Trabajo Fin de Máster

PROPUESTA DE SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES EN 2ºESO

DIDACTIC SEQUENCE PROPOSAL FOR TEACHING FUNCTIONS IN 2nd ESO

Autor

María José Tortajada Pérez

Director

Víctor Manero García

Facultad de Educación

Año 2021-2022

ÍNDICE:

ÍNDICE DE TABLAS:

I. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar.

En este trabajo de final de máster se va a tratar el objeto matemático de función.

Lo primero que vamos a hacer será dar una definición rigurosa de este objeto para poder entender bien este concepto y luego se darán las definiciones más comunes que suelen aparecer en los libros de texto al nivel en el que vamos a trabajar.

Como señalan los autores Azcárate y Deulofeu (1990), en el mundo actual, y más concretamente en los medios de comunicación, la mayor parte de la información que hacen referencia a los fenómenos de cambio, bien sean los de carácter económico, deportivo, meteorológico y político, se difunde a través de tablas y de gráficas, que son dos de las formas de expresar una relación funcional. Asimismo, en el campo de la enseñanza de las ciencias (física, química, biología o ciencias sociales), uno de los objetivos principales es la obtención de modelos matemáticos que permitan comprender mejor cómo ciertas magnitudes dependen de otras y expresarlos de forma sencilla, ya sea mediante gráficas de forma más visual y tablas, o bien mediante fórmulas que constituyan la expresión más abstracta de una función.

Según Azcárate y Deulofeu (1990, p. 11), “el objetivo fundamental debería ser el de capacitar a los alumnos para el tratamiento correcto de la información, y en particular, aquella relacionada con el concepto de función”.

El concepto de función está presente en toda la matemática y es la herramienta por excelencia en las áreas que buscan modelar o describir las actividades cotidianas y los fenómenos que se perciben en el mundo que nos rodea. Como tal, es fundamental comprender que el concepto de función no debe enseñarse como un ente abstracto, sino que debe tenerse presente que surgió como una respuesta para el entendimiento de fenómenos naturales y situaciones cotidianas alrededor del hombre (Ugalde, 2014, p. 2).

En algunos estudios de funciones realizados (Breidenbach et al., 1992; Leinhardt et al.,1990; Vinner y Dreyfus, 1989) se ha notado que la definición matemática de función ha evolucionado considerablemente. Inicialmente, las funciones se caracterizaron como reglas explícitas que asignaban números a otros números. Con el tiempo, la noción de función se hizo más general: una función podía tomar cualquier tipo de objeto como sus entradas o salidas y cualquier correspondencia puede ser una función, independientemente de si la regla para la función se puede establecer explícitamente o no.

Esta misma idea también la señalan Arce et al. (2019, p.310): "El desarrollo de la noción de función ha requerido un amplio proceso histórico y la contribución de muchos matemáticos ilustres". Destacan algunas definiciones de función que han dado Bernoulli, Euler y Dirichlet. Y que se citan a continuación: Bernoulli (1718) define el concepto de función como:

"Una magnitud variable como una expresión analítica, compuesta por esta magnitud y por constantes".

Euler (1755) dice:

"Cuando unas cantidades dependen de otras de tal forma que al variar las últimas también varían las primeras, entonces a las primeras se les llaman funciones de las segundas".

Y, por último, Dirichlet (1837) define función como:

"y es función de x si a cada valor de x le corresponde un valor completamente determinado de y además, no es tan importante el método con el cual se establece la correspondencia señalada".

Según se comenta en el libro de Arce et al. (2019, pp. 310-311) "las introducciones formales del concepto de función suelen recurrir a esta última definición […] mientras que la idea de función como variación entre cantidades o magnitudes variables […]resulta más útil en las primeras etapas del aprendizaje del concepto".

Otros autores han dado definiciones distintas del concepto de función, a continuación, se detallan algunas.

"Una función se define a veces como una asociación entre números; por desgracia, la palabra "asociación" se salva de las objeciones planteadas contra la palabra "regla" sólo por el hecho de que es todavía más vaga." (Spivak, 1968).

Según algunos matemáticos existe una manera satisfactoria de definir funciones. Pero también aseguran que encontrar una definición satisfactoria no puede consistir en encontrar sinónimos de palabras dificultosas.

> La definición que los matemáticos han aceptado finalmente para función es un ejemplo de los medios que han permitido incorporar las ideas intuitivas a la matemática rigurosa. Lo que de verdad importa preguntar acerca de una función no es ¿qué es una regla?, o ¿qué es una asociación?, sino ¿qué es lo que hace falta saber acerca de una función para saber absolutamente todo lo referente a ella? La contestación a la última pregunta es fácil: para todo número x hace falta saber cuál es el número $f(x)$, (Spivak ,1968).

Spivak también asegura que una función no puede definirse como una colección cualquiera de pares de números, es necesario eliminar posibles ambigüedades. Por ello, introduce la siguiente definición: Una función es una colección de pares de números con la siguiente propiedad: Si (a, b), (a, c) pertenecen ambos a la colección, entonces $b = c$; en otras palabras, la colección no debe contener dos pares distintos con el mismo primer elemento (Spivak, 1968).

Otra definición que se sigue de esta definida anteriormente es la siguiente:

Si f es una función, el dominio de f es el conjunto de todos los $a\acute{}s$ para los que existe algún b tal que (a, b) está en f. Si a está en el dominio de f, se sigue de la definición de función que existe, en efecto, un número b único tal que (a, b) está en f. Este b único se designa por $f(a)$.

Por último, lo que destaca Spivak es que “lo importante de una función f es que el número $f(x)$ esté determinado para todo número x de su dominio” (Spivak, 1968).

Cabe destacar también que en la comunidad matemática se utilizan dos nociones de “función”: la definición de la teoría de conjuntos como conjunto univalente de pares ordenados y como el triple de Bourbaki. Éste último la define de la siguiente manera:

Una función viene dada como un triple f, A, B, donde A y B son conjuntos y f es un subconjunto univalente y total de $A \times B$. Es decir, para todo x en A (total), existe un único y en B (univalente) tal que $(x,\ y)$ es miembro de f. El conjunto A se llama dominio de la función, B es el codominio y f es la gráfica, (Mirin et al., 2020, p. 1157).

Como dato anecdótico podemos decir que Bourkaki nunca existió como tal, no era una persona en concreto sino un conjunto de matemáticos que se asociaron para trabajar conjuntamente y quienes optaron por llamarse bajo ese pseudónimo. Entre estos matemáticos destacan Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Dieudonneé y André Weil.

Otra definición de función que se da es la de los pares ordenados. Forster (2003) señala, “algunas culturas matemáticas... [dicen] que una función es un triple ordenado de dominio, rango y un conjunto de pares ordenados”. Más tarde, Forster se refiere a la definición alternativa de una función como:

> Una función es cualquier conjunto de funciones de pares ordenados que satisface que si (x, y_1)y (x, y_2) están en f, entonces y_1 e y_2 son iguales. En este caso, el dominio de f es el conjunto de todos los números x tales que existe algún y donde (x, y) es un miembro de f. En estas funciones no hay un codominio único, (Mirin et al., 2020).

Estas definiciones implican diferentes interpretaciones y respuestas a preguntas matemáticas y hacen hincapié en propiedades que tienen las funciones pero que no aparecen en los libros de texto y las definen de una forma más general y haciendo uso de más contenido matemático.

Vista la definición rigurosa (algunas de ellas) que existe del objeto matemático que nos ocupa, vamos a definir ahora este objeto de la forma en la que se define en los libros de texto. En ellos, la definición del objeto siempre es más sencilla y adaptada al vocabulario de los alumnos. No es tan rigurosa ni formal. En los libros que han sido consultados para la realización de este trabajo (editorial Edebé, Edelvives, Anaya y Vicens Vives), se define función como:

> “Una relación de dependencia entre dos variables en la que a cada valor de la variable independiente le corresponde un único valor de la variable dependiente”.

En algunos libros a ese único valor de la variable dependiente se le denomina imagen de x (en el texto de la editorial Edelvives y Vicens Vives), sin embargo, en otros libros no se menciona esa denominación, simplemente dicen que existe ese único valor (en el de la editorial Anaya, Edebé). Incluso, en algunos la definen como una relación entre dos magnitudes (variable dependiente y variable independiente). Este es el caso del libro de la editorial Mc Graw Hill.

En este trabajo nos centraremos en el estudio de las funciones en el nivel de 2º ESO en la asignatura de matemáticas.

En relación con los campos de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático que pretendo enseñar cabe destacar que la idea a groso modo es que los alumnos sean capaces de identificar funciones en distintos contextos, que sepan clasificar las variables que se proponen en problemas de enunciado verbal en variables dependientes e independientes y que reconozcan la relación que hay entre ellas.

Por ello, se trabajarán diversos tipos de problemas que podemos englobarlos en campos de problemas, los cuales se resolverán usando unas técnicas o métodos de resolución que estarán sustentados por una tecnología.

Veamos qué campo de problemas queremos enseñar en este nivel y cuáles serán las técnicas que los resuelven y sus tecnologías asociadas:

- <u>Campo de problemas 1: Representación e interpretación de puntos en el plano.</u> La técnica empleada para estos problemas será: la primera coordenada del punto corresponde a la distancia que hay hasta el eje vertical, la segunda coordenada será la distancia al eje horizontal. La tecnología asociada es la definición de coordenada y la representación gráfica.
- <u>Campo de problemas 2: Identificación de gráfica y clasificación según es función o no</u>. La técnica es: Sobre la gráfica observar que, si a cada punto de x le corresponde un único valor de y, entonces será función, si le corresponden más valores, no lo será. La tecnología es la definición del propio concepto de función.
- <u>Campo de problemas 3: Corte con los ejes.</u> La técnica es: Sustituir x por el valor 0 para calcular el corte con el eje Y, y sustitución de y por 0 para el corte con el eje X. La tecnología usada es la definición de corte con los ejes y la resolución de una ecuación de primer grado.
- <u>Campo de problemas 4: Estudio de una gráfica, crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad.</u> Las técnicas son: para que una función sea creciente, al aumentar el valor de x aumenta el valor

de y correspondiente y, para que sea decreciente, al aumentar x disminuye y. Para que haya máximo relativo en un punto, a la izquierda del mismo debe ser creciente la función y a la derecha decreciente y para que sea mínimo relativo, debe ser al contrario. Para ser continua debe ocurrir que podamos dibujar su gráfica sin levantar el lápiz del papel. Las tecnologías asociadas son las propias definiciones de los conceptos.

- Campo de problemas 5: Cambio de forma de representación de una función definida por un enunciado verbal, una tabla de valores o una ecuación para pasar a la representación gráfica. La técnica empleada es: Dependiendo desde qué representación partamos debemos hacer más pasos o menos, pero la idea es plantear la ecuación que modeliza el enunciado verbal, dar una tabla de valores sustituyendo la x por valores y calculando las respectivas $y´s$, y luego dibujar los puntos obtenidos en una gráfica. La tecnología es la definición de los conceptos que para cada caso se estén utilizando.
- Campo de problemas 6: Cálculo de pendientes. La técnica empleada es buscar sobre la gráfica dos puntos y utilizar la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ para obtener la pendiente de la recta. Se deben sustituir las coordenadas de los puntos elegidos. Si m es positiva, será creciente la función y si es negativa, será decreciente. Esta técnica sólo vale para rectas. La tecnología es la definición de pendiente y la representación gráfica.
- Campo de problemas 7: De la tabla de valores, la gráfica o el enunciado verbal a la ecuación de la función. La técnica usada es: coger dos puntos de la tabla o de la gráfica, calcular la pendiente con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ y calcular n que es la coordenada y del punto de corte con el eje Y. Si el enunciado ya nos proporciona la ecuación de la función únicamente debemos distinguir cuál es la pendiente (el coeficiente de la x) y cuál es la ordenada (el término independiente). Esta técnica sólo vale para rectas. La tecnología empleada es la definición de la pendiente y la resolución de la fórmula en el caso de que nos den la tabla o la gráfica; para el caso en el que se proporciona la ecuación es aplicar la definición de pendiente y ordenada para obtenerlas.

II. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático.

El objeto matemático se introduce ya en 6º Primaria (Orden ECD/850/ 2016, del 29 de julio que modifica la Orden 16 de junio de 2014 por la que se aprueba el currículo de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Aragón). Aunque no se introduce el concepto de función de manera formal, sí que se hace una breve mención al sistema de coordenadas cartesianas y a la descripción de posiciones y movimientos en el plano. Además, podemos decir que ni siquiera se especifica un bloque como tal de funciones, sino que se ve como un apartado situado dentro del Bloque 4 de Geometría.

La primera vez que se introduce el concepto de función es en 1º ESO (según se recoge en la Orden ECD/489/2016, del 26 de mayo por la que se aprueba el currículo de Educación Secundaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón). Este concepto se encuadra dentro del Bloque 4 de Funciones, en este nivel ya hay un bloque específico en el que se sitúan las Funciones para su estudio.

En estos niveles se enseñan unas herramientas (sistema de coordenadas cartesianas, ejes cartesianos, tablas de valores, así como la presentación de gráficas de funciones mediante la construcción de las respectivas tablas) para el posterior estudio de las funciones. Pero no tienen nada que ver con el estudio de las funciones por su razón de ser históricas.

En 2º ESO, según se recoge en la Orden ECD/489/2016, del 26 de mayo, se da una introducción al concepto de función más general y se introducen diversas características de las funciones (crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, cortes, continuidad, distintas maneras de presentación de funciones…).

En este apartado estudiaremos una serie de libros de texto fijándonos en los contenidos que aparecen en cada uno de ellos y en la manera en cómo se define el objeto matemático el cual se estudia en este trabajo. Los libros que estudiaremos corresponden a las editoriales: Edelvives (Martí et al., 2007), Anaya (Colera y Gaztelu, 2008), Vicens Vives (Pancorbo, 2008), Mc Graw Hill (Becerra et al., 1996) y Edebé (Fuster y Martínez, 1997).

En todos ellos, el modelo docente que se trabaja es el de la enseñanza para la resolución de problemas, ya que primero se introducen las definiciones de los conceptos y luego se aplican esos conocimientos sobre los ejercicios.

De modo genérico, podemos decir que la definición de función que se da en todos los libros estudiados es la de relación de dependencia entre dos variables, como ya se ha especificado en el apartado anterior.

En los libros analizados se justifica la introducción del objeto matemático de la siguiente manera: El libro de la editorial Edebé introduce las funciones ante la necesidad de modelizar problemas relacionados con la vida real, en este caso, las presenta contextualizándolas con problemas económicos (coste en función del consumo) y la introducción de las coordenadas las presenta como la necesidad de tener un sistema de referencia para orientarse geométricamente (contextualizando un problema en una urbanización) En el libro de texto de la editorial Mc Graw Hill se introduce el objeto como la necesidad de relacionar magnitudes que se dan en muchas situaciones cotidianas, como por ejemplo, relaciones entre distancia y tiempo o entre temperatura y tiempo. En el texto de Anaya también se introducen como una relación entre magnitudes en problemas contextualizados (profundidad- temperatura, presión- temperatura). En el libro de Edelvives se presentan las funciones en un problema contextualizado que relaciona el peso y la masa de una ballena. Y, por último, en el texto de la editorial de Vicens Vives se menciona que los modelos funcionales son los más extendidos de las matemáticas y que ayudan a predecir y a descubrir comportamientos futuros.

A continuación, se puede ver una tabla resumen de los contenidos que menciona la ley LOMCE (Ley 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa) y que aparecen en los libros de textos estudiados: (Véase Tabla 1).

Tabla 1: Contenidos que marca la ley LOMCE para 2º ESO.

CONTENIDOS / LIBROS DE TEXTO	EDE	AN	VIC	MC	ED
Coordenadas Cartesianas	128	221	230	206	70
Representación de puntos	128	221	230	207	70
Concepto de función y variables	130	222	233	215	72
Presentación en lenguaje habitual	130	220	233	222	

Presentación en formato tabla	131	224		209	76
Representación en forma de gráfica	130	224	234	209	77
Representación en formato fórmula		225		213	74
Crecimiento, decrecimiento	134	223	236	211	79
Continuidad, discontinuidad			235		79
Cortes con los ejes	133		235		78
Máximos y mínimos relativos	134	223	237	212	79
Funciones lineales, pendiente		227	238	216	77
Representación a partir de ecuación	137	231		213	
Obtención de ecuación con gráfica		231			
Uso de programas de ordenador	141				80

Las abreviaturas que se citan en la tabla son las de las editoriales de los libros usados para el análisis. Así la abreviatura EDE corresponde a la editorial Edelvives, AN a la editorial de Anaya, VIC a Vicens Vives, MC a Mc Graw Hill y ED corresponde a la editorial Edebé.

En la tabla anterior los números son las páginas de los libros en las que aparecen los contenidos mencionados en la parte izquierda de la tabla. Así, por ejemplo, en el libro de Edelvives las coordenadas cartesianas se presentan en la página 128.

Como nota a la tabla 1 anterior, debemos recalcar que las páginas citadas en ella son las páginas de inicio de la explicación de los conceptos o contenidos que están explicitados en la columna izquierda de la tabla. Hay contenidos que en algunos libros se detallan en varias páginas, no sólo en la que se refleja en la tabla. Es el caso, por ejemplo, del libro de texto de la editorial de Edelvives donde la representación en forma de tabla se trata en las páginas 130 y 131 o del texto de Anaya donde las funciones lineales y el cálculo de la pendiente se estudian en las páginas 227, 228, 229 y 230.

En la tabla siguiente se hace una comparación de contenidos que no están en el currículo LOMCE, pero sí que aparecen en los libros de texto. (Véase Tabla 2).

Tabla 2: Contenidos que aparecen en los libros de texto, pero no están en LOMCE.

CONTENIDOS / LIBROS DE TEXTO	EDE	AN	VIC	MC	ED
Justificación de introducción de funciones por medio de problemas contextualizados	127		228		69
Cuando una gráfica es función o no		222			
Funciones proporcionales	136	226	238		
Función constante		232	239		
Dominio y recorrido	132				74
Signo	132				70
Función proporcional inversa	138		242		
Función cuadrática	139		240		

Los números que aparecen en la tabla son las páginas donde se explican esos conceptos, como ocurría en la anterior tabla.

En el libro de la editorial Edelvives se introduce el concepto de magnitud en el tema de las funciones, así como la dependencia entre magnitudes (p. 129), además, se menciona tanto máximos y mínimos relativos, como absolutos (p. 135) y al final de la unidad aparece un apartado acerca de las aplicaciones de las funciones en la vida cotidiana (p. 140). En el libro de Anaya, se define máximo y mínimo en general, sin especificar si son relativos o absolutos (p. 223). En el libro de la editorial Vicens Vives se introducen las coordenadas polares (p. 231) y las relaciones entre variables (p. 232), se da una definición de discontinuidad y no de continuidad como hacen la mayoría de libros (p. 235) y se definen funciones monótonas (p. 236) y rectas verticales (p. 236). Al final del tema hace un resumen de contenidos vistos y plantea ejercicios de tipo teórico. En el libro de Mc Graw Hill, se explica el concepto de cuadrante (p. 208), los máximos y mínimos los define en general y no como relativos (p. 212). Además, se presentan las coordenadas terrestres (p. 218) y se menciona cómo se resolvería una ecuación de forma gráfica, buscando el corte con el eje X (p. 219). En el libro Edebé, se introduce el concepto de cuadrante (p. 70) y se simboliza función como una correspondencia entre dos conjuntos (p. 75). También habla de máximos y mínimos en general y no de relativos ni absolutos (p. 79) y de cambio de escalas (p. 80).

Cabe destacar que en algunos libros a las funciones de la forma $y = mx$ las llaman funciones proporcionales (Vicens Vives) y en otros llaman funciones lineales a las de la forma $y = mx + n$ aunque se aclara que en cursos superiores a éstas últimas se les llama afines (Anaya). En el libro de la editorial Mc Graw Hill se llama lineal a $y = mx + n$ y no menciona a m como pendiente ni a n como ordenada. En los libros de Edelvives, Edebé y Vicens Vives se llama función lineal a las rectas $y = mx$ y afín a $y = mx + n$.

A continuación, se muestra una tabla donde aparecen los distintos campos de problemas que se abordan en cada uno de los libros de texto estudiados: (Ver Tabla 3).

Tabla 3: Campos de problemas abordados en los libros de texto analizados.

CAMPO PROBLEMAS / LIBROS	EDE	AN	VIC	MC	ED
Identificación cuadrante y signo				208	71
Representación de puntos	128	221	231	207	71
Identificación de puntos representados		221	231	207	74
Modelización de ecuación tras enunciado verbal	129		233	216	
Clasificar gráfica según si es función o no		222			
Representación a partir de enunciado	131	226		214	78
Representación a partir de tabla	131	224	234	210	78
Representación a partir de ecuación	131	225	234	214	78
Crecim, decrecim, máximos y mínimos	134	223	237	212	79
Cálculo de cortes con ejes	133		237		
Cálculo pendientes desde ecuación dada			239		
Cálculo pendientes a partir de puntos	136	227	246	218	
Cálculo de dominios	132		234		74
Clasificación de variables depend. o indep.	129				72
Funciones proporcionalidad inversa			242		
Funciones cuadráticas	139		241		
Gráficas con programas de ordenador	141				80

Modelizar la ecuación a partir de la tabla			239		

Como ya se explicó en la tabla 1, las páginas que aparecen en las tablas son las páginas de inicio de la explicación. Hay libros donde los contenidos se abordan en varias hojas. Es el caso por ejemplo del texto de Anaya, el cálculo de pendientes a partir de puntos se explica a lo largo de las páginas 227, 228 y 229.

En el texto de Edelvives hay problemas de intervalos y no hay ejercicios en los que se pide calcular la ecuación de la función dados dos puntos. Además, aparecen aplicaciones de las funciones en problemas contextualizados de la vida real. En el libro de Vicens Vives y de Edebé se presentan las coordenadas polares. En el texto de Mc Graw Hill se pide obtener la tabla de valores a partir de una gráfica representada, y se plantea cómo se resolvería una ecuación de primer grado mediante su representación gráfica y calculando el corte con el eje X (sustituyendo y por 0).

Ahora veremos qué técnicas y tecnologías se enseñan atendiendo a esos campos de problemas:

- Identificación de puntos representados. La técnica empleada es: Trazar líneas horizontales (para calcular la componente y) y verticales (para calcular la componente x) del punto hasta los ejes y anotar las coordenadas. La primera coordenada será la componente x del punto y la segunda será la componente y, son los respectivos puntos donde las rectas cortan a los ejes. La tecnología usada es la definición de coordenada y la representación gráfica.
- Representación de puntos. La técnica es: localizar la componente x en el eje X y trazar una línea vertical, localizar la componente y en el eje Y, y trazar una línea horizontal por ese punto. Donde se cortan ambas rectas será el punto a representar. La tecnología es la definición de coordenada y la representación gráfica.
- Modelización de ecuación a partir de enunciado verbal. La técnica es: leer bien el problema e identificar los datos clasificando las variables en dependiente e independiente y plantear la ecuación que resolvería el problema. La tecnología es una definición.

- <u>Clasificación según sea función o no a partir de una gráfica.</u> La técnica es: para que una gráfica corresponda a una función debe ocurrir que a un valor x le corresponda un único valor de y, al contrario, no será función. La tecnología es la propia definición de función.
- <u>Crecimiento y decrecimiento.</u> Debemos fijarnos en los puntos alrededor. Si conforme aumenta el valor de x aumenta el valor de y, será creciente, pero si al aumentar x la y disminuye, será decreciente. La tecnología es una definición.
- <u>Representación gráfica a partir de enunciado verbal.</u> La técnica es: plantear la ecuación del problema identificando variables dependientes e independientes, construir una tabla de valores y dibujar los puntos obtenidos uniéndolos. La tecnología es una definición.
- <u>Representación gráfica a partir de una tabla.</u> La técnica usada es representar cada uno de los puntos de la tabla y unirlos. La tecnología es una definición.
- <u>Representación gráfica a partir de una ecuación.</u> La técnica es: realizar una tabla de valores sustituyendo valores para x y calculando y, y representarlos. La tecnología es una definición.
- <u>Máximos y mínimos relativos y absolutos.</u> La técnica es: estudiar el entorno de los puntos. Un punto es máximo relativo si la función es creciente a la izquierda de él y decreciente a la derecha. Y lo contrario para mínimo relativo. Será máximo absoluto el mayor de los máximos relativos y el mínimo absoluto será el menor de los mínimos relativos. La tecnología es una definición.
- <u>Cortes con los ejes.</u> La técnica es: sustituir x por 0 para calcular el corte con el eje Y, y sustituir y por 0 para calcular el corte con el eje X. La tecnología es una definición.
- <u>Pendientes.</u> La técnica es: sobre la gráfica buscar dos puntos y calcular m con la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Si m es positiva la función será creciente, pero si m es negativa la función será decreciente. Para calcular la pendiente a partir de la ecuación basta con saber que es el número que multiplica a x. La tecnología es la definición de pendiente y la representación gráfica.

- Dominio. La técnica es: mirar desde qué punto hasta qué punto está definida la x en el eje X. La tecnología es la definición de dominio y la representación gráfica.
- Identificación de variable dependiente e independiente. La técnica es: fijarnos qué variable es la que depende (Y) de la otra (X). La tecnología es una definición.
- Representación de función de proporcionalidad inversa. La técnica es: construir una tabla de valores y representar los puntos. Son funciones de la forma $y = \frac{k}{x}$. La tecnología está basada en una definición.
- Representación de función cuadrática. La técnica es: calcular el vértice con la fórmula $x = \frac{-b}{2a}$, esta será la coordenada x del vértice y luego sustituir este punto en la ecuación para calcular la segunda coordenada del vértice. Después hay que calcular el corte con los ejes, hacer una tabla de valores y representar los puntos. La tecnología es una definición.
- Modelizar una ecuación a partir de la tabla. La técnica es: tomar dos puntos y calcular la pendiente m con la fórmula, luego calcular n que es la segunda coordenada del punto que es el corte con el eje Y. Así se obtiene la ecuación de la recta $y = mx + n$. La tecnología es la definición de pendiente.

En cuanto a los efectos que produce este tipo de enseñanza sobre el aprendizaje del alumno podemos decir que no hay campos de problemas definidos como tal en los libros de texto que hemos analizado, así como tampoco se plantean situaciones problemáticas de la vida real a las que los alumnos tengan que enfrentarse para resolver, sino que el estudio de las funciones está basado en el estudio de los conceptos y luego en la práctica de ellos en los ejercicios prácticos que se plantean. En los libros de texto que hemos cotejado y revisado lo que se propone es una explicación de los términos, unas técnicas para resolverlos y una serie de actividades de consolidación repetitivas y mecánicas.

Por otra parte, podemos decir que los libros de texto analizados son bastante completos ya que abordan los contenidos que marca y exige el currículo. Los de las editoriales Anaya (Colera y Gaztelu, 2008), Vicens Vives (Pancorbo, 2008) y Edelvives (Martí et al., 2007) se basan en el currículo LOE (Ley 2/2006, de 3 de mayo, de educación), mientras que los de las editoriales Edebé (Fuster y Martínez, 1997) y Mc

Graw Hill (Becerra et al., 1996) lo hacen en el currículo marcado por la ley LOGSE (Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de ordenación general del sistema educativo).

Los contenidos que han variado en estas dos leyes han sido los siguientes: En la ley LOE no se estudiaba el concepto de función ni se hacía referencia a variables dependientes o independientes, así como tampoco se comparaban gráficas ni se analizaban. Respecto a la ley LOGSE lo que ya no se estudia en el Bloque de funciones de 2º ESO son las funciones de proporcionalidad inversa y las funciones cuadráticas.

Nos hemos centrado en el estudio de los contenidos del Bloque de funciones de estas dos leyes, ya que los libros analizados para la realización de este trabajo se enmarcan en años en los que esas dos leyes estaban en vigor.

Un aspecto a destacar es que la definición que se da de continuidad a este nivel es la de no levantar el bolígrafo del papel al dibujar su gráfica. En cursos superiores esta definición deja de usarse por no ser correcta del todo. Por ejemplo, la función $y = \frac{1}{x}$ es continua usando la definición de ε y δ pero no lo es si atendemos a la definición dada en este nivel. Lo mismo ocurre para funciones a trozos $f(x) = 4\ si\ x > 0\ y\ f(x) = 3\ si\ x < 0$ que también es continua en su dominio pero no lo es atendiendo a la definición vista en este curso. Con lo cual, esta manera de introducir el concepto de continuidad provoca en el alumno problemas de cara a cursos posteriores, pero se da esta definición porque es más intuitiva y sencilla de comprender, aunque no sea la más adecuada.

Además, en algunos libros se definen máximos y mínimos, pero no se especifica si son relativos o absolutos (Anaya, 2008, p. 223) y en uno sólo de ellos se dice que hay máximos y mínimos absolutos, pero no se hace casi mención a ellos (Edelvives, 2007, p.135).

También me gustaría destacar lo que, desde mi punto de vista, echo de menos en los libros de texto que he analizado. Lo detallo a continuación:

Quizá debería aparecer un campo de problemas que trate de problemas contextualizados en relación con la interpretación de puntos o de la razón de ser de la introducción de las funciones en la enseñanza escolar, así como ocurre en otros campos de problemas, ya que en la mayoría de libros casi todos los ejercicios que aparecen son de representación de gráficas a partir de ecuaciones o de tablas donde no se plantean apenas problemas con un enunciado verbal contextualizado en situaciones de la vida real.

También estaría bien la introducción de algún problema donde aparezcan funciones discretas (aquellas en las que los puntos de sus gráficas no se unen por no tomar valores continuos en todo su dominio) o donde aparezcan funciones cuyas gráficas sean curvas puesto que no aparece en los libros ninguna mención a que hay problemas con gráficas curvas. Ello puede provocar confusión en el alumnado ya que no podría identificar este tipo de curvas como funciones.

Otro punto a tener en cuenta es que se debería enseñar a escalar bien los ejes para que, cuando aparezcan valores muy altos para x o para y, los alumnos sepan cómo adaptar los ejes cartesianos a sus necesidades.

III. Sobre los conocimientos previos del alumno.

Para abordar el tema de funciones en 2º ESO los alumnos deben poseer los conocimientos previos dados en 1º ESO en el Bloque de funciones, pero también deben conocer acerca de números enteros, operaciones combinadas, expresiones algebraicas y proporcionalidad directa.

A continuación, se realizará un análisis de los conocimientos previos que el alumno debe conocer y tener adquiridos a la hora de pasar a 2º ESO. Para ello, nos fijaremos en el currículo de 1º ESO y de 6º Primaria para conocer qué contenidos se tratan en cada uno de esos niveles. Estos currículos, así como el de 2º ESO, están recogidos en las siguientes órdenes: en la Orden ECD /850/2016, del 29 de julio que modifica la Orden 16 de julio de 2014 por la que se aprueba el currículo de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Aragón y la Orden ECD /489/2016, del 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de Educación Secundaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Las funciones empiezan a tratarse por primera vez en 6º Primaria, pero se hace a un nivel muy general y básico. Únicamente se introduce el sistema de coordenadas cartesianas y la descripción de posiciones y movimientos en el plano. Diríamos que sólo se trata de una brevísima introducción al sistema de coordenadas, ni siquiera podemos decir que se habla de funciones. Además, cabe destacar que estos contenidos están dentro del Bloque 4 de Geometría en 6º Primaria, no hay un bloque especialmente dedicado a este objeto matemático.

CONTENIDOS CURRICULUM FUNCIONES 6º PRIMARIA:

- Sistema de coordenadas cartesianas y la descripción de posiciones y movimientos en el plano.

En 1º ESO las funciones se encuentran enmarcadas dentro del Bloque 4 de Funciones y sólo se ven coordenadas cartesianas y su representación y se definen los conceptos de función y de variables dependientes e independientes. También se describen las diferentes formas de presentación de las funciones (de forma verbal, en tablas de valores, mediante gráficas o a partir de una fórmula). Y, por último, se introducen las funciones de proporcionalidad directa y su representación.

CONTENIDOS CURRICULUM FUNCIONES 1º ESO:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula).
- Funciones de proporcionalidad directa. Representación.

En 2º ESO las funciones se enmarcan en el Bloque 4 de Funciones y en él se introduce por primera vez los conceptos de crecimiento y decrecimiento, continuidad y discontinuidad, cortes con los ejes, máximos y mínimos relativos, análisis y comparación de gráficas. También se introducen las funciones lineales, cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta, representaciones de la misma a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta, así como la utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

CONTENIDOS CURRICULUM FUNCIONES 2º ESO:

- Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.
- El concepto de función: Variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula). Crecimiento y

decrecimiento. Continuidad y discontinuidad. Cortes con los ejes. Máximos y mínimos relativos. Análisis y comparación de gráficas.

- Funciones lineales. Cálculo, interpretación e identificación de la pendiente de la recta. Representaciones de la recta a partir de la ecuación y obtención de la ecuación a partir de una recta.
- Utilización de calculadoras gráficas y programas de ordenador para la construcción e interpretación de gráficas.

En cuanto a si la enseñanza anterior ha propiciado la adquisición por parte del alumno de los conocimientos previos, cabría decir que las funciones como tal se introducen en 1º ESO, aunque de una manera muy superficial y sencilla. En 6º Primaria sólo se explica sistema de coordenadas cartesianas. Debido al modo de enseñanza que se lleva a cabo en muchos colegios e institutos y de acuerdo a lo analizado en los libros de texto, los alumnos aplican las técnicas que se les enseña en clase para resolver ejercicios de forma mecánica, sin pararse a pensar en cómo resolverlos mediante unas técnicas obtenidas por ellos mismos.

A continuación, vamos a plantear unas actividades para tratar de asegurar que los alumnos poseen unos ciertos conocimientos previos antes de iniciar la unidad de funciones. Para ello, vamos a diseñar una prueba inicial con contenidos vistos el curso anterior (1º ESO).

Esta prueba inicial se realizará durante el primer día que dediquemos a la unidad didáctica de funciones y tendrá una duración de una sesión completa (50 minutos). La intención es saber los conocimientos que los alumnos tienen sobre el objeto a estudiar, para ello, debemos darles suficiente tiempo para pensar e intentar recordar los conocimientos previos adquiridos del curso anterior.

Prueba inicial:

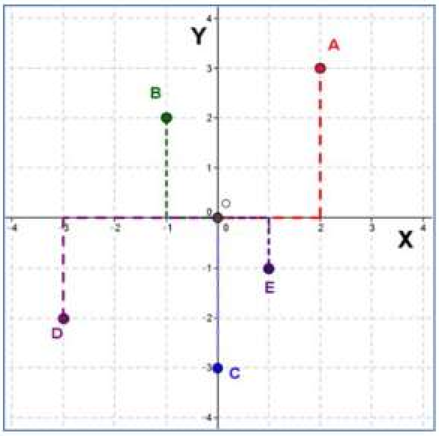
1) Representa los siguientes puntos dibujando los ejes coordenados:

(Este ejercicio nos ayudará a conocer si son capaces de recordar el contenido que aparece en 1º ESO de coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes cartesianos).

$A = (-1, 3)$; $B = (2, 2)$; $C = (-2.5, 0)$, $D = (1.5, -1)$ y $E = (-1, -1)$

2) Identifica las coordenadas de los siguientes puntos que aparecen sobre la gráfica dibujada a continuación:

(Este ejercicio nos servirá para conocer si saben el contenido que aparece en 1º ESO de coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes cartesianos).



3) Dada la siguiente tabla, ¿podrías dibujar la gráfica de la función que describe?

(Este ejercicio nos ayudará a conocer si conocen el concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), especialmente representación gráfica a partir de una tabla).

X	−2	−1	0	1	2	3
Y	0	3	3	4	−1	−3

4) Da una expresión algebraica para los siguientes enunciados verbales:

(Este ejercicio nos dirá si saben el concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), especialmente formular expresiones algebraicas a partir de enunciados verbales).

- El doble de un número.
- El triple de un número.
- Un número multiplicado por -4.
- Un número multiplicado por -6.

5) Relaciona cada fórmula con su enunciado verbal:

(Este ejercicio servirá para conocer si saben el concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), en especial, relacionar expresiones algebraicas con sus enunciados verbales).

- El cuadrado de un número menos 4.
- La mitad de un número más 5.
- Tres veces un número menos 0.5.
- El doble de un número más 6 unidades.

- $y = 3x - 0{,}5$
- $y = x^2 - 4$
- $y = 2x + 6$
- $y = \frac{x}{2} + 5$

6) Dada la siguiente tabla identifica si es de proporcionalidad:

(Este ejercicio nos ayudará a conocer si saben el concepto de funciones de proporcionalidad directa, representación, especialmente, si distinguen cuándo es una relación proporcional).

Tiempo	Total de galones
1	2.5
2	5.0
3	7.5
4	10.0
5	12.5
6	15.0

7) Ana va a comprar al mercado y compra 2kg de manzanas por 5,50 euros. ¿Cuánto le costará comprar 5kg? ¿Y 1kg? ¿Y 3kg? Dibuja la gráfica de la función que relaciona el número de kg comprados con el precio.

(Este ejercicio servirá para conocer si saben el concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), en concreto, si saben plantear una ecuación que resuelva un problema contextualizado con un enunciado verbal).

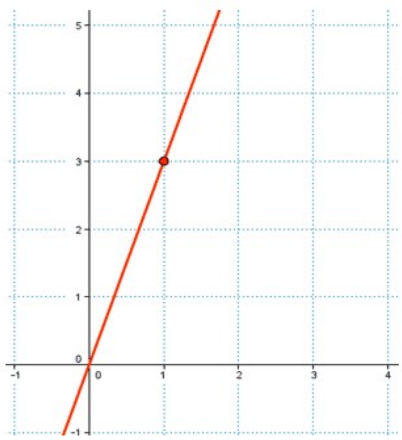
8) Resuelve las siguientes ecuaciones:

(Este ejercicio nos servirá para conocer si saben resolver ecuaciones de primer grado para luego aplicarlo en el cálculo de cortes con los ejes).

- $5x - 4 = 3x + 2$
- $8(x - 1) = 4x - 4$
- $2(x - 4) = x - 10$

9) Obtén la ecuación de la función representada mediante la siguiente gráfica:

(Este ejercicio servirá para conocer si saben el concepto de función: variable dependiente e independiente. Formas de presentación (lenguaje habitual, tabla, gráfica, fórmula), en especial si saben cómo obtener la ecuación de una función de proporcionalidad dada por una gráfica).



IV. Sobre las razones de ser del objeto matemático.

<u>Sobre las razones de ser de las funciones:</u>

Según el trabajo de Malik (1980), la razón de ser de la función nos dice cuándo, por qué y cómo surgió el concepto de función y de qué manera entró en las matemáticas. En palabras de Malik (1980, p. 490), "la definición moderna de función apareció al final de la historia de la disciplina para estudiar matemáticas más avanzadas, en lugar de como punto de partida para la introducción al cálculo".

Las funciones se introducen ante la necesidad de modelizar situaciones de dependencia en la vida real. Ésta es la razón de ser que se presenta en la enseñanza escolar, más concretamente, en los libros de texto.

Es de suma importancia hablar de funciones ya que son una parte muy relevante de las matemáticas que se usan en diversos campos y tienen su influencia en otras ramas matemáticas como pueden ser el álgebra y la geometría.

En el nivel de secundaria se introducen como una relación de dependencia entre dos variables (una dependiente y otra independiente) abordando problemas sencillos que se modelizan por medio de funciones lineales. De esta manera, se presentan las características y propiedades de las funciones como son crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, cortes y continuidad. Además, se introducen las distintas formas de presentar y representar una función (mediante tablas de valores, mediante fórmulas de la ecuación de la función, a través de una gráfica o a partir de un enunciado verbal).

Cabe destacar que, aunque una función pueda entenderse sin hacer uso de su representación gráfica, en este curso en particular, y en las escuelas en general, la representación gráfica es fundamental para el estudio y el análisis de funciones y sus propiedades. Según Arce et al. (2019, p. 312) "las funciones son un concepto en el que los sistemas de representación tienen una gran importancia e influencia en el aprendizaje de este". En dicho libro también se destaca que la presencia de algunos ejemplos prototípicos de funciones (polinómicas, de proporcionalidad inversa, exponenciales, trigonométricas) y sus representaciones gráficas hace que, en ocasiones, los alumnos sólo identifiquen funciones con esos tipos descartando otras funciones que no sigan estos prototipos. Por ello, es necesario disponer de gran variedad de ejemplos y de formas de definir las funciones, (Arce et al., 2019).

También debemos tener en cuenta que los contenidos que se dan en este curso en el que estamos trabajando serán una base para el posterior estudio de funciones en niveles superiores. Por tanto, es de vital importancia tener claro el concepto de función y el de sus elementos.

Sobre las razones de ser históricas de las funciones:

El desarrollo del concepto de función a lo largo de la historia ha ido de la mano con los diferentes intereses del ser humano por entender y tratar de describir la naturaleza en la que vive. El interés se centra primero en la observación y la tabulación de ciertos fenómenos para luego, más adelante, dar lugar a un proceso más científico y apoyado en observaciones y cuantificaciones del entorno, (Ugalde, 2014).

Autores como Azcárate y Deulofeu (1990) destacan que, a pesar de los muchos estudios sobre la historia de las matemáticas, existen pocos trabajos dedicados específicamente al origen del concepto de función e incluso algunos de los que hay son contradictorios. En este trabajo también se destaca que, mientras algunos autores admiten cierto carácter funcional en algunas operaciones matemáticas de la antigüedad (trabajos babilónicos, de Ptolomeo o de los árabes), otros sitúan su nacimiento en la aparición de la geometría analítica (Descartes) y otros sitúan su aparición en el s. XIX (Dirichlet y Lobatchevsky).

Si hubiera que fijar un período en el cual situar el nacimiento del concepto de función, éste se encontraría a mediados del s. XVII, en el siglo de Fermat, Descartes, Newton y Leibnitz quienes formulan las primeras definiciones del objeto refiriéndose a él como una relación de dependencia entre dos variables. Es en esta época cuando aparece por primera vez el término de "función" y cuando empieza a desarrollarse el análisis matemático, al abordarse los conceptos de diferenciación e integración que constituyen el núcleo fundamental del cálculo infinitesimal. No obstante, la idea de función en el s. XVII era muy restringida, pues se reducía a funciones analíticas, y no fue hasta el siglo siguiente que Euler dio la primera definición más general. A partir de este momento las generalizaciones se sucedieron hasta llegar a las definiciones más recientes que incorporan el lenguaje conjuntista, (Azcárate y Deulofeu, 1990).

Como ya hemos mencionado anteriormente, el estudio de funciones se basó en el interés por descubrir qué tipo de relaciones se podían establecer entre distintas magnitudes o variables, si es que se podía establecer alguna. Primero se centró en la observación para luego basarse en concreciones y definiciones. Tras mucho tiempo de observaciones y deliberaciones, un conjunto de grandes matemáticos acabó por dar una definición formal al concepto de función entendiendo como tal un objeto matemático que podía modelizar situaciones de la vida cotidiana dando relaciones de dependencia entre variables o magnitudes.

Por tanto, podemos decir que, históricamente, las funciones surgen ante la necesidad del ser humano de entender y describir la naturaleza que le rodea y, vienen a resolver problemas en los que se busca modelizar distintos tipos de relaciones de dependencia entre variables o magnitudes. En concreto, podemos ver algunos ejemplos históricos de cuál ha sido su razón de ser.

El origen del concepto de función se remonta a la época Babilónica y de Egipto donde ya se daban relaciones entre conjuntos, pero no de manera formal, sino en forma tabular (relación entre los cuadrados de un número y sus cubos).

Más tarde, en la época de los griegos (600aC- 400dC), Arquímedes da una relación de dependencia entre cantidades de distinta magnitud cuando enuncia la ley de la mecánica:

> "Cualquier cuerpo sólido que se encuentre sumergido total o parcialmente en un fluido será empujado en dirección ascendente por una fuerza igual al peso del volumen del líquido desplazado por el cuerpo sólido".

También aparece la relación de dependencia entre cantidades en sus trabajos en geometría cuando compara las áreas y volúmenes de la esfera con los del cilindro:

"La esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro".

Además, aparece la noción de la relación de dependencia cuando se introducen las razones trigonométricas en la matemática árabe entre los s. VII y XIII, puesto que estas razones no son más que relaciones entre longitudes.

En un trabajo publicado por Malik (1980), se dice que el concepto de función se originó cuando Galileo (1564-1642) propuso un programa para el estudio del movimiento. En este mismo texto se afirma que la investigación de una relación entre dos variables había sido fundamental para llegar al concepto de función.

En 1609 Kepler enuncia su 2ª ley: "El radio vector que une un planeta y el Sol recorre áreas iguales en tiempos iguales." Lo que equivaldría a una relación de dependencia entre las áreas barridas y los tiempos en barrerlas.

Según afirma Malik, (1980) el concepto moderno de función fue introducido por Dirichlet, quien definió función como: "y es una función de x si para cualquier valor de x hay una regla; lo que da un valor único de y correspondiente a x", (Malik, 1980, p. 491).

Ya en el s. XX el avance de las matemáticas hizo que el concepto de función se definiera sobre conjuntos arbitrarios y se consideraran dentro de la teoría de conjuntos haciendo uso de representaciones gráficas para explicarlas mejor.

A modo de conclusión, podemos decir que, aunque el concepto de función ha tenido diferentes definiciones a lo largo de la historia, "las introducciones formales del concepto de función suelen recurrir a la definición dada por Dirichlet. […] El carácter estructural, estático y abstracto de esta definición desaconseja su uso para introducir el concepto si los alumnos no han tenido experiencias previas asociadas a las funciones […] La idea de función como covariación entre cantidades o magnitudes variables tiene un carácter dinámico […] y permite plantear situaciones en las cuales se perciba la necesidad y la razón de ser de las funciones. Por todo ello, esta idea resulta más útil en las primeras etapas de aprendizaje del concepto”, (Arce et al., 2019, pp. 310-311).

Todo ello nos lleva a decir que la razón de ser histórica de las funciones y la que se introduce en los libros de texto es la misma: viene a ser una relación de dependencia entre dos variables, una dependiente de la otra, que surgen para modelizar problemas en los que se trata de encontrar las relaciones existentes entre dos magnitudes.

<u>Problemas que se constituyen como razón de ser de las funciones:</u>

Los problemas que se constituyen como razón de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar serán los que proponemos a continuación:

<u>Problema 1:</u> La siguiente tabla ha sido proporcionada por la OMS y en ella se muestra la altura de una niña durante sus primeros meses de vida. Se pide responder a las siguientes preguntas:

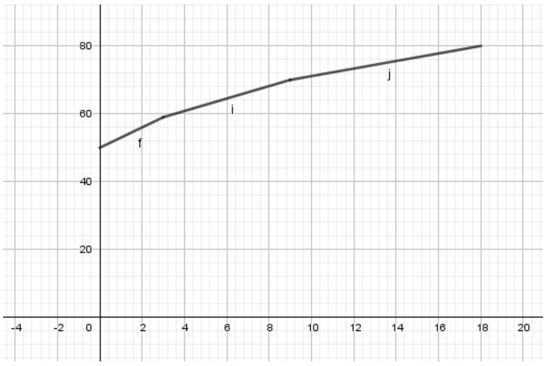
Edad	0 meses	3 meses	6 meses	9 meses	12 meses	15 meses	18 meses
Altura	50 cm	59 cm	65 cm	70 cm	74 cm	77 cm	80 cm

a) ¿Cuáles son las variables? Identifícalas en variable dependiente e independiente.
b) Representa la gráfica en los ejes de coordenadas.
c) ¿Es una función creciente o decreciente?
d) Halla los máximos y mínimos relativos y absolutos si los hubiera.
e) ¿Es una función continua?

(Es un problema de representación de una gráfica y de su análisis a partir de una tabla de valores.)

<u>Solución:</u> a) Las variables son la edad y la altura. La variable dependiente es la altura que depende de la variable independiente, la edad.

b)

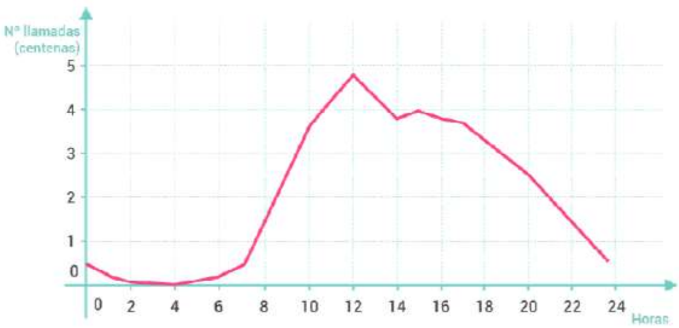


c) Es una función creciente.

d) Hay un mínimo relativo en el punto (0,50) y a partir de ahí la función es creciente. No hay máximos relativos.

e) Sí, es continua.

Problema 2: La siguiente gráfica representa el número de llamadas de telefonía móvil (en centenares) captadas por una antena en una ciudad española a lo largo de todas las horas de un mismo día.



Responde a las siguientes afirmaciones según sean verdaderas o falsas:

a) El máximo número de llamadas realizadas ha sido de 500.
b) El mínimo número de llamadas realizadas se alcanza a las dos de la mañana.
c) La gente suele realizar más llamadas a las horas centrales del día.
d) A las dos la gente suele comer y por tanto, hay una reducción del número de llamadas realizadas.
e) El número de llamadas creció aproximadamente a partir de las 6 de la mañana.

f) Durante la madrugada la gente no suele llamar mucho.

g) La mayoría de las personas se van a dormir a las 5 de la mañana porque a partir de esa hora el número de llamadas baja.

h) La gráfica muestra la actividad de una empresa que trabaja de 10h de la mañana a 18h de la tarde.

(Es un problema contextualizado de análisis de una gráfica en la que se nos plantean diferentes preguntas o afirmaciones.)

<u>Solución:</u> a) Falso, han sido menos de 500.

b) Falso, se alcanza a las tres de la madrugada.

c) Verdadero, se hacen más llamadas de 10h a 14h, justo al mediodía.

d) Verdadero, hay una pequeña disminución en el número de llamadas.

e) Verdadero.

f) Verdadero.

g) Falso, es a partir de las 2 de la madrugada que las llamadas se reducen.

h) Falso, el número de llamadas empieza a ser elevado desde las 8 de la mañana y siguen siendo cuantiosas hasta las 22h.

<u>Problema 3:</u> Mirad esta noticia sacada del periódico ABC.

La luz ha subido cuatro veces más que los sueldos y seis más que las pensiones desde 2018

- El Gobierno trabaja en un paquete de medidas para fijar los precios al margen del mercado mayorista
- Qué es el suministro mínimo vital y a quién beneficia
- ¿A qué hora es más barata la luz hoy?

En ella se muestra la gráfica de una función en la que se refleja el precio de la luz según la potencia consumida desde el año 2008 al año 2021 (agosto). (Notar que los números que aparecen sobre cada punto en la gráfica es el precio pagado por cada Mw/h de potencia consumida).

Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Es una función creciente, decreciente o ambas?
b) Señala cuáles son sus máximos y mínimos relativos. Di los máximos y mínimos absolutos, si los tuviera.
c) ¿En qué año el precio del Mw/h fue más barato? ¿Cuánto se pagó en ese año por cada Mw/h?
d) ¿En qué año el precio del Mw/h fue más caro? ¿Cuánto se pagó en ese año por cada Mw/h?
e) ¿Cuántos años se han tenido en cuenta para realizar la tabla?
f) ¿Cuál fue el precio del Mw/h en el año 2011? ¿Y en 2021?
g) Según las noticias que aparecen todos los días en la televisión, si se dibujara el progreso del precio de la electricidad de estos últimos meses, ¿crees que esta gráfica seguiría con un ritmo creciente o decreciente?

(Es un problema contextualizado y de actualidad que puede interesar a los alumnos y motivarles para resolverlo. En él se pide el análisis de una gráfica mediante el planteamiento de diferentes preguntas.)

<u>Solución:</u>

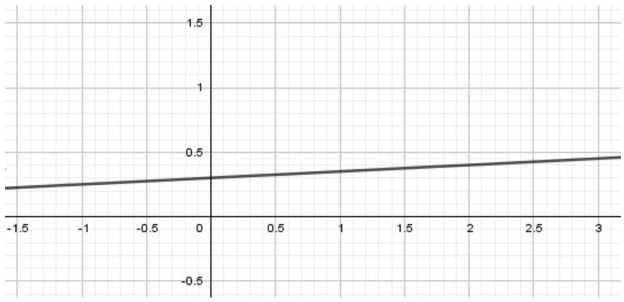
a) Es una función creciente en algunos tramos y decreciente en otros.
b) Los máximos relativos son (2008, 64.44), (2011, 49.92), (2015, 50.27), (2018, 57.28), (2021, 68.5) y los mínimos relativos son (2009, 36.98), (2010, 36.95), (2014, 41.97), (2016, 39.61), (2020, 34). Y el máximo absoluto es (2021, 68.5) y el mínimo absoluto es (2020, 34).
c) El precio del Mw/h más barato fue en 2020 y se pagó a 34 euros.
d) El precio del Mw/h más caro fue en 2021 y se pagó a 68.5 euros.
e) Se han tenido en cuenta 14 años para realizar la tabla.

f) El precio del Mw/h en el año 2011 fue de 49.92 euros y en 2021 fue de 68.5 euros.
g) Esta gráfica seguiría con un ritmo creciente ya que el precio de la luz en estos últimos meses ha seguido subiendo.

Problema 4: El coste de las llamadas de una cierta compañía telefónica es de 0,30 euros de establecimiento de llamada más 0,05 euros por cada minuto que dure la llamada. Dibuja la gráfica de la función que expresa el coste de las llamadas en euros en función del tiempo que dure la llamada.

(Es un problema de enunciado verbal y contextualizado en el que se pide representar la gráfica de la función que modeliza el problema. Para ello, deben dar una ecuación que se ajuste a los datos y luego construir una tabla de valores para representarla.)

Solución: La ecuación de la función es $y = 0{,}05x + 0{,}30$. La gráfica es:



Metodología:

La metodología que se seguirá en el aula para implementar esta unidad y estos campos de problemas será la siguiente: Se persigue que los alumnos se enfrenten a situaciones problemáticas contextualizadas de la vida cotidiana y que planteen sus propios métodos y técnicas de resolución. De esta manera, se busca que sean capaces de enfrentarse a ciertos problemas y resolverlos por ellos mismos sin introducir previamente una explicación. Para ello, se intentará fomentar la formación de grupos colaborativos. Se pondrá a los alumnos en pareja o en grupos de tres personas y se les hará entrega de un problema contextualizado que formará parte de los problemas que hemos enmarcado dentro de la razón de ser del objeto a estudiar. Se les dejará tiempo para que planteen qué posibles métodos y técnicas pueden emplear para su implementación. El profesor puede acercarse de mesa en mesa para seguir los razonamientos que cada grupo esté llevando a cabo y para, en caso necesario, dar una pequeña instrucción o ayuda para encauzar el problema facilitando que los alumnos logren alcanzar los resultados correctos. Cuando todos hayan llegado al resultado, se propondrá un debate en clase donde cada alumno deberá explicar el método que ha empleado para resolver el problema. Para finalizar, se producirá la institucionalización de los conceptos y técnicas necesarios para resolver cada tipo de campo de problemas.

En este apartado se intentarán seguir los momentos de estudio que se estudiaron en este máster, concretamente en la asignatura de Diseño Curricular: momentos del primer encuentro (en él, el alumno se enfrenta por primera vez al problema que se le plantea), momento exploratorio (el alumno debe pensar una técnica de resolución del problema), momento de constitución del entorno tecnológico- teórico (una vez encontrada una técnica de resolución, se debe estudiar si es adecuada para resolver el problema planteado), momento de trabajo de la técnica (conocida la técnica idónea, se debe practicar con más ejercicios para afianzar su uso por parte del alumno) y momento de institucionalización (una vez trabajada la técnica en diversos problemas, el profesor da una explicación de los conceptos que hay detrás de ese campo de problemas y explica las técnicas empleadas para resolverlos).

En el ejercicio 1, el profesor irá controlando si los alumnos son capaces de representar la gráfica correctamente y si saben contestar a las preguntas que se les formulan. En el ejercicio 2, el docente se pasará por las mesas controlando que los alumnos comprendan el significado de la gráfica y sepan interpretarla de forma correcta. Así como también irá fijándose en las distintas respuestas que den a las cuestiones propuestas. En el ejercicio 3, el profesor revisará que los chicos entienden el gráfico que se les proporciona y que saben interpretarlo correctamente. Además, pondrá especial atención a si saben responder bien a lo que se les pregunta y si saben identificar los elementos de la función. Para finalizar, en el ejercicio 4, el docente revisará si los alumnos son capaces de plantear la ecuación de la función a partir del enunciado verbal y si son capaces de representarla gráficamente construyendo para ello una tabla de valores.

V. Sobre el campo de problemas, las técnicas, las tecnologías (justificación de las técnicas).

Respecto al campo de problemas que se van a plantear, nos centraremos en los tipos de problemas que dimos en el apartado inicial de campos que se pretenden enseñar en este nivel, los cuales son los siguientes:

- Representación e interpretación de puntos en el plano.
- Clasificación de gráficas según sean o no funciones.
- Corte con los ejes.
- Estudio de una gráfica: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad.
- Cambio de forma de representación de una función definida por un enunciado verbal, una tabla de valores o una ecuación para pasar a la representación gráfica.
- Cálculo de pendientes de una recta.
- De la tabla de valores, la gráfica o el enunciado verbal a la ecuación de la función.

Campo de problemas, técnicas y tecnologías:

Veamos el diseño de estos campos de problemas que hemos planteado para trabajar en el aula:

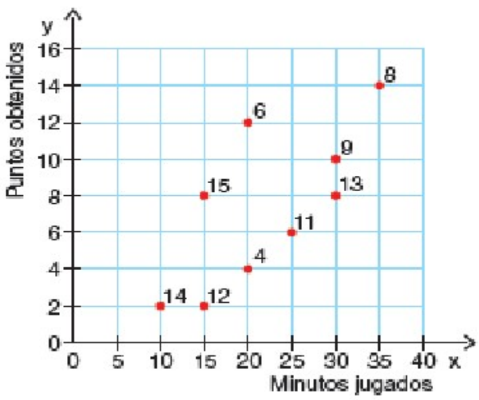
- Representación e interpretación de puntos en el plano.

Aquí plantearemos problemas en los que, a partir de una serie de puntos representados, se pida responder a unas preguntas. Se trata de que los alumnos adquieran destreza representando puntos e identificándolos una vez que estén representados y que se familiaricen con los ejes cartesianos y las coordenadas de los puntos.

1) Dado el siguiente mapa del tesoro di en qué coordenadas se encuentran cada uno de los lugares señalados.

<u>Solución:</u> El punto que corresponde a Bahía Norte es (2,5), a Playa Fea es (0,-1) y a Cabo Sur es (1,-3).

2) La siguiente gráfica representa los puntos obtenidos con respecto a los minutos jugados en un videojuego.



Responde:

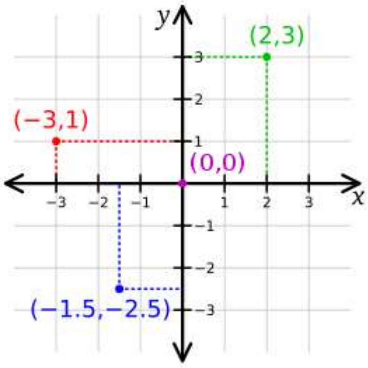
- ¿Cuál ha sido la máxima puntuación obtenida? ¿Hay más de un jugador que haya obtenido la máxima puntuación o sólo hay uno?
- ¿Cuál ha sido la mínima puntuación obtenida? ¿Hay más de un jugador que haya obtenido la mínima puntuación o sólo hay uno?
- ¿Cuál ha sido el máximo número de minutos jugados? ¿Y el mínimo?
- Da las coordenadas de los puntos 12, 13, 14 y 15.

<u>Solución:</u> La máxima puntuación obtenida ha sido de 14 puntos (es el único jugador con máxima puntuación), la mínima de 2 puntos (y ha habido dos

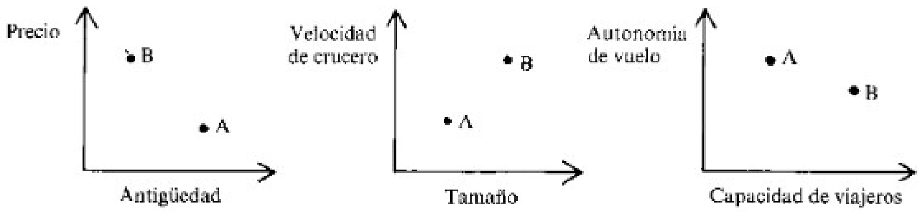
jugadores que han obtenido la mínima puntuación, el jugador 12 y el 14), el máximo número de minutos jugados han sido 35 y el mínimo 10. Las coordenadas de los puntos 12, 13, 14 y 15 son (15,2), (30,8), (10,2) y (15,8) respectivamente.

3) Representa sobre un eje los siguientes puntos: (0,0), (-1.5,-2.5), (-3,1) y (2,3).

Solución:



4) Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros A y B: (Alayo, 1990).



Responde:

a) La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

b) Di si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones:
   - El avión más viejo es más barato.
   - El avión más rápido es más pequeño.
   - El avión más grande es más viejo.
   - El avión más barato transporta menos pasajeros.

Solución:

a) Podemos decir que B es más nuevo que A ya que la coordenada x del punto B es menor que la de A.

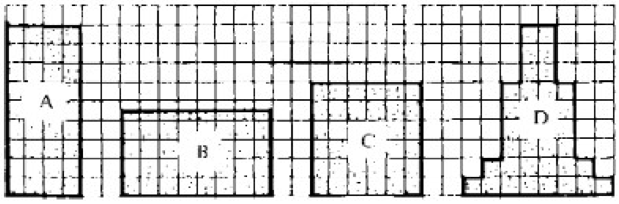
b) -El avión más viejo es más barato. Verdadero. El más viejo es A y es más barato.

-El avión más rápido es más pequeño. Falso. El más rápido es B pero es más grande que A.

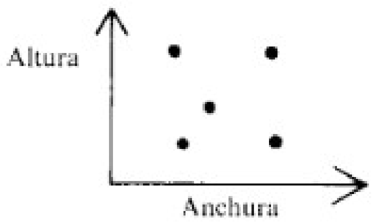
-El avión más grande es más viejo. Falso. El más grande es B y el más viejo es A.

-El avión más barato transporta menos pasajeros. Verdadero. El más barato es A pero tiene menor capacidad de pasajeros.

5) Las figuras siguientes tienen un área total de 36 unidades cuadradras. (Alayo, 1990).



Marca en el gráfico siguiente los puntos A, B, C, D que correspondan a las diferentes figuras (hay un punto que no corresponde a ninguna figura):



Solución: El punto superior izquierda corresponde a la figura A, el punto superior derecha es la figura D, el inferior derecho es B y el del medio es C. El punto inferior izquierda no corresponde a ninguna figura.

Metodología: La metodología que se usará en el aula a la hora de implementar este campo de problemas será la entrega de estos ejercicios para su realización en clase de manera individual. Luego se resolverán los problemas en clase y el profesor dará una explicación de los conceptos y definiciones que hay detrás del campo de problemas. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

De un modo general, se planteará la posibilidad de introducir los conceptos de cada campo de problemas usando los momentos de estudio de un objeto matemático, como se ha mencionado anteriormente en el apartado de metodología. Estos momentos de estudio se dividen en cinco fases: momentos del primer encuentro (donde el alumno se enfrenta por primera vez al problema que se le plantea), momento exploratorio (el alumno debe pensar un método o técnica de resolución del problema), momento de constitución del entorno tecnológico- teórico (el alumno, una vez encuentra una técnica de resolución, debe plantearse si es adecuada para resolver el problema que se le ha planteado), momento de trabajo de la técnica (cuando ya se conoce la técnica idónea, se debe practicar con más ejercicios para afianzar su uso y coger destreza y soltura por parte del alumno) y momento de institucionalización (una vez trabajada la técnica en diversos problemas, el profesor da una explicación de los conceptos y definiciones que hay detrás de ese campo de problemas). Esta manera de trabajar los campos de problemas se tratará de aplicar de forma particular en cada uno de los campos que hemos planteado en este trabajo.

Técnica: La técnica empleada en este campo de problemas es la mencionada en el primer apartado de este trabajo: para la representación de puntos debemos fijarnos en que la primera coordenada del punto corresponde a la distancia que hay hasta el eje vertical y la segunda coordenada será la distancia al eje horizontal.

Tecnología: La tecnología asociada a la técnica es la definición de coordenada de un punto y va ligada a la representación gráfica.

- Clasificación de gráficas según sean o no funciones.

Trabajando este campo de problemas se pretende que los alumnos sean capaces de identificar una gráfica según sea función o no, y que afiancen el concepto de función atendiendo a su definición.

Veamos los problemas que se han planteado para introducir este campo de problemas:

6) En clase se pide que los alumnos digan un número y, asociado a él, que den también una letra. Las respuestas que se han obtenido han sido las siguientes: A7, B3, C4, E7, O3, B2, D5, F8. Según esto, se representan las letras sobre el eje X y los números sobre el eje Y. De esta manera, por ejemplo, el primer término A7 se correspondería con el punto (A, 7) en la gráfica. ¿Podría ser esto una función?

Solución: No, a B le han hecho corresponder dos números distintos (B3 y B2).

7) La siguiente tabla representa la velocidad que lleva un avión en un tiempo determinado:

Tiempo (min)	1	5	7	10
Velocidad (km/h)	200	700	1000	1300

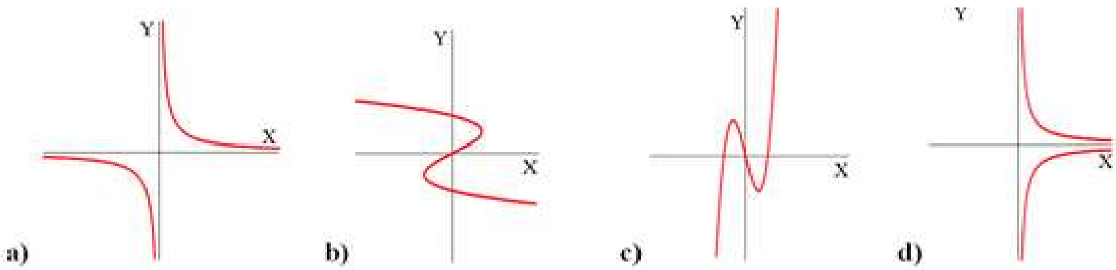
¿Podemos construir una función con los datos que aparecen en la tabla?

Solución: Sí, es una relación entre dos variables (tiempo y velocidad).

8) ¿Podríamos definir una función que relacione la edad que tiene una persona con su altura? ¿Serán variables dependientes una de la otra o no tiene por qué? ¿Y se puede definir una función con los números de DNI de cada persona y el número del portal donde cada uno vive?

Solución: No, porque puede haber dos personas que tengan la misma edad, pero miden diferente. No son variables dependientes la edad y la altura. Lo mismo ocurre con el número del DNI y del portal de sus edificios, no son dependientes, no se puede establecer una relación entre ellos.

9) Dadas las siguientes gráficas de funciones di si son funciones o no:



Solución: Las gráficas a) y c) serán funciones, pero b) y d) no lo serán ya que a un valor de x le corresponde más de un valor de y.

Metodología: La metodología que se seguirá en este campo de problemas será la de la entrega, por parte del profesor, de los ejercicios a los alumnos para su realización individual en clase antes de explicarles el concepto de función para ver si se acuerdan de conocimientos previos del curso anterior donde ya se estudia el concepto. Para ello, se les colocará en parejas o en grupos de tres (dependiendo del número total que tengamos en el aula en ese momento). Se les pedirá que resuelvan los ejercicios. Si tienen complicaciones con su resolución, el profesor puede darles alguna instrucción acerca de cómo encauzar la resolución de los mismos. Luego, las distintas soluciones se pondrán en común en la clase y se debatirán. Al final, el profesor dará una explicación de los conceptos que se han tratado y les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

Técnicas: Sobre la gráfica los alumnos deben fijarse en si a cada valor de x le corresponde un único valor de y para que se dé la condición óptima para poder afirmar que es función. Si a un valor de x le corresponde más de uno de y, no será función.

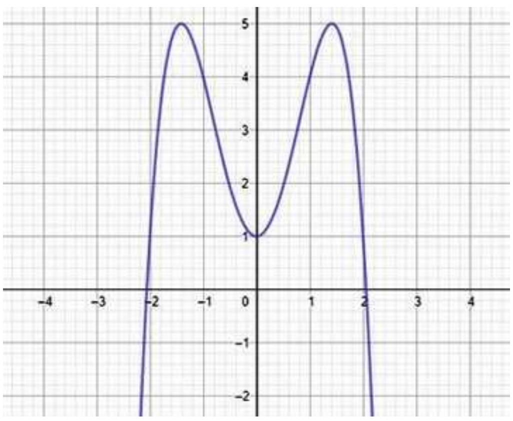
Tecnología: La tecnología que sustenta la técnica anterior citada es la definición del propio concepto de función.

- Corte con los ejes.

Plantearemos problemas en los que, a partir de una gráfica o la ecuación de una función, se pedirá a los alumnos que calculen los cortes con los ejes.

Veamos los ejercicios que hemos planteado para este campo de problemas:

10) Dada la siguiente gráfica se pide que se calcule el corte con los ejes:

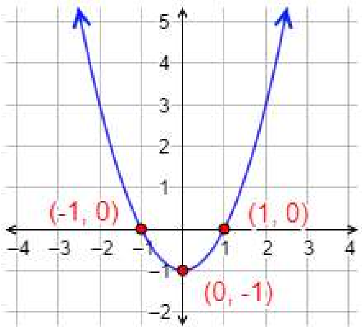


Solución: La gráfica corta al eje X en los puntos (-2,0) y (2,0) y corta al eje Y en el punto (0,1).

Este ejercicio también puede servir para que los alumnos se den cuenta de que no sólo hay gráficas de funciones que son rectas, sino que también hay gráficas con curvas y otras formas. Según Arce et al. (2019, p.313), los estudiantes tienden a descartar funciones que no respondan a prototipos conocidos (polinómicas, exponenciales, trigonométricas, de proporcionalidad inversa…), o incluso a obviar aquellas funciones que no estén definidas por rectas.

11) Dada la siguiente ecuación de una función $y = x^2 - 1$ se pide que se calcule los puntos de corte con los ejes.

Solución: El corte con el eje X es (-1,0) y (1,0) y se resolvería igualando la ecuación a 0 (sustituyendo y por 0), y el corte con el eje Y es el punto (0,-1) y se obtiene sustituyendo la x por 0.



12) Dadas las siguientes tablas de valores calcula los puntos de corte de la función con los ejes cartesianos.

x	y
2	4.5
1	9
0	3
-1	1.5
-2	0

x	y
0,5	-2,25
1	-2
2	0
3	4
0	-2
-1	0
-2	4

Solución: La función representada por la primera tabla corta al eje X en el punto (-2,0) y al eje Y en (0,3). La función correspondiente a la segunda tabla corta al eje X en (2,0) y (-1,0) y al eje Y en el punto (0,-2).

13) Una compañía aérea cobra 28 euros por llevar maleta sin importar el lugar al que se vaya a viajar. Luego fija el precio del billete según el número de km que viaja cada pasajero. Cada km lo cobra a 0,39 euros. ¿Dónde corta la función al eje Y?

Solución: Como los 28 euros son fijos sin importar el número de km que se viaje, la función cortará al eje Y en el punto (0,28). La ecuación de la función será $y = 0.39x + 28$.

Metodología: El modo en el que se abordará este campo de problemas en el aula es de forma individual primero ya que son ejercicios sencillos y de poco cálculo, y luego en grupo. Se les dará a los alumnos la ficha de ejercicios y se les pedirá que la resuelvan sin explicarles nada previamente. El profesor puede ayudarles en caso de que encuentren dificultades para resolverlos. No es algo que ya hayan visto en cursos anteriores pero la idea de corte con los ejes es una idea muy intuitiva y pueden llegar a encontrar la técnica de resolución de manera rápida y sencilla. Para el último ejercicio se colocarán a los alumnos por parejas ya que requiere de una mayor planificación a la hora de resolverlo. Luego se corregirán en clase y el profesor dará las explicaciones oportunas y definirá el concepto de corte con ejes. Posteriormente se les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

Técnica: Para el ejercicio 10) se trata de identificar los puntos de corte en la gráfica.

Para el ejercicio 11) se debe sustituir el valor de x por 0 para calcular el corte con el eje Y, y de sustituir y por 0 para obtener el corte con el eje X.

Para el 12) se trata de fijarnos en los ceros que aparecen en la tabla dada. Los puntos donde sea 0 el valor de x serán los puntos de corte con el eje Y, y los puntos donde es 0 el valor de y, serán los puntos de corte con el eje X.

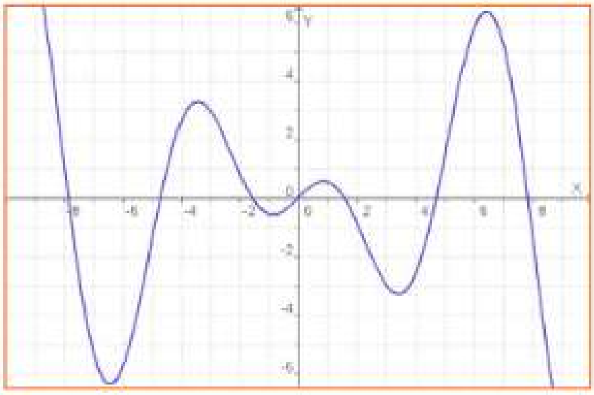
Para el 13) obtendríamos la ecuación de la función que modeliza el enunciado verbal y luego sustituiríamos x por 0 para obtener el corte con el eje Y.

Tecnología: La tecnología que hay detrás de la técnica es la definición de corte con los ejes. En algunos casos se trata de fijarnos en la representación gráfica y en otros casos hay que recurrir a la resolución de ecuaciones de primer o segundo grado sustituyendo tanto la x como la y por 0.

- Estudio de una gráfica: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad.

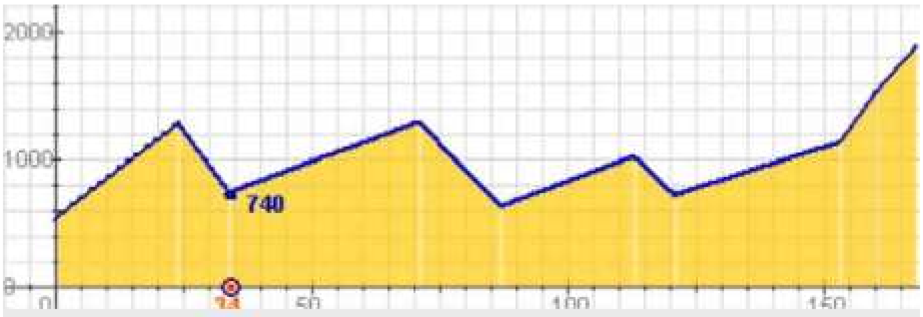
En este campo de problemas se pretende que el alumno sea capaz de analizar gráficamente una función dando algunas características de la misma, como pueden ser crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad.

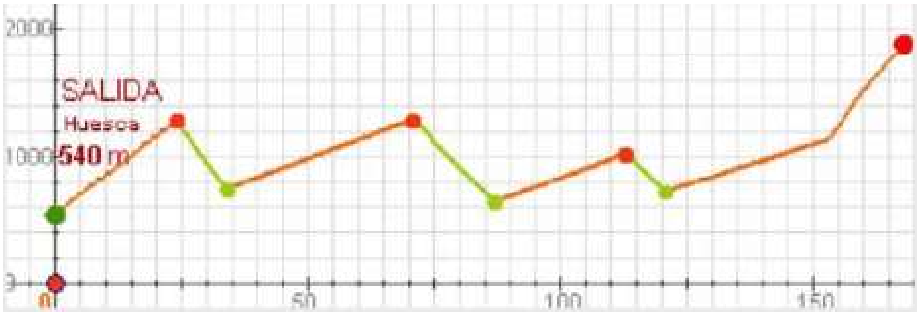
14) Dada la siguiente gráfica estudia máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad. E identifica los puntos de corte con los ejes. ¿Es una función creciente, decreciente o ambas? ¿Es continua?
Supongamos que la función sólo está definida en el intervalo que se ha dibujado y que fuera de ese intervalo no existe.



Solución: La función tiene máximos relativos en los puntos (-3.5, 3), (1, 0.5) y (6.5, 6.5) y un máximo absoluto en este último punto. Los mínimos relativos se encuentran en los puntos (-6.5, -6.5), (-1, -0.5) y (3.5, -3.2) y un mínimo absoluto en (-6.5, -6.5). Corta al eje X en (-8,0), (-4.5,0), (-1.5, 0), (0,0), (1.5, 0), (4.5, 0) y (8,0). Y corta al eje Y en (0,0). Es una función continua.
No es ni creciente ni decreciente. Como en este nivel no se especifica que los alumnos tengan que dar los intervalos de crecimiento o decrecimiento, nos basta con que digan que hay puntos donde la función crece y otros donde decrece.

15) La siguiente gráfica marca el perfil de una etapa de la Vuelta a España donde se relacionan los km que recorre cada ciclista y la altura de los puntos de montaña por los que pasa.





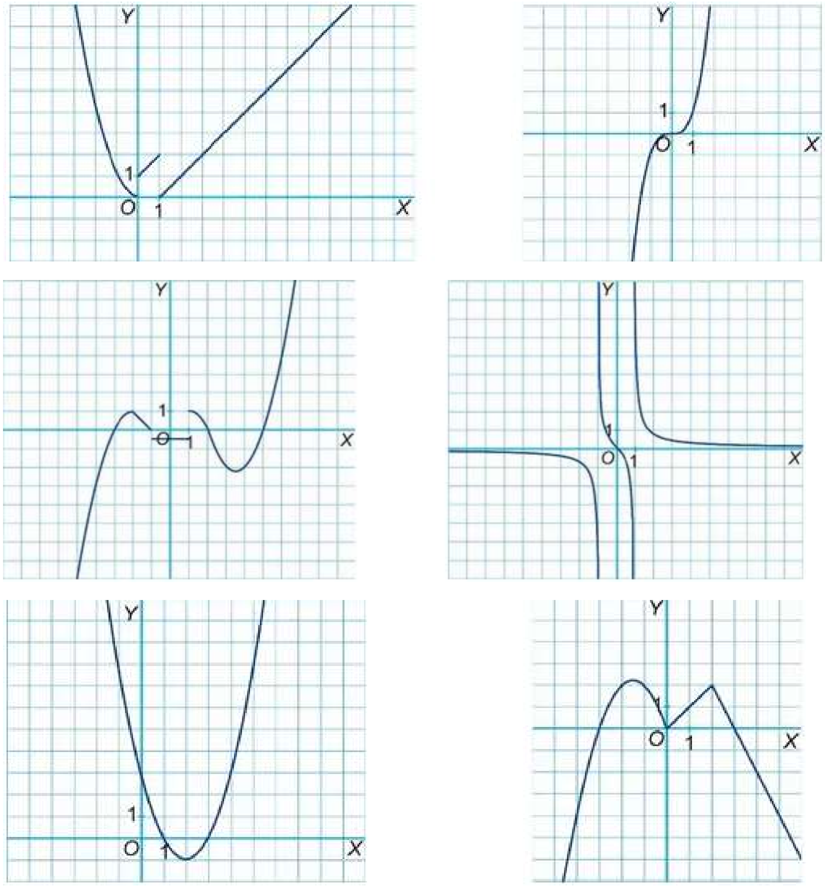
Notar que son los mismos perfiles, pero representados de diferente manera.

Responde a las siguientes preguntas:

- ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los máximos relativos?
- ¿Hay algún máximo absoluto? Indica cuál sería.
- ¿En qué punto kilométrico se alcanzan los mínimos relativos?
- ¿Hay algún mínimo absoluto? Indica cuál.
- ¿Es una función creciente, decreciente o ambas?
- ¿Es continua la función?

<u>Solución:</u> Los máximos relativos se encuentran en los puntos (24,1280), (71,1290) y (113,1020), hay un máximo absoluto en (71, 1290). Y los mínimos relativos son (34,740), (87,630) y (121,720) y hay un mínimo absoluto en (87, 630). Igual que en el ejercicio anterior no pretendemos que los alumnos nos den los intervalos en los que la función es creciente o decreciente, sino que solamente les pedimos que nos digan que no es ni creciente ni decreciente ya que tiene puntos de crecimiento y de decrecimiento. Es una función continua.

16) Dadas las siguientes gráficas, ¿puedes decir si son continuas las funciones que representan?



Solución: La gráfica arriba izquierda y las dos de en medio son discontinuas mientras que las gráficas arriba derecha y las dos de abajo son continuas (si atendemos a la definición de continuidad de no levantar el lápiz del papel).

Metodología: La manera de abordar este campo de problemas en el aula será colocar a los alumnos en grupos de tres personas. Se les planteará los ejercicios sin explicación previa y se les pedirá que obtengan las soluciones. El profesor puede ayudarles si lo necesitan. Luego se pondrán en común las distintas respuestas a las que han llegado cada grupo y el profesor dará una explicación de los conceptos y definiciones clave en este campo de problemas. Tras esto, se les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

Técnica: La técnica empleada para el estudio del crecimiento de una función en un punto es fijarnos en los puntos de alrededor. Si conforme aumenta x lo hace también y, entonces la función será creciente.

La técnica para el estudio del decrecimiento es fijarnos en que conforme aumenta x el valor de y disminuye.

Para obtener un máximo relativo debe ocurrir que la función a la izquierda del punto debe ser creciente y a la derecha debe ser decreciente. Para la obtención de un mínimo relativo es al revés, a la izquierda del punto debe ser decreciente y a la derecha creciente. El máximo absoluto corresponde con el mayor de loa máximos relativos y el mínimo absoluto será el menor de los mínimos relativos.

Y la técnica usada para el estudio de la continuidad es que al dibujar la gráfica podamos recorrerla en su totalidad sin levantar el lápiz del papel.

Tecnología: La tecnología que hay detrás de estas técnicas son las definiciones de los propios conceptos que se están tratando.

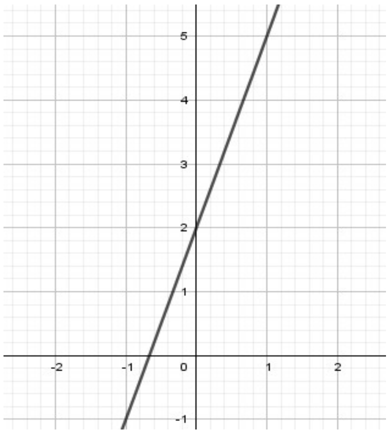
- Cambio de forma de representación de una función definida por un enunciado verbal, una tabla de valores o una ecuación para pasar a la representación gráfica.

En este campo de problemas se pretende que los alumnos conozcan las diferentes formas de representación en la que puede venir expresada una función y sepan identificarlas y pasar de una forma a otra sin mayor dificultad para acabar representándola gráficamente.

17) Un restaurante vende a domicilio comida para llevar en forma de raciones. Cada ración cuesta 3 euros y el coste de la entrega a domicilio es de 2 euros. ¿Podrías dar la ecuación de la función que modeliza este problema? Represéntala.

Solución: La ecuación de la función es $y = 3x + 2$ donde x es el número de raciones.

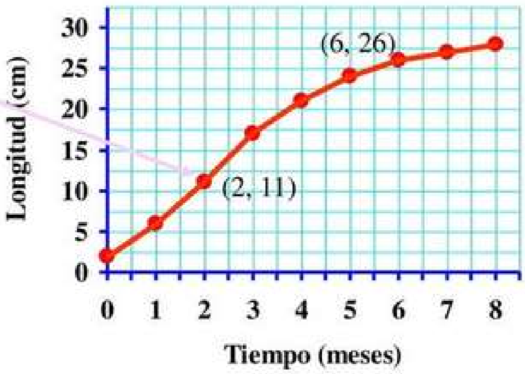
La gráfica de esta función es la siguiente:



18) Representa la función definida por la siguiente tabla que relaciona la longitud en centímetros de una planta con el tiempo que hace que fue plantada en meses:

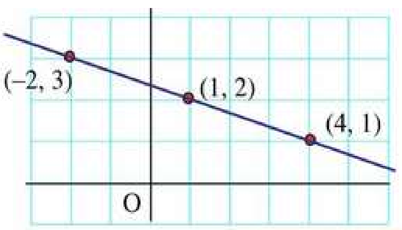
Tiempo (meses)	Longitud (cm)
0	2
1	6
2	11
3	17
4	21
5	24
6	26
7	27
8	28

Solución:



19) Representa la función dada por la ecuación $y = \frac{-1}{3}x + \frac{7}{3}$.

Solución:



Metodología: La forma en la que implementaremos este campo de problemas en el aula será de manera individual. Se hará entrega a los alumnos de la ficha de ejercicios sin explicación previa y se les pedirá que representen las gráficas de las funciones dadas por una tabla, un enunciado verbal o por una ecuación. Luego se les pedirá que se pongan en pareja para que comparen las gráficas. Más tarde, las respuestas se pondrán en común con toda la clase y el profesor dará la explicación necesaria. Posteriormente, se les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

Técnica: La técnica empleada para el ejercicio 17) es la obtención a partir del enunciado verbal de la ecuación de la función identificando la variable dependiente y la independiente. Cuando se tenga la ecuación hay que construir una tabla de valores para su posterior representación, la cual se construirá dando diferentes valores a x para calcular y.

La técnica para el 18) será dibujar los puntos que ya se proporcionan en la tabla.

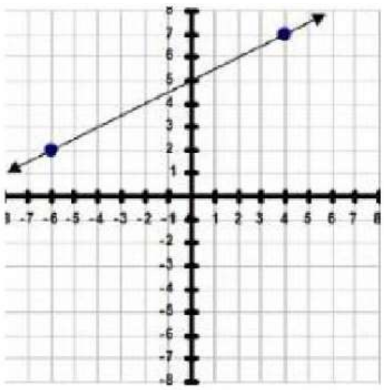
La técnica para el ejercicio 19) es construir una tabla de valores sustituyendo x por varios valores y calculando y.

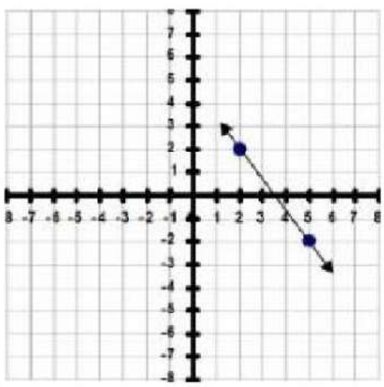
Tecnología: La tecnología que sustenta las técnicas anteriores es la definición de coordenadas de puntos y la representación gráfica.

- Cálculo de pendientes de una recta.

En este campo de problemas se pretende que los alumnos sepan identificar la pendiente de una recta cuando se define una función dando su ecuación y que sepan calcularla a partir de una gráfica tomando un par de puntos de la recta.

20) Dadas las siguientes gráficas calcula la pendiente de las rectas:





Solución: La pendiente de la recta de la izquierda es $m = 1/2$. Y la de la segunda es $m = -4/3$.

21) Calcula la pendiente de la recta definida por la siguiente tabla:

X	-1	0	1	2
Y	-2	0	2	4

Solución: La pendiente de la recta que describe esta tabla es $m = 2$.

22) Calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos (5, -1) y (2, 0).

Solución: La pendiente de la recta que pasa por esos dos puntos es $m = -1/3$.

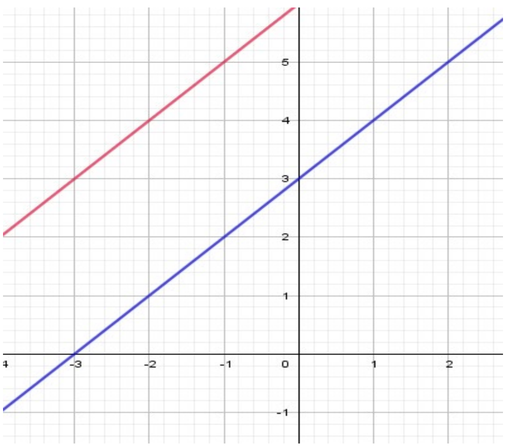
23) Dibujar las gráficas de las funciones dadas por las siguientes ecuaciones: $y = x + 3$ e $y = x + 6$.

Responde:

- ¿Cómo han de ser las pendientes de dos rectas para que no se corten entre ellas? ¿Cómo se llaman las rectas que no se cortan?
- ¿Cómo deben ser las pendientes de dos rectas para que se corten? ¿Cómo se llaman estas rectas que no se cortan?
- ¿Qué ocurre si la pendiente es positiva? ¿Y si es negativa?

Solución: Las gráficas son:

La representada en rojo corresponde a la recta $y = x + 6$ y la representada en azul es $y = x + 3$.



- Para que dos rectas no se corten las pendientes deben ser iguales. A estas rectas que no se cortan se les llama rectas paralelas.
- Para que dos rectas se corten deben tener pendientes distintas y se llaman secantes.
- Si la pendiente es positiva, la función es creciente. Si es negativa, la recta será decreciente.

<u>Metodología:</u> Este campo de problemas se implementará en el aula de manera individual y colectiva. Los tres primeros problemas serán de realización individual por parte de los alumnos y el último (el ejercicio 23) se realizará en parejas. Se les hará entrega de los ejercicios y cuando los tengan hechos, se debatirán en clase las distintas respuestas y se corregirán. Tras esto, el profesor dará las explicaciones oportunas acerca del concepto de pendiente de función. Posteriormente, se les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

<u>Técnica:</u> La técnica empleada para el cálculo de la pendiente de una recta dada por dos o más puntos está basada en una fórmula. Esta fórmula da el valor de la pendiente a partir de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y se calcula así: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Se trata de sustituir cada una de las coordenadas de los puntos en la fórmula de la pendiente y así la obtendríamos. En el caso en el que se da una gráfica y se pide calcular la pendiente, se deben elegir dos puntos de la gráfica y con ellos se plantearía el cálculo de la fórmula.

<u>Tecnología:</u> La tecnología que se emplea en este campo de problemas es la definición de pendiente y la representación gráfica.

- <u>De la tabla de valores, la gráfica o el enunciado verbal a la ecuación de la función.</u>

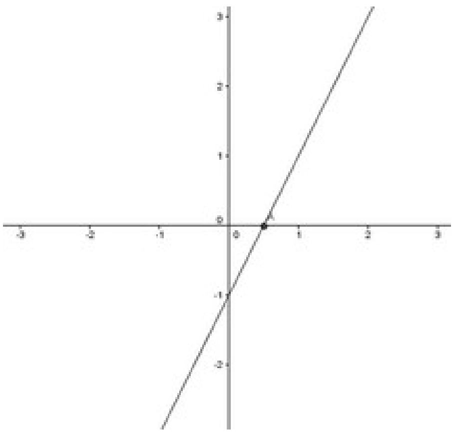
En este campo de problemas se pretende que el alumno sea capaz de plantear la ecuación de una función a partir de su tabla de valores, su gráfica o dado un enunciado verbal.

Aquí debemos hacer notar que en ciertos problemas planteados es necesario conocer cómo obtener la pendiente y la ordenada en el origen de una recta para poder llegar a la expresión algebraica de la función (cuando se proporciona la tabla de valores o la gráfica).

24) Dada la siguiente tabla de valores, da la ecuación de la recta calculando su pendiente, su ordenada y los cortes con los ejes. Después, represéntala:

x	y = f(x)
0	-1
0,5	0
1	1
2	3

Solución: La ecuación de la recta es $y = 2x - 1$. La pendiente es $m = 2$ y la ordena es $n = -1$ (coordenada segunda del punto de corte con el eje Y). El corte con el eje Y es (0, -1) y con el eje X (0.5, 0).

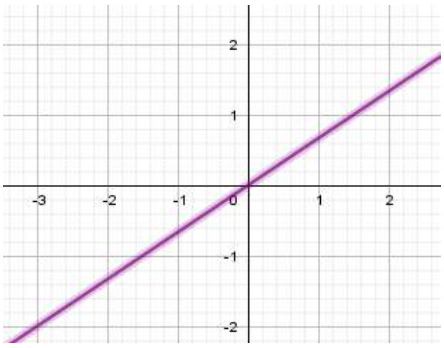


25) El nivel de agua que se alcanza en un recipiente depende del tiempo que el grifo esté goteando. La relación entre ambas variables viene dada por la siguiente tabla:

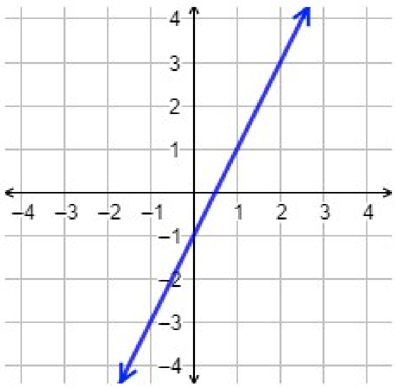
Tiempo (min)	15	30	45	60
Nivel agua (cm)	10	20	30	40

Da la ecuación de la recta que modeliza este problema calculando la pendiente y la ordenada y calcula los cortes con los ejes.

Solución: La pendiente de la recta es $m = 2/3$ y la ordenada en el origen es $n = 0$ ya que es una función de proporcionalidad y corta a los ejes X e Y en el punto (0,0). Con lo cual, la ecuación de la recta es $y = \frac{2}{3}x$.



26) Dada la siguiente gráfica de una función calcula la ecuación de la recta calculando la pendiente y la ordenada. Da también los puntos de corte con los ejes:



Solución: La pendiente de la recta es $m = 2$ y la ordenada es $n = -1$. Por tanto, la ecuación de la recta es $y = 2x - 1$. El corte con el eje X es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ y con el eje Y es (0, -1).

27) Responde a las siguientes preguntas:

a) ¿Podemos calcular las coordenadas y de los puntos de una recta horizontal?

b) ¿Pueden pasar varias rectas por un punto?

c) ¿Cuántas rectas pueden pasar por un punto?

d) ¿Qué podemos decir acerca de las rectas que pasan por el origen de coordenadas? ¿Cómo se les llama a estas rectas?

e) ¿Podríamos calcular las soluciones de una ecuación de primer grado tratándola como recta? ¿Cómo lo haríamos?

Solución: a) Será una función constante, con lo cual las coordenadas y siempre serán el valor de esa constante para cualquier valor de x.

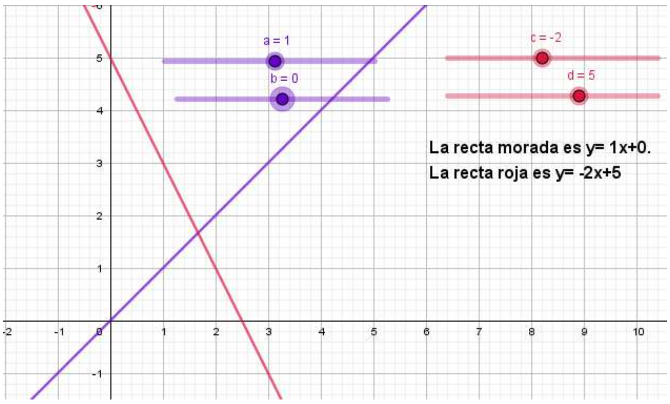
b) Sí.

c) Por un punto pasan infinitas rectas.

d) Son rectas lineales o proporcionales, son de la forma $y = mx$ y, como pasan por el punto (0,0), no tienen ordenada (vale 0). Se llaman funciones proporcionales o lineales.

e) Sí, Igualamos la ecuación a la variable y, y para resolverla calcularíamos el corte con el eje X sustituyendo la y por 0.

26) Responded a las siguientes preguntas usando el archivo GeoGebra que se os proporciona a continuación. Para responder correctamente deberéis abrir el archivo e ir cambiando los valores de los deslizadores. (Actividad de GeoGebra).

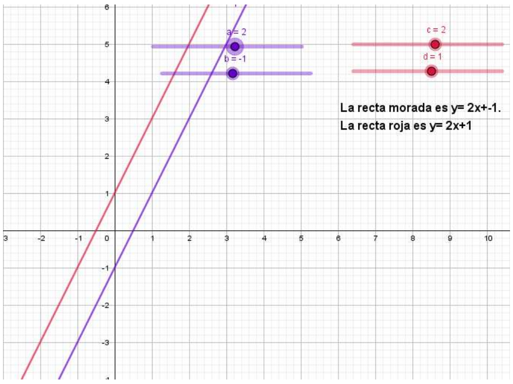


a) ¿Cuándo podrías afirmar que las rectas no se cortan?
b) ¿Cuándo se cortan las rectas?
c) ¿Para qué valores de la pendiente las rectas serán paralelas?
d) ¿Influye el valor de la ordenada en el paralelismo de rectas?
e) ¿Para qué valores de la pendiente la función es creciente?
f) ¿Para qué valores de la pendiente de la recta será decreciente?

Solución:

a) Las rectas no se cortarán cuando las pendientes coincidan en número.
b) Las rectas se cortan siempre y cuando las pendientes de ambas no sean las mismas.

c) Serán paralelas las rectas cuando los valores de las pendientes de ambas rectas sean los mismos.



d) La ordenada no influye para que dos rectas sean paralelas.

e) Para valores positivos de la pendiente las rectas serán crecientes.

f) Para valores negativos de la pendiente las rectas serán decrecientes.

Metodología: La manera en la que se intentará introducir este campo de problemas en el aula es de forma colectiva. Se pondrá a los alumnos en grupos de tres personas y se les hará entrega de los ejercicios sin proporcionarles ninguna explicación previa. Se pretende que los alumnos se enfrenten a los problemas planteados y encuentren una técnica o método para su resolución. El profesor se pasará por las mesas para controlar que estén haciendo bien los ejercicios y podrá ayudarles en el caso de que lo precisen. Una vez los tengan, se realizará una puesta en común de las diferentes respuestas en clase mediante un debate guiado por el docente. Luego, éste dará las explicaciones oportunas. Por último, se les mandará ejercicios de consolidación para casa, para que afiancen conocimientos adquiridos durante esa sesión. La duración de la resolución de este campo será de una sesión.

Técnica: Tomar dos puntos de la tabla o de la gráfica y calcular la pendiente (m) usando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Luego calcular la ordenada en el origen (n) calculando el punto de corte con el eje Y o fijándonos en el punto de corte de la recta con el eje Y en la gráfica que nos proporciona el ejercicio. Cuando tengamos el valor de m y de n debemos sustituirlos en la ecuación de la recta $y = mx + n$. Y ya tendremos la ecuación. Para el cálculo de los respectivos cortes con los ejes, debemos sustituir x e y por 0, como se ha explicado anteriormente en este trabajo. Si el enunciado ya nos proporciona la ecuación de la función, únicamente debemos distinguir cuál es la pendiente (el coeficiente de la x) y cuál es la ordenada (el término independiente).

Tecnología: La tecnología usada en este campo de problemas es la definición de recta, de pendiente y de ordenada. En el caso en el que se proporciona la ecuación, la tecnología es aplicar la definición de pendiente y ordenada para obtenerlas.

VI. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma.

El curso consta aproximadamente de 30 semanas y el número de horas semanales que se dedican a la asignatura de matemáticas en el nivel de 2º ESO que estamos estudiando es de cuatro. Dedicaremos 11 sesiones a la explicación del tema de funciones (Bloque 4 del currículo de 2º ESO). Por tanto, esta unidad didáctica tendrá una prolongación en el tiempo de aproximadamente tres semanas

A continuación, detallaremos en una tabla los contenidos que se van a tratar en la unidad y qué actividades desarrollaremos para introducir cada uno de los contenidos. (Véase Tabla 4).

Tabla 4: Secuenciación de los contenidos y las actividades a desarrollar en la unidad.

CONTENIDOS DE LA UNIDAD	**ACTIVIDADES**
Contenidos de cursos anteriores (1º ESO, 6º primaria).	Prueba inicial.
1.Coordenadas cartesianas: representación de puntos.	Campo de problemas 1
2.Concepto de función: Variables dependientes e independientes.	Campo de problemas 2
3.Cortes con los ejes.	Campo de problemas 3
4.Estudio de gráficas: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad.	Campo de problemas 4
5.Representación gráfica a partir de una ecuación, un enunciado verbal o una tabla de valores.	Campo de problemas 5
6.Función lineal: Cálculo e interpretación de la pendiente.	Campo de problemas 6
7.Obtención de una ecuación a partir de la tabla de valores, la gráfica o un enunciado verbal.	Campo de problemas 7

En la siguiente tabla representaremos las sesiones que dedicaremos a esta unidad detallando en cada una de ellas las actividades a realizar. La duración aproximada de las sesiones es de 55 minutos. (Ver Tabla 5).

Tabla 5: Temporalización en sesiones de contenidos y actividades a seguir en la unidad.

SESIONES	DESARROLLO DE LA SESIÓN
Sesión 1	Prueba inicial e introducción a las funciones dando su razón de ser mediante problemas contextualizados.
Sesión 2	Explicación de coordenadas cartesianas y representación de puntos mediante el campo de problemas 1.
Sesión 3	Explicación del concepto de función mediante el campo de problemas 2.
Sesión 4	Explicación de cortes con los ejes mediante el campo de problemas 3.
Sesión 5	Explicación del estudio de gráficas: crecimiento, decrecimiento, máximos, mínimos, continuidad mediante el campo de problemas 4.
Sesión 6	Cómo representar una gráfica a partir de una ecuación, un enunciado verbal o una tabla de valores mediante el campo de problemas 5.
Sesión 7	Explicación de función lineal y del cálculo e interpretación de la pendiente mediante el campo de problemas 6.
Sesión 8	Cómo obtener una ecuación a partir de la tabla de valores, la gráfica o un enunciado verbal mediante el campo de problemas 7.
Sesión 9	Sesión de repaso de conceptos y contenidos antes del examen revisando los diferentes campos de problemas vistos en clase.
Sesión 10	Prueba escrita de evaluación.
Sesión 11	Revisión y corrección de la prueba escrita, proporcionando feedback a los alumnos.

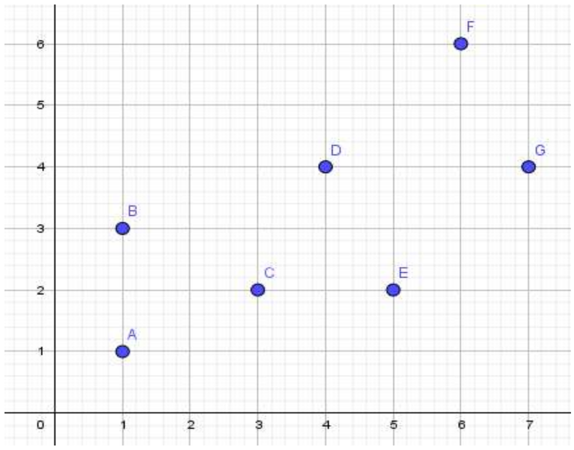
VII. Sobre la evaluación.

Para realizar la evaluación que vamos a seguir en esta unidad de funciones que hemos planteado en el apartado anterior, lo que haremos será una prueba escrita. Ésta constará de siete ejercicios, los cuales serán muy parecidos a los vistos y planteados en clase para el estudio de cada uno de los campos de problemas que hemos estudiado. Se realizará al finalizar las sesiones previstas para la unidad didáctica y tendrá una duración aproximada de una hora. Como las clases son de 55 minutos, cogeremos el descanso entre nuestra clase y la clase siguiente (pidiendo permiso siempre al profesor a quien le toque dar esa hora posterior). De esta manera se pretende que los alumnos tengan el tiempo suficiente para la realización del control.

Otro aspecto a destacar es que esta prueba escrita valdrá para nota. De esta calificación y de las que los alumnos obtengan en el resto de pruebas que se realicen durante el trimestre, saldrá la nota final de la evaluación. A parte de la prueba, se contará el trabajo en clase y el que realicen en casa cuando se les mande tarea. También contará la actitud y el interés que muestren hacia la asignatura. Para calificar estos aspectos nos basaremos en el criterio de evaluación Crit.MAAC.1.8, así como en sus estándares de evaluación asociados presentes en el bloque 1 “Procesos, métodos y actitudes en matemáticas” del anexo de la orden ECD/489/2016, de 26 de mayo en el que se desarrolla el currículo de la asignatura en la comunidad autónoma de Aragón. Además, en algún ejercicio de los que se realicen en clase, el profesor podrá tomar nota y calificarlo. De esta manera, el docente dispondrá de una amplia variedad de notas para poder calificar al alumno y así no se lo juegan todo en una prueba. A continuación, aparece detallada la prueba escrita con la que se evaluará el aprendizaje realizado por el alumnado.

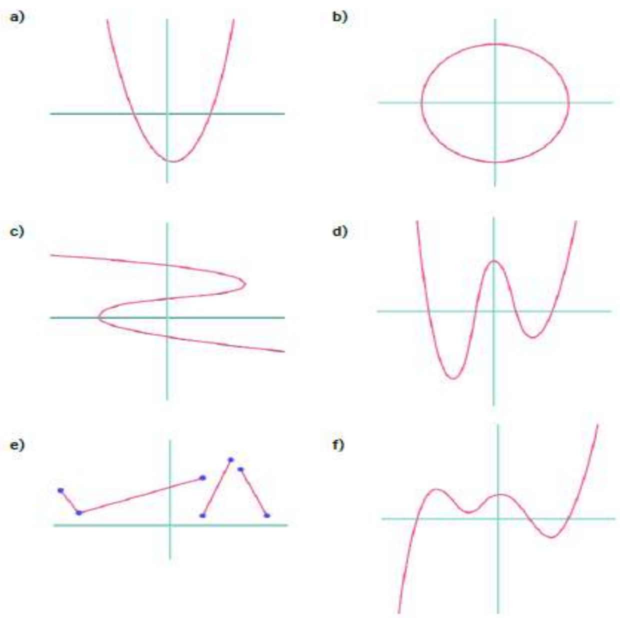
Prueba escrita de evaluación:

Ejercicio 1: Este gráfico representa las alturas de diferentes arbustos (eje Y) en relación a los años de vida que tengan (eje X). Responde a las siguientes preguntas:



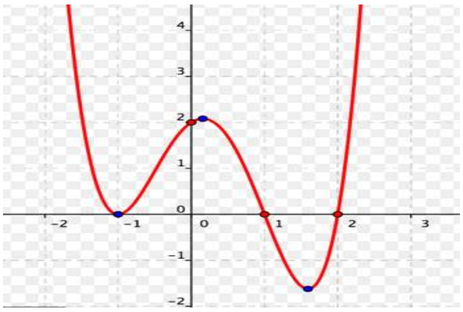
a) ¿Qué arbusto es el más alto?
b) ¿Cuál es el más bajo?
c) ¿Cuál es el más longevo?
d) ¿Qué arbusto es el que menos tiempo tiene?
e) Di cuánto tiempo y qué altura tienen los arbustos B y F.

Ejercicio 2: Indica si las siguientes gráficas corresponden a una función o no:



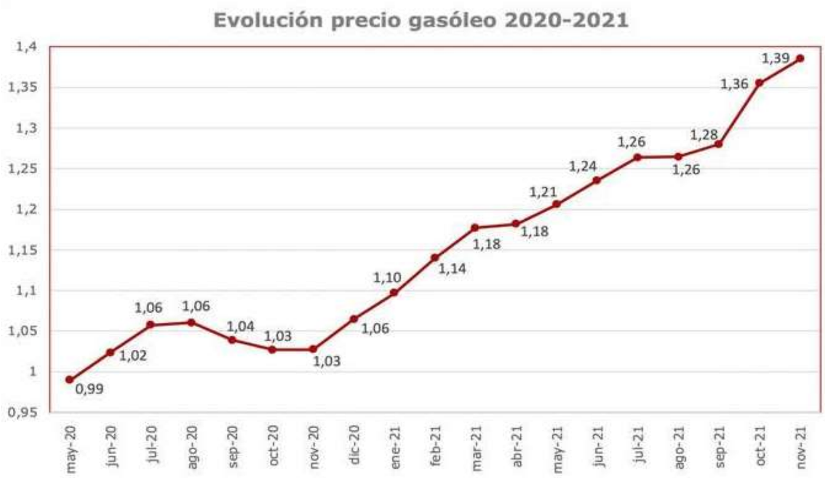
Ejercicio 3: Dadas las siguientes funciones, calcula los puntos de corte con los ejes:

a)



b) $y = x^2 + 5x + 6.$

Ejercicio 4: Dada la siguiente gráfica responde a las preguntas:



a) ¿Es una función creciente o decreciente?

b) ¿Podrías decir si hay máximos y mínimos relativos y absolutos? Indica cuáles son.

c) ¿Cuál es el precio máximo que ha alcanzado el gasóleo? ¿En qué mes y año lo ha alcanzado?

d) ¿Cuál es el precio mínimo que ha alcanzado el gasóleo? ¿En qué mes y año lo ha alcanzado?

e) ¿Cuál era el precio en noviembre de 2020? ¿Y en junio de 2021?

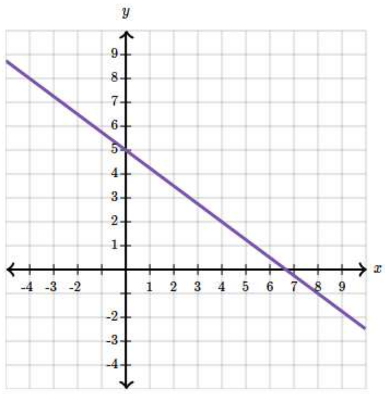
f) ¿Podríamos decir que la tendencia de la gráfica si se representaran meses de 2022 sería creciente según las noticias que salen cada día en la televisión?

Ejercicio 5: Un técnico de reparaciones de lavadoras cobra 20 euros por el desplazamiento y 30 euros por cada hora de trabajo.

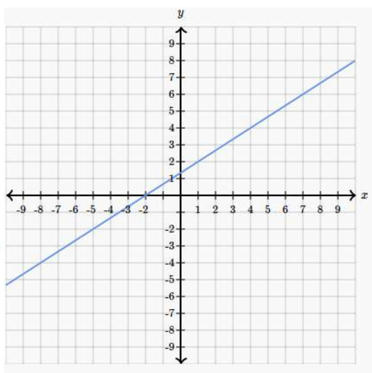
a) Identifica las variables y di cuál será la variable dependiente y cuál la independiente.
b) Escribe la expresión algebraica.
c) Representa la gráfica de la ecuación de la función que has calculado.
d) Fíjate en la gráfica, ¿es una función creciente o decreciente?
e) ¿Es una función continua?
f) ¿Cuánto habría que pagarle al técnico si trabaja cuatro horas?

Ejercicio 6: Dadas las siguientes gráficas calcula la pendiente de cada una de ellas y su ordenada en el origen. Da la ecuación de la función que representan.

a)



b)



Ejercicio 7: Dada la siguiente tabla de valores, calcula la ecuación de la recta que representa calculando la pendiente y la ordenada en el origen.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-6	-4	-2	0	2	4

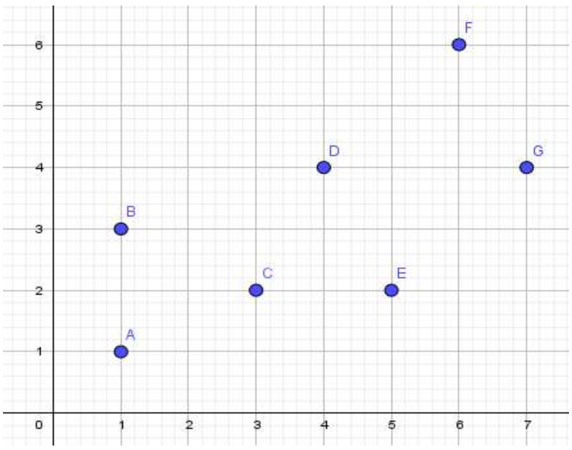
Los criterios de calificación que vamos a seguir para evaluar esta prueba, y en general durante el curso, va a ser el Modelo de Tercios que se ha visto en la asignatura de Innovación e Investigación docente en matemáticas, la cual está incluida dentro del segundo cuatrimestre del máster de profesorado de Educación Secundaria del curso 2021/ 2022. Este modelo hace referencia a pruebas y a cómo calificarlas y evaluarlas. Es un modelo de evaluación por fallos (se califica restando según los fallos cometidos) y se basa en la evaluación de la prueba según las tareas realizadas y siguiendo los criterios de evaluación que marca la ley LOMCE (la que se está aplicando en este momento). El modelo de Tercios consiste en una clasificación de las tareas en tareas principales, tareas auxiliares específicas y tareas auxiliares generales. Éstas últimas no pueden restar más de $\frac{1}{3}$ de la nota total puesto que van asociadas a errores de cálculo. Las tareas auxiliares específicas no pueden restar más de $\frac{2}{3}$ de la nota y en ellas se engloban errores del tipo no saber aplicar una fórmula o un método secundario. Las tareas principales hacen referencia a lo importante de la tarea que se esté evaluando. El error más común aquí es no saber el método principal de resolución. En este caso se puede restar la totalidad de la puntuación del ejercicio. Destacar que siempre debemos basarnos en los criterios de evaluación al evaluar las tareas ya que la evaluación en ESO y Bachillerato es criterial.

También se tendrán en cuenta para la evaluación los estándares de aprendizaje que marca la ley LOMCE de acuerdo a los contenidos a los que estemos atendiendo.

En esta prueba escrita se analizarán los distintos campos de problemas estudiados en el tema y las diferentes técnicas y tecnologías en las que se basa cada campo. También se expondrán los estándares de aprendizaje asociados a cada uno de los ejercicios, los criterios de evaluación y las diferentes tareas que se emplearán para evaluar al alumno por el Modelo de Tercios y los criterios de calificación de cada ejercicio (puntuación). También se estudiarán las diferentes respuestas que cabría esperar en cada ejercicio, así como los posibles errores que se pueden cometer en cada respuesta en función de los conocimientos que posean los alumnos.

Ejercicio 1:

Este gráfico representa las alturas (en m) de diferentes arbustos (eje Y) en relación a los años de vida que tengan (eje X). Responde a las siguientes preguntas:



a) ¿Qué arbusto es el más alto?
b) ¿Cuál es el más bajo?
c) ¿Cuál es el más longevo?
d) ¿Qué arbusto es el que menos tiempo tiene?
e) Di cuánto tiempo y qué altura tienen los arbustos B y F.

- Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - Aquí el campo de problemas que se aborda es el de representación e interpretación de puntos en el plano.
  - La técnica empleada es la de fijarnos en que la primera coordenada del punto corresponde a la distancia que hay hasta el eje vertical y la segunda coordenada será la distancia al eje horizontal.
  - La tecnología que sustenta la técnica es la de la propia definición de coordenada de un punto y la representación gráfica.

- Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se trabajará el estándar: Est.MA.4.1.1. Localiza puntos en el plano a partir de sus coordenadas y nombra puntos del plano escribiendo sus coordenadas.

- Criterios de evaluación y tareas evaluadas según Modelo de Tercios:

  Como ya hemos mencionado anteriormente se trata de un ejercicio que se engloba dentro del campo de problemas de la representación de puntos.
- Tareas principales: Crit.MA.4.1. Conocer, manejar e interpretar el sistema de coordenadas cartesianas.
- Tareas auxiliares específicas: No hay.
- Tareas auxiliares generales: No hay.

- Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

  Cada respuesta correcta contará 0,3 puntos. Si responden correctamente a las cinco preguntas tendrán la máxima puntuación, que será 1.5 puntos. Se puntuará de esta manera ya que según el Modelo de Tercios que hemos elaborado no hay tareas auxiliares en este ejercicio, con lo cual se puntuará según las respuestas que se den a la tarea principal.

❖ Posibles respuestas de los alumnos: Los alumnos pueden responder adecuadamente a los apartados de la siguiente manera:

a) El arbusto más alto es F.
b) El arbusto más bajo es A.
c) El más longevo es G.
d) Son dos arbustos los que tienen el mismo tiempo, A y B.
e) B tiene 3 años y mide 1m y el F tiene 6 años y mide 6m

También pueden responder erróneamente de la siguiente manera:

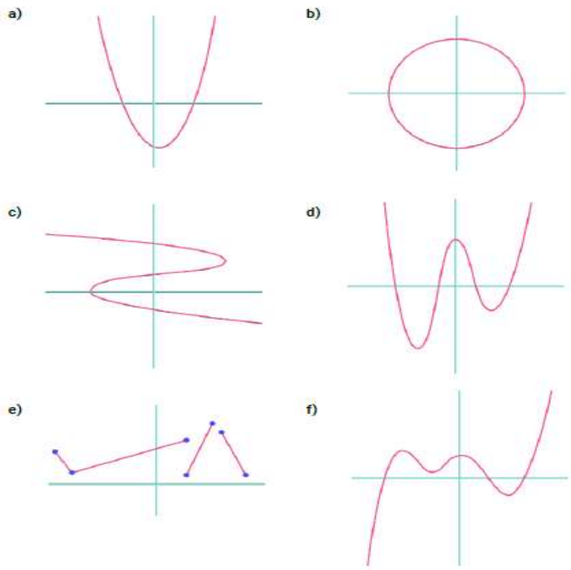
a) El arbusto más alto es G. Si confunden las coordenadas e invierten su orden.
b) El arbusto más bajo es A. Si confunden las coordenadas, aunque en este caso la respuesta sería correcta porque coincide que A es el más bajo y uno de los más jóvenes.
c) El más longevo es F. Si invierten el orden de coordenadas.
d) El que menos tiempo tiene es A. Si dan un orden incorrecto de las coordenadas.
f) B tiene un año y mide 3m y el F tiene 6 años y mide 6m. Si cambian el orden de coordenadas. Las del punto F las darán bien ya que coinciden las dos coordenadas en valor.

❖ Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:
Es muy probable que algunos alumnos no sepan distinguir correctamente cuál es el eje X y cuál es el Y. Si ocurre esto, no darán adecuadamente las coordenadas de un punto y probablemente intercambiarán el orden de las coordenadas. Ello provoca, que respondan mal o al contrario a las preguntas que se les propone en el enunciado. También pueden dar respuestas incorrectas o dar las respuestas correctas pero sin justificarlas.

Este tipo de dificultades la recoge Azcárate y Deulofeu (1990, p. 78). Afirman que los alumnos cometen errores en la graduación de los ejes (positivos y negativos) y en la inversión en el orden de las coordenadas de un punto.

Ejercicio 2:

Indica si las siguientes gráficas corresponden a una función o no:



- Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - Aquí el campo de problemas abordado es el de clasificación de gráficas según sean o no funciones.
  - La técnica empleada es la de fijarnos en si a cada valor de x le corresponde un único valor de y. Si a un valor de x le corresponde más de uno de y, no será función.
  - La tecnología que sustenta la técnica es la de la propia definición de función.

- Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se persigue alcanzar el estándar: Est.MA.4.3.1. Reconoce si una gráfica representa o no una función.

- Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios:

  Como ya se ha dicho este problema se engloba dentro del campo de problemas de comprobación de si la representación gráfica que se da es una función o no.

- Tareas principales: Crit.MA.4.3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
- Tareas auxiliares específicas: No hay.
- Tareas auxiliares generales: No hay.

- Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

  Cada respuesta correcta será puntuada con un 0,1666. Si contestan correctamente a los seis apartados tendrán una puntuación de 1 punto. Se puntuará de esta manera ya que según el Modelo de Tercios que hemos elaborado no hay tareas auxiliares en este ejercicio, con lo cual se puntuará según las respuestas que se den a la tarea principal.

- Posibles respuestas de los alumnos:

  Los alumnos pueden responder que las gráficas a), d), e) y f) sí que son función porque para cada x existe un único valor y que le corresponde. Y también pueden responder que las gráficas b) y c) no lo son porque a cada x no le corresponde un único valor de y.

  También pueden dar las respuestas erróneas si confunden los ejes X e Y. Pueden decir que las gráficas son función si la x tiene dos valores distintos de y, y afirmar que no lo son cuando a un x le corresponde sólo un y mirando la gráfica desde sus respectivos puntos de vista (el eje X será su eje Y, y al contrario si intercambian los ejes).

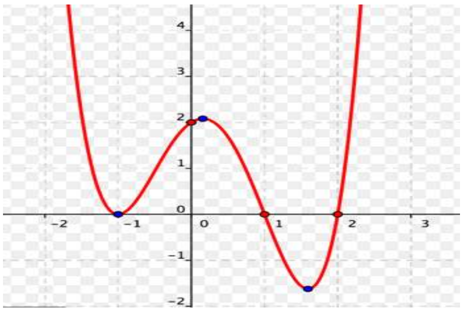
- Posibles errores que alumnos pueden cometer en la resolución:

  El error más común que pueden cometer es no saber distinguir entre el eje X o el eje Y o no entender el concepto de función (que a un valor concreto de x le corresponde un único valor de y, si no es así, no es función). También pueden dar una respuesta incorrecta, una correcta pero sin justificar el porqué de la elección que han hecho o dar una justificación inadecuada.

Ejercicio 3:

Dadas las siguientes funciones, calcula los puntos de corte con los ejes:

a)



b) $y = x^2 + 5x + 6.$

❖ Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:

- Aquí el campo de problemas que se trata es el de corte con los ejes.
- La técnica empleada, dependiendo del enunciado que tengamos, es la de identificar los puntos de corte en la gráfica, la de sustituir en la ecuación de la función el valor de x por 0 para calcular el corte con el eje Y, y de sustituir y por 0 para obtener el corte con el eje X o la de fijarnos en los ceros que aparecen en la tabla dada (los puntos donde sea 0 el valor de x serán los puntos de corte con el eje Y, y los puntos donde es 0 el valor de y serán los puntos de corte del eje X).
- La tecnología que sustenta la técnica es la definición de corte con los ejes. En algunos casos se trata de fijarnos en la representación gráfica y en otros casos hay que recurrir a la resolución de ecuaciones de primer o segundo grado.

❖ Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

En este campo de problemas se trabajará el estándar: Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

❖ Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios:

Este es un ejercicio que se encuentra dentro del campo de problemas de cálculo de cortes con los ejes.

- ❖ Tareas principales: Identificar puntos de corte y saber obtenerlos a partir de su definición.
- ❖ Tareas auxiliares específicas: Conocer e identificar las coordenadas de un punto.
- ❖ Tareas auxiliares generales: No hay.

- ❖ Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

Si el alumno calcula todos los puntos de corte correctamente tendrá un 0,75 por cada apartado. Así entre los dos sumarán 1,5 puntos si responden correctamente.

Si da los puntos de corte con uno de los ejes correctamente pero no da los puntos de corte de los dos ejes tendrá 0,375 puntos.

Si no reconoce los puntos o no sabe dar las coordenadas correctas de los puntos se le quitarán $\frac{2}{3}$ de la nota del apartado según los criterios que hemos impuesto en el Modelo de Tercios (se quitará un punto).

- ❖ Posibles respuestas de los alumnos:

Las respuestas correctas son:

a) Corte con el eje X: (-1,0), (1,0), (2,0) y corte con el eje Y: (0,2).
b) Corte con el eje X: (-2,0), (-3,0) y corte con el eje Y: (0,6).

Las respuestas incorrectas pueden ser:

a) Corte con el eje X: (0,-1), (0,1), (0,2) y corte con el eje Y: (2,0).
b) Corte con el eje X: (0,-2), (0,-3) y corte con el eje Y: (6,0).

Esto se debe a que no distingan el eje X del Y, o inviertan el orden de las coordenadas de un punto. También puede ocurrir que no entiendan el concepto de corte con los ejes y marquen por ejemplo el mínimo en el punto (1.5,-1.5).

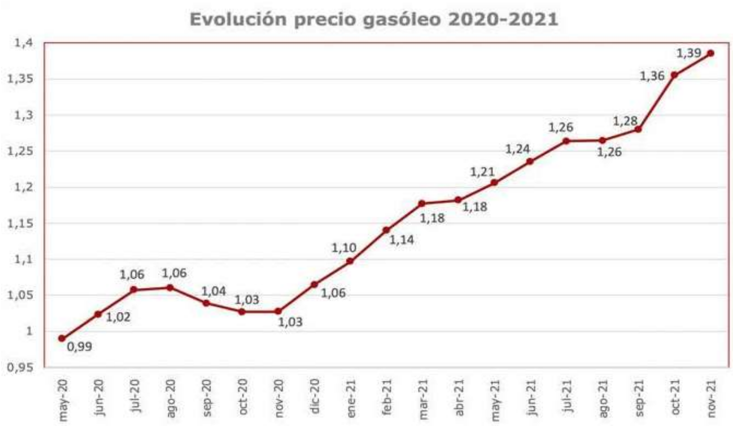
- ❖ Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:

Los errores comunes pueden ser no distinguir el eje X del eje Y, y por tanto, dar las coordenadas cambiadas de orden de los puntos de corte con los ejes (en lugar de decir que el corte con el eje X es (1,0) decir que es (0,1)), o no saber cómo obtener los puntos de corte ni qué variable sustituir por cero para calcular el corte con el eje X o viceversa cuando se proporciona a los alumnos una ecuación de una función. También podrían dar otros puntos como máximo o mínimo como si fueran esos los puntos de corte.

Este tipo de posibles errores lo recoge Azcárate y Deulofeu (1990, p. 78). Afirman que los alumnos cometen errores en la graduación de los ejes (positivos y negativos) y en la inversión en el orden de las coordenadas de un punto.

Ejercicio 4:

Dada la siguiente gráfica responde a las preguntas:



a) ¿Es una función creciente o decreciente?
b) ¿Podrías decir si hay máximos y mínimos relativos y absolutos? Indica cuáles son.
c) ¿Cuál es el precio máximo que ha alcanzado el gasóleo? ¿En qué mes y año lo ha alcanzado?
d) ¿Cuál es el precio mínimo que ha alcanzado el gasóleo? ¿En qué mes y año lo ha alcanzado?
e) ¿Cuál era el precio en noviembre de 2020? ¿Y en junio de 2021?
f) ¿Podríamos decir que la tendencia de la gráfica si se representaran meses de 2022 sería creciente según las noticias que salen cada día en la televisión?

- Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - Aquí el campo de problemas que se trabaja es el del estudio de una gráfica: crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos relativos y absolutos y continuidad.
  - La técnica empleada es la de fijarnos en los puntos de alrededor. Si conforme aumenta x lo hace también y, entonces la función será creciente. Para el estudio del decrecimiento es fijarnos en que conforme aumenta x el valor de y disminuye. Para obtener un máximo relativo debe ocurrir que la función a la izquierda del punto debe ser creciente y a la derecha debe ser decreciente. Para que haya un mínimo relativo a la izquierda del punto debe ser decreciente y a la derecha creciente. Para ser máximo absoluto, debe de ser el mayor de los máximos relativos y para ser mínimo absoluto, será el menor de los mínimos relativos. Y para el estudio de la continuidad, debe ocurrir que al dibujar la gráfica podamos recorrerla en su totalidad sin levantar el lápiz del papel.
  - La tecnología que sustenta la técnica es la de las propias definiciones de los conceptos que se estudian.

- Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se abordará el estándar: Est.MA.4.3.2. Interpreta una gráfica y la analiza, reconociendo sus propiedades más características.

- Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios:

  Como ya se ha mencionado este problema se engloba en el campo de problemas del estudio de una gráfica analizando sus características más destacadas.
- Tareas principales: Crit.MA.4.3. Comprender el concepto de función. Reconocer, interpretar y analizar las gráficas funcionales.
- Tareas auxiliares específicas: Saber identificar puntos y coordenadas.
- Tareas auxiliares generales: No hay.

- Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

  Cada apartado se calificará con 0,25 puntos. Así la máxima puntuación será de 1,5 puntos. Cada respuesta incorrecta o en blanco no puntuará.

Si los alumnos dan todos los puntos que son máximos y mínimos relativos y absolutos se les calificará con 0,25 pero si olvidan alguno de ellos se les puntuará la mitad (0.125).

Si confunden las coordenadas del punto o no saben responder correctamente a los apartados donde tengan que dar las coordenadas de varios puntos, se les quitará $\frac{2}{3}$ de la nota por apartado según el Modelo de Tercios usado (0,1666).

- Posibles respuestas de los alumnos:

Las respuestas correctas son:

a) Es una función creciente, aunque hay algún tramo donde es decreciente.
b) Hay máximo relativo en (Jul-20, 1.06), (Ago-20, 1.06) y (Nov-21, 1.39) y mínimos relativos en (May-20, 0.99) y (Nov-20, 1.03). Hay máximo absoluto en (Nov-21, 1.39) y mínimo absoluto en (May-20, 0.99)
c) El precio máximo que ha alcanzado el gasóleo ha sido 1.39 euros el litro y lo alcanzó en Noviembre de 2021.
d) El precio mínimo que ha alcanzado el gasóleo ha sido 0.99 euros el litro y se alcanzó en Mayo de 2020.
e) El precio en noviembre de 2020 fue de 1.03 euros el litro y en junio de 2021 fue de 1.24 euros.
f) Sí, si se representaran meses de 2022 sería una función creciente.

Las posibles respuestas erróneas serán:

a) Es una función decreciente. Cometen este error si no entienden la definición de crecimiento o decrecimiento o invierten coordenadas.
b) Hay máximo relativo en 1.06, 1.06 y 1.39 y mínimos relativos en 0.99 y 1.03. Aquí el error es dar las coordenadas y de los puntos y no dar las coordenadas de los puntos o darlas al revés si no entienden la definición de máximo y mínimo (pueden dar los máximos como mínimos y al contrario). También pueden decir que no hay absolutos.
c) El precio máximo que ha alcanzado el gasóleo ha sido 1.39 euros el litro y lo alcanzó en Noviembre 2021. Esta respuesta pueden darla correctamente porque está contextualizada la pregunta, sólo hay que fijarse en la gráfica y obtener la coordenada y que corresponde a la coordenada x dada.

d) El precio mínimo que ha alcanzado el gasóleo ha sido 0.99 euros el litro y se alcanzó en Mayo 2020. Esta respuesta pueden darla correctamente porque está contextualizada la pregunta.
e) El precio en noviembre de 2020 fue de 1.03 euros el litro y en junio de 2021 fue de 1.24 euros. Esta respuesta pueden darla correctamente porque está contextualizada la pregunta.
f) Sería una función decreciente. Este error lo cometerán si no saben la definición de crecimiento o decrecimiento.

Estos errores se deben a que intercambian todas las coordenadas de los puntos porque invierten el orden o no saben la definición de crecimiento o de máximo y mínimo relativo y absoluto.

❖ Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:

Es posible que los alumnos confundan el eje X con el eje Y, y que intercambien el orden de las coordenadas de un punto (en lugar de decir (Nov-20, 1.03) dicen (1.03, Nov-20)). También se puede dar el caso de que confundan funciones crecientes por decrecientes o máximos por mínimos. Incluso pueden no tener claro el concepto de máximo o mínimo relativo y absoluto.

Uno de este tipo de errores lo recoge Azcárate y Deulofeu (1990, p. 78) quienes afirman que los alumnos cometen errores en la inversión en el orden de las coordenadas de un punto.

Ejercicio 5:

Un técnico de reparaciones de lavadoras cobra 20 euros por el desplazamiento y 30 euros por cada hora de trabajo.

a) Identifica las variables y di cuál será la variable dependiente y cuál la independiente.
b) Escribe la expresión algebraica.
c) Representa la gráfica de la ecuación de la función que has calculado.
d) Fíjate en la gráfica, ¿es una función creciente o decreciente?
e) ¿Es una función continua?
f) ¿Cuánto habría que pagarle al técnico si trabaja cuatro horas?

- Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - Aquí el campo de problemas tratado es el cambio de forma de representación de una función definida por un enunciado verbal, una tabla de valores o una ecuación para pasar a la representación gráfica.
  - La técnica empleada depende de la representación de la que dispongamos. Si la representación es un enunciado verbal, debemos obtener la ecuación de la función identificando la variable dependiente y la independiente. Cuando se tenga la ecuación hay que construir una tabla de valores para su posterior representación, la cual se construirá dando diferentes valores a x para calcular y. Si los datos nos los proporcionan en una tabla, debemos dibujar los puntos y si lo que nos dan es la ecuación de la función, se debe construir una tabla de valores sustituyendo x por varios valores para calcular y.
  - La tecnología que sustenta la técnica es la definición de coordenadas de puntos y la representación gráfica.

- Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se trabajarán los estándares:
  - Est.MA.4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.
  - Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.
  - Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.
  - Est.MA.4.4.3. Escribe la ecuación correspondiente a la relación lineal existente entre dos magnitudes y la representa.

- Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios.

  Este es un ejercicio situado dentro del campo de problemas de las distintas formas de representación de una función.
- Tareas principales: Crit.MA.4.2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto.

❖ Tareas auxiliares específicas: Saber representar puntos y saber las definiciones de crecimiento, decrecimiento y continuidad e identificar funciones que cumplen esas características. Diferencia entre variable dependiente e independiente.

❖ Tareas auxiliares generales: No hay.

❖ Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

Cada apartado se calificará con 0,25 puntos. Así la máxima puntuación será de 1,5 puntos. Cada respuesta incorrecta o en blanco no puntuará.

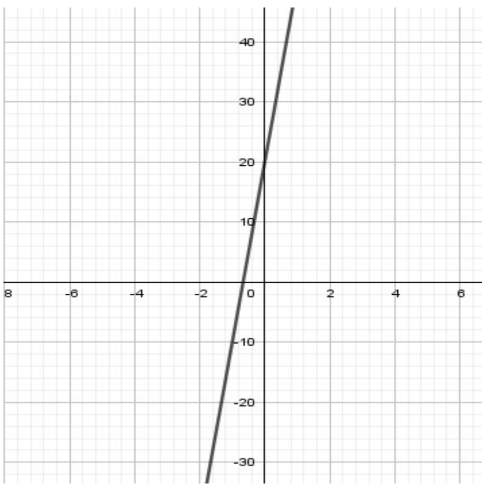
Si no identifica bien las variables restaremos $\frac{2}{3}$ de la nota del apartado (0,1666), se restará la misma cantidad si no son capaces de dar la ecuación o la gráfica o si no saben identificar correctamente crecimiento, decrecimiento o continuidad.

Se restará también 0,1666 si en el último apartado no dan correctamente las coordenadas del punto que se pide porque confunden las coordenadas.

❖ Posibles respuestas de los alumnos:

Las respuestas correctas serán:

a) La variable dependiente (Y) es precio total de la reparación y la independiente (X) es el número de horas trabajadas.
b) La expresión algebraica es $y = 30x + 20$.
c)



d) Es una función creciente.
e) Es una función continua

f) Si trabaja cuatro horas, cobrará 140 euros ($y = 30 \times 4 + 20 = 140$).

Las posibles respuestas incorrectas serán:

a) La variable independiente es precio total de la reparación y la dependiente es el número de horas trabajadas.
b) La expresión algebraica es $x = 30y + 20$ ya que las variables las han intercambiado. O directamente no saben plantear la ecuación que modeliza la función.
c) Representan los puntos intercambiando las coordenadas.
d) Es decreciente.
e) Podrían decir que es discontinua si no se saben la definición de continua, pero normalmente en este tipo de preguntas no suelen fallar.
f) Deberían responder bien porque es una pregunta contextualizada

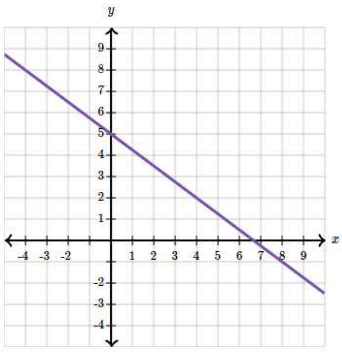
Esto ocurre cuando confunden o invierten las coordenadas de los puntos o no saben la definición de crecimiento.

❖ Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:
Un error común es no distinguir la variable dependiente de la independiente. También es muy típico que los alumnos no sepan obtener la ecuación de la función a partir de un enunciado verbal. Y, además, pueden confundir crecimiento con decrecimiento y la definición de continuidad. Para calcular el precio de un trabajo realizado puede ser difícil si no se distingue bien cuáles son las variables, y los alumnos pueden confundirse y en lugar de sustituir la x por 40 sustituirán la y.

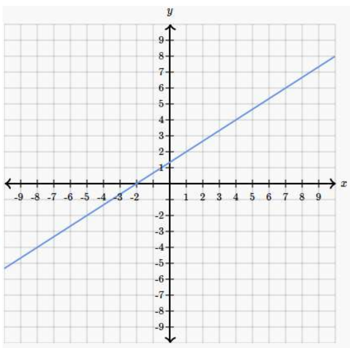
Ejercicio 6:

Dadas las siguientes gráficas calcula la pendiente de cada una de ellas y su ordenada en el origen. Después, da la fórmula de la función que representan.

a)



b)



- Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - Aquí el campo de problemas que se aborda es el del cálculo de pendientes de una recta.
  - La técnica empleada está basada en una fórmula. Esta fórmula da el valor de la pendiente a partir de dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) y se calcula así: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Se debe sustituir cada una de las coordenadas de los puntos en la fórmula de la pendiente. Si se da una gráfica, se deben elegir dos puntos de la gráfica y con ellos se planteará el cálculo de la fórmula.
  - La tecnología que sustenta la técnica es la definición de pendiente y la representación gráfica.
- Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se evaluarán los estándares:
  - Est.MA.4.4.1. Reconoce y representa una función lineal a partir de la ecuación o de una tabla de valores, y obtiene la pendiente de la recta correspondiente.
  - Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o tabla de valores.

- Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios:

  El problema se encuadra dentro del campo de problemas del cálculo de pendientes de una recta a partir de una gráfica o de unos puntos dados.
- Tareas principales: Conocer la definición de pendiente y saber aplicar la fórmula para obtenerla a partir de dos puntos.
- Tareas auxiliares específicas: Identificar puntos y coordenadas en la gráfica, saber identificar que la pendiente de la recta es el coeficiente de la x en su ecuación.
- Tareas auxiliares generales: Calcular correctamente la fórmula, sin errores de cálculo.

- Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

  Si los alumnos dan correctamente la ecuación de las rectas tendrán 0,75 en cada apartado.

Si confunden puntos y coordenadas y no saben identificar que la pendiente de la recta es el coeficiente de la x en su ecuación se les restará $\frac{2}{3}$ de la nota (0,5 en el apartado en el que fallen).

Si fallan calculando la pendiente mediante la fórmula se les restará $\frac{1}{3}$ de la nota (0,25 en el apartado en el que se equivoquen).

Si no conocen la definición de pendiente se les restará la totalidad de la puntuación del apartado (0,75).

- Posibles respuestas de los alumnos:

Las posibles respuestas correctas son:

a) La pendiente de la recta es: $m = -\frac{3}{4}$.
   La ordenada de la recta es: $n = 5$.
   Por tanto, la ecuación de la recta es: $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

b) La pendiente es: $m = \frac{2}{3}$.
   La ordenada es: $n = 1{,}5$.
   Por tanto, la ecuación de la recta es: $y = \frac{2}{3}x + 1{,}5$.

Las posibles respuestas erróneas serán:

a) La pendiente de la recta es: $m = -\frac{4}{3}$.
   La ordenada de la recta es: $n = 6.5$ si confunden el eje Y con el eje X.
   Por tanto, la ecuación de la recta es: $y = -\frac{4}{3}x + 6.5$

b) La pendiente es: $m = \frac{3}{2}$.
   La ordenada es: $n = -2$ si confunden el eje Y con el X.
   Por tanto, la ecuación de la recta es: $y = \frac{3}{2}x - 2$.

Y esto es debido a que confunden o invierten el orden de las coordenadas. Por tanto, la n siempre será cero. También pueden dar el signo contrario de la pendiente.

- ❖ Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:

  Los posibles errores que los alumnos pueden cometer es no saber cómo calcular la pendiente o no saber plantear la fórmula para calcularla correctamente pudiendo intercambiar las coordenadas de los puntos. Otro obstáculo que pueden tener es el de no saber cuándo la pendiente lleva el signo negativo, por ello, confundirían una función creciente con una decreciente. Según Azcárate y Deulofeu (1990, p. 78), los alumnos cometen errores en la inversión del orden de las coordenadas de un punto.

Ejercicio 7:

Dada la siguiente tabla de valores, calcula la ecuación de la recta que representa calculando la pendiente y la ordenada en el origen.

x	-3	-2	-1	0	1	2
f(x)	-6	-4	-2	0	2	4

- ❖ Campo de problemas, técnica y tecnología a evaluar:
  - ➢ Aquí el campo de problemas estudiado es el del paso de la tabla de valores, la gráfica o el enunciado verbal a la ecuación de la función.
  - ➢ La técnica empleada es la de tomar dos puntos de la tabla o de la gráfica y calcular la pendiente tomando dos puntos y usando la fórmula $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Luego calcular la ordenada en el origen calculando el punto de corte con el eje Y o fijándonos en el punto de corte de la recta con el eje Y en la gráfica que nos proporciona el ejercicio. Cuando tengamos el valor de m y de n debemos sustituirlos en la ecuación de la recta $y = mx + n$. Si el enunciado ya nos proporciona la ecuación de la función, únicamente debemos distinguir cuál es la pendiente (el coeficiente de la x) y cuál es la ordenada (el término independiente).
  - ➢ La tecnología que sustenta la técnica son las definiciones de recta, de pendiente y de ordenada; el cálculo de la fórmula en el caso de que nos den la tabla o la gráfica y, para el caso en el que se proporciona la ecuación, es aplicar la definición de pendiente y ordenada para obtenerlas.

- ❖ Estándares de aprendizaje asociados según la ley LOMCE a evaluar:

  En este campo de problemas se trabajará con los estándares:

  - Est.MA.4.2.1. Pasa de unas formas de representación de una función a otras y elige la más adecuada en función del contexto.
  - Est.MA.4.4.2. Obtiene la ecuación de una recta a partir de la gráfica o de la tabla de valores.

- ❖ Criterios de evaluación y tareas evaluadas según el Modelo de Tercios:

  Como se ha explicado en el apartado anterior, este ejercicio se engloba en el campo de problemas del paso de una tabla, una gráfica o un enunciado verbal a la ecuación de la recta.

- ❖ Tareas principales: Crit.MA.4.2. Manejar las distintas formas de presentar una función: lenguaje habitual, tabla numérica, gráfica y ecuación, pasando de unas formas a otras y eligiendo la mejor de ellas en función del contexto y conocer la definición de pendiente y la fórmula para calcularla.
- ❖ Tareas auxiliares específicas: Saber identificar que la pendiente de la recta es el coeficiente de la x en su ecuación.
- ❖ Tareas auxiliares generales: Saber calcular correctamente la fórmula que, a partir de dos puntos, nos da la pendiente de la recta.

- ❖ Criterios de calificación (puntuación de cada ejercicio y apartado):

  Si contestan correctamente se les calificará con 1,5 puntos.

  Si no saben calcular correctamente la fórmula que, a partir de dos puntos, da la pendiente de la recta se les restará $\frac{1}{3}$ de la nota (0,5).

  Si no saben identificar que la pendiente de la recta es el coeficiente de la x en su ecuación se les quitará $\frac{2}{3}$ de la nota (1 punto).

  Si no saben obtener dos puntos de la tabla dando sus coordenadas correctamente y no conocen la definición de pendiente ni ordenada se les quitará la totalidad de la puntuación del ejercicio (1,5 puntos).

- Posibles respuestas de los alumnos:

  La respuesta correcta es:

  La pendiente de la recta es $m = 2$ y la ordenada es $n = 0$ pues la recta pasa por el punto (0,0). Con lo cual, la ecuación de la recta es $y = 2x$.

  La respuesta incorrecta podría ser:

  La pendiente de la recta es $m = \frac{1}{2}$ y la ordenada es $n = 0$ pues la recta pasa por el punto (0,0). Con lo cual, la ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x$. Esto es debido a que confunden las coordenadas de los puntos y las invierten.

  También puede ocurrir que no sepan calcular la pendiente.

- Posibles errores que los alumnos pueden cometer en la resolución:
  Es muy probable que los alumnos no sepan cómo obtener la pendiente de una recta ni sepan cómo plantear la fórmula que la calcula, ya que muchos de ellos podrían no saber distinguir entre las coordenadas del punto, suelen intercambiar una coordenada por la otra. Otra dificultad que pueden encontrarse es la de no saber cómo obtener la ordenada en el origen. Según los autores Azcárate y Deulofeu (1990, p. 78), los alumnos cometen errores en la inversión en el orden de las coordenadas de un punto.

VIII. Bibliografía.

Alayo, F., (1990) Traducción y adaptación de: *"The Language of Functions and Graphs"*, Shell Center for Mathematical Education Joint Matriculation Board. Universidad del País Vasco/ Euskal Herriko Univertsitatea.

Arce, M., Conejo, L., & Muñoz-Escolano, J. M. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid. Síntesis.

Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1990). *Funciones y gráficas. Matemáticas: cultura y aprendizaje.* Sintesis.

Becerra, M. V., Martínez, R., Pancorbo, L., Rodríguez, R., (1996). *Matemáticas 2.* Mc Graw Hill.

Breindenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educ Stud Maths,* 23(3), 247-285. https://doi.org/10.1007/BF02309532.

Colera, J., Gaztelu, I., (2008). *Educación Secundaria M2 Matemáticas*. Anaya.

Foster, T.E. (2003). *Logic, induction and sets.* Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810282

Fuster, M., Martínez, F. (1997) y Equipo Edebé. *Matemáticas ESO 2, Primer Ciclo.* Edebé.

Leinhardt, G., Zaslavsky, 0., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64. https://doi.org/10.3102/00346543060001001.

Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de ordenación general del sistema educativo (LOGSE).

Ley 2/2006, de 3 de mayo, de educación (LOE).

Ley 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa (LOMCE).

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la Educación Primaria, la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato.

Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, por la que se aprueba el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Orden ECD/850/ 2016, del 29 de julio que modifica la Orden 16 de junio de 2014 por la que se aprueba el currículo de Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Aragón.

Malik, M. A. (1980) Historical and pedagogical aspects of the definition of Function. *International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology,* 11(4), 489-492. https://doi.org/10.1080/0020739800110404.

Martí, R., Carrasco, M. A., Ocaña, X. M., (2007). *Mat 2 Matemáticas ESO Curso 2.* Edelvives.

Mirin, A., Webwr, K., & Warsermann, N. (2020). What is a function?. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zabala & P. M. Ruiz- Arias (Eds.), *Proceding of the 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 1156-1164. https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020-182

Pancorbo, L. *Educación Secundaria Segundo curso. (2008). Vector Matemáticas*. Vicens Vives.

Real Decreto 1105/2014 del 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria y Bachillerato.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification-the of function. *The concept of function: Aspect of Epistemology and Pedagogy*, 25, 59-84.

Shenitzer, A., & Luzin, N. (1998). The evolution of function: Part I. In Taylor & Francis (Eds.). *The American Mathematical Monthly*, 105(1), 59-67. Mathematical Association of America. https://doi.org/10.1080/00029890.1998.12004850

Spivak, M., (2012). *Calculus* (J.M. Oller, L. Serra, Trad.; 3ª ed.). Reverté (Trabajo original publicado en 1968).

Ugalde, W. J. (2014). Funciones: desarrollo histórico del concepto y actividades de enseñanza aprendizaje. *Matemática. Educación e Internet*, 14(1), 1-48. https://doi.org/10.18845/rdmei.v14i1.1564

Vinner, S., & Dreyfus, T., (1989). Images and Definitions for the Concept of Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(4), 356-366. https://doi.org/10.2307/749441.