

Máster Universitario en Modelización e Investigación
Matemática, Estadística y Computación



Universidad Zaragoza

TRABAJO FIN DE MÁSTER:
DESARROLLO DE UN MODELO DE
CONTROL ÓPTIMO DE FLUJOS
TRANSITORIOS EN LÁMINA LIBRE BASADO
EN ADJUNTOS



Autor: Pablo Vallés Oliván

Directoras: Pilar García Navarro, Isabel Echeverribar Pérez

Departamento Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos

Resumen / Abstract

El ajuste y control de las estructuras hidráulicas son un aspecto cotidiano para la conservación de determinados valores de nivel y caudal que permitan satisfacer las necesidades de la agricultura, ganadería y la producción de energía hidroeléctrica; así como también para la laminación de crecidas que pueden suponer un peligro para regiones aguas abajo. La evolución temporal y espacial de eventos de avenida en ríos se simula frecuentemente bajo la hipótesis de aguas poco profundas. Esta clase de eventos permite la aproximación en la sección transversal, conformando modelos unidimensionales precisos en los resultados proporcionados. A su vez, estructuras hidráulicas como es el caso de un embalse permiten el uso de modelos hidrológicos, los cuales evitando el cálculo de algunas variables hidráulicas obtienen una elevada eficiencia computacional. El siguiente trabajo tiene como objetivo principal el desarrollo e implementación de un método de control basado en variables adjuntas que permita mantener un determinado valor del nivel en un embalse mediante la modificación de la altura de la presa, usando modelos para el flujo unidimensionales e hidrológicos. Se realiza un análisis de sensibilidad para verificar la capacidad del método implementado mediante casos simplificados, para posteriormente estudiar un dominio real, el comprendido en el tramo de río Ebro entre Caspe y Mequinenza, caracterizado por conformar el embalse de Mequinenza.

The adjustment and control of hydraulic structures is a daily action to obtain certain level and flow values to meet the demands of agriculture, livestock and hydroelectric energy production, as well as to reduce flood events that can be a danger to downstream regions. The temporal and spatial evolution of flood events in rivers is often simulated under the shallow water hypothesis. This kind of events allows the approximation in the cross-section, forming accurate one-dimensional models in the results provided. At the same time, hydraulic structures such as a reservoir allow the use of hydrological models, which, avoiding the calculation of some hydraulic variables, obtain a high computational efficiency. The main objective of the following work is the development and implementation of a control method based on adjointed variables that allows maintaining a certain value of the level in a reservoir by modifying the height of the dam, using one-dimensional and hydrological models for the flow. A sensitivity analysis is carried out to verify the capacity of the method implemented by means of simplified cases, in order to subsequently study a real domain, that of the section of the Ebro river between Caspe and Mequinenza, characterised by the Mequinenza reservoir.

Índice general

1. Introducción y objetivos	1
2. Modelo matemático del flujo	5
2.1. Modelo del flujo 0D	5
2.2. Modelo del flujo 1D	7
2.3. Condiciones iniciales y de contorno	9
2.3.1. Condiciones iniciales	9
2.3.2. Condiciones de contorno	10
3. Discretización de las ecuaciones	13
3.1. Esquema numérico 1D	14
3.1.1. Esquema numérico en volúmenes finitos	14
3.1.2. Esquema numérico con Riemann Solver de Roe	15
4. Optimización del nivel en un embalse	21
4.1. Método de control PID	22
4.2. Método de control adjunto	23
4.2.1. Formulación adjunta usando el modelo 1D	24
4.2.2. Formulación adjunta usando el modelo 1D-0D	28
5. Resultados	29
5.1. Evaluación en un caso test sintético	29
5.1.1. Análisis de sensibilidad	29
5.1.2. Comparación con PID en avenida	36
5.1.3. Control adjunto en el modelo 1D-0D	38
5.2. Evaluación en un tramo del río Ebro	40
5.2.1. Control adjunto en el tramo de río Ebro con un modelo 1D	40
5.2.2. Control adjunto en el tramo de río Ebro con un modelo 1D-0D	44
5.2.3. Control en el tramo de río Ebro mediante PID	46
6. Conclusiones y trabajo futuro	49
Bibliografía	51

Capítulo 1

Introducción y objetivos

Actualmente, algunos de los principales problemas a los que debe enfrentarse la sociedad a nivel mundial están relacionados con el agua. Las sequías o grandes eventos fluviales como son las lluvias torrenciales, las inundaciones o las avalanchas, son claros ejemplos de desastres naturales, unos eventos que son un problema para nuestro país al ser de los desastres naturales que más pérdidas económicas, sociales y humanas provocan ([1]). Además, en los últimos años, los daños provocados por desastres naturales han ido aumentando en cuantía, así como también el propio número de estos fenómenos ([2]). En particular, el desbordamiento de ríos ha aumentado considerablemente en frecuencia en las últimas décadas¹ (Figura 1.1), obligando a instituciones y gobiernos a buscar y elaborar planes de prevención y herramientas predictivas. Frecuentemente, diques y embalses son utilizados como herramienta de mitigación contra los daños provocados por este fenómeno. El ajuste y control de estas estructuras hidráulicas consigue que sean, no sólo una útil herramienta de mitigación, sino también una parte fundamental para garantizar el suministro de agua a la agricultura y ganadería y una importante fuente de producción de energía renovable a nivel mundial. Dentro de este contexto, modelos matemáticos que permitan proporcionar información acerca de la evolución temporal y espacial de este tipo de eventos, así como anticipar y perfeccionar el control y ajuste de estas estructuras, son una importante herramienta de mitigación y prevención. Estas herramientas están fundamentadas en la resolución numérica de las ecuaciones que gobiernan el flujo en lámina libre, la cual ha sido desarrollada y perfeccionada en las últimas décadas ([3], [4], [5], [6]). Dentro de los distintos modelos que describen esta clase de sistemas, el modelo de aguas poco profundas es una aproximación utilizada ampliamente al permitir describir situaciones con dominios de gran tamaño y escalas de tiempo prolongadas.



(a) Inundación de infraestructuras en Zaragoza.



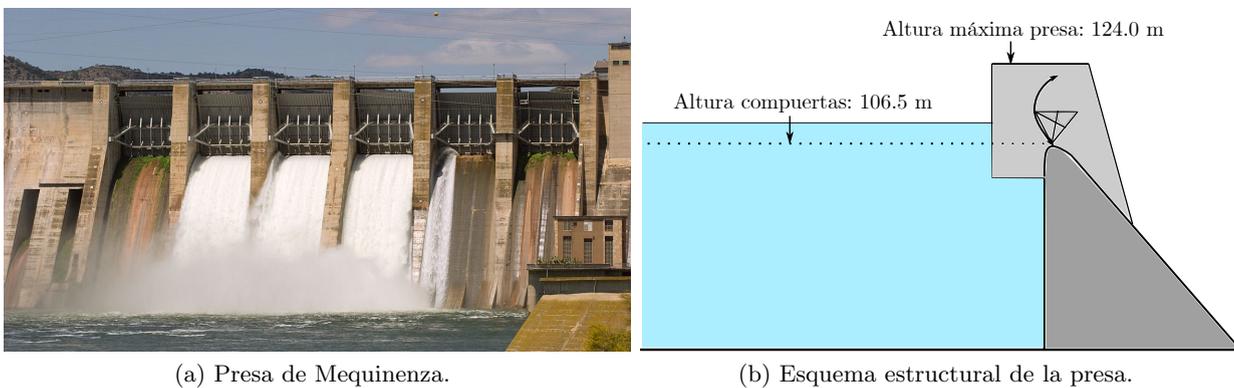
(b) Inundación del barrio Almozara en Zaragoza.

Figura 1.1: Imágenes de la crecida del río Ebro en diciembre de 2021 en Zaragoza.

¹<https://www.elmundo.es/espana/2021/12/14/61b883b021efa0975b8b4576.html>

Las inundaciones no suelen ser descritas mediante modelos matemáticos 3D al suponer un elevado consumo computacional sin aportar información esencial, y son los modelos conformados por una aproximación en la vertical (2D) los utilizados con mayor frecuencia para describir la evolución temporal y espacial de este tipo de eventos ([7]). Sin embargo, el estudio del desbordamiento de ríos implica trabajar con extensos dominios y largas escalas temporales, elevando el número de operaciones realizadas. Dado que cualquier aplicación práctica requiere una unión entre precisión en los resultados y eficiencia computacional, los modelos con un promediado en la sección transversal (1D) también son utilizados en esta clase de problemas, ofreciendo en algunos casos una elevada precisión con un consumo computacional mucho más reducido que el que implican los modelos 2D y 3D ([8]). En el nivel más bajo de complejidad, los modelos hidrológicos (en ocasiones llamados modelos 0D) permiten describir de forma simplificada estas regiones del cauce sin la necesidad de calcular alguna de las variables hidráulicas, ofreciendo una eficiencia computacional mucho más alta que los modelos anteriores. Por tanto, todos los modelos descritos son capaces de describir el mismo evento, diferenciándose en la precisión de sus resultados y en su rango de validez.

El siguiente trabajo se centra en el estudio del dominio comprendido en el tramo de río Ebro entre Caspe y Mequinenza, lo que supone aproximadamente 62 kilómetros de cauce. Esta región está caracterizada por tener en su tramo final la presa de Mequinenza, la cual, mediante el ajuste y control de la altura de sus compuertas (Figura 1.2), permite la regulación del flujo de salida y de la cantidad de volumen de agua almacenado en el embalse, denominado comúnmente como Mar de Aragón (Figura 1.3), y que conforma todo el dominio estudiado. Manteniendo un compromiso entre eficiencia computacional y precisión, los modelos que se utilizarán para describir el flujo son el modelo 1D y un modelo hidrológico. A su vez, la presencia de la presa permite la búsqueda de un método dinámico de control que consiga ajustar la altura de sus compuertas para conseguir mantener el volumen embalsado dentro de los límites de seguridad en el contexto de un evento transitorio.



(a) Presa de Mequinenza.

(b) Esquema estructural de la presa.

Figura 1.2: Imagen y esquema estructural de la presa de Mequinenza.

Por tanto, los objetivos del trabajo son los siguientes:

- Desarrollar un formalismo matemático que permita usar el método de control basado en variables adjuntas para el ajuste y control del nivel en un embalse mediante una presa en el contexto de un modelo 1D del flujo.
- Implementar el formalismo adjunto y verificar su correcto funcionamiento en un caso ideal, así como la realización de un análisis de sensibilidad para comprobar la capacidad del método implementado.

- Comparar los resultados obtenidos mediante el método de control adjunto con el método de control Proporcional Integral Derivativo (PID), implementado con anterioridad ([9]).
- Analizar el comportamiento del método de control adjunto al hacer uso de modelos hidrológicos para la modelización de un embalse.
- Estudiar el comportamiento del método de control en el dominio comprendido entre Caspe y Mequinenza para verificar si es una herramienta eficaz de regulación en presencia de crecidas con riesgo de inundaciones.

Las simulaciones se realizan usando el programa PEKA1D ([10]), desarrollado por el Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos de la Universidad de Zaragoza. Las tareas realizadas para el presente trabajo forman parte del proyecto de investigación del Grupo de Hidráulica Computacional de la Universidad de Zaragoza, *Herramientas eficientes de alta precisión para la simulación y control de flujos*, PGC2018-094341-B-I00, cuyo objetivo es el desarrollo de un código propio de simulación para la predicción y control de fenómenos en flujos complejos.



Figura 1.3: Embalse de Mequinenza.

Capítulo 2

Modelo matemático del flujo

En primer lugar, se debe formular un modelo que, mediante un sistema de ecuaciones, permita obtener una evolución temporal y espacial del flujo en el dominio deseado. Las ecuaciones del flujo se formulan tomando una descripción Euleriana del campo fluido, basada en la definición de variables hidráulicas en cada punto del espacio que evolucionan en el tiempo. Esta descripción para el flujo viene dada de forma general por las ecuaciones de Navier-Stokes (Anexo A), conformadas por la ecuación de continuidad, las ecuaciones de cantidad de movimiento y por la ecuación de conservación de la energía. Si la densidad del fluido es constante, mediante las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento es suficiente para determinar la evolución del flujo, ya que la ecuación de la conservación de la energía se desacopla del resto. Por tanto, el modelo matemático partirá de estas dos ecuaciones. Las características del problema que nos ocupa (extensos dominios y grandes escalas temporales) justifican la aproximación de flujo promedio bajo la hipótesis de aguas poco profundas. La consecuencia principal de esta aproximación es una distribución hidrostática de presión en la vertical y la eliminación de la información relativa a la componente z de la velocidad, siendo esta la hipótesis principal del modelo de aguas poco profundas, que cumplen las ondas mecánicas producidas en un río. Esta aproximación se presenta en el Anexo A.

Teniendo en cuenta que se parte de un modelo que describe el espacio de forma tridimensional (Figura 2.1b), se debe ir realizando una serie de aproximaciones que permitan obtener un modelo conformado por una única componente de la velocidad (Figura 2.2b). Así, para la obtención de las ecuaciones de flujo en aproximación de aguas poco profundas en dos dimensiones (Figura 2.1a), se debe partir de las ecuaciones de flujo en tres dimensiones y promediarlas a lo largo de la columna vertical líquida para transformarlas a ecuaciones en dos dimensiones, transformación que viene detallada en el Anexo B. Si se realiza un promedio en la sección transversal, se obtiene el modelo matemático 1D. Finalmente, en el caso de estudiar determinadas regiones del cauce, como es el caso de un embalse, los modelos hidrológicos, también llamados modelos agregados, permiten describir de forma simplificada el dominio sin la necesidad de conocer la velocidad de ninguna componente espacial (Figura 2.2a).

2.1. Modelo del flujo 0D

Cualquier modelo agregado busca obtener una expresión simplificada que permita describir la evolución del flujo en un determinado dominio, sin la necesidad de discretizar espacialmente toda esta región (Figura 2.2a) para la resolución del problema, a diferencia de otros modelos más complejos que sí lo hacen (Figuras 2.1a, 2.1b y 2.2b). Uno de los modelos agregados frecuentemente utilizado es el *hydrologic routing*, modelo empleado para estimar caudales de entrada o salida en función de las variaciones de nivel, o estimar las variaciones del nivel en función de los caudales

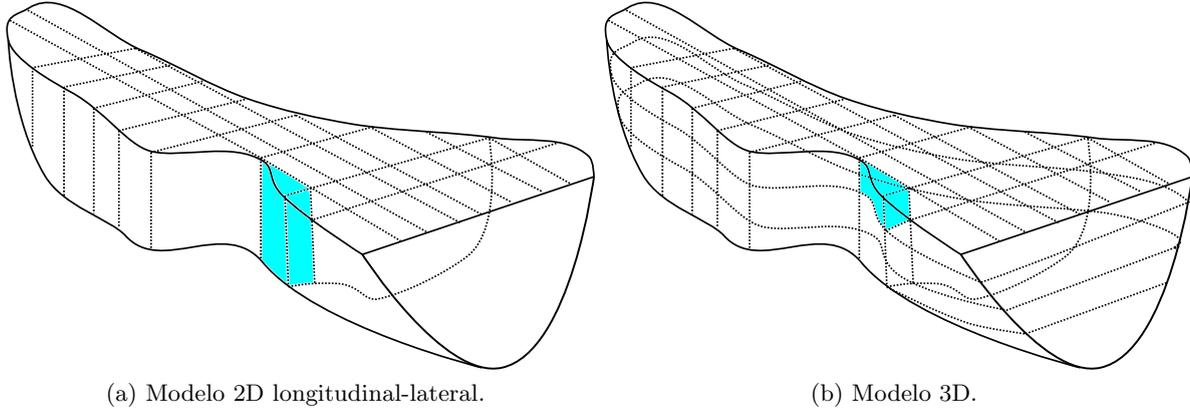


Figura 2.1: Esquema de los modelos hidráulicos 2D y 3D.

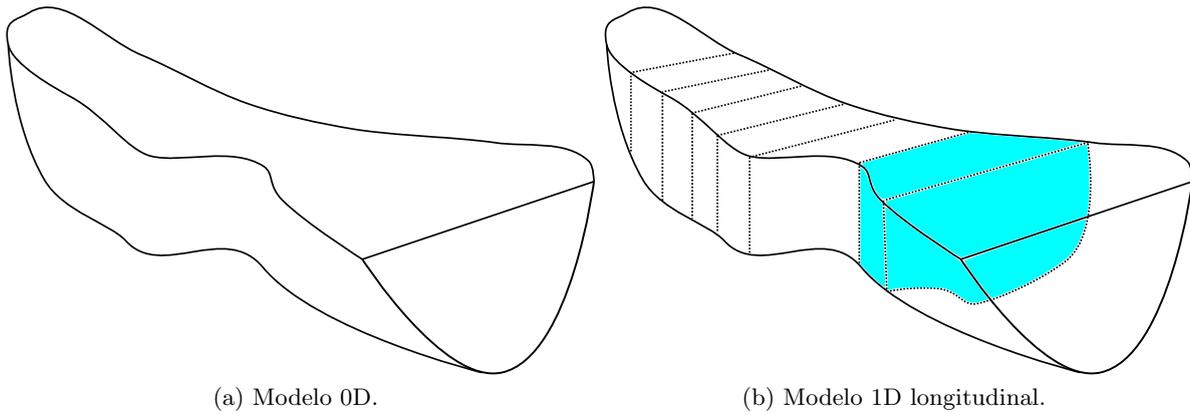


Figura 2.2: Esquema de los modelos hidráulicos 0D y 1D.

de entrada y salida. Todo modelo *hydrologic routing* está fundamentado mediante la ecuación de conservación de la masa-volumen en forma integral, que puede ser expresada de forma simplificada como ([12]):

$$\frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (2.1)$$

donde V es el almacenamiento, Q_{in} el flujo de entrada y Q_{out} el flujo de salida. Este tipo de modelos renuncian a resolver las ecuaciones de cantidad de movimiento y, por tanto, a conocer la evolución de la velocidad.

La expresión (2.1) se debe particularizar en función de la región que se pretenda modelizar, imponiendo una serie de hipótesis y trabajando con las variables oportunas. En nuestro caso, la región que se pretende modelizar es un embalse. Uno de los modelos hidrológicos que describe esta estructura hidráulica es el método de Puls modificado ([13]) que se fundamenta en las siguientes hipótesis:

- La superficie libre de agua del embalse se encuentra a una misma cota H .
- El volumen embalsado es función de la cota superficial H ($V = V(H)$).
- El caudal de salida es también función de la cota superficial H ($Q_{out} = Q_{out}(H)$).

2.2. Modelo del flujo 1D

El sistema de ecuaciones del flujo en una dimensión se obtiene mediante un promediado de las ecuaciones tridimensionales en la sección transversal del cauce. El sistema resultante de las ecuaciones de conservación de masa y cantidad de movimiento se puede escribir de la forma:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = g[I_2 + A(S_0 - S_f)] \end{cases} \quad (2.2)$$

donde, por simplicidad, se considera que no existen variaciones de masa del flujo por precipitación o infiltración¹. El sistema (65) se puede escribir en forma matricial mediante:

$$\frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} + \frac{d\mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{dx} = \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) \quad (2.3)$$

donde:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(x, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ Q^2/A + gI_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ g[I_2 + A(S_0 - S_f)] \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

siendo Q el caudal y A el área transversal mojada las variables conservadas, con g como la intensidad del campo gravitatorio terrestre y donde A viene dada por la expresión:

$$A(x) = \int_0^h \sigma(x, \eta) d\eta \quad (2.5)$$

siendo η la coordenada en la profundidad y $\sigma(x, \eta)$ la anchura de sección (Figura 2.3a). S_0 es la pendiente del fondo en la dirección longitudinal del cauce:

$$S_0 = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (2.6)$$

y S_f la pendiente de fricción, presentada a continuación mediante la ley empírica de Manning:

$$S_f = \frac{n^2 |Q| Q}{A^2 R_h^{4/3}} \quad (2.7)$$

donde R_h es el radio hidráulico, que se define como el cociente entre el área transversal mojada A y el perímetro mojado P (Figura 2.3b), y n es el coeficiente de Manning, que indica la resistencia que sufre un flujo por la rugosidad de las paredes que lo confinan, cuyos valores empíricos se proporcionan en referencias ([11]).

Las variables aún no definidas son la fuerza de presión hidrostática (I_1) y la fuerza de presión debida a la variación de la anchura (I_2):

$$I_1(x) = \int_0^h (h - \eta) \sigma(x, \eta) d\eta, \quad I_2(x) = \int_0^h (h - \eta) \frac{\partial \sigma(x, \eta)}{\partial x} d\eta \quad (2.8)$$

siendo h el calado (Figura 2.3a), y que cumplen:

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{B} \quad (2.9)$$

¹Teniendo en cuenta que nuestro trabajo se centra en el estudio de un río, las variaciones de masa por estos dos fenómenos son ínfimas en comparación con la masa que transporta el río por unidad de tiempo.

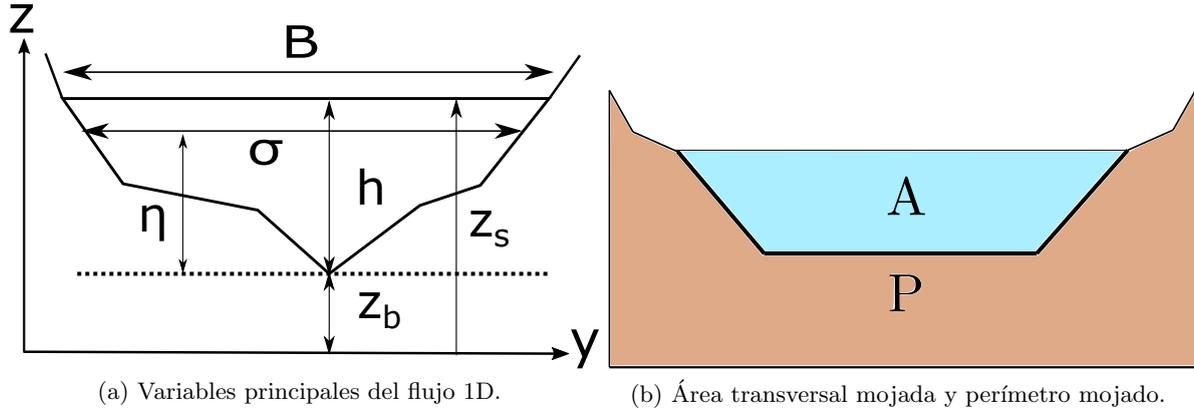


Figura 2.3: Esquema de las variables físicas en la sección transversal al cauce.

Los términos I_1 e I_2 se pueden modificar para dejar todos los términos del sistema (2.3) en función de las variables conservadas. Para ello, hay que tener en cuenta la regla de la cadena:

$$\frac{d\mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{dx} = \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{U}=\text{cte}} + \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{x=\text{cte}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} \quad (2.10)$$

Usando la expresión (2.10), (2.3) se transforma en:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{S}'(x, \mathbf{U}) \quad (2.11)$$

donde \mathbf{S}' es el vector correspondiente a los términos fuente en forma no conservativa:

$$\mathbf{S}'(x, \mathbf{U}) = \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) - \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial x} \Big|_{\mathbf{U}=\text{cte}} \quad (2.12)$$

y $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ es la matriz Jacobiana del sistema, en la cual se apoyará el método numérico debido al carácter hiperbólico del sistema de ecuaciones (2.3):

$$\mathbf{J}_{\mathbf{F}} = \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{x=\text{cte}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

cuyos valores propios son:

$$\lambda_1 = u - c, \quad \lambda_2 = u + c \quad (2.14)$$

y donde \mathbf{P} se construye mediante los vectores propios:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

siendo u y c velocidades dadas por:

$$u = \frac{Q}{A}, \quad c = \sqrt{g A/B} \quad (2.16)$$

donde B es la anchura del canal correspondiente a la lámina superior de agua (Figura 2.3a). La velocidad c caracteriza la celeridad de las ondas infinitesimales de deformación de la superficie y se

usa junto a u , que es la velocidad del flujo a través de la sección, para definir el número adimensional de Froude:

$$Fr = \frac{u}{c} \quad (2.17)$$

que permite clasificar los flujos en lentos o subcríticos ($Fr < 1$), críticos ($Fr = 1$) y rápidos o supercríticos ($Fr > 1$).

Teniendo en cuenta las expresiones obtenidas para I_1 y para I_2 (expresiones (2.8) y (2.9)), y haciendo uso de la regla de la cadena, se escribe:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (2.18)$$

Así, la expresión (2.12) queda como:

$$\mathbf{S}'(x, \mathbf{U}) = \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) - \left. \frac{\partial \mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{\partial x} \right|_{\mathbf{U}=\text{cte}} = \begin{pmatrix} 0 \\ g A (S_0 - S_f - \frac{dh}{dx} + \frac{1}{B} \frac{dA}{dx}) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

2.3. Condiciones iniciales y de contorno

Como en todo sistema de ecuaciones diferenciales evolutivo es necesaria la presencia de las condiciones iniciales y las condiciones de contorno, que proporcionan información acerca de las variables conservadas en los límites del dominio estudiado y en el instante inicial del que se parte. Por ello, se presentan a continuación las condiciones utilizadas en el trabajo.

2.3.1. Condiciones iniciales

La condición inicial impone las condiciones en las que se encuentra las variables conservadas en el instante inicial. En general, la condición inicial de la que parte el sistema que define al flujo se puede clasificar en dos grandes grupos: estado seco o estado previamente calculado.

Estado seco

Se impone a todas las variables conservadas un valor cero en el instante inicial, por lo que se parte de un canal seco, es decir, sin flujo alguno.

Estado previamente calculado (*Hot Start*)

Las variables conservadas parten con un determinado valor, el cual se obtiene a partir de una situación previamente calculada. Así, se puede imponer al flujo un estado estacionario o un estado transitorio. Un estado estacionario se obtiene cuando las variables hidráulicas adquieren un valor constante a lo largo del tiempo. En el caso de tener un flujo estacionario, se introduce un caudal igual y constante en todo el cauce. Esta condición inicial permite obtener un inicio del problema similar a las condiciones que se presentan en un río en los momentos previos a una crecida. El aspecto fundamental para que un estado previamente calculado satisfaga correctamente las características del sistema de ecuaciones que complementa es que se haya obtenido anteriormente para un problema con un dominio espacial igual al que se impone.

2.3.2. Condiciones de contorno

En problemas de aplicación fluvial, las condiciones de contorno proporcionan información sobre cómo los flujos entran y salen del dominio. Dentro de estas condiciones, se debe diferenciar entre condiciones de contorno aguas arriba y condiciones de contorno aguas abajo. Las primeras son aquellas que aportan la información del régimen de entrada del flujo, mientras que las segundas aportan la información sobre cómo el flujo abandona el dominio.

Hidrograma

La condición de contorno de tipo hidrograma se establece como condición de contorno aguas arriba, imponiéndose por tanto a la entrada del dominio. Consiste en imponer una función de caudal $Q(t)$ que evoluciona en el tiempo. La información que esta condición aporta es transportada por la evolución temporal de las ecuaciones a lo largo de todo el dominio.

Vertedero

La condición de contorno de tipo vertedero impone una función de caudal $Q_{out} = f(H)$ que viene dada por las características que tiene el flujo de salida a través de una pared con una apertura en la parte superior. En función de la forma de esta apertura, la función del caudal varía. Considerando ciertas simplificaciones, el caudal de salida de un vertedero con forma trapezoidal sigue la expresión ([14]):

$$Q_{out} = \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d b H_w^{3/2} + \frac{8}{15} \sqrt{2g} \tan(\alpha/2) C_d H_w^{5/2} \quad (2.20)$$

donde $H_w = H - h_{Crest}$ es el grosor de la lámina de agua por encima de la cresta del vertedero h_{Crest} , H es el nivel de la superficie libre ($H = h + z_b$), α el doble del ángulo que conforman los lados laterales del trapecio con la vertical, b la anchura de la base menor del trapecio (Figura 2.4) y C_d es la constante de gasto, que en nuestro caso toma el valor $C_d = 0.611$ ([15]). En el caso de tener un vertedero con forma triangular, se tiene $b = 0$ y $0^\circ < \alpha/2 < 90^\circ$; mientras que, si se tiene un vertedero rectangular, únicamente $\alpha/2 = 0$. Teniendo en cuenta la forma que tienen las compuertas de la presa de Mequinenza (Figura 1.2a), se impondrá éste último caso a la salida de nuestro problema.

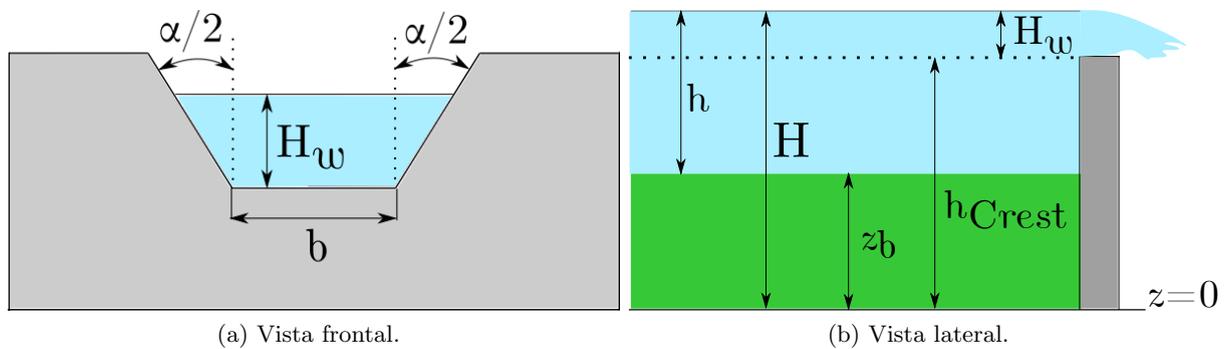


Figura 2.4: Esquema de la condición de contorno de vertedero.

En función del valor que adquiera H_w en la región final del dominio, se obtendrá un determinado caudal de salida a través del vertedero. Cuando el nivel en la sección transversal en contacto con el vertedero se encuentre por debajo de la altura de cresta se tendrá un caudal de salida nulo

($H_w \leq 0$), mientras que si el nivel queda por encima ($H_w > 0$), el caudal de salida seguirá la expresión (2.20). Así, la función de caudal $Q_{out} = f(H)$ a través del vertedero queda definida en nuestro problema de la forma:

$$Q_{out} = \begin{cases} 0 & \text{si } H_w \leq 0 \\ \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d b H_w^{3/2} & \text{si } H_w > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Embalse 0D

La expresión (2.1) está bien definida en aquellas regiones que cumplan las hipótesis que el método de Puls modificado impone, como es el caso de un embalse. Sin embargo, en el resto del dominio, la expresión (2.1) no es válida. Por tanto, se debe buscar una forma de poder obtener una descripción precisa en todo el dominio pero haciendo uso de la simplificación que proporciona el modelo 0D. Por ello, una forma de poder hacer uso de ambos modelos es estudiar el dominio que no cumpla las hipótesis mediante el modelo 1D, y el resto del dominio, que será la región que conforma el embalse, se describe mediante el modelo 0D, obteniendo un modelo al que se llamará modelo 1D-0D. Así, la obtención de este modelo será a partir de la imposición de una condición de contorno aguas abajo que imponga (2.1) en el dominio no embalsado.

Teniendo en cuenta que las variaciones del volumen del embalse se pueden expresar:

$$dV = S(H) dH \quad (2.22)$$

podemos modificar (2.1):

$$\frac{dV}{dt} = S(H) \frac{dH}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \quad (2.23)$$

Se considera que las variaciones de la superficie son muy reducidas si los cambios de H no son muy elevados. Finalmente, despejando en (2.23), se obtiene la variación temporal del nivel del embalse:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{(Q_{in} - Q_{out})}{S(H)} \quad (2.24)$$

Mientras que el caudal de entrada al embalse depende de la evolución temporal y espacial de las variables hidráulicas a lo largo del dominio 1D, el caudal de salida depende de la estructura hidráulica que se tenga al final del embalse. En nuestro caso, como se ha descrito anteriormente, se tendrá una estructura de tipo vertedero rectangular. Por tanto, el caudal Q_{out} que complementa a (2.24) vendrá dado por (2.21).

La función $S(H)$ se debe obtener de forma diferente en el caso de tener un caso geoméricamente simple o en el caso de tener una geometría más compleja, como es el caso del río Ebro. La obtención de estas funciones se muestra en el Anexo C.

Capítulo 3

Discretización de las ecuaciones

El sistema de ecuaciones (2.3) debe ser resuelto mediante aproximaciones numéricas al tratarse de un sistema formado por ecuaciones diferenciales no lineales sin solución analítica. Existen distintos tipos de métodos numéricos en función de la forma en la que discretizan el espacio y el tiempo. Según la discretización espacial, se pueden diferenciar dos grandes grupos:

- Centrado: es una aproximación simétrica que utiliza información de la celda a ambos lados para aproximar la derivada espacial.
- Descentrado (*upwind*): En este caso, utiliza una información espacial acorde con el signo de la velocidad característica del problema.

Según la discretización temporal, también se diferencian dos grupos:

- Explícito: Evalúa el sistema de ecuaciones a resolver en el tiempo actual. Al no ser un método incondicionalmente estable, el intervalo de tiempo Δt viene restringido por un límite de estabilidad.
- Implícito: Evalúa el sistema de ecuaciones a resolver en un tiempo futuro. Este método es incondicionalmente estable, por lo que permite una evolución temporal con pasos de tiempo Δt elevados.

Existen numerosos estudios acerca de la validez de los diferentes métodos numéricos aplicados a modelos bajo la aproximación de aguas poco profundas, como es el caso del sistema (2.3) ([16], [17]). Al proporcionar robustez, estabilidad y resultados con elevada precisión, la resolución numérica del sistema (2.3) se realizará mediante el método numérico de volúmenes finitos *upwind* explícito, basado en el Riemann Solver de Roe ([18], [19], [20]). Este método numérico parte de integrar (2.3) en un volumen o celda Ω :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{F}(x, \mathbf{U})}{dx} d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) d\Omega \quad (3.1)$$

Aplicando el teorema de la divergencia a la expresión (3.1), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \mathbf{U} d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \mathbf{F}(x, \mathbf{U}) \cdot \hat{n} dl = \int_{\Omega} \mathbf{S}(x, \mathbf{U}) d\Omega \quad (3.2)$$

donde $\partial\Omega$ es el contorno del volumen y \hat{n} es el vector unitario normal al volumen Ω definido en sentido saliente del contorno. Discretizando de forma temporal y espacial (3.2), se obtiene la base del método numérico en volúmenes finitos. El método numérico discretiza el medio, usando un Δx_i para el tamaño de la celda i ($i \in [0, N - 1]$ con N el número total de celdas), y usando un paso temporal Δt desde el tiempo inicial $t^0 = 0$ al tiempo final T , que no tiene por qué ser constante a lo largo de la simulación, por lo que $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, con n la iteración actual.

3.1. Esquema numérico 1D

Para obtener el esquema numérico que se utiliza para resolver el sistema de ecuaciones del flujo, se debe partir de un esquema numérico en volúmenes finitos genérico y, posteriormente, se particulariza a nuestro sistema.

3.1.1. Esquema numérico en volúmenes finitos

Partiendo de la ecuación diferencial hiperbólica, escalar, homogénea en 1D:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (3.3)$$

se desea obtener su solución numérica. Para ello, el dominio espacial de longitud L se discretiza en N celdas $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ de tamaño Δx (Figura 3.1). Integrando (3.3) en un espacio $[x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ y en un tiempo $[t^n, t^{n+1}]$ donde $t^{n+1} = t^n + \Delta t$:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^{n+1}) dx - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx + \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i+1/2}, t)) dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i-1/2}, t)) dt = 0 \quad (3.4)$$

El método de volúmenes finitos considera un valor promedio espacial de la variable conservada $u(x, t)$ en cada celda i para un tiempo fijo $t = t^n$, que viene dado por:

$$u_i^n = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t^n) dx \quad (3.5)$$

y para los flujos promediados en el tiempo y definidos en las paredes de la celda:

$$f_{i\pm 1/2}^* = \frac{1}{\Delta t} \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(u(x_{i\pm 1/2}, t)) dt \quad (3.6)$$

Mediante (3.5) y (3.6), se obtiene la expresión que resuelve (3.3) y que proporciona la evolución espacial y temporal de la variable conservada $u(x, t)$:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \quad (3.7)$$

Por otra parte, partiendo de la expresión no conservativa de (3.3):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

donde la velocidad característica es:

$$\lambda(u) = \frac{df}{du} \longrightarrow df = \lambda(u) du \quad (3.9)$$

se obtiene, a partir de la aproximación *upwind*, que discrimina el sentido de propagación acorde con el signo de la velocidad característica, la expresión que proporciona la evolución temporal y espacial de la variable conservada u :

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{i-1/2}^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) & \text{si } \lambda > 0 \\ u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \lambda_{i+1/2}^- (u_{i+1}^n - u_i^n) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

donde se definen las siguientes expresiones:

$$\lambda^\pm = \frac{\lambda \pm |\lambda|}{2}, \quad \delta f^\pm = \lambda^\pm(u) \delta u \quad (3.11)$$

Por tanto, uniendo el sistema de ecuaciones (3.10), y haciendo uso de la expresión para δf^\pm (3.11), se obtiene la expresión:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\delta f_{i+1/2}^- + \delta f_{i-1/2}^+) \quad (3.12)$$

Si se desarrolla la expresión de λ^\pm (3.11) en (3.10), se llega a:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\frac{1}{2} \lambda_{i-1/2} \delta u_{i-1/2}^n + \frac{1}{2} |\lambda_{i-1/2}| \delta u_{i-1/2}^n + \frac{1}{2} \lambda_{i+1/2} \delta u_{i+1/2}^n - \frac{1}{2} |\lambda_{i+1/2}| \delta u_{i+1/2}^n \right] \quad (3.13)$$

siendo:

$$\delta u_{i-1/2}^n = u_i^n - u_{i-1}^n, \quad \delta u_{i+1/2}^n = u_{i+1}^n - u_i^n \quad (3.14)$$

Si se expresan los flujos en las paredes de la celda como:

$$f_{i+1/2}^* = \frac{1}{2} (f_i + f_{i+1} - |\lambda_{i+1/2}| \delta u_{i+1/2}^n) \quad (3.15)$$

$$f_{i-1/2}^* = \frac{1}{2} (f_{i-1} + f_i - |\lambda_{i-1/2}| \delta u_{i-1/2}^n) \quad (3.16)$$

se puede expresar (3.13) en términos de los flujos (3.15) y (3.16):

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (f_{i+1/2}^* - f_{i-1/2}^*) \quad (3.17)$$

tal y como se había obtenido en (3.7).

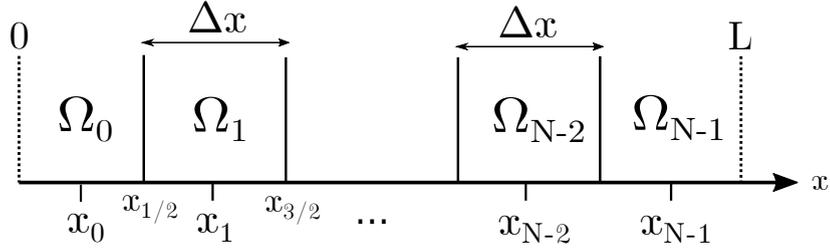


Figura 3.1: Discretización 1D del dominio en el esquema numérico en volúmenes finitos.

3.1.2. Esquema numérico con Riemann Solver de Roe

Se parte en primer lugar del sistema (2.3) sin término fuente $\mathbf{S}(x, \mathbf{U})$, el cual es un sistema hiperbólico no lineal homogéneo:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

que, mediante (2.13), se puede escribir como:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\mathbf{F}} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0 \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{J}_{\mathbf{F}} = \partial\mathbf{F}/\partial\mathbf{U}$. Para obtener la solución numérica, el dominio se discretiza en N celdas $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ todas de tamaño Δx (Figura 3.1). En nuestro caso, nos interesa encontrar soluciones del Problema de Riemann local (Figura 3.2):

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = 0 \quad (3.20)$$

con condición inicial:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.21)$$

desde un tiempo genérico $t^n = 0$ hasta un tiempo $t^{n+1} = \Delta t$. La solución de cada Problema de Riemann se obtiene integrando:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{U}(x, \Delta t) dx = \Delta x(\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)) \quad (3.22)$$

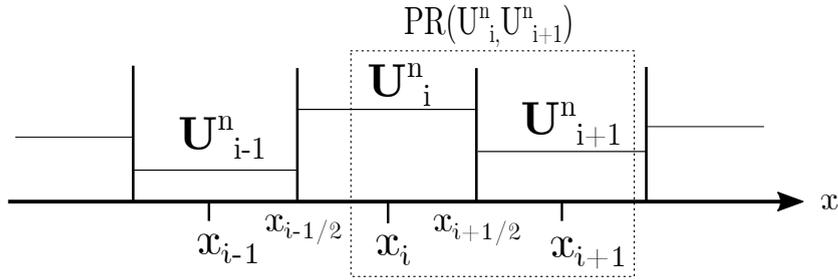


Figura 3.2: Esquema del Problema de Riemann local.

A su vez, mediante la aproximación de Roe, se linealiza (3.19):

$$\frac{\partial\hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}} \frac{\partial\hat{\mathbf{U}}}{\partial x} = 0 \quad (3.23)$$

con condición inicial:

$$\hat{\mathbf{U}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.24)$$

y, por tanto, la solución $\hat{\mathbf{U}}$ de la linealización del Problema de Riemann (3.23) debe satisfacer:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx = \Delta x(\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}(\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (3.25)$$

donde $\tilde{\mathbf{J}}$ es la matriz $\mathbf{J}_{\mathbf{F}}$ de (3.19) tras ser linealizada localmente. La condición de consistencia del solver de Riemann con aproximación de Roe permite unir (3.22) con (3.25) obteniendo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx = \Delta x(\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)) \quad (3.26)$$

donde se establece: $\delta\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}\delta\mathbf{U}$. A partir del solver de Roe original, los vectores propios aproximados $\tilde{\lambda}^1$ y $\tilde{\lambda}^2$ y los vectores propios $\tilde{\mathbf{e}}^1$ y $\tilde{\mathbf{e}}^2$ de la matriz $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}$ cumplen la propiedad:

$$(\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}})_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} \tilde{\Lambda}_{i+1/2} \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}^{-1} \quad (3.27)$$

donde $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{\mathbf{e}}^1, \tilde{\mathbf{e}}^2)$ y $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ es la matriz diagonal de valores propios $\tilde{\lambda}^1$ y $\tilde{\lambda}^2$. El diferencial del vector de variables conservadas, $\delta\mathbf{U}$, puede ser linealizado usando la base de vectores propios:

$$\delta\mathbf{U}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} \tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} \quad (3.28)$$

con $\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} = (\tilde{\alpha}^1, \tilde{\alpha}^2)_{i+1/2}^T$, que, despejando (3.28), queda de la forma:

$$\tilde{\mathbf{A}}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2}^{-1} \delta\mathbf{U}_{i+1/2} \quad (3.29)$$

por lo que el diferencial $\delta\mathbf{F}$ puede expresarse como:

$$\delta\mathbf{F}_{i+1/2} = (\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{\Lambda}} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \delta\mathbf{U})_{i+1/2} = \sum_{m=1}^2 \left(\tilde{\lambda} \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^m \quad (3.30)$$

Teniendo en cuenta que los valores propios se pueden dividir en su parte positiva y negativa:

$$\tilde{\lambda}^\pm = \frac{\tilde{\lambda} \pm |\tilde{\lambda}|}{2} \quad (3.31)$$

el esquema numérico puede ser formulado mediante los diferenciales de \mathbf{F} :

$$\delta\mathbf{F}_{i+1/2}^\pm = \sum_{m=1}^2 \left(\tilde{\lambda}^\pm \tilde{\alpha} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^m \quad (3.32)$$

Un procedimiento similar se debe seguir si a (3.18) se le añaden términos fuente \mathbf{S} , obteniendo un sistema hiperbólico no lineal de ecuaciones:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (3.33)$$

El dominio vuelve a ser dividido en N celdas $\Omega_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$ todas de tamaño constante Δx . El Problema de Riemann local se considera desde $t^n = 0$ a $t^{n+1} = \Delta t$:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) = \mathbf{S}(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1}) \quad (3.34)$$

con condición inicial:

$$\mathbf{U}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

La solución de cada Problema de Riemann se consigue integrando sobre un volumen $[x_i, x_{i+1}]$ en un tiempo $[0, \Delta t]$:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{U}(x, \Delta t) dx = \Delta x (\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - (\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i)) + \int_0^{\Delta t} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{S} dt dx \quad (3.36)$$

Para el último término de la integral (3.36) correspondiente al término fuente \mathbf{S} , se asume la siguiente linealización en el tiempo:

$$\int_0^{\Delta t} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{S} dt dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \mathbf{S}(x, 0) dx = \mathbf{S}_{i+1/2}^n \quad (3.37)$$

En la aproximación de Roe, (3.34) es aproximado por el Problema de Riemann homogéneo linealizado:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}^* \frac{\partial \hat{\mathbf{U}}}{\partial x} = 0 \quad (3.38)$$

con condición inicial:

$$\hat{\mathbf{U}}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_i & \text{si } x < 0 \\ \mathbf{U}_{i+1} & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

donde $\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}^* = \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}^*(\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_{i+1})$ es una matriz. Integrando sobre el mismo volumen y tiempo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx = \Delta x (\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - \tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}^* (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i) \quad (3.40)$$

Mediante la condición de consistencia, se unen (3.36) y (3.40), obteniendo:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \hat{\mathbf{U}}(x, \Delta t) dx = \Delta x (\mathbf{U}_{i+1} + \mathbf{U}_i) - \left(\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+1}^n) - \mathbf{F}(\mathbf{U}_i^n) - \mathbf{S}_{i+1/2}^n \right) \quad (3.41)$$

en donde:

$$\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}}^* \delta \mathbf{U}_{i+1/2} = \delta \mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{S}_{i+1/2}^n = (\tilde{\mathbf{J}}_{\mathbf{F}} \delta \mathbf{U})_{i+1/2} - \mathbf{S}_{i+1/2}^n \quad (3.42)$$

Aparte del diferencial del vector de variables conservadas (expresión (3.28)), el vector de términos fuente también puede ser linealizado mediante la base de vectores propios:

$$\mathbf{S}_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}}_{i+1/2} \tilde{\mathbf{B}}_{i+1/2} \quad (3.43)$$

donde $\tilde{\mathbf{B}}_{i+1/2} = \left(\tilde{\beta}^1, \tilde{\beta}^2 \right)_{i+1/2}^T$. Así, la diferencia entre el flujo y los términos fuente puede ser expresada mediante:

$$\delta \mathbf{F}_{i+1/2}^n - \mathbf{S}_{i+1/2}^n = (\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \tilde{\mathbf{P}}^{-1} \delta \mathbf{U})_{i+1/2} - (\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{B}})_{i+1/2} = \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\Lambda} \left(\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\Lambda}^{-1} \tilde{\mathbf{B}} \right)_{i+1/2} = \sum_{m=1}^2 \left(\tilde{\lambda} \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i+1/2}^m \quad (3.44)$$

donde:

$$\tilde{\gamma}_{i+1/2}^m = \left(\tilde{\alpha} - \frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\lambda}} \right)_{i+1/2}^m \quad (3.45)$$

De acuerdo con (3.12), la actualización del vector de variables conservadas puede expresarse mediante:

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left((\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i-1/2}^+ + (\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i+1/2}^- \right)^n \quad (3.46)$$

con:

$$(\delta \mathbf{F} - \mathbf{S})_{i\pm 1/2}^\pm = \sum_{m=1}^2 \left(\tilde{\lambda}^\pm \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}} \right)_{i\pm 1/2}^m \quad (3.47)$$

y donde:

$$\tilde{\lambda}_{i+1/2}^{\pm m} = \frac{1}{2} (\tilde{\lambda} \pm |\tilde{\lambda}|)_{i+1/2}^m \quad (3.48)$$

Por tanto, el esquema numérico se formula para la actualización de una celda i entre el tiempo t^n y el tiempo t^{n+1} , teniendo en cuenta las contribuciones a derecha e izquierda de flujos y términos fuente $\tilde{\gamma}$ de las paredes de la celda (Figura 3.3). Para el sistema (2.3), se tiene, con $m = \{1, 2\}$:

$$\tilde{\lambda}^m = \tilde{u} \mp \tilde{c} \quad (3.49)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}^m = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{\lambda}^m \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

$$\tilde{\alpha}^1 = \frac{\tilde{\lambda}^2 \delta A - \delta Q}{2\tilde{c}}, \quad \tilde{\alpha}^2 = \frac{-\tilde{\lambda}^1 \delta A - \delta Q}{2\tilde{c}} \quad (3.51)$$

$$\tilde{\beta}^1 = -\frac{1}{2\tilde{c}} \left[g\tilde{A} \left([\tilde{S}_0 - \tilde{S}_f] \delta x - \delta h + \frac{1}{B} \delta A \right) \right], \quad \tilde{\beta}^2 = -\tilde{\beta}^1 \quad (3.52)$$

A continuación se presenta la resolución numérica del sistema (2.3), que proporciona la evolución temporal y espacial de las variables conservadas A y Q :

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\sum_{m=1}^2 (\tilde{\lambda}^+ \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}})^m_{i-1/2} + \sum_{m=1}^2 (\tilde{\lambda}^- \tilde{\gamma} \tilde{\mathbf{e}})^m_{i+1/2} \right]^n \quad (3.53)$$

Al tratarse de un método numérico explícito, la estabilidad de las soluciones numéricas exige que el paso de tiempo Δt venga restringido por la condición Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):

$$\Delta t = \text{CFL} \min_{m,k} \left(\frac{\Delta x}{|\tilde{\lambda}_k^m|} \right) \quad (3.54)$$

donde $0 \leq \text{CFL} \leq 1$ para mantener la estabilidad en el esquema numérico ([23]). Mediante (3.54) se comprueban las condiciones de un elevado consumo computacional. Se puede observar que, si la malla está muy refinada, Δx adquirirá un valor muy reducido, por lo que el paso temporal Δt se verá también reducido. A su vez, si los valores propios adquieren valores muy elevados, como en el caso de tener caudales altos para canales estrechos, también el paso temporal se verá reducido, aumentando el consumo computacional de la simulación.

El número de condiciones de contorno necesarias en cada extremo depende de si el flujo es subcrítico ($u < c$, Figura 3.3), crítico ($u = c$, Figura 3.4) o supercrítico ($u > c$, Figura 3.5). Lo habitual en un tramo como el del Ebro es que el flujo se desarrolle en régimen subcrítico. En la Figura 3.6, se puede comprobar cómo la primera y la última celda sólo reciben una contribución, justificando la necesidad de introducir una condición de contorno aguas arriba y aguas abajo.

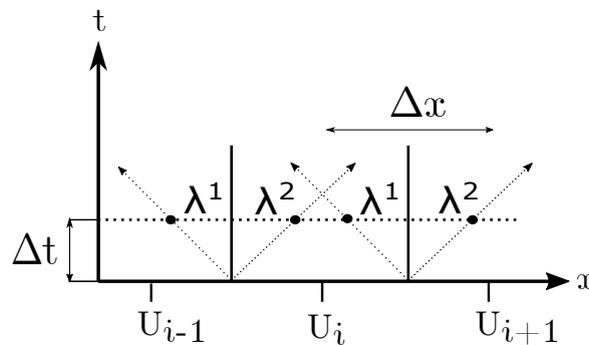


Figura 3.3: Esquema numérico con discretización espacial y temporal para un flujo subcrítico.

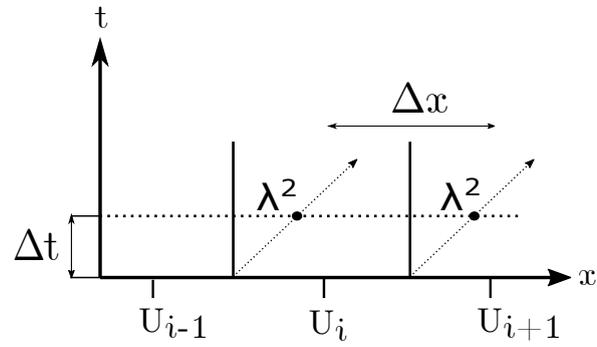


Figura 3.4: Esquema numérico con discretización espacial y temporal para un flujo crítico.

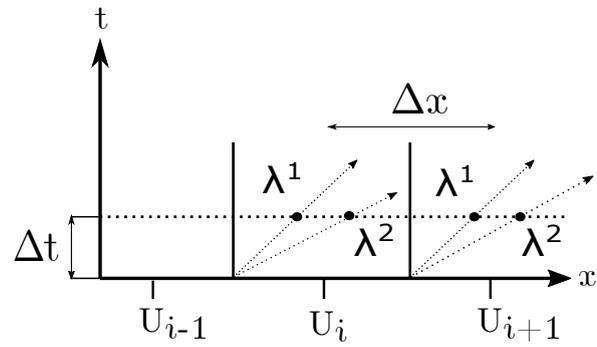


Figura 3.5: Esquema numérico con discretización espacial y temporal para un flujo supercrítico.

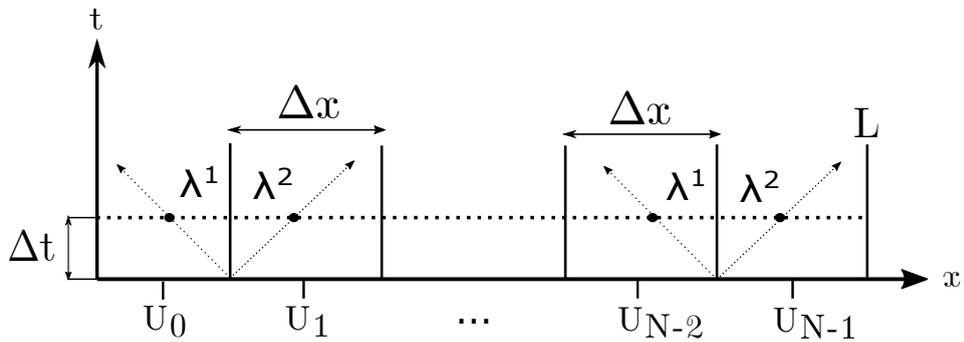


Figura 3.6: Esquema numérico en los extremos del dominio.

Capítulo 4

Optimización del nivel en un embalse

Planteamos un problema de optimización, donde una función objetivo $\mathbf{J} = f(\phi_1, \dots, \phi_k)$ con k variables y sujeta a un conjunto de restricciones deberá ser maximizada o minimizada. En nuestro caso, la función objetivo \mathbf{J} representará el error cuadrático medio para una componente:

$$\mathbf{J} = f(\phi(x, t)) = \frac{1}{2N_T} \sum_{j=1}^{N_T} (H_j - H_j^*)^2 \quad (4.1)$$

donde H_j será el nivel calculado en el instante j , H^* el nivel deseado y N_T el número total de mediciones realizadas. Por tanto, \mathbf{J} deberá ser minimizada en búsqueda de la obtención del nivel objetivo, teniendo en cuenta que será el mínimo global el buscado (Figura 4.1). El nivel objetivo se podrá obtener mediante la variación de la altura de la presa, expulsando más o menos agua en función del caudal de entrada en el embalse, por lo que el problema de optimización se resolverá mediante un control sobre un parámetro del modelo.

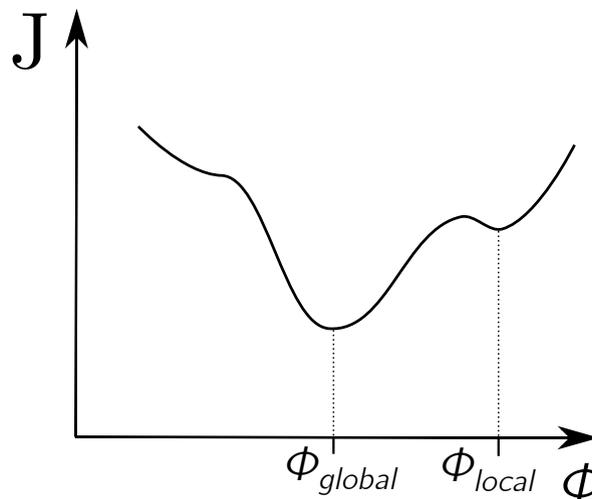


Figura 4.1: Mínimos locales y global que se pueden encontrar en la función J .

Existen distintos métodos de control para determinar la variación necesaria de la cresta buscando mantener un valor deseado en alguna de las variables hidráulicas ([8], [24]). Uno de ellos es el método de control basado en variables adjuntas, usado con frecuencia en el campo de la Mecánica de Fluidos Computacional ([25], [26], [27]). Este método consiste en unir el sistema de ecuaciones que describe un determinado modelo de flujo con la ecuación adjunta que permita caracterizar la sensibilidad del error a una variable y por lo tanto minimizarlo siguiendo su gradiente descendente.

Para obtener un determinado valor objetivo en alguna de las variables conservadas del modelo, se realiza un proceso iterativo. Otros métodos, como es el caso del método de control PID (Proporcional Integral Derivativo), son métodos directos que, mediante una única iteración, realizan el ajuste del parámetro de control en función del error para cada instante de tiempo.

4.1. Método de control PID

El método de control PID se trata de un algoritmo que mediante un controlador intenta obtener un valor objetivo para una de las variables que definen el sistema estudiado. El fundamento de este controlador es ajustar un parámetro de control que permite modificar el valor de la variable a corregir. El cálculo de las variaciones en el parámetro de control se basa en el error, siendo éste la diferencia entre el valor de la variable y el valor objetivo de la misma. Por tanto, el control óptimo será aquel que minimice el error lo máximo posible, obteniendo el mínimo global de esta función. De esta forma, a partir del error, se caracterizan los tres términos que conforman el algoritmo:

- **Término de Acción Proporcional (P):** Las variaciones del parámetro de control siguen una relación lineal con el error.
- **Término de Acción Integral (I):** Las variaciones del parámetro de control se imponen teniendo en cuenta la historia de tiempos del error, aspecto que se consigue integrando el error.
- **Término de Acción Derivativa (D):** Las variaciones del parámetro de control se realizan a partir de la evolución temporal de la variable modificada, y por tanto, de la derivada del error.

La ecuación que describe el controlador PID en el caso que se va a tratar se define:

$$h_{Crest}(t) = K \left\{ J(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} J(t) dt + T_d \frac{dJ(t)}{dt} \right\} = P + I + D \quad (4.2)$$

donde $J(t)$ es el error ($J(t) = H^* - H(t)$) siendo H^* el valor objetivo del nivel y $H(t)$ el valor del nivel medido en un determinado momento t . K es el denominado factor de proporcionalidad, mientras que T_d y T_i son los tiempos diferencial y de integración, respectivamente. La forma discretizada de este algoritmo, que se detalla en el Anexo E, se presenta a continuación:

$$h_{Crest}(t^n) = h_{Crest}(t^{n-1}) + \alpha_1 K \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) J(t^n) - \alpha_2 K \left(1 + \frac{2T_d}{T_s} \right) J(t^{n-1}) + \alpha_3 K \frac{T_d}{T_s} J(t^{n-2}) \quad (4.3)$$

donde n el paso temporal actual, T_s el tiempo de muestreo y donde α_1 , α_2 y α_3 son los pesos de cada uno de los pasos temporales que tiene en cuenta el controlador. Estos pesos adquieren diferentes valores en función del tipo de sistema y caso que se está estudiando. A su vez, los valores impuestos a K , T_i , T_d y T_s también condicionan la evolución del parámetro de control y, por tanto, la velocidad con la que la variable a modificar alcanza el valor objetivo. Determinar los valores óptimos de estos parámetros para conseguir el valor deseado es un aspecto fundamental a la hora de usar algoritmos de control, no sólo para optimizar el tiempo de llegada al valor objetivo, sino también para estabilizar la evolución del sistema, ya que valores no ajustados de los parámetros pueden producir inestabilidades en el sistema físico. La forma de obtención de algunos de estos parámetros se presenta en [28] y se detalla para nuestro caso en el Anexo E.

4.2. Método de control adjunto

El método adjunto es un método de control de tipo gradiente descendente. Este tipo de métodos de control utilizan la primera o segunda derivada de la función a maximizar o minimizar y operan en búsqueda del óptimo. Dentro de este tipo de métodos, existen distintas formas de buscar el óptimo. En nuestro caso, se hará uso del método de paso descendente, el cual sigue el siguiente esquema secuencial:

1. Se comienza en un punto inicial ϕ^1 en la primera iteración ($iter = 1$).
2. Se determina una dirección \mathbf{d}^1 , donde se pretende apuntar directamente al óptimo. En esta búsqueda se hace uso de la información proporcionada por las variables adjuntas.
3. Se determina una longitud de paso ε^1 para desplazarse en la dirección \mathbf{d}^1 .
4. Se obtiene un nuevo punto para la segunda iteración ($iter = 2$) dado por $\phi^2 = \phi^1 + \varepsilon^1 \mathbf{d}^1$.
5. Se comprueba si ϕ_2 es el óptimo, verificando si el valor de $\mathbf{J}(\phi^2)$ es un mínimo global. Si se cumple, se termina el cálculo. Si no se cumple, se pasa a la siguiente iteración ($iter = iter + 1$) y se vuelve al paso 2. De esta forma, $\phi^{iter+1} = \phi^{iter} + \Delta\phi^{iter} = \phi^{iter} + \varepsilon^{iter} \mathbf{d}^{iter}$ hasta obtener el óptimo o bien, hasta llegar al número máximo de iteraciones.

El esquema que sigue el método de control sobre el sistema a controlar es el mostrado en la Figura 4.2, donde se observa cómo el método de control produce variaciones en el parámetro de control hasta obtener un mínimo en \mathbf{J} .

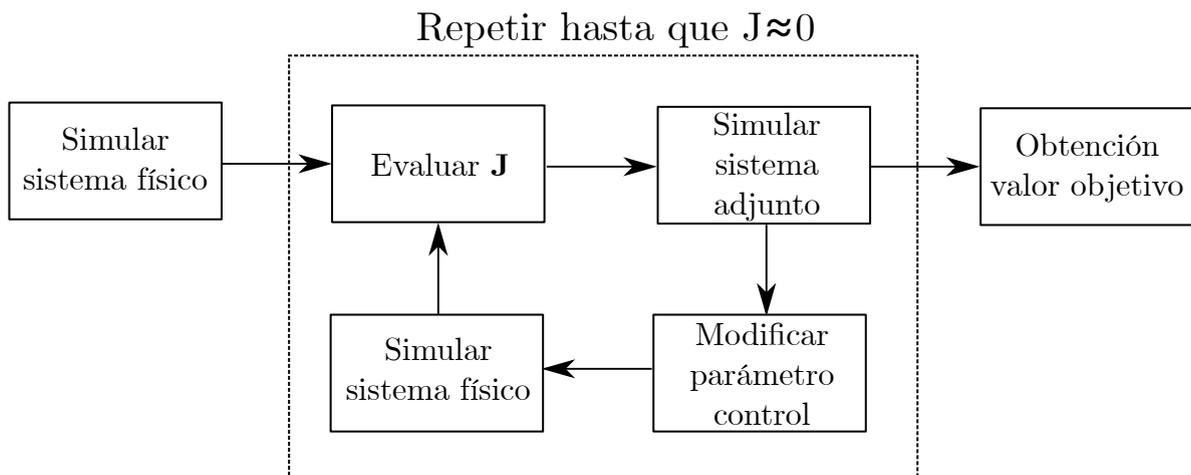


Figura 4.2: Esquema del método de control adjunto.

Tras haber presentado tanto el esquema sobre el sistema como el esquema secuencial que sigue el método, queda pendiente describir cómo se obtiene la dirección de descenso \mathbf{d}^{iter} y la longitud del paso ε^{iter} .

La generación de la dirección de descenso se realiza mediante el método de paso ascendente/descendente, una técnica que usa como dirección de descenso del punto ϕ^{iter} al punto ϕ^{iter+1} la expresión $\mathbf{d}^{iter} = -\nabla f(\phi^{iter})$. Se debe determinar que la dirección es de descenso para poder ir acercándonos al mínimo de \mathbf{J} (Figura 4.3). Este aspecto se demuestra mediante el siguiente lema:

Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en $\phi \in \mathbb{R}^n$. Sea \mathbf{d} un vector de \mathbb{R}^n . Si $\nabla f(\phi) \mathbf{d} < 0$, entonces \mathbf{d} es una dirección de descenso de f en ϕ .

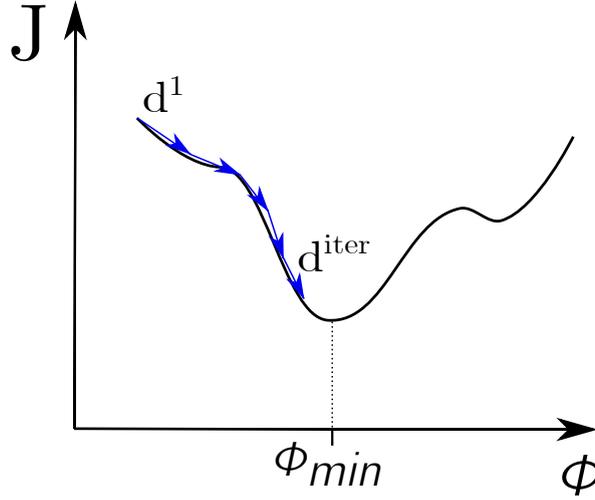


Figura 4.3: Direcciones de descenso en la función J .

Mediante el método de paso ascendente/descendente, se obtiene que el método del gradiente proporciona una evolución de ϕ según la expresión:

$$\phi^{iter+1} = \phi^{iter} + \varepsilon^{iter} \mathbf{d}^{iter} = \phi^{iter} - \varepsilon^{iter} \nabla f(\phi^{iter}) \quad (4.4)$$

Con respecto a la determinación de la longitud del paso ε^{iter} , existen diferentes técnicas optimizadas para agilizar la obtención del mínimo global ([29]). En nuestro caso, la longitud del paso se obtiene en función de los valores de J , aspecto que se describirá con más detalle al presentar el algoritmo implementado.

4.2.1. Formulación adjunta usando el modelo 1D

El sistema de ecuaciones (2.3) que describe la evolución de las variables conservadas en el modelo 1D contiene a los términos I_1 y I_2 . Estos términos, dados por la expresión (2.8), son en ocasiones un problema de calcular para el esquema numérico y se recurre en estos casos a otro tipo de formulación para no tener que ser calculados ([30]). En nuestro caso, se recurre a otro tipo de formulación dado que, usando los términos I_1 e I_2 , la formulación en la que se basa el método de control adjunto se complica en exceso al no poder ser I_1 e I_2 expresados directamente en términos de las variables conservadas.

La formulación alternativa para el modelo 1D parte de la derivada espacial del calado $h(x, A)$ (2.18) y de las expresiones que cumplen I_1 e I_2 (2.9). Su desarrollo se detalla en el Anexo F y da como lugar el sistema de ecuaciones del que parte el sistema adjunto:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{M}_2 = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + c^2 \frac{dA}{dx} - gA \left[S_0 - S_f - \frac{dh}{dx} - \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} \right] = 0 \end{cases} \quad (4.5)$$

Para relacionar la evolución espacial y temporal del flujo con el error (4.8), se expresa \mathbf{J} como:

$$\mathbf{J} = \mathcal{P} + \mathbf{J} \quad (4.6)$$

ya que \mathcal{P} es nulo y viene dado en función de $\sigma_1(x, t)$ y $\sigma_2(x, t)$, que son las variables adjuntas:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} [\sigma_1(\mathcal{M}_1) + \sigma_2(\mathcal{M}_2)] dx dt = \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \left[\sigma_1 \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \right. \\
&\quad \left. + \sigma_2 \left(\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + c^2 \frac{dA}{dx} - gA \left(S_0 - S_f - \frac{dh}{dx} - \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} \right) \right) \right] dx dt = \\
&= \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} -A \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} dx dt + \int_{x_i}^{x_f} [A\sigma_1]_0^T dx + \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} -Q \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} dx dt + \int_0^T [Q\sigma_1]_{x_i}^{x_f} dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} -Q \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} dx dt + \int_{x_i}^{x_f} [Q\sigma_2]_0^T dx + \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} - \left(\frac{Q^2}{A} + c^2 A \right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} dx dt + \\
&\quad + \int_0^T \left[\sigma_2 \left(\frac{Q^2}{A} + c^2 A \right) \right]_{x_i}^{x_f} dt - \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \sigma_2 g A (S_0 - S_f) dx dt + \\
&\quad + \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} g A \sigma_2 \frac{dh}{dx} dx dt + \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \frac{1}{B} g A \sigma_2 \frac{dA}{dx} dx dt = \\
&= \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \left[-A \frac{\partial \sigma_1}{\partial t} - Q \frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - Q \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \left(\frac{Q^2}{A} + c^2 A \right) \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - g \sigma_2 A (S_0 - S_f) + g A \sigma_2 \frac{dh}{dx} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{B} g A \sigma_2 \frac{dA}{dx} \right] dx dt + \int_{x_i}^{x_f} [A\sigma_1 + Q\sigma_2]_0^T dx + \int_0^T \left[Q\sigma_1 + \sigma_2 \left(\frac{Q^2}{A} + c^2 A \right) \right]_{x_i}^{x_f} dt = 0 \quad (4.7)
\end{aligned}$$

La función \mathbf{J} de la expresión (4.1) integrada en espacio y tiempo queda:

$$\mathbf{J} = \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} f(x, t; A, Q, A^*, Q^*) dx dt \quad (4.8)$$

donde:

$$f(x, t; A, Q, A^*, Q^*) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_p} (H_i - H_i^*)^2 \quad (4.9)$$

Se pretende obtener la solución óptima para el error, es decir, cuando se tenga el mínimo global:

$$\delta \mathbf{J} = \delta \mathcal{P} + \delta \mathbf{J} = 0 \quad (4.10)$$

donde $\delta \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{P} &= \int_0^T \int_{x_i}^x \left[\delta A \left(-\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \sigma_2 g (S_0 - S_f) + g A \sigma_2 \frac{dh}{dx} + \frac{1}{B} g \sigma_2 \frac{dA}{dx} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + A \sigma_2 g \frac{\partial S_f}{\partial A} \right) + \delta Q \left(-\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \frac{2Q}{A} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \sigma_2 g A \frac{\partial S_f}{\partial Q} \right) \right] dx dt + \\
&\quad + \int_{x_i}^{x_f} [\delta A \sigma_1 + \delta Q \sigma_2]_0^T dx + \int_0^T \left[\delta Q \sigma_1 + \sigma_2 \left(\frac{2Q}{A} \delta Q - \frac{Q^2}{A^2} \delta A + c^2 \delta A \right) \right]_{x_i}^{x_f} dt = 0 \quad (4.11)
\end{aligned}$$

y $\delta \mathbf{J}$ se expresa mediante el error f , que en nuestro caso sólo depende de H a través de A :

$$\delta \mathbf{J} = \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial A} \delta A + \frac{\partial f}{\partial Q} \delta Q \right) dt dx = \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} \left(\frac{\partial f}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial A} \delta A \right) dx dt = \int_0^T \int_{x_i}^{x_f} S_A \delta A dx dt \quad (4.12)$$

con $\partial H/\partial A = 1/B$. Combinando (4.11) con (4.12) en (4.10) y factorizando, se obtienen χ_1 y χ_2 , que son los términos que acompañan a δA y a δQ , respectivamente, y que se establecen como nulos:

$$\chi_1 = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \frac{Q^2}{A^2} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - c^2 \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} - \sigma_2 g (S_0 - S_f) + g A \sigma_2 \frac{\partial S_f}{\partial A} + g \sigma_2 \frac{dh}{dx} + \sigma_2 g \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} + S_A = 0 \quad (4.13)$$

$$\chi_2 = -\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_2}{\partial t} - \frac{2Q}{A} \frac{\partial \sigma_2}{\partial x} + \sigma_2 g A \frac{\partial S_f}{\partial Q} = 0 \quad (4.14)$$

Agrupando (4.13) y (4.14), el sistema de ecuaciones adjunto es de la forma:

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{\Gamma} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \mathbf{R} \quad (4.15)$$

donde ψ contiene a las variables conservadas, $\mathbf{\Gamma}$ es la matriz jacobiana del sistema de ecuaciones adjunto y \mathbf{R} contiene a los términos fuente del sistema adjunto:

$$\psi = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & u^2 - c^2 \\ -1 & -2u \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} g \sigma_2 \left(S_0 - S_f - A \frac{\partial S_f}{\partial A} - \frac{dh}{dx} - \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} \right) - S_A \\ -g A \sigma_2 \frac{\partial S_f}{\partial Q} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

El formalismo adjunto obtenido es afín al sistema de ecuaciones (2.3), pues se ha obtenido una matriz jacobiana con los mismos valores propios (2.14) pero de signo contrario:

$$\lambda_1^\Gamma = -u + c, \quad \lambda_2^\Gamma = -u - c \quad (4.19)$$

Este aspecto explica la evolución temporal de las variables adjuntas, en sentido contrario a una evolución temporal lógica, es decir, evolucionan desde el tiempo final T hasta el tiempo inicial 0 (Figura 4.4). Así, el funcionamiento del sistema adjunto se basa en la propagación de las variables adjuntas, y por tanto, en la propagación del error, adquiriendo información de la simulación física que se acaba de realizar para posteriormente modificar el parámetro de control que provocará cambios en la simulación física del sistema en la siguiente iteración.

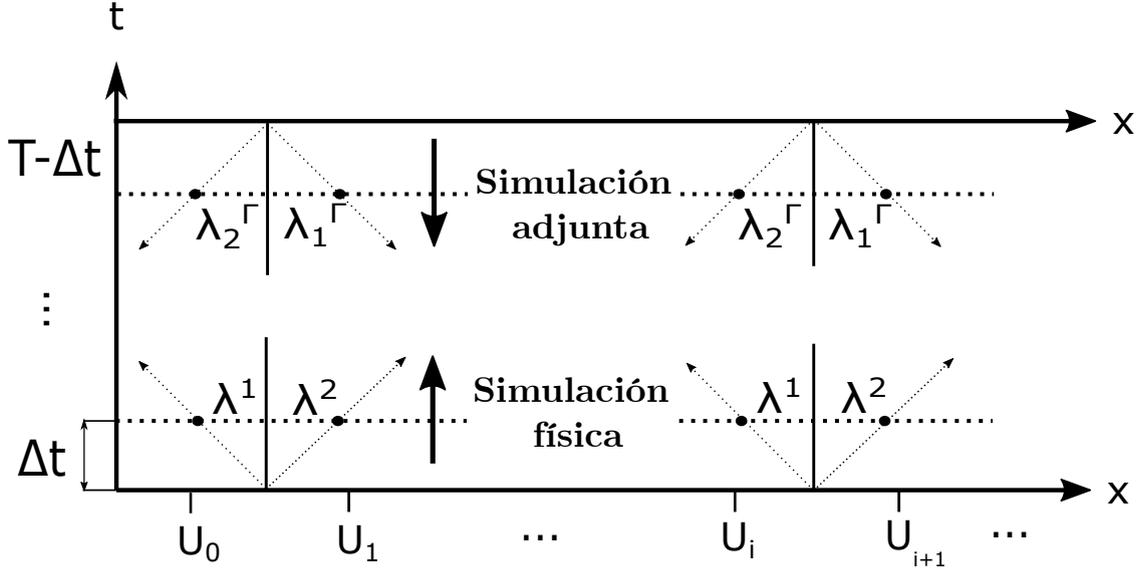


Figura 4.4: Esquema numérico del sistema físico y adjunto.

Tras establecer (4.13) y (4.14), δJ también se puede expresar mediante (4.10) de la forma:

$$\delta J = \int_{x_i}^{x_f} [\delta Q \sigma_2 + \delta A \sigma_1]_0^T dx + \int_0^T \left[\delta Q \sigma_1 + \frac{2Q}{A} \sigma_2 \delta Q - \frac{Q^2}{A^2} \sigma_2 \delta A + c^2 \delta A \sigma_2 \right]_{x_i}^{x_f} dt \quad (4.20)$$

Considerando que para el tiempo final del sistema adjunto ($t = 0$) se consigue el valor objetivo, se establece:

$$\delta Q(x, t = 0) = 0, \quad \delta A(x, t = 0) = 0 \quad \text{con } x = \{x_i, x_f\} \quad (4.21)$$

Además, hace falta definir una condición inicial para el sistema adjunto. En nuestro caso, se considera un estado con ambas variables nulas para el instante inicial adjunto ($t = T$):

$$\sigma_1(x, T) = 0, \quad \sigma_2(x, T) = 0 \quad \text{con } x = \{x_i, x_f\} \quad (4.22)$$

Así, la expresión (4.20) pasa a ser:

$$\delta J = \int_0^T \left[\delta Q \sigma_1 + \frac{2Q}{A} \sigma_2 \delta Q - \frac{Q^2}{A^2} \sigma_2 \delta A + c^2 \delta A \sigma_2 \right]_{x_i}^{x_f} dt \quad (4.23)$$

Teniendo en cuenta que, cuando se quiere regular la condición de contorno aguas abajo, el interés se encuentra al final del dominio al encontrarse en esta región el parámetro de control, se establece que las variaciones en x_i de δA y δQ son cero ya que no interesa su valor en esta posición:

$$\delta A_{x_i} = 0, \quad \delta Q_{x_i} = 0 \quad (4.24)$$

Así, se obtiene:

$$\left[\delta Q \sigma_1 + \frac{2Q}{A} \sigma_2 \delta Q - \frac{Q^2}{A^2} \sigma_2 \delta A + c^2 \delta A \sigma_2 \right]_{x_i} = 0 \quad (4.25)$$

Al ser parámetro de control la altura de la cresta del vertedero, su variación produce una variación en Q , por lo que la variación δA en la posición x_f se puede suponer nula al no depender directamente de la cresta:

$$\left[-\frac{Q^2}{A^2} \sigma_2 \delta A + c^2 \delta A \sigma_2 \right]_{x_f} = 0 \quad (4.26)$$

por lo que (4.23) queda:

$$\delta \mathbf{J} = \int_0^T \left[\delta Q \left(\sigma_1 + \frac{2Q}{A} \sigma_2 \right) \right]_{x_f} dt = \int_0^T [\delta Q(\sigma_1 + 2u\sigma_2)]_{x_f} dt \quad (4.27)$$

El caudal de salida del flujo en el final del dominio viene dado por (2.21):

$$Q_{out} = \begin{cases} 0 & \text{si } H_w \leq 0 \\ \frac{2}{3} \sqrt{2g} C_d b H_w^{3/2} & \text{si } H_w > 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

y, mediante la variación de h_{Crest} , se busca obtener el nivel superficial objetivo. Así, se obtiene la dirección de descenso:

$$\nabla \mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial h_{Crest}} = \int_0^T \frac{\partial Q_{x_f}}{\partial h_{Crest}} (\sigma_1 + 2u\sigma_2)_{x_f} dt \quad (4.29)$$

siendo:

$$\frac{\partial Q_{x_f}}{\partial h_{Crest}} = \begin{cases} 0 & \text{si } H_w \leq 0 \\ -C_d b \sqrt{2g(H - h_{Crest})} & \text{si } H_w > 0 \end{cases} \quad (4.30)$$

Según la expresión (4.4), el valor de h_{Crest} para la siguiente iteración viene dado mediante (4.29) para cada instante de tiempo t , de la forma:

$$h_{Crest, t}^{iter+1} = h_{Crest, t}^{iter} - \varepsilon^{iter} \nabla \mathbf{J}_t^{iter} \quad (4.31)$$

siendo $iter$ la iteración actual del método.

4.2.2. Formulación adjunta usando el modelo 1D-0D

Cuando se adapta el modelo 0D como condición de contorno aguas abajo, el sistema adjunto también está conformado por las ecuaciones (4.15), (4.16), (4.17) y (4.18). Sin embargo, lo que debe ser modificado con respecto a la formulación obtenida para el modelo 1D es la dirección $\nabla \mathbf{J}$. La razón se debe a que el caudal en la posición final del dominio 1D es ahora:

$$Q_{x_f} = Q_{in} = S(H) \frac{dH}{dt} - Q_{out} = S(H) \dot{H} - Q_{out} \quad (4.32)$$

donde Q_{out} es el caudal correspondiente a un vertedero. Por tanto, $\nabla \mathbf{J}$ viene dado por (4.29) con:

$$\frac{\partial Q_{x_f}}{\partial h_{Crest}} = \frac{\partial (S(H) \dot{H} - Q_{out})}{\partial h_{Crest}} = \begin{cases} 0 & \text{si } H_w \leq 0 \\ -C_d b \sqrt{2g(H - h_{Crest})} & \text{si } H_w > 0 \end{cases} \quad (4.33)$$

al no depender directamente de la altura de cresta H , y por tanto, tampoco $S(H)$.

Capítulo 5

Resultados

Como se ha descrito, el método de control adjunto busca obtener el mínimo del error de una determinada variable mediante una serie de iteraciones. Este hecho hace que la obtención del mínimo pueda ser más o menos directa en función de los parámetros que condicionan el método, así como también en función del sistema que se estudia. Por ello, verificar la validez del método implementado con sistemas complejos desde un primer momento puede resultar contraproducente, dado que, si no se obtuviesen resultados favorables, no se sabría con certeza si se debe a cuestiones del método, de sus parámetros o del propio caso simulado. Debido a esta razón, se debe partir de casos simples en geometría y realizar un análisis de sensibilidad, robustez y estabilidad del método implementado, variando los parámetros (ε , tolerancias), así como también el tipo de caso simulado (inclinación del suelo, hidrograma de entrada, punto de medida del error). Además, el método de control adjunto debe ser comparado con otros métodos, como será en nuestro caso el método de control PID, para verificar si los resultados que proporciona son precisos o están lejanos a ser un control óptimo.

Verificar una correcta y óptima implementación del método de control supondrá la posibilidad de llevarlo a casos más realistas, con mayores dimensiones y geometrías más complejas, como es el dominio del río Ebro que se pretende estudiar. Debido a las extensiones de este dominio, la simulación de cada una de las iteraciones supone un considerable tiempo computacional. Por tanto, será necesaria la implementación de un modelo 1D-0D que, junto al método de control adjunto, permita obtener el nivel deseado en el embalse de forma precisa y evitando elevados consumos computacionales.

5.1. Evaluación en un caso test sintético

El caso simplificado está conformado por un canal rectangular de anchura constante como dominio. Su longitud es $L = 1000$ metros, su anchura es $B = 100$ metros y tiene una inclinación $S_0 = 0.005$. Su coeficiente de Manning es $n = 0.032$, similar al del cauce de un río ([11]). La medición del error se coloca en $x^* = 950$ metros.

5.1.1. Análisis de sensibilidad

Se muestran a continuación distintos casos simplificados. En ellos, no sólo se estudia el método de control adjunto 1D, sino también el método de control 1D-0D y ambos se comparan con el método de control PID.

Caso 1: Control por adjuntos en modelo 1D con hidrograma suave

Como condición inicial se establece un flujo estacionario igual a $Q = 40 \text{ m}^3/\text{s}$. Se introduce como condición de contorno aguas arriba el hidrograma mostrado en la Figura 5.1. Se busca mantener el nivel de partida ante la variación del caudal de entrada. La altura de cresta inicial es $h_{Crest} = 10$ metros y la anchura del vertedero es $b = 75$ metros. La máxima altura que puede alcanzar la cresta serán 12 metros y la mínima altura será de 8 metros, estableciendo así unos límites físicos que cualquier estructura hidráulica tiene. La malla de cálculo está conformada por 100 celdas ($\Delta x = 10$ metros), intentando evitar en los primeros casos posibles inestabilidades numéricas provocadas por una malla poco refinada. Se pretende observar si el método de control adjunto consigue llegar a un error menor a $1 \cdot 10^{-3}$. El nivel objetivo será el que proporcione la condición inicial, y por tanto, se busca mantener el nivel de partida ante una variación en el caudal de entrada.

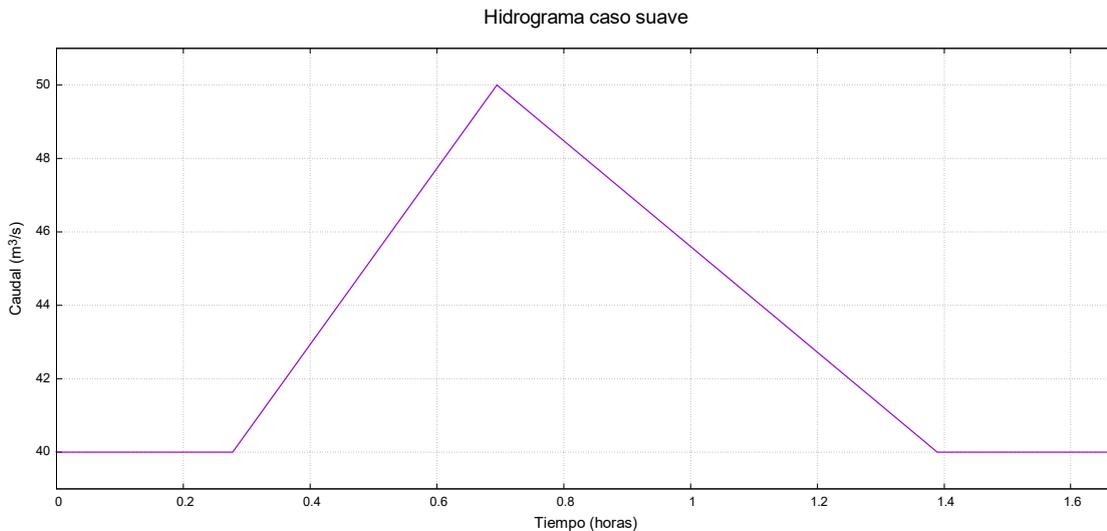


Figura 5.1: Hidrograma de entrada del caso 1.

Se realiza un análisis de sensibilidad del método implementado ante la variación de la longitud del paso ε . El número de iteraciones máximo es de 300, número que se podría reducir si se obtiene un error menor al establecido en una iteración anterior. Se eligen los siguientes tres valores para la longitud del paso dado que se encuentran lo suficientemente distanciados como para ofrecer resultados muy distintos.

- $\varepsilon = 0.075$: Con un valor $\varepsilon = 0.075$, el método de control adjunto es capaz de reducir notablemente la variación provocada por el hidrograma de entrada, tal y como se puede observar en las Figuras 5.2 y 5.3. Sin embargo, no logra reducir el error al orden que se pretendía. Además, se observa en las Figuras 5.2 y 5.4 que, a medida que el método se acerca al mínimo del error, cuesta más obtener una reducción de \mathbf{J} por cada iteración, e incluso sube ligeramente en las iteraciones finales. Esto significa que, si se establece una longitud de paso muy reducida, no siempre se puede llegar al mínimo global de la función error aún aumentando el número de iteraciones, aspecto que aumenta de forma considerable el coste computacional y no supone un descenso notable del error. El tiempo computacional total es de 111 segundos.

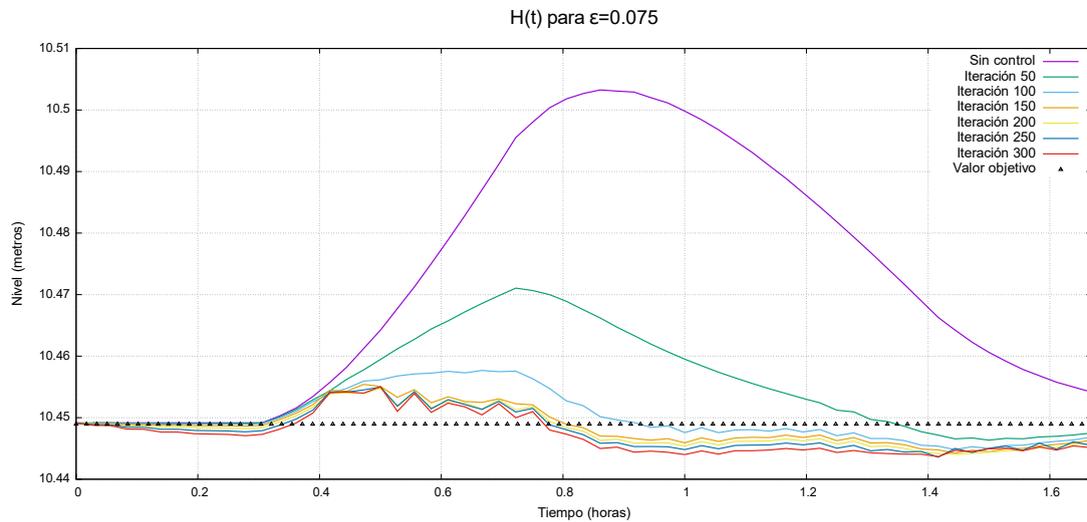


Figura 5.2: $H(t)$ en el punto de medición para varias iteraciones.

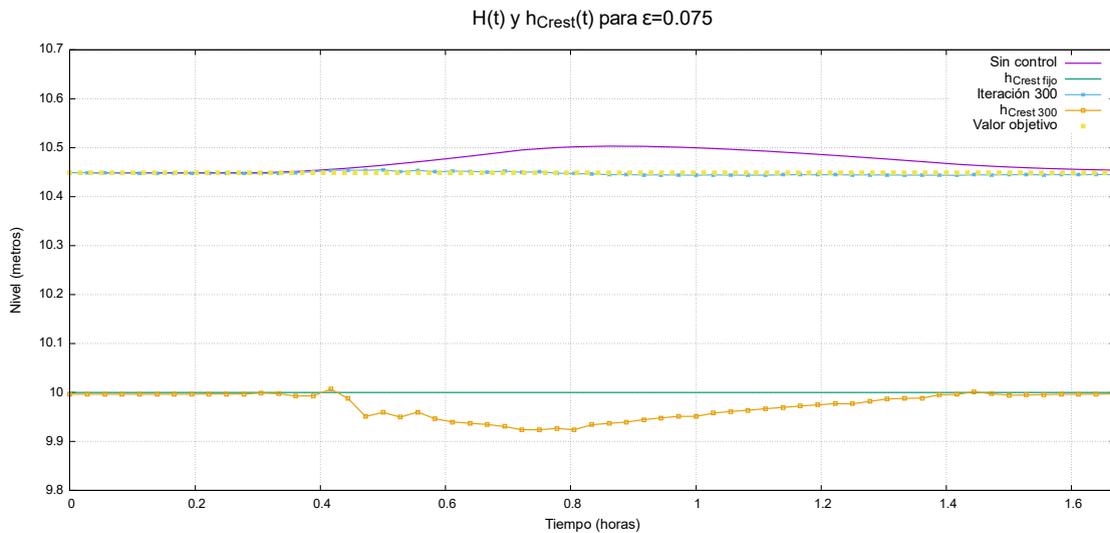


Figura 5.3: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ para la primera y última iteración.

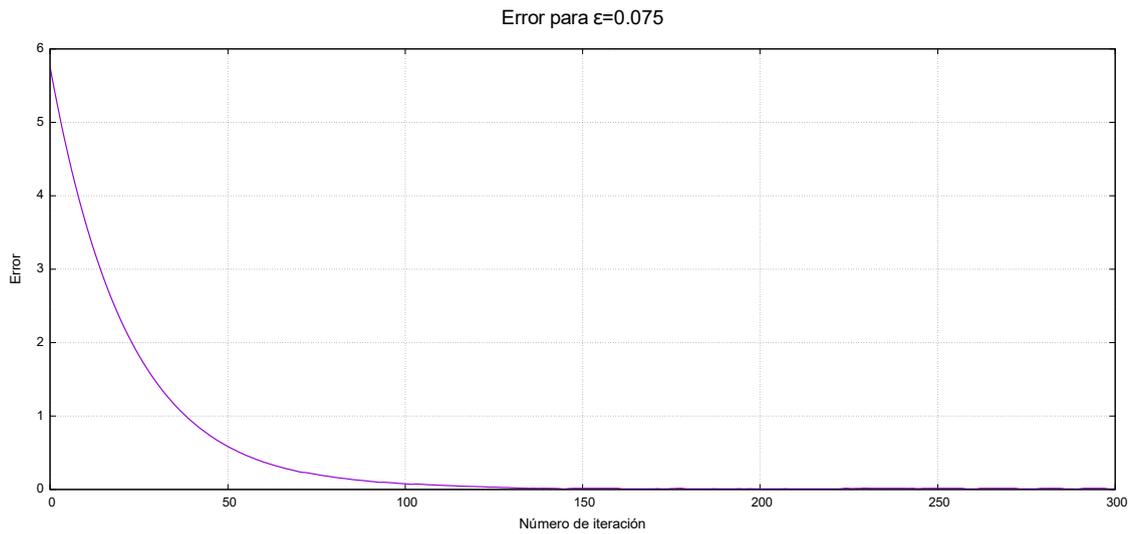


Figura 5.4: Error J en función de la iteración.

- $\epsilon = 0.5$: En la Figura 5.5 se observa que se consigue el valor objetivo establecido, obteniendo el error menor a lo establecido en la iteración 28 (Figura 5.6). Esto implica que un valor óptimo de la longitud de paso consigue, no sólo alcanzar el mínimo global de la función error, sino también alcanzar este mínimo en el menor número de iteraciones posible. El tiempo computacional para este caso, al ser un número de iteraciones reducido, es de 10 segundos.

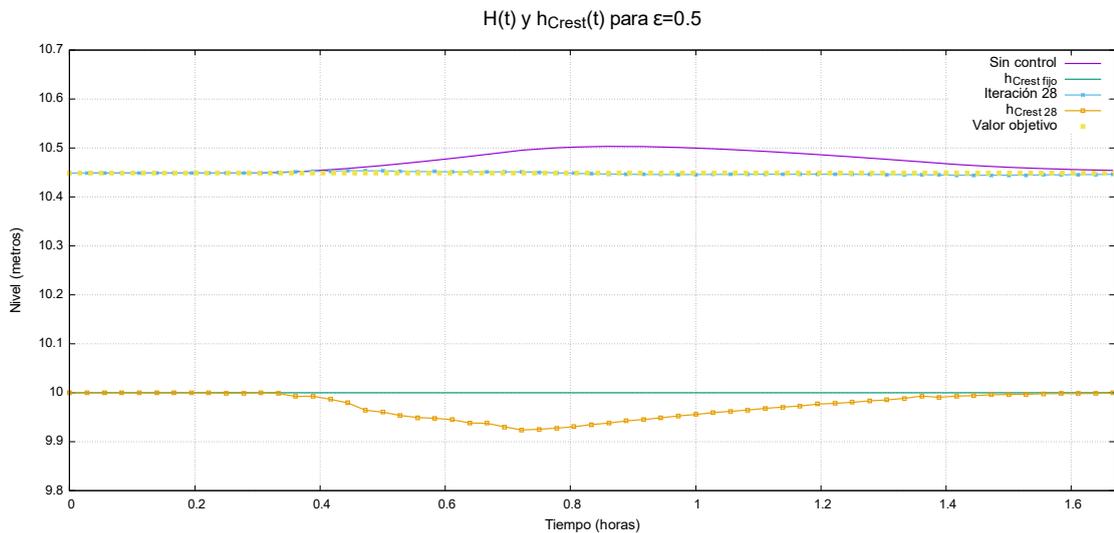


Figura 5.5: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ para la primera y última iteración.

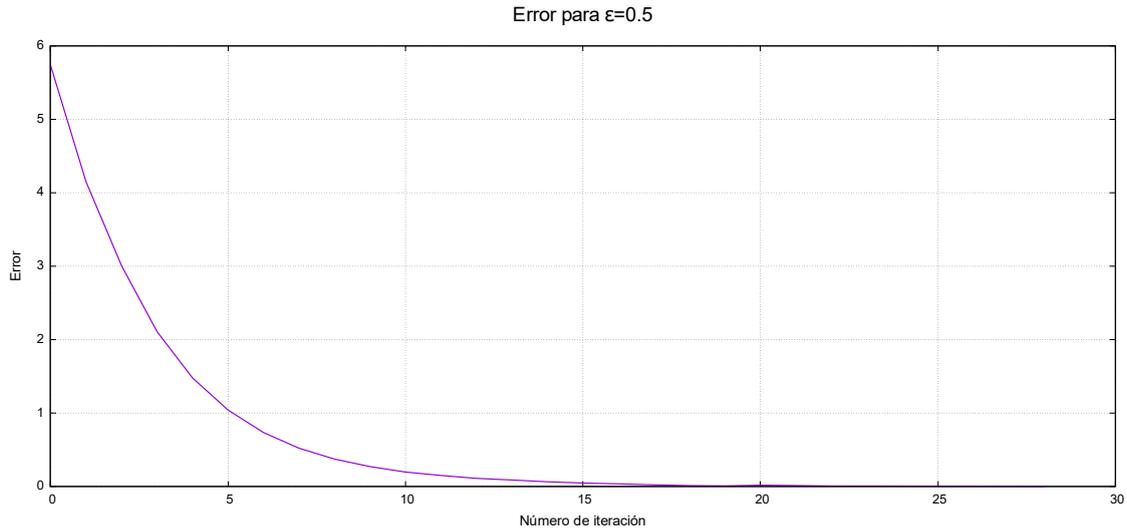


Figura 5.6: Error J en función de la iteración.

- $\epsilon = 1.0$: En esta ocasión, se observa en la Figura 5.7 que la longitud de paso elegida provoca una serie de inestabilidades en el flujo, debido a un movimiento demasiado rápido en la compuerta, por lo que no se obtiene el valor objetivo. Esas inestabilidades se producen en las primeras iteraciones, tal y como se observa en la Figura 5.8, elevando rápidamente el error. Posteriormente, el método intenta reducir el error lo máximo posible, pero se queda lejos del mínimo global buscado. Se muestran únicamente las primeras 100 iteraciones para mostrar las inestabilidades producidas y dado que el error se mantiene prácticamente constante para iteraciones posteriores.

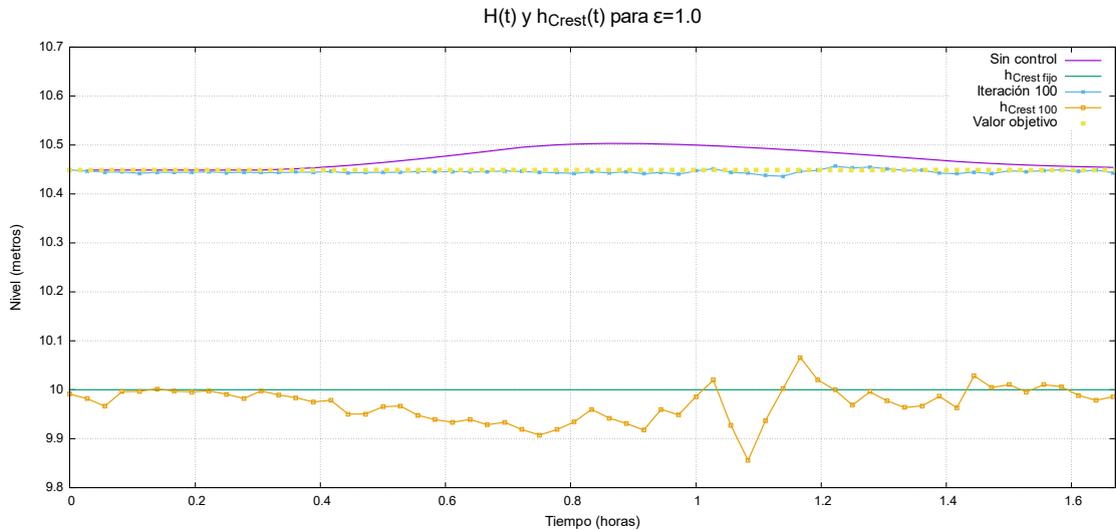


Figura 5.7: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ para la primera y última iteración.

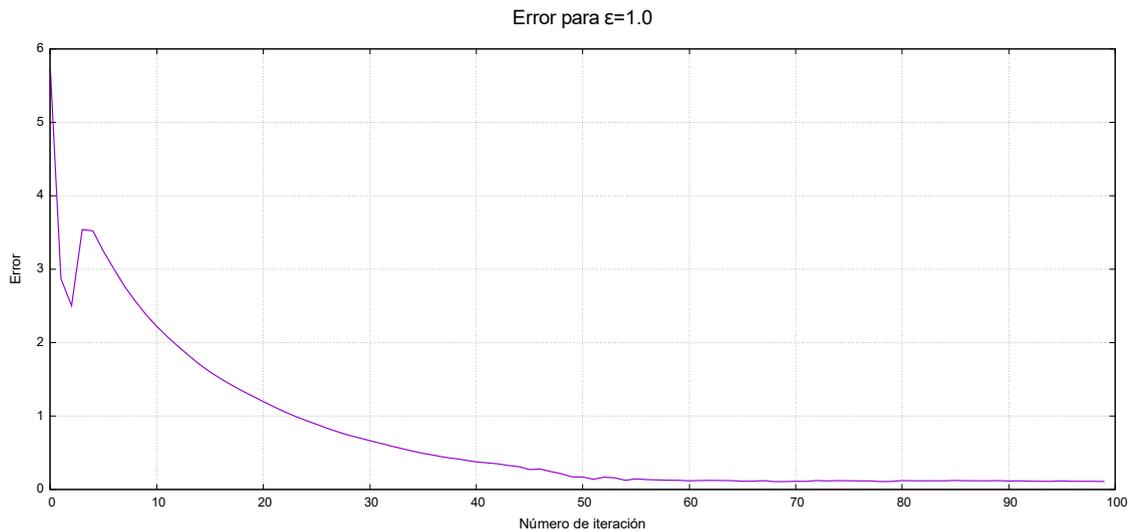


Figura 5.8: Error J en función de la iteración.

Caso 2: Control por adjuntos en modelo 1D con hidrograma brusco

Se modifica el hidrograma de entrada para observar el comportamiento del método de control ante una variación mayor. En este caso, el hidrograma utilizado se presenta en la Figura 5.9. En esta ocasión, se muestra directamente los resultados con el valor óptimo de la longitud de paso al haber realizado ya el análisis de sensibilidad del método ante la variación de ε . Este valor es $\varepsilon = 0.01611$.

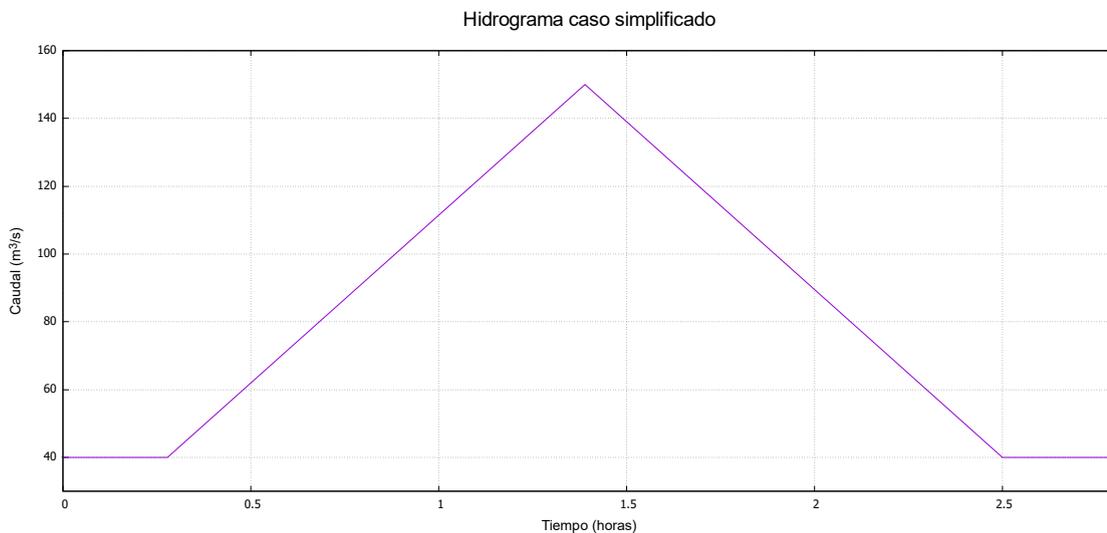


Figura 5.9: Hidrograma de entrada del Caso 2.

Los resultados se muestran en las Figuras 5.10, 5.11 y 5.12. Se aprecia en las Figuras 5.10 y 5.11 que el método de control es capaz de corregir hasta llegar a un valor muy cercano al objetivo. El método de control para en la iteración 165 debido a que, mediante el análisis de sensibilidad de la longitud de paso óptima, se determina que el error mínimo se encuentra en torno a un valor 5, por lo que se establece como condición para salir del algoritmo un error menor a 4.91. Esto se debe a que, a medida que el caso sea más exigente, el error acumulado será mayor, y por tanto, se debe ser

menos exigente en el error permitido para conseguir resultados óptimos, estables y lo más realistas posible. El tiempo de simulación de este caso es de 113 segundos.

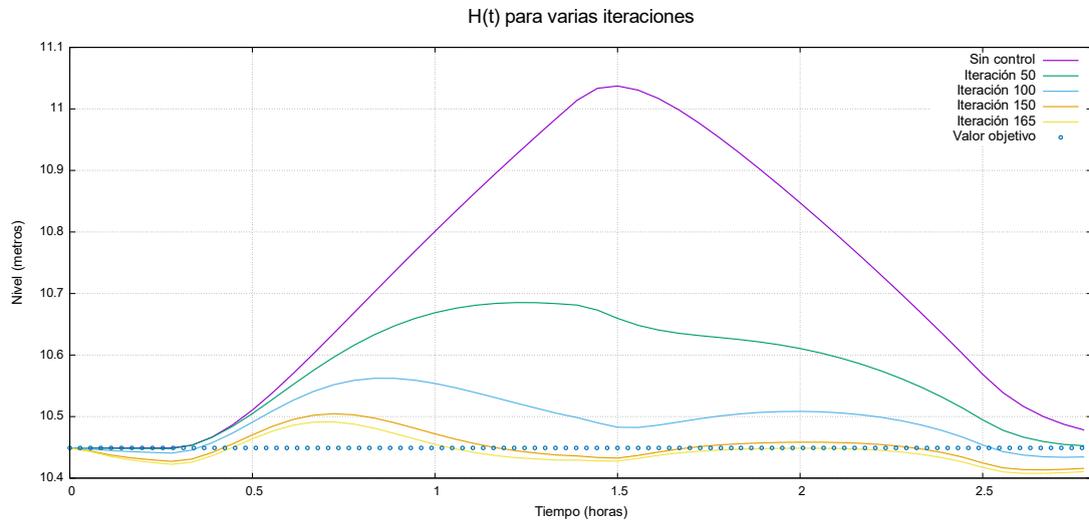


Figura 5.10: $H(t)$ en el punto de medición para varias iteraciones.

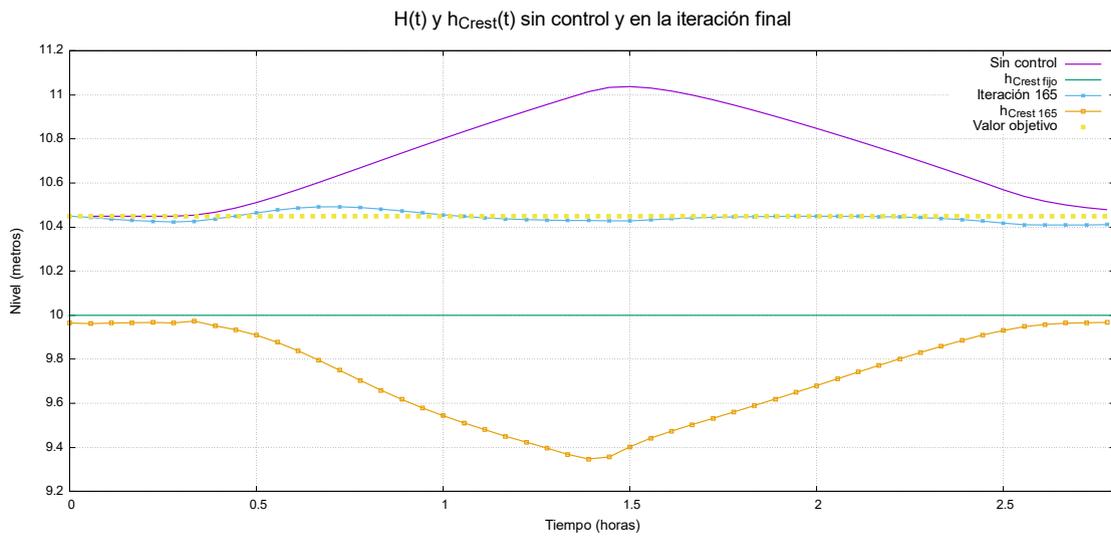


Figura 5.11: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ para la primera y última iteración.

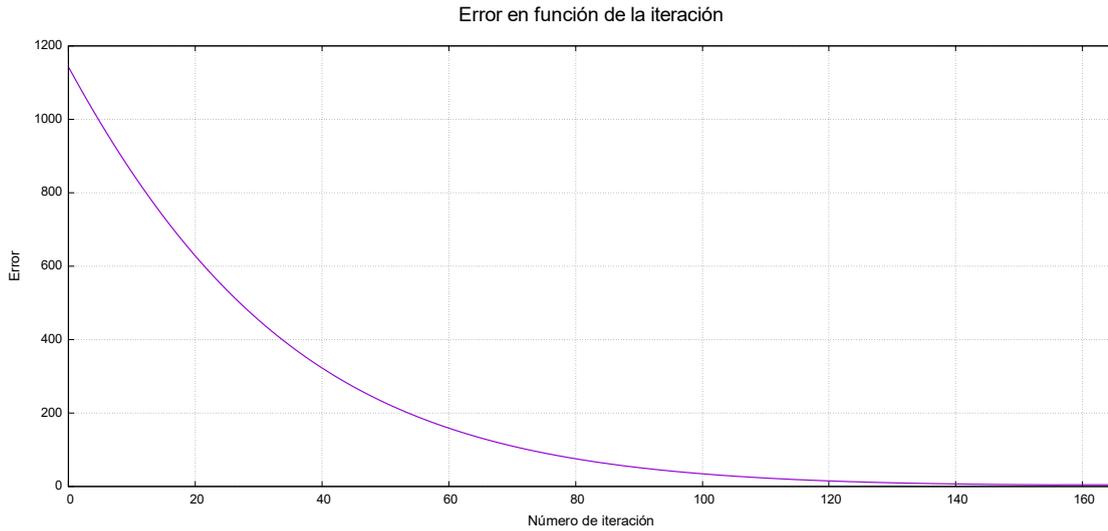


Figura 5.12: Error J en función de la iteración.

5.1.2. Comparación con PID en avenida

Se comparan en primer lugar los resultados obtenidos en la iteración final para el hidrograma caracterizado por la Figura 5.1 con un $\varepsilon = 0.5$ con los del método de control PID (Figuras 5.13 y 5.14). Se observa en la Figura 5.13 que ambos métodos consiguen obtener valores del nivel muy cercanos al valor objetivo. El método de control PID consigue mantener de una forma más precisa el nivel constante en los últimos instantes de tiempo pero, sin embargo, provoca continuas oscilaciones en el flujo. Variaciones en el parámetro de control tan amplias provocan en el método de control adjunto oscilaciones que alejan al sistema del valor objetivo, como ya se ha visto anteriormente. El tiempo de computación del método PID es de 6 segundos, frente a los 10 segundos que tarda el método de control adjunto.

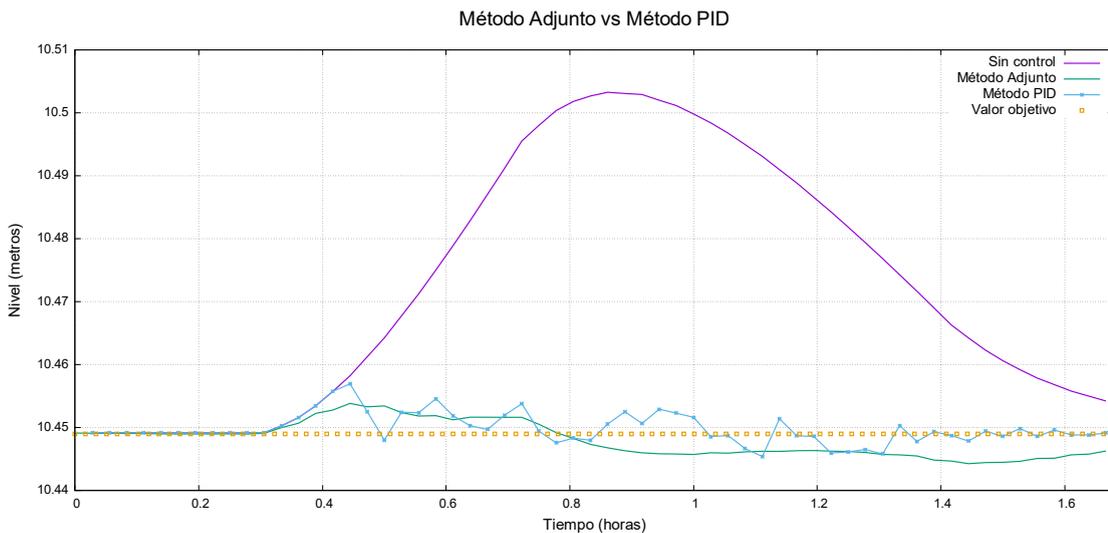


Figura 5.13: $H(t)$ con ambos métodos para el Caso 1.

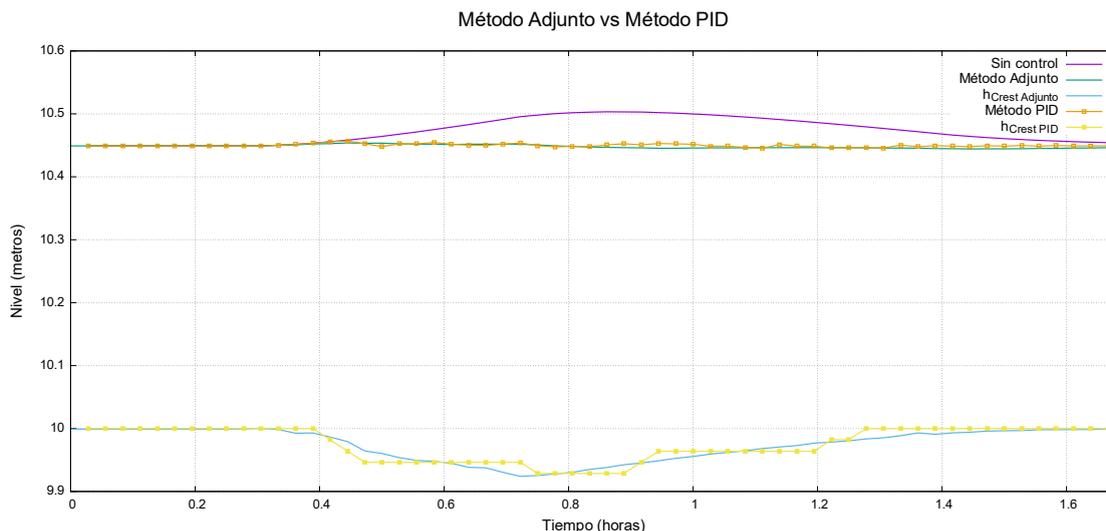


Figura 5.14: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con ambos métodos para el Caso 1.

Posteriormente, se presenta el caso caracterizado por el hidrograma de la Figura 5.9, cuyos resultados se presentan en las Figuras 5.15 y 5.16. En la Figura 5.15 se observa que ambos métodos consiguen llevar al nivel a valores muy cercanos al objetivo, y se aprecia que el método de control PID consigue un menor error. Sin embargo, en la Figura 5.16, se observa la variación de la cresta que proporciona el método de control PID, que evoluciona de forma poco realista. Esto implica que, para obtener un error tan reducido, la altura de cresta debe variar de forma rápida y amplia, aspecto que no puede realizar el método de control adjunto debido a sus condiciones de estabilidad. El tiempo computacional del método de control PID son 8 segundos, frente a los 113 segundos del método de control adjunto.

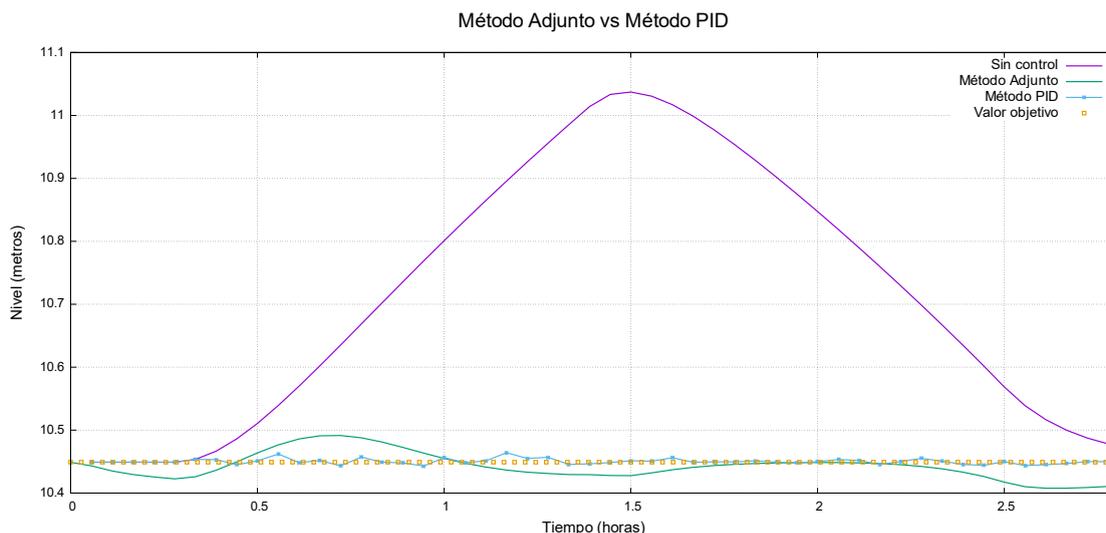


Figura 5.15: $H(t)$ con ambos métodos para el Caso 2.

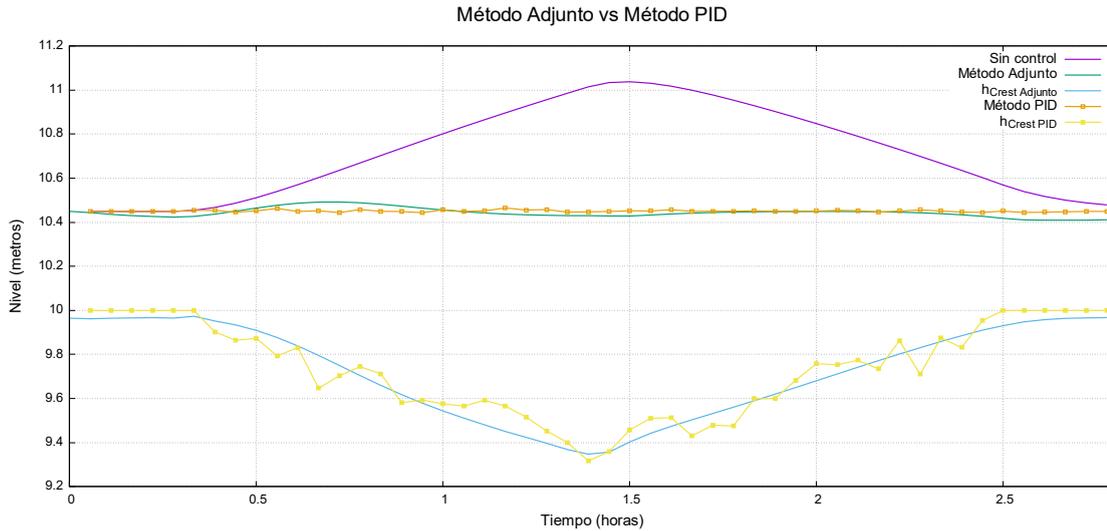


Figura 5.16: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con ambos métodos para el Caso 2.

5.1.3. Control adjunto en el modelo 1D-0D

Como se ha podido apreciar, el tiempo de computación del método de control adjunto adquiere valores muy superiores a los que el método de control PID ofrece en casos exigentes. Esto implica que, a medida que el tamaño del dominio aumente, la eficiencia computacional del método disminuirá. Es interesante probar un modelo 1D-0D que permita reducir el tiempo computacional notablemente pero sin reducir la precisión de sus resultados. El dominio de este modelo tendrá una longitud cuatro veces menor que el caso 1D, de la forma que su longitud será $L' = 250$ metros, por lo que el error se mide ahora en $x^* = 200$ metros. Para mantener el tamaño de celda igual en ambos modelos, el número de celdas para el caso 1D-0D será $N' = 25$. La razón por la que el embalse no se modeliza completamente se debe a que, como son las regiones más cercanas a la entrada del embalse las más susceptibles de dejar de estar embalsadas si el caudal de entrada desciende drásticamente, se decide tomar una región que en principio siempre estará embalsada, para que así se cumplan las hipótesis del método de Puls modificado durante toda la simulación.

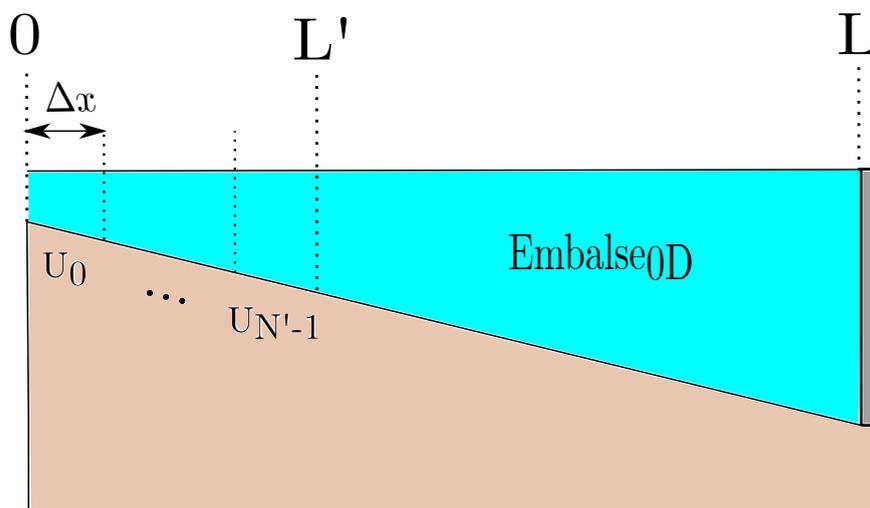


Figura 5.17: Esquema de un embalse mediante un modelo 1D-0D.

Se simula el Caso 2 definido por el hidrograma de la Figura 5.9 mediante el modelo 1D-0D, mostrándose los resultados en las Figuras 5.18 y 5.19. Se comprueba que la longitud de paso óptima no corresponde con la del modelo 1D. En este caso, la longitud de paso óptima es $\varepsilon = 0.0185$. Además, el mínimo global se obtiene para la iteración 244, con un valor en torno a 2.5, la mitad del error que se obtenía para el modelo 1D. El tiempo de computación del modelo 0D es de 21 segundos, frente a los 113 segundos del modelo 1D.

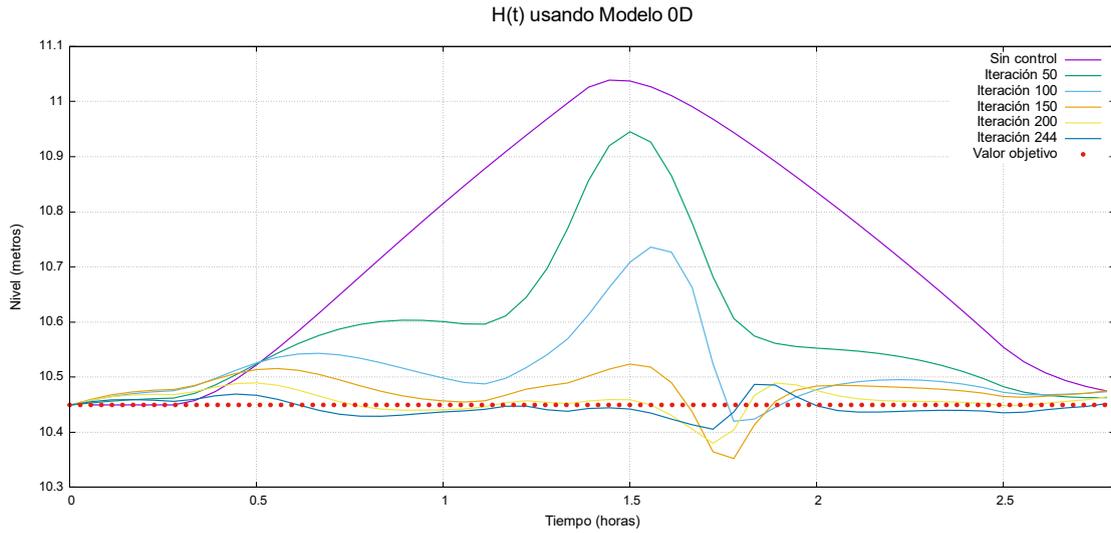


Figura 5.18: $H(t)$ usando Modelo 1D-0D para el Caso 2.

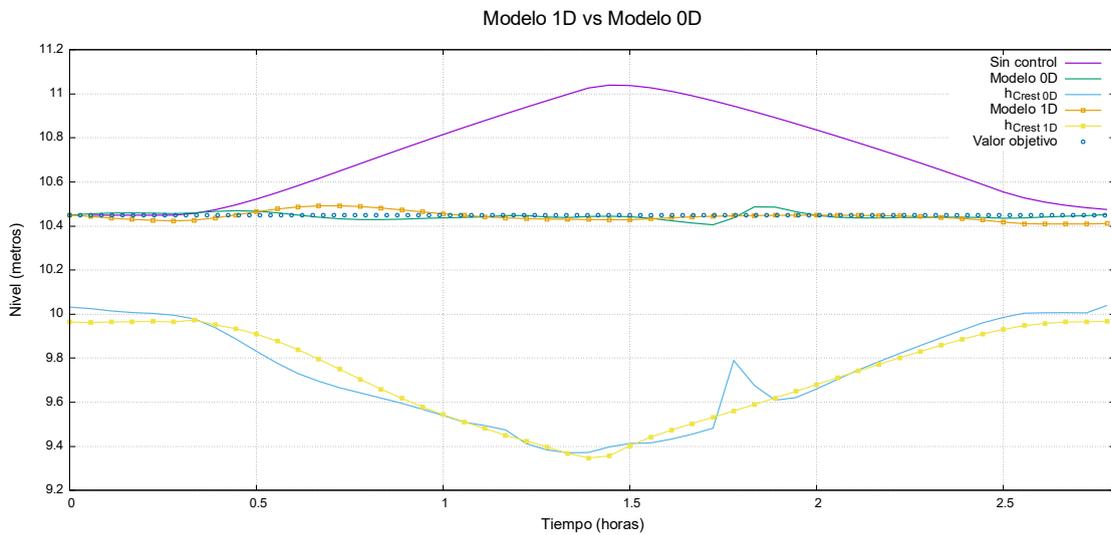


Figura 5.19: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con ambos modelos para el Caso 2.

5.2. Evaluación en un tramo del río Ebro

Tras haber comprobado los resultados en un caso simplificado, se pasa a estudiar el tramo de río Ebro comprendido entre Caspe y Mequinenza (Figura 5.20). Este tramo suponen aproximadamente 62 kilómetros de cauce, conformando el embalse de Mequinenza. La formación de la malla de cálculo de este tramo es más compleja de obtener que para los casos simplificados, y su obtención se detalla en el Anexo D. Este tramo se analizará mediante un modelo 1D y un modelo 1D-0D, comparando la validez de los resultados obtenidos con los del método de control PID.

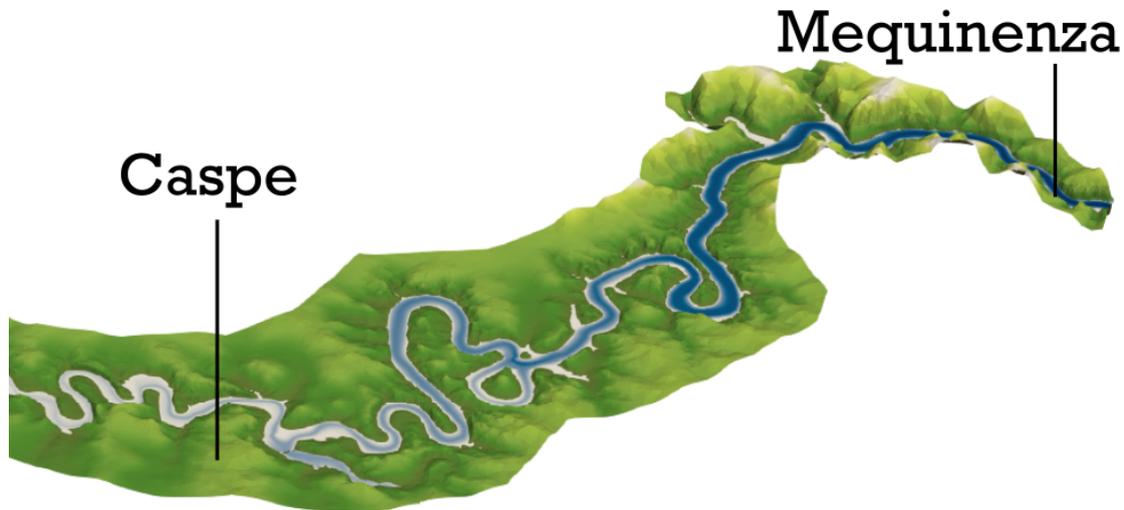


Figura 5.20: Esquema gráfico del tramo de río Ebro estudiado.

La condición inicial del caso es un flujo estacionario con un valor igual a $Q = 400 \text{ m}^3/\text{s}$. El hidrograma de entrada como condición de contorno aguas arriba se muestra en la Figura 5.21. Como condición de contorno aguas abajo se tiene un vertedero rectangular de anchura $b = 110$ metros y con una altura inicial $h_{Crest} = 115$ metros. Siguiendo una similitud con su aspecto real (Figura 1.2), se impone a la altura de la presa, como límites físicos, 110 metros de altura mínima y 120 metros de altura máxima. Se utiliza un número de Manning igual a $n = 0.032$ siguiendo la literatura para el caso de cauces de río ([11]). La medición del error en ambos modelos se realiza en $x^* \approx 59000$ metros.

5.2.1. Control adjunto en el tramo de río Ebro con un modelo 1D

En primer lugar, se formula el flujo mediante un modelo 1D. Para este modelo, se discretiza el dominio en 100 celdas, buscando obtener un compromiso entre eficiencia computacional y una evolución de las variables precisa. Teniendo en cuenta que para este caso tanto la escala espacial como la temporal son bastante más extensas que las vistas en los casos simplificados, el número máximo de iteraciones se reduce a 100 para reducir el tiempo computacional. Es importante encontrar una longitud de paso óptima que consiga llevar al sistema al mínimo global antes de finalizar el número de iteraciones. Para este caso se determina un valor óptimo $\varepsilon = 0.5$. Los resultados obtenidos se muestran en las Figuras (5.22), (5.23) y (5.24). En ellas se observa que el método de control adjunto es capaz de reducir el error en un bajo número de iteraciones hasta llegar a valores del nivel muy cercanos al objetivo. A su vez, se observa en la Figura 5.23 que el movimiento

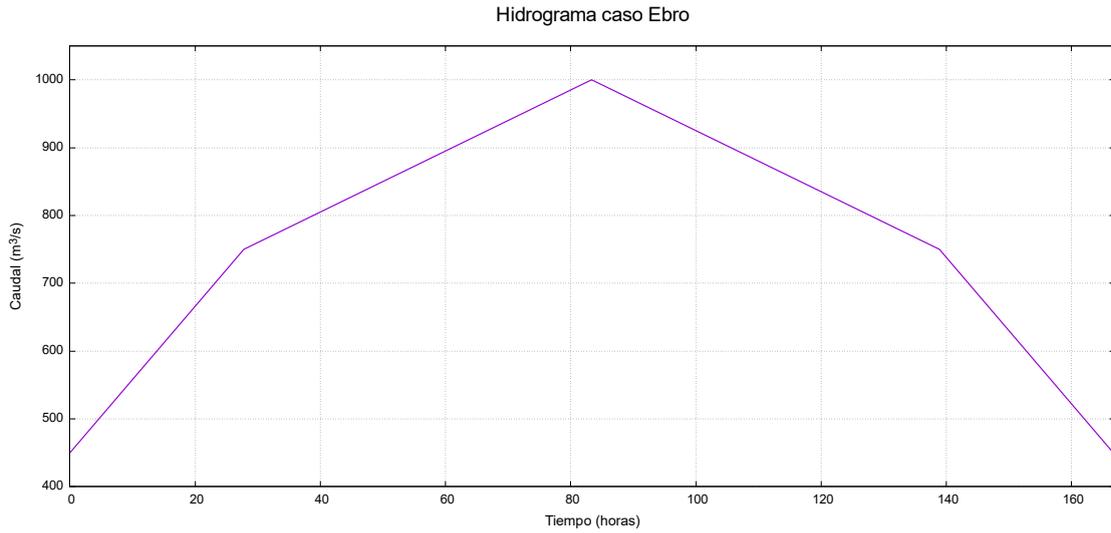


Figura 5.21: Hidrograma de entrada para el caso del Ebro.

de la altura de cresta es más amplio que en los casos simples sin sufrir el flujo inestabilidades. Esto se debe a que, al ser un dominio espacial y temporal tan grande, el flujo no sufre inestabilidades con grandes cambios de la altura de la cresta al modificarse el nivel de forma más progresiva. El tiempo computacional de este caso es igual a 154 segundos.

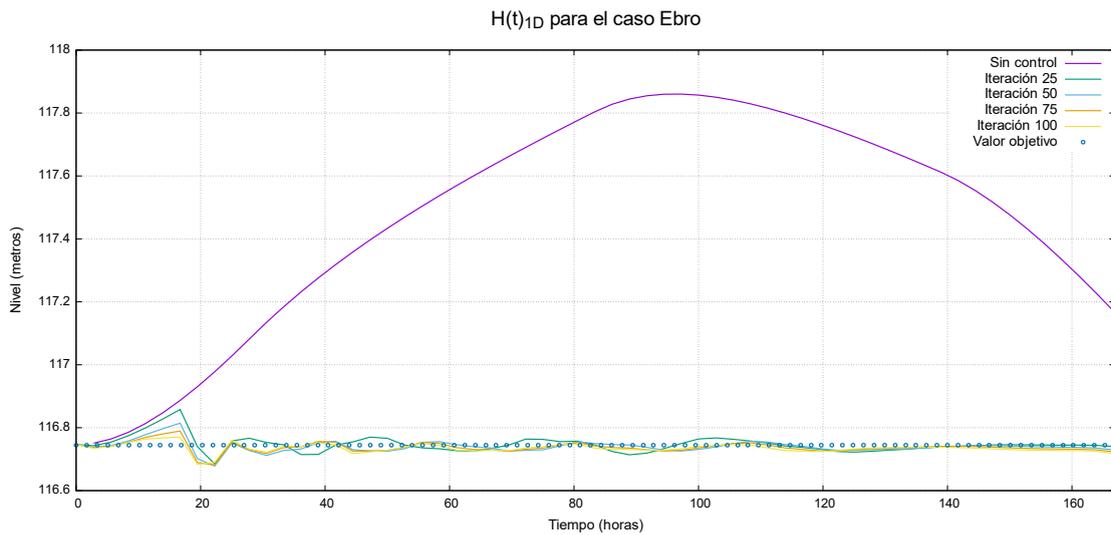


Figura 5.22: $H(t)$ para varias iteraciones con el modelo 1D en el caso del Ebro.

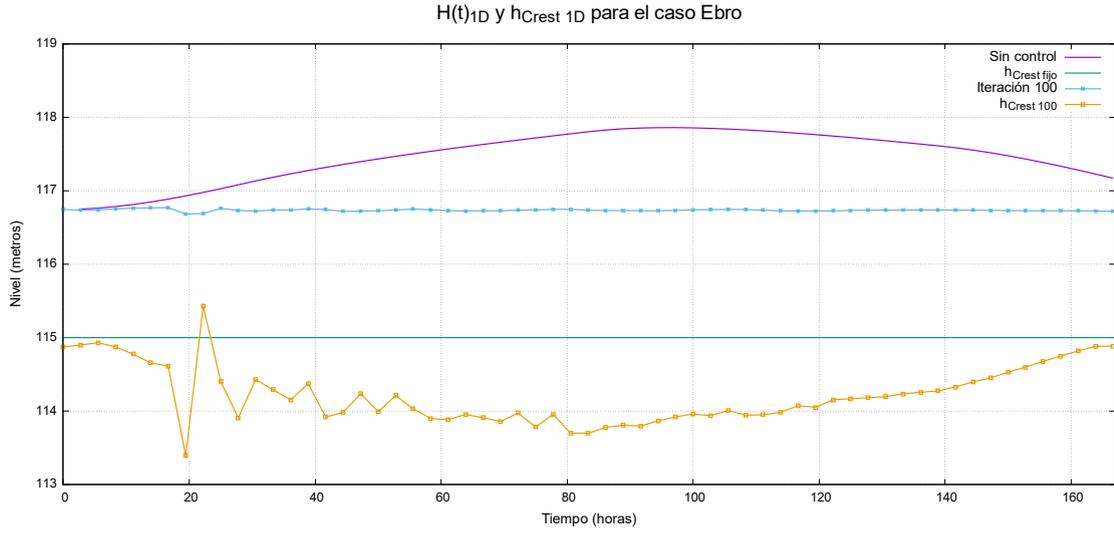


Figura 5.23: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con el modelo 1D en el caso del Ebro.

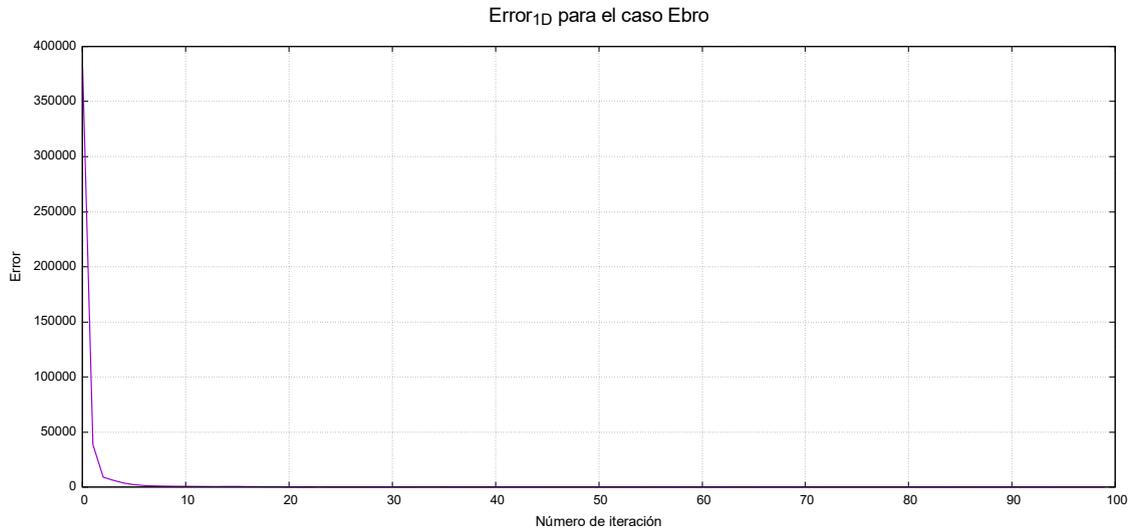


Figura 5.24: Error con el modelo 1D en el caso del Ebro.

Como se puede comprobar en la Figura 5.23, aunque los resultados del nivel obtenidos son muy cercanos al valor objetivo en la iteración final, la distribución de la altura de la cresta está lejos de ser realista al sufrir cambios bruscos. Por ello, es necesario la implementación de una función que permita cambios más suaves. En nuestro caso, se realiza un filtrado sobre la sensibilidad $\nabla \mathbf{J}$, de la forma que, para la iteración $iter$ y el instante temporal t , se utiliza la expresión ([25]):

$$\mathbf{T}(\nabla \mathbf{J}_t^{iter}) = \frac{\nabla \mathbf{J}_{t-2\Delta t}^{iter} + 2\nabla \mathbf{J}_{t-\Delta t}^{iter} + 3\nabla \mathbf{J}_t^{iter} + 2\nabla \mathbf{J}_{t+\Delta t}^{iter} + \nabla \mathbf{J}_{t+2\Delta t}^{iter}}{9} \quad (5.1)$$

y la expresión correspondiente a la variación de la altura de la cresta queda:

$$h_{Crest,t}^{iter+1} = h_{Crest,t}^{iter} - \varepsilon^{iter} \mathbf{T}(\nabla \mathbf{J}_t^{iter}) \quad (5.2)$$

Haciendo uso de (5.2), se obtienen los siguientes resultados mostrados en la Figura 5.25, que se comparan con lo anteriormente obtenido sin amortiguar. Como se puede comprobar, se reducen notablemente las variaciones bruscas en la evolución de la altura de cresta, sin alterar la precisión con la que el método reduce el error.

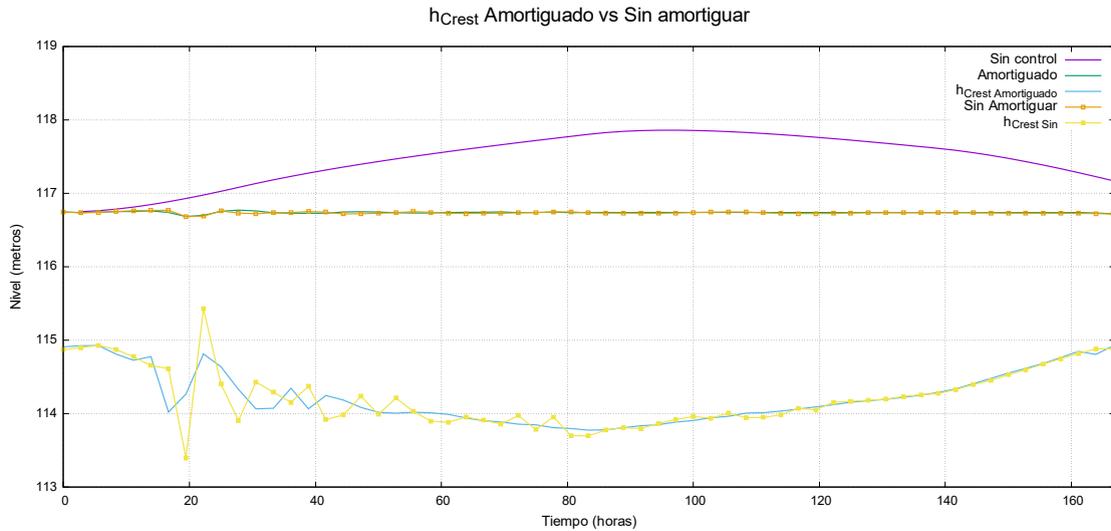


Figura 5.25: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con y sin amortiguación con el modelo 1D.

Finalmente, se muestra en las Figuras 5.26 y 5.27 la evolución temporal y espacial de la variable adjunta $\sigma_1(x, t)$ en la primera y en la última iteración. En la Figura 5.26 se observa como el valor máximo de $\sigma_1(x, t)$, y por tanto, el error máximo, se produce en la zona de medición y para los tiempos donde se produce el pico del hidrograma. Tras el proceso iterativo, se logra reducir notablemente el error en todo el dominio tal y como se observa en la Figura 5.27. A su vez, se observan ligeras oscilaciones de $\sigma_1(x, t)$ a lo largo del dominio y el tiempo. Se deben a la propagación del error, que proporciona información a las variables adjuntas del método.

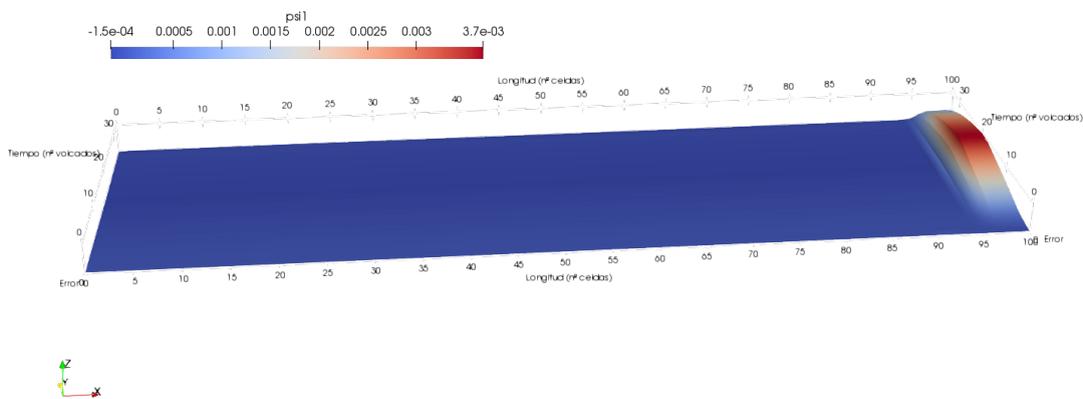


Figura 5.26: Evolución temporal y espacial de $\sigma_1(x, t)$ en la primera iteración con el modelo 1D.

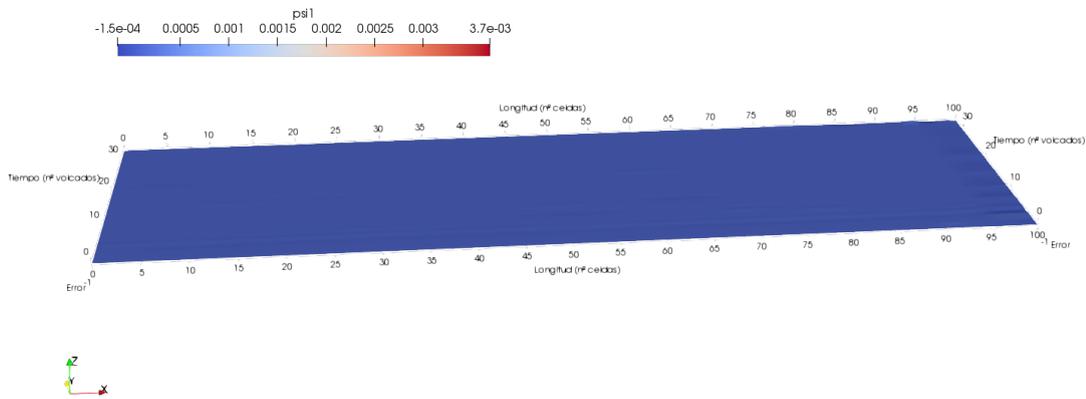


Figura 5.27: Evolución temporal y espacial de $\sigma_1(x, t)$ en la última iteración con el modelo 1D.

5.2.2. Control adjunto en el tramo de río Ebro con un modelo 1D-0D

Se pasa a simular el dominio embalsado mediante el modelo agregado presentado. Se reduce el dominio 1D a aproximadamente 11 kilómetros, por lo que, para mantener el mismo tamaño de celda en ambos modelos, se reduce el número de celdas a 18, y la posición x^* donde se mide el error pasa a ser $x^* \approx 8000$ metros. El valor óptimo obtenido para la longitud del paso es $\varepsilon = 0.155$. Debido a la producción de inestabilidades en el sistema si se trabajara con ε de mayor tamaño, se aumenta a 250 el número de iteraciones máximo, dado que para esta longitud del paso el error seguía reduciéndose en 100 iteraciones. El resto de características del caso permanecen igual que para el caso simulado con el modelo 1D. Los resultados se presentan en las Figuras 5.28, 5.29 y 5.30. Como con el modelo 1D, el método de control adjunto reduce notablemente la variación del nivel ante el hidrograma de entrada, obteniendo valores cercanos al objetivo. Sin embargo, el modelo 1D-0D no es capaz de reducir el error a los valores del modelo 1D debido a las oscilaciones producidas en el flujo. Estas oscilaciones se producen por una variación de la altura de cresta amplia (Figura 5.29), la cual, al ser un dominio más extenso y ancho que para los casos simplificados, no produce inestabilidades en el método, pero sí algo de incontabilidad en el sistema. Con respecto al tiempo de computación, se reduce a 50 segundos.

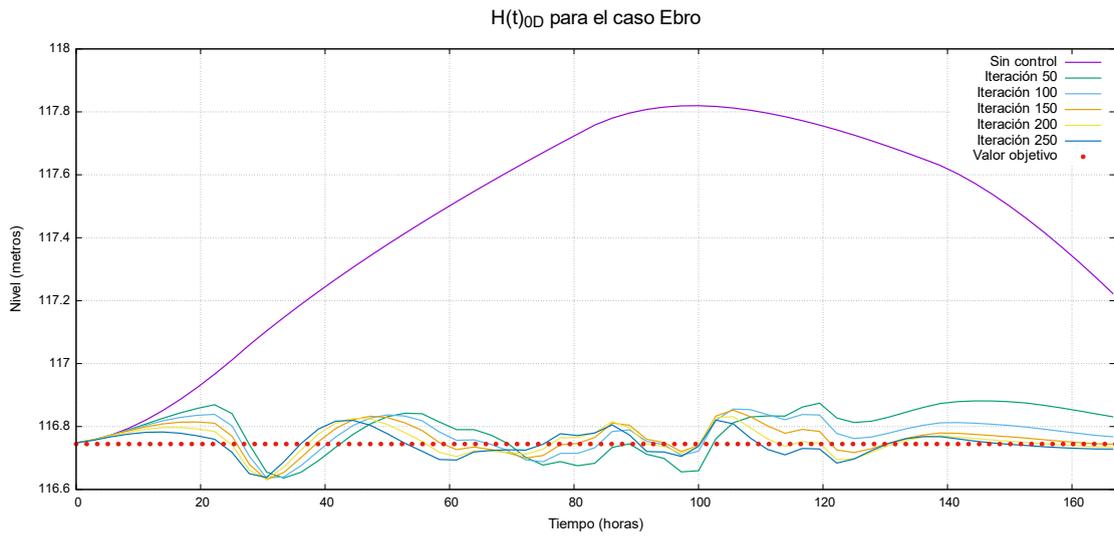


Figura 5.28: $H(t)$ para varias iteraciones con el modelo 1D-0D en el caso del Ebro.

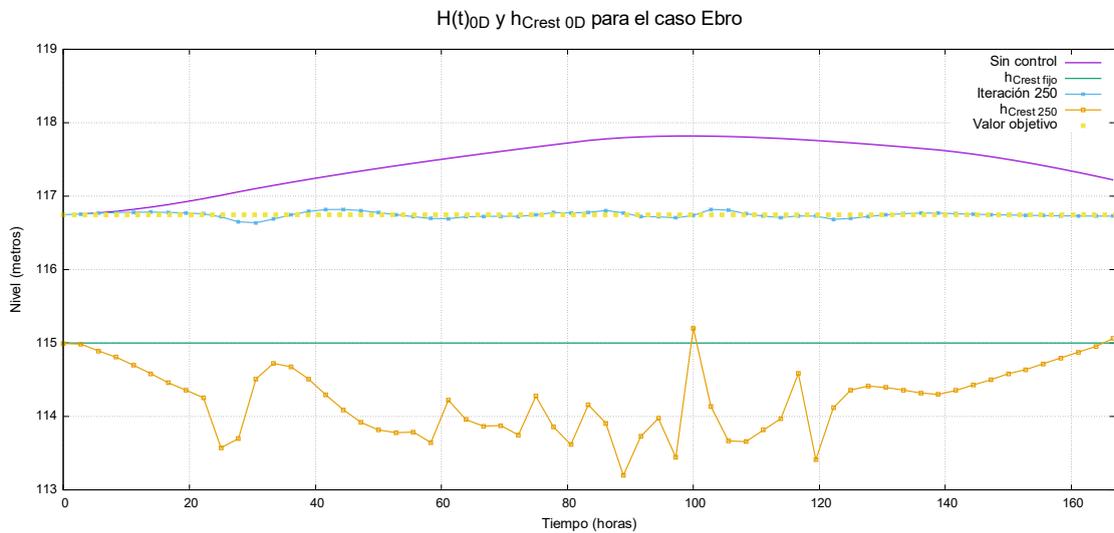


Figura 5.29: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con el modelo 1D-0D en el caso del Ebro.

De la misma forma que ocurre usando el modelo 1D, se observa en la Figura 5.29 que la distribución obtenida para la altura de la cresta no es realista. Por ello, se debe hacer uso en este caso también de la expresión (5.2) para reducir las oscilaciones. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.31, donde se comparan los resultados con y sin amortiguación. En esta figura se observa que la evolución temporal de la altura de cresta es más suave, evolucionando de forma más realista, aspecto que se nota ligeramente en el flujo, al sufrir menos oscilaciones el flujo obtenido usando amortiguación. Esta evolución más suave del parámetro de control permite al método reducir el error algo más que en el caso sin amortiguar.

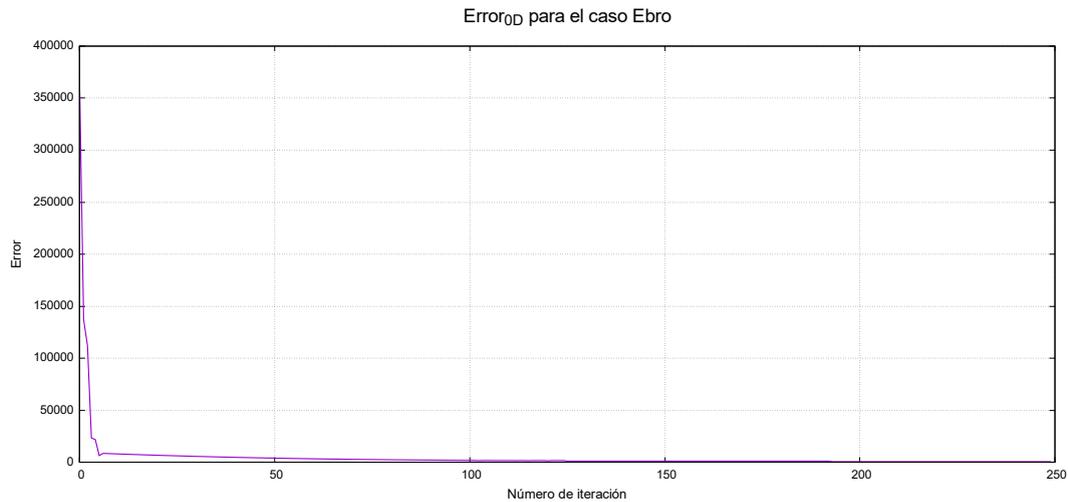


Figura 5.30: Error con el modelo 1D-0D en el caso del Ebro.

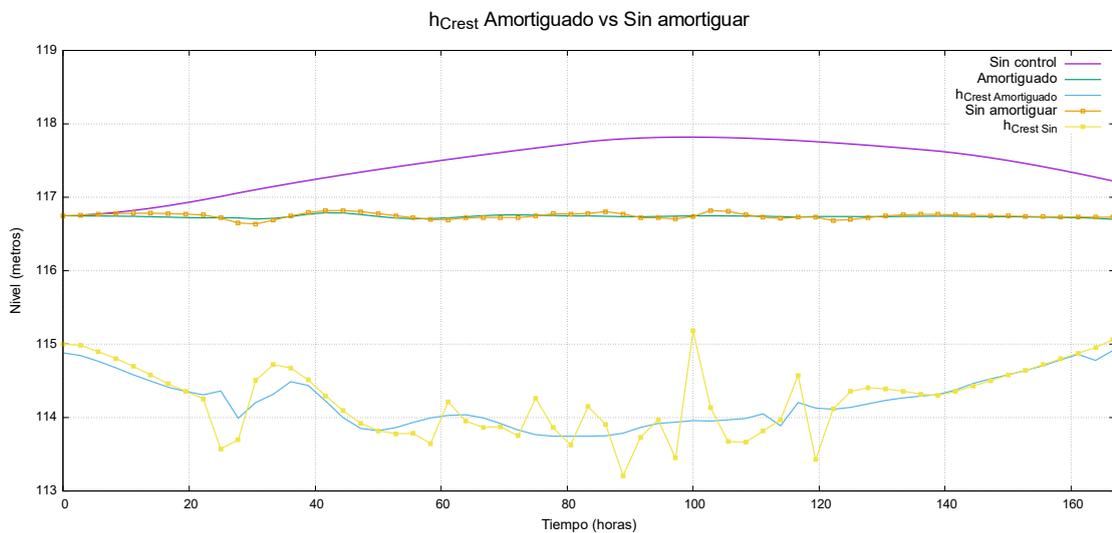


Figura 5.31: $H(t)$ y $h_{Crest}(t)$ con y sin amortiguación con el modelo 1D-0D.

5.2.3. Control en el tramo de río Ebro mediante PID

Finalmente, se hace uso del método de control PID con un modelo 1D para verificar la precisión de los resultados obtenidos con el método de control adjunto usando el modelo 1D y el modelo 1D-0D. Los resultados obtenidos se muestran en la Figura 5.32, medidos para el modelo 1D y para el PID en la posición $x^* \approx 59000$ metros, y para el modelo 1D-0D en la posición $x^* \approx 8000$ metros. Se observa en primer lugar que los resultados que proporcionan el modelo 1D y el modelo 1D-0D sin control son similares pero algo diferentes. En primer lugar, existe un cierto desfase en el pico del hidrograma debido a que la evolución temporal del hidrograma es más rápida en el caso del modelo 1D-0D que en el del modelo 1D al tener menos dominio discretizado, y por tanto, menos rozamiento. A su vez, existe una cierta diferencia del valor del nivel, aspecto que se debe a que el modelo 1D-0D es una aproximación y además existe cierta dificultad a la hora de determinar la función $S(H)$ en casos con geometrías irregulares como se explica en el Anexo C. Los resultados obtenidos con el método de control PID son similares a los obtenidos con el método de control

adjunto, incluso, ligeramente menos precisos debido a una constante oscilación del flujo. El tiempo de computación del caso PID es de 12 segundos, frente a los 154 segundos y 50 segundos de los modelos 1D y 1D-0D, respectivamente.

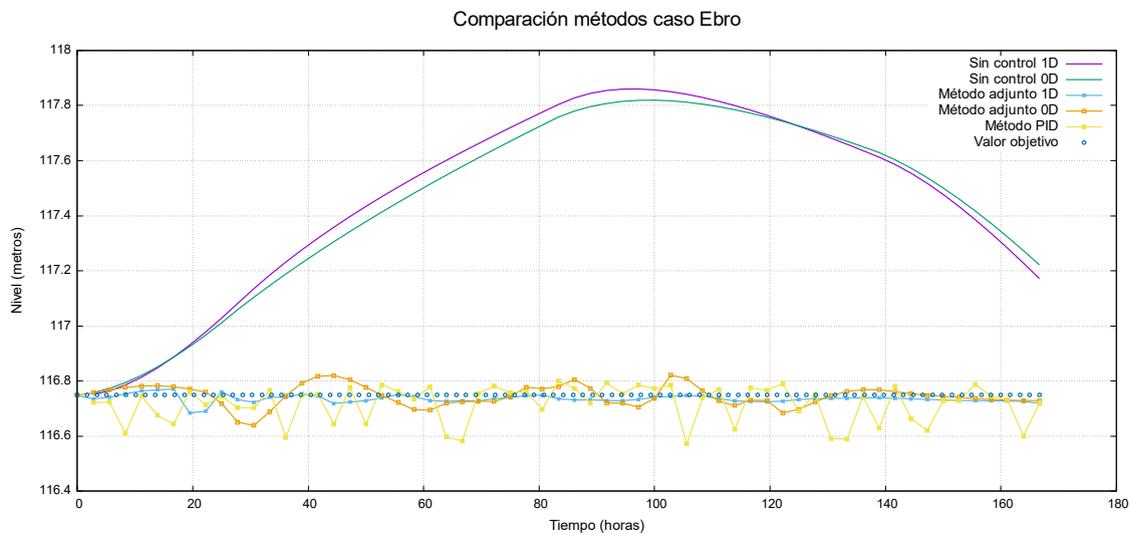


Figura 5.32: $H(t)$ con los tres modelos.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajo futuro

Se presentan a continuación las conclusiones y el trabajo futuro del Trabajo de Final de Máster *Desarrollo de un modelo de control óptimo de flujos transitorios en lámina libre basado en adjuntos*.

En primer lugar, se tenía como objetivo desarrollar una formulación matemática para el método de control adjunto con la altura de una presa como parámetro de control, haciendo uso de un modelo del flujo 1D. Este aspecto se ha desarrollado y cumplido, verificándose con las simulaciones realizadas posteriormente. Con ellas, se obtenía el segundo objetivo del trabajo, la implementación de la formulación adjunta en el esquema numérico.

Mediante un análisis de sensibilidad, se ha estudiado la capacidad, robustez y precisión del método de control adjunto implementado. Se ha comprobado que un aspecto fundamental usando el método de control adjunto es encontrar el valor óptimo de la longitud de paso ε . Un ε lejano de ser óptimo puede implicar inestabilidades (Figura 5.8) y, por tanto, imprecisión en los resultados, o la obtención de mínimos locales en la función del error, los cuales pueden estar muy lejanos en valor con el mínimo global (Figura 5.2).

El siguiente objetivo era comprobar la precisión del método de control adjunto mediante una comparación con el método de control PID ya implementado. El método de control adjunto no ofrece grandes diferencias de precisión con el método de control PID (Figuras 5.13 y 5.15), pero sí de coste computacional, siendo bastante menos eficiente para casos exigentes. Este aspecto lleva a la realización del siguiente objetivo, que era la implementación de un modelo 1D-0D que ofreciese un mayor compromiso entre eficiencia computacional y precisión usando el método de control adjunto. Como se ha podido comprobar en la Figura 5.18, la precisión de los resultados que ofrece el modelo 1D-0D para casos simplificados es similar a la que ofrece el modelo 1D pero con un menor coste computacional.

Posteriormente, se ha estudiado el dominio comprendido en el tramo de río Ebro entre Caspe y Mequinenza mediante el método de control adjunto 1D y 1D-0D. Los resultados obtenidos se han comparado con el método de control PID para verificar su precisión. En la Figura 5.32, se ha podido comprobar que el caso simulado con los tres métodos ofrecía unos resultados similares, siendo los más precisos los del modelo 1D. Hay que destacar que los parámetros que definen el método de control PID se obtienen mediante el método de la curva de reacción, detallado en el Anexo E. Sin embargo, este método permite obtener 3 de los 7 parámetros que usa este método de control, por lo que la obtención de todos los parámetros óptimos es complicada, lo que implica una mayor dificultad para mejorar la precisión de los resultados. El método de control adjunto usando el modelo 1D ofrece resultados muy precisos pero con una reducida eficiencia computacional si se compara con el método PID y con el método de control adjunto 1D-0D. A su vez, el modelo 1D-0D ofrece resultados similares pero no exactamente iguales a los obtenidos con un modelo 1D.

Por tanto, se concluye que el método de control adjunto es un método de control preciso para la modificación del nivel en un embalse. Sin embargo, al ser un método iterativo, es necesario el uso de modelos agregados como el implementado para una mayor eficiencia computacional, la cual se ve reducida notablemente usando el modelo 1D en todo el dominio. Aunque existen otros modelos con una mayor eficiencia computacional y una elevada precisión como es el caso del método de control PID, el método de control adjunto ofrece una mayor facilidad de obtención de sus parámetros óptimos al sólo ser la longitud de paso ε . A su vez, el método de control PID ofrece resultados algo menos precisos si se mide el error en posiciones lejanas a la altura de la compuerta, a diferencia del método de control adjunto, que al trabajar con la propagación del error iteración a iteración consigue una alta precisión en posiciones lejanas a la ubicación del parámetro de control.

Finalmente, como trabajo futuro, se debe adaptar la metodología del método de control adjunto a otra clase de problemas como puede ser la reconstrucción de hidrogramas de entrada o de la condición inicial. Además, queda pendiente la obtención de una función $S(H)$ para el caso del Ebro más precisa, con el objetivo de conseguir un modelo agregado para esta región con mayor similitud al modelo 1D.

Bibliografía

- [1] SUBDIRECCIÓN GENERAL DE PREVENCIÓN, PLANIFICACIÓN Y EMERGENCIAS. Fallecidos por riesgos naturales en España en 2019. 2020.
- [2] W. J. RIPPLE, C. WOLF, T. M. NEWSOME, P. BARNARD, W. R. MOOMAW. World Scientists' Warning of a Climate Emergency. *BioScience*, Volume 70, Issue 1, January 2020, Pages 8–12. <https://doi.org/10.1093/biosci/biz088>
- [3] P. GARCÍA-NAVARRO, J. MURILLO, J. FERNÁNDEZ-PATO, I. ECHEVERRIBAR, M. MORALES-HERNÁNDEZ. The shallow water equations and their application to realistic cases. *Environmental Fluid Mechanics* 19, 1235–1252 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10652-018-09657-7>
- [4] A. LACASTA, C. JUEZ, J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO. An efficient solution for hazardous geophysical flows simulation using GPUs. *Computers & Geosciences*, 78, 63-72, 2015.
- [5] M. MORALES-HERNÁNDEZ, P. GARCÍA-NAVARRO, J. BURGUETE Y P. BRUFAU. A conservative strategy to couple 1D and 2D models for shallow water flow simulation. *Computers Fluids*, nº 81, p. 26-44, 2013.
- [6] M.S. HORRITT, P.D. BATES. Evaluation of 1D and 2D numerical models for predicting river flood inundation. *Journal of hydrology*, 268, 89–99, 2002.
- [7] I. ECHEVERRIBAR, M. MORALES-HERNÁNDEZ, P. BRUFAU, P. GARCÍA-NAVARRO. 2D numerical simulation of unsteady flows for large scale floods prediction in real time, *Advances in Water Resources*, Vol. 134, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2019.103444>.
- [8] I. ECHEVERRIBAR, P. VALLÉS, J. MAIRAL, P. GARCÍA-NAVARRO. Efficient Reservoir Modelling for Flood Regulation in the Ebro River (Spain). *Water* 2021, 13, 3160. <https://doi.org/10.3390/w13223160>
- [9] P. VALLÉS. Estudio de soluciones para mitigar inundaciones en el río Ebro mediante simulación numérica. Universidad de Zaragoza, Grado en Física.
- [10] J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO. Energy balance numerical schemes for shallow water equations with discontinuous topography. *Journal of Computational Physics*, 236, 119-142, 2013.
- [11] G. ARCEMENT, V. SCHNEIDER. Guide for Selecting Manning's Roughness Coefficients for Natural Channels and Flood Plains, no. 2339. U.S. Geological Survey. Water-supply paper. 1984.
- [12] J.L MARTIN, S.C. McCUTCHEON, & R.W. SCHOTTMAN. (1998). Hydrodynamics and Transport for Water Quality Modeling (1st ed.). CRC Press. <https://doi.org/10.1201/9780203751510>
- [13] L. S. NANÍA Y M. GÓMEZ. Ingeniería Hidrológica. Grupo Editorial Universitario, 2004.

- [14] G. SOTELO. Hidráulica General, Vol.1. Limusa, 2002.
- [15] F.M. HENDERSON. Open channel flow. Macmillan series in civil engineering. McGraw-Hill, New York, 1966.
- [16] P. BRUFAU, P. GARCÍA-NAVARRO. Esquemas de alta resolución para resolver las ecuaciones de “shallow water”. *Revista internacional de métodos numéricos para cálculo y diseño en ingeniería*, 2000, Vol. 16, núm. 4.
- [17] R. GARCÍA, R. A. KAHAWITA. Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite-difference scheme. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. Vol. 6, pp. 259-274, 1986.
- [18] E.F. TORO. (1997). The Riemann Solver of Roe. In: *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [19] J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO. (2010). Weak solutions for partial differential equations with source terms: Application to the shallow water equations. *Journal of Computational Physics*, 229:11 4327–4368.
- [20] M. MORALES-HERNÁNDEZ, G. PETACCIA, P. BRUFAU, P. GARCÍA-NAVARRO. (2016). Conservative 1D–2D coupled numerical strategies applied to river flooding: The Tiber (Rome), *Applied Mathematical Modelling*, 40:3 (2016) 2087-2105
- [21] P. GARCÍA-NAVARRO, M. E. VAZQUEZ-CENDON. On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations. *Computers & Fluids*, Volume 29, Issue 8, Pages 951-979, 2000. [https://doi.org/10.1016/S0045-7930\(99\)00038-9](https://doi.org/10.1016/S0045-7930(99)00038-9)
- [22] M. MORALES-HERNÁNDEZ. Efficient explicit finite volume schemes for the shallow water equations with solute transport. Universidad de Zaragoza, 2014.
- [23] R. LEVEQUE. Numerical Methods for Conservation Laws Lectures in Mathematics. ETH Zürich. Birkhuser Basel, 1992.
- [24] B. G. GORDILLO GUAMBAÑA. Simulación del transporte y control de solutos activos en flujos de superficie libre. Universidad de Zaragoza, 2020.
- [25] A. LACASTA, M. MORALES-HERNÁNDEZ, P. BRUFAU, P. GARCÍA-NAVARRO. Application of an adjoint-based optimization procedure for the optimal control of internal boundary conditions in the shallow water equations. *Journal of Hydraulic Research*, 2018, 56:1, 111-123. <https://doi.org/10.1080/00221686.2017.1300196>
- [26] A. LACASTA, P. GARCÍA-NAVARRO A GPU accelerated adjoint-based optimizer for inverse modeling of the two-dimensional shallow water equations. *Computers & Fluids*, 2016, Volume 136, 371-383. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2016.06.024>
- [27] P. BRISSET, J. MONNIER, P. GARAMBOIS, H. ROUX On the Assimilation of Altimetric Data in 1D Saint-Venant River Flow Models. *Advances in Water Resources*, 2018, 119. <https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2018.06.004>
- [28] R. C. PANDA. Introduction to PID Controllers; IntechOpen: London, UK, 2012.
- [29] B. ZHOU, L. GAO, & YH. DAI. Gradient Methods with Adaptive Step-Sizes. *Comput Optim Applic* 35, 69–86 (2006). <https://doi.org/10.1007/s10589-006-6446-0>

- [30] J. MURILLO, P. GARCÍA-NAVARRO. Accurate numerical modeling of 1D flow in channels with arbitrary shape. Application of the energy balanced property. *Journal of Computational Physics*, 2014, 260, 222-248. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2013.12.040>

Anexos

Anexo A: Ecuaciones de Navier-Stokes

Las ecuaciones de Navier-Stokes están formadas por la ecuación de continuidad, la ecuación de conservación de la cantidad del movimiento y la ecuación de conservación de energía. Se presentan así las ecuaciones de flujo en 3 dimensiones, fundamentadas en la conservación de masa, la 2ª ley de Newton y la 1ª ley de la termodinámica:

Ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

Ecuación de conservación del movimiento

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} + \rho w \frac{\partial u}{\partial z} - \rho f u + \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \rho u \frac{\partial v}{\partial x} + \rho v \frac{\partial v}{\partial y} + \rho w \frac{\partial v}{\partial z} + \rho f v + \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\rho \frac{\partial w}{\partial t} + \rho u \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v \frac{\partial w}{\partial y} + \rho w \frac{\partial w}{\partial z} + \rho g + \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

donde ρ es la densidad del fluido, p es la presión, (u, v, w) son las componentes del vector velocidad para las tres coordenadas espaciales y τ es el tensor de esfuerzos viscosos. f representa el parámetro de Coriolis y participa como fuerza de volumen de tipo inercial, siendo únicamente importante en el caso de fenómenos con escalas temporales y/o longitudinales grandes¹. Si la densidad es constante, como es en nuestro caso, no existe ninguna relación entre la ecuación de conservación de la energía y las de conservación de masa y cantidad de movimiento, por lo que para conocer cómo evoluciona el flujo no es necesaria la ecuación de conservación de la energía, así que no se presenta esta ecuación.

Si al anterior sistema de ecuaciones se aplica la hipótesis de aguas poco profundas, se obtiene un sistema de ecuaciones para el flujo de superficie libre en 3 dimensiones, cuyas variables conservadas son las 3 componentes de la velocidad (u, v, w) y el calado h .

¹Aspecto que no cumplen los problemas estudiados en este trabajo.

Promediado en la vertical

Debido a cuestiones de eficiencia computacional, no interesa simular los distintos casos estudiados en 3D, al aumentar considerablemente el tiempo de simulación sin proporcionar una cantidad mayor de información relevante comparada con la aportada por simulaciones en 2D. Por ello, interesa pasar las ecuaciones en 3D mostradas a un plano bidimensional. Esta transformación se obtiene promediando las componentes de la velocidad en la dirección vertical, asumiendo que la componente de la velocidad en el eje vertical no aporta información esencial a nuestro problema:

$$\bar{u}(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H u(x, y, z, t) dz \quad (5)$$

$$\bar{v}(x, y, t) = \frac{1}{h} \int_{z_b}^H v(x, y, z, t) dz \quad (6)$$

donde (u, v) son las componentes de la velocidad en \hat{x} e \hat{y} , h es el calado, z_b la cota mínima de la sección transversal y H el nivel, tal que $H = z_b + h$ (Figura 1).

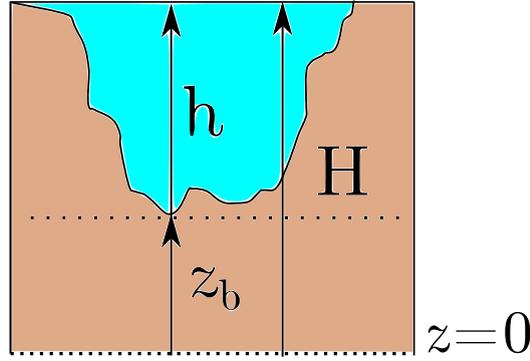


Figura 1: Variables físicas del flujo.

Mediante (5) y (6), se puede escribir la ecuación de conservación de la masa como:

$$\int_{z_b}^H \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^H \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_{z_b}^H \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (7)$$

Considerando la regla de derivación de Leibniz:

$$\frac{dH}{dt} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

y al ser $\frac{dz_b}{dt} = 0$ debido a que el fondo es inmóvil e impermeable, se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} + \frac{\partial(h\bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(h\bar{v})}{\partial y} = 0 \quad (9)$$

que es la ecuación de conservación de la masa para un sistema bidimensional. La reducción de la tercera componente de la velocidad se puede justificar mediante la consideración de la hipótesis de aguas poco profundas.

Hipótesis de aguas poco profundas

La hipótesis de aguas poco profundas consiste en las siguientes premisas:

- Las ondas producidas en la superficie libre del flujo evolucionan suavemente, lo que implica que se puede establecer una distribución de presiones hidrostática, o lo que es lo mismo, que la aceleración en la vertical es despreciable.
- Las pérdidas por rozamiento en un flujo transitorio son similares a las pérdidas que se tendrían en un flujo estacionario.
- El promedio de la pendiente longitudinal α es cercano a cero, cumpliéndose $\tan(\alpha) \approx \alpha$.

La relación que proporciona la clasificación de un flujo en aguas poco profundas o en aguas profundas viene del siguiente desarrollo.

Formulación linealizada de ondas superficiales

Se parte de un fluido incompresible, por lo que verifica:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (10)$$

Considerando además que el flujo es irrotacional, cumple también:

$$\mathbf{v} = \nabla \phi \quad (11)$$

donde ϕ es una función sin sentido físico y donde la irrotacionalidad se puede justificar a partir del teorema de Kelvin² si se desprecian las fuerzas viscosas y la fuerza de Coriolis. Con las expresiones (10) y (11), se obtiene la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (12)$$

En dos dimensiones, (12) se desarrolla en:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (13)$$

a la cual se debe aplicar sus correspondientes condiciones de contorno. Tales condiciones se obtienen a partir de la ecuación de Bernoulli, que, al linealizar³, queda de la forma:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} + gz = C(t) \quad (14)$$

donde p es la presión, ρ es la densidad del fluido, g es la intensidad del campo gravitatorio terrestre y $C(t)$ es un término dependiente únicamente del tiempo, por lo que se puede introducir en ϕ , obteniendo al despejar:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho gz \quad (15)$$

²**Teorema de Kelvin:** “Si las fuerzas viscosas son despreciables y las fuerzas másicas conservativas, la circulación alrededor de una línea material cerrada que se mueve con el flujo es constante en el tiempo para un fluido barotrópico”.

³La amplitud a de las ondas que se producen en la superficie libre del flujo debe ser mucho menor que la longitud de onda λ de tales ondas.

La superficie del fondo, ubicada en $z = -d$ (Figura 2), se supone impermeable y horizontal, por lo que no hay componente normal de la velocidad, cumpliéndose:

$$w = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=-d} = 0 \quad (16)$$

La superficie libre del flujo se expresa mediante:

$$z = \eta(x, t) \quad (17)$$

donde $\eta(x, t)$ se caracteriza en la Figura 2, siendo $\eta(x, t) = 0$ cuando el flujo se encuentra en reposo. Haciendo uso de (15), y tomando la presión atmosférica como la de referencia, se llega a:

$$p_{at} = 0 = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t} - \rho g \eta \longrightarrow \frac{\partial \phi}{\partial t} + g \eta = 0 \quad (18)$$

Si se define la superficie libre en el punto $z = \eta(x, t)$ como:

$$F(x, z, t) = \eta(x, t) - z = 0 \quad (19)$$

se verifica, haciendo la derivada sustancial:

$$\frac{DF}{Dt} = 0 = \frac{d\eta}{dt} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} - w \quad (20)$$

Linealizando, y por tanto, despreciando los términos convectivos, se obtiene para w :

$$w = \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{d\eta}{dt} \quad (21)$$

Se supone el caso más simple para $\eta(x, t)$, descrita por una función sinusoidal que se propaga a lo largo del eje x con una amplitud a , un número de ondas k y frecuencia angular ω :

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - \omega t) \quad (22)$$

Por las condiciones de contorno establecidas se sabe que si $\eta(x, t)$ está definida por la expresión (22), la función potencial ϕ viene dada por:

$$\phi = f(z) \sin(kx - \omega t) \quad (23)$$

donde se desconocen $f(z)$ y la relación de dispersión $\omega(k)$. Haciendo uso de la ecuación de Laplace:

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} - k^2 f(z) = 0 \quad (24)$$

por lo que, resolviendo, se obtiene la expresión para $f(z)$:

$$f(z) = A e^{kz} + B e^{-kz} \quad (25)$$

donde A y B son constante a resolver. A partir de las condiciones de contorno planteadas, se obtiene:

$$A = \frac{a \omega}{k(1 - e^{-2kd})}, \quad B = \frac{a \omega e^{-2kd}}{k(1 - e^{-2kd})} \quad (26)$$

obteniendo la expresión para la función potencial:

$$\phi = \frac{a \omega \cosh(k(z + d))}{k \sinh(kd)} \sin(kx - \omega t) \quad (27)$$

para la relación de dispersión $\omega(k)$:

$$\omega(k) = \sqrt{g k \tanh(kd)} \quad (28)$$

y para la velocidad de fase c :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g \tanh(kd)}{k}} = \sqrt{\frac{g \lambda}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)} \quad (29)$$

donde λ es la longitud de onda propagada (Figura 2).

De la expresión (29), se obtiene el criterio para clasificar un flujo en aguas profundas o aguas poco profundas, pues dependiendo de la relación entre d y λ , la expresión (29) varía notablemente.

- Si se cumple:

$$\frac{d}{\lambda} \ll 1 \quad (30)$$

se tiene un flujo en aguas poco profundas y se puede realizar en (29) la aproximación:

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \approx \frac{2\pi d}{\lambda} \rightarrow c \approx \sqrt{gd} \quad (31)$$

- Si se cumple:

$$\frac{d}{\lambda} \gg 1 \quad (32)$$

se tiene un flujo en aguas profundas y se puede realizar en (29) la aproximación:

$$\tanh\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right) \approx 1 \rightarrow c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} = \sqrt{\frac{g}{k}} \quad (33)$$

Al verse afectada a la distribución de presiones en la vertical al aplicarse la hipótesis de aguas poco profundas, la ecuación de cantidad de movimiento también se verá afectada en esta dirección. El aspecto fundamental de aplicar esta hipótesis es que se cumple:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (34)$$

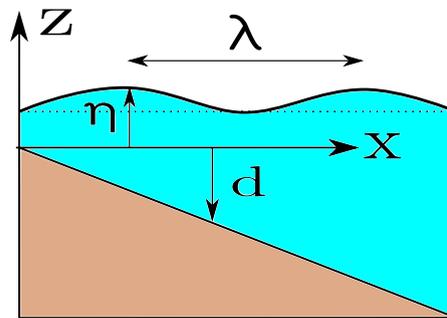


Figura 2: Esquema del dominio estudiado.

Anexo B: Ecuaciones de flujo para un modelo matemático 2D

El sistema de ecuaciones bidimensional se obtiene al promediar en la columna vertical líquida, por lo que no se calcula la velocidad en la componente vertical z . Este sistema está formado por la ecuación de continuidad y las ecuaciones de cantidad de movimiento. La ecuación diferencial de continuidad relaciona el calado h con las componentes de la velocidad promedio u y v en las direcciones x e y respectivamente:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial y} = 0 \quad (35)$$

siendo el caudal en la componente x , $q_x = hu$, y el caudal en la componente y , $q_y = hv$. Las ecuaciones diferenciales de cantidad de movimiento incorporan la influencia de la fuerza motriz de la gravedad y la fuerza de fricción en el segundo término:

$$\frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu^2)}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial(huv)}{\partial y} = gh(S_{ox} - S_{fx}) \quad (36)$$

$$\frac{\partial(hv)}{\partial t} + \frac{\partial(huv)}{\partial x} + gh\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial(hv^2)}{\partial y} = gh(S_{oy} - S_{fy}) \quad (37)$$

donde S_{ox} y S_{oy} son las componentes del gradiente de la superficie del fondo $z_b(x, y)$ y vienen dadas por las expresiones:

$$S_{ox} = -\frac{\partial z_b}{\partial x}, \quad S_{oy} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (38)$$

S_{fx} y S_{fy} son las fuerzas de fricción expresadas como pendientes de una superficie de energía:

$$S_{fx} = \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}}, \quad S_{fy} = \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (39)$$

donde n es el coeficiente de Manning ([11]).

Las expresiones (35), (36) y (37) en forma conservativa se pueden escribir también en forma matricial:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} = \mathbf{S}(\mathbf{U}) \quad (40)$$

con:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \\ hv \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + gh^2/2 \\ huv \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + gh^2/2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh[S_{ox} - S_{fx}] \\ gh[S_{oy} - S_{fy}] \end{pmatrix} \quad (42)$$

Anexo C: Obtención de la función $S(H)$ del modelo del flujo 0D

La obtención de la función $S(H)$ que caracteriza el modelo hidrológico para el embalse depende de la geometría del caso. Teniendo en cuenta que esta función proviene de la derivada con respecto al nivel H del volumen del embalse, si el caso a estudiar es un caso con una geometría regular, el volumen se puede obtener de forma sencilla, así como la función $S(H)$. Sin embargo, en el caso de un caso irregular en su geometría, la obtención del volumen del embalse no será algo fácil de obtener, y se deberá recurrir a simulaciones previas que proporcionen información del volumen del embalse en función del nivel que éste presenta, para poder así obtener $S(H)$.

Caso simplificado

El caso simplificado se muestra en la Figura 3, donde se tiene un canal rectangular con anchura constante B en todo el dominio. En esta figura se puede observar a su vez la región del embalse, a la cual se pretende obtener la función $S(H)$. Por tanto, para la obtención de esta función, se debe obtener el volumen de la zona azul en función de H , sin tener en cuenta la zona amarilla. La suma de ambas zonas viene dada por:

$$V_{\text{TOTAL}}(H) = V_{\text{Embalse 0D}}(H) + V_{\text{Amarillo}}(H) = HB \frac{H}{2\text{tg}(\alpha)} = \frac{H^2 B}{2\text{tg}(\alpha)} \quad (43)$$

Teniendo en cuenta que el volumen de la zona amarilla se puede obtener a partir de:

$$V_{\text{Amarillo}}(H) = \frac{(H - z_b N'-1)^2 B}{2\text{tg}(\alpha)} \quad (44)$$

se llega a:

$$V_{\text{Embalse 0D}}(H) = V_{\text{TOTAL}}(H) - V_{\text{Amarillo}}(H) = \frac{H^2 B}{2\text{tg}(\alpha)} - \frac{(H - z_b N'-1)^2 B}{2\text{tg}(\alpha)} \quad (45)$$

Por tanto, haciendo a (45) la derivada con respecto a H , se obtiene $S(H)$:

$$S(H) = \frac{d(V_{\text{Embalse 0D}})}{dH} = \frac{B z_b N'-1}{\text{tg}(\alpha)} \quad (46)$$

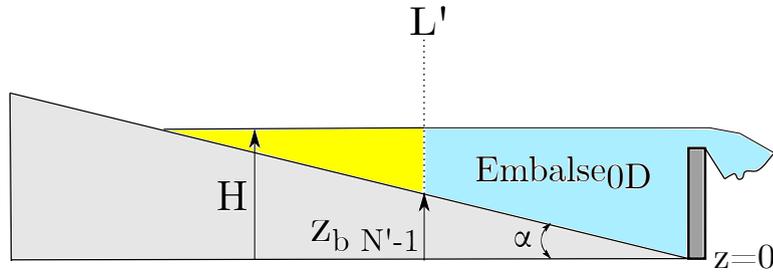


Figura 3: Esquema de la situación del embalse para el caso simplificado.

Caso complejo

Para la obtención de la función $S(H)$ en un caso geoméricamente complejo, se coge como dominio el caso de río Ebro. Se debe en primer lugar obtener una función del volumen del embalse $V(H)$ en función del nivel de éste. Para ello, se realizan una serie de simulaciones donde se impone como condición de contorno aguas abajo un vertedero cuya altura de cresta sea lo suficientemente alta para que el flujo no salga del embalse. Se introduce como condición de contorno inicial un determinado nivel, pudiendo obtener así el volumen correspondiente en el embalse en función del nivel al realizar este proceso para varios niveles. Se obtiene así una distribución de medidas $V(H)$ representada en la Figura 4.

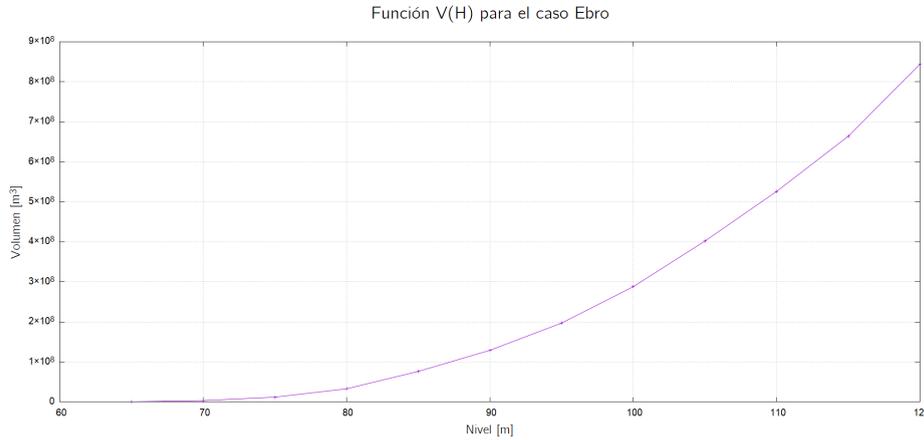


Figura 4: Función $V(H)$ para el caso Ebro.

Se realiza una aproximación por el método de mínimos cuadrados de la función $V(H)$ a una función polinómica de grado 3, obteniendo la siguiente curva de ajuste:

$$V(H) = 1376H^3 - 39214H^2 - 10^7H + 7 \cdot 10^8 \quad \text{con } H > 62 \text{ metros} \quad (47)$$

H debe ser mayor que 62 metros al ser éste el valor de la cota mínima z_b del embalse. Realizando la derivada con respecto a H sobre (47), se obtiene la función $S(H)$ para el embalse del Ebro:

$$S(H) = 4128H^2 - 78428H - 10^7 \quad (48)$$

Se debe mencionar que, como no se coge nunca todo el embalse para verificar las hipótesis del método de Puls en el caso de un descenso notable del nivel, se está teniendo en cuenta algo de superficie que no pertenece al embalse 0D. Esto se debe a que restar ese volumen no perteneciente al embalse modelizado como se ha realizado en el caso simplificado es muy complicado mediante el proceso de obtención de $V(H)$ utilizado. Sin embargo, este volumen será muy pequeño en comparación con el volumen total, por lo que no supone un error muy elevado en la obtención de $S(H)$.

Anexo D: Obtención de mallas de cálculo 1D

El método numérico evoluciona en función de la malla de cálculo definida sobre el tramo a simular. Se presentan a continuación las características generales de las mallas de cálculo 1D usadas para la realización de las distintas simulaciones. Se debe tener en cuenta que esta malla dependerá de la geometría del caso, donde una geometría regular implicará una malla de cálculo más sencilla de obtener.

Caso simplificado

El caso simplificado es un canal rectangular de longitud $L = 1000$ metros con anchura constante $B = 100$ metros. Las celdas que conforman la malla de cálculo del caso, que son $N = 100$, estarán equiespaciadas y tendrán todas ellas un tamaño:

$$\Delta x = \frac{L}{N} = \frac{1000 \text{ metros}}{100} = 10 \text{ metros} \quad (49)$$

La regularidad del caso permite definir la geometría del dominio mediante únicamente dos secciones transversales al cauce, una al principio y otra al final del canal (Figura 5). Entre estas dos secciones transversales se irán distribuyendo las celdas (Figura 6).

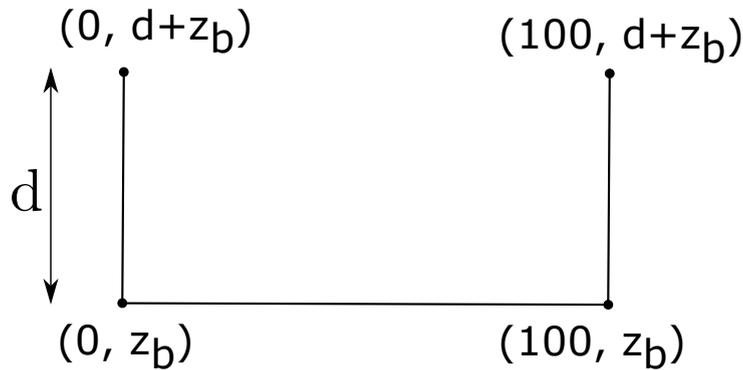


Figura 5: Sección transversal al cauce para el caso simplificado.

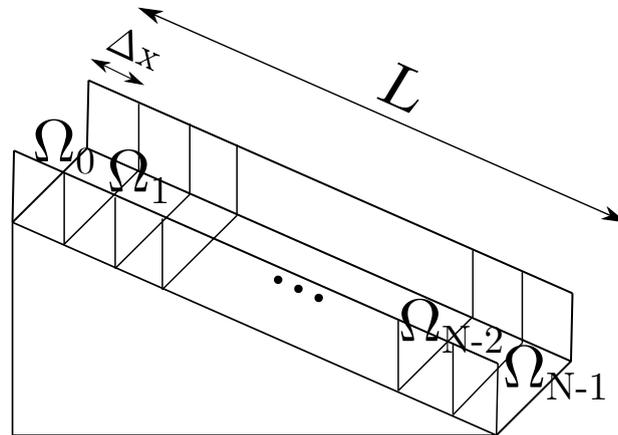


Figura 6: Esquema tridimensional de la malla 1D para el caso simplificado.

Caso Ebro

En la Figura 5.20 se puede comprobar la irregularidad del tramo estudiado. Por ello, la obtención de la malla de cálculo 1D del tramo simulado para este caso es diferente que para la del caso simplificado. El número de secciones transversales al cauce aumenta hasta 99 para representar con detalle la curvatura del cauce, y se obtiene un valor para el tamaño de celda Δx :

$$\Delta x \approx \frac{62000 \text{ metros}}{100} = 620 \text{ metros} \quad (50)$$

Para la obtención de las secciones transversales en las que se basa la malla de cálculo 1D, se hace uso de un código sencillo que permite definir las secciones transversales a partir de una serie de puntos geolocalizados en el MDT en formato RASTER del cual se parte para la elaboración de la malla (Figura 7).

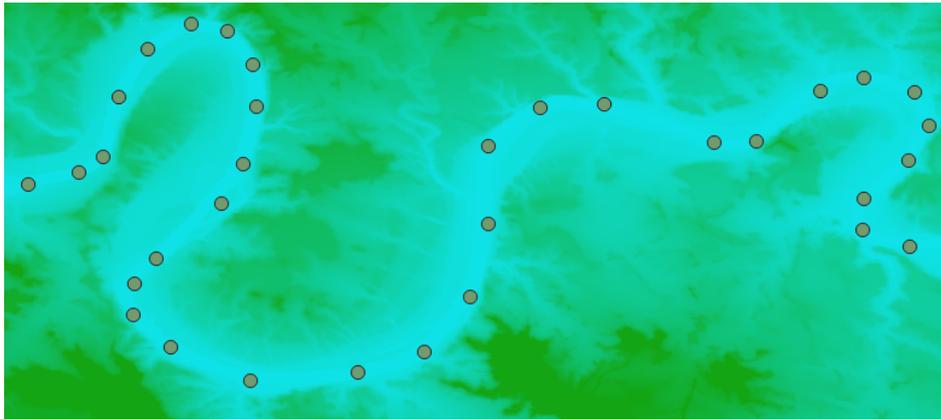


Figura 7: Puntos geolocalizados a lo largo del cauce del caso Ebro.

Las secciones transversales definidas por una serie de puntos se trazan mediante el uso del código, que traza una serie de rectas que unen los puntos geolocalizados, generando así secciones perpendiculares a tales rectas (Figura 8), centradas sobre los puntos geolocalizados (Figura 9).

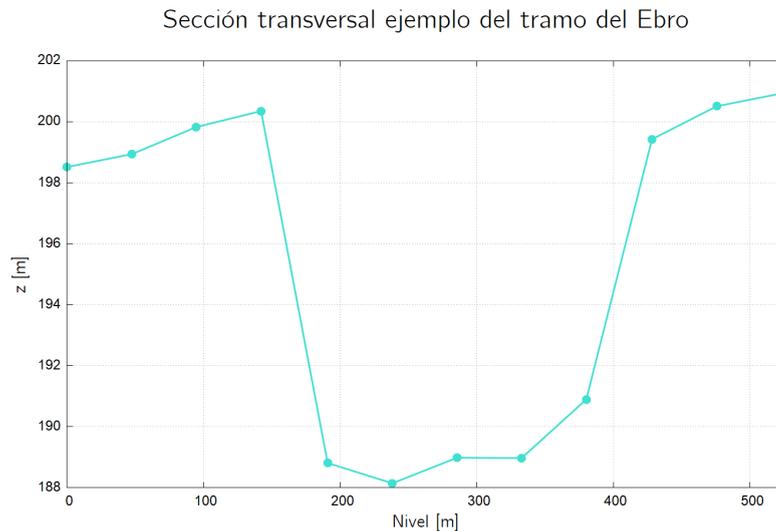


Figura 8: Ejemplo de sección transversal en el caso del Ebro.

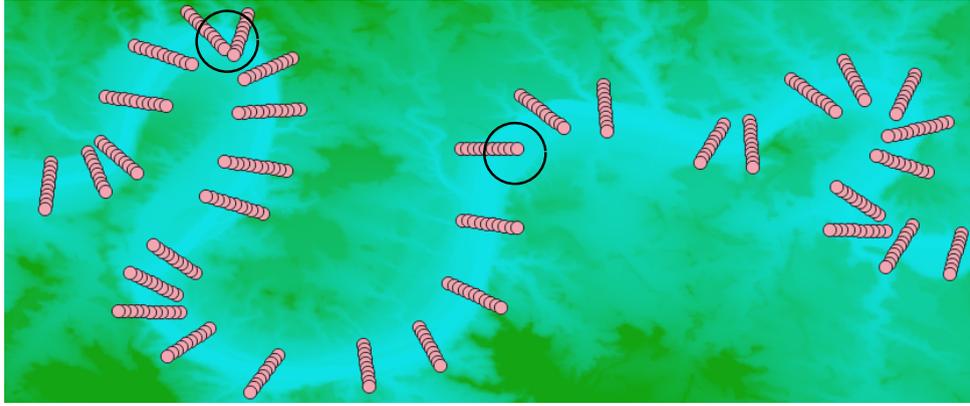
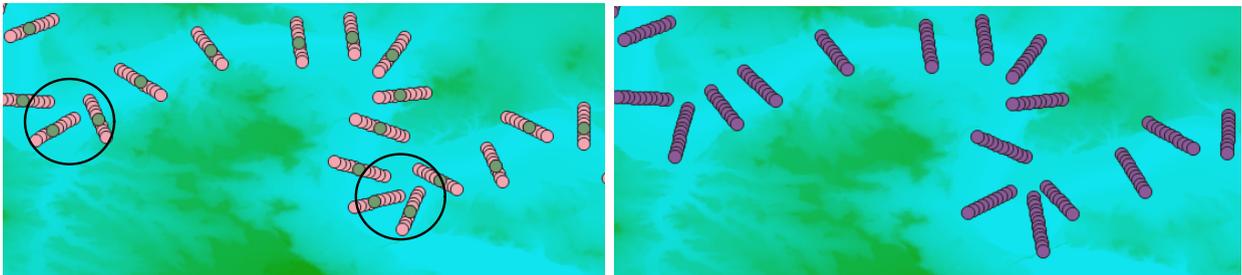


Figura 9: Secciones transversales problemáticas a lo largo del cauce.

Las regiones señaladas en la Figura 9 no cumplen ciertos criterios que se buscan para evitar inestabilidades cuando el flujo transcurre por la malla de cálculo. La región señalada de la izquierda proporciona un solapamiento de dos secciones, algo que puede generar problemas debido a que la información que proporciona cada una de estas secciones se ve alterada por la información que proporciona la otra, perdiendo precisión en la generación de la malla en esta zona. La región señalada de la derecha se trata de una sección transversal que no recoge toda la anchura que tiene el cauce, por lo que el flujo quedará más encauzado de lo que debería si la malla de cálculo se describe mediante celdas con esta imprecisión. Para solucionarlo, se deben introducir de forma manual las coordenadas de los puntos que conforman las secciones problemáticas (ver Figura 10).



(a) Sin corregir.

(b) Corregidas.

Figura 10: Corrección de secciones transversales problemáticas.

Anexo E: Método de control PID

Discretización del algoritmo de control PID

De forma general, la expresión para el parámetro de control controlado mediante un sistema PID es:

$$u(t) = K \left\{ J(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} J(t) dt + T_d \frac{dJ(t)}{dt} \right\} = P + I + D \quad (51)$$

que proporciona la variación que se debe imponer en el parámetro de control para conseguir el valor deseado en alguna de las variables del sistema.

Dado que el método de control PID se debe implementar como una condición de contorno aguas abajo, se muestra a continuación la discretización temporal de (51). Para el término derivativo, se debe discretizar la derivada del error $J(t)$:

$$\frac{dJ(t)}{dt} \approx \frac{J(t^n) - J(t^{n-1})}{t^n - t^{n-1}} = \frac{J(t^n) - J(t^{n-1})}{T_s} \quad (52)$$

donde t^n es el paso temporal actual y T_s el valor del periodo de muestreo, que sería el periodo de tiempo que debe transcurrir para hacer uso del controlador para el nuevo cálculo de $u(t)$.

Para el término integral, se realiza la siguiente aproximación para discretizar la integral que lo conforma:

$$\int_0^{t^n} J(t) dt \approx T_s \sum_{i=0}^{t^n} J(i) \quad (53)$$

Por tanto, usando (52) y (53), la expresión (51) discretizada queda de la forma:

$$u(t^n) = K J(t^n) + \frac{K T_s}{T_i} \sum_{i=0}^{t^n} J(i) + \frac{K T_d (J(t^n) - J(t^{n-1}))}{T_s} \quad (54)$$

Haciendo la diferencia entre el paso temporal actual y el anterior, se llega a la expresión:

$$\begin{aligned} \Delta u = u(t^n) - u(t^{n-1}) &= K [J(t^n) - J(t^{n-1})] + \\ &+ \frac{K T_s}{T_i} J(t^n) + \frac{K T_d}{T_s} (J(t^n) - 2J(t^{n-1}) + J(t^{n-2})) \end{aligned} \quad (55)$$

y, tras agrupar términos para separar el valor del error en cada uno de los pasos temporales, se puede reducir a:

$$\begin{aligned} \Delta u = u(t^n) - u(t^{n-1}) &= K \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) J(t^n) - \\ &- K \left(1 + \frac{2 \cdot T_d}{T_s} \right) J(t^{n-1}) + K \frac{T_d}{T_s} J(t^{n-2}) \end{aligned} \quad (56)$$

Finalmente, despejando el término $u(t^n)$ para obtener el valor del parámetro de control en el paso temporal actual e introduciendo los pesos α_1 , α_2 y α_3 , que permiten al usuario darle más o menos importancia a cada uno de los pasos temporales que el controlador usa para el cálculo de $u(t)$, se obtiene la expresión:

$$u(t^n) = u(t^{n-1}) + \alpha_1 K \left(1 + \frac{T_s}{T_i} + \frac{T_d}{T_s} \right) J(t^n) - \alpha_2 K \left(1 + \frac{2T_d}{T_s} \right) J(t^{n-1}) + \alpha_3 K \frac{T_d}{T_s} J(t^{n-2}) \quad (57)$$

Cálculo analítico de los parámetros de control

Para determinar los parámetros del método de control PID, se hace uso del método de la curva de reacción Ziegler-Nichols. Este método se basa en el siguiente procedimiento:

- En primer lugar, se debe operar en la variable $u(t)$ hasta alcanzar que se estabilice la evolución temporal de $y(t)$, obteniendo así un valor constante en el tiempo para ambas $u(t) = u_0$ y $y(t) = y_0$ (Figura 11).
- Tras obtener tal estabilidad, se aplica un cambio en forma de escalón sobre $u(t)$, pasando de u_0 a u_∞ (cambio que debe suponer un aumento o descenso de entre un 10 % y un 15 % del valor u_0).
- Se simula el sistema hasta que $y(t)$ se estabilice, obteniendo $y(t) = y_\infty$.
- Se calculan los parámetros del método a partir de:

$$K_0 = \frac{y_\infty - y_0}{u_\infty - u_0} \quad \tau_0 = t_1 - t_0 \quad \gamma_0 = t_2 - t_1 \quad (58)$$

donde t_1 y t_2 se definen en la Figura 11. Los valores de los parámetros del método de control PID vienen dados por:

$$K = \frac{1.2\gamma_0}{K_0\tau_0} \quad (59)$$

$$T_i = 2\tau_0 \quad (60)$$

$$T_d = 0.7\tau_0 \quad (61)$$

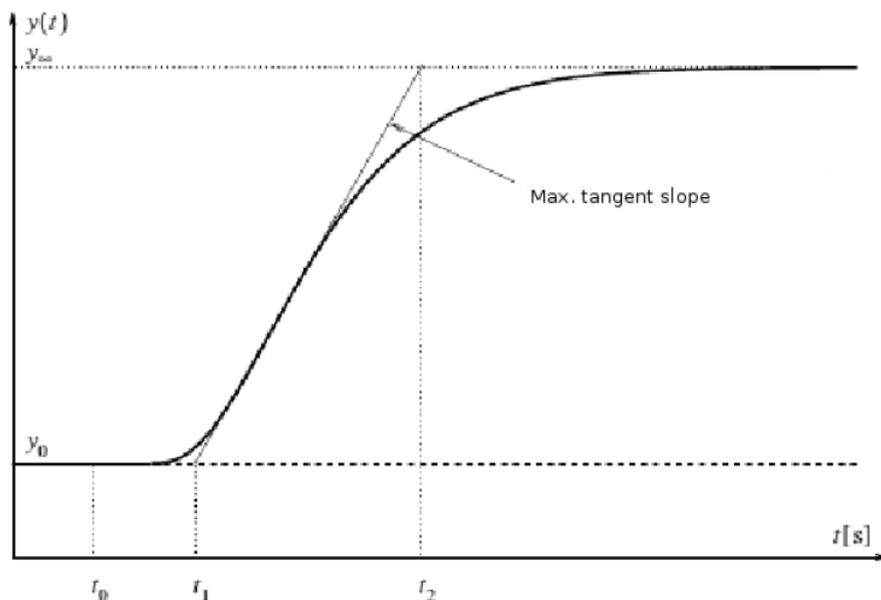


Figura 11: Función $y(t)$ para su uso en el método de la curva de reacción.

Se aplica a continuación el método de la curva de reacción al caso del Ebro como ejemplo.

Caso Ebro

Para la obtención de los parámetros de control del caso del Ebro, se hizo uso de dos métodos distintos: un primer método donde se hacía uso del valor de $h_{Crest}(t)$ como función escalón, y otro método haciendo uso del caudal $Q(t)$ como función escalón. Se obtuvo la evolución del nivel en función del tiempo en la última celda del tramo simulado, tal y como se muestra en la Figura 12, donde se muestra el cambio de tipo escalón producido sobre h_{Crest} .

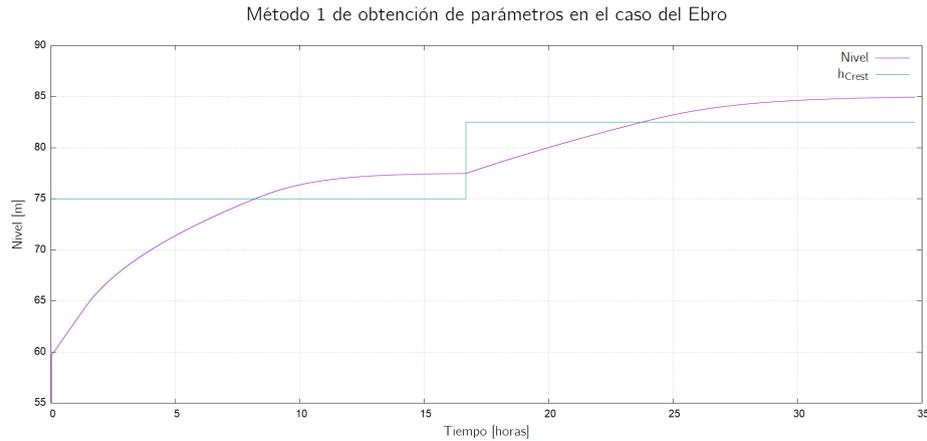


Figura 12: Método 1 de obtención de los parámetros de control en el caso del Ebro.

Los valores de los parámetros presentados en las expresiones (58), (59), (60) y (61) se muestran para el caso del Ebro en el Cuadro 1.

K_0	τ_0 [s]	γ_0 [s]	K	T_i [s]	T_d [s]
0.976	6	56494	11576	12	3

Cuadro 1: Parámetros obtenidos mediante el método 1 para el caso del Ebro.

Para el método 2, se introdujo el escalón en el caudal, tal y como se muestra en la Figura 13.

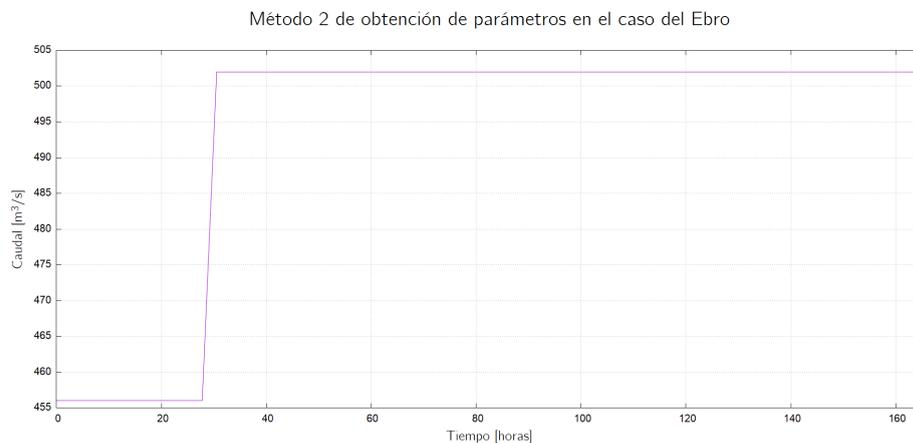


Figura 13: Hidrograma con forma de escalón para el método 2.

La evolución del nivel en función del tiempo en la última celda del caso tras introducir el escalón

en el caudal del hidrograma de entrada se muestra en la Figura 14.

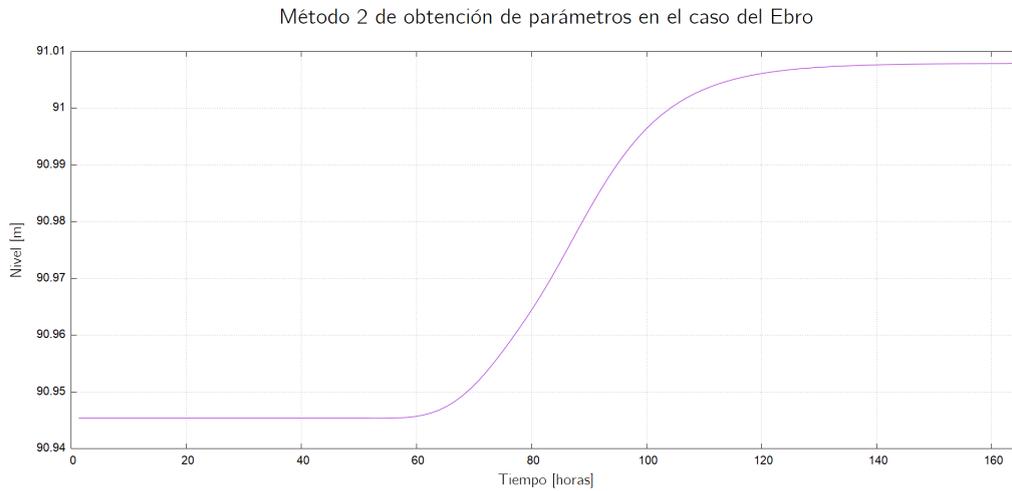


Figura 14: Evolución del nivel en función del tiempo para el método 2.

Los valores de los parámetros presentados en las expresiones (58), (59), (60) y (61) se muestran para el caso del Ebro con el método 2 en el Cuadro 2.

K_0	τ_0 [s]	γ_0 [s]	K	T_i [s]	T_d [s]
0.0015	5000	173000	28506	10000	2500

Cuadro 2: Parámetros obtenidos mediante el método 2 para el caso del Ebro.

Mediante un análisis de sensibilidad, se obtuvieron los valores óptimos para T_s , α_1 , α_2 y α_3 . Los valores obtenidos mediante el método 1 junto a los parámetros mostrados en el Cuadro 3 fueron los que proporcionaron resultados con una evolución más suavizada, por lo que fueron los escogidos para realizar el caso del Ebro haciendo uso del método de control PID.

T_s [s]	α_1	α_2	α_3
10000	0.95	0.05	0.05

Cuadro 3: Parámetros óptimos restantes del método de control PID.

Sin embargo, la precisión de los resultados es limitada debido a la dificultad de obtención de estos 4 últimos parámetros optimizados.

Anexo F: Integrales de presión hidrostática en cauces irregulares

Se busca obtener una formulación para el sistema de ecuaciones del flujo con todos sus términos con una dependencia directa con las variables conservadas. Esto implica fundamentalmente una transformación de las integrales de presión hidrostática I_1 e I_2 . Esta formulación alternativa para el modelo matemático 1D parte de la derivada espacial del calado $h(x, A)$:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial x} \quad (62)$$

y de las expresiones que cumplen I_1 e I_2 :

$$\frac{\partial I_1}{\partial x} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial I_1}{\partial A} = \frac{A}{B} \quad (63)$$

Mediante las expresiones (62) y (63), se obtiene:

$$\frac{dI_1}{dx} = I_2 + A \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial I_1}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial x} = I_2 + A \left[\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial x} \right] = I_2 + A \frac{dh}{dx} \quad (64)$$

por lo que el sistema de ecuaciones (2.3) se puede escribir sin hacer uso de los términos I_1 e I_2 :

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d}{dx} Q = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{dh}{dx} = g[A(S_0 - S_f)] \end{cases} \quad (65)$$

La segunda expresión del sistema de ecuaciones (65) se modifica para obtener el sistema de ecuaciones con el que se desarrolla la formulación adjunta:

$$\begin{cases} \mathcal{M}_1 = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \mathcal{M}_2 = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + c^2 \frac{dA}{dx} - gA \left[S_0 - S_f - \frac{dh}{dx} - \frac{1}{B} \frac{dA}{dx} \right] = 0 \end{cases} \quad (66)$$