los datos de los que se parta. Con el teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas podemos resolver triángulos rectángulos, pero no siempre se dispone de estos triángulos. Cualquier triángulo no rectángulo puede ser resuelto, aplicando los métodos de resolución de los triángulos mediante la estrategia de la altura. Se trata de elegir adecuadamente una de sus alturas, de modo que al trazarlas se obtienen dos triángulos rectángulos. La razón de estudiar los teoremas del seno y del coseno es que nos permiten resolver cualquier triángulo sin tener que aplicar la estrategia de la altura. De esta forma los cálculos se facilitan.

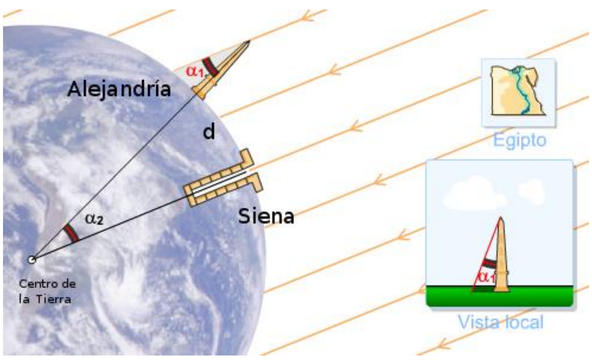
En resumen, se van a tener en cuenta dos razones de ser del objeto matemático, la primera el cálculo de distancias inaccesibles y la segunda la simplificación de los cálculos para resolver triángulos cualesquiera.

2. ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Si que coinciden.

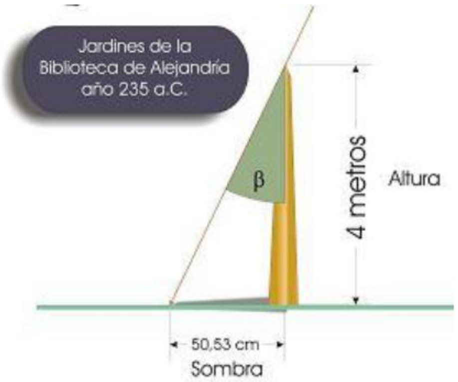
Los egipcios tenían algunos conocimientos sobre Trigonometría. El papiro Ahmes incluye un problema sobre la pendiente de una pirámide a partir de la altura y de la base.

Aplicaciones a la astronomía. Medir la circunferencia de la Tierra.
Eratóstenes (276 -194 a.C.) tenía noticia de un hecho que cada año se producía en una ciudad de Egipto llamada Siena (hoy Asúan). Sucedía cierto día del año (solsticio de verano), al mediodía, los obeliscos no producían sombra alguna. El agua de los pozos reflejaba como un espejo la luz del Sol. Sin embargo, Eratóstenes observó que en Alejandría, ese mismo día los obeliscos sí producían sombra. Eso sólo era posible si la Tierra era redonda, pues el Sol está tan lejos como para considerar que sus rayos inciden paralelamente sobre la Tierra.



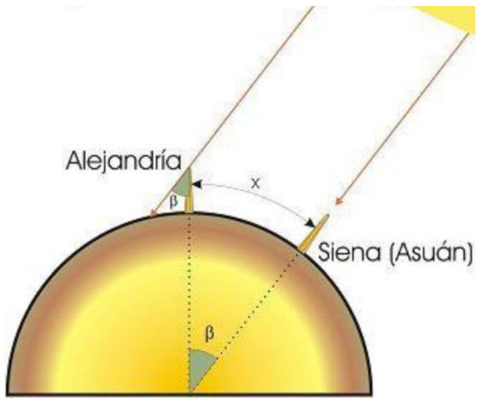
Eratóstenes pensó que midiendo la sombra de un obelisco en Alejandría, el mismo día y a la misma hora en que en Siena no proyectaba ninguna sombra, y sabiendo la distancia entre Siena y Alejandría, podría calcularse la circunferencia de la Tierra.

Sin embargo, se enfrentaba a dos problemas: averiguar la distancia entre Siena y Alejandría; y, ¿cuándo medir la sombra en Alejandría a la vez que en Siena (en esa época no había relojes)?
Eratóstenes ordenó y pagó a los jefes de caravanas que midieran la distancia entre las dos ciudades. Para ello debían poner esclavos a contar vueltas de rueda que daban los carros, a contar pasos, etc. Les salió una media de 5.000 estadios (1 estadio equivale a 157 m).
El segundo problema lo resolvió midiendo varias veces la sombra del obelisco. La menor sombra corresponde al momento en el que el Sol está en el cénit.



$$tg\beta = \frac{sombra}{altura} = \frac{0{,}5063}{4} = 0{,}126325$$

$$\beta = arctg\ 0{,}126325 = 7{,}2^{\circ}$$



Si 7,2° son una distancia de 5000 estadios (785 km), la circunferencia entera tendrá una longitud de 39.250 km.

La medida real es de 39.942 km.

3. Problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

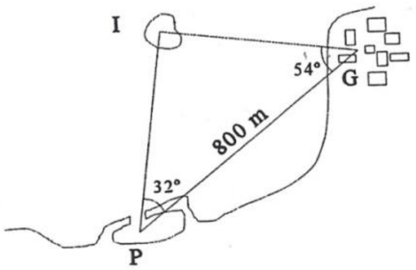
Para mostrar a los alumnos una de las razones de ser históricas de la Trigonometría, (el cálculo de distancias inaccesibles) se les planteará el siguiente problema basado en el experimento realizado por Eratóstenes para medir la circunferencia de la Tierra.

PRS 1: "Al mediodía medimos la sombra proyectada por un semáforo de 2m en Zaragoza y Huesca, siendo estas de 1,78 m y 1,83 m respectivamente. ¿Podemos conocer con estos datos la circunferencia de la tierra?"

Otra de las razones de ser que se pretende mostrar a los alumnos es la conveniencia de utilizar el teorema del seno y del coseno para simplificar el cálculo a la hora de resolver problemas cualesquiera. Por esto, se plantearán a los alumnos los siguientes problemas (PRS 2 y PRS 3). Los resolverán mediante razones trigonométricas y una vez enunciados los teoremas de seno y coseno se volverán a resolver utilizando estos. De esta forma los alumnos verán la importancia del objeto matemático a estudiar.

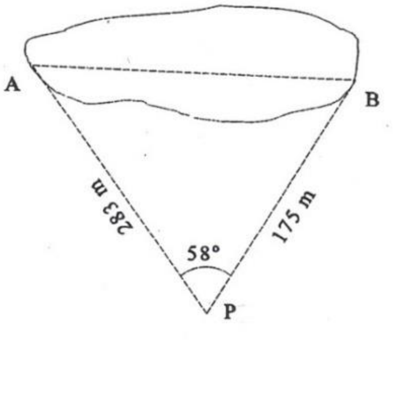
Teorema del seno

PRS 2: "Queremos ir con una lancha hasta un islote (I), pero antes nos gustaría saber a qué distancia se encuentra el puerto deportivo (P). Para ello localizamos algún edificio del pueblo, por ejemplo, la iglesia (G), y medimos los ángulos IPG (32°) y PGI (54°), y la distancia del puerto a la iglesia (800m). ¿Cuánto dista el dista el islote del puerto."



Teorema del coseno

PRS 3: "Para medir la anchura de un lago nos situamos en la posición P y tomamos las medidas que aparecen en la siguiente figura. ¿Cuál es la anchura del lago?"



4. Metodología a seguir en su implantación en el aula.

   Se planteará el problema PRS 1, después de realizar los dos problemas de conocimientos previos (PCP 1 y PCP 2). Los alumnos trabajarán por parejas para buscar la solución. Si es necesario, se darán indicaciones. Se establecerá un debate sobre la resolución y se comentará en la pizarra una posible solución. A continuación se explicará el método seguido por Eratóstenes para el cálculo de la circunferencia de la Tierra y se comentarán los problemas a los que se enfrento.

   Los problemas PRS 2 y PRS 3 se propondrán a los alumnos cuando se explique la estrategia de la altura. Se resolverán de forma individual, y se corregirán en la pizarra (bien serán corregidos por un alumno o por el profesor). Una vez enunciados y demostrados los teoremas del seno y del coseno, los alumnos volverán a resolver estos problemas de forma individual pero utilizando dichos teoremas. De esta forma se pretende que los alumnos sean conscientes de la necesidad del objeto matemático.

E. Campo de problemas.

1. Distintos problemas que se van a presentar en el aula.

   Los problemas que se van a tratar están dirigidos a la resolución de situaciones de la vida cotidiana relacionadas con la trigonometría. Se pretende que los alumnos adquieran habilidad en la resolución de triángulos a lo largo de las sesiones. Para ello se mostrarán ejemplos y se propondrán problemas con un incremento progresivo de dificultad.

   El campo de problemas se divide en dos grupos principalmente:

   - Resolución de triángulos rectángulos.
     - Conocidos dos lados. (Teorema de Pitágoras).
     - Conocido un lado y el ángulo agudo. (Razones trigonométricas).
   - Resolución de triángulos cualesquiera.
     - Conocidos dos ángulos y un lado. (Estrategia de la altura. Tª del seno).
     - Conocidos dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. (Teoremas del seno y del coseno). Este caso puede dar lugar a dos soluciones o que no exista.
     - Conocidos tres lados. (Teorema del coseno).
     - Conocidos dos lados y el ángulo que forman. (Teorema del coseno).

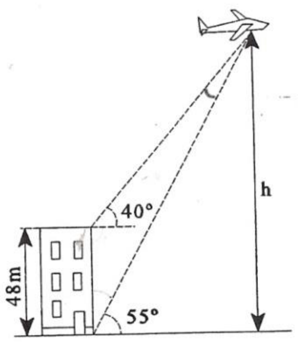
<u>Resolución de triángulos rectángulos.</u>

- Conocidos dos lados: PCP 1 y PCP 2. Este caso sólo se tratará en los problemas de conocimientos previos, ya que pueden resolverse aplicando Pitágoras y los alumnos ya conocen este teorema.

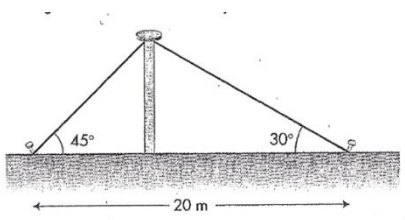
- Conocidos un lado y el ángulo agudo. Como tenemos un triángulo rectángulo sabemos que este triángulo tiene un ángulo recto, también es dato otro ángulo, luego conocemos los tres ángulos. Además del PRS 1, se propondrán los siguientes problemas:

PTR 1. Problemas de ALTURAS con UN observador:"Hallar la altura de un árbol sabiendo que proyecta una sombra de 7m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30° con la horizontal."

PTR 2. "Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el portal (55 º) y desde la terraza (40 º) de nuestra casa. Como ésta tiene 15 pisos, su altura aproximada es de 48 m. ¿A qué altura, aproximadamente, vuela el avión?



PTR 3. Problemas de ALTURAS con DOS observadores: "Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable? ".



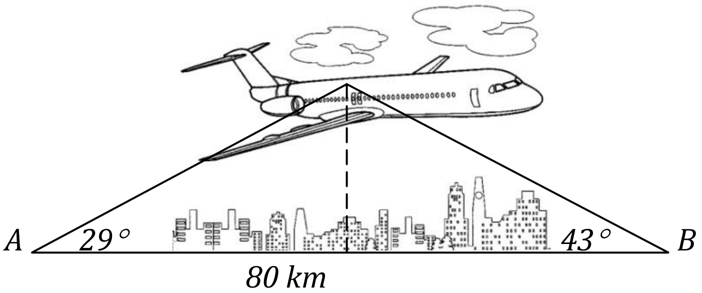
PTR 4.Problemas de DISTANCIAS: "La torre de Pisa tiene una inclinación respecto de la vertical de 3° 11′ y una altura de 54m. Calcula el desplazamiento horizontal de la parte más elevada respecto de la base".

<u>Resolución de triángulos cualesquiera.</u>

- Conocidos dos ángulos y un lado:

Estrategia de la altura.

PEA 1. "Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?"



PEA 2. "Para hallar el ancho del río procedemos así: Nos situamos en A, a una orilla del río, y medimos el ángulo 53° bajo el cual se ve un árbol que está frente a nosotros, en la otra orilla. Nos alejamos 20 m de la orilla en dirección perpendicular a ella y volvemos a medir el ángulo bajo el cual se ve el árbol, 32°."

Teorema del seno.

- Conociendo un lado y dos ángulos.

PTS 1. "Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos: $\widehat{BAC} = 46°$ *y* $\widehat{BCA} = 53°$*. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?"*

- Conocidos dos lados y el ángulo opuesto:

PTS 2. "Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 m, y entre Berto y Camilo 12 m. El ángulo formado en la es esquina de Camilo es de 20°. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo."

Teorema del coseno.

- Conociendo los tres lados.

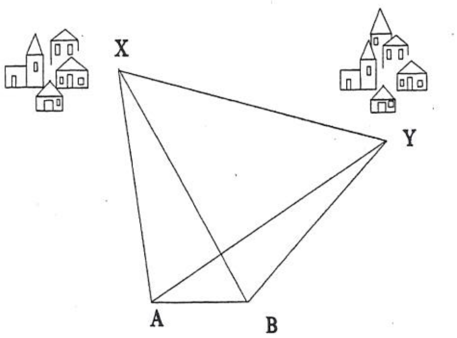
PTC 1. "Desde dos puestos de control, que distan entre sí 8.400m, se detecta un avión que sobrevuela la línea que une ambos puestos y dista 5.800m del primero y 4.500 del segundo. ¿A qué altura vuela el avión?

- Conociendo dos lados y el ángulo comprendido.

PTC 2. Problema de velocidades: "De un puerto salen simultáneamente dos barcos, con rumbos que difieren en 33° y velocidades de 24 y 29 nudos, respectivamente. ¿A qué distancia se encontrarán, uno del otro, al cabo de 1 hora y 20 minutos?"

Aplicación de los teoremas del seno y del coseno.

PA 1: "Queremos saber la distancia entre dos aldeas, X e Y, que vemos a lo lejos; para ello, nos situamos sucesivamente en los puntos A y B que distan 300m, y medimos los ángulos XBY (53°), YAB (62°), XBA (47°) y XAB (112°). ¿Cuál es la distancia entre X e Y?



	CONTENIDO	DATOS	METODOLOGÍA		
			Forma	Dibujo	Corrección
Problemas de triángulos rectángulos					
PCP 1	Pitágoras, Thales	Dos lados (hipotenusa y cateto)	Individual	No	Pizarra
PCP 2	Pitágoras	Dos lados (los dos catetos)	Individual	No	Pizarra
PRS 1	Raz. trigon.	Dos lados	Parejas	No	Pizarra
PTR 1	Raz.trigon.	Un lado y el ángulo agudo	Parejas	No	Pizarra
PTR 2	Raz.trigon.	Un lado y el ángulo agudo	Parejas	Si	Entregar
PTR 3	Raz.trigon.	Un lado y el ángulo agudo	Parejas	Si	Pizarra
PTR 4	Raz.trigon.	Un lado y el ángulo agudo	Parejas	No	Pizarra
Problemas de triángulos cualesquiera					
PEA 1	Raz.trigon.	Dos ángulos y un lado	Profesor	Si	Pizarra
PEA 2	Raz.trigon.	Dos ángulos y un lado	Individual	No	Pizarra
PRS 2	Tª del seno	Dos ángulos y un lado	Individual	Si	Pizarra
PTS 1	Tª del seno	Dos ángulos y un lado	Individual	No	Pizarra
PTS 2	Tª del seno	Dos lados y el ángulo opuesto	Individual	No	Entregar
PRS 3	Tª del coseno	Dos lados y el ángulo comprendido	Individual	Si	Pizarra
PTC 1	Tª del coseno	Tres lados	Individual	No	Entregar
PTC 2	Tª del coseno	Dos lados y el ángulo comprendido	Individual	No	Pizarra
PA 1	Tª del seno y coseno	Aplicación de los Tª seno y coseno	Parejas	Si	Pizarra

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

   Antes de conocer la trigonometría, los alumnos resolvían problemas de triángulos rectángulos aplicando el teorema de Pitágoras. Para ello, es necesario conocer dos lados del triángulo. Pero, si en lugar de dos lados, se tiene un lado y un ángulo, el problema ya no puede resolverse. La solución es introducir las razones trigonométricas.

   El teorema de Pitágoras y las razones trigonométricas resuelven problemas de triángulos rectángulos, pero no siempre, los problemas se reducen a la resolución de estos. Si se tiene un triángulo cualquiera, trazando la altura adecuada, puede resolverse utilizando la estrategia de la altura. Pero, los teoremas del seno y del coseno facilitan estos cálculos, de ahí la razón para estudiarlos.

3. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

   La trigonometría mide distancias y ángulos. Los problemas que van a plantearse pueden parecer distintos, pero en el fondo se trata de calcular longitudes, bien calculando la altura de objetos o distancias entre puntos. Además los problemas pueden plantearse en distintos campos, lo que a priori también puede parecer un campo de problemas distinto.

   La metodología que se va a seguir en el aula es la siguiente: Se van a ir planteando problemas en los que se evidencie que las herramientas y conocimientos previos de los alumnos no son suficientes. Pitágoras no es suficiente para resolver cualquier triángulo rectángulo (depende de los datos del problema), en consecuencia se introducen las razones trigonométricas. Estas no resuelven problemas de triángulos cualesquiera, se estudia la estrategia de la altura y por último se enuncian los teoremas del seno y del coseno.

   Al comenzar el tema de Trigonometría se les planteará a los alumnos un problema para resolverlo mediante el teorema de Pitágoras y semejanza de triángulos. De esta forma se pretende comprobar los conocimientos previos de los estudiantes.

   Una vez que se hayan recordado las razones trigonométricas de un ángulo y las relaciones entre ellas, los alumnos resolverán problemas mediante estas razones trigonométricas.
   A continuación, se plantearán y resolverán una serie de problemas de triángulos rectángulos para que los alumnos afiancen los conceptos de razones trigonométricas. El siguiente paso será resolver triángulos cualesquiera.

Para resolver un triángulo cualquiera es suficiente con elegir adecuadamente una altura y trazarla. De esta forma, se obtienen dos triángulos rectángulos que pueden resolverse. Este método se conoce como estrategia de la altura. Se plantearán un par de problemas para resolverlos mediante esta técnica. Cuando se enuncien los teoremas del seno y del coseno, se volverán a resolver los mismos problemas aplicando estos, de esta forma se pretende que los alumnos sean conscientes de cómo estos facilitan el trabajo. Se propondrán problemas que se resuelven aplicando el teorema del seno o del coseno.

Por último, se plantearán problemas mezclados, para que los alumnos analicen los resultados que conocen y apliquen el que consideren válido, en definitiva que encuentren la solución.

Los problemas se resolverán de forma individual o por parejas. Excepto aquellos problemas que se han especificado para ser entregados, se corregirán en la pizarra, y serán los alumnos los que desarrollen una solución. (Ver apartado E.1 pág.13)

F. Técnicas.

1. Ejercicios que se van a presentar en el aula.

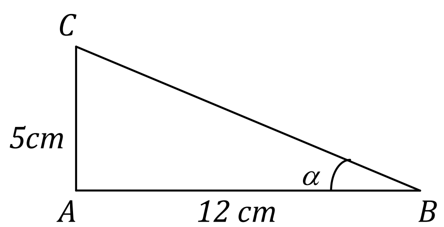
Todos los ejercicios que se plantean están pensados para que los alumnos adquieran habilidad en el manejo de expresiones trigonométricas, con el objetivo de que al resolver triángulos no tengan dificultades de cálculo.

Los ejercicios que se plantean son:

- Ejercicios de razones trigonométricas de un ángulo agudo.
- Ejercicios de razones trigonométricas de un ángulo obtuso.
- Acerca de las relaciones entre las razones trigonométricas del mismo ángulo.
- Paso de radianes a grados y viceversa.
- Uso de la calculadora.

<u>Razones trigonométricas de un ángulo agudo.</u>

E 1. "Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$ en el siguiente triángulo"



Razones trigonométricas de un ángulo obtuso.

E 2. "Calcula las razones trigonométricas de 150°y de 225°".

Relaciones entre las razones trigonométricas del mismo ángulo.

E 3. "Sabiendo que $cos\alpha = 0{,}63$, calcular $s = sen\ \alpha$ y $tg\alpha$".

E 4. "Sabiendo que $tg\alpha = 2$, calcular $sen\alpha = s$ y $cos\alpha = c$".

Radianes. Grados.

E 5. "Pasa de grados a radianes: 75°y 240°".

E 6. "Pasa de radianes a grados: $\pi/3$ y $3\pi/4$ ".

Utilización de la calculadora en trigonometría.

E 7.: "Calcular sen 42°31′58″ ".

E 8. "Calcular cos $\frac{\pi}{3}$ ".

E 9. "Si tgα = 1,34, calcular α ".

E 10. "Si senα =0,84, calcular tgα ".

A continuación se muestra una tabla como resumen de los ejercicios propuestos y la metodología a seguir.

	CONTENIDO	METODOLOGÍA	
		Forma	Corrección
E 1	Razones trigonométricas de un ángulo agudo	Individual	Pizarra
E 2	Razones trigonométricas de un ángulo obtuso	Individual	Pizarra
E 3	Relaciones trigonométricas de un mismo ángulo	Parejas	Pizarra
E 4	Relaciones trigonométricas de un mismo ángulo	Parejas	Pizarra
E 5	Radianes, grados	Parejas	Voz alta
E 6	Radianes, grados	Parejas	Voz alta
E 7	Calculadora	Individual	Voz alta
E 8	Calculadora	Individual	Voz alta
E 9	Calculadora	Individual	Voz alta
E 10	Calculadora	Individual	Voz alta

2. ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

   Los ejercicios de paso de radianes a grados, y viceversa proponen familiarizar a los estudiantes con otros sistemas de medida. Además, de aprender el uso de la calculadora e introducir los datos correctamente.

   Con los ejercicios de razones trigonométricas se pretende afianzar estos conceptos y asimilar las propiedades y relaciones. Además de adquirir habilidad en el manejo de expresiones trigonométricas.

3. Dichas técnicas ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

   Todas las técnicas que se enseñan son necesarias para resolver los problemas. No se pretende enseñar conceptos que los alumnos no vayan a utilizar. Con esto se intenta evitar la memorización de fórmulas innecesarias.

4. Metodología a seguir en su implementación en el aula.

   Una vez definidas las razones trigonométricas, se plantearán ejercicios para que los alumnos ejerciten y asimilen los conceptos. Es necesario, que comprendan estos y que realicen los cálculos correctamente, para que posteriormente resuelvan los problemas sin dificultad.

   Los estudiantes deben hacer ejercicios de radianes y grados, familiarizarse con estos sistemas de medida. Hacer operaciones con sistema sexagesimal y pasar de uno a otro.
   Es importante también que los alumnos sitúen los ángulos, que sepan en que cuadrante están.

   Es conveniente plantear ejercicios para el manejo de la calculadora. Uno de los problemas que se les plantea a los alumnos es introducir los datos correctamente, tanto en radianes como en grados.

   Al igual que en el caso de los problemas, los alumnos trabajarán de forma individual o por parejas. La corrección de estos ejercicios se realizará en la pizarra y serán resueltos por los estudiantes.

G. Tecnologías (justificación de las técnicas).

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

   Para demostrar el teorema del seno y del coseno se va utilizar la estrategia de la altura. Hasta ahora los alumnos sabían resolver triángulos rectángulos, para triángulos cualesquiera basta trazar la altura adecuada y aplicar dichos razonamientos (estrategia de la altura). Los teoremas del seno y del coseno son una generalización de este método.

2. ¿Quién (profesor, alumnos, nadie) va asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

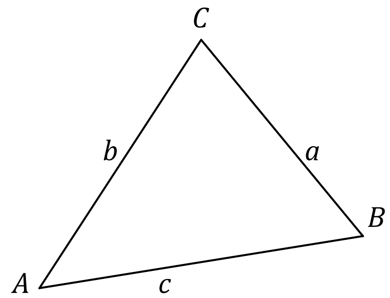
   Las técnicas serán justificadas por el profesor, aunque se dejaran algunos resultados para que los demuestren los alumnos.

3. Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático.

<u>Teorema del seno</u>

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y de ángulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}}$$

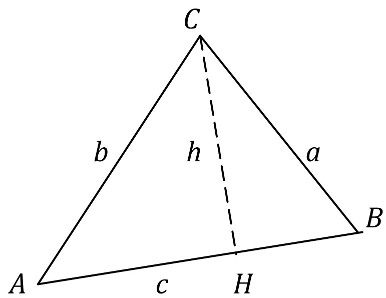


Demostración:

Se traza la altura desde el vértice C. Los triángulos AHC y BHC son rectángulos. Por tanto se tiene:

$$sen\ \hat{A} = \frac{h}{b} \rightarrow h = b \cdot sen\hat{A}$$

$$sen\ \hat{B} = \frac{h}{a} \rightarrow h = a \cdot sen\hat{B}$$



Igualando:

$$b \cdot sen\hat{A} = a \cdot sen\hat{B} \ \rightarrow \ \frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}}$$

Esta es la primera de las igualdades buscadas.

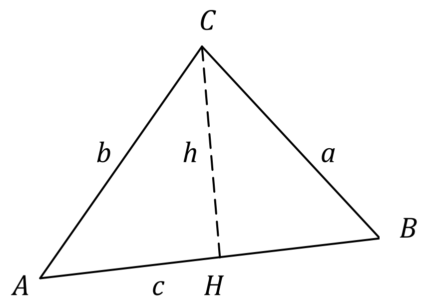
Si se traza la altura desde el vértice B, se relacionan los lados a y c con sus ángulos opuestos, obteniendo: $\frac{a}{sen\ \hat{A}} = \frac{c}{sen\ \hat{C}}$

Se completa así, la cadena de igualdades que se quería demostrar.

Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c, se cumple:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B}$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$



Demostración:

Se traza la altura, h, sobre el lado b:

$\overline{AH} = c \cos \hat{A}$

$\overline{HC} = b - \overline{AH} = b - c \cos \hat{A}$

Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos AHB y BHC y teniendo en cuenta las igualdades anteriores, resulta:

$a^2 = h^2 + \overline{HC}^2 = h^2 + (b - cos \widehat{A})^2 = h^2 + b^2 + c^2 \ cos^2\widehat{A} - 2bc \cos\hat{A}$

$c^2 = h^2 + \overline{AH}^2 = h^2 + (cos \widehat{A})^2 = h^2 + c^2 \ cos^2\widehat{A}$

Restando: $a^2 - c^2 = b^2 - 2bc \ cos\hat{A} \rightarrow a^2 = c^2 + b^2 - 2bc \ cos\hat{A}$

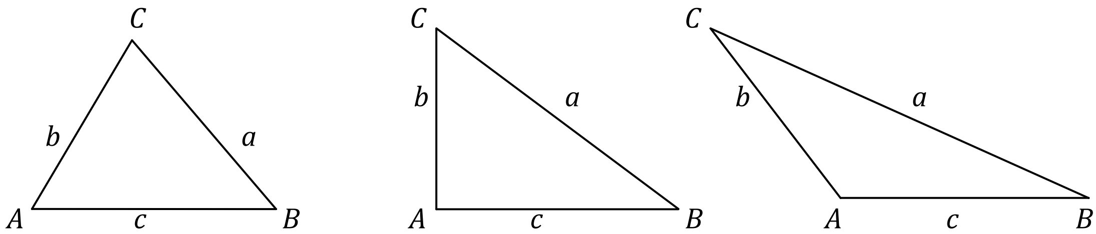
De forma análoga se llegaría a las otras dos relaciones.

4. Metodología a seguir en la implementación en el aula.

Después de resolver triángulos rectángulos, se planteará el caso de un triángulo cualquiera. Con las indicaciones y preguntas del profesor los alumnos resolverán este triángulo trazando la altura desde el vértice adecuado, obteniendo así dos triángulos rectángulos y aplicando los conocimientos que tienen para triángulos rectángulos. De esta forma se introducirá la estrategia de la altura.

A continuación, se enunciará y demostrara el teorema del seno. Para ver que, realmente este teorema simplifica los cálculos, se volverá a resolver el problema PRS 2 resuelto mediante la estrategia de la altura aplicando el teorema. Se dará a los alumnos una tabla con los casos donde se puede aplicar el teorema del seno.

Para el teorema del coseno, se llevará a los alumnos a la sala de informática. Se plantearán los siguientes triángulos y las siguientes relaciones:



$a^2 < b^2 + c^2$ $a^2 = b^2 + c^2$ $a^2 > b^2 + c^2$

Con la ayuda de Geogebra, los alumnos dibujaran un triángulo. Calcularán a^2, b^2 y c^2 y verán que "moviendo" el vértice C, se cumplen las relaciones anteriores (ver secuencia didáctica pág.37)

Después se enunciará y demostrara el teorema del coseno. Se resolverá con este teorema el otro problema PRS 3, e igual que en el caso del teorema del seno, se dará una tabla de casos para los alumnos.

H. Secuencia didáctica y su cronograma.

1. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

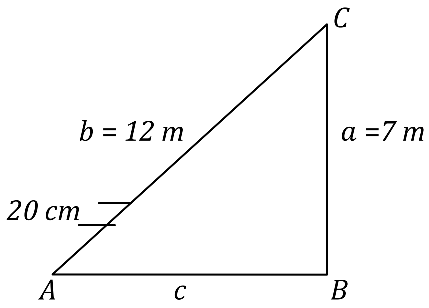
La trigonometría pretende resolver triángulos, es decir, obtener uno o más de sus elementos desconocidos partiendo de los elementos (lados y ángulos) que se conocen.

Se comenzará el tema, proponiendo unos problemas sobre los conocimientos previos de los alumnos. Estos, se resuelven aplicado el teorema de Thales y de Pitágoras. Se dejará un tiempo para que los alumnos los resuelvan de forma individual y a continuación se corregirán y comentarán en la pizarra. Se pretende con ellos, comprobar si los alumnos poseen los conocimientos necesarios iníciales para abordar los conceptos de trigonometría.

***PCP 1:** "Para subir a un granero que ésta a 7m de altura utilizamos una escalera de 12m de longitud y con peldaños separados en 20cm. Se pregunta:*

***(a)** ¿Cuál es la distancia del pie de la escalera a la pared?*

(b) *Nos fijamos en el peldaño número 25. ¿Cuánta dista del pie de la escalera? ¿A qué altura se encuentra? ¿A cuánta distancia, en horizontal, se encuentra del pie de la escalera?*



Solución:

(a) *Para calcular la distancia del pie de la escalera a la pared, solamente tenemos que aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo* $\widehat{ABC}$.

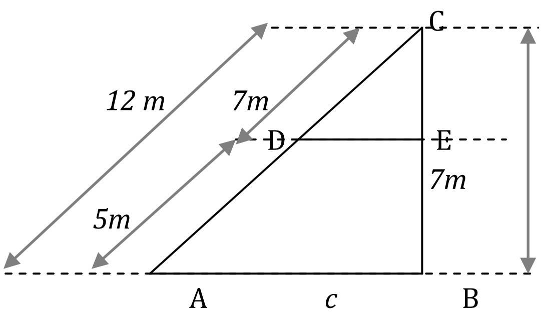
Cateto= 7m
Hipotenusa=12m

$$b^2 = c^2 + a^2 \;\rightarrow\; 12^2 = c^2 + 7^2 \;\rightarrow\; c = \sqrt{12^2 - 7^2} \;\rightarrow\; c = 9{,}746\ m$$

(b) *Para resolver este apartado necesitamos aplicar el teorema de Thales.*

El peldaño 25 se encuentra a una distancia del pie de la escalera de 0, 20 m x 25 =5 m.

Considerar los siguientes triángulos:



El triángulo $\widehat{ACB}$ *es semejante a* $\widehat{DCE}$, *porque el ángulo* $\widehat{C}$ *es común y los dos tienen un ángulo de 90 ° (son rectángulos.)*

Podemos aplicar el teorema de Thales:

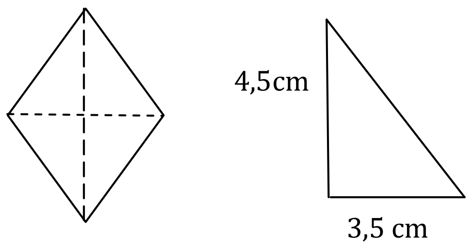
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{CE}} \;\rightarrow\; \frac{12}{7} = \frac{7}{\overline{CE}} \;\rightarrow\; \overline{CE} = 4{,}08\ m$$

El peldaño 25 se encuentra a una altura de 7 m – 4,08 m = 2,91 m.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} \;\rightarrow\; \frac{12}{7} = \frac{9{,}746}{\overline{DE}} \;\rightarrow\; \overline{DE} = 5{,}685\ m$$

PCP 2: *"Calcular el lado de un rombo, sabiendo que sus diagonales miden 7 y 9cm".*

Solución:



Aplicamos el teorema de Pitágoras:

$l^2 = (4{,}5)^2 + (3{,}5)^2$

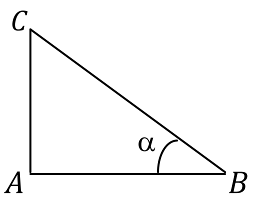
$l = 5{,}7\ cm$

Resolver un triángulo significa conocer sus lados y sus ángulos. En un triángulo rectángulo, si conocemos dos lados podemos calcular el tercero, pero no podemos conocer sus ángulos, solamente utilizando Pitágoras (a no ser que sea un triángulo isósceles). Para resolver totalmente cualquier triángulo necesitamos la trigonometría.

En este punto se planteará a los alumnos el problema PRS 1. Los alumnos trabajarán por parejas y al cabo de unos minutos se comentarán las ideas que hayan tenido. Tanto si los alumnos resuelven el problema como si no, se definirán los conceptos de razones trigonométricas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO.

Dado un triángulo rectángulo:



Se llaman razones trigonométricas de un ángulo agudo, α, a las siguientes relaciones:

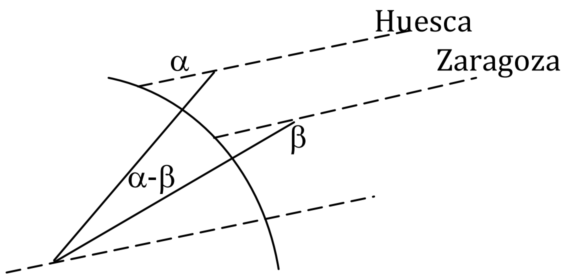
$$seno\ de\ \alpha = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} \qquad sen\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$$

$$coseno\ de\ \alpha = \frac{longitud\ del\ cateto\ contiguo\ a\ \alpha}{longitud\ de\ la\ hipotenusa} \qquad cos\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$$

$$tangente\ de\ \alpha = \frac{longitud\ del\ cateto\ opuesto\ a\ \alpha}{longitud\ del\ cateto\ contiguo\ a\ \alpha} \qquad tg\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

Si los alumnos no resolvieron el problema PRS 1, será ahora cuando, con las indicaciones necesarias encuentren una solución. A continuación se comentará como Eratóstenes midió la circunferencia de la tierra. De esta forma se pone de manifiesto una de las razones de ser de la trigonometría, el cálculo de distancias inaccesibles.

PRS 1. *"Al mediodía medimos la sombra proyectada por un semáforo de 2m en Zaragoza y Huesca, siendo estas de 1,78 m y 1,83 m respectivamente. ¿Podemos conocer con estos datos la circunferencia de la tierra?"*



Solución:

$$Huesca:\ tg\alpha = \frac{1{,}83}{2} = 0{,}915\ \ luego\ \alpha = 42°27′30″$$

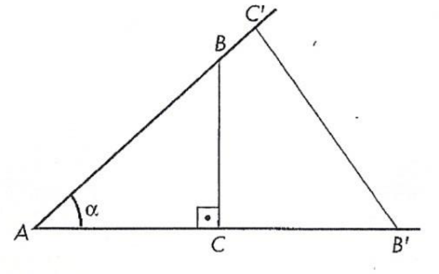
$$Zaragoza: tg\beta = \frac{1{,}78}{2} = \ luego\ 0{,}89\ \beta = 41°40′8″$$

Luego, $\alpha - \beta$ =0° 47′ 22″. Sabiendo que Zaragoza y Huesca distan 86 km, podemos deducir que si un ángulo de 0° 47′ 22″ abarca un arco de 86 km, la circunferencia completa (360°) serán 39.217,45 km.

Se hará notar a los alumnos que las razones trigonométricas no dependen del triángulo rectángulo elegido. Para ello, se planteará la siguiente actividad:

Se distribuirán los alumnos en grupos de tres. Cada grupo tendrá una colección de triángulos rectángulos semejantes. Se les pedirá que calculen los cocientes entre los lados. Los alumnos se darán cuenta que esos cocientes son iguales en todos los triángulos que poseen (siempre que estén tomando lados correspondientes).

De una forma más formal, se pedirá a los alumnos que, basándose en el dibujo siguiente, demuestren que el $sen\alpha$ no depende del triángulo.



Si sobre un ángulo, α, se construyen dos triángulos rectángulos distintos, ABC y AB'C', se obtienen dos valores para $sen\alpha$:

En ABC $\rightarrow sen\alpha = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

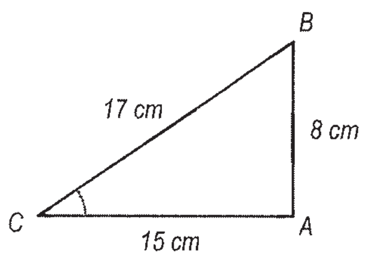
En AB'C' $\rightarrow sen\alpha = \dfrac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$

Ahora bien, los triángulos ABC y AB'C' son semejantes por ser rectángulos y tener un ángulo, α, igual. Por tanto sus lados son proporcionales, es decir:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{AB'}}$$

El valor que se obtiene para $sen\alpha$ es el mismo en ambos triángulos.
Análogamente se demuestra que $cos\alpha$ y $tg\alpha$ no dependen del triángulo trazado.

Se realizará en la pizarra el siguiente ejemplo y así se recordará a los alumnos como se calculan las razones trigonométricas de un ángulo agudo.



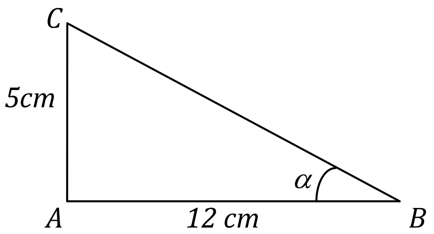
$$sen\,\hat{C} = \frac{8}{17} = 0{,}47\ cm$$

$$cos\,\hat{C} = \frac{15}{17} = 0{,}88\ cm$$

$$tg\,\hat{C} = \frac{8}{15} = 0{,}53\ cm$$

Para que los alumnos practiquen se les plantearán ejercicios como el siguiente:

E 1: *"Halla las razones trigonométricas del ángulo $\hat{C}$ en el siguiente triángulo"*



Solución:

Se puede calcular la hipotenusa aplicando el teorema de Pitágoras:

$$\overline{BC}^2 = 5^2 + 12^2 \quad \rightarrow \quad \overline{BC} = 13\ cm$$

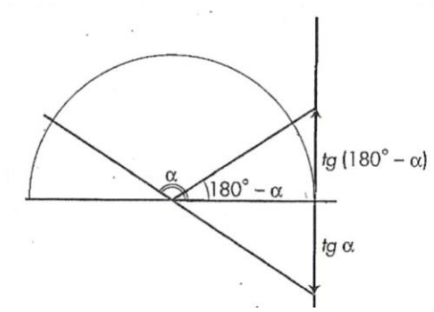
$$sen\ \alpha = \frac{5}{13} = 0{,}384\ cm$$

$$cos\ \alpha = \frac{12}{13} = 0{,}923\ cm$$

$$tg\ \alpha = \frac{5}{12} = 0{,}416\ cm$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO OBTUSO.

Dado α es un ángulo obtuso, se va a definir sus razones trigonométricas, mediante este semicírculo de radio 1, relacionándolas con las de su ángulo suplementario, 180° - α, que es agudo.



$$sen\alpha = sen\ (180° - \alpha)$$

$$cos\ \alpha = -cos\ (180° - \alpha)$$

$$tg\alpha = \frac{sen\ (180° - \alpha)}{-\cos(180° - \alpha)} = -tg(180° - \alpha)$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO ENTRE 0° Y 360°

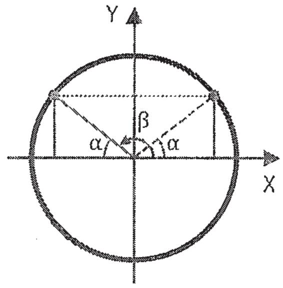
Se traza una circunferencia cualquiera y se toma como unidad la longitud del radio. Considerar un sistema de coordenadas con el origen en el centro de la circunferencia.

Se sitúan los ángulos sobre ella de la siguiente manera:

- Su vértice, es el centro.
- Uno de los lados coincidiendo con el semieje positivo de las X.
- El otro lado se sitúa donde corresponda, abriéndose el ángulo en el sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj.

La circunferencia, sobre la cual se sitúan los ángulos como se ha descrito se llama circunferencia goniométrica. Con ella resulta muy sencillo definir y visualizar las razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

- Si β es un ángulo del 2º cuadrante, existe un ángulo α del 1er cuadrante tal que β se puede expresar como $(180° - \alpha)$.

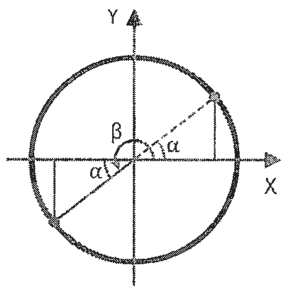


$$sen\,\beta = sen\alpha$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

$$tg\beta = -tg\alpha$$

- Si β es un ángulo del 3er cuadrante, existe un ángulo α del 1er cuadrante tal que β se puede expresar como $(180° + \alpha)$.

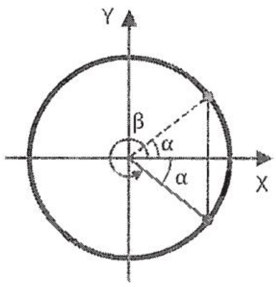


$$sen\,\beta = -sen\alpha$$

$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

$$tg\beta = tg\alpha$$

- Si β es un ángulo del 4º cuadrante, existe un ángulo α del 1er cuadrante tal que β se puede expresar como $(360° - \alpha)$.



$$sen\,\beta = -sen\alpha$$

$$\cos\beta = \cos\alpha$$

$$tg\beta = -tg\alpha$$

En este tema no tiene gran relevancia la reducción de un ángulo cualquiera a uno del primer cuadrante, son conceptos útiles en trigonometría pero no esenciales en esta parte. Debido a esto, se propondrá a los alumnos el siguiente ejercicio pero no se hará más hincapié.

E 2. *"Hallar las razones trigonométricas de 150 °y 225 °".*

Solución:

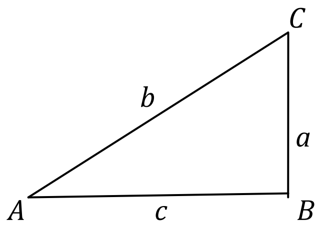
$sen\,150° = sen\,(180° - 150°) = sen\,30° = 0{,}5$
$cos150° = -\,cos\,(180° - 150°) = -cos\,30° = -0{,}866$
$tg150° = -tg(180° - 150°) = -tg\,30° = -0{,}577$

RELACIONES ENTRE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DEL MISMO ÁNGULO

Los valores de *sen, cos y tg* de un mismo ángulo no son independientes, sino que están relacionadas por las igualdades que se dan a continuación. Gracias a ellas conocida una de las tres razones de un ángulo, podemos obtener las otras dos.

$$(sen\ \alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1$$

$$\frac{sen\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha$$



Demostración:

$$sen\alpha^2 + cos\alpha^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \left(\frac{c}{b}\right)^2 = \frac{a^2+c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1$$

Tª de Pitágoras

$$a^2 + c^2 = b^2$$

$$\frac{sen\ \alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b} : \frac{b}{c} = tg\alpha$$

Se considerarán los siguientes ejemplos:

E 3: *Sabiendo que* $cos\alpha = 0{,}63$, *calcular* $s = sen\ \alpha$ *y* $tg\alpha$.

Solución:

$$s^2 + (0{,}63)^2 = 1 \ \rightarrow\ s^2 = 1 - (0{,}63)^2 \ \rightarrow s = \sqrt{0{,}6031} = 0{,}777$$

$$t = \frac{0{,}777}{0{,}63} = 1{,}23$$

E 4**:** *Sabiendo que* $tg\alpha = 2$, *calcular* $sen\alpha = s$ *y* $cos\alpha = c$.

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{s}{c} = 2 \\ \\ s^2 + c^2 = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} s = 2c \\ \\ (2c)^2 + c^2 = 1 \ \rightarrow\ 5c^2 = 1 \rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}} \rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{array}$$

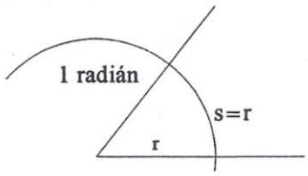
Luego:

$$sen\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 0{,}894;\ \ cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} = 0{,}447$$

RADIANES Y GRADOS.

Los estudiantes deben transformar grados, minutos y segundos en radianes y viceversa.
Para la medición en grados, se considera una división de la circunferencia en 360 partes iguales, cada una de las cuales mide un grado. Esta unidad se subdivide en minutos y, cada minuto, en segundos, siguiendo un sistema de numeración en base 60.

Un radián es la medida de un ángulo cuyo arco es igual al radio. Si se considera el radio de la circunferencia como unidad la longitud, la medida en radianes del ángulo coincide con la medida de la longitud del arco.



Se deduce que la medida en radianes del ángulo correspondiente a una circunferencia completa es igual a la longitud de la circunferencia de radio unidad, es decir, 2π.
Por lo tanto, para pasar de grados a radianes, o al revés, se puede utilizar la fórmula:

$$\frac{medida\ en\ radianes}{medida\ en\ grados} = \frac{2\pi}{360}$$

Se plantearán los ejercicios siguientes:

E 5: *"Pasa de grados a radianes: 75° y 240°".*

Solución:

$$\frac{x}{75} = \frac{2\pi}{360} luego\ x = \frac{5\pi}{12}\ rad$$

E 6: "*Pasa de radianes a grados: π/3 y 3π/4".*

Solución:

$$\frac{\pi/3}{x} = \frac{2\pi}{360} luego\ x = 60^{\circ}$$

USO DE LA CALCULADORA

Se trata de que los alumnos aprendan a usar la calculadora para calcular razones trigonométricas, tanto en radianes como en grados sexagesimales. Estos ejercicios servirán también para recordar a los alumnos los diferentes tipos de redondeos y los errores que pueden arrastrar a lo largo de un problema a causa de estos errores. Las calculadoras trabajan con un número limitado de cifras, también nosotros realizamos redondeos, bien por truncamiento, por exceso o por defecto. En cualquier caso, estos errores afectan al resultado originando así un resultado aproximado de la solución.

Obtención de sen, cos y tg de un ángulo.

Las calculadoras científicas tienen las teclas $\boxed{\text{sin}}$, $\boxed{\text{cos}}$, $\boxed{\text{tg}}$, correspondientes a las razones trigonometricas *sen, cos, tg*.

Si el ángulo viene dado en grados, la calculadora debe estar en el "modo DEG".

Si el ángulo esta dado en radianes, la calculadora debe estar en el "modo RAD".

Cómo pasar de grados, minutos y segundos a grados y viceversa.

La tecla $\boxed{\circ\,'\,''}$ permite introducir en la calculadora un ángulo dado en grados, minutos y segundos. La calculadora da automáticamente una expresión decimal de la medida del ángulo.

Para pasar de una expresión decimal de grados a grados, minutos y segundos se utiliza la secuencia $\boxed{\text{INV}}\ \boxed{\circ\,'\,''}$

Considerar los siguientes ejercicios:

E 7: *"Calcular sen 42° 31′ 58″ .*

(DEG) $\boxed{\text{sin}}$ *42* $\boxed{\circ\,'\,''}$ *31* $\boxed{\circ\,'\,''}$ *58* $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{0.676011878}$

E 8: *"Calcular cos* $\frac{\pi}{3}$ *".*

(RAD) $\boxed{\text{cos}}$ $\pi/3$ $\boxed{=}$ $\boxed{0.5}$

Cálculo de un ángulo conocida una de sus razones trigonométricas.

E 9: *Si tg*α *= 1,34, calcular* α *.*

(DEG) 1,34 $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\text{tg}}$ $\boxed{=}$ $\boxed{53{,}26717334}$ $\boxed{\text{INV}}$ $\boxed{\circ\,'\,''}$ $\boxed{=}$ $\boxed{53^\circ 16' 2''}$

Cálculo de una razón trigonométrica conocida otra:

E10: *"Si senα =0,84, calcular tgα ".*

(DEG) 0,84 [INV] [sen] [=] [*57,14011926*] [tg] [=] [*1,55*]

Después de haber resuelto ejercicios de razones trigonométricas y de manejo de la calculadora, se pasará a resolver triángulos comenzando por la **RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS.** Tener en cuenta que, cuando tenemos un triángulo rectángulo siempre conocemos un ángulo, el recto.

Se mostrará a los alumnos la siguiente tabla:

ELEMENTOS CONOCIDOS	COMO SE CALCULA DE LADOS Y ÁNGULOS
Dos lados	El tercer lado se calcula mediante el teorema de Pitágoras El ángulo que forman los dos lados conocidos se halla a partir de una razón trigonométrica que los relaciona.
Un lado Un ángulo	Otro lado se calcula mediante una razón trigonométrica que lo relaciona con el lado y el ángulo conocido. El otro ángulo agudo es el complementario del que conocemos

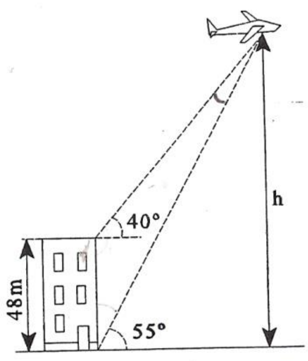
Se propondrán los siguientes problemas, los cuales serán trabajados por parejas. El PTR 2 será entregado al profesor, para corregirlo y ser devuelto a los alumnos con una corrección detallada de sus errores. De esta forma, se pretende que los alumnos conozcan sus fallos y puedan solventarlos. Por otro lado, el profesor puede incidir en aquellos conceptos que no han quedado claros. El resto de los problemas serán corregidos por los alumnos en la pizarra.

PTR 1: *"Hallar la altura de un árbol sabiendo que proyecta una sombra de 7m cuando los rayos del Sol forman un ángulo de 30° con la horizontal."*

Solución:

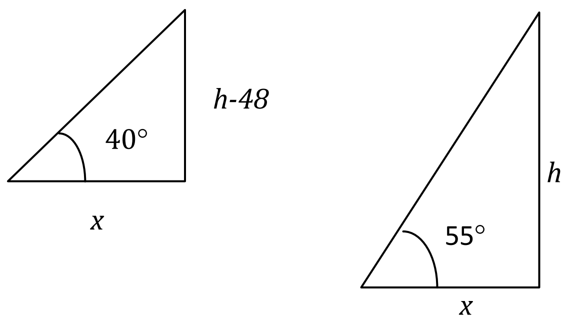
$$sen\ 30° = \frac{h}{7}\ .\ Luego\ h = 7 \cdot 0{,}5 = 3{,}5\ m$$

PTR 2: *"Para saber a qué altura vuela un avión medimos los ángulos de elevación del avión desde el portal (55°) y desde la terraza (40°) de nuestra casa. Como ésta tiene 15 pisos, su altura aproximada es de 48 m. ¿A qué altura, aproximadamente, vuela el avión?*



Solución:

Consideramos los siguientes triángulos:

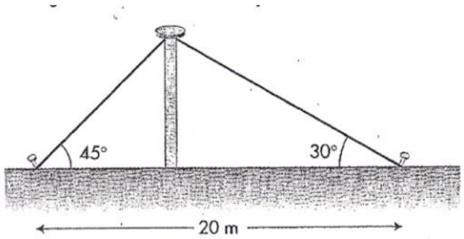


Plantemos el sistema:

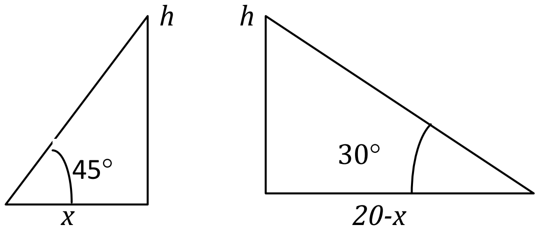
$$\left.\begin{array}{l} tg\ 40° = \dfrac{h-48}{x} \\ tg\ 55° = \dfrac{h}{x} \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l} 0{,}839\ x = h - 48 \\ 1{,}428\ x = h \end{array}\right\} \quad x = 81{,}494\ m$$

Luego, el avión vuela a $h = 81{,}494 \cdot 1{,}428 = 116{,}373m.$

PTR 3: *"Hemos colocado un cable sobre un mástil que lo sujeta como muestra la figura. ¿Cuánto miden el mástil y el cable? ".*



Solución:

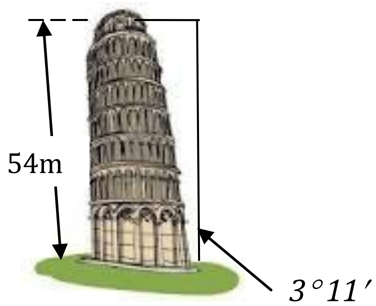


Planteamos el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 45° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 30° = \dfrac{h}{20-x} \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} h = 1 \cdot x \\ h = 11{,}547 - 0{,}557x \end{array}$$

Resolviendo el sistema, $x = 7{,}416\ m$ *y así la altura del mástil es* $h = 7{,}416\ m.$

PTR 4: *"La torre de Pisa tiene una inclinación respecto de la vertical de 3° 11' y una altura de 54m. Calcula el desplazamiento horizontal de la parte más elevada respecto de la base".*



Solución:

$$sen\,3°11' = \frac{x}{54}$$

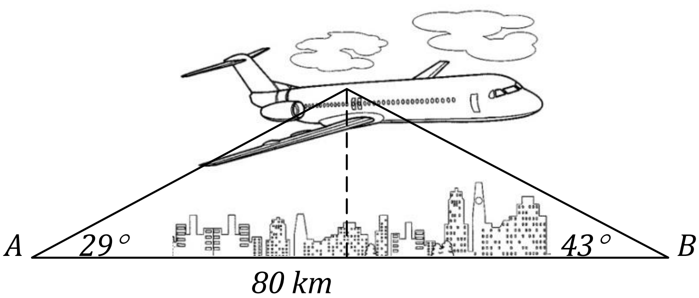
$$x = 0{,}055 \cdot 54 = 2{,}998\ m$$

Después de los ejemplos de triángulos rectángulos, se considerará un triángulo cualquiera. Se trazará una altura y así se obtendrán dos triángulos rectángulos que se pueden resolver. **ESTRATEGIA DE LA ALTURA.**

Considerar los siguientes problemas:

Problema 9: *"Un avión vuela entre dos ciudades, A y B, que distan 80 km. Las visuales desde el avión a A y a B forman ángulos de 29° y 43° con la horizontal, respectivamente. ¿A qué altura está el avión?"*

Solución:

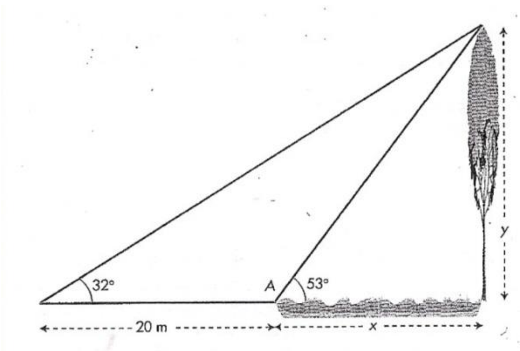


Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} tg\,29° = \dfrac{h}{x} \\ tg\,43° = \dfrac{h}{80-x} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} h = 0{,}554\,x \\ h = 74{,}601 - 0{,}932\,x \end{array}\right\} \quad x = 50{,}135\ km$$

Resolviendo este sistema, tenemos que: $h = 27{,}774\ km$

PEA 2: *"Para hallar el ancho del río procedemos así: Nos situamos en A, a una orilla del río, y medimos el ángulo 53° bajo el cual se ve un árbol que está frente a nosotros, en la otra orilla. Nos alejamos 20 m de la orilla en dirección perpendicular a ella y volvemos a medir el ángulo bajo el cual se ve el árbol, 32°."*



Solución:

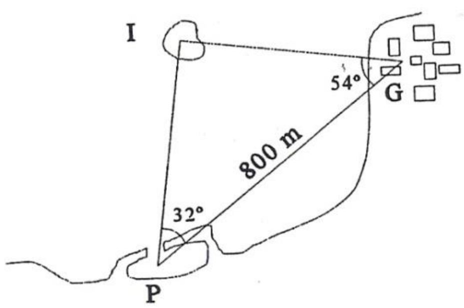
$$tg\ 32° = \frac{y}{20+x}$$

$$tg\ 53° = \frac{y}{x}$$

El río tiene una anchura de 17,776 m.

Se plantearán los siguientes problemas para que los resuelvan los alumnos aplicando la estrategia de la altura. Después de enunciar el teorema del seno y del coseno se volverán a resolver aplicando estos teoremas, y así ver que estos facilitan los cálculos.

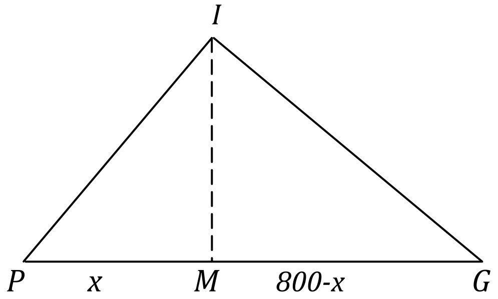
PRS 2: *"Queremos ir con una lancha hasta un islote (I), pero antes nos gustaría saber a qué distancia se encuentra el puerto deportivo (P). Para ello localizamos algún edificio del pueblo, por ejemplo, la iglesia (G), y medimos los ángulos IPG (32°) y PGI (54°), y la distancia del puerto a la iglesia (800m). ¿Cuánto dista el dista el islote del puerto?."*



Solución:

Trazamos la altura desde el vértice I, de esta forma, tenemos dos triángulos rectángulos PMI y MGI.

Considerar los siguientes triángulos:



Planteamos el sistema:

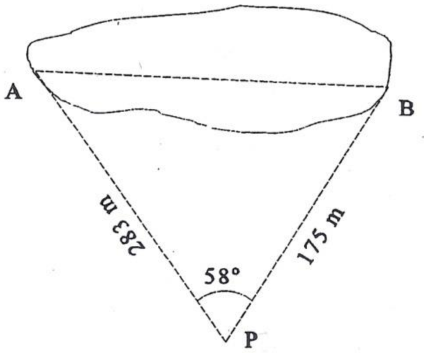
$$tg\ 32^{\circ} = \frac{h}{x}$$
$$tg\ 54^{\circ} = \frac{h}{800 - x}$$

Luego, $x = 550{,}552\ m\ y\ h = 343{,}544 m$

Aplicamos el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo PMI, para calcular $\overline{PI}$*.*

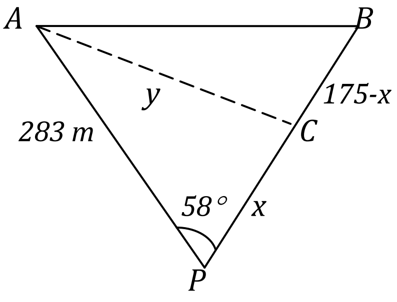
$$(\overline{PI})^2 = (x)^2 + (h)^2 \rightarrow (\overline{PI})^2 = (550{,}552)^2 + (343{,}544)^2 \rightarrow \overline{PI} = 648{,}945\ m$$

PRS 3: *"Para medir la anchura de un lago nos situamos en la posición P y tomamos las medidas que aparecen en la siguiente figura. ¿Cuál es la anchura del lago?"*



Solución:

Trazamos la altura desde el vértice A, para obtener dos triángulos rectángulos.



$$\overline{PC} = x$$
$$\overline{CB} = 175 - x$$
$$\overline{AC} = y$$

Aplicando las razones trigonométricas tenemos:

$$\cos 58° = \frac{x}{283} \rightarrow x = 149{,}967m$$

$$sen58° = \frac{y}{283} \rightarrow y = 239{,}997m$$

Teniendo en cuenta que $\overline{CB} = 25{,}033m$, *y considerando el triángulo rectángulo ACB, podemos calcular* $\overline{AB}$.

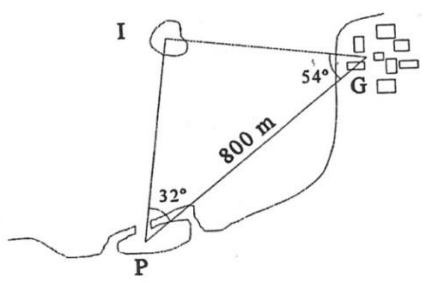
$$(\overline{AB})^2 = (\overline{AC})^2 + (\overline{CB})^2 \rightarrow (\overline{AB})^2 = (239{,}997)^2 + (25{,}033)^2 \rightarrow \overline{AB} = 241{,}299m$$

Siempre podemos resolver un triángulo cualquiera trazando la altura adecuada, pero con el teorema del seno y del coseno estos cálculos se simplifican.

En este punto se enunciará el **TEOREMA DEL SENO.** Se demostrará una de las igualdades y se dejará el resto como ejercicio para los alumnos (ver pág.18).

Los estudiantes resolverán de forma individual el problema PRS 2 aplicando el teorema del seno. Se pretende con ello, que sean conscientes de la importancia de este objeto matemático.

PRS 2. *"Queremos ir con una lancha hasta un islote (I), pero antes nos gustaría saber a qué distancia se encuentra el puerto deportivo (P). Para ello localizamos algún edificio del pueblo, por ejemplo, la iglesia (G), y medimos los ángulos IPG (32°) y PGI (54°), y la distancia del puerto a la iglesia (800m). ¿Cuánto dista el dista el islote del puerto?."*



Solución:

Sabiendo que $\widehat{IPG} = 32°$ *y* $\widehat{IGP} = 54°$, *podemos calcular el valor del ángulo* $\widehat{PIG} = 94°$ *(la suma de los ángulos de un triángulo es 180°).*

Aplicando el teorema del seno, podemos escribir:

$$\frac{\overline{PI}}{sen\,54°} = \frac{\overline{PG}}{sen\,94°} \rightarrow \frac{\overline{PI}}{0{,}809} = \frac{800}{0{,}997} \rightarrow \ luego\ \overline{PI} = 649{,}147m$$

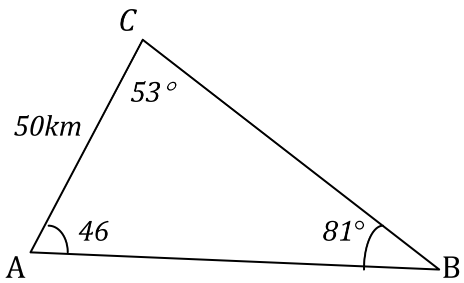
Se mostrará el siguiente cuadro, como resumen de casos para aplicar el teorema del seno:

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER CON EL Tª DEL SENO	
DATOS	INCÓGNITAS
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

Se propondrán los siguientes problemas para practicar con el teorema del seno:

PTS 1: *"Un barco B pide socorro y se reciben sus señales en dos estaciones de radio, A y C, que distan entre sí 50 km. Desde las estaciones se miden los siguientes ángulos:* $\widehat{BAC} = 46°$ *y* $\widehat{BCA} = 53°$*. ¿A qué distancia de cada estación se encuentra el barco?"*

Solución:



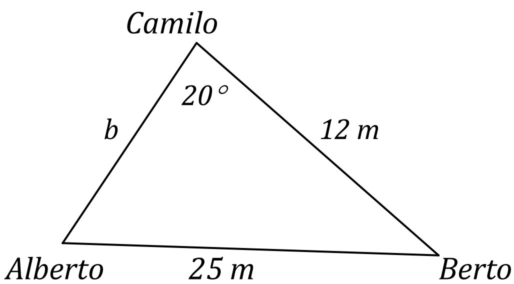
El ángulo $\widehat{ABC}$ *es igual a* $81°$.

Aplicamos el teorema del seno:

$$\frac{\overline{CB}}{sen46°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 81°} \rightarrow \overline{CB} = 36{,}440km$$

$$\frac{\overline{AB}}{sen53°} = \frac{\overline{AC}}{sen\ 81°} \rightarrow \overline{AB} = 40{,}457km$$

PTS 2. *"Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Berto hay 25 m, y entre Berto y Camilo 12 m. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Calcula la distancia entre Alberto y Camilo."*

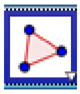


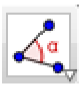
Solución:

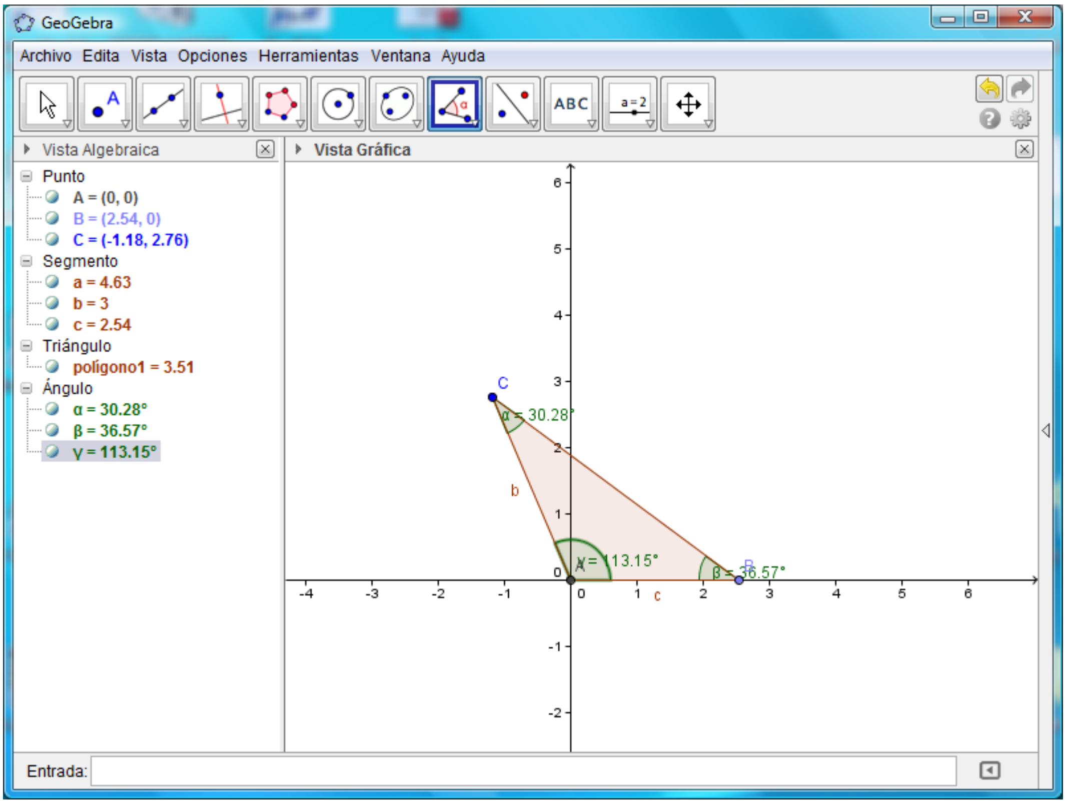
$25^2 = 12^2 + b^2 - 2(12)(b)cos20°$

$b^2 - 22{,}55b - 481 = 0$; *luego b=35,93 m*

Para introducir el teorema del coseno, se irá con los alumnos al aula de informática y se trabajará con GeoGebra .

Los alumnos dibujarán un triángulo picando en el icono  . Las condiciones serán comenzar en el origen de coordenadas, (vértice A), marcar el siguiente vértice en el eje de abcisas (B) y el tercer vértice sin limitaciones (C).

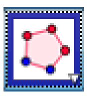
Picando sobre el icono  podemos determinar el ángulo en cada vértice. Indicar a los alumnos que a la izquierda existe una leyenda con los puntos, las longitudes de los lados, los ángulos y el área de los polígonos que dibujemos.

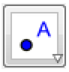


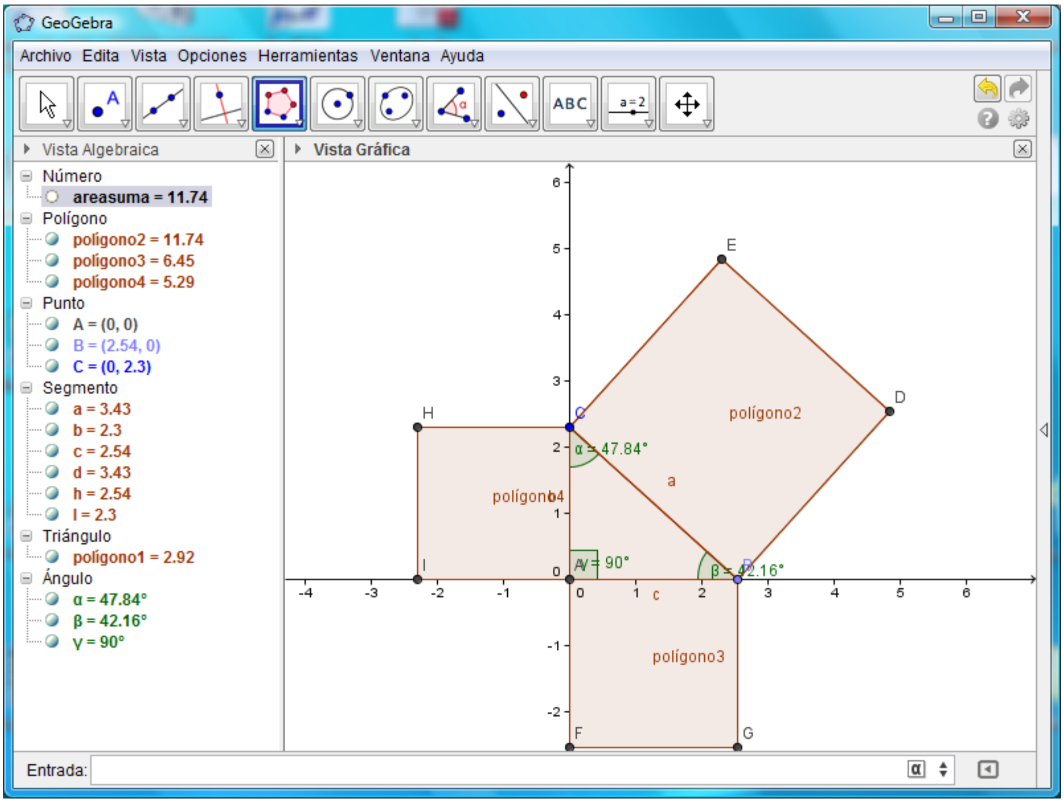
Para calcular $a^2, b^2 \; y \; c^2$, se dibujará un cuadrado sobre cada lado del triángulo. Se hará notar a los alumnos que el área de esos cuadrados coincide con esas expresiones.

Escribir: 

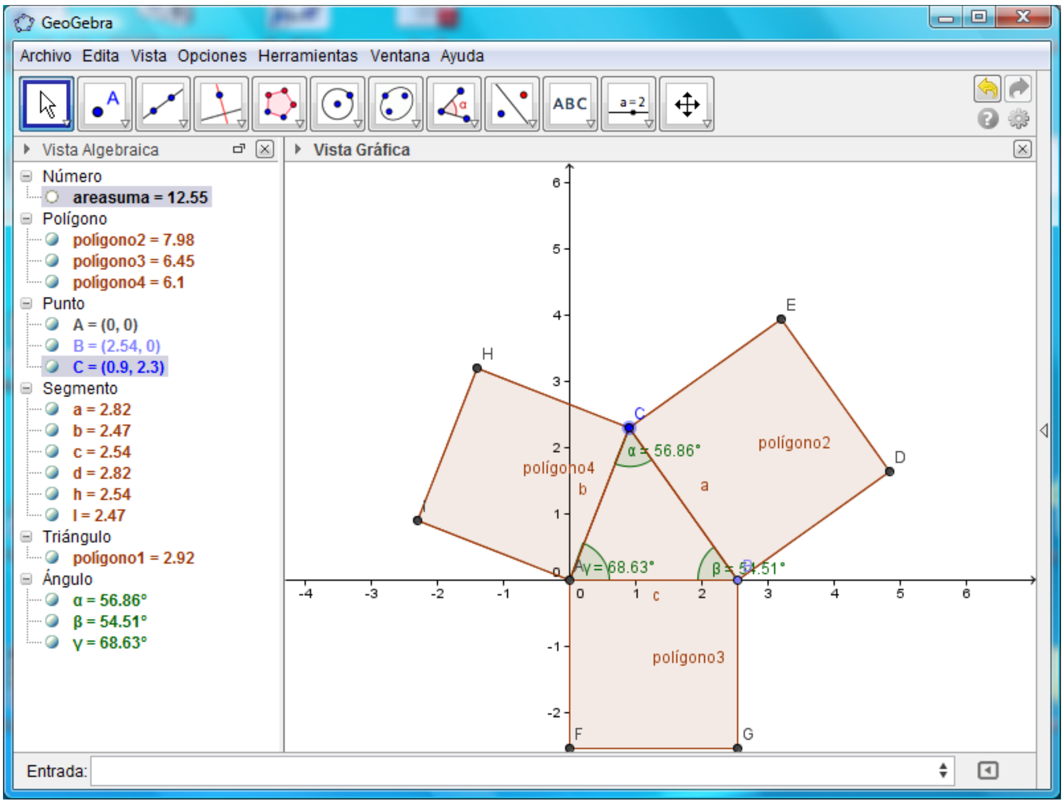
de esta forma se define una nueva variable que calcula la suma $b^2 + c^2$, así se podrá comparar con a^2.

Para dibujar esos cuadrados picar sobre  , moverse de un extremo a otro del lado en el sentido de las agujas del reloj e indicar el número de vértices del polígono regular que se quiere dibujar.

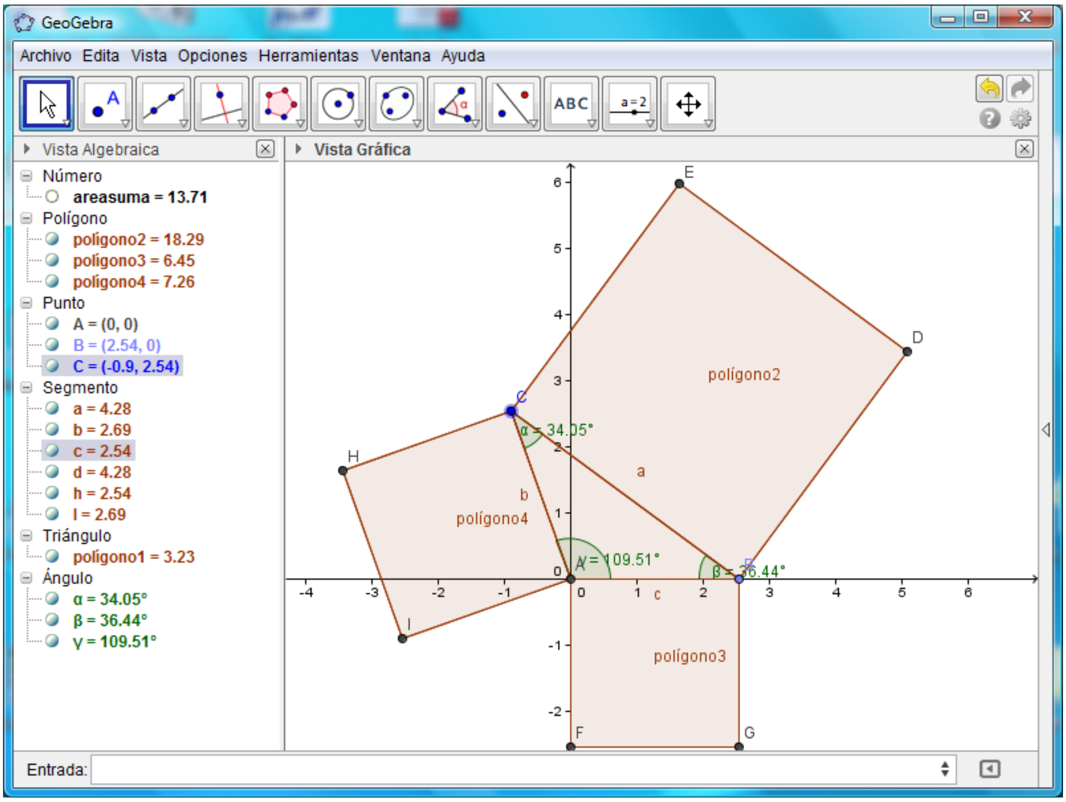
Picar sobre  (Elige y mueve) y así desplazar el vértice C para obtener un triángulo rectángulo.



Mover de nuevo el vértice C para obtener un triángulo acutángulo.



Por último mover C hasta obtener un triángulo obtusángulo.



Los alumnos serán conscientes de las relaciones:

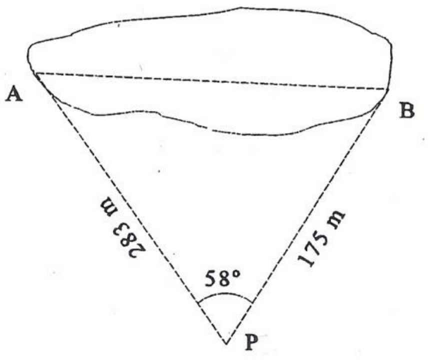
- Triángulo acutángulo: $a^2 < b^2 + c^2$
- Triángulo rectángulo: $a^2 = b^2 + c^2$ (Teorema de Pitágoras).
- Triángulo obtusángulo: $a^2 > b^2 + c^2$

Con la actividad de GeoGebra se pretende mostrar a los alumnos un programa útil para geometría. Aunque sea un contacto superficial, tiene como objetivo mostrar diferentes y nuevas formas de trabajar las matemáticas.

Por último, se enunciará y demostrará el **TEOREMA DEL COSENO** (ver pág.19).

Los alumnos volverán a resolver el problema PRS 3, utilizando el teorema del coseno. Lo realizarán de forma individual y se corregirá en la pizarra.

PRS 3: *"Para medir la anchura de un lago nos situamos en la posición P y tomamos las medidas que aparecen en la siguiente figura. ¿Cuál es la anchura del lago?"*



Solución:

Aplicamos el teorema del coseno al triángulo APB

$\overline{AB}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PB}^2 - 2 \cdot \overline{AP} \cdot \overline{PB} \cdot cos\widehat{APB}$

$\overline{AB}^2 = (283)^2 + (175)^2 - 2(283)(175)(0{,}529)$

$\overline{AB}$ =*241,488 m*

Igual que en el caso del teorema del seno se dará una tabla con casos para aplicar el teorema del coseno:

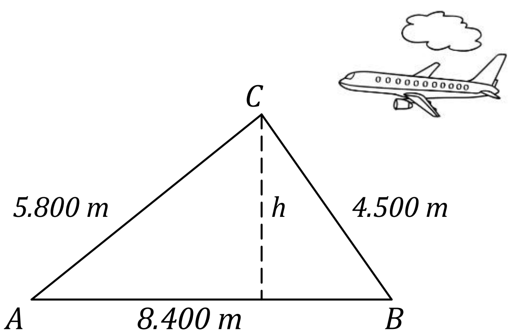
TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER CON EL Tª DEL COSENO	
DATOS	INCÓGNITAS
Los tres lados	Cualquier ángulo
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	El otro lado
Dos lados y el ángulo que forman	El otro lado
	Otro ángulo (*)

(*) Éste es el único caso en el que no basta aplicar uno de los teoremas; con el teorema del coseno, calculamos el otro lado y, después, con el teorema de los senos, se halla el ángulo deseado.

Se propondrán los siguientes problemas. Los alumnos trabajarán por parejas o de forma individual (ver pág.13). Los problemas serán corregidos en la pizarra por los alumnos, excepto el problema PTC 1 que será entregado al profesor.

PTC 1. *"Desde dos puestos de control, que distan entre sí 8.400m, se detecta un avión que sobrevuela la línea que une ambos puestos y dista 5.800m del primero y 4.500 del segundo. ¿A qué altura vuela el avión?*

Solución:



Aplicando el teorema del coseno:

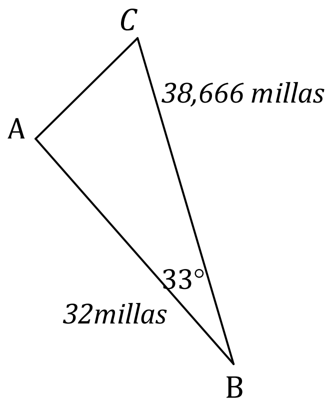
$$\overline{CB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AB} \cdot cos\widehat{CAB}$$
$$(4.500)^2 = (5.800)^2 + (8.400)^2 - 2 \cdot (5.800) \cdot (8.400) \cdot cos\widehat{CAB}$$
$$cos\widehat{CAB} = 0{,}861 \;\; \rightarrow \;\; \widehat{CAB} = 30°30'29''$$

Teniendo en cuenta la definición de seno, podemos escribir:

$$sen\ 30°30'29'' = \frac{h}{5.800}\ luego\ h = 2.944{,}444\ m$$

PTC 2. *"De un puerto salen simultáneamente dos barcos, con rumbos que difieren en 33° y velocidades de 24 y 29 nudos, respectivamente. ¿A qué distancia se encontrarán, uno del otro, al cabo de 1 hora y 20 minutos?" (1 nudo = 1milla marina/hora y 1 milla = 1.853m).*

Solución:



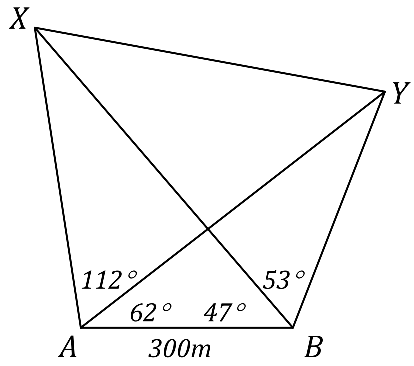
Teniendo en cuenta que 1 nudo = 1 milla/hora; el barco con velocidad 24 nudos recorrerá 24 millas en una hora, luego en 1h 20 min recorrerá 32 millas (=$\overline{AB}$). Análogamente, el barco con velocidad 29 nudos, recorrerá 29 millas en una hora, luego en 1h 20minrecorrerá 38,666 millas (=$\overline{BC}$).

Aplicamos el teorema del coseno:

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AB} \cdot \overline{BC} \cdot cos\widehat{ABC}$$
$$\overline{AC}^2 = (32)^2 + (38{,}666)^2 - 2 \cdot (32) \cdot (38{,}666) \cdot cos33°$$
$$\overline{AC} = 21{,}063\ millas$$

Por último, se plantearán problemas donde los alumnos tengan que elegir la herramienta más adecuada para resolverlos, y en los que hay que considerar más de un triángulo. **APLICACIÓN DE LOS TEOREMAS DEL SENO Y DEL COSENO**

PA 1. *"Queremos saber la distancia entre dos aldeas, X e Y, que vemos a lo lejos; para ello, nos situamos sucesivamente en los puntos A y B que distan 300m, y medimos los ángulos XBY (53°), YAB (62°), XBA (47°) y XAB (112°). ¿Cuál es la distancia entre X e Y?*



Solución:

Consideramos el triángulo ABX. Como conocemos los ángulos $\widehat{XAB} = 112°$ *y* $\widehat{XBA} = 47°$ *podemos saber* $\widehat{AXB} = 21°$*.*

Aplicando el teorema del seno, tenemos:

$$\frac{\overline{XB}}{sen\widehat{XAB}} = \frac{\overline{AB}}{sen\widehat{AXB}} \quad \rightarrow \quad \overline{XB} = 776{,}171\ m$$

Considerando ahora el triángulo ABY, tenemos que los ángulos $\widehat{YAB} = 62°$ *y* $\widehat{ABY} = 100°$ *luego* $\widehat{BYA} = 18°$*.*

Por el teorema del seno:

$$\frac{\overline{YB}}{sen\widehat{YAB}} = \frac{\overline{AB}}{sen\widehat{AYB}} \quad \rightarrow \quad \frac{\overline{YB}}{sen 62°} = \frac{300}{sen 18°} \quad \rightarrow \quad \overline{YB} = 857{,}183\ m$$

Por último, aplicamos el teorema del coseno al triángulo BYX.

$$\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{YB}^2 - 2 \cdot \overline{XB} \cdot \overline{YB} \cdot cos\widehat{XBY} \quad \rightarrow$$

$$\overline{XY}^2 = (776{,}171)^2 + (857{,}183)^2 - 2 \cdot (776{,}171) \cdot (857{,}183) \cdot (0{,}601) \quad \rightarrow$$

$$\overline{XY} = 733{,}136\ m$$

2. Establece una duración temporal aproximada.

   SESIÓN 1: Se propondrán a los alumnos los problemas PCP 1 y PCP 2 para que los resuelvan de forma individual. Se planteará el problema PRS 1 y se definirán las razones trigonométricas de un ángulo agudo. Por último, se resolverá PRS 1 y se comentará el experimento de Eratóstenes.

   SESIÓN 2: Se verán que las razones trigonométricas no dependen del triángulo elegido. Se propondrá el ejercicio E1. A continuación, se definirán las razones trigonométricas de un ángulo obtuso y de un ángulo cualquiera entre 0° y 360°. Reducción al primer cuadrante. Se establecerán las relaciones trigonométricas de un mismo ángulo. Se plantearán los ejercicios E2, E3 y E4.

   SESIÓN 3: Los alumnos trabajarán por parejas en los ejercicios E5, E6, E7, E8, E9 y E10. Estos ejercicios se corregirán en la misma sesión. No presentan dificultad, solo se proponen para que los alumnos se familiaricen con la calculadora y con los conceptos de radián y grado.

SESIÓN 4: Resolución de triángulos rectángulos. Después de una pequeña explicación de cómo se resuelven triángulos rectángulos, se establecerá una sesión de trabajo por parejas donde los alumnos resolverán los problemas PTR1, PTR2, PTR3 y PTR 4. El problema PTR 2 se recogerá para corregirlo y detectar posibles errores en los alumnos. Los problemas que no se terminen en clase se dejarán como tarea para casa.

SESIÓN 5: Se resolverán en la pizarra los problemas del día anterior. La corrección la realizarán los alumnos, solamente resolverá el profesor cuando sea un problema general, que ningún alumno sepa resolver. El resto de la sesión se dedicará a resolver dudas de lo explicado hasta ahora y a incidir en resultados que no hayan quedado claros totalmente.

SESIÓN 6: Se explicará y desarrollará la estrategia de la altura. A modo de ejemplo, se realizará PEA 1 en la pizarra. Los alumnos dedicarán el resto de la sesión a resolver los problemas PEA 2, PRS 2 y PRS 3. Los problemas PRS 2 y PRS 3 tienen especial interés, ya que son los que se utilizarán para introducir los teoremas del seno y del coseno.

SESIÓN 7: Se corregirá el problema PRS 2 y después se enunciará y demostrará el teorema del seno. A continuación se volverá a resolver el problema PRS 2 utilizando este teorema.

SESIÓN 8: Se mostrará la tabla de casos donde se puede aplicar el teorema del seno. De forma individual, los alumnos plantearán y resolverán los problemas PTS 1 y PTS 2. El problema PTS 1 se corregirá en la pizarra y el PTS 2 se entregará al profesor.

SESIÓN 9: Se irá con los alumnos al aula de informática para trabajar con GeoGebra. Se enunciará y demostrará el teorema del coseno.

SESIÓN 10: Se resolverá el problema PRS 3 utilizando el teorema del coseno. Se mostrará la tabla de casos donde podemos aplicar el este teorema. Se resolverán de forma individual los problemas PTC 1 y PTC 2. El PTC 1 se entregará al profesor y el PTC 2 se corregirá en la pizarra.

SESIÓN 11: Por parejas los alumnos resolverán el problema PA 1. A continuación se explicará y se ofrecerá una solución en la pizarra.
El resto de la sesión se dedicará a resolver dudas del tema y volver a explicar aquellos conceptos que los alumnos no han asimilado de forma correcta.

SESIÓN 12: En esta sesión los alumnos trabajarán sobre problemas "mezclados", donde tengan que averiguar el teorema que conviene en cada situación. Deberán analizar el problema y seleccionar la estrategia más adecuada para su resolución.

SESION 13: Prueba escrita del tema. El profesor corregirá esta prueba y será devuelta a los alumnos comentando los resultados de forma individual. No se corregirá en la pizarra.

I. Evaluación.

1. Prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

   Al finalizar el tema los alumnos realizarán una prueba escrita de duración máxima una hora como la que sigue:

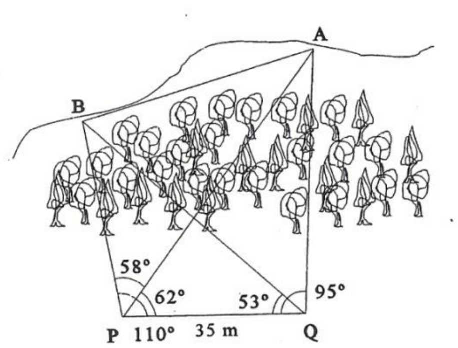
   PRUEBA ESCRITA

   1. *Enunciar y demostrar el teorema del coseno (2,5 puntos).*

   2. *Resolver el siguiente problema: "Un barco pide socorro y sus señales son recibidas por dos puestos de salvamento A y B, que distan 40 km. La línea de costa que une A y B forman un ángulo de 42° con la visual desde A al barco y un ángulo de 57° con la visual al barco desde B. Suponiendo que ambos puestos dispongan de lanchas igualmente rápidas, ¿cuál debe salir en auxilio del barco?" (2,5 puntos).*

   3. *Resolver: "Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50°, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilometros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B." (2,5 puntos).*

   4. *Resolver: "Para construir un teleférico necesitamos conocer la distancia entre los puntos A y B de la montaña. Para ello, desde los lugares P y Q del valle tomamos las medidas que se indican en la figura. ¿Cuánto distan los puntos A y B?" (2,5 puntos).*



   EVALUACIÓN:

   Problema1: Enunciar el teorema 1 punto. Desarrollar y expresar correctamente la demostración 1,5 puntos.

   Problemas 2, 3 y 4: Plantear el problema 1 punto. Resolverlo correctamente 1 punto. Detallar que resultados se han utilizado 0,5 puntos. Errores de cálculo tendrán una penalización de 0,20 puntos. Se valorará el dibujo y la expresión del proceso y de la solución.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático se pretende evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

   El objetivo principal de este tema es enseñar a los alumnos las herramientas necesarias para la resolución de triángulos, debido a esto, el examen consta fundamentalmente, de tres problemas, cuya resolución se basa en considerar distintos triángulos y aplicar los conocimientos que se han desarrollado.

   La primera pregunta es una cuestión teórica. Es importante que los alumnos conozcan y comprendan la teoría para que la apliquen adecuadamente. Además, al preguntar la demostración se pretende comprobar la capacidad de los alumnos para seguir una cadena de razonamientos justificando y explicando de forma correcta la relación entre los distintos pasos.

   El propósito de los problemas, es que los alumnos trasladen problemas de la vida cotidiana al campo de las matemáticas, que recojan los datos de los que disponen, que seleccionen las herramientas que conocen para resolverlos y que las apliquen correctamente. Una vez resueltos en el campo matemático, devuelvan la solución al problema original, analizando y valorando las soluciones.

   Para resolver el problema 2, los alumnos pueden aplicar el teorema del seno. Los datos de los que disponen son dos ángulos y un lado. En este problema, solo necesitan considerar un triángulo y aplicar únicamente un resultado.

   El tercer problema pueden resolverlo aplicando el teorema del coseno. Deben identificar los datos correctamente y aplicar el teorema. Al igual que en el problema 2, solo necesitan considerar un triángulo y aplicar un resultado.

   Por último, en el problema 4, deben considerar más de un triángulo y aplicar varios teoremas.

   En todos los casos, deben manejar correctamente la calculadora. Además, de expresar de forma clara y adecuada los pasos seguidos y los resultados.

3. ¿Qué respuestas se esperan en cada una de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

   Posiblemente, habrá alumnos que la primera pregunta la respondan utilizando la memoria en vez de el razonamiento deductivo. A pesar de esto, es importante preguntar teoría en el examen. Al estudiarla, los alumnos han tenido que hacer un esfuerzo de comprensión, esencial en el ámbito científico al que se dirigen.

   Se espera que los problemas 2 y 3 los resuelvan sin dificultad. Si identifican los datos correctamente solo tienen que trasladar estos al teorema adecuado y resolver las ecuaciones que obtengan.

El problema 4 es más complejo porque deben considerar más de un triángulo y aplicar más de un resultado. Pero, en clase se resolvió uno semejante, si se comprendió ese problema, los alumnos deben poder resolverlo sin dificultad.

En general, las dificultades de los alumnos están en determinar los datos, tanto de ángulos como de lados, correctamente y no en la aplicación de los teoremas. Los alumnos también pueden cometer fallos que no son específicos del tema, como son la interpretación de los datos, errores de cálculo o resolver erróneamente ecuaciones.

4. Criterios de calificación.

Teniendo en cuenta el Currículo Aragonés de Bachillerato (17/7/2008, págs.14076-14078), ver anexo, se valora el expresar y trasferir problemas de la vida cotidiana al campo matemático. Resolver estos problemas utilizando las herramientas y conocimientos que nos ofrecen las matemáticas y expresar las soluciones nuevamente en el problema real. Se tiene en consideración, el razonamiento lógico, tanto inductivo como deductivo característico del pensamiento matemático. Además, se valora el uso correcto de la calculadora así como la expresión de los procedimientos y resultados.

La calificación de este tema vendrá dada por la nota de la prueba escrita (80% del total), por la ejecución de las tareas (10%) y la participación activa en clase (10%). La nota total contribuirá a la nota global de la asignatura.

El objetivo de la evaluación es conocer si los alumnos han asimilado los conceptos de este tema, la manera de comprobarlo es la prueba escrita.

El trabajo debe estar recompensado y por eso la realización de las tareas tiene una consecuencia en la nota. Se anotará en una agenda el seguimiento de las tareas.

La participación y el interés mostrado en clase son importantes. No solo se trata de asistir a clase, sino de participar y colaborar en las sesiones mostrando interés por aprender. Cada día se anotarán observaciones y comentarios de los alumnos.

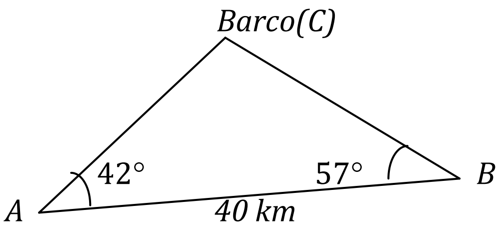
Se trata de que sea una evaluación formativa, luego se recogerán algunos ejercicios que serán devueltos a los alumnos con un feedback de su trabajo. De esta forma, se pueden solventar errores antes del examen, permitiendo así un correcto aprendizaje y no solo el superar la prueba.

A continuación se muestra una posible solución de la prueba escrita especificando la puntuación que se dará en cada parte de los ejercicios. Cualquier otra solución será calificada positivamente, mientras los razonamientos sean correctos.

1. Teorema del coseno: (ver pág.19).

Enunciar el teorema se valorará con un máximo de 1 punto.
Trazar una altura y relacionarla con las razones trigonométricas 0,5 puntos.
Considerar dos triángulos rectángulos y aplicar Pitágoras 0,75 puntos.
Indicar que debe repetirse el proceso para obtener el resto de relaciones 0,25 puntos.

2. *Un barco pide socorro y sus señales son recibidas por dos puestos de salvamento A y B, que distan 40 km. La línea de costa que une A y B forman un ángulo de 42 ° con la visual desde A al barco y un ángulo de 57 ° con la visual al barco desde B. Suponiendo que ambos puestos dispongan de lanchas igualmente rápidas, ¿cuál debe salir en auxilio del barco?*



Solución:

El ángulo C es $180° - (42° + 57°) = 81°$

Aplicaremos el teorema del seno.

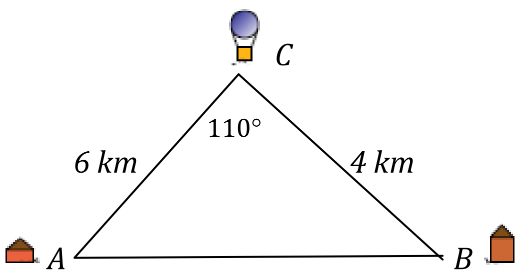
$$\frac{\overline{AB}}{sen\ C} = \frac{\overline{BC}}{sen\ A} \rightarrow \frac{40}{sen 81°} = \frac{\overline{BC}}{sen 42°} \rightarrow \overline{BC} = 27{,}098\ km$$

$$\frac{\overline{AB}}{sen\ C} = \frac{\overline{AC}}{sen\ B} \rightarrow \frac{40}{sen 81°} = \frac{\overline{AC}}{sen 57°} \rightarrow \overline{AC} = 33{,}964\ km$$

Debe rescatar al barco el puesto de salvamento B.

Dibujar el triángulo 0,5 puntos.
Calcular el ángulo C 0,5 puntos.
Aplicar el teorema del seno 1 punto.
Concluir que debe rescatar al barco el puesto de salvamento B 0,5 puntos.

3. *Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50 °, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60 °. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilometros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.*

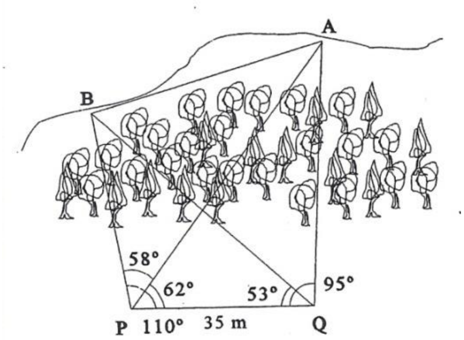


El ángulo debajo del globo es de 110º porque si trazamos una perpendicular desde el globo al suelo, a la izquierda tendríamos 50° y a la derecha 60°.
Aplicamos el teorema del coseno, porque el ángulo que conocemos es el que forman los dos lados de los cuales tenemos su longitud.

$(\overline{AB})^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cos 110° \rightarrow \overline{AB}$=*8,27 km*

Hacer el dibujo tendrá una puntación de 0,5 puntos.
Determinar el ángulo C se calificará con 0,5 puntos.
Identificar los datos correctamente y aplicar el teorema del coseno 1,5 puntos.

4. *Para construir un teleférico necesitamos conocer la distancia entre los puntos A y B de la montaña. Para ello, desde los lugares P y Q del valle tomamos las medidas que se indican en la figura. ¿Cuánto distan los puntos A y B?*



Solución:

Consideramos el triángulo PAQ, el ángulo en A es 23°.

Por el teorema del seno:

$$\frac{\overline{PQ}}{sen23°} = \frac{\overline{AP}}{sen95°} \rightarrow \frac{35}{sen23°} = \frac{\overline{AP}}{sen95°} \rightarrow$$

$$\overline{AP} = 89{,}23\ m$$

Consideramos ahora el triángulo PBQ, así el ángulo en B es 17°.

Por el teorema del seno:

$$\frac{\overline{PQ}}{sen17°} = \frac{\overline{PB}}{sen53°} \rightarrow \frac{35}{sen17°} = \frac{\overline{PB}}{sen53°} \rightarrow \overline{PB} = 95{,}60\ m$$

Por último, aplicamos el teorema del coseno al triángulo APB.

$$\overline{AB}^2 = \overline{PB}^2 + \overline{AP}^2 - 2 \cdot \overline{PB} \cdot \overline{AP} \cdot cos\hat{P} \rightarrow$$

$$\overline{AB}^2 = (95{,}60)^2 + (89{,}23)^2 - 2 \cdot (95{,}60) \cdot (89{,}23) \cdot (\cos 58°) \rightarrow$$

$$\overline{AB} = 89{,}78\ m$$

Considerar el triángulo PAQ, y calcular el ángulo en A 0,25 puntos. Aplicar el teorema del seno a este triángulo 0,75 puntos.

Análogamente, considerar el triángulo PBQ y calcular el ángulo en B 0, 25 puntos. Aplicar el teorema del seno 0,75 puntos.
Finalmente aplicar el teorema del coseno al triángulo APB 0,5 puntos.

J. Bibliografía y páginas web.

1. Libros y artículos.

- Orden de 1 julio de 2008, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón. BOA 17/07/2007.

- Orden de 9 de mayo de 2007, del Departamento de Educación, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación secundaria obligatoria y se autoriza se aplicación en los centros docentes de la Comunidad autónoma de Aragón. BOA 1/06/2007.

- M.Antonio, L.González, J.Lorenzo, A.Molano, J.del Río, D.Santos, M.de Vicente. Matemáticas I, 1º Bachillerato. Ed.Santillana. Proyecto la casa del saber. 2008.

- J.C. Olivas Lacruz. Trigonometría. Trabajo Fin de Máster. Junio 2011.

- J.J.Cano Sellés. Método de Eratóstenes: “radio de la Tierra”. Junio 2013.

2. Páginas web (Recuperadas junio de 2013).

http://www.astromia.com/biografias/eratostenes.htm

http://celestia.albacete.org/celestia/taller/feria1.htm

http://www.cajondeciencias.com/Descargas%20mate2/ER%20teoremas%20seno%20y%20coseno.pdf

http://www.educa2.madrid.org/web/educamadrid/principal/files/125f9f30-8285-4aee-88b9-0c1c03640400/HOJA%205_Trigonometria%203.pdf

http://blog.educastur.es/masmate1bct/files/2012/01/09teorema-seno.pdf

triáNGUlostriá
ngulostriángul
osTRIángulost
riángulostrián
gulOstriángul