Trabajo Fin de Máster

Introducción a los triángulos rectángulos y el Teorema de Pitágoras. Una propuesta para alumnos del primer ciclo de la ESO.

Introduction to right triangles and the Pythagorean Theorem. A proposal for students of the first cycle of ESO.

Autor

David Corbatón Isac

Director

Elena Gil Clemente

FACULTAD DE EDUCACIÓN

2021-2022

Índice

Tabla de ilustraciones

A. Definición del objeto matemático a enseñar

A.1 Objeto matemático a enseñar, curso y asignatura en la que sitúa el objeto.

El objeto matemático con el que voy a trabajar en este Trabajo Fin de Master (en adelante TFM) son los triángulos rectángulos y el Teorema de Pitágoras.

El objeto matemático presentado se trabajará en el primer ciclo de la Educación Secundaria Obligatoria de la asignatura de Matemáticas. Los alumnos por lo tanto tienen entre doce y catorce años.

Para poder realizar el estudio del objeto nos situaremos en el marco legislativo previo a la implantación progresiva de la LOMLOE, ECD/489/2016, del 26 de mayo, por la cual se aprueba el currículo de Educación Secundaria Obligatoria.

He elegido el objeto matemático por diversas razones. El trabajo con el Teorema de Pitágoras es uno de los recuerdos más perdurables en la memoria de muchos estudiantes y forma incluso parte de la cultura popular (Beltrán Pellicer, 2022). A pesar de que es uno de los objetos más fascinantes de la Educación Secundaria Obligatoria, el trabajo con él no va muchas veces más allá de un aprendizaje memorístico de la fórmula (Troyano y Flores, 2016). Abordar su estudio de una forma que permita desligarlo de ese uso mecánico de la fórmula me ha llevado a elegirlo como tema de mi Trabajo Fin de Máster. Es muy importante ver qué significa el teorema para poder elegir las tareas matemáticas con que enseñarlo. Para explicar el teorema de forma que los alumnos lo entiendan, sepan cuando pueden emplearlo y lo apliquen el profesor debe disponer previamente de una idea lo más completa y rica del mismo que sea posible.

A.2 ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En esta propuesta didáctica se presentarán los siguientes campos de problemas, técnicas y tecnologías:

Campos de problemas.

Los problemas que se abordaran a lo largo de las sesiones se pueden agrupar en los siguientes campos:

C.P.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos y reconocimiento de triángulos rectángulos.

C.P.2 Comprobaciones geométricas del Teorema de Pitágoras

C.P.3 Comprobación aritmética de la validez del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos y aplicación al reconocimiento de triángulos rectángulos

C.P.4 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo de distancias

C.P.5 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo de áreas y perímetros de figuras planas

C.P.6 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras a situaciones geométricas más complejas

Técnicas.

Las técnicas trabajadas en esta propuesta son las que se listan a continuación:

T.1 Trabajar con potencias cuadradas y raíces cuadradas.

T.2 Resolver ecuaciones de primer grado del tipo a + x = b

T.3 Calcular uno de los lados ya sea la hipotenusa o los catetos de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

T.4 Cálculo de las áreas de las figuras principales planas.

Tecnologías.

Las tecnologías necesarias para poder afrontar los diferentes campos de problemas son las siguientes:

TEC.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos.

TEC.2 Definición de la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo

TEC.3 Enunciado del Teorema de Pitágoras.

TEC.4 Definición de terna pitagórica.

B. Estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático

B.1 Referentes teóricos

Existen múltiples investigaciones en Educación Matemática o trabajos de innovación docente publicados en revistas y libros referentes al Teorema de Pitágoras y sus aplicaciones.

Las que he seleccionado, salvo una[1] que se analizará en el punto D de este TFM, se refieren a su enseñanza y el aprendizaje.

---

[1] González, 2008. El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4000 años. Sigma, 32, 103-130.

- Barrantes y Zamora (2021) presentan un estudio sobre el Teorema para Secundaria y dividen las demostraciones en “Geométricas” y “Algebraicas” usando un software de geometría dinámica como Geogebra. Han elegido 97 construcciones dinámicas y, dentro de Secundaria, han elegido 28 demostraciones del Teorema, 10 algebraicas y 18 geométricas. Las que se refieren a 1º ESO son las siguientes seis demostraciones. Véase Figura B.1.

1º ESO
1. Puzzle 1: Hipotenusa/cateto menor = 3
2. Puzzle 2: $30^\circ \leq A \leq 60^\circ$ y $30^\circ \leq B \leq 60^\circ$
3. Puzzle 3: Cateto mayor/cateto menor=2
4. Puzzle 4: Triángulo rectángulo isósceles
5. Puzzle 5: Lados 3, 4 y 5
6. Caso Particular (L. 4)

Figura B-1: Demostraciones Geométricas de 1º ESO del Teorema de Pitágoras.

Como ejemplo, la demostración número 3 (Puzzle 3) que se puede ver en la Figura B-2 sólo es válida si la división de cateto mayor entre el cateto menor es igual a 2.

Figura B-2: Demostración del Teorema con el cateto mayor entre el cateto menor igual a 2.

- Barreto (2008) muestra unas extensiones del Teorema en su forma geométrica, tomando como consideración el área de las figuras geométricas que se encuentran sobre los lados de un triángulo rectángulo y viendo que se cumple la relación pitagórica para cualquier tipo de figuras que tengan una cierta condición.
- Barrantes (1990) trocea las figuras geométricas de los cuadrados en forma de triángulos rectángulos. Comprueba que la suma de las áreas de los triángulos rectángulos de los cuadrados que vienen de los catetos del triángulo rectángulo principal es igual a la suma de las áreas de los triángulos rectángulo del cuadrado que viene de la hipotenusa.

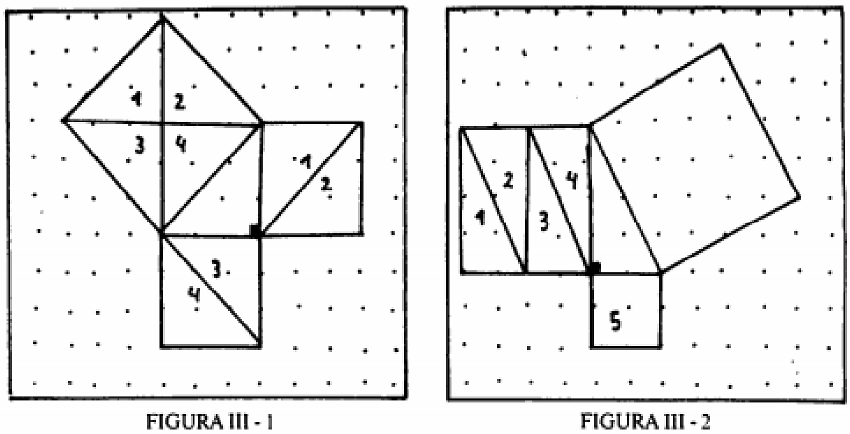


Figura B-3: Troceo de las figuras geométricas de los cuadrados en forma de triángulos rectángulos.

- El Grupo Alquerque (2003), de la misma forma que Barreto, realiza las demostraciones con puzles e incluso alguna con las piezas del Tangram chino.

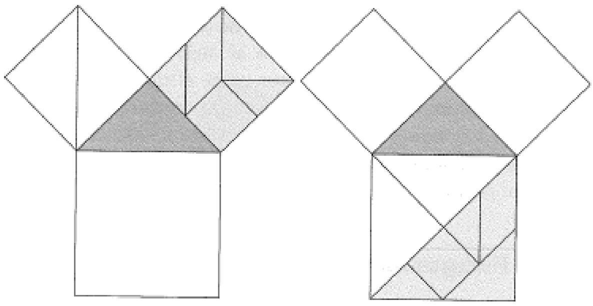


Figura B-4: Demostraciones del Teorema con Tangram.

- La estrategia didáctica mediante Geogebra del Grupo de Investigación GIMED en la cual nos intentan mostrar cómo facilita las TIC la enseñanza del Teorema y facilitan el aprendizaje. Su implementación en el aula se basa en una enseñanza integrada con las fases de aprendizaje de Van Hiele y las TIC.
- Beltrán-Pellicer (2022) revisa algunas de las propuestas de enseñanza del teorema en el aula y resultados de investigaciones y describe el diseño y la implementación de una propuesta didáctica para 2º de ESO apoyado en las producciones del alumnado.
- Iglesias (2017) enseñan en el aula a demostrar el teorema por medio de goma EVA a partir de demostraciones sin palabras del mismo construidas con Geogebra a través de una experiencia STEAM con un enfoque competencial y activo.
- Gutiérrez-Rubio, León-Mantero, Madrid-Martín y Sánchez-Compaña (2018) muestran el uso del Teorema a través de materiales manipulativos y el uso de una balanza para comparar áreas de figuras planas. Presentan una propuesta para el aula según la cual la geometría hay que verla, tocarla, construirla y manipularla. Nos demuestran, usando balanzas, que éstas se equilibran con formas cualesquiera con tal de que se pueda construir un triángulo rectángulo con sus bases.

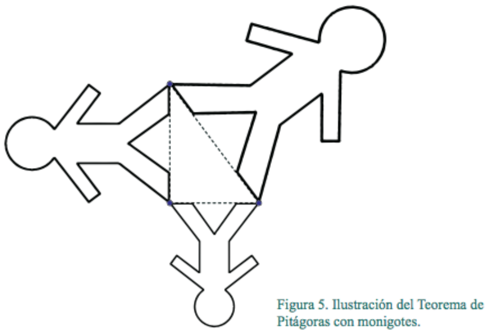


Figura B-5: Ilustración del Teorema con monigotes.

- Moreno, Alvarado, Angulo y Briceño (2020) investigan una experiencia en el aula con estudiantes de secundaria donde abordan una aproximación al estudio del teorema resignificando la relación entre los lados de un triángulo rectángulo.
- Troyano y Flores (2016) plantean una tarea para la comprensión del teorema y analiza la forma en la que los alumnos entienden Pitágoras y si su comprensión está muy ligada a la fórmula o no. Llevan a cabo una experiencia en un aula de 3º ESO para ver como los alumnos comprenden el teorema y la dividen en dos partes:
    - La primera trata de obtener las medidas de lados y las áreas de los cuadrados construidas sobre triángulos
    - La segunda es inversa, a partir de los dibujos y el cálculo de longitudes estudiar los tipos de triángulos de lados conocidos y formulación de varias maneras del teorema.

    Los objetos empleados en la tarea son los siguientes:

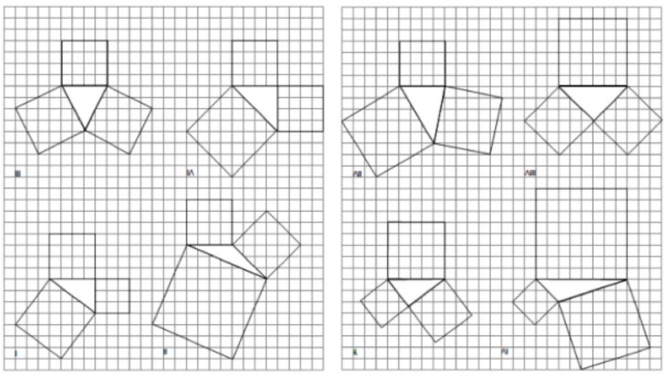


Figura B-6: Tarea realizada por Troyano y Flores (2016) para la comprensión del Teorema.

Para analizar su comprensión organizan los datos según los siguientes aspectos:

a. Medición de lados de los cuadrados
b. Relación entre áreas de cuadrados y tipos de triángulo
c. Construcción de cuadrados sobre lados de triángulos
d. Diversidad de los enunciados del teorema de Pitágoras

B.2 Análisis curricular

El teorema de Pitágoras es uno de los contenidos matemáticos más conocidos para las personas que han realizado la escolarización obligatoria. Acudiré a la normativa para ver donde se encuentra ubicado el teorema.

Para poder realizar el estudio del objeto nos situaremos en el marco legislativo previo a la implantación progresiva de la LOMLOE, ECD/489/2016, del 26 de mayo, por la cual se aprueba el currículo de Educación Secundaria Obligatoria.

Aparece por primera vez en el bloque de geometría en 1º y 2º ESO con el siguiente enunciado con respecto al contenido:

Contenido de 1º ESO:

Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones directas.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para el contenido anterior son los siguientes:

Crit.MA.3.3. *Reconocer el significado aritmético del teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.*

Contenido de 2º ESO:

Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

Los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje para el contenido anterior son los siguientes:

Crit.MA.3.3. Reconocer el significado aritmético del teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.

> Est.MA.3.3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.
>
> Est.MA.3.3.2 Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos o en contextos reales.

Hasta 4º ESO no vuelve a aparecer con el siguiente contenido:

Figuras semejantes. Teoremas de Tales y Pitágoras. Aplicación de la semejanza para la obtención indirecta de medidas.

Sus criterios de evaluación y estándares de aprendizaje son los siguientes:

Criterio 1. *Calcular magnitudes efectuando medidas directas e indirectas a partir de situaciones reales, empleando los instrumentos, técnicas o fórmulas más adecuadas, y aplicando, así mismo, la unidad de medida más acorde con la situación descrita.*

Estándar 1.4. *Calcula medidas indirectas de longitud, área y volumen mediante la aplicación del teorema de Pitágoras y la semejanza de triángulos.*

Hemos optado por hacer una propuesta completa para alumnos de primer ciclo de ESO que puede ser aplicada tanto en primero como en segundo de ESO, en función de la organización docente.

B.3 Análisis de libros de texto

Para poder extraer de una forma más global conclusiones voy a analizar uno de los recursos didácticos más utilizados por los docentes españoles, los libros de texto. Me permitirán tener una visión más amplia sobre el Teorema de Pitágoras. En concreto, he escogido cuatro libros de editoriales españolas, tres de ellos correspondientes a editoriales muy habituales en los centros educativos, dos de SM (uno bastante actual y otro de diferente ley educativa con una diferencia entre ambos de casi 40 años), uno de Anaya y el otro de Marea Verde (ver Tabla 1). Todos ellos son de 2º ESO, porque es el curso donde las propuestas aparecen más desarrolladas. Analizaré la presentación teórica, las demostraciones del teorema si las hubiera, así como el campo de problemas y ejercicios presentados.

Editorial	Curso	Autores	Año
Anaya	2ºESO	J.Colera Jiménez, I.Gaztelu Albero, R.colera Cañas	2017
SM	2ºESO	Miguel Nieto Antonio Pérez Fernando Alcaide	2016
Marea Verde	2ºESO	Javier Rodrigo Raquel Hernández José Antonio Encabo	2014
SM	8ºEGB	Jacinto Martínez Ugartemendía	1977

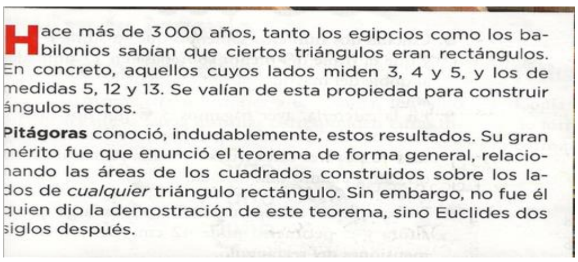
Tabla 1: Listado de libros utilizados para la comparación. Cada libro consta de su editorial, el curso, los autores y el año de publicación.

Los cuatro libros analizados tienen un patrón bastante similar para cada una de las unidades:

1) Introducción: muestra curiosidades históricas o actuales acerca de los contenidos que se aprenderán en el tema. Resalta algunas utilidades de la vida cotidiana que tiene el tema.
2) Desarrollo: se encuentra formado por diversos apartados o subapartados donde se desarrolla la teoría del tema. Cada uno de los apartados tiene unos contenidos y procedimientos usados a lo largo de la unidad y ejercicios resueltos utilizados como referencia.
3) Actividades, ejercicios y problemas para resolver: se encuentran organizados por contenidos y cada uno de ellos consta de un icono que señala su grado de dificultad.
4) Resumen y/o autoevaluación: este punto varía dependiendo el libro de texto, en el libro de SM más moderno antes de las actividades a realizar hay un resumen del tema, posteriormente el punto 3 anteriormente citado y luego ejercicios más complicados y una parte de autoevaluación, en los libros de Anaya y Marea Verde no hay resumen, pero si autoevaluación y en el de SM más antiguo no existe directamente este punto.

B.3.1. Editorial Anaya, 2017

Anaya es una de las editoriales españolas más conocidas y tiene un tema entero para el Teorema de Pitágoras, el tema 9. Consta de 15 páginas para introducir el objeto matemático tratado sin ninguna justificación previa. El tema anterior habla de sistemas de ecuaciones. El tema 9 consta de 3 partes, el enunciado del propio teorema, aplicaciones directas de un lado conociendo los otros dos y aplicaciones para el cálculo de áreas. Al final, ejercicios y problemas, un taller de matemáticas y una autoevaluación. En la carta de presentación una historia muy breve sobre los babilonios y egipcios y un breve apunte al descubridor del Teorema, Pitágoras y al que lo demostró, Euclides.


Hace más de 3000 años, tanto los egipcios como los babilonios sabían que ciertos triángulos eran rectángulos. En concreto, aquellos cuyos lados miden 3, 4 y 5, y los de medidas 5, 12 y 13. Se valían de esta propiedad para construir ángulos rectos.

Pitágoras conoció, indudablemente, estos resultados. Su gran mérito fue que enunció el teorema de forma general, relacionando las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados de *cualquier* triángulo rectángulo. Sin embargo, no fue él quien dio la demostración de este teorema, sino Euclides dos siglos después.

Figura B-7: Historia introductoria al Teorema de Pitágoras. (ANAYA, 2017)

Esta es la demostración basada en los Elementos de Euclides.

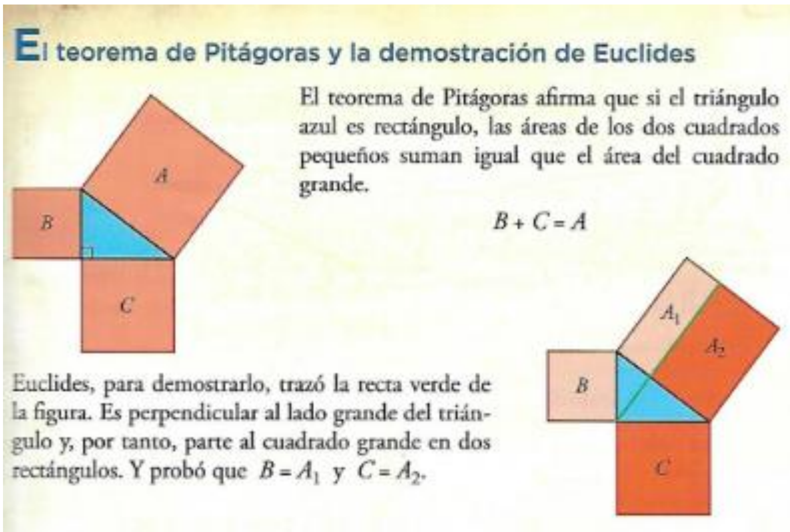


Figura B-8: Demostración del teorema de Euclides. (ANAYA, 2017)

El libro no recoge ninguna actividad formativa que se base en las TIC.

B.3.2. Editorial SM,2016

Este libro habla sobre el objeto didáctico en el Tema 9, aunque el tema es compartido con las longitudes y medidas. Hay once páginas dedicadas al enunciado del Teorema, sus aplicaciones, problemas, ponte a prueba y autoevaluación. El teorema se introduce sin una justificación previa. La introducción del tema alude a un ejemplo de uso del teorema, en las pantallas de televisión.

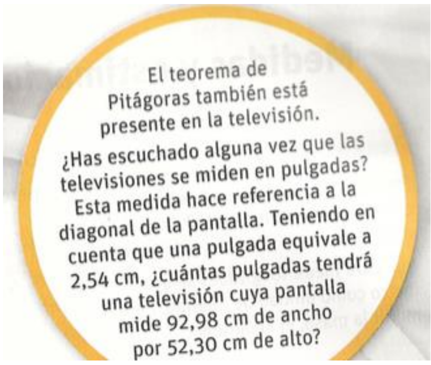


Figura B-9: Aplicación del teorema en las pantallas de televisión. (ANAYA, 2017)

Después de una explicación de que son los triángulos rectángulos, cómo se llama cada uno de sus lados y en que consiste el teorema, se da una demostración de éste de forma geométrica.

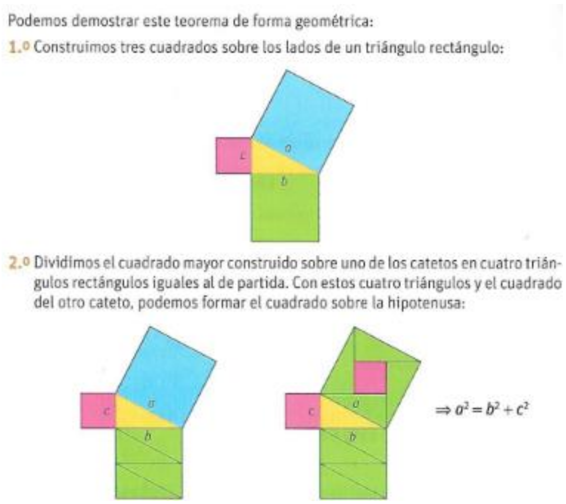


Figura B-10: Demostración geométrico-aritmética del teorema. (ANAYA, 2017)

Una de las ventajas de este libro es que nos proporciona un enlace web para ver otras demostraciones del teorema.

B.3.3. Edición Marea Verde, 2014.

En la página de Marea Verde[2] el teorema de Pitágoras se trata en el capítulo 6: longitudes y áreas y está orientado al cálculo de perímetros y áreas de figuras planas. Se introduce el tema sin una justificación previa. Sobre el teorema solo se hablan dos páginas de teoría y algunas actividades propuestas, una página sobre las curiosidades del teorema y otras dos de más ejercicios. Sigue un esquema parecido a los otros libros y después de la explicación del teorema nos muestra una comprobación gráfica (ver Figura B-11). Resulta destacable observar que, aun siendo el tema de longitudes y áreas, el tema no hace ninguna referencia a una de las aplicaciones del teorema como es el cálculo de áreas de figuras planas.

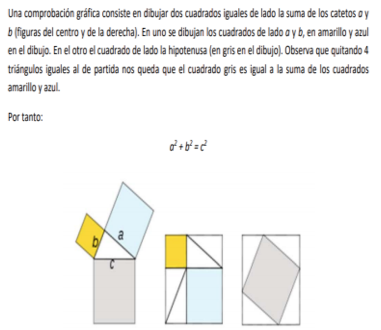


Figura B-11: Comprobación gráfica del teorema. (MAREA VERDE, 2014)

[2] Marea Verde es un grupo de trabajo de profesores de enseñanza pública que han elaborado unos materiales curriculares de forma gratuita para todo el que quiera acceder. Cómo los currículos oficiales se establecen por medio de las administraciones educativas, en este libro hay diferencias entre unas comunidades y otras.
Su página web es: https://www.apuntesmareaverde.org.es/

B.3.4. Editorial SM, 1977.

Como era de esperar, este es el libro más diferente con respecto a los otros, debido a los más de 35 años de diferencia con el resto y que en aquella época la ley educativa era distinta. Es en el tema 23, el último, el que habla sobre “Relaciones métricas en el triángulo rectángulo” en el que se encuentran un par de hojas de teoría sobre Pitágoras y ejercicios resueltos y posteriormente un par de páginas de actividades a realizar. La justificación previa que nos lleva al conocimiento del teorema habla sobre la semejanza de triángulos en el tema anterior para llevarnos posteriormente a explicar el teorema del cateto que es que le sirve al libro para conseguir Pitágoras. Resulta muy sorprendente este tipo de demostraciones para unos alumnos de 8º de EGB.

La altura sobre la hipotenusa divide al triángulo rectángulo en otros dos semejantes entre sí y al dado.

Hipótesis: El triángulo *ABC* es rectángulo. Ángulo recto = $\hat{A}$. La altura *AE* es perpendicular a *BC*.

Tesis: Demostrar que *AEB* ~ *AEC* ~ *ABC* (fig. 23.3)

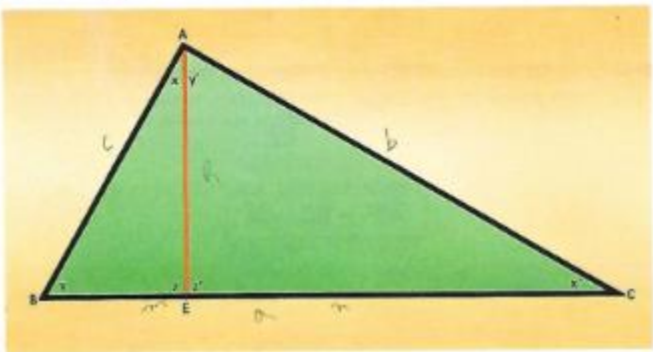


Fig. 23.3

Demostración:

1.º **AEB** ~ **AEC** por el *primer caso de semejanza:*

$\hat{z} = \hat{z}'$ por ser *AE* perpendicular a *BC* (son rectos los dos);

$\left.\begin{array}{l}\hat{y} = \hat{y}' \\ \hat{x} = \hat{x}'\end{array}\right\}$ por tener sus lados perpendiculares.

2.º **AEB** ~ **ABC**, por el *primer caso de semejanza:*

$\hat{A} = \hat{z}'$ ambos son rectos;

$\hat{B} = \hat{y}'$ común;

$\hat{x} = \hat{x}'$ por tener sus lados perpendiculares.

3.º **AEC** ~ **ABC**, por el *primer caso de semejanza:*

$\hat{A} = \hat{z}'$ ambos son rectos;

$\hat{C} = \hat{x}'$ común;

$\hat{y} = \hat{y}'$ por tener sus lados perpendiculares.

Figura B-12: Comienzo de la demostración del teorema. (SM,1977)

23.4. Teorema del cateto

De la semejanza de los triángulos *AEB* y *ABC* (fig. 23.3) resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$$

O sea:

$$\boxed{\overline{AB}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BE}} \qquad [2]$$

De la semejanza de los triángulos *ABC* y *AEC* (fig. 23.3) resulta:

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CE}}$$

O sea:

$$\boxed{\overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{CE}} \qquad [3]$$

Cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre la hipotenusa.

Figura B-13: Continuación de la demostración del teorema por medio del teorema del cateto. (SM, 1977)

23.6. Teorema de Pitágoras

Sumando las igualdades [2] y [3], resulta:

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{BE} + \overline{BC} \cdot \overline{CE} = \overline{BC}(\overline{BE} + \overline{CE}) = \overline{BC} \cdot \overline{BC}$$

Figura B-14: Finalización de la demostración. (SM, 1977)

B.4 ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En los libros de texto que he analizado se ve que la gran mayoría de los problemas se encuentran al final del tema, aunque se puede apreciar un cambio de los libros de texto de estos últimos años ya que, en los dos libros más modernos, de SM y Anaya hay también algunas actividades para realizar después de cada apartado del tema. Hay un gran predominio de ejercicios que se basan la mayor parte en repetir una técnica. Como referencia, emplearé la clasificación que realiza Blanco (1993) de los diferentes tipos de problemas, ocho en total:

- Campos de problemas de reconocimiento.
- Campos de problemas de ejercicios algorítmicos o de repetición, que pueden resolverse con un proceso algorítmico.
- Campos de problemas de traducción simple o compleja, de traducción de un contexto matemático a una expresión matemática.
- Campos de problemas de procesos que se diferencian de los anteriores en que la forma de cálculo no aparece claramente delimitada.

- Campos de problemas sobre situaciones reales que plantean actividades lo más cercanas posibles a situaciones reales.
- Campos de problemas de investigación matemática.
- Campos de problemas de puzles en los que se muestra el potencial recreativo de las Matemáticas.
- Campos de problemas de historias matemáticas, en los que, en libros, cuentos, historias, etc. encontramos propuestas que implican un concepto matemático.

Los campos de problemas incluidos en los libros de texto son los siguientes:

C.P.1 Clasificación de triángulos según los ángulos.

C.P.2 Demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras.

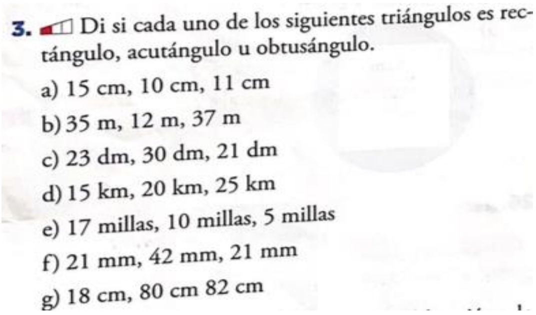
C.P.3 Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

C.P.4 Aplicación del Teorema de Pitágoras a problemas contextualizados.

C.P.5 Investigación sobre problemas geométricos más complejos

Para reflejar la existencia de los anteriores campos de problemas mostraremos ejemplos de todos ellos en los libros de textos referenciados:

C.P.1 Clasificación de triángulos según los ángulos.



3. Di si cada uno de los siguientes triángulos es rectángulo, acutángulo u obtusángulo.

a) 15 cm, 10 cm, 11 cm
b) 35 m, 12 m, 37 m
c) 23 dm, 30 dm, 21 dm
d) 15 km, 20 km, 25 km
e) 17 millas, 10 millas, 5 millas
f) 21 mm, 42 mm, 21 mm
g) 18 cm, 80 cm 82 cm

Figura B-15: Problema de clasificación de triángulos. (ANAYA, 2017)

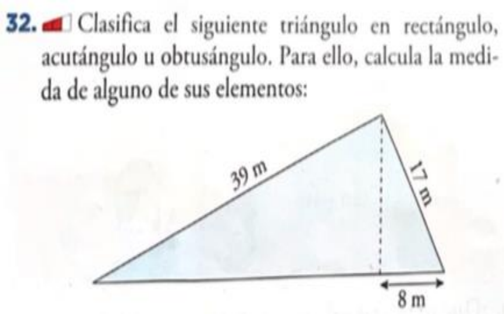


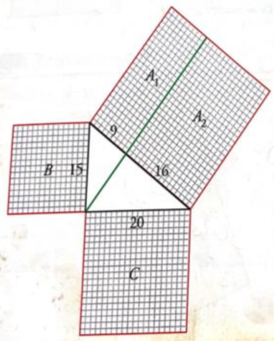
Figura B-16: Problema de clasificación de triángulos. (ANAYA, 2017)

3. Dibuja un triángulo que no sea rectángulo, que sea acutángulo y comprueba que no verifica el teorema de Pitágoras. Dibuja ahora uno que sea obtusángulo, y de nuevo comprueba que no lo verifica. Razona la respuesta.

Figura B-17: Problema de clasificación de triángulos mediante dibujo. (ANAYA, 2017)

C.P.2 Demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras.

■ Comprueba en esta figura la propiedad anterior. Para ello:



a) ¿Cuántos cuadraditos tiene el cuadrado pequeño, *B*? Comprueba que son los mismos que los del rectángulo A_1.

b) Comprueba que el número de cuadraditos del cuadrado *C* coincide con el de A_2.

c) Enuncia la propiedad.

Figura B-18: Demostración geométrica del teorema. (ANAYA, 2017)

C.P.3 Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

21. Halla el área y el perímetro en cada una de las siguientes figuras:

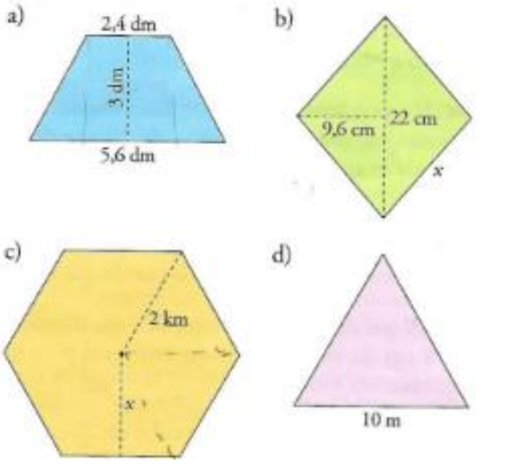


Figura B-19: Problema para realizar el cálculo de áreas y perímetros de figuras. (ANAYA, 2017)

24.

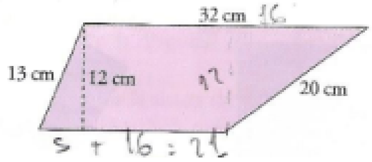


Figura B-20 Figura geométrica

C.P.4 Aplicación del Teorema de Pitágoras a problemas contextualizados.

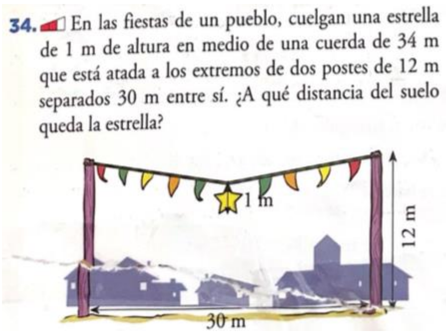

34. En las fiestas de un pueblo, cuelgan una estrella de 1 m de altura en medio de una cuerda de 34 m que está atada a los extremos de dos postes de 12 m separados 30 m entre sí. ¿A qué distancia del suelo queda la estrella?

Figura B-21 Problema contextualizado de aplicación del teorema. (ANAYA, 2017)


33. Un poste de 14,5 m de alto se quiebra por su base y cae sobre un edificio que se encuentra a 10 m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea?

Figura B-22: Problema contextualizado de aplicación del teorema. (ANAYA, 2017)

C.P.5 Investigación sobre problemas geométricos más complejos

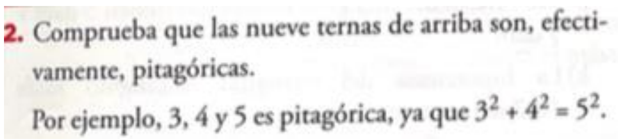

2. Comprueba que las nueve ternas de arriba son, efectivamente, pitagóricas.
Por ejemplo, 3, 4 y 5 es pitagórica, ya que $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Figura B-23: Problema sobre comprobación de ternas pitagóricas. (ANAYA, 2017)


46. Si vuelas en un avión a 10 000 m de altura, ¿a qué distancia se encuentra el punto más alejado que puedes ver en el horizonte?
Radio de la Tierra: 6371 km

Figura B-24: Vuelo del avión sobre la Tierra

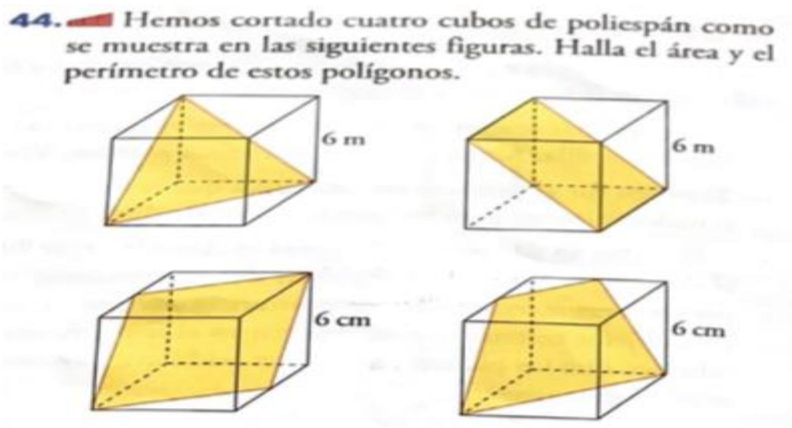


Figura B-25: Figuras geométricas cortadas de poliespán.

Algunas de las técnicas que se aplican para resolver los campos de problemas anteriores son las siguientes:

T.1 Trabajar con potencias y raíces cuadradas.

T.2 Conocer lo que significa y representa una ecuación y saber despejar los elementos de una ecuación.

T.3 Cálculo de las áreas de las figuras principales planas mediante triangulación.

Las tecnologías que se utilizan en los libros de texto son las siguientes:

TEC.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos.

TEC.2 Definición de la hipotenusa y los catetos para un triángulo rectángulo.

TEC.3 Enunciado del Teorema de Pitágoras

TEC.4 Definición de terna pitagórica.

Las demostraciones del TP en este nivel son abordadas como problemas y no como tecnologías.

Más adelante, para referirme a los campos de problemas, técnicas y tecnologías anteriores pasaré a llamarlos C.P., T. y TEC. y el número correspondiente.

B.5 Dificultades y errores de los estudiantes al trabajar con el objeto matemático.

Uno de los trabajos de los profesores es guiar a los estudiantes en el aprendizaje partiendo de sus errores y llevándolos hacia un conocimiento matemático.

Los errores reflejan una serie de dificultades a partir de la forma en la que los docentes transmiten los contenidos a los estudiantes, los conocimientos adquiridos anteriormente por éstos, los conceptos y su dificultad, etc. También es cierto, que los estudiantes pueden aprender y comprender, a partir de sus errores, conceptos que en momentos anteriores no comprendían. Por esto, es muy importante, intentar prever los errores y tenerlos muy en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Troyano y Flores (2016), en su estudio sobre el teorema de Pitágoras, muestran las principales dificultades y errores percibidas por los alumnos al trabajar con él y vamos a hacer un recorrido por ellos, ejemplificándolos con algunas producciones de alumnos de 1º ESO durante mi Practicum, en el que impartí la unidad didáctica del Teorema de Pitágoras.

B.5.1 Dificultades

Entre las dificultades de aprendizaje, sus investigaciones muestran las siguientes:

- Complejidad al apreciar la doble implicación entre condiciones y relaciones numéricas
- Identificación de triángulos rectángulos cuando sus catetos no son paralelos a los bordes del papel,
- Relacionar los enunciados analíticos y geométricos del teorema de Pitágoras
- Representación mediante letras de la longitud de un lado o de la hipotenusa del triángulo.
- Problemas en el entendimiento del propio teorema.

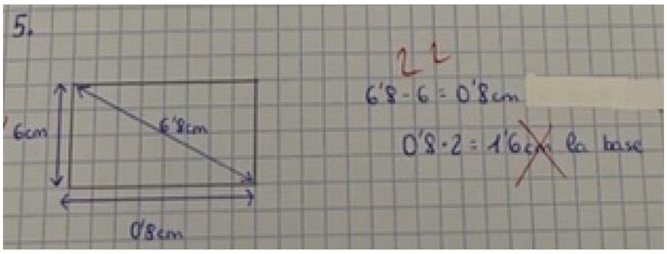


Figura B-26 Mal entendimiento del teorema.

- Aprendizaje a corto plazo y no partiendo de conocimientos anteriores.

B.5.2 Errores

Como consecuencia de estas dificultades surgen errores como son:

- Intentar aplicar el teorema de Pitágoras a cualquier triángulo, sin pensar ni comprobar previamente si se le puede aplicar.
- Construir cuadrados sobre los lados de un triángulo sin que sus lados sean perpendiculares o tengan la misma longitud.
- Realizar los cálculos, pero no escribir la conclusión a la que se ha llegado con dichos cálculos.

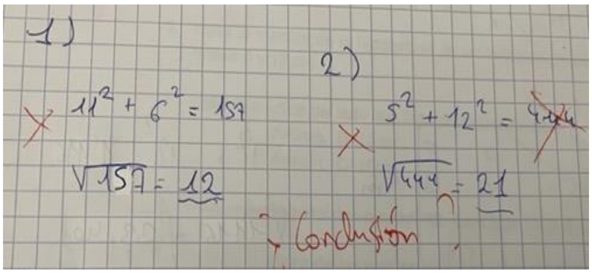


Figura B-27 Conclusión sin escribir

- Aplicación del teorema de forma incorrecta, sin diferenciar los catetos y la hipotenusa.

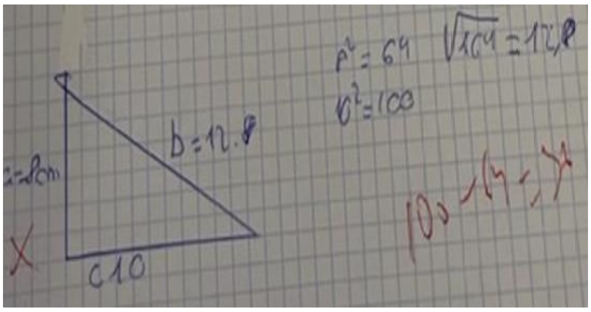


Figura B-28 Error de cálculo

- Errores de cálculo al despejar

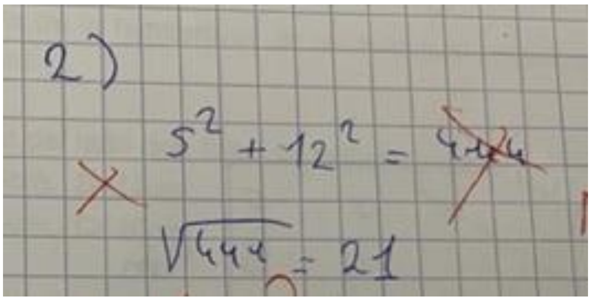


Figura B-29 Error de cálculo

- Tomar como válida una solución errónea.

B.6 Conclusiones e implicaciones para la enseñanza

Como he mencionado en el análisis de las características de los libros de texto, todos tienen una estructura bastante similar donde sobre todo predomina el introducir conceptos a través de una metodología magistral orientada hacia la automatización.

Esta forma de expresar los contenidos provoca en los alumnos un aprendizaje memorístico, sin ningún tipo de reflexión ni justificación en la forma de resolución a seguir. Lleva a los alumnos a una memorización de pasos, a estudiar la “receta” y aplicarla cuando sea necesario.

Todo eso me lleva a realizar una propuesta didáctica en la que intentaré plantear el

Teorema de Pitágoras, a través de su significado y demostración y trabajando aplicaciones no triviales del mismo.

C. Conocimientos previos del alumno

C.1 ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Para afrontar con garantías el buen aprendizaje del Teorema de Pitágoras es necesario que los alumnos hayan aprendido y explorado con anterioridad los siguientes conocimientos:

- Manejo de las operaciones aritméticas básicas.
- Cuadrados y raíces cuadradas de números racionales.
- Sistemas de medida y sus unidades.
- Resolución de ecuaciones de primer grado del tipo $a + x = b$.
- Elementos básicos de la geometría en el plano: segmentos, ángulos.
- Conocimiento de las figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Descomposición de figuras planas en otras más sencillas
- Clasificación de triángulos según sus ángulos
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas mediante descomposición.

Los conocimientos previos anteriores son de los bloques de contenidos comunes, álgebra y geometría.

C.2 La enseñanza anterior, ¿ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Si analizamos los libros de texto de los cursos anteriores se puede observar que aparece la estructura contada anteriormente. Evidentemente, no es posible afirmar que el alumno haya adquirido o no los conocimientos previos sin haber realizado una prueba previa ya sea evaluativa o no o haya existido un período de observación previo por parte del docente que pueda asegurar que la asimilación y retención de los conceptos se ha producido de forma satisfactoria.

El currículo intenta o trata de alguna forma garantizar para los alumnos unas competencias básicas mínimas que permitan avanzar a cada uno en sus diferentes etapas educativas, es decir que los objetivos del currículo son referentes relativos a los logros que el estudiante debe alcanzar al finalizar cada etapa, como resultado de las experiencias de enseñanza-aprendizaje intencionalmente planificadas a tal fin.

A pesar de todo lo anterior, lo más conveniente será plantear una primera sesión para ver lo afianzados que se encuentran los conceptos para los alumnos.

C.3 ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Tal como se ha venido comentando en el punto anterior, la primera sesión o sesión inicial comprenderá tres partes diferenciadas y su duración será de 50 minutos. La prueba inicial no servirá para la evaluación del tema, pero sí que será nominativa para que el docente pueda conocer las limitaciones personales en un ámbito de atención personalizada, aunque luego las principales conclusiones obtenidas a partir de la prueba sean globales.

El formato de la prueba inicial es la prueba escrita siguiente:

1. Cuenta lo que sabes sobre todo lo relacionado con los triángulos.
2. Escribe un problema en el que aparezcan tres triángulos diferentes.[3]
3. Resuelve los siguientes problemas.
    3.1. Un cine de verano dispone de 625 sillas distribuidas en igual número de filas y de columnas. ¿Cuántas sillas hay en cada fila?
    3.2. Una finca cuadrada tiene 900 metros cuadrados de superficie. ¿Cuántos metros lineales de alambrada habría que comprar para cercarla?
    3.3. Pedro tiene seis bolsillos con seis llaveros en cada uno y en cada llavero hay seis llaves. ¿Cuántas llaves tiene Pedro?
    3.4. Busca el número tal que:
        a) Al sumarlo a 25 da 37.
        b) Al restarlo a 47 de 28.
    3.5. Descomponer un hexágono regular en 6 triángulos iguales. ¿Qué relación hay entre sus áreas?
    3.6. Halla el área y el perímetro de la siguiente figura sabiendo que lado mide 5 cm.

[3] Las dos primeras partes de la prueba inicial se encuentran inspiradas en la siguiente cita y apelan a la implicación personal del alumno en su proceso de aprendizaje.

> *"Estoy seguro de que todo el mundo sabe algo relacionado con las matemáticas y de que a diario se os plantean problemas que tienen que ver con ellas. Por eso, en una cara de un folio me vais a contar algo que sepáis de matemáticas (acorde con vuestro nivel) y en la otra cara me vais a proponer un problema."* (Mercado, 2007 p.33)

D. Razones de ser del objeto matemático

D.1 Razones de ser históricas que dieron origen al objeto matemático.

Se buscan en este apartado las razones de ser históricas para utilizar y aplicar el Teorema de Pitágoras en diferentes culturas. Dicho Teorema ha sido unos de los más útiles, conocidos y populares en casi todas las civilizaciones y ha causado admiración en matemáticos y no matemáticos.

Haremos un recorrido sobre la forma de comprender la relación entre la longitud de los lados en un triángulo rectángulo en distintas civilizaciones antiguas (Babilonia, India, Grecia) de la mano de Pedro Miguel González Urbaneja (2008). El autor nos cuenta que es posible que la prueba pitagórica del teorema puede haber sido la primera demostración verdaderamente matemática de la Historia. Ha sido la base de múltiples teoremas geométricos, entre los que podríamos nombrar la fórmula $\cos^2 \alpha + \text{sen}^2 \alpha = 1$ o el teorema del coseno, que no deja de ser una generalización del mismo.

D.1.1 El Teorema en Babilonia

En casi trescientas tablillas de arcilla con textos cuneiformes apareció contenido matemático. Una de las que sobresale es la tablilla YALE, en la cual figura un cuadrado con los triángulos rectángulos resultantes de trazar las diagonales y varios números escritos en el sistema de numeración sexagesimal babilónico. Traduciendo estos números al sistema decimal se observa su relación con el Teorema.

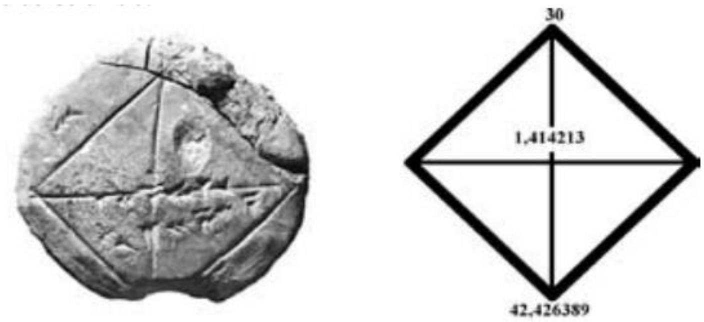


Figura D-1 Tablilla YALE de 1600 a.C. Universidad de Yale.

La relación aritmética entre los números que se muestran en la tablilla YALE es un caso particular de una aplicación implícita y empírica del Teorema.

D.1.2 El Teorema en Egipto

Aunque en los famosos papiros de Rhind y de Moscú no se menciona el Teorema, los egipcios conocían y utilizaban un triángulo de lados 3, 4 y 5 o proporcional a esos números. El triángulo anterior, llamado “Triángulo egipcio”, es rectángulo y servía para que los agrimensores recuperaran las fronteras de los lindes de las tierras tras los períodos de corrimientos de tierras del Río Nilo.

La mayoría de las pirámides incorporan de alguna forma este triángulo en su construcción, el cual, aparte de su sencillez, incorpora el hecho de ser el único cuyos lados son números consecutivos.

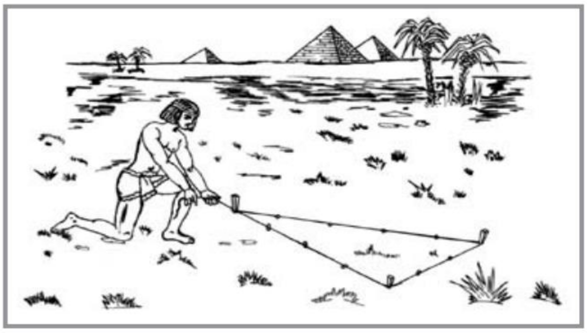
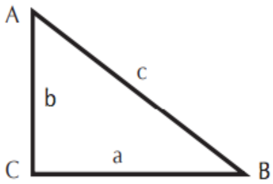


Figura D-2 Agrimensores egipcios utilizando el triángulo rectángulo.

D.1.3 El Teorema en La India

Entre los siglos octavo y segundo a.C. se desarrollaron en la India conocimientos aritmético-geométricos. Este saber fue conocido como “Sulvasutras” o “Manual de las reglas de la cuerda”. Los Sulvasutras más interesantes describen el uso de la cuerda no sólo para medir, sino también para el trazado de líneas perpendiculares, por medio de cuerdas cuyas longitudes forman ternas pitagóricas.

c - b = 1			c - b = 2			c - b = 3		
a	b	c	a	b	c	a	b	c
3	4	5	8	15	17	15	36	39
5	12	13	12	35	37			
7	24	25						



Ternas pitagóricas de los hindúes

Figura D-3 Ternas pitagóricas de los hindúes.

D.1.4 El Teorema en China

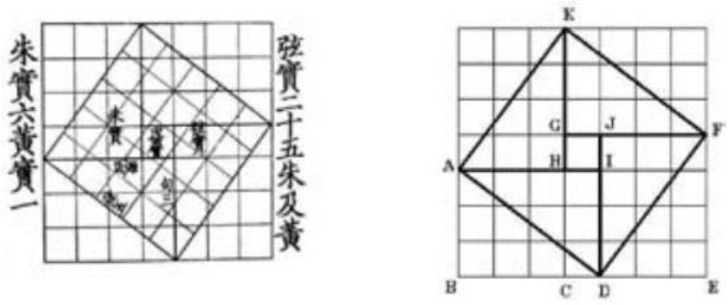
En dos tratados chinos, el Chou Pei Suan Ching y el Chui Chang Suang Shu, de contenido matemático se tratan los aspectos primitivos del teorema.

En el tratado Chou Pei se muestra una figura llamada “Diagrama de la hipotenusa”. El hexágono AHGFEB se compone de dos cuadrados AHCB y CEFG cuyos lados son los catetos de un triángulo rectángulo. Dicha área es equivalente al cuadrado ADFK de donde resulta el teorema.

En el otro tratado, el Chui-Suang, hay 246 problemas de los que 24 son sobre triángulos rectángulos y todas las soluciones se basan en el teorema. El problema más conocido de todos estos es el siguiente:

"Hay un bambú de diez pies de altura, que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. Se pide calcular a qué altura se ha producido la rotura".

El problema anterior combina un par de temas, ya que combina Pitágoras con la resolución de una ecuación cuadrática.



El Diagrama de la hipotenusa del tratado *Chino Chou-Pei Suan-Ching* (300 a.C.)

Figura D-4 El diagrama de la hipotenusa del tratado Chino Chou-Pei Suan-Ching

D.1.5 El teorema en Grecia

González Urbaneja (2008) expone las demostraciones del Teorema que se propusieron en la cultura griega atribuidas a dos personajes: Pitágoras y Euclides y expone un método propuesto por Platón para la obtención de ternas pitagóricas

D.1.5.1 Las demostraciones de Pitágoras

Pitágoras de Samos vivió entre los años 572 a 497 A.C. Ha habido muchas conjeturas en torno a la naturaleza de las presuntas pruebas de Pitágoras del Teorema asociado con su nombre.

La mayoría de los historiadores admiten que la demostración de Pitágoras se basa en su propia Teoría de las Proporciones. Se propone el siguiente planteamiento (ver figura D-5): sea ABC un triángulo rectángulo con el ángulo recto en A, y sea AD perpendicular al lado BC. Según la Proposición VI.8 de Los Elementos de Euclides, los triángulos DBA y DAC son ambos semejantes con el triángulo ABC y, por tanto, semejantes entre sí.

A partir de aquí, se conjetura con que la prueba de Pitágoras podría haber sido ser cualquiera de las dos siguientes:

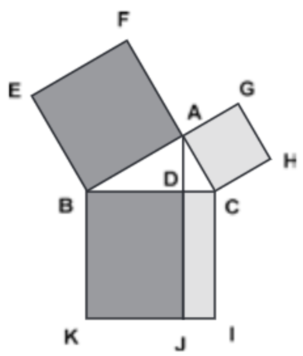


Figura D-5 Triángulo rectángulo ABC utilizado por Pitágoras.

D.1.5.1.1 Prueba 1

Trabajando con la semejanza de los triángulos ABC, DBA y DAC resulta:

$BA/BD = BC/BA$, $AC/CD = BC/AC$. (Elementos, VI.4)

Se obtienes de aquí las expresiones del llamado "Teorema del cateto":

$$BA^2 = BD*BC,\ AC^2 = CD*BC$$

Si las sumamos se muestra que

$$BA^2 + AC^2 = (BD+CD) *BC = BC*BC = BC^2$$

Entonces $BA^2 + AC^2 = BC^2$

En esta demostración del Teorema de Pitágoras, basada en el Teorema del cateto, se descompone, de forma implícita, el cuadrado sobre la hipotenusa, BCIK, en dos rectángulos, BDJK y DCIJ, cada uno de ellos con la misma área que cada uno de los cuadrados construidos sobre los catetos ya que $BA^2= BD\cdot BK$ y el rectángulo DCIJ de área como el cuadrado ACHG sobre el cateto AC, ya que $AC^2= CD\cdot CI$.

D.1.5.1.2 Prueba 2

Partiendo de la misma semejanza de triángulos ABC, DBA y DAC resulta que, según Elementos VI.19[4]

$DBA/AB^2 = DAC/AC^2 = ABC/BC^2$

De las propiedades de la suma de las proporciones sale:

$ABC/BC^2 = DBA/AB^2 = DAC/AC^2 = (DBA+DAC) /(AB^2+AC^2) = ABC/ (AB^2 +AC^2)$

Por lo tanto: $AB^2 + AC^2 = BC^2$

Estas pruebas del Teorema de Pitágoras siguen en plena vigencia en algunos libros escolares actuales.

D.1.5.2 Demostraciones atribuidas a Euclides

El libro I de los Elementos de Euclides acaba con el Teorema de Pitágoras y su recíproco. El maestro alejandrino demuestra el Teorema de una forma magistral y sumamente bella. Euclides enunció el Teorema en ese momento de la siguiente manera:

"En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es equivalente a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto".

Como no puede utilizar las proporciones en forma pitagórica ya que necesitan de la aplicación de la semejanza, para la demostración emplea elementos muy simples de la Geometría elemental como son:

- La construcción de cuadrados sobre los segmentos
- Los ángulos adyacentes suman dos rectos

[4] "la razón entre las áreas de los triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de semejanza"

- La relación entre triángulos y paralelogramos que tienen la misma base y se encuentran entre rectas paralelas.

La demostración del Teorema que realizó Euclides fue la siguiente:

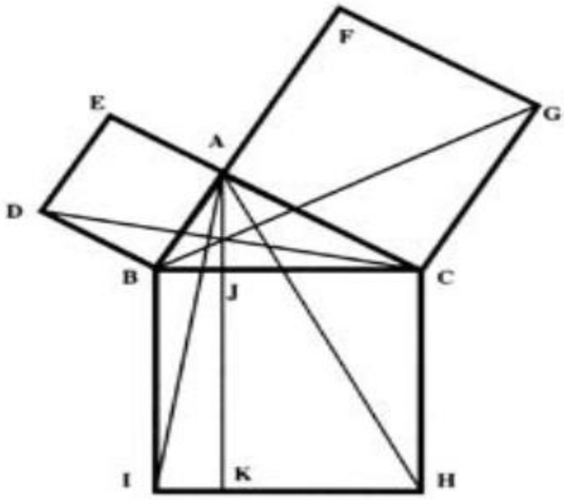


Figura D-6 Demostración del teorema de Euclides.

- Los triángulos DCB y ABI son iguales porque AB = BD y BI = BC. El ángulo B del triángulo DCB es el mismo que el ángulo B del triángulo ABI.
- El área del cuadrado ABDE es doble del área del triángulo DCB.
- El área del rectángulo BIKJ es doble del área del triángulo ABI.

Entonces, resulta que el área del rectángulo BIKJ es igual al área del cuadrado ABDE. De la misma forma, el área del rectángulo CHKJ es la misma que la del cuadrado ACGF. Luego, ya que el área del cuadrado BIHC es la misma que la suma de las áreas de los rectángulos BIKJ y CHKJ, entonces, el área del cuadrado en el que el lado subtiende el ángulo recto, BIHC, es igual la suma de las áreas de los cuadrados ABDE y ACG.

La demostración anterior euclídea es puramente geométrica. Las siguientes son algunas de las ilustraciones del Teorema realizadas por Euclides.

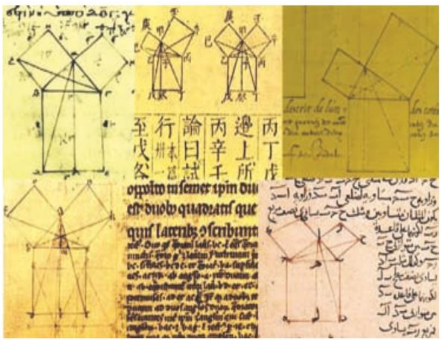


Figura D-7: Ilustraciones de Euclides sobre el teorema.

En la Proposición I.47 del Libro I de Los Elementos muestra Euclides el Teorema, aunque va todavía más allá y demuestra el resultado inverso del Teorema dentro de la Proposición

I.48:

"*Si en un triángulo el cuadrado construido sobre uno de los lados es igual a los cuadrados construidos sobre los restantes lados del triángulo, el ángulo comprendido por esos lados restantes del triángulo es recto".*

Euclides traza un segmento AD=AB y perpendicular a AC. De la hipótesis $AB^2 + AC^2 = BC^2$, y al ser un triángulo rectángulo el formado por ADC, resulta que $AD^2 + AC^2 = DC^2$. Ya que AB = AD, entonces $BC^2 = AB^2 + AC^2 = AD^2 + AC^2 = DC^2$, por lo tanto, BC = DC, de forma que los triángulos DAC y CAB son congruentes, entonces tienen los tres lados iguales.

Por lo tanto, el ángulo CAB es igual que el ángulo CAD y es recto.

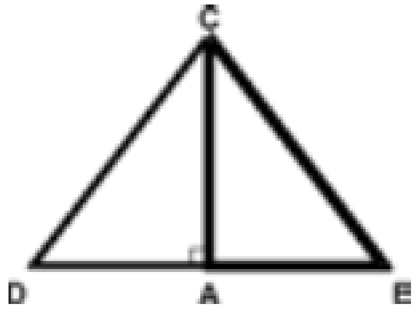


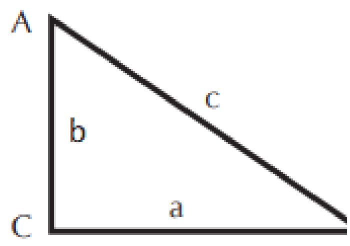
Figura D-8: Triángulo DAC y CAB cada una con un ángulo recto

D.1.5.3 Platón y el teorema de Pitágoras

Platón, dentro de las "Ternas pitagóricas de Platón", escribió una ley para formar las ternas pitagóricas en la que la hipotenusa y uno de los catetos se diferenciaban en dos unidades a diferencia de las "Ternas pitagóricas de Pitágoras" en la que la diferencia era de una unidad.

$$\left\{\begin{array}{l} a = 2m \\ b = (m^2 - 1) \\ c = (m^2 + 1) \end{array}\right\}$$

m	a	b	c
2	4	3	5
3	6	8	10
4	8	15	17
5	10	24	26
6	12	35	37



Ternas pitagóricas de Platón

Figura D-9: Ternas pitagóricas de Platón.

D.2 ¿Cuál es la razón o razones de ser que vas a tener en cuenta en la introducción escolar del objeto matemático?

Tras analizar cómo fue en sus orígenes el tratamiento del Teorema de Pitágoras, voy a pasar a tratar cuáles van a ser las razones de ser que se van a tener en cuenta en este trabajo para la introducción del mismo en el aula. Para comunicar un nuevo objeto de saber, el docente debe despersonalizar y descontextualizar el objeto de saber, lo que le permitiría una mayor economía y rapidez a la hora de transmitirlo a los alumnos. Este proceso, llamado transposición del saber, se convierte en transposición didáctica a la hora de transmitirlo en una institución de enseñanza. La transposición didáctica refleja el conjunto de transformaciones que sufre el saber sabio para que se convierta en saber a enseñar, es decir, dispuesto a ser enseñado. El resultado suele estar separado de sus orígenes históricos, alejado de las necesidades y problemas que constituyen su razón de ser y de sus usos. Sería interesante darle al alumno unas garantías de la utilidad y necesidad de su aprendizaje, así como una perspectiva histórica del objeto para que sepamos de donde viene el objeto.

D.3 Problemas que se constituyen en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar y metodología de implementación.

Las razones que voy a tener en cuenta al introducir el Teorema de Pitágoras van a ser las siguientes:

- Mostrar a los alumnos una perspectiva temporal del uso del Teorema a lo largo de la historia.
- El Teorema es un buen ejemplo del paso de la especulación empírica e inductiva a los dominios del razonamiento deductivo. Por ello plantearemos el trabajo con el teorema desde el principio desde ese punto de vista, no reduciéndolo a su mera enunciación y aplicaciones. Si la demostración, como ocurre en este caso, debe convertirse en contenido de enseñanza, tiene que sufrir una transformación adaptativa, una transposición didáctica, como todo objeto matemático (Chevallard, 1989). La demostración del teorema tendrá así dos funciones: 1) convencer de un resultado o procedimiento que viene de una incertidumbre, 2) Establecer lazos entre las propiedades y las evidencias conocidas por el estudiante.
- El alumno vea que es posible calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo sin conocer el teorema y sabiendo los catetos.

He seleccionado tres problemas que constituyen las razones del ser del teorema:

Problema 1

El primer problema que constituye la razón de ser del significado del teorema se encuentra basado en razones históricas, en concreto en Egipto.

Los anudadores egipcios hacían nudos igualmente espaciados entre sí que servían para medir. Se cree que fueron los primeros en observar que, uniendo en forma de triángulo cuerdas de ciertas longitudes, se obtiene un ángulo recto, es decir, un triángulo rectángulo.

Mediante estos triángulos formados por cuerdas, los egipcios conseguían colocar el mástil de las embarcaciones en posición perpendicular a la cubierta.

La idea del problema es sencilla y se realizará en el patio del colegio en grupos de 3 personas. Los alumnos trabajarán con una Cuerda Egipcia de 12 nudos equidistantes.

En primer lugar, les pediremos que fabriquen dicha cuerda, proporcionándoles una cuerda tipo montaña. A continuación, les plantearemos una investigación guiada que les permita obtener conclusiones.

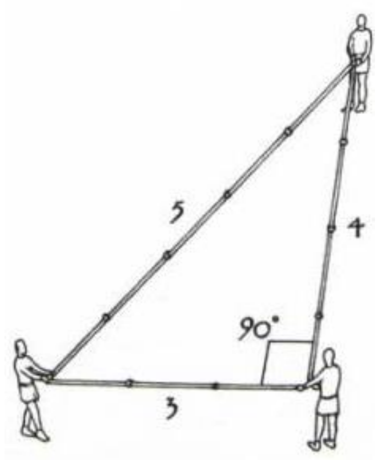


Figura D-10: Triángulo rectángulo formado por cuerdas.

Responderán a las siguientes preguntas

a) *Construid todos los triángulos que podáis con dicha cuerda. ¿Cómo son los ángulos de cada uno de ellos? ¿Conocéis el nombre de cada tipo de triángulo?*
b) *¿Cuántos nudos debería tener la cuerda en cada uno de los lados del triángulo para formar un ángulo recto?*
c) *¿Podríais construir otra cuerda con la que también se pueda formar un triángulo con un ángulo recto?*

Problema 2

El segundo de los problemas que voy a utilizar como razón de ser nos servirá para calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo de forma indirecta sin aplicar el teorema de Pitágoras

El cuadrado dibujado en la línea punteada es de tipo (3,5), que significa que un vértice está a tres puntos en desplazamiento en horizontal y el vértice contiguo está a 5 puntos en desplazamiento en vertical. Con estos dos vértices, trazamos un lado del cuadrado. Encuentra la hipotenusa del triángulo rectángulo situado abajo en la izquierda de la retícula[5]*.*

[5] El problema está propuesto por Beltrán-Pellicer(2022) .Tomado de una actividad del Mathematics Assessment Project del Shell Centre: Discovering the Pythagorean Theorem.

Para ello os sugerimos calcular el área del cuadrado en gris

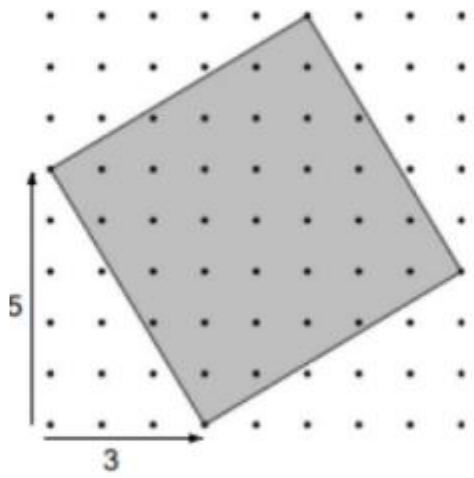


Figura D-11 Cuadrado en el geoplano cuadrangular.

Los alumnos trabajarán por parejas movilizando sus recursos para resolver el problema. Podemos esperar de ellos las siguientes estrategias para calcular el área del cuadrado que conduzcan a algún error.

- *Pensar que el lado mide 5 puntos, por lo tanto, el área del cuadrado es 25.*
- *Que cuenten puntos que hay en el interior del cuadrado en lugar de "huequitos", conduciendo así a un área de 36.*
- *Que realicen medidas sobre el geoplano con la regla directamente para ver cuando mide el lado del cuadrado y así calcular su área.*

La estrategia que les llevaría a una solución correcta, sin utilizar el teorema de Pitágoras, sería inscribir el cuadrado en otro más grande de área conocida (Área de 64 midiendo 8 de lado) y restar el área de los triángulos rectángulos sobrantes, qué es 30. Por lo tanto, el área mide 34 y el lado √34 (Véase Figura D-12).

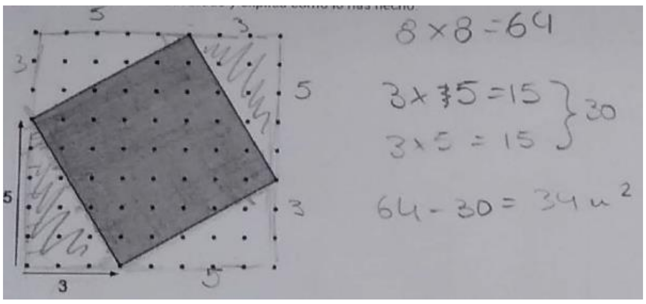


Figura D-12: Posible solución del problema.

Problema 3

El tercer problema que constituye la razón de ser del objeto matemático explotar la idea de que el teorema de Pitágoras es una relación de áreas. Se les proporcionará a los alumnos el siguiente enunciado:

Dibujar un triángulo de medidas 3, 4 y 5 cm. En cada uno de los lados del triángulo dibujaremos un cuadrado cuyo lado mida igual que el del triángulo. Responde posteriormente las siguientes preguntas

a) *¿Qué está pasando si relacionamos las áreas de los cuadrados? Describe brevemente la situación.*

Es de esperar que los alumnos se den cuenta de que al sumar las áreas de los cuadrados de los lados pequeños (catetos) su suma es igual al área del cuadrado del lado mayor (hipotenusa).

b) *Dibuja un triángulo rectángulo cualquiera con Geogebra. Haz lo mismo que en el apartado anterior y comprueba si se cumple también la misma relación que en el apartado anterior.*
c) *¿Podrías explicar en general lo que está ocurriendo? Descríbelo si es posible de forma algebraica o con letras.*

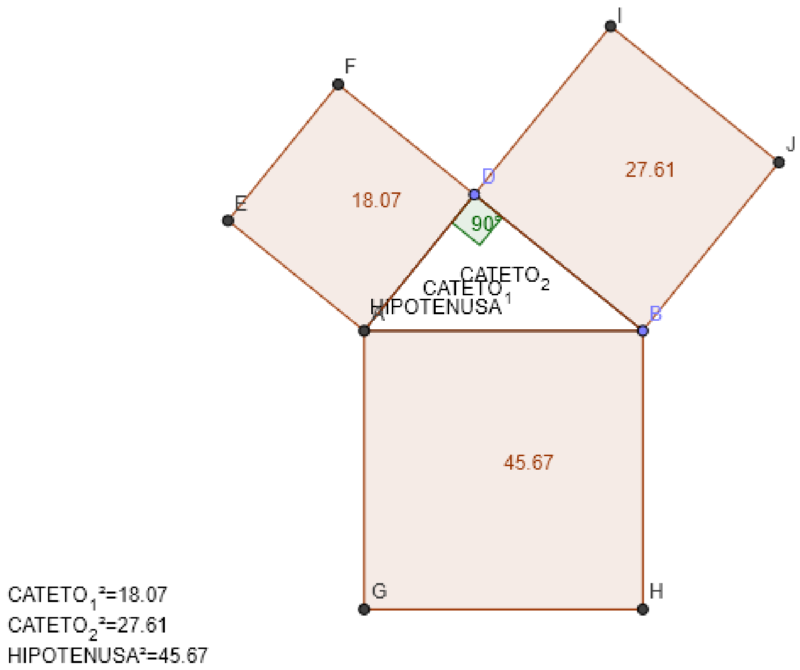


Figura D-13: Dibujo esperado por los alumnos en Geogebra

Después de las anteriores preguntas, esperamos que los alumnos puedan describir mediante una frase o de forma algebraica lo siguiente:

En un triángulo rectángulo, la suma del área de los catetos es igual a la suma del área *de la hipotenusa.*

D.4 Metodología de implantación en el aula de los problemas que constituyen la razón de ser

Los tres problemas que constituyen la razón de ser del teorema de Pitágoras, tal como se explica más adelante en la secuencia didáctica, serán explicados durante las sesiones 2 (Origen histórico del Teorema), 4 (Acercamiento al Teorema) y 5 (Enunciado del Teorema).

La metodología de implantación en el aula para cada uno de los problemas de este apartado pasará por las siguientes fases:

- Lectura del enunciado. Primero será el docente el que lo lea para todos los alumnos.
- Discusión del mismo, entendiendo cada parte del problema y viendo que elementos lo componen.
- Los alumnos debatirán sobre las posibles maneras de afrontar el problema.
- Representación gráfica del problema por parte del docente y anotación de los datos principales del enunciado.
- Trabajo individual por parte del alumno
- Presentación, por parte de los alumnos, de posibles soluciones encontradas y escritura de una solución adecuada para el problema por parte del docente. Diálogo con los alumnos sobre dicha solución y respuesta de posibles dudas que tengan los alumnos.

Se buscará, tal como afirman Cid Castro y Muñoz Escolano [6]en sus apuntes de diseño instruccional de matemáticas, no sólo en estos problemas, sino durante todo el curso, superar y afrontar algunos de los retos más importantes para un docente en su trabajo del aula:

- Motivación intrínseca al alumno
- Compaginación de la “enseñanza para todos” con “la enseñanza para algunos”.
- Conseguir que los alumnos adquieran conocimientos, es decir, información para la acción, para la resolución de problemas, y no solo saberes.
- Conseguir que los alumnos construyan buenas concepciones iniciales de los objetos matemáticos y que evolucionen con facilidad hacia él, que no se constituyan en obstáculo.

[6] Eva Cid Castro y José María Muñoz Escolano, de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

E. El campo de problemas

E.1 Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Los campos de problemas siguientes intentarán conseguir que el proceso de enseñanza-aprendizaje del objeto matemático tratado sea significativo para el alumno.

C.P.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos y reconocimiento de triángulos rectángulos.
C.P.2 Demostraciones geométricas del Teorema de Pitágoras
C.P.3. Comprobación aritmética de la validez del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos y aplicación al reconocimiento de triángulos rectángulos
C.P.4 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo de distancias
C.P.5 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo de áreas y perímetros de figuras planas
C.P.6 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras a cuestiones geométricas variadas.

En cada problema propuesto se muestra el título y enunciado de la actividad. La mayor parte de los problemas [7]se realizarán con la siguiente metodología de implantación en el aula:

- La metodología tendrá un enfoque participativo, el docente ira paseando por las mesas para ayudar a los alumnos que tengan más dificultades y evaluar la actividad mediante observación. Servirá para ver la formación previa de cada alumno y sus principales carencias.
- Las actividades se realizarán de forma individual.
- El docente leerá los enunciados de cada problema en voz alta y clara y el alumno lo copiará en su cuaderno de trabajo para su posterior resolución.

Se presentarán, tal como nos indican Cid Castro y Muñoz Escolano[8], 5 actuaciones clave para gestionar las intervenciones en el aula y usar las respuestas de los alumnos para promover la construcción del conocimiento matemático en esos momentos de institucionalización:

1. Anticipar respuestas probables de los alumnos a cada uno de los problemas. El docente escribirá en una tabla en la pizarra las diferentes técnicas, correctas o

[7] Aquellos problemas con una metodología diferente se indicarán en el enunciado del problema.

[8] Eva Cid Castro y José María Muñoz Escolano, de Didáctica de las Matemáticas del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

incorrectas, empleadas para la resolución del problema.

2. Monitorización de respuestas reales de los alumnos. Resolución de dudas concretas entre los alumnos que así lo requieran o hacer preguntas para hacer manifiesto el pensamiento de los alumnos y asegurarse del compromiso de todos los miembros con el problema y apremiar a los alumnos a que tengan en cuenta aspectos de la tarea que requieren atención.
3. Seleccionar a alumnos particulares para que presenten su trabajo. La elección de los alumnos estará fundamentada en la labor de monitoreo realizada y evitará la selección de dos estudiantes con respuestas que involucren exactamente el mismo contenido matemático.
4. Secuenciación de las respuestas de los estudiantes en un orden específico para favorecer la aparición de oportunidades de aprendizaje y lograr sus metas matemáticas.
5. Conexión de las diferentes respuestas de los estudiantes y vinculación con las ideas matemáticas clave.

C.P.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos y reconocimiento de triángulos rectángulos.

El objetivo de este campo de problemas es que el alumno sepa reconocer distintos tipos de triángulos y en particular de los triángulos rectángulos a través de la visualización y medida de sus ángulos.

C.P.1.1 Extraña figura[9]

C.P.1.1. ¿Qué figuras geométricas se observan en la figura? Para contestarlo puedes utilizar los útiles que sean necesarios (compás, regla, transportador).

Figura E-1: Página 13 del documento a pie de página[10]

[9] Proyecto pedagógico sobre "El Teorema de Pitágoras en el marco de Van Hiele".

[10] El Teorema de Pitágoras en el Marco del Modelo de Van Hiele

C.P.1.2 Figuras 1

En las figuras geométricas siguientes hay triángulos. ¿Puedes señalar cuatro?

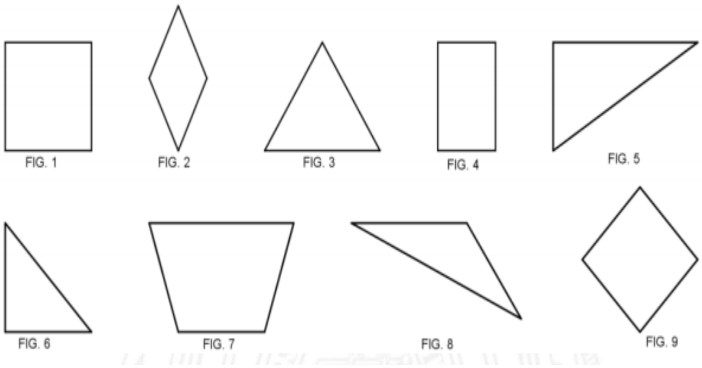


Figura E-2. Figuras geométricas

C.P.1.3 Triángulos 1

Contesta a las siguientes preguntas:

a) *¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo?*
b) *¿Puede existir un triángulo equilátero con un ángulo recto?*
c) *¿Qué triángulo tiene dos ángulos agudos y uno obtuso?*
d) *¿Puede tener un triángulo isósceles un ángulo recto?*

C.P.1.4 Figuras 2

¿Cuál de las siguientes parejas de lados marcados en rojo en los siguientes triángulos no son perpendiculares? Explica cómo lo sabes. (los alumnos pueden si lo desean usar un transportador)

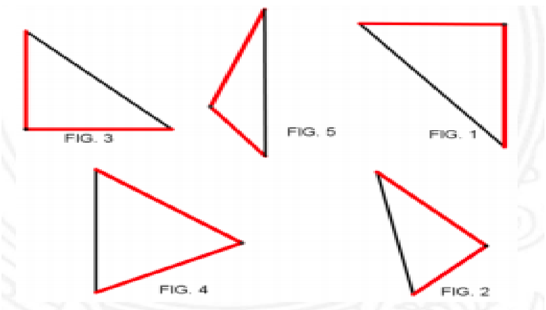


Figura E-3 Diferentes triángulos.

C.P.1.5 Secuencia

¿Cuál es el "intruso"[11] *y explica por qué razón lo has elegido?*

[11] Este es un problema de tipo WODB (Which one doesn't belong) que es un recurso didáctico que plantea un problema abierto que admite múltiples respuestas.

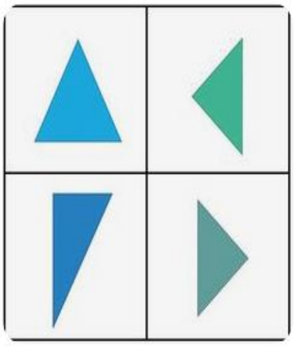


Figura E-4 WODB de triângulos.

C.P.1.6 Medidas de ángulos

Sabiendo que dos de los ángulos de un triángulo miden lo siguiente. ¿El triángulo es rectángulo?

a) 48° y 42°
b) 27° y 63°
c) 24º y 56º

C.P.2 Comprobaciones geométricas del Teorema de Pitágoras

En este campo de problemas se busca que el alumno entienda el teorema como una relación entre áreas de cuadrados. Las demostraciones, que a este nivel son comprobaciones, se realizarán con diferentes materiales e incluso mediante herramientas matemáticas.

C.P.2.1 Demostración 1

Se debe trazar una diagonal en cada cuadrado construido sobre los lados menores del triángulo. Se recortarán posteriormente las figuras resultantes y con éstas cada grupo deberá intentar cubrir el cuadrado trazado sobre el lado más grande del triángulo.

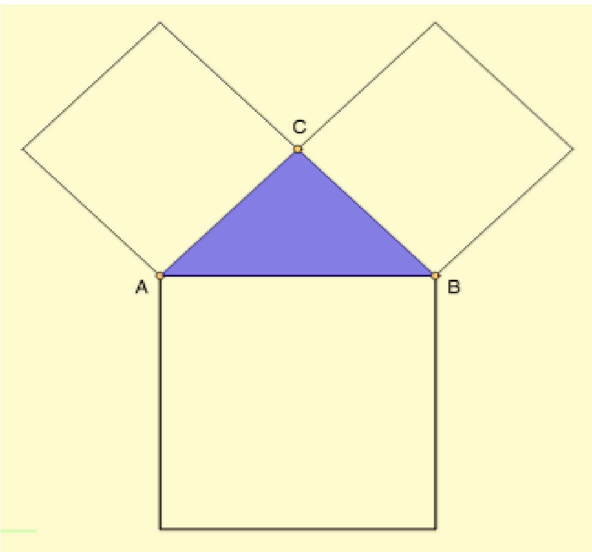


Figura E-5: Demostración del Teorema

Los alumnos deberán responder las siguientes preguntas:

¿Se puede cubrir toda la superficie del cuadrado mayor con las figuras recortadas?

¿Qué clase de triángulo es el que está sombreado de color azul?

Dibujad un triángulo que no sea cómo el anterior e intentad hacer lo mismo, ¿es posible?

C.P.2.2 Demostraciones 2[12]

Considerando el triángulo con los cuadrados de la figura.

a) *¿Cuántos cuadrados numerados harán falta para rellenar el cuadrado grande?*

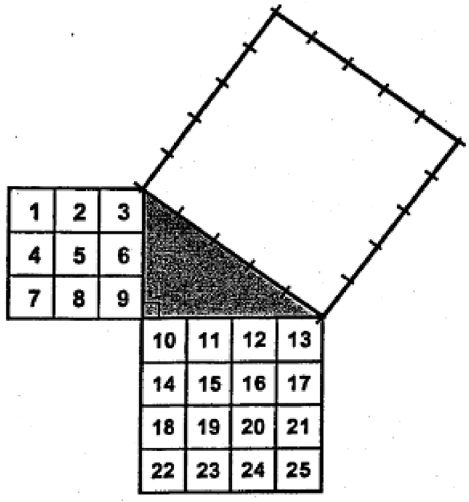


Figura E-6 Cuadrados necesarios para rellenar el cuadrado grande. Página 8 del Documento.

b) *Ahora considera la siguiente figura. ¿Cuántos cuadrados son requeridos para rellenar el cuadrado grande? ¿ En qué se diferencia este apartado del anterior?*

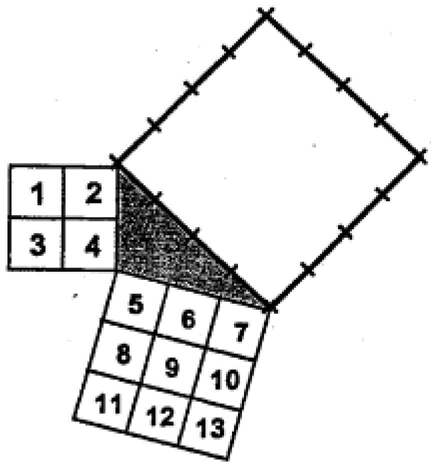


Figura E-7 Cuadrados necesarios para rellenar el cuadrado grande Página 8 del Documento.

[12] Adaptado de [Modeling the Pythagorean Theorem worksheet]

c) *Viendo los apartados anteriores. ¿Cuántos números hay en los cuadrados grandes?*

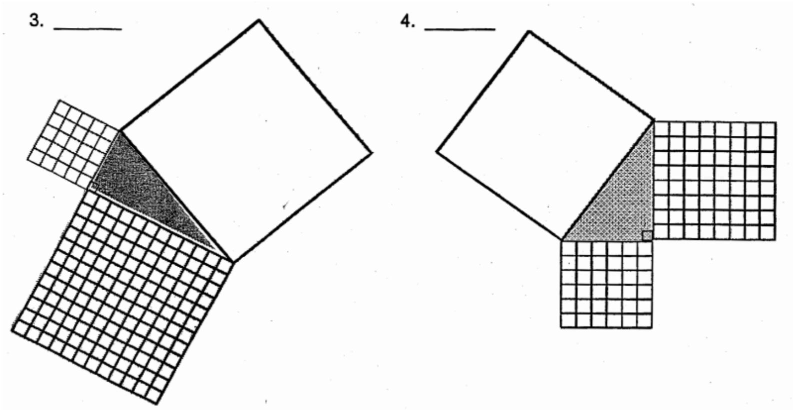


Figura E-8 Número de cuadrados de los cuadrados grandes. Página 9 del Documento.

d) *Encuentra el área que falta. Puedes usar papel si es necesario para ayudarte.*

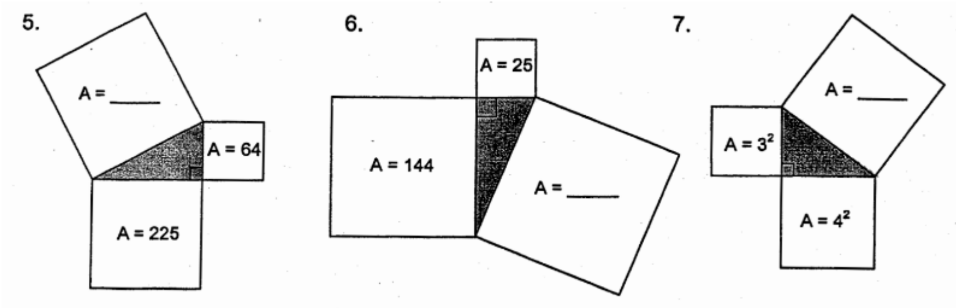


Figura E-9 Búsqueda de áreas. Página 9 del Documento.

e) *Encuentra las longitudes de los lados del triángulo.*

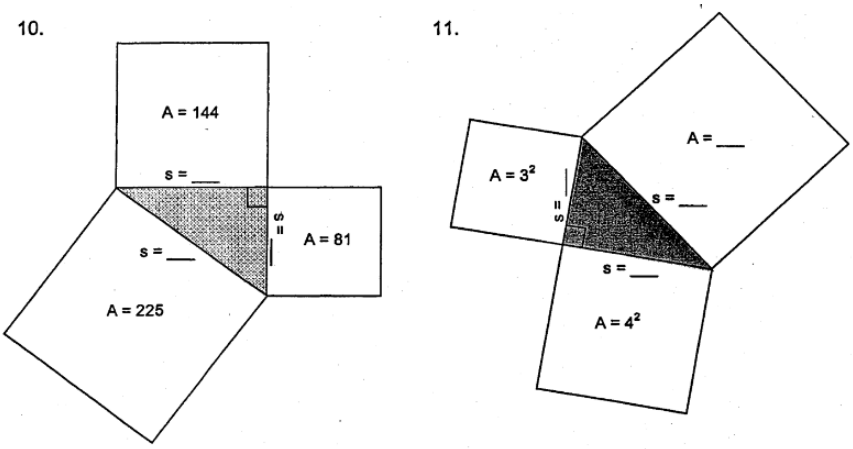


Figura E-10. Encuentra las longitudes que faltan. Página 10 del Documento.

f) *¿En cuál de los siguientes triángulos, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los lados pequeños es igual al área del cuadrado construido sobre el lado más largo del triángulo? ¿En qué tipo de triángulos ocurre esto?*

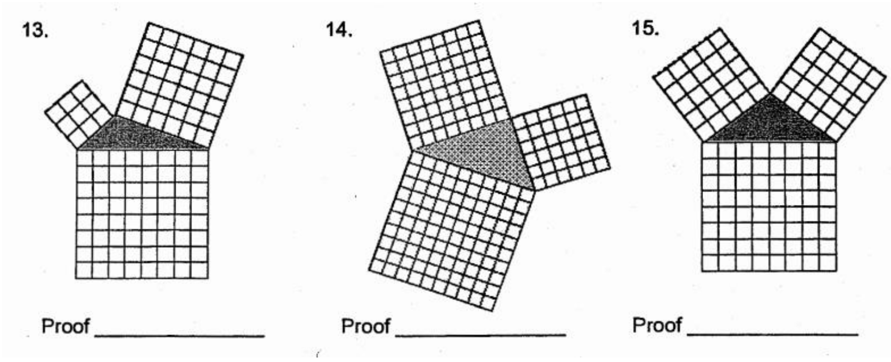


Figura E-11 Página 11 del Documento.

C.P.2.3 Demostraciones 3

En el siguiente applet [13] *de Geogebra se encuentran algunas de las demostraciones del Teorema más conocidas como son las de Platón, Pappus o Loomis. Cada grupo deberá explicar* por escrito *lo que sucede en cada una de las demostraciones.*

C.P.2.4 Animal extraño[14]

Este extraño animal tiene la propiedad que su pie "cuadrado rojo" tiene la misma superficie que todas sus partes rojas. ¿Por qué razón? Pista: aplica lo que has comprobado en los problemas anteriores para ir sustituyendo áreas de cuadrados grandes por la suma de dos de otros más pequeños

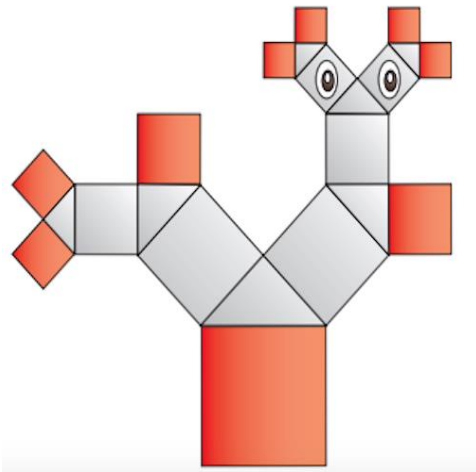


Figura E-12 Animal extraño

Para este problema se les proporcionará a los alumnos el dibujo anterior en un folio para que puedan incluso recortar las figuras.

[13] https://www.geogebra.org/m/BnPMKV3z

[14] Sacado del libro de Ana García Azcarate «*Pasatiempos y juegos en clase de Matemáticas: Geometría*» (ISBN: 978-84-9380-475-6).

C.P.3. Comprobación aritmética de la validez del Teorema de Pitágoras en triángulos rectángulos y aplicación al reconocimiento de triángulos rectángulos

En este campo de problemas se espera que los alumnos puedan reconocer los triángulos rectángulos conociendo la medida de sus tres lados, sin necesidad de dibujarlos. Se les introduce también en el concepto de terna pitagórica.

C.P.3.1 Comprobación 1

Comprueba cuál de estos triángulos es rectángulo y di por qué.

a) *8cm, 11cm, 6cm*
b) *5cm, 12cm,13cm*
c) *2.5 cm, 4cm, 5cm*

C.P.3.2 Ternas pitagóricas 1

Comprueba si las medidas pueden ser los lados de un triángulo rectángulo y por lo tanto forman una terna pitagórica. En el caso de serlo dibuja el triángulo correspondiente de forma correcta. Las medidas de los tres lados son:

a) *7cm, 24 cm, 25 cm*
b) *5 cm, 12 cm, 14 cm*
c) *8 cm, 15 cm, 17 cm*

C.P.3.3 Ternas pitagóricas 2

Si 3,4 y 5 son tres medidas que forman una terna pitagórica. ¿Lo serán también 3n, 4n y 5n? ¿Por qué?

C.P.4 Aplicación del Teorema de Pitágoras al cálculo de distancias

Este campo de problemas espera que los alumnos sepan utilizar el teorema para el cálculo de distancias entre dos puntos en el plano.

C.P.4.1 Televisión[15]

Jane está esperando a comprar una televisión grande para su primo. Aunque no está seguro si el tamaño será el ideal para la pared, porque todas las pantallas de televisión se miden, en pulgadas, calculando su diagonal, y eso la despista un poco. Esta televisión de 42 pulgadas mide 32 pulgadas de ancho.

[15] Adaptado de https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1098.

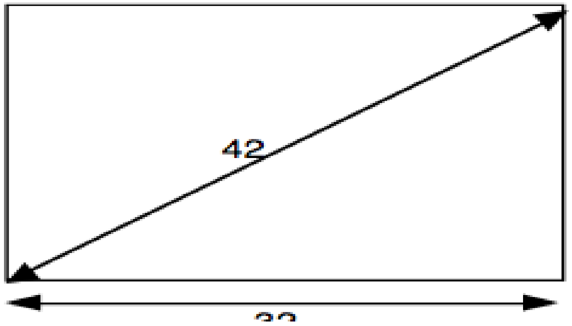


Figura E-13 Medidas de la televisión.

a) *¿Cuál es la altura de la televisión?*
b) *¿Qué área tiene la pantalla?*
c) *A Jane le gustaría comprar una televisión de 40 pulgadas de ancho por 32 de alto. ¿Cuántas pulgadas tendrá la televisión? ¿Qué diferencia de áreas hay entre las dos televisiones?*

C.P.4.2 Palmeras[16]

Una palmera de 17 metros de altura está sujeta por dos cables como se refleja en la figura. Calcular la distancia entre A y B.

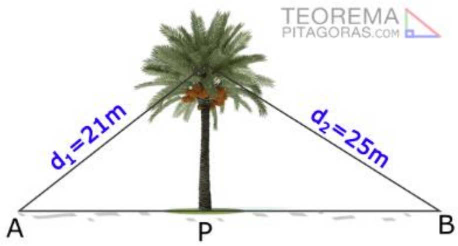


Figura E-14: Estructura del problema.

C.P.4.3 Taco-Truck

Esta es una actividad de Desmos[17] llamada Taco Truck[18]. Servirá para que los alumnos puedan usar el Teorema de Pitágoras para el cálculo de distancias. Los alumnos razonarán con el teorema en una situación contextualizada y cercana a ellos como es tomar un atajo para ahorrar tiempo.

[16] Problema adaptado de https://teoremapitagoras.com/

[17] Ésta es una herramienta online en la cual se almacenan ideas y recursos para la clase de matemáticas. Tienen una curva de aprendizaje sencilla y una de las ventajas es su gran interactividad, pudiendo ver en tiempo real como los alumnos van resolviendo las diferentes tareas. Como existe la posibilidad de permitir que los alumnos vean las respuestas del resto de la clase será sencillo debatir las respuestas dadas. Al poder guardar las respuestas de los alumnos será sencillo ver donde los alumnos tienen más dificultades o detectar problemas individuales. Su página web es www.desmos.com

[18] La actividad se encuentra en Desmos Taco Truck

La actividad consta de las siguientes siete páginas.

1) *Alma debe caminar del punto A al punto B. ¿Qué distancia caminará?*

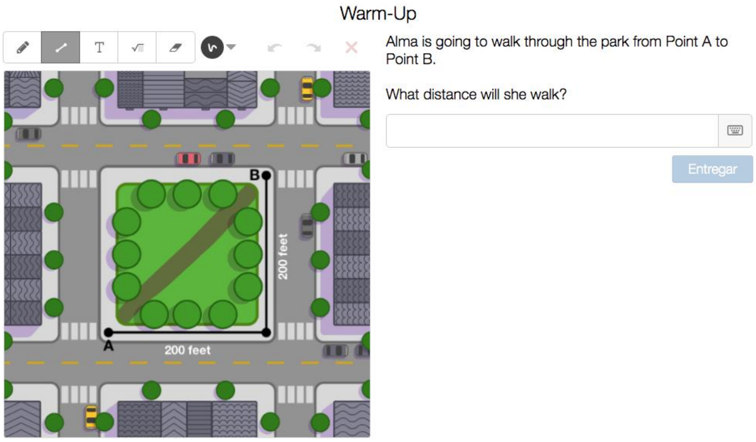


Figura E-15: Cálculo de distancias entre dos puntos

2) *Si la solución del apartado anterior es de 282.84 pies y Alma camina 5 pies por segundo. ¿Cuánto tiempo le llevará andar esa distancia?*

3) *Imagina que estás en la playa y tienes hambre. Dibuja la ruta que creas más corta para llevar al Taco Truck. Explica por qué has dibujado esa ruta.*

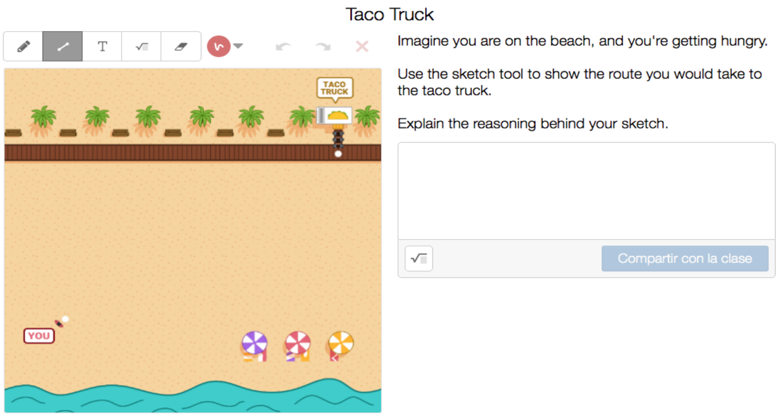
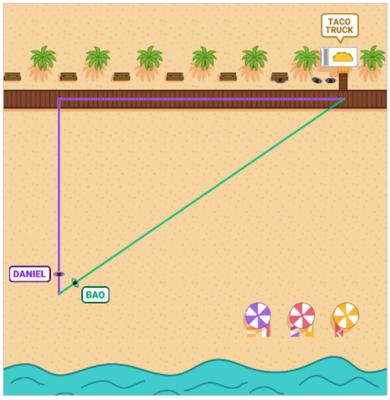


Figura E-16 Dibujo de la ruta más rápida.

4) *Daniel y Bao eligen diferentes rutas para ir al Taco Truck. ¿Quién llegará primero?*

Two Paths



Daniel and Bao choose different routes to get to the taco truck.

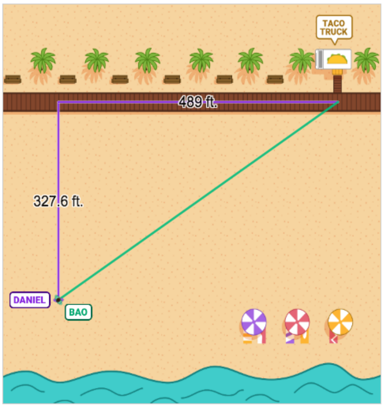
Who do you think will reach the taco truck first?

- Daniel
- Bao
- They'll arrive at the same time.

Figura E-17: ¿Quién llegará primero al Taco Truck?

5) *La velocidad por el camino es de 5 pies por segundo. La velocidad por la arena es de 3 pies por segundo. Determina la cantidad de tiempo que los llevará a Daniel y Bao llegar al Taco Truck*

Calculate



Their speed on the BOARDWALK is 5 feet per second.

Their speed on the SAND is 3 feet per second.

The dimensions are shown in the image.

Determine the amount of time it will take for Daniel and for Bao to get to the taco truck.

Use paper and/or a calculator as necessary.

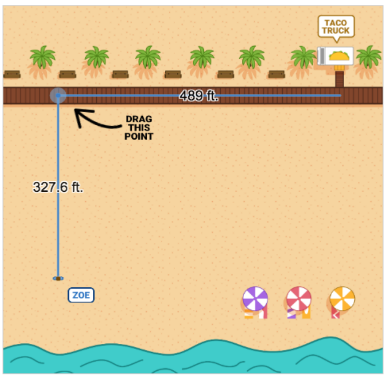
Daniel's Time	Bao's Time

Check My Work

Figura E-18: ¿Cuánto tiempo emplearán Daniel y Bao para llegar al Taco Truck?

6) *Otras rutas son posibles también. Mueve el punto para elegir la ruta que sea más rápida que las rutas usadas por Bao y Daniel.*

Zoe's Route



Other routes are possible, too. Some may be faster than Bao's and Daniel's.

Use the movable point to choose a route for Zoe that you think will be faster than the routes that Bao and Daniel used.

When you're done, go to the next screen.

Figura E-19 Dibuja posibles rutas diferentes para llegar al Taco Truck.

7) *Se muestra la ruta elegida para Zoe. Determina la cantidad de tiempo que le cuesta. Recuerda que avanza a 5 pies por segundo por el camino y a 3 pies por segundo en la arena.*

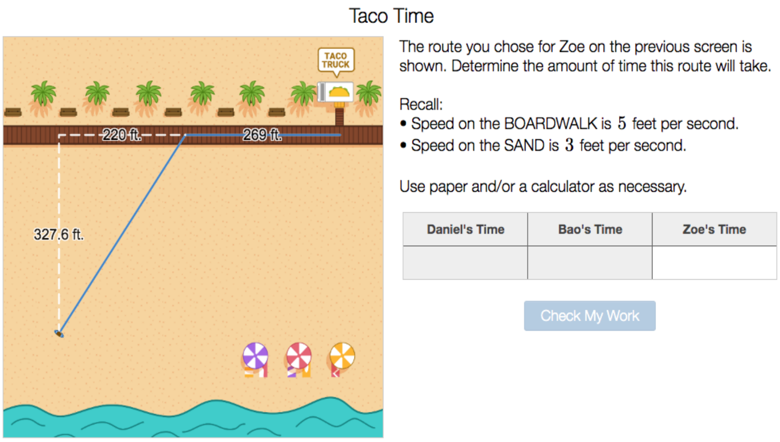


Figura E-20 ¿Cuánto tiempo le cuesta llegar a Zoe?

C.4.4 Escalera

Una escalera de 15 metros se apoya en una pared vertical, de modo que el pie de la escalera se encuentra a 9 metros de esa pared. Calcula la altura, en metros, que alcanza la escalera sobre la pared.

C.4.5 Letra N

Una letra "N" se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separado 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?

C.4.6 Portería futbol

La altura de una portería de fútbol reglamentaria es de 2,4 metros y la distancia desde el punto de penalti hasta la raya del gol es de 10,8 metros. ¿Qué distancia recorre un balón que se lanza desde el punto de penalti y se estrella en el punto central del larguero?

C.P.4.7 Gato y dragón

¿Qué distancia hay entre el gato y el dragón en la siguiente figura?

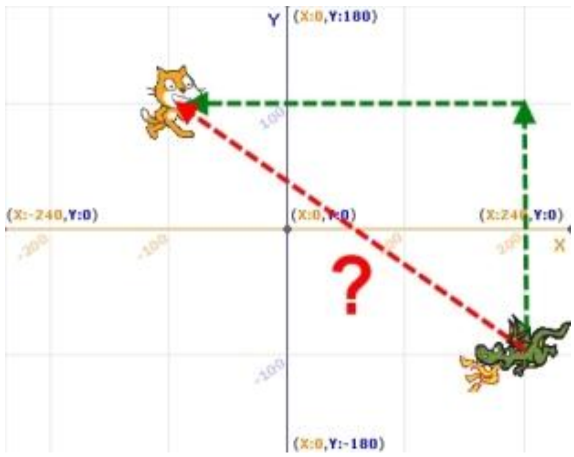


Figura E-21: Ejes de coordenadas con la posición del gato y el dragón.

C.P.4.5 Distancia entre puntos del plano cartesiano.

Calcula la longitud entre los puntos (-4,-1) y (3,4).

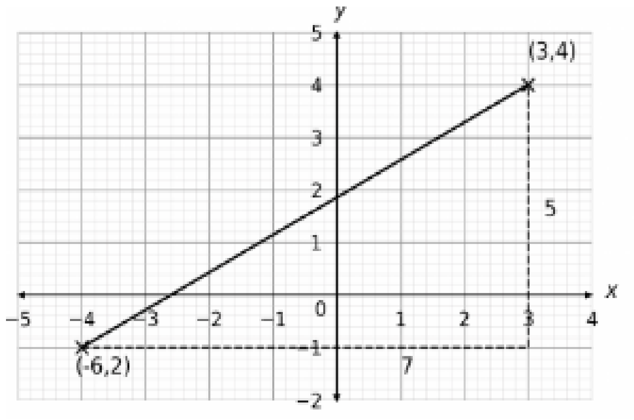


Figura E-22: Ejes de coordenadas con la posición de los puntos.

C.P.4.6 Béisbol

En el deporte del béisbol, un diamante es un cuadrado en el que cada uno de los lados mide 90 pies. ¿Cuál es la distancia más corta entre la primera y la tercera base? (ver Figura E-23)

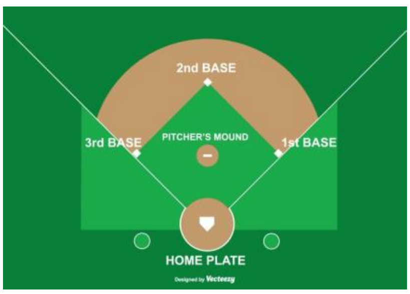


Figura E-23: Campo de béisbol

C.P.4.7 Figuras

En la siguiente figura cada lado mide 1 cm. ¿Cuál es la longitud de la diagonal?

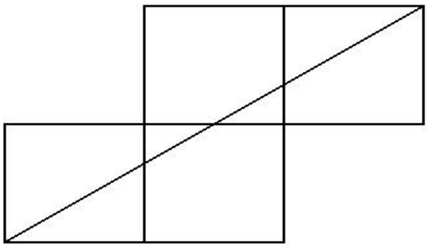


Figura E-24 Diagonal de la figura geométrica.

C.P.4.8 El cobertizo

Suponemos que tenemos un cobertizo de un jardín con un techo hecho de cinco vigas de madera dispuestas de la siguiente forma:

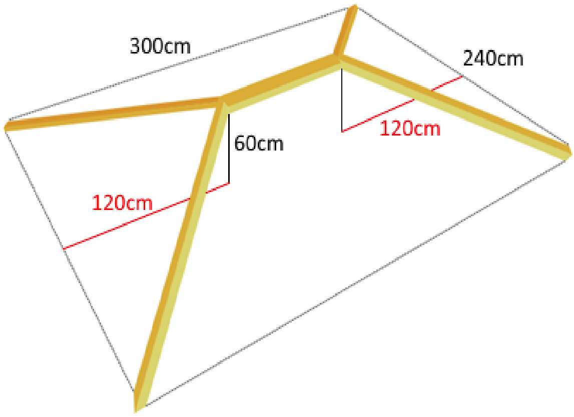


Figura E-25: Cobertizo

Cada una de las cuatro vigas inclinadas tiene la misma longitud. El techo del cobertizo mide 300 cm de largo, 240 cm de ancho y 60 cm de alto.

a) ¿Cuál es la longitud total de madera necesaria para hacer estas cinco vigas principales para el techo?

b) ¿Puedes reducir la cantidad necesaria de madera cambiando las longitudes correspondientes a los 120 cm de la figura?

C.P.5 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras al cálculo de áreas y perímetros de figuras planas.

Este campo de problemas busca que los alumnos, descomponiendo las figuras geométricas en triángulos, sepan calcular el área y perímetro de dichas figuras. En todos ellos es necesario aplicar el Teorema de Pitágoras para calcular alguna longitud desconocida.

C.P.5.1 Dormitorio

El dormitorio de Pablo es rectangular; su lado mayor mide 8 metros y su perímetro total mide 28 metros. Ha decidido dividirlo en dos partes triangulares con una cortina que une dos vértices opuestos. ¿Cuántos metros deberá medir la cortina?

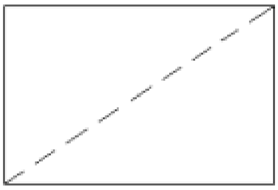


Figura E-26:El dormitorio

C.P.5.2 Trapecio rectángulo

Calcula el perímetro de este trapecio rectángulo.

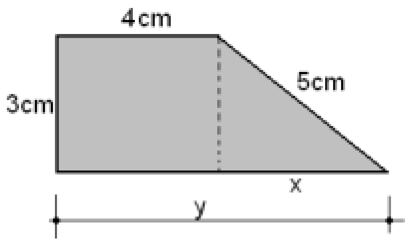


Figura E-27: Trapecio rectángulo

¿Y si fuera un trapecio isósceles como el siguiente?

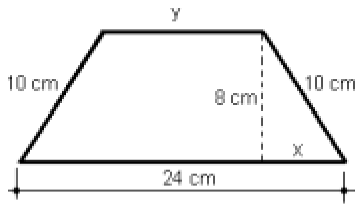


Figura E-28: Trapecio isósceles

C.P.5.3 Puntos medios

Si se unen los puntos medios de los lados de un triángulo rectángulo. FH= 6 cm y FG = 8 cm. ¿Cuál es el perímetro de ese nuevo triángulo?

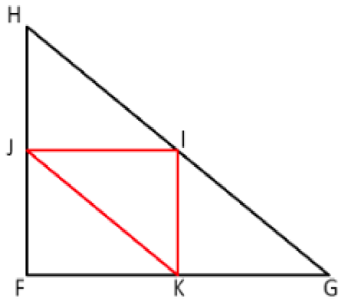


Figura E-29: Triángulo dentro de triángulo

C.P.5.4 Dos Partes

Un rectángulo de 3x8 se corta en dos partes a lo largo de la línea punteada que se muestra. Luego, las dos piezas se reorganizarán para formar un triángulo rectángulo. ¿Cuál es el perímetro del triángulo formado?

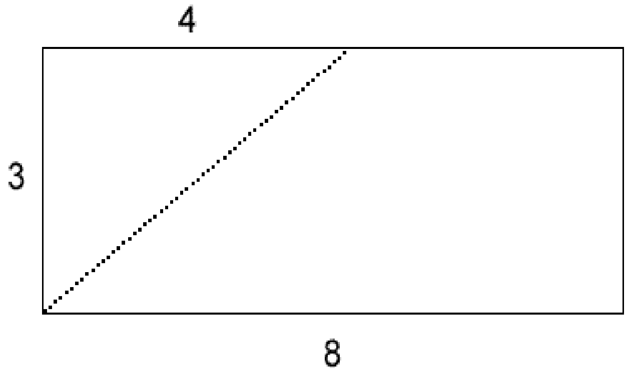


Figura E-30: Rectángulo cortado

C.P.5.5 Áreas de rectángulos

Calcula el área de la zona coloreada.

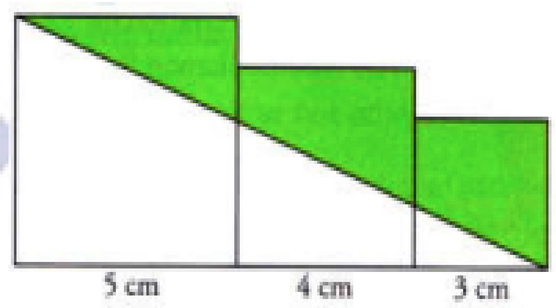


Figura E-31: Áreas de rectángulos

C.P.6 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras a situaciones geométricas más complejas.[19]

Este campo de problemas consta de problemas más complejos sobre cuestiones geométricas.

[19] Los problemas de este campo pueden resultar inadecuados para un nivel de 1º ESO y se reservarían para el caso de que la unidad se aplicara en 2º ESO.

C.P.6.1 La araña y la mosca[20]

Una habitación tiene 6 m de largo, por 2,4 de ancho y 2,4 de alto. Una mosca se encuentra en el medio de una de las paredes cortas a 2'2 metros del techo, mientras que, en el medio de la pared opuesta, a 20 cm del techo, se encuentra una araña que ha decidido comérsela, y para ello se desplaza, haciendo uso de sus patitas, por el camino más corto posible (la mosca, por cierto, se ha quedado paralizada por el pánico).

¿Qué distancia recorre la araña?

C.P.6.2 El barco y el horizonte

Estás en la playa mirando el horizonte. ¿a qué distancia se encuentra?

Para realizar el ejercicio los alumnos necesitarán conocer un par de datos:

1) *El radio de la Tierra, que es de 6378 kilómetros.*
2) *Altura a la que se encuentran los ojos del observador, que se podrían situar, al estar en una playa, a aproximadamente, 2 metros sobre el suelo.*

F. Las técnicas

Para los campos de problemas anteriores son necesarias un conjunto de técnicas que los resuelven.

Las técnicas, junto con los campos de problemas, constituyen la praxis, la práctica, el 'saber hacer'.

En los primeros momentos, cada actividad planteada se considera un problema que ayuda a la introducción de la técnica, pero la repetición del mismo tipo de actividad hace ´ que este pase a ser un ejercicio de aplicación de la técnica.

Las técnicas que se trabajan en los campos de problemas son éstas:

T.1 Trabajar con potencias cuadradas y raíces cuadradas.

T.2 Resolver ecuaciones de primer grado del tipo a + x = b

T.3 Calcular uno de los lados ya sea la hipotenusa o los catetos de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

T.4 Cálculo de las áreas de las figuras principales planas.

T.5 Representación de puntos en el plano cartesiano.

T.1: Trabajar con potencias y raíces cuadradas

Los ejercicios de esta técnica trabajarán con dos conceptos de repaso necesarios para el

[20] Problema de epsilones, sitio matemático de Alberto Rodríguez Santos, licenciado en Matemáticas y profesor de Matemáticas en Secundaria durante 28 años.

objeto matemático que nos ocupa.

T.1.1 Fotos

Marta quiere colocar 36 fotos cuadradas en filas y columnas de modo que formen un mural cuadrado. ¿Cuántas tiene que poner en cada columna?

T.1.2 Azulejos

Marta tiene 300 azulejos de forma cuadrada para hacer mosaicos. ¿Cuántos puede emplear como máximo para formar un cuadrado? ¿Cuántos le sobran?

T.1.3 Jardines

¿Cuántos metros cuadrados ocupan dos jardines cuadrados de 15 y 20 metros de lado respectivamente?

T.1.4 Campo

Si Juan quiere recolectar un campo de verduras de forma cuadrangular de 12 metros de lado. ¿Cuántos metros cuadrados tiene el campo de Juan?

T.2 Resolver ecuaciones de segundo grado del tipo $a + x^2 = b$.

Con esta técnica se busca que el alumno sea capaz de encontrar un valor desconocido en una ecuación del tipo que aparecen al aplicar el Teorema de Pitágoras.

T.2.1 Ecuaciones 1.

Resuelve las siguientes ecuaciones de primer grado.

a) $x + 5^2 = 7^2$
b) $5^2 + x = 7^2$
c) $7^2 + 5^2 = x^2$
d) $4x - 4 = 12^2$
e) $8^2 + x = 16^2$

T.2.2 Ecuaciones 2

a) *Si un número le sumas 16, obtienes de resultado cuatro al cuadrado. ¿Cuál es ese número?*
b) *Un número elevado al cuadrado es 36, ¿cuál es el número?*

T.2.3 Ecuaciones 3

Juan tiene en un bolsillo 4 estuches con 4 lapiceros en cada uno. Sumando también los del otro bolsillo, Juan tiene 34 lapiceros en total. ¿Cuántos tiene en el otro bolsillo?

T.2.4 Ecuaciones 4

Rosa ha ido a dos tiendas y ha comprado 6 golosinas para cada uno de sus 6 amigos en la primera tienda. Si en la segunda tienda ha comprado 5 golosinas para cada amigo. ¿Cuántas golosinas ha comprado Rosa en total?

T.3 Calcular uno de los lados ya sea la hipotenusa o los catetos de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.

Con esta técnica se trabaja el cálculo de uno de los lados desconocidos de un triángulo rectángulo.

T.3.1 Cálculo de lados 1

Halla la medida, en metros, de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 3 y 4 metros.

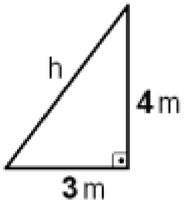


Figura F-1:Cálculo de la hipotenusa

T.3.2 Cálculo de lados 2

Halla la medida, en centímetros, de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuyos catetos miden 5 y 12 centímetros.

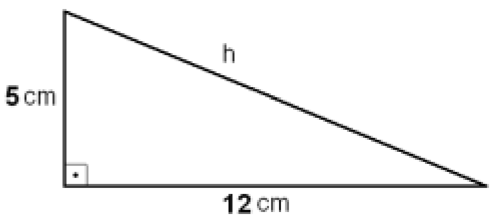


Figura F-2: Cálculo de la hipotenusa

T.3.3 Cálculo de lados 3

Halla la medida, en centímetros, del cateto desconocido de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 10 cm y el cateto conocido mide 8 cm.

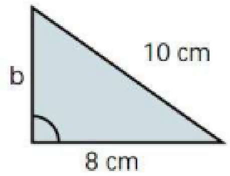


Figura F-3: Cálculo de los catetos

T.3.4 Cálculo de lados 4

Halla la medida, en metros, del cateto desconocido de un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 17 metros y el cateto conocido mide 15 metros.

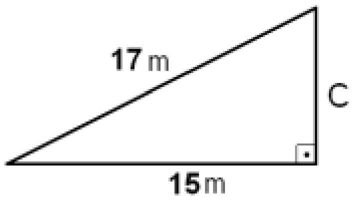


Figura F-4: Cálculo de los catetos

T.3.5 Cálculo de lados 5

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 2 cm y uno de sus lados mide 1 cm. ¿cuánto mide el otro lado?

T.3.6 Cálculo de lados 6

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 29 cm y uno de sus catetos mide 20 cm. ¿Cuál es la medida del otro cateto?

T.3.7 Cálculo de lados 7

Las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo son 9 y 12 centímetros respectivamente. ¿Cuál es la medida de la hipotenusa?

T.4 Cálculo de las áreas de algunas figuras planas.

Esta técnica trabaja el cálculo de las áreas de las principales figuras principales que implicará conocer cuál es el área de cada figura. En algunos de ellos se aplica la descomposición en figuras de área conocida. En estos ejercicios no será necesario aplicar el Teorema de Pitágoras, pero sirven para abordar los problemas del Campo de Problemas 5.

T.4.1 Rectángulo

Calcular el área de los siguientes rectángulos dados sus lados

a) *5 y 3 cm de ancho y alto.*

b) *7 y 9 cm de ancho y alto.*
c) *15 y 23 cm de ancho y alto.*
d) *45 y 83 cm de ancho y alto.*

T.4.2 Cuadrado

Calcular el área de los siguientes cuadrados dados el valor de su lado

a) *9 cm*
b) *25 cm*
c) *23 cm*
d) *83 cm.*

T.4.3 Figuras

Halla el área y el perímetro de las siguientes figuras:

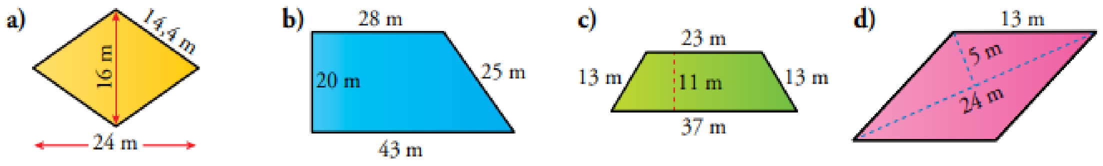


Figura F-5: Área y perímetro de las figuras

T.4.4 Descomposición de áreas

Hallar el perímetro y el área de la figura:

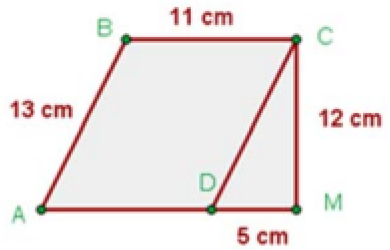


Figura F-6: Calcula su perímetro y área.

T.4.5 Descomposición de áreas 2

El área de esta figura irregular es 84 cm². ¿Qué hemos hecho para calcularla?

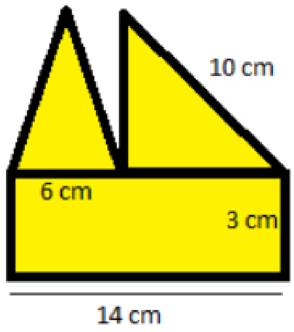


Figura F-7: ¿Cómo hemos calculado el área?

T.4.6 Descomposición de áreas 3

Calcula el área de la siguiente figura.

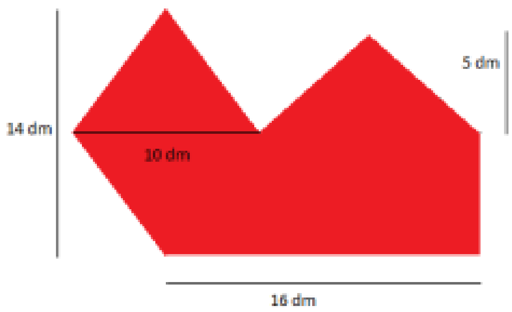


Figura F-8. Calcular su área.

T.4.7 Descomposición de áreas 4

Calcula el área de los siguientes trapecios.

a)

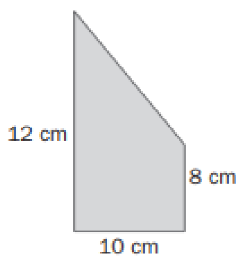


Figura F-9: Trapecio

b)

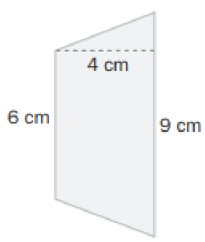


Figura F-10: Trapecio

T.5 Representación de puntos en el plano cartesiano

T.5.1 Ejes 1

Muestra los siguientes puntos en el eje de coordenadas

a) *(2,-5)*
b) *(7,3)*
c) *(-12,-4)*
d) *(-3,5)*

T.5.2 Ejes coordenadas

Indica cuáles son las coordenadas de los puntos marcados en el gráfico adjunto:

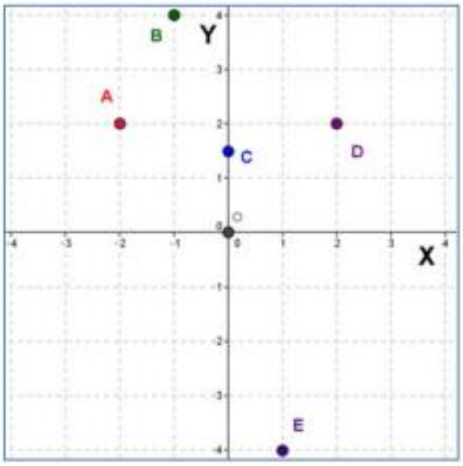


Figura F-11: Puntos del eje de coordenadas

G. Las tecnologías (justificación de las técnicas)

Las tecnologías describen y justifican las técnicas y forman junto a la teoría que, a su vez, da razón de la tecnología, el logos, la lógica, la `justificación del saber hacer`. La actividad matemática puede describirse por tanto como una praxeología, es decir, una mezcla de praxis (campos de problemas y técnicas) y logos (tecnologías y teoría), de técnicas que resuelven campos de problemas y razonamientos que las justifican.

Las tecnologías necesarias en esta unidad para sustentar las técnicas utilizadas son las siguientes:

TEC.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos.

TEC.2 Definición de la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo

TEC.3 Enunciado del Teorema de Pitágoras.

TEC.4 Definición de terna pitagórica.

TEC.1 Clasificación de triángulos según sus ángulos

Para trabajar con triángulos rectángulos es necesario reconocer los triángulos según sus ángulos. Los alumnos necesitan conocer las definiciones de:

- Triángulo rectángulo: se denomina triángulo rectángulo a cualquier triángulo que tiene un ángulo recto, es decir, un ángulo de 90 grados.
- Triángulo obtusángulo: cuando uno de los ángulos es obtuso, o sea, mide más de 90 grados.
- Triángulo acutángulo: aquel cuyos tres ángulos interiores son agudos, es decir, miden menos de 90 grados.

TEC.2 Definición de la hipotenusa y los catetos en un triángulo rectángulo

Conocer cómo se denominan los tres lados de un triángulo rectángulo:

Hipotenusa: es el lado opuesto al ángulo recto en un triángulo rectángulo, resultando ser su lado de mayor longitud.

Cateto: es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo, los que conforman un ángulo recto.

TEC.3 Enunciado del Teorema de Pitágoras.

En todo triángulo rectángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre sus catetos es igual al área del cuadrado construido sobre su hipotenusa.

De la misma forma, se puede enunciar estableciendo que, en todo triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa es igual a la raíz cuadrada de la suma del área de las respectivas longitudes de los catetos.

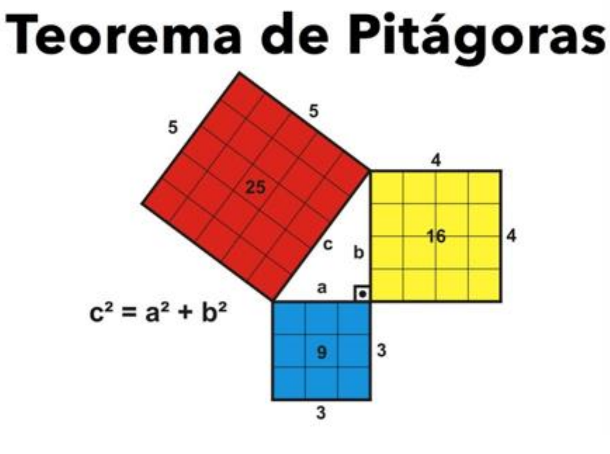


Figura G-1: Teorema de Pitágoras y fórmula

TEC.4 Definición de terna pitagórica.

Se llama terna pitagórica a cualquier conjunto de tres números naturales (a, b, c) para los cuales se cumple la relación $a^2+b^2= c^2$.

H. La secuencia didáctica y su cronograma

H.1 Indica la secuenciación y una duración temporal aproximada de las actividades propuestas en los apartados anteriores.

A la sucesión de tareas que se presentan a los alumnos para enseñar una praxeología matemática se le llama secuencia didáctica. Para analizar y diseñar adecuadamente una secuencia didáctica se definen los momentos de estudio, es decir, las fases que deben darse en el estudio de un objeto para que éste sea completo y tenga la posibilidad de evolucionar bien.

En el campo de problemas del Teorema de Pitágoras los alumnos aprenderán *a través de la resolución de problemas*. Las estrategias consideradas más relevantes tendrán el proceso de institucionalización durante la fase de debate que sucede en cada actividad normalmente antes de terminarla. El momento de institucionalización es el momento en que una técnica que ha demostrado ser útil y la tecnología que la justifica se incorpora al acervo cultural matemático de la clase para que puedan ser citadas explícitamente cuando sea necesario. El docente será el encargado de guiar el aprendizaje, proponiendo actividades que fomenten el razonamiento y no el aprendizaje memorístico. En las actividades en las que se llega a un valor exacto se promocionarán las estrategias más satisfactorias para el docente. Esto servirá para favorecer al resto de la clase a mejorar sus propias estrategias. Si ningún alumno ha conseguido resolver la actividad el docente los guiará a través de la resolución de las actividades.

La propuesta de enseñanza será llevada a cabo en 16 sesiones de 50 minutos cada una. Se pasará a concretar cada una de las sesiones en formato de tabla que haga más claro el reparto temporal (Ver tabla 2).

Se tendrá en cuenta que, a la hora de llevar al aula esta secuencia didáctica, no todo se cumpla como está previsto. Por ello está pensado un margen de error de una sesión por si fuera necesario. Si no es necesario dicha sesión, se usará para repaso u otros aspectos de la asignatura.

La propuesta de secuencia didáctica se ha organizado como se describe a continuación:

Sesión	Descripción	Razón de ser	Campo de problemas	Técnicas	Tecnologías
1	Evaluación inicial				
2	Origen histórico del teorema	RS1			
3	Clasificación de triángulos		CP1		TEC1
4	Acercamiento al teorema	RS2			
5	Enunciado del teorema	RS3			TEC2, TEC3
6	Práctica para trabajar con potencias, raíces cuadradas y ecuaciones			T1, T2	
7	Comprobaciones geométricas		CP2		
8	Prácticas para calcular un lado desconocido en triángulos rectángulos			T3	
9	Aplicación del Teorema en triángulos rectángulos		CP3		TEC4
10	Cálculo de distancias entre dos puntos		CP4		
11	Calcular áreas			T4	
12	Áreas y perímetros de figuras planas		CP5		
13	Áreas y perímetros de figuras planas		CP5		
14	Aplicaciones variadas del teorema		CP6		
15	Prueba de evaluación				
16	Corrección del examen				

Tabla 2: Propuesta didáctica

Sesión 1: Evaluación inicial

La primera actividad a realizar será la evaluación inicial, que se llevara a cabo durante la primera sesión de la unidad y que, como ya se ha especificado previamente, consistirá en una serie de problemas escrita y cuyas preguntas se encuentran en el apartado C.3.

Sesión 2: Origen histórico del teorema

Como sesión introductoria se realizará la actividad propuesta como razón de ser 1 (RS1) que muestra a los alumnos una perspectiva temporal del uso del teorema a lo largo de la historia.

Sesión 3: Clasificación de triángulos

En la tercera sesión se abordará el primer campo de problemas (CP1), compuesto por actividades relacionadas con la clasificación de triángulos según sus ángulos. Para resolver correctamente los problemas planteados en esta sesión será necesario conocer los diferentes tipos de triángulos (TEC1).

Sesión 4: Acercamiento al teorema

En la cuarta sesión se producirá ya un acercamiento al teorema mediante el problema que constituye la razón de ser 2 (RS2) que calcula de la hipotenusa de un triángulo rectángulo sin utilizar el Teorema de Pitágoras.

Sesión 5: Enunciado del teorema

Para que los alumnos "descubran" el enunciado del teorema se realizará el tercero de los problemas de razón de ser 3 (RS3) que manejará la idea de que el teorema de Pitágoras es una relación de áreas. Se institucionalizará posteriormente dos tecnologías, las referentes al enunciado del teorema y la definición de hipotenusa y los catetos. (TEC2 y TEC3).

Sesión 6: Práctica para trabajar con potencias, raíces cuadradas y ecuaciones

En esta sesión se practicará con los ejercicios correspondientes a las dos primeras técnicas (T1 y T2) para poder afrontar con mayores garantías los campos de problemas de las siguientes.

Sesión 7: Comprobaciones geométricas del Teorema de Pitágoras

Se realizará el campo de problemas 2 (CP2), sobre demostraciones geométricas del, una vez que los alumnos ya conocen el Teorema de Pitágoras.

Sesión 8: Prácticas para calcular el lado desconocido del triángulo

En la sesión 8 se practicarán los ejercicios relativos a la técnica 3 (T3) para calcular, ya sea la hipotenusa o uno de los catetos, uno de los lados del triángulo y el campo de problemas 3 de la siguiente sesión lo puedan realizar los alumnos de forma más asequible.

Sesión 9: Teorema en triángulos rectángulos

Se realizará en esta sesión los problemas relativos a las aplicaciones del teorema en triángulos rectángulo. Se institucionalizará en esta sesión la definición de terna pitagórica (T4).

Sesión 10: Cálculo de distancias

Los alumnos dedicarán toda la sesión a realizar los problemas para calcular distancias (CP4).

Sesión 11: Práctica para calcular áreas

En la sesión 11 se practicarán los ejercicios relativos a la técnica 4 (T4) para calcular áreas de figuras planas. Servirán a los alumnos de gran ayuda para afrontar el campo de problemas de áreas de figuras planas mediante Pitágoras.

Sesión 12: Áreas y perímetros de figuras planas

Durante dos sesiones los alumnos harán el campo de problemas 5 (CP5) sobre áreas y perímetros de figuras planas.

Sesión 13: Áreas y perímetros de figuras planas

Continuación por parte de los alumnos del campo de problemas 5.

Sesión 14: Aplicaciones variadas del teorema

En la última sesión antes de la prueba de evaluación los alumnos afrontarán problemas variados y algo más complicados en el campo de problemas 6 (CP6).

Sesión 15: Prueba de evaluación

Esta sesión está dedicada a que los alumnos hagan la prueba escrita de evaluación que se detalla en el próximo apartado I de la presente propuesta.

Sesión 16: Corrección del examen

La última sesión se dedicará a la corrección conjunta del examen. El docente dará a cada alumno su examen, en el que se detallarán los fallos de cada uno con consejos para que no vuelvan a ocurrir.

En los casos que sea necesario, los alumnos repetirán los problemas que no estén correctos, en esta ocasión con el apoyo de lo trabajado en su cuaderno a lo largo de la unidad.

I. La evaluación

Se tratará en este apartado el tema de la evaluación sobre el objeto matemático estudiado para ver lo que han aprendido los usuarios.

I.1 Prueba escrita que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

La prueba escrita tendrá una duración de 50 minutos y se realizará en horario de clase.

Estará compuesta por cinco preguntas para evaluar los diferentes aspectos. Su puntuación total será de 10 puntos. Cada pregunta viene con su correspondiente puntuación. La calificación del examen constituirá el 80% de la puntuación.

El 20 por ciento restante será de la siguiente forma:

- 15% en la revisión del cuaderno. Es muy importante la presentación del cuaderno que facilita la adquisición de los conocimientos por parte del alumno, así como la corrección de ejercicios incorrectos.
- 5% por la entrega de ejercicios voluntarios propuestos.

Las preguntas de la prueba escrita son las siguientes:

1. *Halla la longitud de los lados desconocidos de los siguientes triángulos rectángulos. (1,5 puntos)*

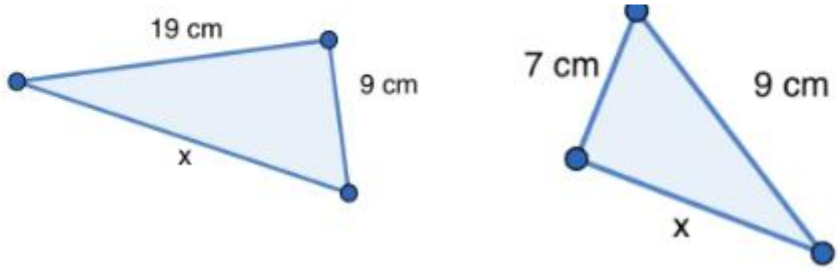


Figura I-1: Triángulos rectángulos

2. *Comprueba si los siguientes segmentos forman triángulos rectángulos. (2 puntos)*
   a) *25, 34 y 7 milímetros.*
   b) *12,15 y 4 milímetros*
   c) *8,15 y 12 milímetros*
   d) *2,5 centímetros, 10 y 14 milímetros*

3. *Resolver las siguientes medidas en centímetros: (2,5 puntos)*

   a) *Halla la medida en centímetros de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 10 cm.*
   b) *Halla la medida en centímetros de la altura de un rectángulo, cuya base mide 35 cm y su diagonal 37 cm.*

4. *Una escalera de 65 decímetros se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 25 decímetros de la pared. ¿Qué altura, en decímetros, alcanza la escalera? (2 puntos)*

5. *Calcular el valor de X e Y en la siguiente figura: (2 puntos)*

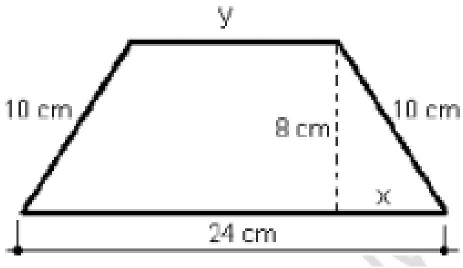


Figura I-2: Calcular X e Y.

I.2 ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

La prueba de evaluación consta de ejercicios prácticos que aplican los conocimientos teórico-prácticos del objeto matemático tratado, el Teorema de Pitágoras.

Los aspectos a evaluar del conocimiento con las preguntas son los siguientes:

Pregunta 1

La pregunta trabaja sobre una de las técnicas vistas anteriormente, hallar en dos triángulos rectángulos la hipotenusa o un cateto conociendo los otros dos lados. El alumno deberá realizar operaciones potencias y raíces cuadradas y despejar la ecuación.

Pregunta 2

Se pretende evaluar en esta pregunta si el alumno conoce los diferentes tipos de triángulos y que sepa que debe de cumplir un triángulo para ser rectángulo. La tecnología empleada será la teoría de la clasificación de triángulos que establece el currículo.

Pregunta 3

La pregunta exige a los alumnos conocer dos figuras geométricas como son el cuadrado y el rectángulo. Los alumnos deberán conocer de nuevo el propio Teorema y su utilización para el cálculo de la diagonal y la altura de un cuadrado y rectángulo respectivamente.

Pregunta 4

La pregunta es similar en su formato a la primera pregunta ya que busca encontrar que longitud tiene uno de los catetos. Esta pregunta tiene un enunciado menos formal y está contextualizado. Probablemente los alumnos realicen un dibujo de la situación para que su resolución sea más sencilla. Deberán recordar las técnicas utilizadas para el cálculo de raíces cuadradas, potencias y despejar una ecuación para encontrar la solución.

Pregunta 5

Esta pregunta tiene como objetivo calcular los lados pedidos descomponiendo una figura en otras conocidas. Las técnicas utilizadas implicarán el manejo de operaciones como raíces cuadradas y potencias y la descomposición de la figura pedida en otras de las cuáles el alumno pueda conocer su área o perímetro.

I.3 ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

Las respuestas que se espera de los alumnos en función de sus conocimientos son las siguientes:

Pregunta 1: dentro del contexto de un triángulo rectángulo la aplicación del Teorema aquí es directa. Los principales errores que se pueden cometer son errores de operaciones elementales, como elevar al cuadrado, realizar mal la raíz cuadrada, despejar de forma incorrecta la ecuación o equivocarse con las longitudes de medida.

Pregunta 2: se espera que los alumnos, una vez realizado en las sesiones la explicación de los diferentes tipos de triángulos, sean capaces de discriminar los tipos. El primer error, por desconocimiento u olvido de la tecnología correspondiente, sería no saber las características de los distintos tipos. Otros errores, podrían venir de calcular de forma errónea las operaciones o no reconocer la hipotenusa como el lado mayor.

Pregunta 3: los alumnos deberán reconocer las figuras geométricas del problema. Los posibles errores pueden venir de realizar erróneamente la descomposición de figuras, fallos en las operaciones comunes (sumas, restas, potencias, raíces cuadradas), o el olvido o desconocimiento de las propiedades del teorema.

Pregunta 4: en esta pregunta, en la que los alumnos deben averiguar un cateto siendo los otros lados conocidos, los principales fallos que podrían cometer los alumnos vendrían de una interpretación incorrecta del enunciado y por tanto un dibujo del enunciado erróneo, no saber qué lado del triángulo deben averiguar, si un cateto o la hipotenusa, o errores en las operaciones comunes.

Pregunta 5: esta pregunta parte de la idea de que los alumnos reconozcan la figura y sepan descomponerla de forma correcta. Algunos de los fallos posibles por parte de los alumnos pueden venir desconocimiento de la figura geométrica que se les pregunta y sus propiedades o fallos en las operaciones o equivocaciones en el lado a calcular.

I.4 ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Por supuesto, a la hora de enseñar y aprender una materia, la evaluación juega un papel de gran relevancia porque es una forma de saber si el alumno ha aprendido lo que se le ha enseñado. Además, la evaluación también nos servirá para ver si se han alcanzado los objetivos propuestos por el docente.

Los criterios de calificación que se emplearán estarán basados en el *modelo de tercios* (Gairín, Muñoz y Oller, 2012)

Las decisiones y actuaciones que calificarán la respuesta de un alumno a un determinado problema se basan en: (Véase Figura I-7)

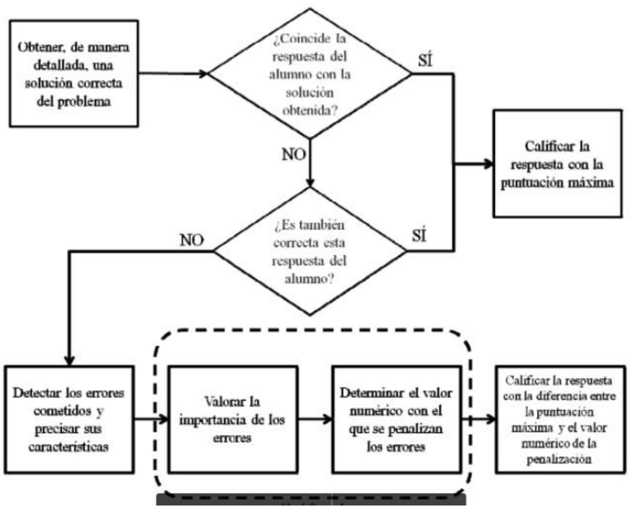


Figura I-3: Decisiones y actuaciones para calificar una respuesta[21]

Apoyándose en el gráfico anterior se basará la calificación en dos propuestas:

1. *Tipología y jerarquización de las tareas*

   Los problemas que se proponen en los exámenes exigen realizar tareas de distinta naturaleza:

   - Tareas principales

     Son las tareas que forman parte del objetivo principal de la calificación:

[21] Imagen de la investigación de Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

valoran la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos de los temarios.

- Tareas auxiliares

  Cuya finalidad es la de obtener las informaciones necesarias para dar respuestas al problema. Dentro de las tareas auxiliares hay dos grandes grupos de tareas: las específicas y las generales.

  - Tareas auxiliares específicas

    Aquellas que juegan un papel de instrumento para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos.

  - Tareas auxiliares generales

    Las tareas matemáticas que ha realizado un alumno a lo largo de su formación matemática anterior.

2. *Penalización de errores*

Se realiza de acuerdo al siguiente esquema (Véase Figura I-8):

Figura I-4 Modelo de tercios[22]

La utilización de este modelo de penalización de errores limita la subjetividad de la calificación evitando la valoración absoluta de los errores. Los errores no son “leves” o

[22] Imagen de la investigación de Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

“graves” en sí mismos, sino que su importancia está asociada a la tarea a la que pertenecen y la relación de esta tarea con el objetivo principal de la evaluación. Este modelo limita la penalización de los errores con tareas auxiliares solo a una parte de la puntuación.

Si aplicamos el modelo anterior a la prueba citada anteriormente tendríamos las siguientes tareas principales, tareas auxiliares específicas y generales en cada pregunta:

Pregunta 1: la tarea principal de la pregunta es el cálculo del lado que falta por averiguar del triángulo rectángulo. La tarea auxiliar específica es la aplicación del resultado del Teorema de Pitágoras y su conocimiento y la tarea auxiliar general es el manejo en las operaciones elementales como son la suma, la resta, las potencias y las raíces cuadradas y la resolución de una ecuación.

Pregunta 2: la tarea principal de esta pregunta es clasificar un triángulo. Como tarea auxiliar específica vuelve a estar la aplicación del Teorema. Como tareas auxiliares generales coincidirán con las de la primera pregunta añadiendo el concepto de igualdad y desigualdad en una ecuación.

Pregunta 3: la tarea principal de la pregunta es el cálculo del perímetro y área de una figura plana. La tarea auxiliar específica implica conocer las propiedades de una circunferencia. Como tareas auxiliares generales se encuentran las operaciones básicas elementales, el reconocimiento de la figura geométrica y la relación de las áreas y perímetros de las figuras.

Pregunta 4: la tarea principal es el cálculo del lado que falta del teorema. La tarea auxiliar específica es la aplicación del teorema y su conocimiento. Como tareas auxiliares generales serán de nuevo las operaciones básicas elementales y la resolución de ecuaciones de segundo grado.

Pregunta 5: la tarea principal de la pregunta es el cálculo de los lados desconocidos de la figura. La tarea auxiliar específica implica la descomposición de la figura que nos dan en triángulos rectángulos o figuras conocidas para así calcular los lados que nos faltan. Las tareas auxiliares generales implican el conocimiento de la figura trabajada y sus características.

J. Conclusión

En el marco teórico de este trabajo de fin de Máster (TFM) creo que ha quedado patente la necesidad de la implantación de metodologías pedagógicas activas basadas en la participación del alumno y que respondan a sus necesidades con el fin de que favorezcan su desarrollo integral.

Creo que es muy destacable también, en la era de las TIC, y un avance, no sólo para las matemáticas, sino para todas las materias, la posibilidad de utilizar herramientas tecnológicas y matemáticas como, por ejemplo, Geogebra y Desmos que facilitan la construcción de conocimiento por parte del alumno, favorecen el aprendizaje autónomo e incluyen elementos que permiten captar la atención del alumno a de una forma mayor que otras herramientas más clásicas como la pizarra.

En cuanto al objeto matemático desarrollado en este TFM, el Teorema de Pitágoras, creo que se ha conseguido ver que hay “más allá” del teorema, de su famosa fórmula y que los alumnos vean, de forma clara, las posibles utilizaciones del teorema en diferentes problemas.

K. Sobre la bibliografía y páginas web

K.1 Libros, artículos y páginas web revisadas para la realización de este trabajo.

Para realizar este trabajo se han revisado las siguientes las siguientes referencias bibliográficas. He dividido las referencias en libros y apuntes, artículos de referencia, recursos web, documentos oficiales y otras fuentes.

- **Libros y apuntes de referencia**

Arce Sánchez, M., Conejo Garrote, L., Muñoz Escolano, J.M. (2019) Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.

Apuntes de la asignatura “Diseño curricular e instruccional de matemáticas”. Muñoz Escolano, J.M. (2021-2022)

Apuntes de la asignatura “Diseño de actividades de aprendizaje de matemáticas”. Arnal Bailera, A. (2021-2022)

Apuntes de la asignatura “Innovación e investigación educativa en matemáticas”. Martínez Juste, S. (2021-2022)

- **Libros de texto**

Colera Jiménez, J., Gaztelu Albero, I., Colera Cañas, R. (2017). Matemáticas 2º ESO. Editorial Anaya

Nieto, M., Pérez A., Alcaide F. (2016). Matemáticas 2º ESO. Editorial SM.

Rodrigo J., Hernández R., Encabo J.A. (2014). Marea Verde.

Martínez J., (1977). Matemáticas 8º EGB. Editorial SM.

- **Artículos de referencia**

Autino, B., Digión, M., Llanos L., Marcoleri M., Montalvetti P., Soruco O. (2011). Obstáculos didácticos, ontogenéticos y epistemológicos identificados desde la comunicación en el aula de clase. XIII CIAEM-IACME.

Barrantes, María, Zamora, V. y Barrantes, Manuel (2021). Las demostraciones dinámicas dentro del Teorema de Pitágoras. Revista de Educación Matemática, 36, 27-42.

Barrantes López, M. (1990). Pitágoras en el país de los puzles. Campo Abierto, 7, 221-230.

Barrantes López, M., Mejía López, A., Zapata Esteves, Marcos (2017). El teorema de Pitágoras mediante software de geometría dinámica. Campo abierto, 36(2), 151-166.

Barreto García, Julio (2009). Otras deducciones o extensiones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Revista Números, 70, 35-51.

Barreto García, Julio (2010). Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. Revista Unión, 23, 71-91.

Beltrán-Pellicer, P. (2022). El teorema de Pitágoras a través de la resolución de problemas. La Gaceta de la RSME, 25(1), 149-169.

Blanco, J.L. (1993). Una clasificación de problemas matemáticos. Revista Épsilon 25, 49-60.

Cañadas, M.C. (2001). Demostraciones del Teorema de Pitágoras para todos. Actas de las jornadas de Investigación en el aula de matemáticas: atención a la diversidad. (111-116).

Cruz, L.J. Teutili P., Juárez J.A. (2020) Análisis comparativo de la autenticidad de tareas matemáticas en libros de texto de bachillerato mexicanos y cubanos: el caso del Teorema de Pitágoras. Revista Épsilon 106, 19-34.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

González P.M. (2008). El Teorema llamado de Pitágoras. Una historia geométrica de 4000 años. Sigma, 32, 103-130.

Grupo Alquerque (2003). Rompecabezas del teorema de Pitágoras. Revista Suma, 43, 119-122.

Grupo GIMED (Grupo de estudio interdisciplinario en Matemática, Educación y Desarrollo). (2018) Didáctica del teorema de Pitágoras mediada por las TIC: el caso de una clase de Matemáticas.

Gutiérrez-Rubio, D., León-Mantero, C., Madrid-Martín M.J., Sánchez-Compaña, M.T (2018). Introducción del Teorema de Pitágoras y del Teorema del Coseno mediante el uso de balanzas. Revista Épsilon 100, 89-97.

Iglesias, L.M. (2017). Demostraciones del Teorema de Pitágoras con goma EVA. STEAM en el aula de Matemáticas. Revista Epsilon 97, 57-64.

Lamarca, J. (2006). Una nueva demostración geométrico-algebraica del teorema llamado de Pitágoras. Revista Suma, 52, 142.

Mercado, A. I. (2007). Matemáticas el primer día de curso, un nuevo enfoque de la evaluación inicial. Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, (56), 63

33-38.

Moreno, N., Alvarado, M., Angulo, R. G. & Briceño, E. C. (2020). Una aproximación al estudio del teorema de Pitágoras con estudiantes de secundaria. Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 13(2), 5-24.

Nagel, M., Vega, M. La validación del Teorema de Pitágoras: de YouTube a la demostración euclidiana.

Puertas, M.L. (1996). Euclides: Elementos. Gredos. Madrid. Libro I, página.260, Proposición I.47.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. PNA, 4(1), 1-14.

Vargas Vargas, G., Gamboa Araya, R. (2013) *El Modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría*. Revista Uniciencia, Vol. 27. 1, 74-94.

Troyano Dueñas, J., Flores Martínez, P. (2016). *Percepción de los alumnos acerca del teorema de Pitágoras*. Revista Épsilon 94, 33(3), 51-60

- **Recursos web[23]**

Artacho, A. Matemáticas cercanas. Teorema de Pitágoras[24].

https://matematicascercanas.com/2019/02/16/teorema-de-pitagoras/

Beltrán-Pellicer, P. Tierra de Números[25]

https://tierradenumeros.com/post/hilo-descubriendo-pitagoras/

Bogolmony, A. Demostraciones del Teorema de Pitágoras[26]

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

---

[23] La última fecha de consulta de todos los recursos web citados ha sido la del día de finalización de este TFM para comprobar que son recursos web veraces y que existen.

[24] Amadeo Artacho es profesor de Matemáticas en E.S.O., Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, Ingeniero Técnico de Obras Públicas y con Máster Universitario en Formación del Profesorado de Educación Secundaria en la especialidad de Matemáticas, por el que obtuve el Premio al Mejor Expediente Académico en la Universidad de Extremadura.

25 Pablo Beltrán-Pellicer es profesor e investigador del área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Zaragoza.

[26] Alexander Bogomolny fue profesor de Matemáticas en la Universidad de Iowa antes de convertirse en desarrollador de software.

Lopez, A. Pruebas del Teorema de Pitágoras en Geogebra[27]

https://www.geogebra.org/m/j6wRRyxB

Rodríguez Santos, A. Epsilones Pitágoras[28]

https://www.epsilones.com/paginas/0-bestiario/bestiario-teorema-pitagoras.html

University of Cambridge. Faculty of Mathematics. Problemas sobre Pitágoras

https://nrich.maths.org/8748

University of Cambridge. Faculty of Mathematics. Problemas cortos de trigonometría y Pitágoras

https://nrich.maths.org/9344

Torres López, V.M. Demostraciones del Teorema de Pitágoras en Geogebra

https://www.geogebra.org/m/BnPMKV3z

Teorema de Pitágoras. Web especializada en temas del Teorema de Pitágoras.

https://teoremapitagoras.com/

MathShell[29]. Encontrar el camino más corto

https://www.map.mathshell.org/download.php?fileid=1694

Gobierno de Aragón. Educaragón
https://educa.aragon.es/

[27] Alvaro Lopez muestra 28 pruebas dinámicas, tanto geométricas como algebraicas, del Teorema de Pitágoras.

[28] Alberto Rodriguez Santos ha sido profesor de Secundaria durante veintiocho años.

[29] Mathematics Assessment Project es parte de la iniciativa de la fundación Bill y Melinda Gates. En la web colaboran Shell Center for Mathematical Education, University of California at Berkeley y The University of Notthingham