



Universidad
Zaragoza

Proyecto Fin de Carrera

Título

Diseño y Control de un Manipulador Flexible
Accionado por un Cilindro Hidráulico

Autor

Álvaro Martí Martínez

Director

Jouni Mattila

Ponente

Javier Civera

Universidad de Zaragoza
Tampere University of Technology
2013

Diseño y Control de un Manipulador Flexible

Accionado por un Cilindro Hidráulico

RESUMEN

El proyecto fin de carrera que se expone a continuación consiste en comparar dos formas de estimación de la posición de un manipulador flexible. Éstos manipuladores flexibles son más ligeros, por lo tanto se pueden desplazar con mayor rapidez y además la carga a desplazar puede ser mayor.

El estudio realizado implica el diseño y el modelado del manipulador flexible y del sistema hidráulico actuador.

El diseño del manipulador se realiza en MATLAB mediante las ecuaciones de Euler-Bernoulli para la frecuencia deseada. El modelado del manipulador se desarrolla en el toolbox de MATLAB SimMechanics junto con el sistema hidráulico y todos los sensores necesarios.

El sistema hidráulico se compone de una servo válvula o válvula progresiva y un cilindro hidráulico. En el proyecto se desarrolla el modelado de éste servo mecanismo, junto con un controlador y un sistema de lazo cerrado para el control de posición y/o velocidad.

La estimación de la posición se realiza mediante dos tipos de sensores distintos, utilizando galgas extensométricas o acelerómetros. Se establecen diferentes puntos de sensado a lo largo del manipulador y con estos valores se calculan los coeficientes de una función hiperbólica junto con las condiciones de contorno, dicha función hiperbólica aproxima la forma del manipulador.

El proyecto también comprende la construcción del prototipo y la comparación de los resultados con los obtenidos en la simulación. Para ello el hardware necesario es una tarjeta de entradas y salidas para el ordenador, encoders, galgas extensométricas, amplificadores de señal, acelerómetros, válvula progresiva, cilindro hidráulico, transductores de presión...

Se desarrolla una interfaz de comunicación mediante el software dSPACE, el cual en base a un archivo de MATLAB Simulink te permite la interacción y visualización de todos los parámetros del programa y así actúa sobre el prototipo.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	9
2	Modelado.....	12
2.1	Modelo de Barra Flexible	12
2.1.1	Teoría de Euler-Bernoulli	12
2.1.2	Diseño de la Barra	15
2.1.3	Modelo de barra flexible en SimMechanics	22
2.2	Modelo del Sistema Servo Hidráulico	24
2.2.1	Dinámica de la Servo Válvula	24
2.2.2	Dinámica del Cilindro Hidráulico	27
2.2.3	Modelo Lineal	28
2.2.4	Sistema Hidráulico en SimMechanics	33
2.2.5	Brazo Hidráulico.....	34
2.2.6	Frecuencia.....	35
3	Control.....	37
3.1	Control del Sistema Servo Hidráulico	37
3.1.1	Servo Válvula	37
3.1.2	Cilindro Hidráulico.....	38
3.2	Controlador	40
3.3	Estimación de la Forma del Manipulador.....	43
3.3.1	Galgas Extensométricas.....	44
3.3.2	Acelerómetros.....	51
4	Trabajo Experimental	56
4.1	Configuración del Hardware.....	56
4.1.1	Configuración de las Galgas Extensiométricas	59
4.2	Configuración del Software	61
4.3	Comparación entre Simulink y las Mediciones en el Laboratorio.....	63
4.3.1	Resultados de la Simulación.....	63
4.3.2	Resultados en el Prototipo Experimental	64
4.3.3	Comparación Simulación y Prototipo.....	65
4.4	Resultados del Sistema Controlado	66
4.4.1	Inclinación sin Controlador	66

4.4.2	Inclinación con Controlador	67
5	Conclusiones	70
6	Referencias	72
7	Anexos	76
7.1	Anexo I: Parametric Study	76
7.1.1	MATLAB Program	76
7.1.2	Results	77
7.2	Anexo II: Test Bench, Previous Works	81
7.2.1	Cylinder test bench	81
7.2.2	Joint construction	85
7.2.3	Strength calculations	85
7.2.4	Joint bearings	90
7.3	Anexo III: SimMechanics Model	98
7.4	Anexo IV: Hollow Section Profile	103
7.5	Anexo V: Servo Valve Data Sheet	107
7.6	Anexo VI: MATLAB Files	110
7.6.1	System Data	110
7.6.2	Lumped Method Calculation	111
7.6.3	Hydraulic System Data	112
7.6.4	Estimation functions	114
7.7	Anexo VII: Test Bench Drawing	116
7.8	Anexo VIII: Finite Element Analysis with MATLAB	117

Lista de símbolos y abreviaturas

I	Momento de inercia de la sección del perfil
E	Módulo de Young
$Y(x)$	Desplazamiento en dirección y a la distancia x desde el punto fijo
ω	Frecuencia Natural
ω_n	Frecuencia Natural de la solución n
ω_v	Frecuencia Natural de la servo válvula
ω_N	Frecuencia Natural del sistema global
ρ	Densidad
m	Densidad de masa
$A(x)$	Área de la sección del perfil
M	Masa del extremo del perfil
L	Longitud de la barra
K	Rigidez
g	Gravedad
θ	Inclinación de la barra
$a1$	Ángulo del punto de anclaje (Cilindro-barra)
$a2$	Ángulo del punto de anclaje (Cilindro-bancada)
d_s	Diámetro del carrete de la servo válvula
x_v	Posición del carrete
q_L	Caudal de carga
p_s	Presión de alimentación
p_T	Presión de depósito
p_A	Presión de cámara A
p_B	Presión de cámara B
K_q	Ganancia de flujo

K_c	Coeficiente de presión de flujo
K_v	Ganancia de la válvula
B	Módulo de compresibilidad efectivo
Q_A	Flujo cámara A
Q_B	Flujo cámara B
ξ_v	Amortiguamiento de la servo válvula
A_p	Área del pistón
x_p	Posición del vástagos del cilindro
C_P	Coeficiente de pérdidas
F_v	Fricción viscosa

1 Introducción

En el campo de la robótica se conoce como manipulador flexible a un dispositivo que bajo el control humano manipula objetos sin contacto directo y que además presenta un comportamiento elástico ante diferentes tipos de situaciones como la aplicación de cargas o movimientos (**Figura 1.1**).

La investigación sobre el campo de los manipuladores flexibles, se ha vuelto más importante desde hace más de una década a causa de las nuevas aplicaciones de la robótica en diferentes áreas, tales como las tareas industriales. La tendencia es a utilizar materiales ligeros en las estructuras de los manipuladores con el fin de mejorar el rendimiento de los robots industriales actuales, que son grandes y pesados.

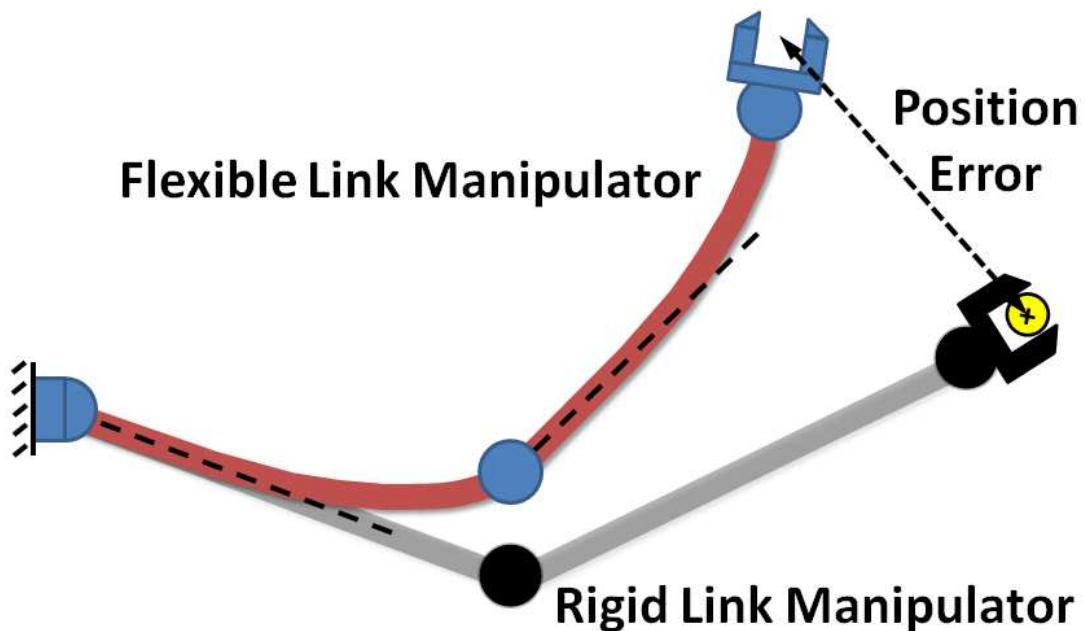


Figura 1.1 Esquema de un Manipulador Flexible.

En aplicaciones aeroespaciales la ligereza de los materiales también es importante, en grandes estructuras de control como grúas o la cirugía mínimamente invasiva que se lleva a cabo con instrumentos flexibles y delgados, en donde son necesarias manipuladores automáticos precisos.

Los manipuladores flexibles presentan ventajas importantes en comparación con los rígidos, tales como la reducción de consumo de energía, se necesitan accionadores más

pequeños, la seguridad para los seres humanos al no ser rígidos y pesados, y mayor agilidad. Aunque, el problema de control del manipulador flexible, se vuelve más complicado porque la flexibilidad estructural tiene que ser controlada si se quiere lograr un buen control de la posición de la punta.

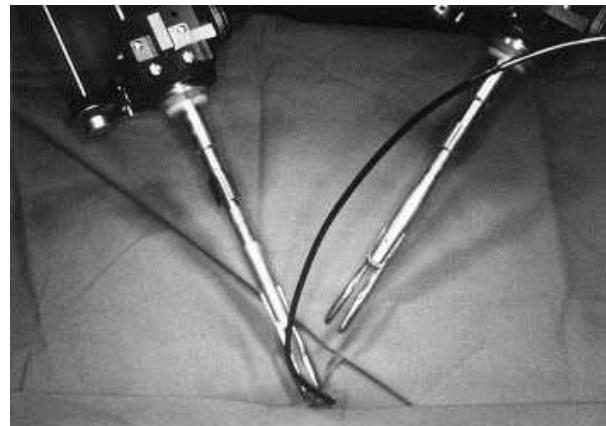


Figura 1.2 Ejemplo de aplicación de un manipulador flexible a la cirugía mínimamente invasiva.

En este proyecto, se comparan dos métodos de control de posición diferentes, la estimación de posición de la punta mediante un número finito de galgas extensométricas o acelerómetros. Para éste propósito se han seguido las siguientes etapas en el proyecto:

1. En la primera parte del proyecto, se diseña un manipulador flexible como viga de Euler-Bernoulli.
2. Despues del proceso de diseño, es hora de modelar el manipulador flexible. Éste se modela por el método de los cuerpos agrupados utilizando MATLAB/SimMechanics.
3. Para el movimiento del sistema, se adjunta un sistema servo-hidráulico, compuesto por una válvula y un cilindro, que se encarga de la viga flexible. El sistema hidráulico es modelado junto con el manipulador flexible en MATLAB/Simulink.
4. Con el objetivo de modificar el comportamiento del sistema actuador, se realiza un control sobre éste.
5. Debido a la flexibilidad del manipulador y la necesidad de conocer la posición real de éste se desarrollan dos algoritmos de estimación.
6. Finalmente, se comprueba el funcionamiento del sistema y de los métodos de estimación sobre un prototipo real en el laboratorio.

El alcance del proyecto es estudiar las aplicaciones las galgas y los acelerómetros como sistema de seguimiento de posición. Debido a la flexibilidad del manipulador se ha

desarrollado un algoritmo de estimación de la geometría para controlar la posición de la punta. Los procesos de estimación se basan en ecuaciones hiperbólicas y polinomios.

Con el fin de mostrar la fiabilidad de los métodos desarrollados, se construye un banco de pruebas para el manipulador flexible. La siguiente tarea es la configuración del controlador en tiempo real utilizando la interfaz dSpace con un modelo de MATLAB/Simulink.

La evaluación de los resultados obtenidos en la simulación se pueden comparar con una referencia real, ya que en la simulación conocemos la posición simulada del extremo del manipulador, de éste modo se evalúa el error cometido por la estimación. Por otra parte, para la evaluación de la estimación en el prototipo construido, no se compara con la posición real, se evaluará según la simulación.

El proyecto está organizado de la siguiente manera: En la Sección 2, el modelado de la viga que incluye las ecuaciones de Euler-Bernoulli, los cálculos de las frecuencias naturales y la viga y el diseño de banco de pruebas. También el modelo de servosistema se explica en esta sección, que incluye la válvula de servo y la dinámica del cilindro y el modelo linearizado. El diseño del control PID se muestra en la sección 3, y la estimación algoritmos también. Los resultados experimentales se presentan en la Sección 4, donde una comparación entre el sistema simulado y experimental se lleva a cabo y los resultados de diferentes tipos de controladores se presentan. La última sección, la sección 5, contiene algunas conclusiones.

2 Modelado

2.1 Modelo de Barra Flexible

2.1.1 Teoría de Euler-Bernoulli

La teoría de la barra de Euler-Bernoulli es una simplificación de la teoría lineal de elasticidad, cubre el caso de pequeñas deformaciones de la barra, la cual está sometida sólo a cargas laterales.

Con el fin de hacer el sistema lo más sencillo posible, se han realizado algunas aproximaciones: (1) En el diseño de la barra se asume como barra en voladizo, teniendo en cuenta que es suficientemente larga. Por lo tanto, la unión puede ser reemplazada por un punto fijo en los cálculos de deformación y frecuencia. (2) La deformación de la barra satisface las hipótesis de la teoría de Euler-Bernoulli.

Para una barra en voladizo sometida a vibración libre, y un sistema considerado continuo en el cual la masa se supone distribuida junto con la rigidez del eje, la ecuación de movimiento puede escribirse como:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left\{ EI(x) \frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} \right\} = \omega^2 m(x) Y(x) \quad (2.1.1.1)$$

Donde E es el módulo de Young del material de la barra, I es el momento de inercia de la sección del perfil, Y(x) es el desplazamiento en dirección y a la distancia x desde el punto fijo, ω es la frecuencia natural angular, m es la masa por unidad de longitud, $m(x) = \rho A(x)$, ρ es la densidad del material y x es la distancia medida desde el punto fijo, [wikipedia Beronoulli 2013].

Cuando la barra es homogénea, lo que significa que el módulo de Young y el momento de inercia son independientes de la distancia, la ecuación se simplifica:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} - \beta^4 Y(x) = 0 \quad (2.1.1.2)$$

con

$$\beta^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (2.1.1.3)$$

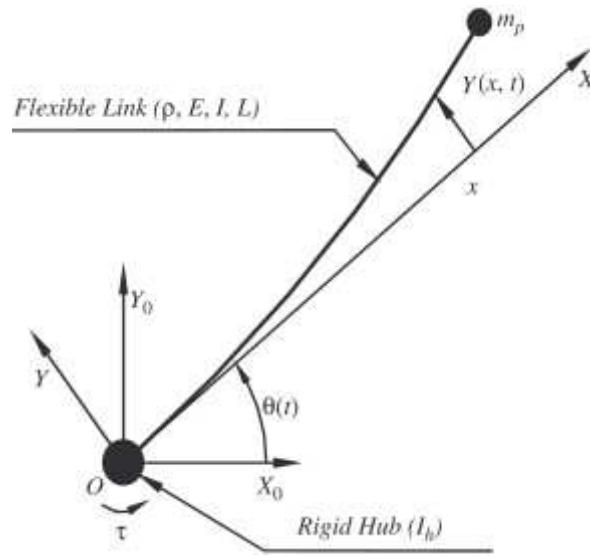


Figura 2.1 Esquema del manipulador flexible con la función de deformación $Y(x)$

Con las correspondientes condiciones de contorno, [vlab 2013]:

- En el extremo sujeto de la barra ($x = 0$), la deformación del manipulador es 0:

$$Y(x) = 0$$

- En el extremo sujeto de la barra ($x = 0$), la pendiente de la deformación es 0:

$$\frac{\partial Y(x)}{\partial x} = 0$$

- En el extremo libre de la barra ($x = L$), la curvatura o el momento de la deformación es 0:

$$\frac{\partial^2 Y(x)}{\partial x^2} = 0$$

- En el extremo libre de la barra ($x = L$), la fuerza cortante es 0:

$$\frac{\partial^3 Y(x)}{\partial x^3} = 0$$

(2.1.1.4)

Utilizando el método de los modos asumido [Meirovitch, 1967], podemos obtener una solución de la ecuación del manipulador como una combinación lineal del producto de las funciones admisibles de forma $\varphi_i(x)$ y las coordenadas generalizadas dependientes del tiempo $q_i(t)$:

$$Y(x, t) = \sum_{i=0}^n \Phi_i(x) q_i(t) \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n \quad (2.1.1.4)$$

Donde la función $\Phi_i(x)$ se llama función modal de forma, que es la función de la forma del manipulador a lo largo de la longitud, y $q_i(t)$ es una función dependiente del tiempo.

Utilizando las condiciones de contorno se obtiene la ecuación de la frecuencia como:

$$\cos \beta_i L + \cosh \beta_i L = -1 \quad (2.1.1.5)$$

Ésta función debe ser resuelta por métodos numéricos para conseguir las soluciones β_i . Correspondiente con los valores propios de ésta función, la función modal de forma es dada como:

$$\Phi_i(x) = A_i \sin \beta_i x + B_i \sinh \beta_i x + C_i \cos \beta_i x + D_i \cosh \beta_i x \quad (2.1.1.6)$$

Donde

$$i = 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Una forma completa de la frecuencia natural angular ω_{nf} , obtenida de la ecuación de movimiento y de las condiciones de contorno, puede ser escrita como:

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (2.1.1.7)$$

La ecuación (2.1.1.7) se satisface por un número de valores de $\beta_n L$, correspondientes con cada modo normal de oscilación, donde los tres primeros modos son dados como

$$\beta_1 L = 1.8751$$

$$\beta_2 L = 4.6941$$

$$\beta_3 L = 7.8548$$

Como se ha dicho anteriormente, éstas ecuaciones concuerdan con una viga en voladizo, o lo que es lo mismo, un extremo sujeto y el otro libre. Sin embargo, el objetivo del proyecto es reducir la frecuencia, por tanto se acopla una masa en el extremo de la barra. Así que lo que realmente se tiene es una masa uniformemente distribuida y una masa concentrada en el extremo.

De acuerdo con ésta exposición, [Wachel & Bates 1976] proporcionan una fórmula aproximada para la frecuencia fundamental de las barras con masa uniformemente distribuida junto con una masa puntual.

$$\omega^2 = \frac{\omega_u^2}{(1 + c * R)}$$

(2.1.1.10)

Donde

ω_u = Frecuencia natural fundamental de la barra sólo con masa uniformemente distribuida, sin masa concentrada.

R = Ratio entre la masa concentrada y la masa total (= M/m).

c = Factor de corrección, ver **Tabla 3.2**

M = Masa concentrada.

m = Masa total uniformemente distribuida.

Tabla 3.2 Factor de corrección de la frecuencia según condición de contorno y posición de la masa

Condiciones de Contorno	Posición de la masa concentrada	Factor de corrección (c)
Los dos extremos sobre apoyos simples	Centrada	2.0
Los dos extremos sujetos	Centrada	2.7
Un extremo sujeto y el otro libre (voladizo)	Extremo libre	3.9
Un extremo sujeto y el otro sobre apoyo simple	Centrada	2.3

2.1.2 Diseño de la Barra

El primer paso es diseñar un apropiado banco de pruebas para obtener los valores correctos. El banco de pruebas está compuesto por un cuerpo flexible con una masa en el extremo y unido a la bancada por una articulación de rotación. Éste prototipo es accionado por un circuito servo hidráulico donde el cilindro está acoplado entre el cuerpo flexible y la bancada.

2.1.2.1 Dimensionado

Para comenzar, la frecuencia es una propiedad importante a considerar, teniendo en cuenta las mediciones y la comparación de los datos a obtener. En el diseño de la barra, la frecuencia natural influiría en el dimensionado, pero la frecuencia global será calculada incluyendo el conjunto servo hidráulico más adelante.

Por otra parte, además de la frecuencia, la flecha que la barra sufre sobre su extremo libre debe ser considerable con el fin de comparar las estimaciones de la deformación.

Por consiguiente, un estudio paramétrico ha sido desarrollado para dimensionar la barra flexible. El objetivo de éste análisis es concluir cuáles son las medidas a seleccionar para el perfil hueco rectangular. Las propiedades incluidas en el estudio son la deformación sobre el extremo libre, la frecuencia natural, la tensión máxima y el pandeo.

La fórmula de la flecha sobre el extremo de la barra.

$$\Delta\delta = \frac{F}{k} = \frac{MgL^3}{3EI}$$

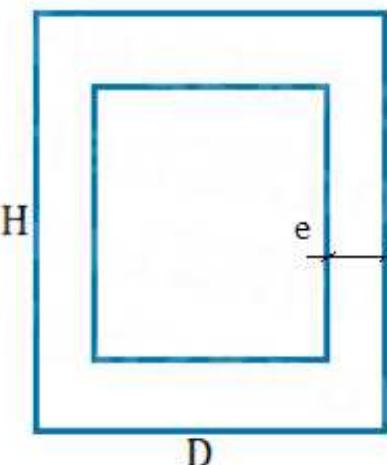
Obtenida del desarrollo de la ecuación de Euler-Bernoulli.

La siguiente fórmula es la que resuelve la tensión máxima, producida sobre el punto de máximo momento flector que es en el extremo de unión a la bancada.

$$\sigma = \frac{MgLH}{2I}$$

Donde MgL es el momento producido sobre la barra en dicho punto. Y $H/2$ es la distancia entre la parte superior de la sección transversal y la linea neutral.

La fuerza de pandeo crítica, [wikipedia, Buckling 2013], para la barra en voladizo es:



$$F = \pi^2 \frac{EI}{\alpha L^2} \gg Mg, \text{ con } \alpha = 2$$

(3.1.2.1.3)

La última fórmula es una aproximación para obtener la frecuencia natural de sistemas con masas concentradas y distribuidas al mismo tiempo.

$$Wn = \sqrt{\frac{k}{M+0.23*m}} \quad k = \frac{3*E*I}{L^3} \quad fn = \frac{Wn}{2\pi}$$

(3.1.2.1.4)

Se proponen los límites para el estudio paramétrico a través de las propiedades mecánicas del material como la tensión máxima del acero, la frecuencia máxima o la fuerza de pandeo crítica.

- La máxima frecuencia propuesta es 5 Hz.
- La máxima tensión del acero es 355 MPa y con un coeficiente de seguridad de 2 queda en 177.5 MPa.
- La fuerza de pandeo crítica es igual a la fuerza producida por el peso de la masa del extremo del manipulador.

Una vez que los límites han sido definidos, el estudio paramétrico puede ser resuelto. El análisis es ejecutado como una iteración en la que en cada paso se varían los parámetros del manipulador y el peso de la masa del extremo. El programa implementado en MATLAB se muestra en el **Anexo 8.1** junto con las gráficas de resultados.

Los parámetros a iterar son la altura del perfil, anchura, espesor, longitud del manipulador y peso de la masa acoplada en el extremo.

Finalmente, los valores seleccionados de la barra se muestran en la **Tabla 3.1**, junto con el intervalo de valores admisible para no sobrepasar los límites.

Tabla 3.2 Valores seleccionados tras el análisis y variación permitida.

Parámetro	Valor	Variación permitida por los límites
Altura (H)	0.08 m	0.0401-0.1
Anchura (D)	0.06 m	0.0101-0.1
Espesor (e)	0.004 m	0.0011-0.01
Longitud (L)	2.5 m	>2.2
Masa sobre el extremo (M)	50 Kg	32-165

El perfil seleccionado para el manipulador (Ruukki double grade S355J2H) es una sección hueca estructural que cumple los requerimientos del estándar EN 10219. Ha sido seleccionado debido a sus aplicaciones en estructuras en maquinaria, vehículos de transporte y equipos de elevación. Todas las propiedades mecánicas se muestran en el **Anexo 8.4**.

2.1.2.2 Banco de pruebas

Para el desarrollo del prototipo es necesario diseñar un banco de pruebas que permita el correcto movimiento del manipulador, y que favorezca la actuación del cilindro hidráulico.

Anteriormente, fue desarrollado un banco de pruebas previo en el departamento de hidráulica de la Universidad de Tampere para estudiar la deformación **Anexo 8.2**. El problema fue que la barra no era lo suficientemente flexible, por lo tanto, se tiene que desarrollar un nuevo banco de pruebas para el manipulador, aunque basado en el anterior diseño.

Algunas partes del anterior banco de pruebas son aprovechadas para el nuevo, como la columna principal y cilindro hidráulico, pero la distancia entre la unión del cilindro y la de la barra, $L1$, tiene que ser recalculada. La longitud $L1$ será superior a la anterior debido a las fuerzas soportadas sobre el cilindro.

Un análisis de fuerzas es expuesto a continuación con el fin de obtener el valor adecuado para la longitud requerida ($L1$).

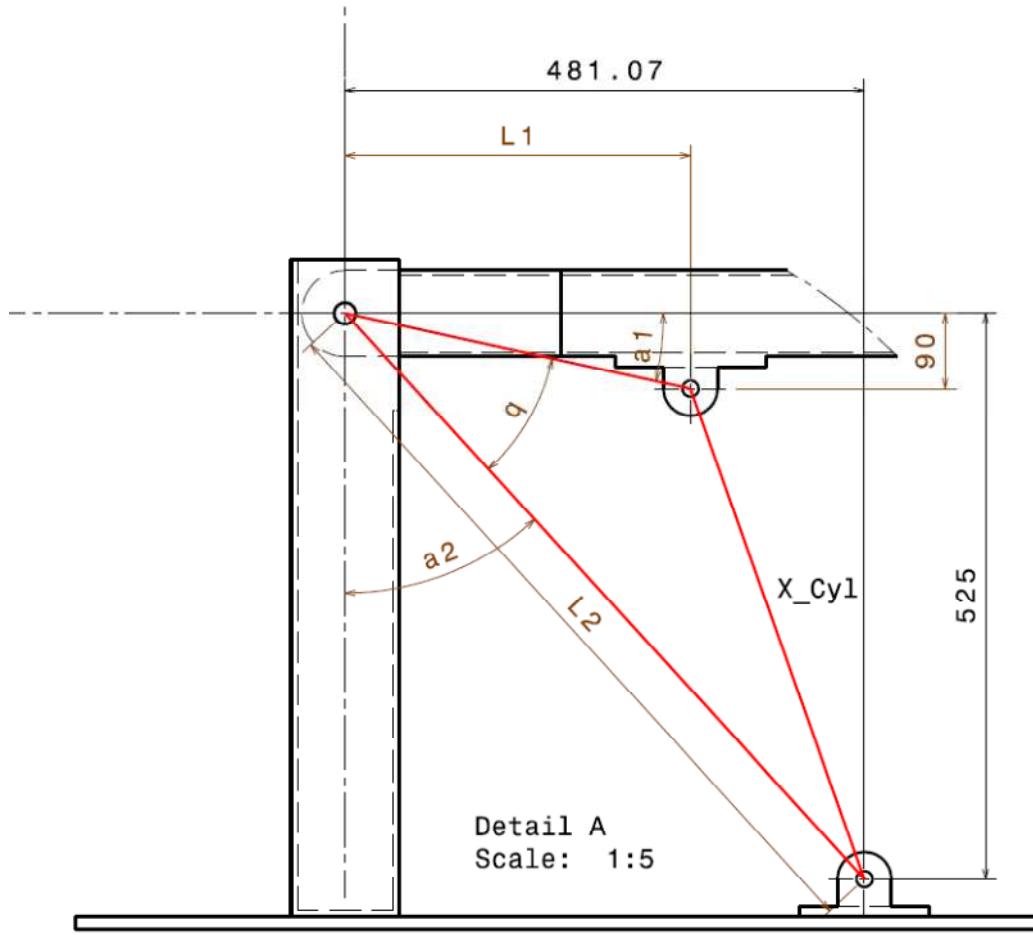


Figura 3.1 Esquema del banco de pruebas.

El ángulo del manipulador θ , ángulo de la pendiente del manipulador con referencia a la horizontal, es definido por la geometría del banco de pruebas y el recorrido del cilindro.

$$\frac{\pi}{2} + \theta = a_1 + a_2 + q$$

$$x_{cyl} = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 - 2 * L_1 * L_2 * \cos q}$$

La fuerza aplicada sobre el cilindro es obtenida por la momento de carga y trigonometría.

La **Figura 3.2** muestra la fuerza ejercida sobre el cilindro hidráulica en la posición de máxima carga.

El cilindro tiene las siguientes propiedades:

Dc = 32 mm, Carrera = 300 mm, Fuerza Max = 16889 N (210 bar).

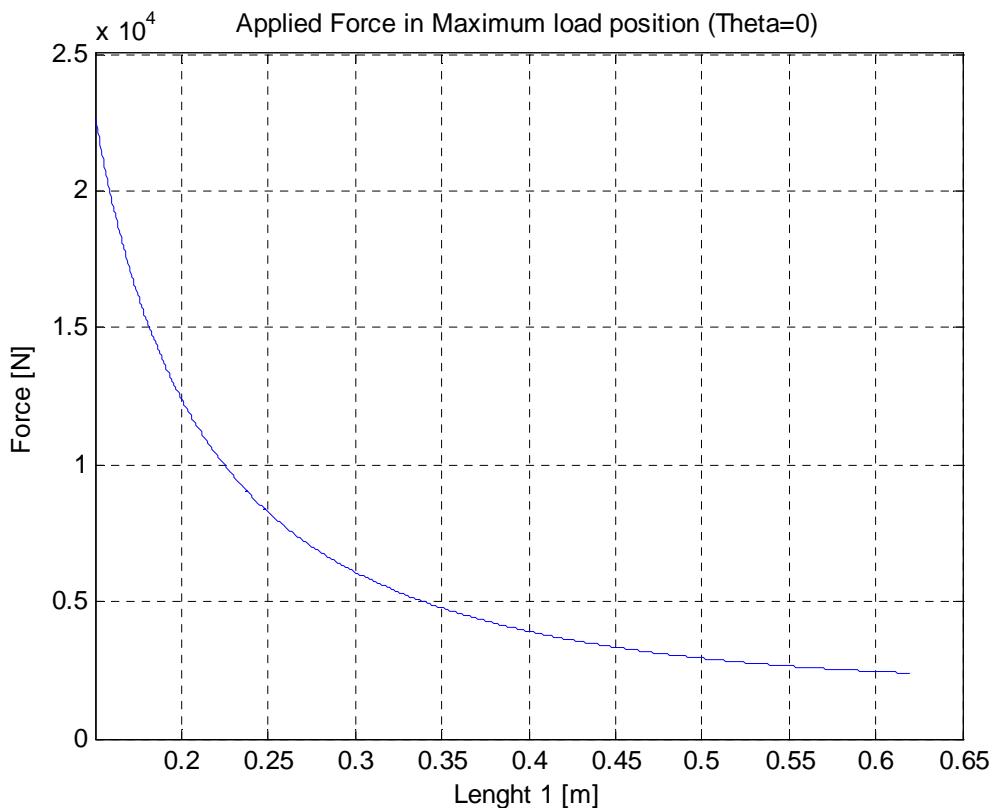


Figura 3.2 Fuerza a soportar por el cilindro en función de L1 con inclinación nula.

De acuerdo con las simulaciones, la longitud $L1$ debe encontrarse entre 250 y 300 mm, si es menor, el sistema será demasiado lento para que se produzca una oscilación en la barra flexible, y si es mayor, el recorrido del conjunto se reduce debido a la carrera del cilindro.

La longitud elegida para el banco de pruebas es **280 mm**.

Entonces **a1** es **17.8 grados** y **a2** es **42.5 grados**. La altura entre la parte superior del cilindro y la línea neutral de la barra se establece en 90 mm con el fin de mantener suficiente espacio para la unión cilindro-manipulador.

La fuerza mínima necesaria para desplazar el conjunto es **6812.5 N**.

La fuerza que soporta el cilindro a lo largo de la rotación del manipulador se muestra en la **Figura 3.3**.

La **Figura 3.4** expone la posición necesaria de la carrera del cilindro para conseguir la inclinación deseada. Si la carrera del cilindro es 300 mm el ángulo del manipulador está limitado entre 0 y 63 grados

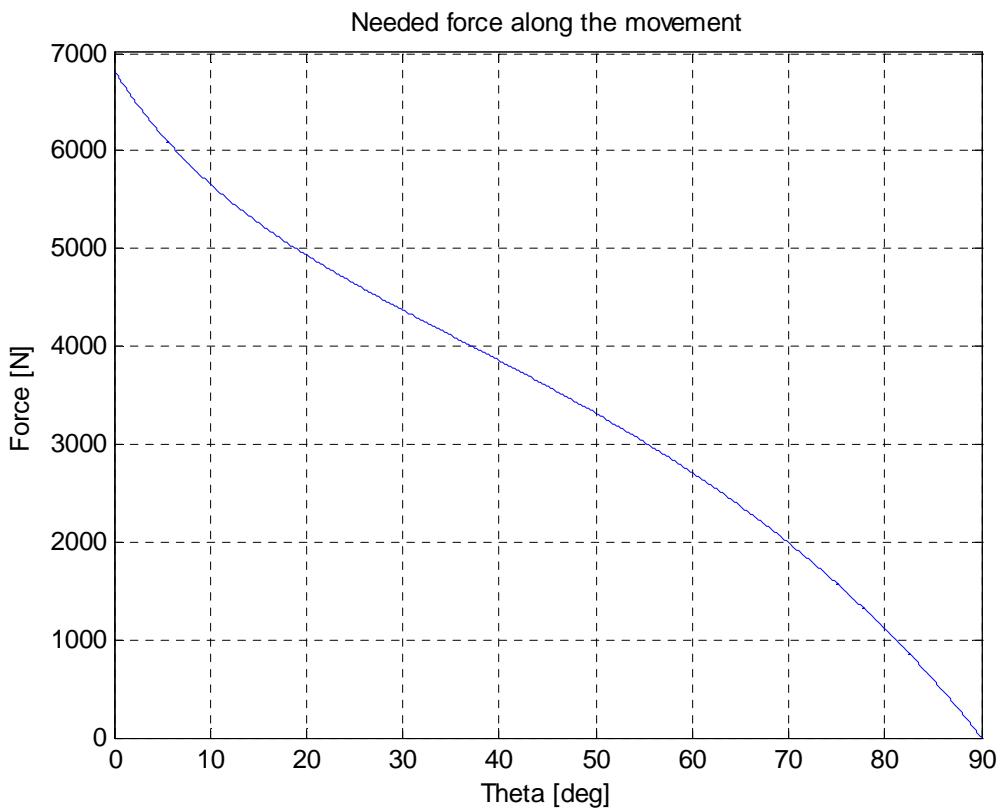


Figura 3.3 Fuerza mínima para cada posición con $L1=280$ mm.

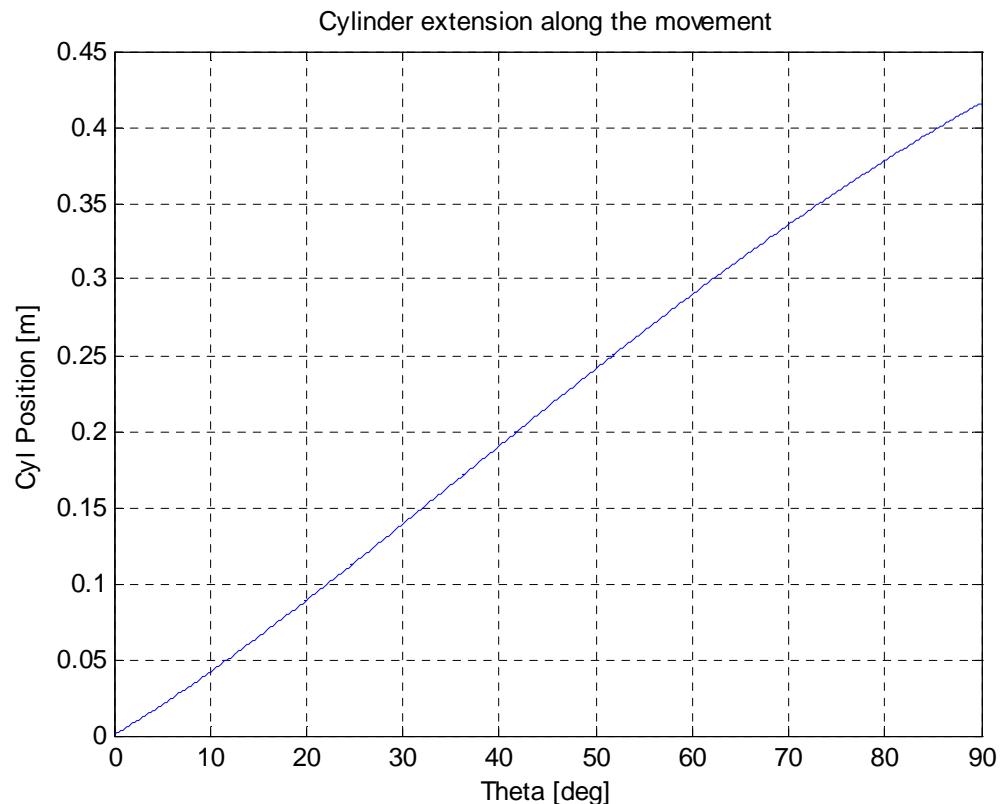


Figura 3.4 Posición del cilindro en función de la inclinación.

2.1.3 Modelo de barra flexible en SimMechanics

2.1.3.1 Método de los cuerpos agrupados

Para la mayoría de los propósitos de ingeniería, un cuerpo flexible real es un medio continuo. En el método de los cuerpos agrupados se aproxima un cuerpo flexible como un conjunto de cuerpos rígidos, junto con muelles y amortiguadores, y en SimMechanics, puede ser implementado por una cadena alterna de cuerpos rígidos y articulaciones. Los muelles y amortiguadores actúan ya sea en los cuerpos o las articulaciones. Los coeficientes de muelle y de amortiguación son funciones de las propiedades del material y de la geometría del manipulador flexible de que se trate. Los métodos cuerpos agrupados son los más adecuados en los modelos con geometrías lineales, tales como vigas, en el que cada elemento fundamental está acoplado a otros dos en una cadena simple, [Shye & Richardson, 1987].

En la siguiente figura se muestra un esquema del conjunto de cuerpos discretos.

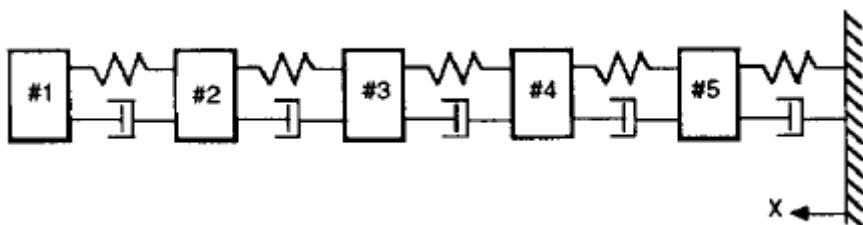


Figura 3.5 Esquema del método de cuerpos agrupados.

El método de cuerpos agrupados sigue los siguientes pasos, [Chudnovsky, Mukherjee, Wendlandt & Kennedy, 2006]:

1. Dividir la viga en elementos discretos.
2. Determinar los grados de libertad de los elementos y modelar apropiadamente uniones primitivas.
3. Aplicar un los coeficientes de muelle y amortiguación a cada junta para encapsular los parámetros.
4. Utilizar la teoría del cuerpo flexible para determinar las constantes elásticas de la geometría, las propiedades del material y las condiciones de contorno.
5. Aplicar la amortiguación necesaria para cada grado de libertad.
6. Construir la viga mediante la soldadura de una cadena de conjuntos elásticos.

A continuación se describe uno de dichos conjuntos.

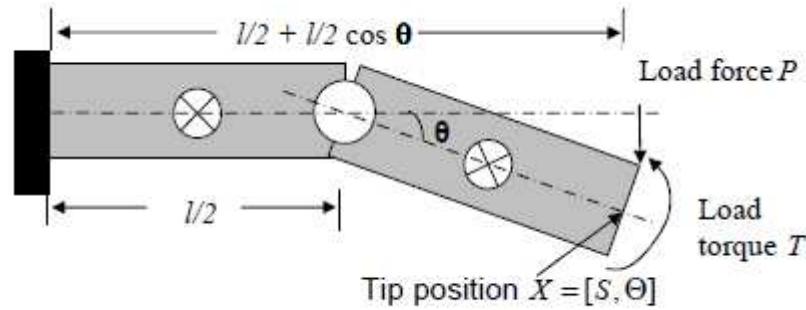


Figura 3.6 Elemento de la cadena de cuerpos agrupados.

También se agregan los parámetros de muelle y amortiguador de la articulación. La **Figura 3.7** muestra la unión del bloque de amortiguación a la unión y la **Figura 3.8** muestra en interior del bloque.

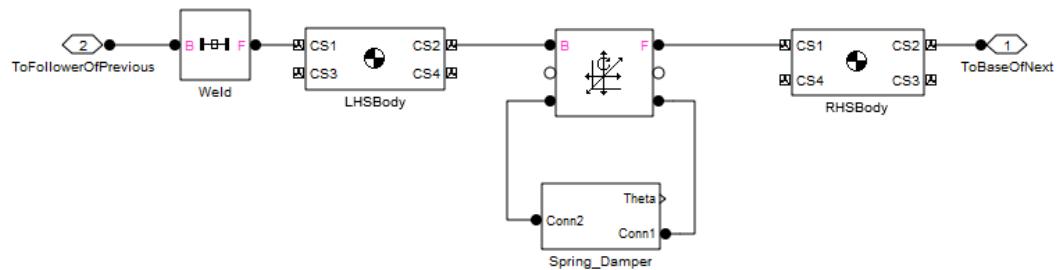


Figura 3.7 Diagrama Simulink de un elemento.

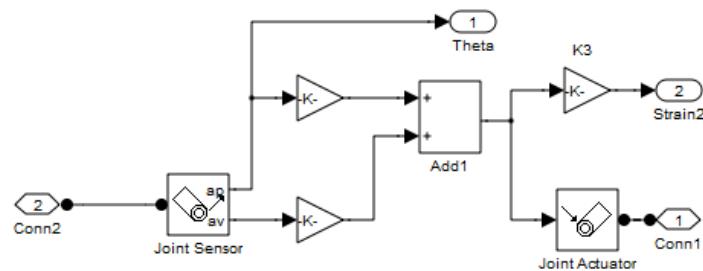


Figura 3.8 Aplicación de la ecuación del momento sobre la unión.

Ecuación normalizada del momento:

$$\ddot{\theta}n + 2\xi\omega_0\dot{\theta}n + \omega_0^2\theta n = \text{Momento Externo}$$

Dónde $\omega_0^2 = k/I$ e I es el momento de inercia. El coeficiente de amortiguamiento $2\xi\omega_0$ es un valor cuasi-empírico que da cuenta de la energía perdida a efectos viscoelásticos.

En SimMechanics, el ángulo relativo θn y la velocidad de la unión $\dot{\theta}n$ se miden en la articulación con un bloque conjunto del sensor. Entonces k se multiplica por el ángulo, y el coeficiente de amortiguación del material, $2\xi\omega_0$, se multiplica por la velocidad angular. Se añaden los dos momentos resultantes y se aplican de nuevo a la unión utilizando un actuador de articulación.

En la siguiente figura se muestra el resultado de la barra flexible en la simulación en MATLAB junto con el actuador que se modelará a continuación.



Figura 3.9 Simulación del manipulador flexible.

2.2 Modelo del Sistema Servo Hidráulico

2.2.1 Dinámica de la Servo Válvula

La servo válvula más extendida en el mercado es la válvula carrete o corredera que emplea una bobina para el mando del eje. Las válvulas de carrete están clasificadas por el número de vías que el fluido puede seguir. Todas las válvulas requieren vías de alimentación y de retorno, y al menos una vía para la carga, las válvulas suelen ser de tres o cuatro puertos.

El centro de la servo válvula es otro tipo de clasificación (**Figura 3.10**), se define por la anchura del asiento de la válvula en comparación con el orificio de la vía cuando el carrete se encuentra centrado.

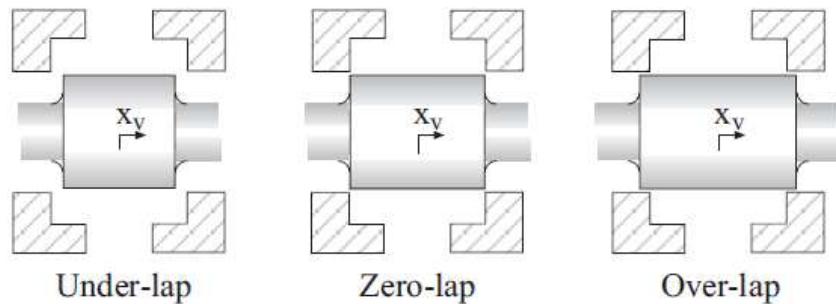


Figura 3.10 Clasificación de la válvula según su tipo de carrete centrado.

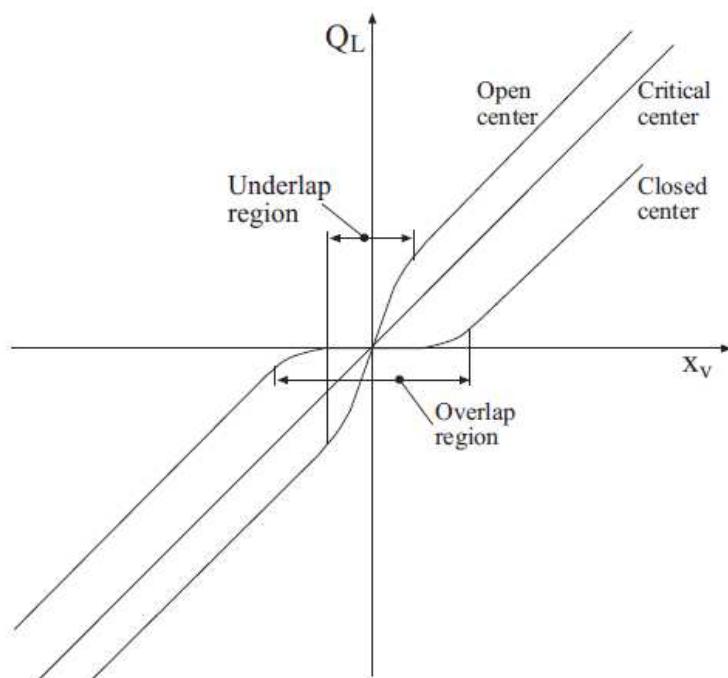


Figura 3.11 Caudal de la válvula en función de la posición y tipo de carrete.

El área de flujo (**Figura 3.11**), para un carrete de diámetro d_s y con desplazamiento, x_v , se calcula como a continuación,

$$A(x_v) = f_{sc} \pi d_s x_v$$

Donde f_{sc} es la fracción de la circunferencia de carrete que se está abierta en la ranura. Normalmente éste parámetro está definido en el siguiente intervalo: $0.25 \leq f_{sc} \leq 0.5$.

Las servo válvulas también se pueden clasificar como de una sola etapa, dos etapas o tres etapas.

Las válvulas de una sola etapa consisten en un motor de par o un motor de fuerza lineal unido directamente al vástagos para el posicionamiento del carrete. Debido a la fuerza de los motores, las válvulas tienen la capacidad de potencia limitada, que a su vez limita la capacidad de energía hidráulica. Las fuerzas de flujo son proporcionales a la corriente y la raíz cuadrada de la caída de presión de la válvula, lo que da una limitación en potencia hidráulica. Uno de los tipos más comunes de válvula de servo es la de dos etapas. Los servo válvulas utilizan un motor eléctrico, una fase piloto, doble boquilla y un carrete segunda fase de deslizamiento. La corriente eléctrica en el motor da desplazamiento proporcional de la segunda etapa de carrete.

Para grandes capacidades de flujo la potencia necesaria para desplazar el carrete principal será muy elevada, por lo tanto, un mayor número de etapas será necesario. En tales aplicaciones, (capacidad de flujo mayor a 150 litros/min y una presión máxima de 350 bar) se utiliza una válvula de tres etapas. Tres etapas es lo mismo que utilizar una válvula de dos etapas para pilotar la válvula principal.

2.2.1.1 Características de la válvula de una etapa y centro crítico

Este tipo de válvula es un dispositivo que utiliza un movimiento mecánico para controlar la potencia hidráulica desde una fuente hacia un actuador. El flujo de carga que atraviesa la válvula es expresado por la siguiente ecuación,

$$q_L = C_q w x_v \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - p_T)} \quad \text{ó} \quad q_L = K_i C_q w i_v \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - p_T)}$$

si el control de la válvula es una corriente eléctrica, donde C_q es el coeficiente de pérdidas de la válvula, w es el gradiente de área, i_v es la intensidad de entrada y $K_i = x_v / i_v$.

Coeficientes de válvula, [Formula Book, 2008]:

- La ganancia de flujo es:

$$K_q = C_q w \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - p_T)}, \quad K_{qi} = K_i C_q w \sqrt{\frac{1}{\rho} (p_s - p_T)}$$

- El coeficiente de flujo de presión:

$$K_c = \frac{C_q w}{2\sqrt{\rho(p_s - p_T)}}, \quad K_{ci} = \frac{K_i C_q w i_v}{2\sqrt{\rho(p_s - p_T)}}$$

- Sensibilidad de presión:

$$K_p = \frac{2(p_s - p_A)}{x_{v,0}}$$

Como parámetros de diseño del sistema, el punto de operación nula es el más importante. La evaluación de éstos coeficientes en ese punto, $q_L = p_L = x_v = 0$, da coeficientes nulos para el centro crítico ideal como,

$$K_{q,0} = K_i C_q w \sqrt{\frac{p_s}{\rho}}, \quad K_{c,0} = 0.$$

La ecuación de flujo turbulento da la relación entre el flujo controlado Q , la posición del carrete de la válvula x_v y la caída de presión Δp .

$$Q_A = \frac{x_v Q_N}{x_{v,max}} \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta p_N}} = K_v x_v \sqrt{\Delta p} \quad \text{con} \quad K_v = \frac{Q_N}{x_{v,max} \sqrt{\Delta p_N}}.$$

La dinámica de la servo válvula es parte importante del análisis.

Los datos de respuesta dinámica, a menudo llamados datos de respuesta en frecuencia, para una servo válvula los proporciona generalmente el fabricante de la servo válvula.

Generalmente, la respuesta en frecuencia de la válvula puede ser descrita adecuadamente como una respuesta de un sistema de segundo orden, con un ratio de amortiguamiento entre 0.8 y 1, y una frecuencia natural entre 300 y 500 radianes por segundo.

$$G_v(s) = \frac{K_v}{\frac{s^2}{\omega_v^2} + \frac{2 \xi_v s}{\omega_v} + 1}$$

Los catálogos del vendedor proveen los datos de frecuencia y de amortiguamiento para la válvula seleccionada para el proyecto.

2.2.2 Dinámica del Cilindro Hidráulico

Un cilindro hidráulico es modelado por varias leyes físicas tales como la ecuación de movimiento para las partes móviles y balances de masa. Hay algunas discontinuidades

que pueden ser ignoradas del modelo teórico, tales como que el cilindro es geométricamente asimétrico, que existen fuerzas de fricción que se oponen al movimiento del cilindro como la fricción de Coulomb o la fricción seca y que el módulo de compresibilidad efectivo es dependiente de la presión

Aplicando la ecuación de continuidad a cada una de las cámaras del cilindro,

$$Q_A - Q_{Li} = \dot{V}_A + \frac{V_A}{B'(p_A)} \dot{p}_A$$

$$Q_B + Q_{Li} - Q_{Le} = \dot{V}_B + \frac{V_B}{B'(p_B)} \dot{p}_B$$

donde los volúmenes de cámara se describen así,

$$V_A = V_{A0} + x_p A_p, \quad \dot{V}_A = \dot{x}_p A_p$$

$$V_B = V_{B0} - x_p \alpha A_p, \quad \dot{V}_B = -\alpha \dot{x}_p A_p$$

por lo tanto, la ecuación de presión es,

$$\dot{p}_A = \frac{B'(p_A)}{V_{A0} + (L - x_p) A_p} (Q_A - \dot{x}_p A_p)$$

$$\dot{p}_B = \frac{B'(p_B)}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-Q_B + \alpha \dot{x}_p A_p)$$

(2.2.2.1)

La ecuación del movimiento del pistón que gobierna la carga surge de aplicar la segunda ley de Newton:

$$m_t \ddot{x}_p + F_f(\dot{x}_p) = (p_A - \alpha p_B) A_p - F_{ext}$$

(2.2.2.2)

donde la masa total m_t incluye la masa del pistón y la masa del fluido hidráulico en las dos cámaras.

2.2.3 Modelo Lineal

Se puede aplicar una linearización sobre las ecuaciones algebraicas no lineales que describen las características del flujo de presión de las válvulas. Suele ser necesario aplicarla antes de las técnicas de identificación o control del sistema. Con el fin de simplificar el modelo, el módulo efectivo de compresibilidad se supone constante ante los cambios de presión, [Mattila 2013].

En principio, se lineariza la ecuación básica del flujo turbulento en la cámara A y por tanto los coeficientes de la válvula tienen que ser redefinidos:

$$Q_A = \frac{Q_N}{x_{vmax}} \sqrt{\frac{p_S - p_A}{\Delta p_N}} x_v \quad (2.2.2.3)$$

Entonces la linearización resulta:

$$\delta Q_A = \frac{\delta Q_A}{\delta p_A} \delta p_A + \frac{\delta Q_A}{\delta x_v} \delta x_v = K_{cA} \delta p_A + K_{QA} \delta x_v$$

- Donde la ganancia de flujo queda:

$$K_{qA} = \frac{Q_N}{x_{vmax}} \sqrt{\frac{p_S - p_A}{\Delta p_N}}$$

- Coeficiente de flujo de presión:

$$K_{cA} = \frac{Q_N x_{v,0}}{2 x_{vmax} \sqrt{\frac{p_S - p_A}{\Delta p_N}} \Delta p_N}$$

- Sensibilidad de la presión:

$$K_{pA} = \frac{\delta p_A}{\delta x_v} = \frac{\frac{\delta Q_A}{\delta x_v}}{\frac{\delta Q_A}{\delta p_A}} = \frac{2(p_S - p_A)}{x_{v,0}}$$

Se procede de forma similar con la ecuación del flujo turbulento en la cámara B.

$$Q_B = \frac{Q_N}{x_{vmax}} \sqrt{\frac{p_B - p_T}{\Delta p_N}} x_v$$

Aplicando la ecuación del fuljo (2.2.2.3) a la ecuación linearizada de presión (2.2.2.1) obtenemos:

$$(x_v > 0)$$

$$\dot{p}_A = \frac{B}{V_{A0} + (L - x_p)A_p} (K_{vA} x_v \sqrt{p_S - p_A} - \dot{x}_p A_p)$$

$$\dot{p}_B = \frac{B}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-K_{vB} x_v \sqrt{p_B} + \alpha \dot{x}_p A_p)$$

$$(x_v < 0)$$

$$\dot{p}_A = \frac{B}{V_{A0} + (L - x_p)A_p} (K_{vA}x_v\sqrt{p_A} - x_p A_p)$$

$$\dot{p}_B = \frac{B}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-K_{vB}x_v\sqrt{p_S - p_B} + \alpha \dot{x}_p A_p)$$

Realizando la transformada de Laplace para estas ecuaciones se halla:

$(x_v > 0)$

$$sP_A(s) = \frac{B}{V_{A0} + (L - x_p)A_p} (K_{QA}X_v(s) - K_{CA}P_A(s) - sX_p(s)A_p)$$

$$sP_B(s) = \frac{B}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-K_{QB}X_v(s) + K_{CB}P_B(s) + sX_p(s)\alpha A_p)$$

$(x_v < 0)$

$$sP_A(s) = \frac{B}{V_{A0} + (L - x_p)A_p} (K_{QA}X_v(s) - K_{CA}P_A(s) - sX_p(s)A_p)$$

$$sP_B(s) = \frac{B}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-K_{QB}X_v(s) + K_{CB}P_B(s) + sX_p(s)\alpha A_p)$$

Unimos las dos ecuaciones mediante la presión de carga: $sP_L(s) = sP_A(s) - sP_B(s)$

$(x_v > 0)$

$$sP_L(s) = \frac{B}{V_{A0} + (L - x_p)A_p} (K_{QA}X_v(s) - K_{CA}P_A(s) - sX_p(s)A_p) - \frac{B}{V_{B0} + \alpha x_p A_p} (-K_{QB}X_v(s) + K_{CB}P_B(s) + sX_p(s)\alpha A_p)$$

Para continuar con el modelo linearizado, se asumen varias simplificaciones como,

1. Cilindro simétrico:

$$\alpha = \frac{A_B}{A_A} = 1$$

2. Punto de linearización a mitad del recorrido:

$$V_{A0} + (L - x_p)A_p = V_{B0} + x_p A_p = \frac{V_T}{2}$$

3. Presión de cara nula:

$$P_L(s) = 0, \text{ so } K_{QA} = K_{QB} \text{ and } K_{CA} = K_{CB}$$

Después de éstos supuestos, la expresión del modelo para la carga de presión se ha reducido notablemente:

$$sP_L(s) = \frac{4B}{V_T} (K_{QB}X_v(s) - K_{CA}P_L(s) - sX_p(s)A_p)$$

La ecuación de movimiento, (2.2.2.2), también ha sido linearizada,

$$Ms^2X_p(s) = A_pP_L(s) - F_v s X_p(s) - F_L$$

Finalmente, la función de transferencia entre la posición del pistón del cilindro y la posición del carrete de la servo válvula para un cilindro hidráulico simétrico con válvula de cuatro vías se expone a continuación, añadiendo las pérdidas de flujo $Q_{LEAK}(s) = C_P P_L(s)$.

$$\frac{X_p(s)}{X_v(s)} = \frac{\frac{K_{QA}}{A_p}}{s \left(\frac{V_T M}{4B} s^2 + \frac{1}{A_p^2} \left(M(K_{CA} + C_P) + \frac{V_T F_v}{4B} \right) s + 1 \right)}$$

Por otra parte, las funciones de transferencia de la velocidad y aceleración del pistón pueden ser obtenida fácilmente de la función anterior:

$$\frac{\dot{X}_p(s)}{X_v(s)} = \frac{X_p(s)}{X_v(s)} * s, \quad \text{and} \quad \frac{\ddot{X}_p(s)}{X_v(s)} = \frac{X_p(s)}{X_v(s)} * s^2$$

Además, la función de transferencia de la presión se deriva de la siguiente relación:

$$P_L(s) = \left(\frac{M}{A_p} + \frac{F_v}{s A_p} \right) \ddot{X}_p(s)$$

Entonces, la función de transferencia resultante se compara con el modelo estándar de segundo orden de parámetros: Frecuencia natural ω_h y ratio de amortiguamiento ξ_h .

$$G_c(s) = \frac{K_h}{s \left(\frac{s^2}{\omega_h^2} + \frac{2 \xi_h s}{\omega_h} + 1 \right)}$$

Por consiguiente, la frecuencia natural y el ratio de amortiguamiento pueden ser obtenidos para el sistema servo, [Rydberg 2008].

$$2 \xi_h \omega_h = \frac{4B}{V_T M} \frac{1}{A_p^2} \left(M(K_{CA} + C_P) + \frac{V_T F_v}{4B} \right)$$

$$\omega_h = \sqrt{\frac{4B}{V_T M}}$$

$$\xi_h = \frac{(K_{CA} + Cp)}{A_p} \sqrt{\frac{BM}{V_T}} + \frac{F_v}{2A} \sqrt{\frac{V}{BM}}$$

2.2.3.1 *Modelo de Espacio de Estados*

Las ecuaciones del espacio de estados del sistema hidráulico son las siguientes,

$$s * X(s) = A * X(s) + B * U(s)$$

$$Y(s) = C * X(s) + D * U(s)$$

Donde $X = (\dot{x} \ p_A \ p_B)$ y $U = x_v$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{F_v}{M} & \frac{A_p}{M} & -\frac{A_p}{M} \\ -B \frac{A_p}{V_A} & -B \frac{K_{CA}}{V_A} & 0 \\ B \frac{A_p}{V_B} & 0 & B \frac{K_{CB}}{V_B} \end{bmatrix} ; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ B \frac{K_{QA}}{V_A} \\ -B \frac{K_{QB}}{V_A} \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0] ; \quad D = 0$$

Es momento de calcular la rigidez hidráulica del sistema. El módulo de compresibilidad B se define de la siguiente manera,

$$B = -V_0 \frac{\Delta p}{\Delta V}$$

donde V_0 es el volumen inicial de fluido, Δp y ΔV son las variaciones de presión y de volumen.

$$B = -(V_{A0} + x_{p,0}A_p) \frac{\Delta F}{A_p} \frac{1}{A_p \Delta x}$$

$$\Delta F = \frac{A_p^2 B}{(V_{A0} + x_{p,0} A_p)} \Delta x$$

$$K_{HA} = \frac{A_p^2 B}{(V_{A0} + x_{p,0} A_p)}$$

De manera similar, la segunda constante de muelle, K_{HB} , se calcula para la otra cámara,

$$K_{HB} = \frac{A_p^2 B}{(V_{B0} + (L - x_{p,0}) A_p)}$$

Y la rigidez del cilindro hidráulico se define con la siguiente aproximación.

$$K_H = K_{HA} + K_{HB} = \frac{A_p^2 B}{(V_{A0} + x_{p,0} A_p)} + \frac{A_p^2 B}{(V_{B0} + (L - x_{p,0}) A_p)}$$

Por tanto, la frecuencia natural se calcula como,

$$\omega_N = \sqrt{\frac{K_H}{M}}.$$

2.2.4 Sistema Hidráulico en SimMechanics

El circuito hidráulico compuesto por una válvula proporcional con 4 vías y 3 posiciones y varios manómetros para medir el cilindro y la presión de suministro desarrollado en SimMechanics se expone ahora (**Figura 3.12**). La entrada se adapta a la posición de la válvula de carrete.

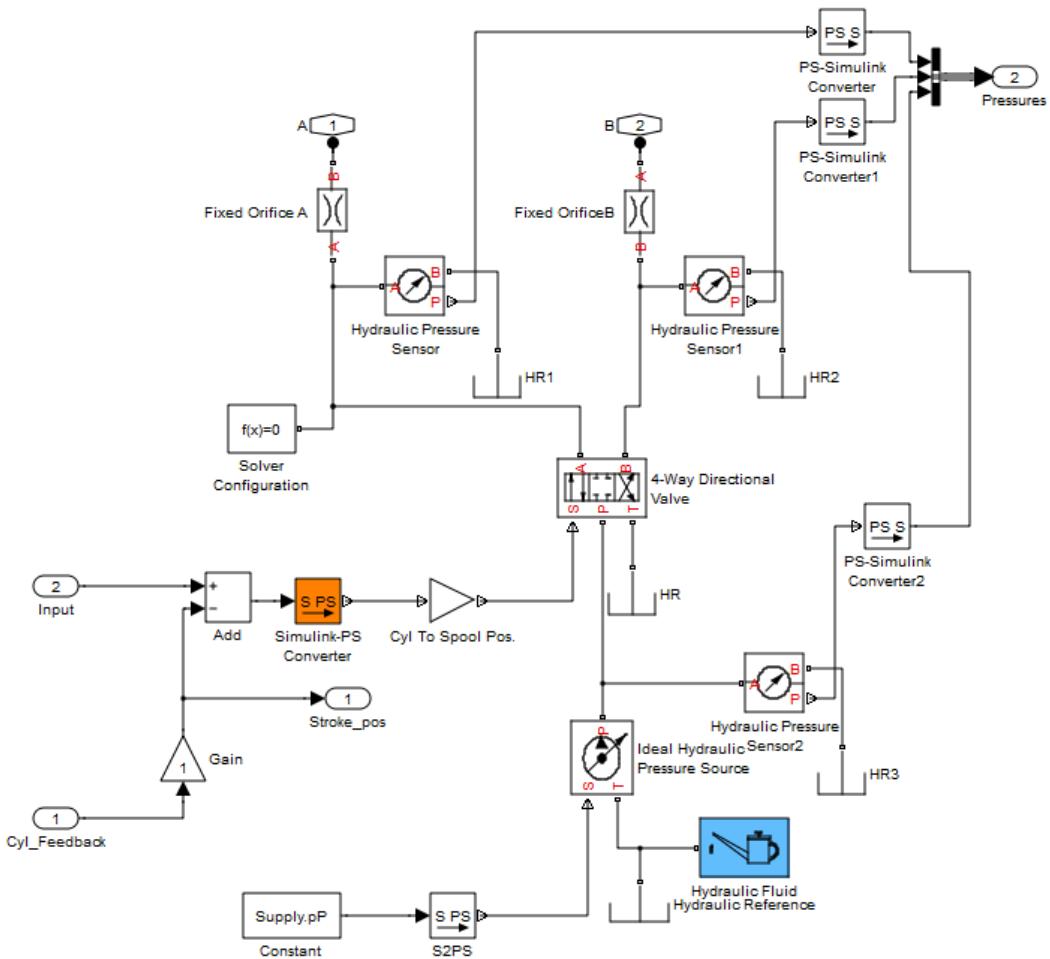


Figura 3.12 Diagrama del circuito hidráulico en Simulink.

En el modelo de Simulink completo se puede observar la unión del conjunto hidráulico con el cilindro y a su vez la unión mecánica con el manipulador flexible. En el **Anexo 8.3** muestra el esquema del sistema completo con la parte del manipulador flexible, el sistema hidráulico, cilindro y los bloques de adaptación de la referencia así como los bloques de estimación de la posición.

2.2.5 Brazo Hidráulico

La rigidez lineal se puede transformar a la correspondiente rigidez a torsión como se expresa a continuación.

$$\Delta\tau = G_H \Delta\theta,$$

$$\Delta\tau = a\Delta F = aK_H \Delta x = aK_H a\Delta\theta,$$

$$G_H = a^2 K_H$$

Finalmente, la frecuencia natural se traduce transforma así.

$$\omega_N = \sqrt{\frac{G_H}{J}}, \quad J = \frac{\text{mass} * L^2}{4} + \text{TipMass} * L^2$$

2.2.6 Frecuencia

El diseño de sistemas hidráulicos a menudo se basa en un modelo de carga simple, representado por parámetros individuales. Este tipo de modelo de carga se puede utilizar si la conexión entre el sistema hidráulico y la carga mecánica es rígida. Sin embargo, en muchas aplicaciones el sistema mecánico, al que los elementos hidráulicos de potencia están conectados, es débil en comparación con la rigidez del sistema hidráulico. Tales estructuras mecánicas causan problemas de resonancia, porque esa frecuencia puede ser más baja que la frecuencia natural hidráulico. Si la resonancia estructural domina la respuesta de frecuencia del sistema de servo, es extremadamente importante tener en cuenta este hecho en el diseño del sistema. Las principales razones son la estabilidad de los sistemas y el ancho de banda que está limitado por la frecuencia natural más baja en el bucle de control.

Diagrama de Bode del sistema servo hidráulico en bucle cerrado:

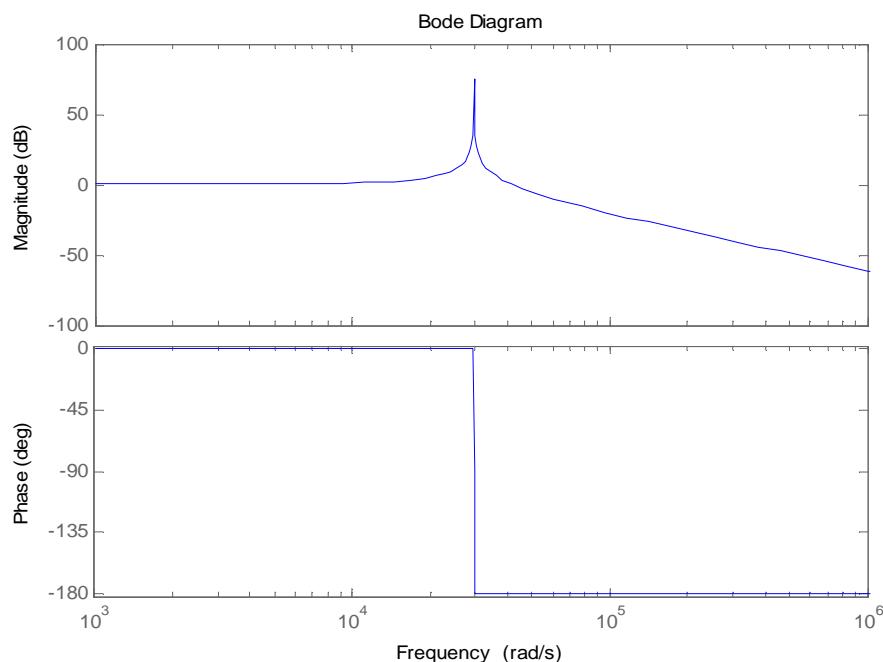


Figura 3.13 Diagrama de Bode del sistema Hidráulico.

Frecuencia natural del sistema servo:

$$\omega_N = 29634 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad f_N = 4716.4 \text{ Hz}$$

Rigidez hidráulica:

$$K_H = \frac{A_p^2 B}{(V_{A0} + x_{p,0} A_p)} + \frac{A_p^2 B}{(V_{B0} + (L - x_{p,0}) A_p)} = 11176242 \text{ N}$$

Frecuencia natural del brazo hidráulico:

$$G_H = a^2 * K_H$$

$$\omega_N = \sqrt{\frac{G_H}{J}} = 54.92 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad f_N = 8.74 \text{ Hz}$$

Como se ha explicado anteriormente, la frecuencia natural del sistema hidráulico es más lenta que la frecuencia del sistema servo, por lo tanto, se podría producir un problema de resonancia, pero en este caso es prácticamente imposible debido a que la frecuencia del manipulador es tres órdenes de magnitud menor que la frecuencia del conjunto hidráulico.

3 Control

El objetivo de ésta sección es desarrollar un controlador simple y adecuado para el sistema servo hidráulico y proporcionar una estimación para la posición del extremo del manipulador mediante los valores de los sensores utilizados.

En éste proyecto se ha diseñado un sistema de posición servo para alcanzar la inclinación adecuada del manipulador flexible, proporcionando un ángulo de la articulación, sin duda, bien medido y rigidez para comenzar con la estimación de flexión.

En ésta sección se proponen dos métodos de estimación, el primero a través de la medición de galgas extensométricas y el segundo mediante acelerómetros. Éstos sensores son acoplados a lo largo del manipulador.

3.1 Control del Sistema Servo Hidráulico

Un sistema servo es un sistema de control que mide su propia salida y fuerza a dicha salida a seguir la señal de mando de forma rápida y precisa. De éste modo, el efecto de anomalías en el propio dispositivo de control y en la carga se pueden minimizar, al igual que sucede con las perturbaciones externas. Un sistema servo puede ser diseñado para controlar casi cualquier valor físico medible, como por ejemplo, movimiento, fuerza, presión, temperatura, tensión o corriente.

Los parámetros del sistema servo que se va a utilizar en el estudio y en la experimentación se muestran en la siguiente **Tabla 4.1**:

Tabla 4.1 Parámetros del sistema hidráulico.

Carrera (L)	0.3 m	Diámetro del pistón (D)	0.032 m
Diámetro del vástago (Dr)	0.025 m	Módulo de compresibilidad (B)	1e6
Masa del manipulador (M)	50 Kg	Coeficiente pérdidas (Cp)	0
Fricción viscosa (Fv)	20000 N	Flujo Nominal (Qn)	50 l/min
Posición máxima válvula	1	Presión Nominal (Pn)	5e5 Pa
Parámetro de la válvula (Tau)	30 e-3	Presión de Alimentación (Ps)	210e5 Pa

3.1.1 Servo Válvula

La dinámica de la servo válvula se desarrollará de acuerdo con la hoja de características que proporciona el fabricante (Válvula BOSCH 4WRPH 6 **Anexo 8.5**), el tiempo de

respuesta es menor a 10 ms. Y la función de transferencia puede ser aproximada por un sistema de segundo orden con los siguiente parámetros, tal y como se ha explicado en la sección de modelado.

$$\xi_v = 0.8 - 1, T_S = 0.01$$

$$G_v(s) = \frac{K_v}{\frac{s^2}{\omega_v^2} + \frac{2\xi_v s}{\omega_v} + 1}$$

De la teoría de los sistemas de segundo orden, se obtiene la fórmula aproximada para el tiempo de respuesta:

$$\xi_v * \omega_v * T_S \cong 4$$

por tanto, la frecuencia natural es:

$$\omega_v = 400 \text{ rad/s}$$

3.1.2 Cilindro Hidráulico

La función de transferencia del sistema hidráulico se compone de las funciones de la válvula y del cilindro:

$$\begin{aligned} G(s) &= G_v(s) * G_{cyl}(s) = G_v(s) * \frac{K_h}{s \left(\frac{s^2}{\omega_h^2} + \frac{2\xi_h s}{\omega_h} + 1 \right)} \\ &= G_v(s) * \frac{2.627e004}{s^3 + 4.865 s^2 + 3913 s} \\ \omega_h &= \sqrt{\frac{4B}{V_T M}} \\ \xi_h &= \frac{(K_{CA} + Cp)}{A_p} \sqrt{\frac{BM}{V_T}} + \frac{F_v}{2A} \sqrt{\frac{V}{BM}} \end{aligned}$$

En la siguiente **Tabla 4.2** se muestra la localización de los polos del sistema:

Tabla 4.2 Localización de los polos del sistema en lazo abierto.

LOCALIZACIÓN DE LOS POLOS DEL SISTEMA, $G(s)$	
Real	Imaginario
0	0
-400	0
-400	0
-2.43	62.5
-2.43	-62.5

Los polos correspondientes a la válvula se encuentran localizados en -400 sobre el eje real, así que la dinámica de la válvula es mucho más rápida que la del cilindro, como se muestra en el gráfico del lugar de las raíces (**Figura 4.1**). Por lo tanto, no tiene gran influencia sobre el comportamiento del sistema.

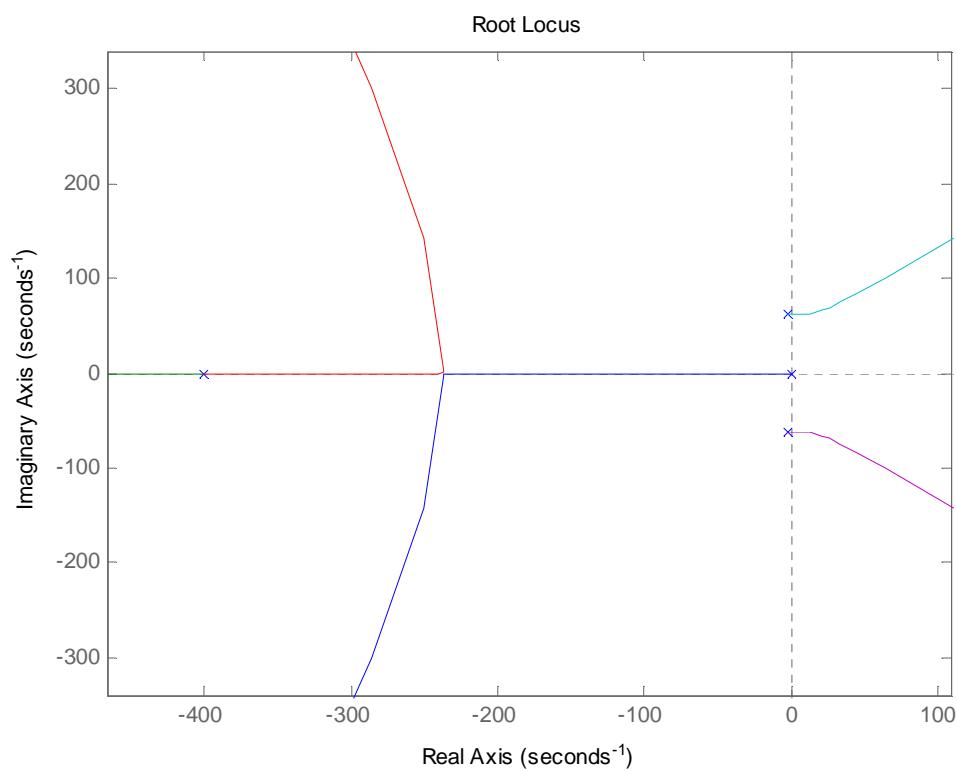


Figura 4.1 Lugar de las raíces de la función de transferencia del sistema hidráulico.

3.2 Controlador

Una aproximación estándar para controlar los sistemas servo hidráulicos es aplicar métodos de control de realimentación lineal. El objetivo del controlador de posición es imitar el comportamiento de la trayectoria, aumentando el amortiguamiento y evitando la inestabilidad. Ésta realimentación influye sobre la localización del par de polos conjugados.

Hay muchas opciones de realizar control de posición, e incluso tan simples como el P-control.

De acuerdo con [Jelai & Kroll 2004], si se utiliza un controlador PT (primer orden con desplazamiento), se alcanzarán respuestas más rápidas a un escalón en el sistema realimentado. El ratio de amortiguamiento del sistema sin controlador es de 0.039.

$$G_c(s) = \frac{K_c}{1 + s T_c}$$

Los parámetros K_c y T_c son sintonizados para lograr un ratio de amortiguamiento superior a 0.7 y evitar la inestabilidad.

$$T_c = 0.33;$$

$$K_c < 0.2;$$

Se halla la función de transferencia en lazo cerrado para la entrada $X_{v,ref}$, incluyendo el controlador.

$$G_{cl}(s) = \frac{X_p(s)}{X_v(s)} = \frac{G_c(s)G(s)}{1 + G_c(s)G(s)}$$

Finalmente, la localización de los polos del sistema queda de la siguiente manera (**Tabla 4.3**):

Tabla 4.3 Localización de los polos del sistema en lazo cerrado.

LOCALIZACIÓN DE LOS POLOS DEL SISTEMA, $G_{cl}(s)$	
Real	Imaginario
-1.5142	1.3344
-1.5142	-1.3344
-2.4334	62.4703
-2.4334	-62.4703

donde, como se muestra en la **Figura 4.2**, los polos complejos en -2.4334 disminuyen el amortiguamiento global, por lo tanto K_c podría disminuirse más.

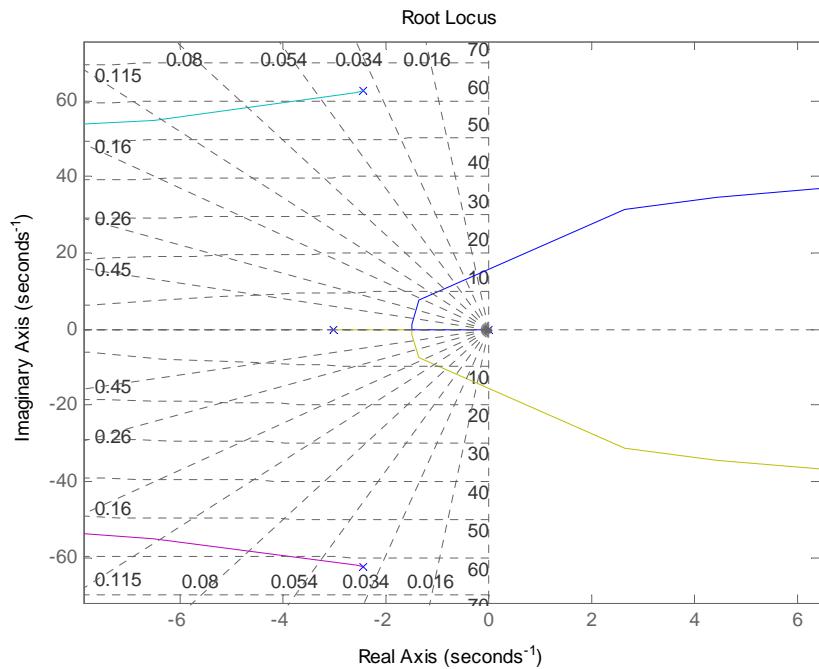


Figura 4.2 Lugar de las raíces incluyendo el controlador.

Localización final de los polos del sistema mostrada en la **Figura 4.3**.

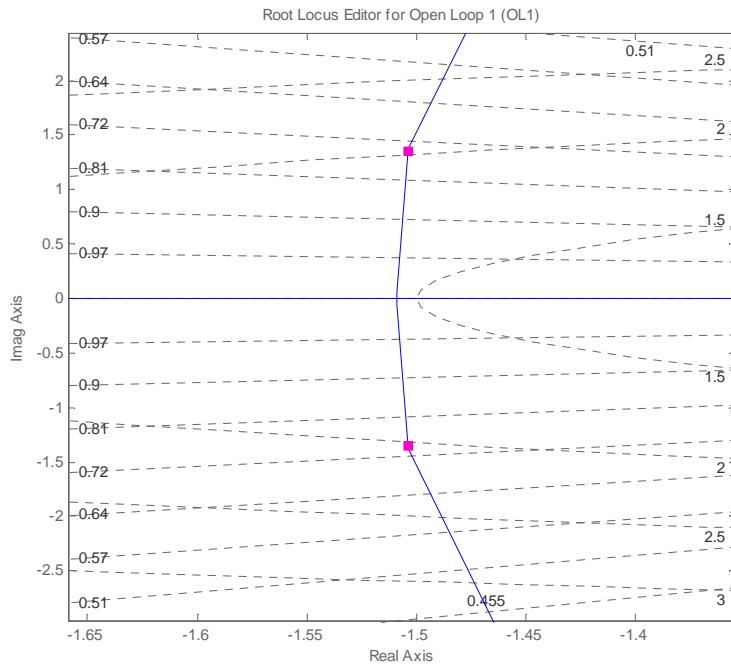


Figura 4.3 Sintonización de los polos para un correcto amortiguamiento.

En algunas aplicaciones de los sistemas servo hidráulicos, se podría utilizar un controlador PI (proporcional e integral) con el fin de aumentar la ganancia en lazo abierto a baja frecuencia y disminuir los errores de carga en estado estacionario. En la **Tabla 4.4** se muestra un resumen de los controladores lineales apropiados para el control de posición, velocidad y fuerza.

Tabla 3.1 Visión de conjunto del funcionamiento de los controladores lineales en una escala de --(peor) a ++(mejor), [Jelai & Kroll 2004].

	Controlador Lineal						
	P	I	PI	PD	PID	PT	PPT
Función de Transferencia	K_p	$\frac{1}{T_I s}$	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} \right)$	$K_p (1 + T_D s)$	$K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$	$\frac{K_{p1}}{1 + T_p s}$	$K_{p1} + \frac{K_{p2}}{1 + T_p s}$
Control Posición	+	--	-/0	-	0/-	++	++
Control Velocidad	-	+	++	--	++	+/0	
Control Fuerza	-	+	++	--	++		

Este sistema ha sido modelado con una carga estática, pero en realidad la barra flexible introduce un comportamiento dinámico al modelo. Éste comportamiento podría deteriorar las propiedades dinámicas del sistema servo completamente, son conocidos como sistemas "parásitos" de masa-muelle. Para limitar ésta influencia, la frecuencia natural del sistema parásito debería ser lo más alta posible. Debido a la flexibilidad del manipulador y su baja frecuencia, el amortiguamiento global del sistema se aumenta para evitar respuestas no deseadas.

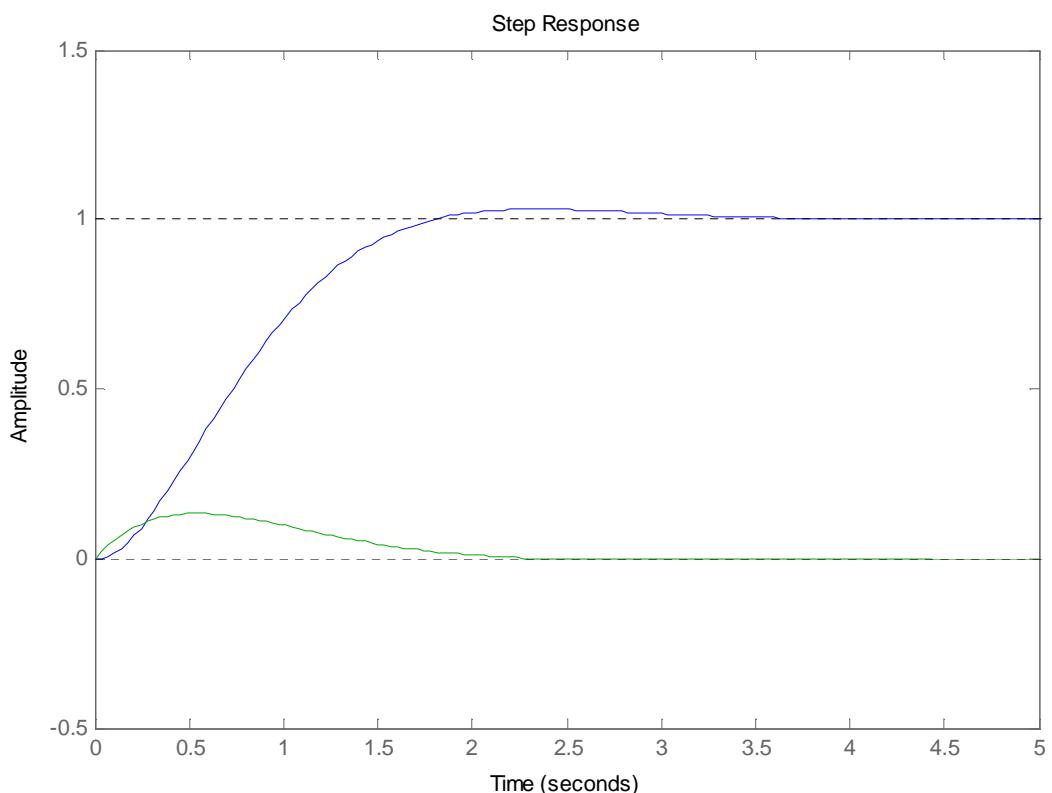


Figura 4.4 Respuesta ante entrada escalón y acción producida por el controlador.

En la **Figura 4.4** se muestra la respuesta a escalón del sistema (línea azul) junto con la entrada al sistema (línea verde), las cuales son la posición del pistón y la corriente aplicada sobre la bobina de la válvula respectivamente.

3.3 Estimación de la Forma del Manipulador

3.3.1 Galgas Extensométricas

La característica básico de las galgas extensométricas es la variación de la resistencia producida en un cable conductor mientras se alarga o acorta. La siguiente expresión proporciona la resistencia eléctrica de un conductor cilíndrico con diámetro D , longitud l y la resistividad ρ :

$$R = \rho \frac{4l}{\pi D^2}, \quad \frac{dR}{R} = \frac{dl}{l} - 2 \frac{dD}{D}$$

El efecto de Poisson nos da la relación entre la deformación transversal y longitudinal, el coeficiente de Poisson es ν :

$$\frac{dR}{R} = (1 + 2\nu) \frac{dl}{l} = GF * \varepsilon$$

La ecuación anterior proporciona la relación entre la deformación unitaria y la variación de resistencia, donde el factor de galga, GF , relaciona ambas candidades.

El siguiente cálculo para el factor de galga es más aproximado que el anterior.

$$GF = 1 + C - (C - 1)2\nu$$

con C siendo la constante de Bridgman.

El puente Wheatstone, **Figura 4.5**, es el típico circuito para medir la variación de resistencia $\Delta R/R$, producida en las mediciones de las galgas extensométricas.

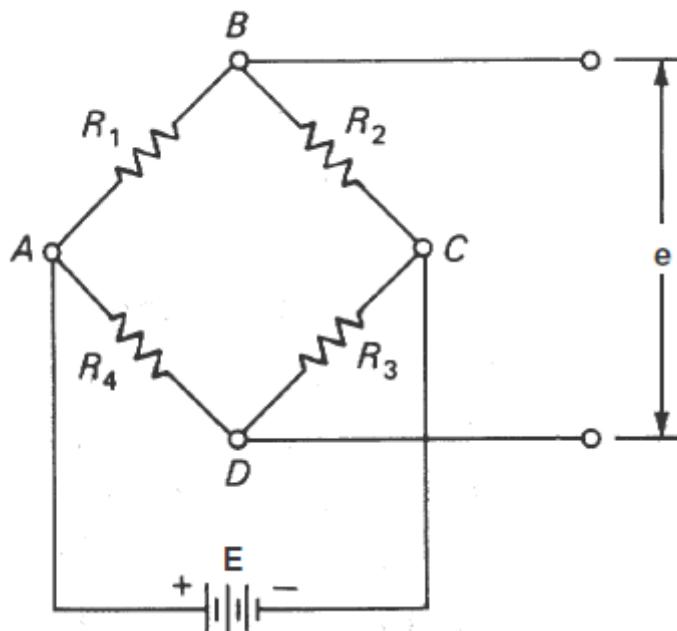


Figura 4.5 Esquema eléctrico de un puente de Wheatstone.

En el puente Wheatstone se debe satisfacer la siguiente condición de equilibrio,

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_3}{R_4}$$

para obtener una salida nula (e) cuando no se produce deformación.

Sin embargo, existen tres configuraciones distintas para el puente de Wheatstone:

- Puente Wheatstone Completo, donde las cuatro resistencias son variables, esto significa que cada resistencia es substituida por una galga extensométrica activa. Dos de ellas midiendo deformación positiva y las otras dos deformación negativa. Esta configuración se muestra en la **Figura 4.6a**. El puente completo no tiene compensación del efecto de la temperatura.

$$\varepsilon_x = -\frac{e}{GF V_s} \left(1 + \frac{R_L}{R_g} \right), R_L \cong 0$$

- En el Medio puente de Wheatstone, sólo dos de las resistencias se substituyen por una galga extensiométrica activa midiendo deformaciones opuestas. Las otras dos pueden ser adjuntadas en dirección perpendicular a la deformación para compensar los efectos de la temperatura. Ésta configuración se muestra en la **Figura 4.6b**.

$$\varepsilon_x = -\frac{2e}{GF V_s} \left(1 + \frac{R_L}{R_g} \right), R_L \cong 0$$

- El Cuarto puente de Wheatstone, **Figura 4.6c**, tiene menos sensibilidad que los otros dos tipos, pero por otra parte es más económico, aunque la debilidad de la señal puede hacer necesaria la utilización de un caro acondicionador de la señal.

$$\varepsilon_x = -\frac{4e}{GF V_s (1 + 2e)} \left(1 + \frac{R_L}{R_g} \right), R_L \cong 0$$

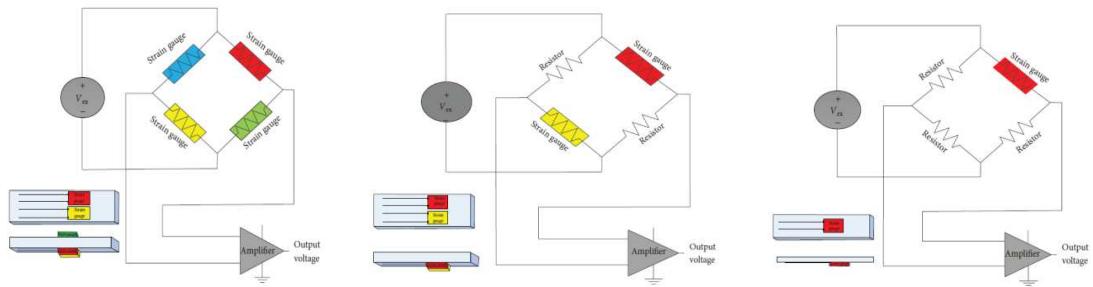


Figura 4.6 Puentes de Wheatstone: a)Puente completo, b) medio puente y c) cuarto de puente

Si la deformación en diferentes secciones es conocida, la forma del manipulador puede ser estimada por interpolación. El elemento diferencial de la **Figura 4.7** muestra el eje neutral de la barra durante la deformación. Se comienza por el elemento diferencial de la barra para obtener la deformación:

$$\varepsilon(x) = \frac{(\rho - z) d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = -\frac{z}{\rho}$$

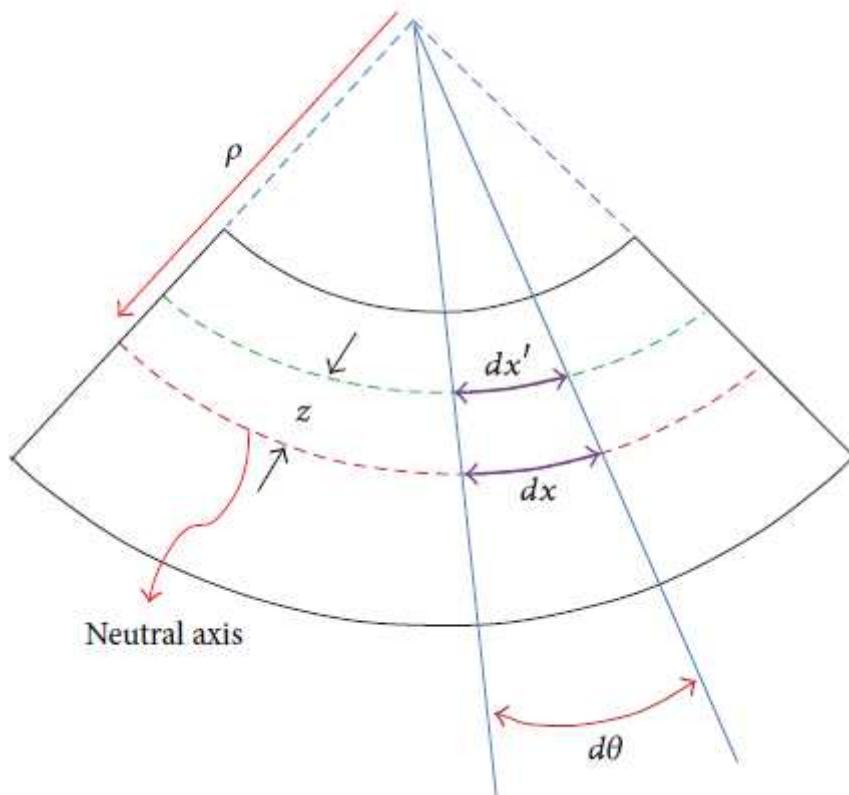


Figura 4.7 Elemento diferencial de un cuerpo flexible deformado.

Por otro lado, se puede obtener la curvatura de la barra mediante la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''(x)}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

Por tanto, la deformación, en función de $y(x)$, se representa como:

$$\varepsilon(x) = -\frac{t y''(x)}{2(1 + y'(x)^2)^{3/2}}$$

siendo t la altura del perfil de la barra.

El cuadrado de la derivada de la función de forma, $y'(x)^2$, es despreciable, así que la deformación final se simplifica de ésta forma.

$$\varepsilon(x) = -\frac{t y''(x)}{2}$$

Como no es posible utilizar un número infinito de sensores, se mide la deformación en unos pocos puntos. La función $y(x)$ aproxima la forma del manipulador flexible. Al igual que se explica en [Korayem, Shafei & Absalan 2012], donde se comparan varios tipos de ecuaciones, se elige la ecuación hiperbólica como la más exacta.

$$y(x) = A \sinh(x) + B \sinh(2x) + C \sinh(3x) + D \sinh(4x) + E \cosh(x) \\ + F \cosh(2x) + G \cosh(3x) + H \cosh(4x) + I$$

Se utilizan nueve coeficientes, debido a las 6 condiciones de contorno y a tres puntos de medición. Cuantos más puentes de galgas, más precisa será la solución.

Las condiciones de contorno son:

1. Desviación al principio de la barra es 0, $y(0) = 0$.
2. Momento al principio de la barra es 0, $y''(0) = 0$.
3. Desviación en el apoyo simple es 0, $y(L_1) = 0$.
4. Momento en el apoyo simple es 0, $y''(L_1) = 0$.
5. Momento en el extremo de la barra es 0, $y''(L) = 0$.
6. Esfuerzo cortante en el extremo de la barra es 0, $y'''(L) = 0$.

Las tres ecuaciones de medición de la deformación son:

$$1. \ \varepsilon(x_1) = -\frac{t*y''(x_1)}{2}$$

$$2. \ \varepsilon(x_2) = -\frac{t*y''(x_2)}{2}$$

$$3. \ \varepsilon(x_3) = -\frac{t*y''(x_3)}{2}$$

Los tres puntos de medición han sido seleccionados en el mismo punto donde la simulación de cuerpos agrupados tienen la unión entre ellos. Éstas deformaciones son medidas en tiempo real por un Medio Puente de Wheatstone implementado por MatLab Simulink.

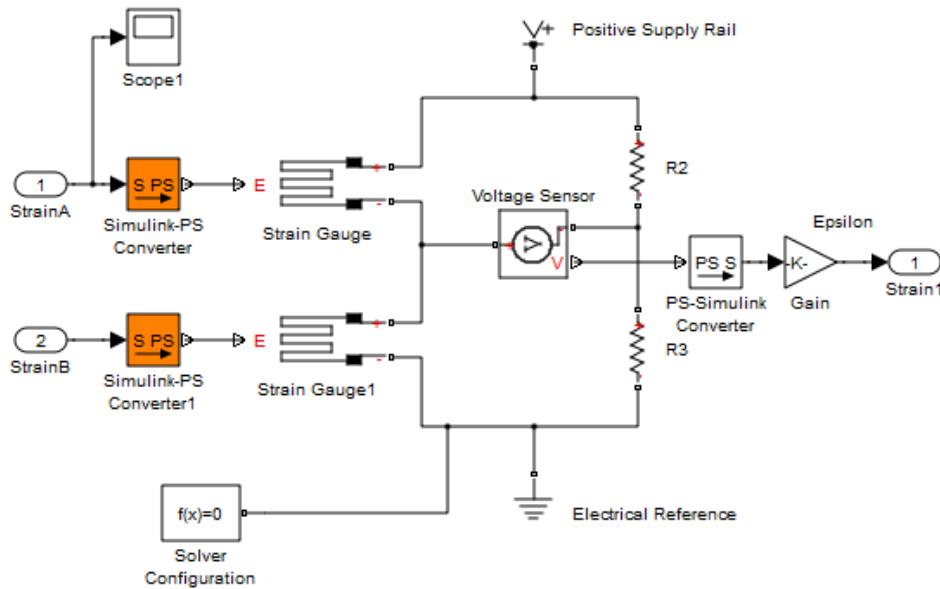


Figura 4.8 Diagrama en Simulink de un medio puente de Wheatstone.

Ganancia a la salida del puente:

$$Gain = \frac{-2}{V_s * GF}$$

donde V_s es la tensión de alimentación, 24 V, y GF es el Factor de Galga, 2.11.

La medición de la deformación no puede ser posicionada en el punto de apoyo simple debido a las condiciones de contorno en dicho punto, momento igual a 0, aparecería un sistema incompatible.

A continuación es necesario el algoritmo que resuelve la ecuación de forma. Se realiza un cálculo matricial para hallar los nueve coeficientes con éstas nueve ecuaciones evaluadas cada una en la distancia correspondiente.

$$A * Coeff = C$$

$$y(x = 0) = A \sinh(x) + B \sinh(2x) + C * \sinh(3x) + D \sinh(4x) + E \cosh(x) + F \cosh(2x) + G \cosh(3x) + H \cosh(4x) + I = 0$$

$$y''(x = 0) = E \cosh(x) + A \sinh(x) + 4F \cosh(2x) + 9G \cosh(3x) + 16H \cosh(4x) + 4B \sinh(2x) + 9C \sinh(3x) + 16D \sinh(4x) = 0$$

$$y(x = L1) = A \sinh(x) + B \sinh(2x) + C \sinh(3x) + D \sinh(4x) + E \cosh(x) + F \cosh(2x) + G \cosh(3x) + H \cosh(4x) + I = 0$$

$$y''(x = L1) = E \cosh(x) + A \sinh(x) + 4F \cosh(2x) + 9G \cosh(3x) + 16H \cosh(4x) + 4B \sinh(2x) + 9C \sinh(3x) + 16D \sinh(4x) = 0$$

$$y''(x = L) = E \cosh(x) + A \sinh(x) + 4F \cosh(2x) + 9G \cosh(3x) + 16H \cosh(4x) + 4B \sinh(2x) + 9C \sinh(3x) + 16D \sinh(4x) = 0$$

$$y'''(x = L) = A \cosh(x) + E \sinh(x) + 8B \cosh(2x) + 27C \cosh(3x) + 64D \cosh(4x) + 8F \sinh(2x) + 27G \sinh(3x) + 64H \sinh(4x) = 0$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x = x1) = & - (E \cosh(x))/25 - (A \sinh(x))/25 - (4F \cosh(2x))/25 \\ & - (9G \cosh(3x))/25 - (16H \cosh(4x))/25 \\ & - (4B \sinh(2x))/25 - (9C \sinh(3x))/25 \\ & - (16D \sinh(4x))/25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x = x2) = & - (E \cosh(x))/25 - (A \sinh(x))/25 - (4F \cosh(2x))/25 \\ & - (9G \cosh(3x))/25 - (16H \cosh(4x))/25 \\ & - (4B \sinh(2x))/25 - (9C \sinh(3x))/25 \\ & - (16D \sinh(4x))/25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(x = x3) = & - (E \cosh(x))/25 - (A \sinh(x))/25 - (4F \cosh(2x))/25 \\ & - (9G \cosh(3x))/25 - (16H \cosh(4x))/25 \\ & - (4B \sinh(2x))/25 - (9C \sinh(3x))/25 \\ & - (16D \sinh(4x))/25 \end{aligned}$$

Donde

$$Coeff = (A \ B \ C \ D \ E \ F \ G \ H \ I) \text{ y}$$

$$C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \varepsilon(x_1) \ \varepsilon(x_2) \ \varepsilon(x_3))$$

Después del cálculo de los coeficientes, la deformación en el extremo del manipulador se puede obtener como:

$$y(L) = A \sinh(L) + B \sinh(2L) + C \sinh(3L) + D \sinh(4L) + E \cosh(L)$$

$$+ F \cosh(2L) + G \cosh(3L) + H \cosh(4L) + I$$

Los algoritmos de MATLAB están expuesto en el **Anexo 8.6**. A continuación se expone un ejemplo de la deformación a lo largo de la posición x , aplicando unas deformaciones arbitrarias sobre las galgas.

Strain1 10e-5

Strain2 5e-5

Strain3 2e-5

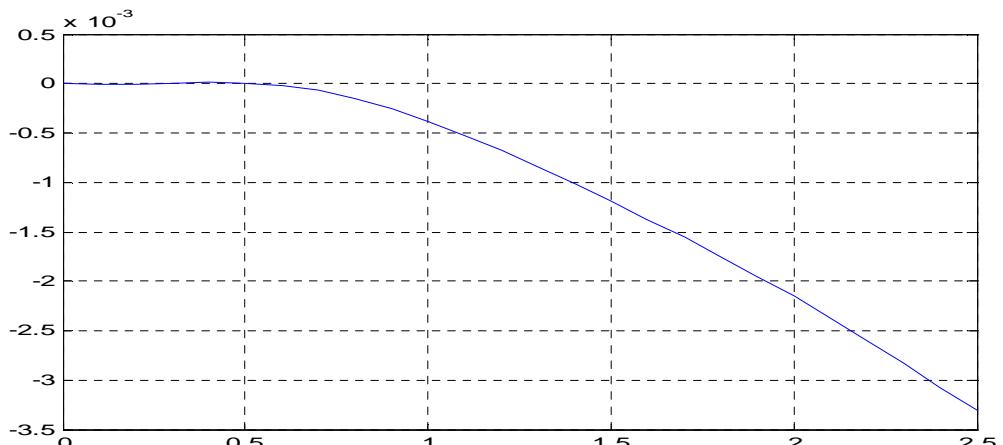


Figura 4.9 Resultado de la función de forma del manipulador tras una deformación arbitraria.

La implementación en Simulink se muestra en la **Figura 4.10**, donde se realiza la multiplicación matricial para la obtención de los coeficiente de la ecuación de forma. En cada paso del programa éstos coeficientes son recalculados, así que la ecuación es reajustada a la forma del manipulador en cada iteración.

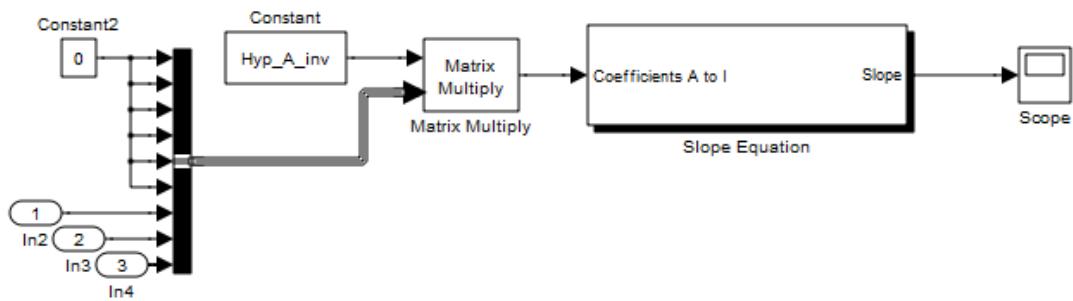


Figura 4.10 Esquema del cálculo de la ecuación de forma en Simulink.

3.3.2 Acelerómetros

Un acelerómetro es un dispositivo que convierte la aceleración en una señal eléctrica. Tanto la aceleración estática y dinámica se pueden medir usando un acelerómetro, donde la aceleración dinámica es la aceleración debida a cualquier fuerza a excepción de la fuerza gravitacional aplicada sobre un cuerpo rígido, y la aceleración estática (o aceleración de la gravedad) es debida a la fuerza gravitatoria. Tres de las técnicas más importantes para medir la aceleración se explican brevemente a continuación, [Naghshineh, Ameri, Zereshki, Krishnan & Abdoli].

- Acelerómetro piezoeléctrico. Este tipo de acelerómetros hace uso del efecto piezoeléctrico. A medida que el elemento piezoeléctrico se comprime debido a la fuerza causada por la aceleración, se genera una señal eléctrica proporcional. Los acelerómetros piezoeléctricos no son adecuados para la medición de las condiciones de aceleración cero (DC), pero son muy adecuadas para vibraciones de alta frecuencia.
- Acelerómetro capacitivo. Este tipo de acelerómetro es similar a la del acelerómetro piezoeléctrico excepto que utiliza efecto capacitivo. Dado que este tipo de acelerómetros puede ser micro mecanizado en el silicio, puede ser utilizado en circuitos integrados.
- Acelerómetro térmico. Dentro de un acelerómetro térmico hay un calentador para calentar una pequeña burbuja de aire en el interior del circuito integrado. Se cambia la posición de la burbuja de aire caliente a medida que se aplica una fuerza en el acelerómetro. El movimiento de la burbuja calentada se mide por los sensores de temperatura y luego se convierte en una señal eléctrica.

Medición de la inclinación mediante dos ejes

La utilización de más de un eje para calcular la inclinación produce una solución más exacta que mediante un solo eje. Considerando trigonometría básica, la inclinación se obtiene combinando A_x y A_y (**Figura 4.11**).

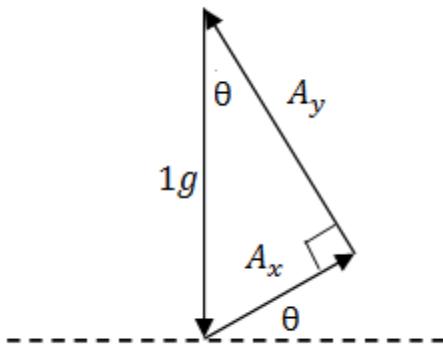


Figura 4.11 Esquema de cálculo de la inclinación mediante dos ejes.

$$A_x = \sin \theta, \quad A_y = \cos \theta$$

$$\theta = \arctan \frac{A_x}{A_y}$$

Es importante darse cuenta que la combinación de las aceleraciones es siempre 1g:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} = 1g$$

Por eso, ésta forma de medición de la pendiente es válida únicamente para cálculos estáticos, pero el manipulador necesita calcular la posición angular mientras se encuentra en movimiento. Debemos considerar un algoritmo diferente.

Adicionalmente, para pasar de la aceleración a posición angular, la señal tiene que ser integrada dos veces. Ésto implica que los errores se acumulan. A medida que la señal de el acelerómetro se muestree infinitamente rápido, algunas mediciones de la aceleración se perderán. Por otra parte, si hay un ruido o una vibración en la señal, puede afectar a la precisión de los resultados. Todos éstos errores se acumulan, así que cuantas menos integraciones tenga el algoritmo, más precisa será la solución.

El problema es que entre el modelo de simulación y las mediciones reales existe una gran diferencia, la gravedad tiene que ser considerada. En el caso del proyecto la gravedad tiene que ser substraída de las mediciones reales. Ésta corrección implica el conocimiento de la inclinación, para modificar los ejes necesarios.

Medición de la inclinación mediante la aceleración centrípeta

La aceleración centrípeta es una medida proporcional a la fuerza centrípeta. Durante un movimiento circular, la dicha aceleración es la componente radial de la aceleración del objeto. Es la tasa de cambio en la velocidad del objeto en movimiento.

Es posible relacionar la velocidad angular con la aceleración centrípeta mediante la siguiente fórmula:

$$a_c = \omega^2 r, \quad \omega = \sqrt{\frac{a_c}{r}}$$

La aceleración centrípeta está siempre dirigida hacia el centro del círculo, que forma la trayectoria de giro del objeto. Por consiguiente, si la trayectoria del acelerómetro es constante, como se puede asumir en el modelo del proyecto, la velocidad angular obtenida no cambia de dirección de rotación.

Obtener la velocidad angular mediante la aceleración centrípeta evita un proceso de integración. Por tanto, los errores acumulados se reducen.

La **Figura 4.12** muestra la implementación en Simulink para éste cálculo,

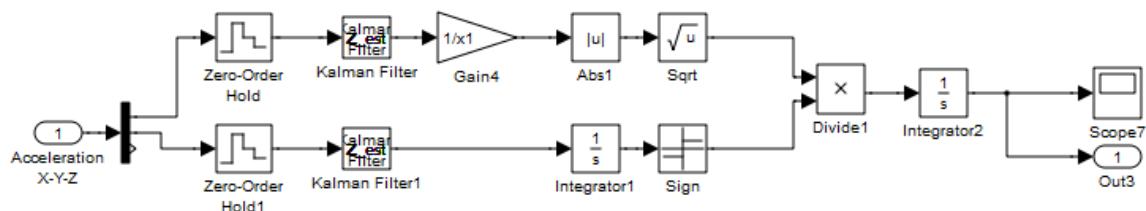


Figura 4.12 Diagrama del cálculo de la inclinación mediante la aceleración centrípeta en Simulink.

donde el camino superior obtiene la velocidad angular, y el camino inferior le da el sentido de giro a dicha velocidad. La velocidad angular se calcula mediante la aceleración paralela a la dirección del manipulador y la dirección mediante la integración de la dirección perpendicular.

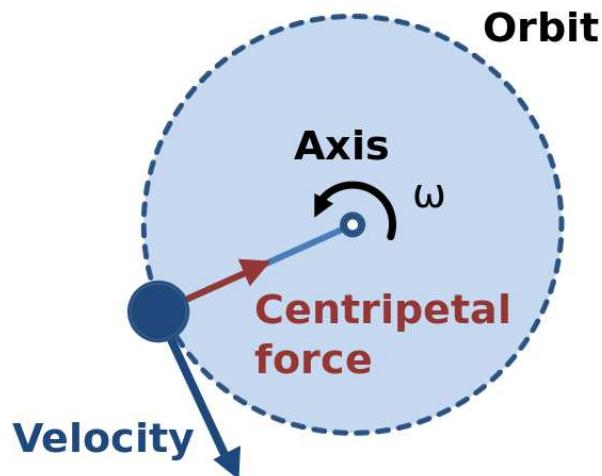


Figura 4.13 Dirección de la fuerza centrípeta en función de la trayectoria y la velocidad.

Además, las dos señales se filtran mediante un filtro de Kalman que retrasa el resultado. Entonces, integrando el resultado obtenemos la inclinación del manipulador en cada punto de medición. Ésta inclinación en cada punto se utiliza en el algoritmo de estimación después de restarle la inclinación al principio de la barra. De este modo, la pendiente en cada punto es relativa a la propia barra.

$$\theta_{xi} = \theta_i - \theta_{global}$$

Si conocemos la pendiente en cada punto de medición se puede estimar la forma de la barra y con ello la posición final.

En éste caso se utiliza una ecuación polinómica de 7 coeficientes para estimar la forma del manipulador. Por tanto se necesitan cuatro condiciones de contorno junto con tres puntos de medición.

$$y(x) = A x^6 + B x^5 + C x^4 + D x^3 + E x^2 + F x + G$$

Las condiciones de contorno de una barra en voladizo:

1. La deformación al principio del manipulador es 0, $y(0) = 0$.
2. La derivada de la deformación al principio del manipulador es 0, $y'(0) = 0$.
3. Momento en el extremo del manipulador es 0, $y''(L) = 0$.

4. Esfuerzo cortante en el extremo es 0, y $''(L) = 0$.

Las tres ecuaciones de medición de la aceleración:

$$1. \tan \theta_{x1} = y'(x_1)$$

$$2. \tan \theta_{x2} = y'(x_2)$$

$$3. \tan \theta_{x3} = y'(x_3)$$

Los tres puntos de medición han sido colocados en los mismos puntos que en el método de las galgas extensométricas. El algoritmo es similar al anterior con la ecuación hiperbólica, cada tiempo de muestreo se calculan los coeficientes mediante una operación matricial que contiene las ecuaciones que se presentan a continuación.

$$A * Coeff = C$$

$$y(0) = A 0^6 + B 0^5 + C 0^4 + D 0^3 + E 0^2 + F 0 + G = 0$$

$$y'(0) = 6 A 0^5 + 5 B 0^4 + 4 C 0^3 + 3 D 0^2 + 2 E 0 + F = 0$$

$$y''(L) = 30 A L^4 + 20 B L^3 + 12 C L^2 + 6 D L + 2 = 0$$

$$y'''(L) = 120 A L^3 + 60 B L^2 + 24 C L + 6 = 0$$

$$\tan \theta_{x1} = 6 A x_1^5 + 5 B x_1^4 + 4 C x_1^3 + 3 D x_1^2 + 2 E x_1 + F$$

$$\tan \theta_{x2} = 6 A x_2^5 + 5 B x_2^4 + 4 C x_2^3 + 3 D x_2^2 + 2 E x_2 + F$$

$$\tan \theta_{x3} = 6 A x_3^5 + 5 B x_3^4 + 4 C x_3^3 + 3 D x_3^2 + 2 E x_3 + F$$

Donde,

$$Coeff = (A \ B \ C \ D \ E \ F \ G) \quad y \quad C = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \tan \theta_{x1} \ \tan \theta_{x2} \ \tan \theta_{x3})$$

Después del cálculo de los coeficientes, se puede obtener la desviación en el extremo del manipulador:

$$y(L) = A L^6 + B L^5 + C L^4 + D L^3 + E L^2 + F L + G$$

4 Trabajo Experimental

Las investigaciones experimentales del proyecto se han desarrollado en el Laboratorio del Departamento de Hidráulica y Automática de la Universidad de Tecnología de Tampere. La configuración del sistema de control se muestra esquemáticamente en la **Figura 5.1**. Consiste en un manipulador flexible, un actuador y un PC. El software utilizado es MATLAB / Simulink construido sobre dSPACE que es la plataforma de las simulaciones en tiempo real.

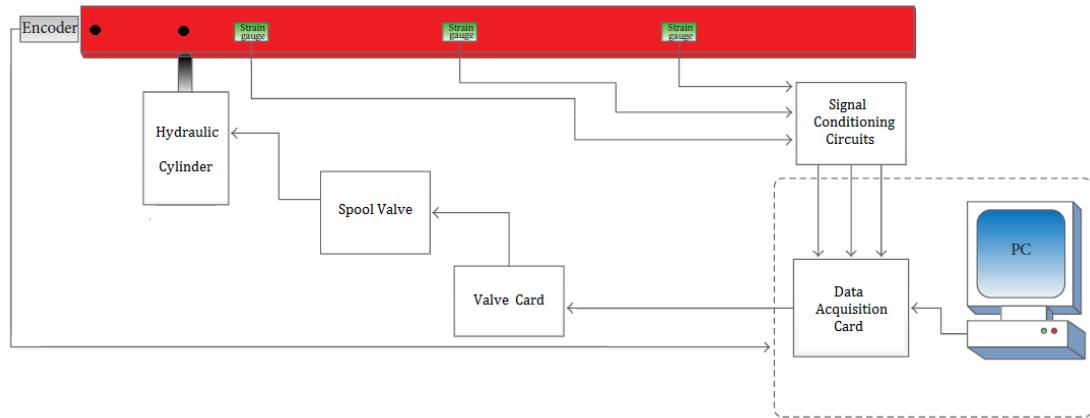


Figura 5.1 Esquema de las conexiones de Hardware sobre el prototipo.

Debido a un problema de fabricación de la viga se construyó más corta que la diseñada, la barra utilizada para la prueba es de dos metros de largo en vez de dos y medio. Esto cambia el modelo de comportamiento, se aumenta la frecuencia y la disminución de la deflexión. Por lo tanto, los parámetros de Simulink se manipulan para comportarse como el cuerpo de prueba. La masa de la punta se incrementa con el fin de tener un sistema más lento.

4.1 Configuración del Hardware

La configuración de hardware es la interfaz entre el hardware y el software, ahora se muestra la lista de componentes:

- Barra de sección hueca estructural, Ruukki double grade S355J2H
- Cilindro hidráulico 32mm 300mm

- Servo Válvula Hidráulica Bosch Rexroth AG 4WRPH 6 C4B24L-2X/G24Z4 /M
- Tarjeta Amplificadora de la Válvula, Bosch PL10
- Galgas Extensométricas KYOWA KFG-5-120-C1
- Amplificadores para las Galgas Extensométricas, HBM Clip AE101
- Transductores de presión, GE PTX 1400
- Encoder Incremental, HEIDENHAIN ROD-426
- Panel de Conexiones CLP1103
- PC Windows XP
- Fuente de alimentación 0-24 V DC

La entrada del sistema es generada por el equipo que envía la señal a la CLP1103 que es la tarjeta de adquisición de datos.

El Panel de conexiones CLP1103 (Figura + + +) contiene los conectores para veinte entradas analógico-digitales, ocho salidas de señal digital a analógica, y varios conectores que pueden ser utilizados para E / S digitales, Esclavo / DSP I / O, interfaz del encoder incremental, interfaz CAN e interfaces de serie.

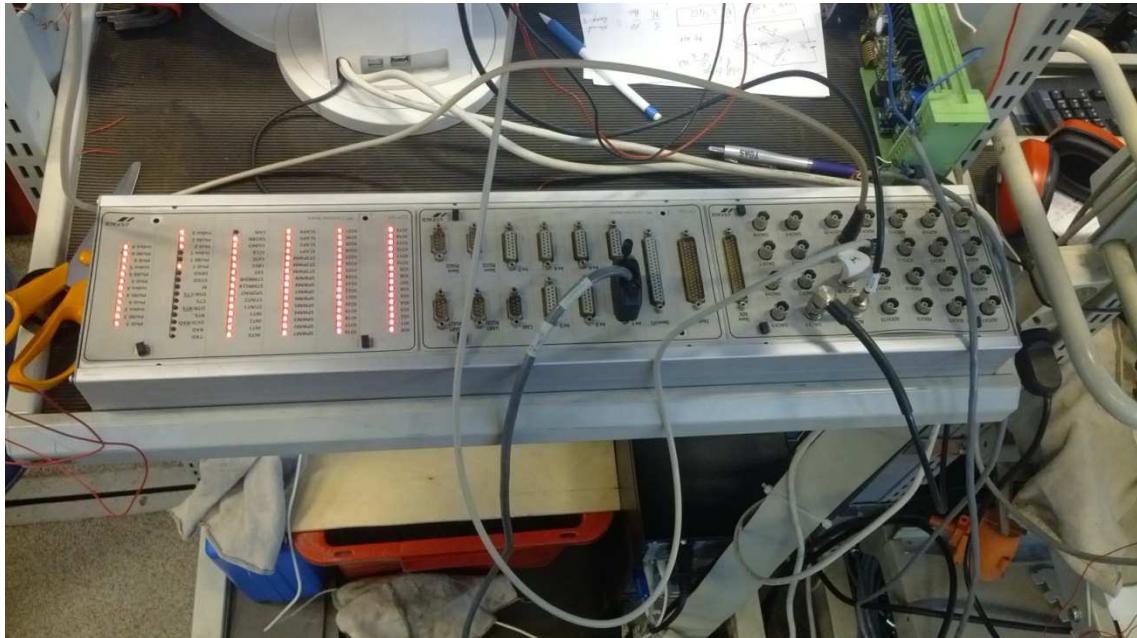


Figura 5.2 Panel de conexiones CLP1103.

A continuación, el CLP está conectado con la tarjeta del amplificador de válvula de carrete que genera una corriente para la bobina de la servo válvula, que acciona el carrete a la posición deseada de control. La servo válvula (**Figura 5.2a**) está conectada a un suministro de presión de 210 MPa y permite que la presión vaya al cilindro, al ser una válvula de 4 vías puede conducir el fluido a presión a las dos cámaras diferentes en el cilindro de doble efecto .

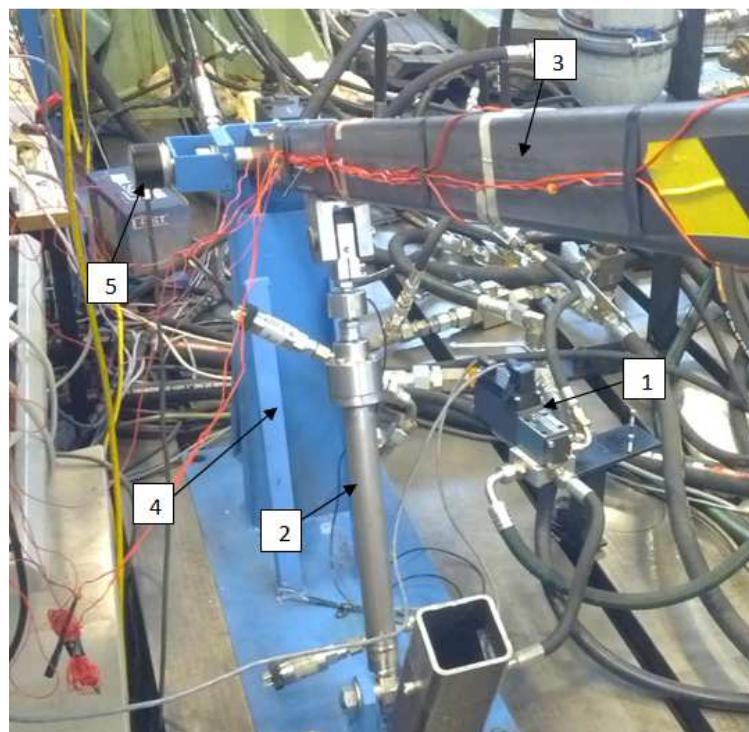


Figura 5.2 Fotografías del prototipo, para ver la descripción de los elementos del prototipo ver Tabla 5.1.

El cilindro hidráulico está unido al banco de pruebas y al manipulador flexible por dos rodamientos SKF. Se une el manipulador flexible (Figura + + +) al banco de pruebas y al cilindro, por lo que con la fuerza suficiente el cilindro puede cambiar la inclinación del manipulador.

Tabla 5.1 muestra la descripción del manipulador flexible:

Tabla 5.1 Descripción de los elementos del prototipo:

No	Descripción
1	Servo Válvula
2	Cilindro Hidráulico
3	Manipulador Flexible
4	Banco de Pruebas
5	Encoder Incremental
6	Masa del Extremo
7	Puntos de Unión al cilindro y al banco

Al mismo tiempo, un encoder incremental está midiendo la inclinación, ya que está unido al eje de banco de pruebas. La señal del codificador se usa como realimentación, por lo que está conectado al panel de adquisición de datos. Por lo tanto, el programa vuelve a calcular la entrada del sistema.

4.1.1 Configuración de las Galgas Extensiométricas

La instalación de galgas extensiométricas es un proceso delicado, en donde el adhesivo y las galgas tienen que ser adecuadamente seleccionada y cuidadosamente unidos en el punto de medición. A continuación se describe el proceso de instalación.

En primer lugar, la zona de medición tiene que ser pulida con papel de lija. Una vez que el área es lo suficientemente brillante, es el momento de limpiar el área con gasas y una mezcla de acetona e isopropanol llamado RMS para eliminar el polvo.

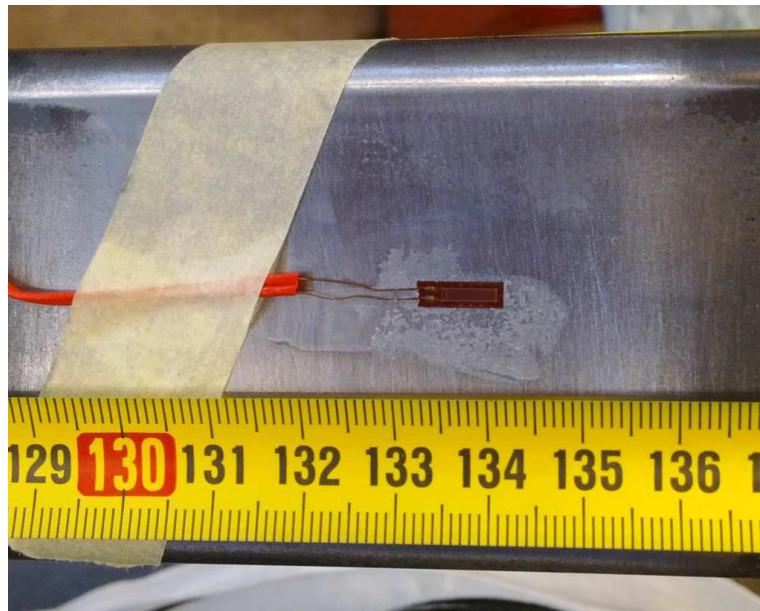


Figura 5.3 Ejemplo de una de las galgas ya instaladas en el manipulador.

Antes del pegado, el sensor se coloca y alinea en la dirección de la deformación. Una vez que está en la posición deseada, sujetamos la galga mediante cinta adhesiva.

El adhesivo seleccionado para la galga es cianocrilato, porque es compatible con el acero, se necesita poco tiempo de curado y permite un amplio rango de temperaturas de trabajo. Es deseable que la capa de adhesivo sea tan delgada como sea posible, por lo que el producto se extiende por una pieza de teflón.

A continuación, la galga extensométrica puede estar unida, todavía con la cinta, sobre el producto. Después de uno o dos minutos de ejercer presión sobre la galga con el pulgar se retira la cinta. La galga extensométrica está lista para ser soldada a los cables si es necesario (**Figura 5.3**).

Por lo tanto, seis galgas están fijados en tres puntos de medición, uno encima y el otro debajo del manipulador, para completar tres medios puentes de Wheatstone.

Los puentes de Wheatstone están conectados a tres amplificadores AE101 (**Figura 5.4**), calibrados para éste tipo de galga. Para obtener la máxima resolución de la medición se utiliza la potencia máxima del amplificador (10 V).



Figura 5.4 Amplificadores utilizados para cada puente de Wheatstone.

Finalmente, la salida de los amplificadores se cablea a los puertos de entrada analógicos de la tarjeta de adquisición de datos.

4.2 Configuración del Software

dSPACE ControlDesk es una plataforma de software y de hardware destinada a facilitar la interconexión de los modelos de Simulink a dispositivos de hardware en tiempo real. El panel CLP1103 se considera una plataforma en la que se ejecuta la simulación, como MATLAB es también una plataforma para ejecutar simulaciones en tiempo no real, [Quijano & Passino 2002].

Un modelo de Simulink se ha desarrollado para el trabajo experimental (**Figura 5.5**), donde las entradas y salidas del sistema tienen que ser diseñadas y convertidas correctamente. Se introducen algunos conmutadores con el fin de cambiar el comportamiento del sistema. Un interruptor selecciona entre el controlador desarrollado previamente o el sistema no controlado. El otro interruptor del controlador cambia de un sistema de accionamiento manual hasta un sistema controlado por retroalimentación, es necesario al comienzo de las pruebas experimentales.

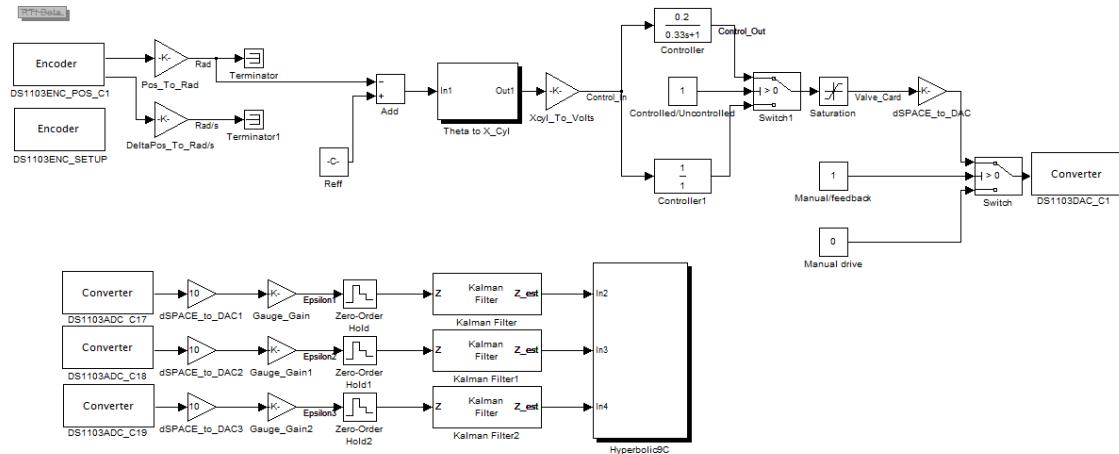


Figura 5.5 Modelo de Simulink para DSpace.

Por otro lado, algunos bloques se mantienen del sistema de Simulink anterior como el generador de pista, los cálculos de estimación de la forma, el bloque del controlador y filtros de Kalman. El bloque del encoder incremental proporciona mediciones de posición y velocidad. El encoder envía el número de líneas el visor óptico interno es capaz de contar. Por lo tanto, los valores se convierten a radianes y radianes por segundo dividiéndolos por el número de líneas por revolución que tiene el encoder, y por el tiempo de muestreo de la simulación en el caso de velocidad angular.

Las entradas y salidas analógicas oscilan entre 10 y -10 voltios, pero en MatLab varían entre 1 y -1, por lo tanto, algunas de las ganancias de 10 o 1/10 valores son necesarios.

A continuación, se muestra una interfaz para controlar y visualizar los parámetros (**Figura 5.6**). La interfaz proporciona una gran cantidad de instrumentos virtuales para los valores de referencia y diferentes commutadores para la selección del control. Los gráficos y medidores dan una idea sobre los parámetros del sistema, éstos valores se pueden guardar en cada prueba realizada.

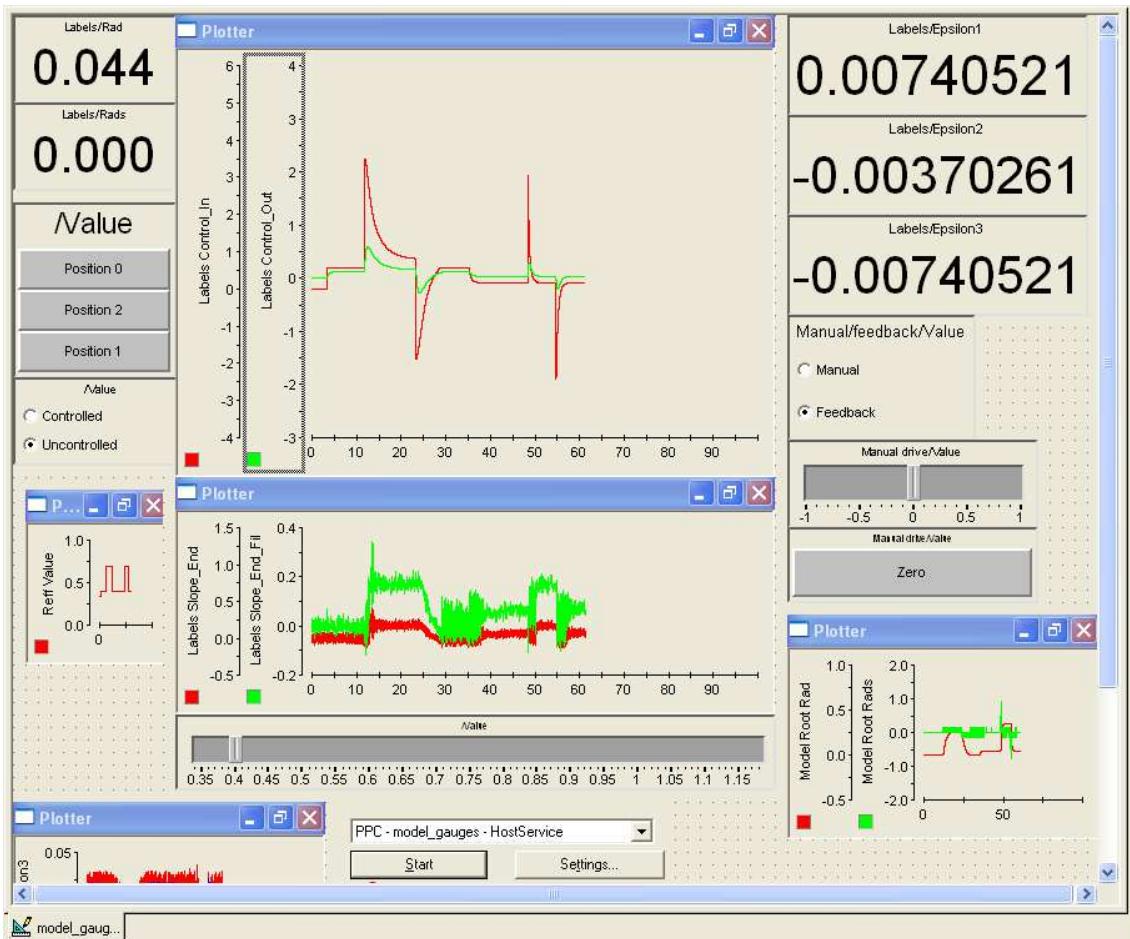


Figura 5.6 Panel de instrumentos.

4.3 Comparación entre Simulink y las Mediciones en el Laboratorio

Se han realizado varios experimentos sobre el manipulador flexible, utilizando el sistema de lazo cerrado con y sin el controlador PT, y variando los valores del controlador. En ésta sección se comparan los resultados obtenidos en el modelo simulado y los medidos en el prototipo fabricado. Todos los experimentos han sido realizados con una entrada escalón de 20 grados (0.35 radianes) o mediante un manejo manual de la posición de referencia. Los resultados se explican a continuación.

4.3.1 Resultados de la Simulación

4.3.1.1 Desviación del extremo del Manipulador

La desviación del extremo del manipulador es la distancia, en dirección perpendicular a la longitud de la barra, entre dónde se encuentra la barra tras la flexión y dónde se encontraría si fuera un cuerpo rígido. En el siguiente gráfico, después de un escalón de

20 grados y otro de -20 grados a los dos segundos, se muestra la respuesta del modelo de Simulink, y la comparación entre la estimación de las galgas y de los acelerómetros.

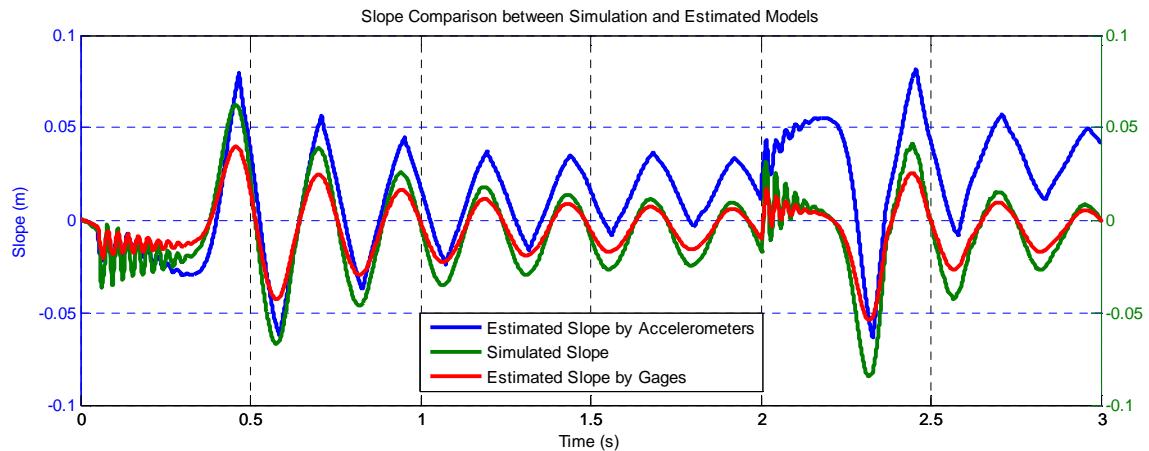


Figura 5.7 Comparación de los valores de simulación; Valor real(verde), Valor estimado por acelerómetros (azul) y Valor estimado por las galgas (rojo).

En la **Figura 5.7**, se presenta una comparación entre los modelos de simulación de la desviación y la desviación estimada en la simulación. La desviación simulada retrata la deformación producida por la barra de cuerpos agrupados, las desviaciones estimadas por los acelerómetros y las galgas que muestran el desplazamiento estimado después de los cálculos con los algoritmos explicados anteriormente.

En el gráfico, se puede observar que la estimación realizada por el método de los acelerómetros se comporta como la barra flexible simulada, pero existe un error que se acumula a lo largo del tiempo. Éste error se debe al proceso de integración sobre la velocidad angular calculada para obtener la pendiente. El error se podría reducir notablemente mediante la composición de la señal con la de un giroscopio o algún otro sensor.

La desviación estimada por las galgas extensométricas tiene un comportamiento bastante similar al comportamiento del manipulador flexible. La estimación trabaja sin integración de la señal y el hecho de que la señal de las galgas en la simulación no tiene ruido hacen que el error en estado estacionario sea nulo.

4.3.2 Resultados en el Prototipo Experimental

En el prototipo experimental el desplazamiento del extremo del manipulador se estima midiendo los tres puentes de galgas y calculándolo mediante el algoritmo previo.

Para reducir el ruido, las mediciones de deformación se retrasan debido a la utilización de filtros de Kalman. Las tres deformaciones se miden a través de un medio puente de Wheatstone, la **Figura 5.8** muestra la deformación medida por cada puente después de una deformación aleatoria. La mayor deformación se obtiene por el puente número uno porque está más cercano al punto de mayor tensión, donde el cilindro actúa sobre el manipulador.

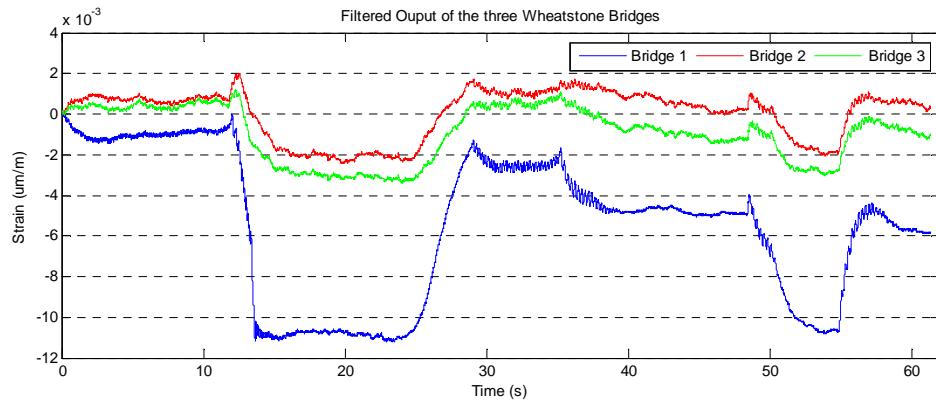


Figura 5.8 Gráfica de los valores medidos a la salida de cada puente de Wheatstone.

4.3.3 Comparación Simulación y Prototipo

En esta sección, se muestra una comparación a la respuesta escalón de 20 grados, **Figura 5.9**. El modelo de Simulink se ha rediseñado con los mismos parámetros que la viga utilizada en la prueba experimental. El comportamiento del sistema rediseñado difiere del anterior ya que se acortó la longitud del manipulador, por lo que es más rígida y la frecuencia de funcionamiento se incrementa. Como muestra la figura, se obtiene una frecuencia similar en ambos sistemas.

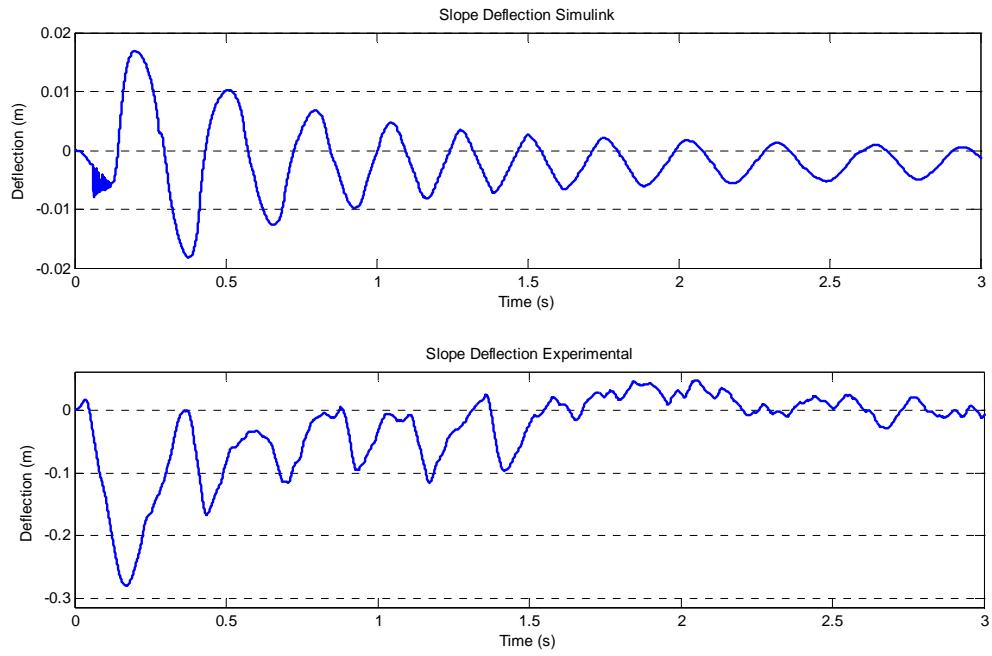


Figura 5.9 Comparación de la deformación estimada por las galgas en la simulación (Gráfica superior) y en el prototipo (Gráfica inferior).

La desviación del extremo final muestra que hay una gran deformación al principio del movimiento, seguido de una oscilación cuando el manipulador flexible alcanza la posición deseada en el eje neutral de la barra.

4.4 Resultados del Sistema Controlado

4.4.1 Inclinación sin Controlador

El sistema de bucle cerrado es un sistema con una retroalimentación del encoder. El error (la diferencia entre la salida y la entrada deseada) se retroalimenta para influir en el funcionamiento. El movimiento angular del manipulador en radianes se muestra en la **Figura 5.10**, y el comportamiento obtenido es similar, pero la respuesta experimental es más lenta. Ambas respuestas tienen una vibración debido a la carga parasitaria producida por el manipulador flexible.

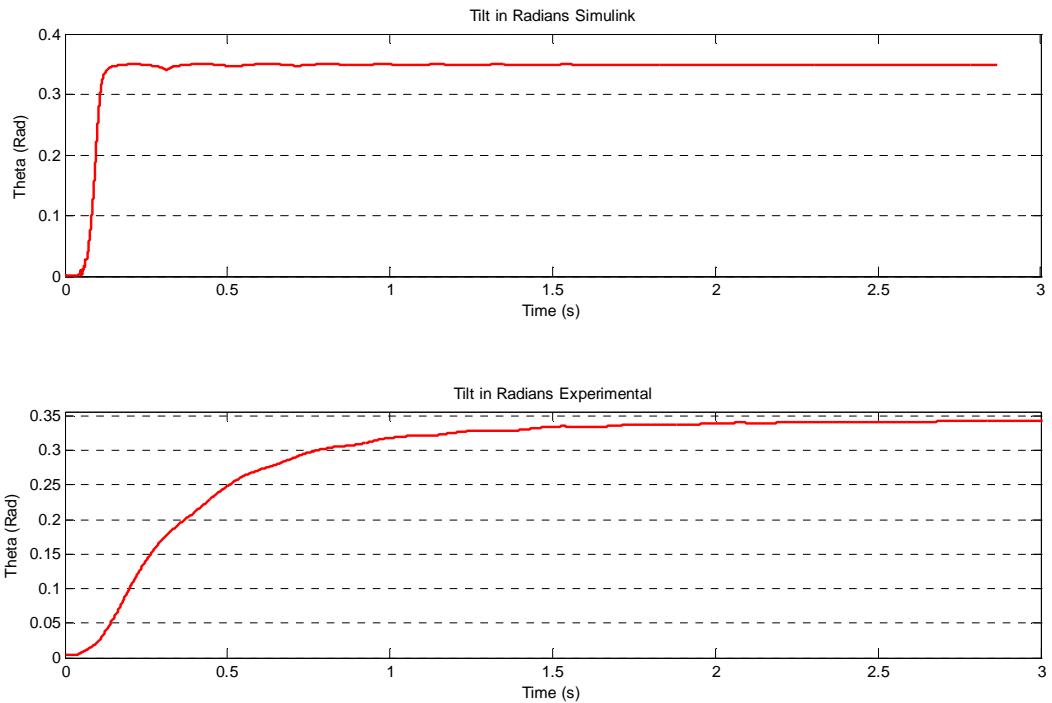
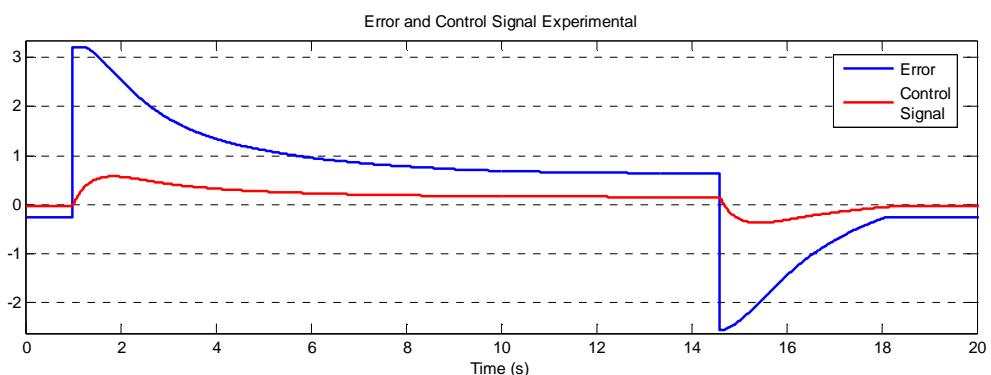


Figura 5.10 Inclinación obtenida sin controlador en simulación (Gráfica superior), y en el prototipo (Gráfica inferior).

4.4.2 Inclinación con Controlador

Con el fin de probar el controlador diseñado anteriormente, el controlador se introduce en el sistema manipulador flexible. El objetivo del controlador es proporcionar un comportamiento suave para llegar a la posición deseada. Esto se lleva a cabo mediante la modificación de la señal de error producida por las señales de realimentación de referencia, como se muestra en la **Figura 5.11**. El controlador proporciona la señal para operar la válvula hidráulica de carrete.



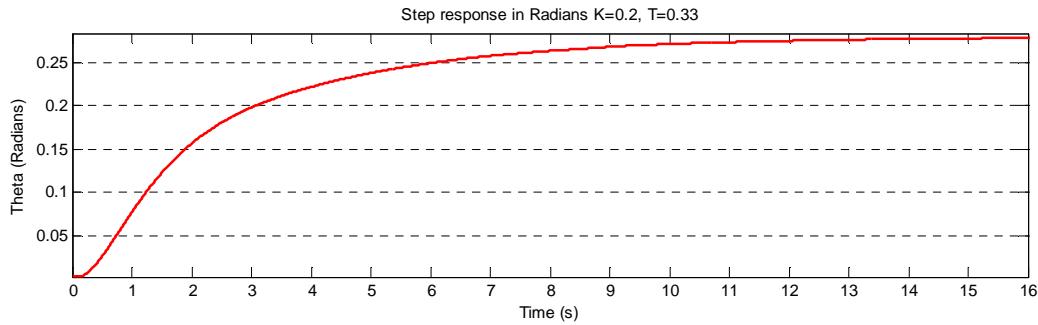


Figura 5.11 Gráficas de entrada y salida del controlador calculado y pendiente obtenida utilizando el controlador.

El comportamiento de la respuesta es lento, como muestra la **Figura 5.11**, de modo que el movimiento suave no hace flexionar el manipulador. Por consiguiente, la salida obtenida es sólo el ruido producido por la cepa galgas mediciones.

Por lo tanto, se cambian algunos parámetros para mostrar la reacción de pendiente producida por la entrada escalón de 20 grados. En la **Figura 5.12**, se puede observar el aumento de la velocidad mediante el aumento del parámetro K del controlador de PT. Con el aumento de la ganancia se obtiene una respuesta rápida, pero se eleva la sobreoscilación.

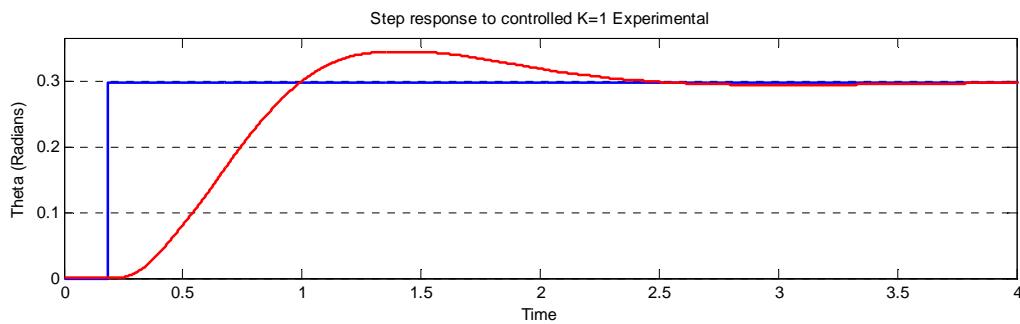


Figura 5.12 Respuesta con controlador de parámetros $K=1$ y $T=0.33$.

En la **Figura 5.13**, se expone la estimación de la deformación en el extremo obtenida con el controlador anterior.

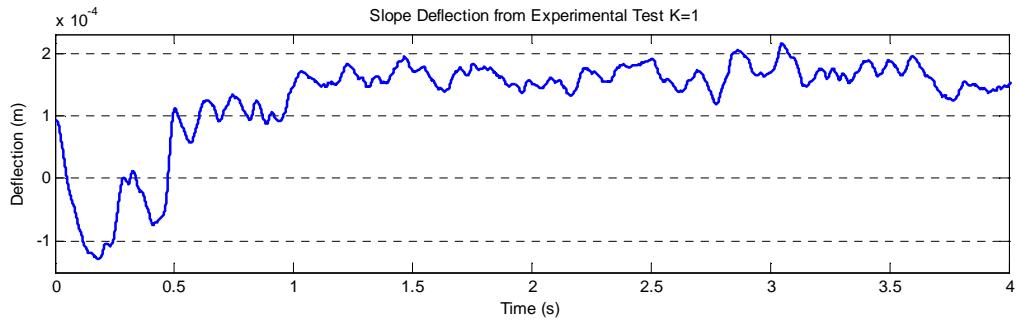


Figura 5.13 Estimación de la desviación con controlador ($K=1$, $T=0.33$).

Hay todavía una gran deformación en el arranque, pero menor que el sistema sin el regulador. También la vibración después del movimiento tiene menos amplitud que la obtenida con el sistema no controlado.

Por lo tanto, el parámetro T se sintoniza para reducir la sobreoscilación ($T=0.2$). A continuación, la respuesta a un escalón aún más rápido y sin sobreoscilación.

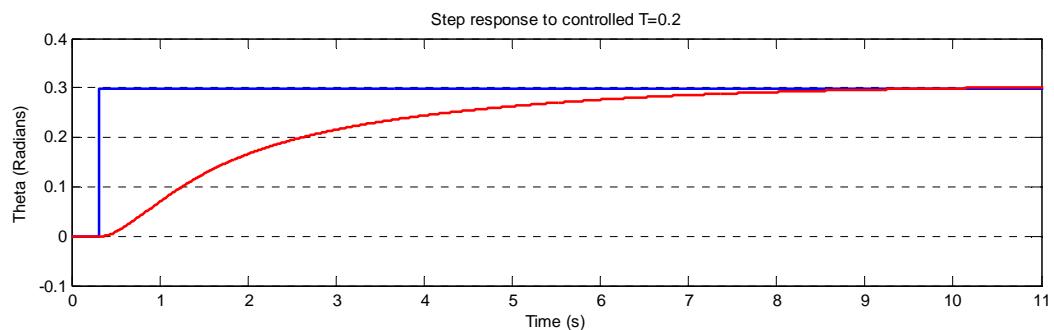


Figura 5.14 Respuesta con controlador de parámetros $K=1$ y $T=0.2$.

5 Conclusiones

En este proyecto, un manipulador flexible se ha diseñado, simulado, estimado y controlado. También, fue construido un prototipo del manipulador para los trabajos experimentales.

Durante el proceso de diseño, se llevó a cabo un análisis paramétrico para investigar cómo la forma y masa del extremo modifican el comportamiento del manipulador flexible. La longitud de la viga y la masa afectan inversamente a la frecuencia. El modelo servo hidráulico tuvo que ser desarrollado al mismo tiempo, debido a que la frecuencia natural del manipulador flexible y la del sistema actuador tuvieron que diferir de algunos órdenes de magnitud para evitar problemas de resonancia.

Además, se ha desarrollado un sistema servo hidráulico adaptado con una realimentación de la posición, que se ocupa de manejar y evitar la resonancia parásita. Esta resonancia parásita es producida por la viga flexible. En teoría, la frecuencia del sistema parásito debería diseñarse lo más alta posible, pero en cambio, la amortiguación global se incrementó, para evitar respuestas indeseadas.

Por lo tanto, sobre las pruebas de simulación, el método cuerpos agrupados presenta un buen comportamiento como un manipulador flexible, tal y como se esperaba durante el diseño. El modelo simulado funciona con la frecuencia y la deformación similar a la calculada en el estudio paramétrico. Gracias al Toolbox SimMechanic MATLAB, el sistema hidráulico y el sistema de medición se pudieron adjuntar a la viga flexible en un mismo modelo.

Durante los trabajos de simulación, se han testado dos sensores y algoritmos de estimación diferentes. El hecho de que las bandas extensométricas no necesitan ningún proceso de integración o filtrado, hace el método más fiable, y además la estimación de la forma del manipulador mediante la ecuación hiperbólica a lo largo de la viga se comporta como una viga flexible. El método de medición acelerómetros en base a la fuerza centrípeta es válida sólo en trayectorias circulares. Por otra parte, la señal de medición es muy ruidosa y necesita ser filtrada, aunque de éste modo, la salida se retrasa. Además, añadiendo un cálculo de cambio de dirección en la velocidad angular se presenta una discontinuidad, por tanto no es un método tan robusto como el de las galgas.

Después de hacer varias configuraciones experimentales de hardware y de software, y de rediseño del modelo de barra flexible en Simulink, finalmente, se puso a prueba el método de estimación mediante bandas extensométricas. Los resultados muestran un comportamiento similar entre los sistemas simulados y experimentales, se obtuvo una frecuencia similar en ambos sistemas. Las señales obtenidas de las galgas extensométricas eran muy ruidosas y tuvieron que ser filtradas bastante bien debido a que afectaba a la estimación de la posición, pero a pesar de eso, el comportamiento de la

barra se estimó correctamente. Desafortunadamente, debido al programa de utilización del laboratorio el método acelerómetros pudo no ser probado.

Como conclusión, la posición final de la estimación de una ecuación hiperbólica con galgas extensométricas es una manera apropiada para estimar la forma de un manipulador flexible, así como los el método de cuerpos agrupados para la simulación de dicha flexibilidad. Esta tecnología se puede aplicar a diferentes formas y diferentes tipos de manipuladores. Por otra parte, se trata de un sistema mecatrónico de bajo coste debido a la ligereza del manipulador y a la simplicidad de los sensores necesarios. Un manipulador ligero siempre necesita un actuador de baja potencia, esto le hace ser más ágil y preciso que cualquier otro tipo de manipulador.

Como trabajos futuros, para un mayor desarrollo de ésta tecnología, se puede incluir el método de estimación de la deformación en el control de la posición, añadiendo una realimentación y calculando el error con la posición del extremo deseada.

6 Referencias

[wikipedia Beronoulli 2013]

http://en.wikipedia.org/wiki/Euler%20%93Bernoulli_beam_theory, Marzo 2013.

[vlab 2013] <http://iitg.vlab.co.in/?sub=62&brch=175&sim=1080&cnt=1>, Marzo 2013.

[Meirovitch, 1967] *Analytical methods in vibrations*, by Leonard Meirovitch, Macmillan, 1967.

[Wachel & Bates 1976] Wachel, J. C., and Bates, C. L., "Techniques for controlling piping vibration failures", ASME Paper, 76-Pet-18, 1976.

[Schiavo, Vigan`o & Ferretti 2006] *Object-oriented modelling of flexible beams* Francesco Schiavo , Luca Vigan`o and Gianni Ferretti. Springer Science, Business Media B.V. 2006.

[wikipedia, Buckling 2013] <http://en.wikipedia.org/wiki/Buckling>, Abril 2013.

[Chudnovsky, Mukherjee, Wendlandt & Kennedy, 2006] *Modeling Flexible Bodies in SimMechanics*, Victor Chudnovsky, Arnav Mukherjee, Jeff Wendlandt and Dallas Kennedy, August 30, 2006.

[Shye & Richardson, 1987] *Mass, Stiffness, and Damping Matrix Estimates from Structural Measurements*, by Ken Shye and Mark Richardson, Structural Measurement Systems, Inc. San Jose, California, April 6, 1987.

[Rydberg 2008] *Hydraulic servo systems* Karl-Erik Rydberg, Linköpings university (2008).

[Mattila 2013] *Modelling of a Servo Hydraulic System notes*, Jouni Mattila.

[Formula Book, 2008] *Formula Book for Hydraulics and Pneumatics*, Department of Management and Engineering Linköping University (2008).

[Jelai & Kroll 2004] *Hydraulic Servo-systems, Modelling, Identification and Control*, Mohieddine Jelai and Andreas Kroll. Springer (2004).

[Korayem, Shafei & Absalan 2012] *Estimate a Flexible Link's Shape by the Use of Strain Gauge Sensors*, M.H. Korayem, A.M. Shafei and F. Absalan, Mechanical Engineer Department , Iran University of Science and Technology, Narmak Tehran (Iran), August 2012.

[Naghshineh, Ameri, Zereshki, Krishnan & Abdoli] *Human Motion capture using Tri-Axial accelerometers*, Sam Naghshineh, Golafsoun Ameri, Mazdak Zereshki and Dr. S. Krishnan, Dr. M. Abdoli-Eramaki.

[Abedi, Nadooshan & Salehi 2008] *Dynamic Modeling of Tow Flexible Link Manipulators*, E. Abedi, A. Ahmadi Nadooshan, and S. Salehi, World Academy of Science, Engineering and Technology 22, 2008

[Kennedy 2009] *Force Control of a Hydraulic Servo System*, A Thesis presented to the Faculty of the Graduate School, University of Missouri, by Joseph L. Kennedy, Dr. Roger Fales, Thesis Supervisor, May 2009.

[Quijano & Passino 2002] *A Tutorial Introduction to Control Systems Development and Implementation with dSPACE*, Nicanor Quijano and Kevin Passino, Dpt. of Electrical Engineering, The Ohio State University, 2002.

Otras Fuentes Consultadas:

[Tokhi & Azad 2008] M.O. Tokhi and A.K.M. Azad. *Flexible Robot Manipulators Modelling, simulation and control*. By The Institution of Engineering and Technology, London, United Kingdom.

[Lurie 1952] Lurie, H., "Lateral vibration as related to structural stability", Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, pp. 195-204, 1952.

[Stokey 2009] *Harri's Shock and Vibration Handbook*, Chapter 7 *Vibration of systems having a distributed mass and elasticity*, by William F. Stokey, Mc Graww Hill Professional 2009.

[Yan & Zhang 2008] *Numerical analysis and control for cantilever flexible beams using PZT patches*, Shi Yan *a, Hao Zhang, School of Civil Engineering, Shenyang Jianzhu University, No.9 Hunnan East Road, Hunnan New District, Shenyang, Liaoning, China110168.

[Jenkins 2001] *Mechanics of Materials Laboratory*, Department of Mechanical Engineering University of Washington. Seattle, Washington. By Michael G. Jenkins, Associate Professor, Mechanical Engineerin, 2001.

[Ueno, Ito, Ma & Ikeo 2005] *Design of Robust Position/Pressure Controller for Cylinder using Hydraulic Transformer*, Tomohiro UENO, Kazuhisa ITO, Weidong MA and Shigeru IKEO. Division of Science and Technology, Graduate school of SOPHIA University. Department of Mechanical Engineering, Faculty of Science and Technology (2005).

[Šulc & Jan 2002] *Non Linear Modelling and Control of Hydraulic Actuators*, Acta Polytechnica Vol. 42 No. 3/2002, by B. Šulc and J. A. Jan.

[Yoshikawa, Ohta & Kanaoka] *State Estimation and Parameter Identification of Flexible Manipulators Based on Visual Sensor and Virtual Joint Model*, Tsuneo YOSHIKAWA, Atsuharu OHTA† and Katsuya KANAOKA, Department of Mechanical Engineering, Kyoto University, Kyoto 606-8501, Japan.

7 Anexos

7.1 Anexo I: Parametric Study

7.1.1 MATLAB Program

```
% % % Parametric Study about frequency in a Cantilever beam
clear all;
clc

Tmax_steel=355e6; % maximun aluminium strain [N/m2]
SC=2; % Security Coeff
Tmax_adm=Tmax_steel/SC
fmax=5;
aux1=0;
aux2=0;

for i=1:1:1000

Mass=50;%i*100/1000;
L=1+3*i/1000;

h=0.08;%+i*(0.1-0.04)/1000;
b=0.06;%i*(0.09-0.01)/1000;
C=h/b;
e=0.004;%i*(0.01-0.001)/1000;
xi_p=b*h^3/12-(b-2*e)*(h-2*e)^3/12;%+Mass*L^2; % height (or
thicknes) of the beam
area_p=h*b-(b-2*e)*(h-2*e);
rho_p=7800; %+i*(7800-2700)/1000;
el_p=210*10^9; % Steel[210 GPa], Al [69GPa]

Indice(i)=L;

M=Mass+0.23*area_p*L*rho_p;

% Frequency
f(i)=sqrt(3*el_p*xi_p/L^3/M)/2/3.141592; % [Hz]

% Max Strain

Tmax(i)=Mass*L*9.8*h/xi_p/2;

if (Tmax(i)>Tmax_adm) && (aux1==0); % First admissible height
h_adm_t=h
aux1=1;
end

if (fmax>f(i)) && (aux2==0); % last admissible height
h_adm_f=h
aux2=1;
end
```

```

if(i==1000 && aux2==0);
    aux2
end

% Max Deflection
delta(i)=Mass*9.8*(L^3)/3/el_p/xi_p;

% Buckling
Fmax_B(i)=3.141592^2*el_p*xi_p/2/L^2;

end

```

```

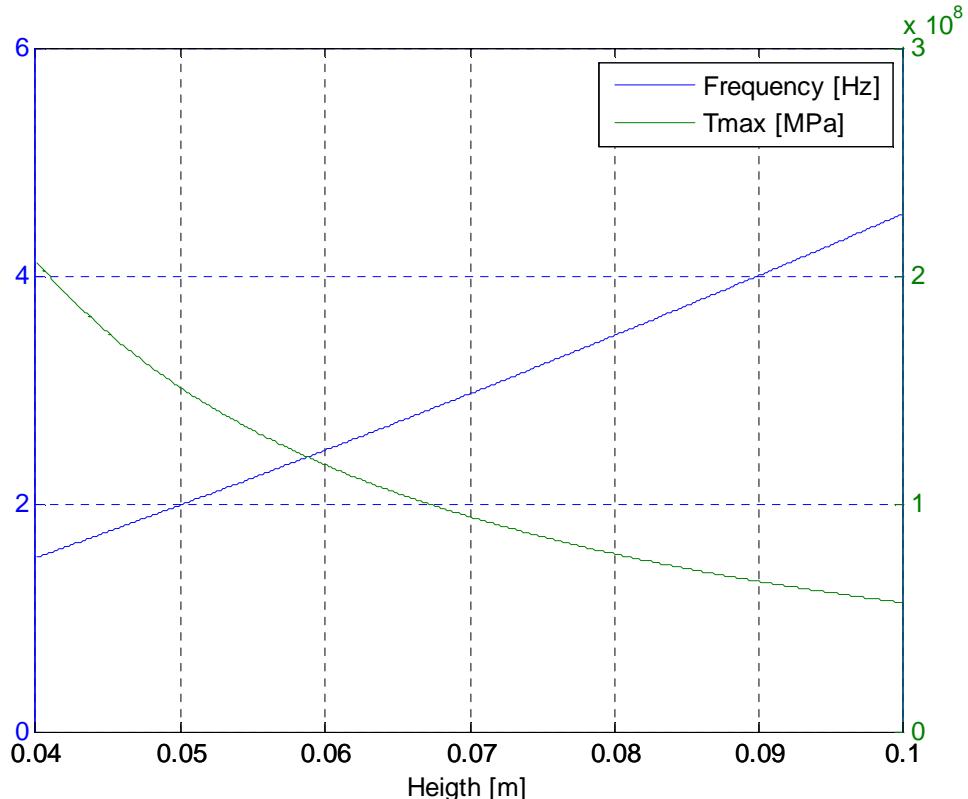
figure
plotyy(Indice,f,Indice,Tmax);
legend('Frequency [Hz]', 'Tmax [MPa]')
xlabel('Length [m]')
grid on

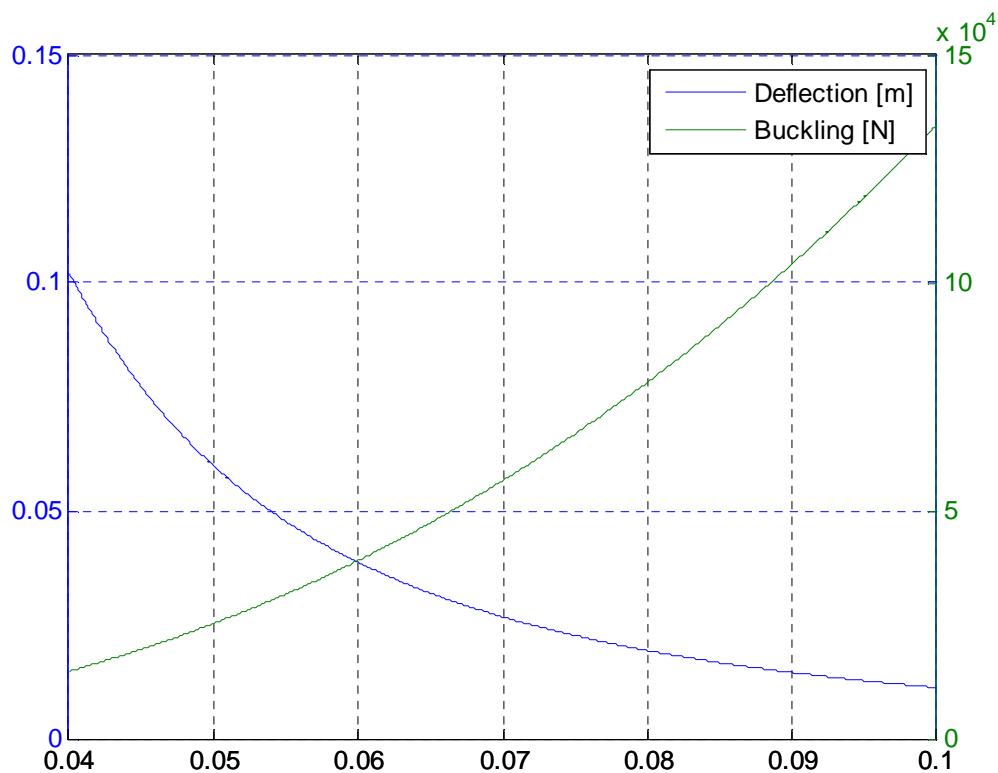
figure
plotyy(Indice,delta,Indice,Fmax_B);
legend('Deflection [m]', 'Buckling [N]')
grid on

```

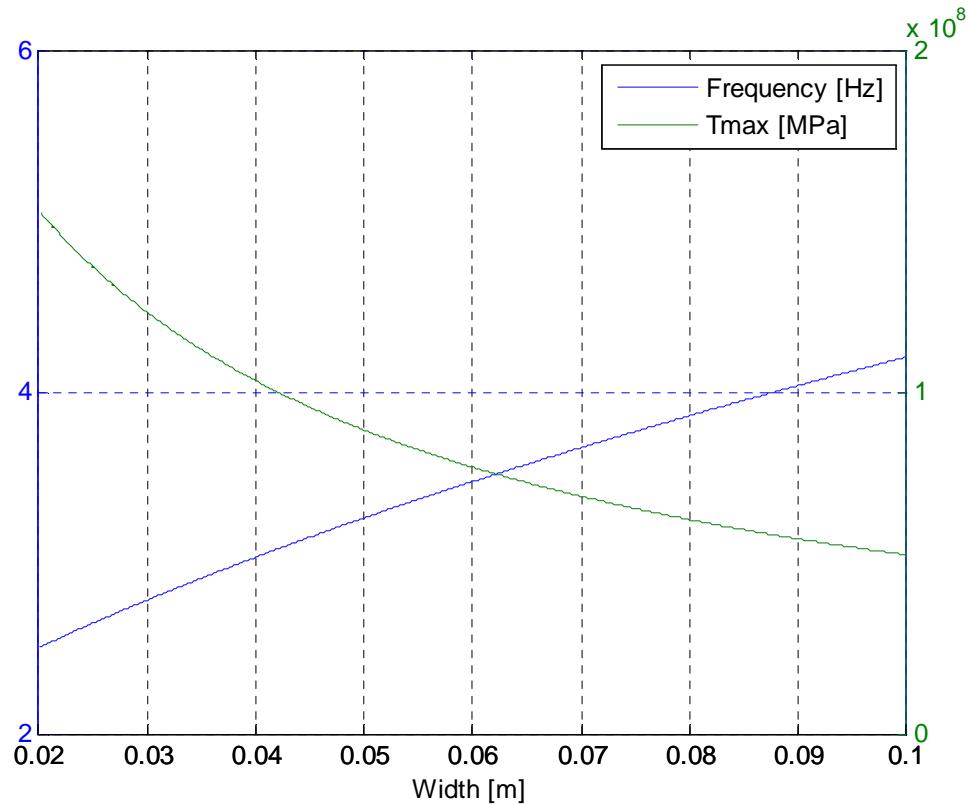
7.1.2 Results

$H=0.08 \text{ m (0.0401\%0.1)}$

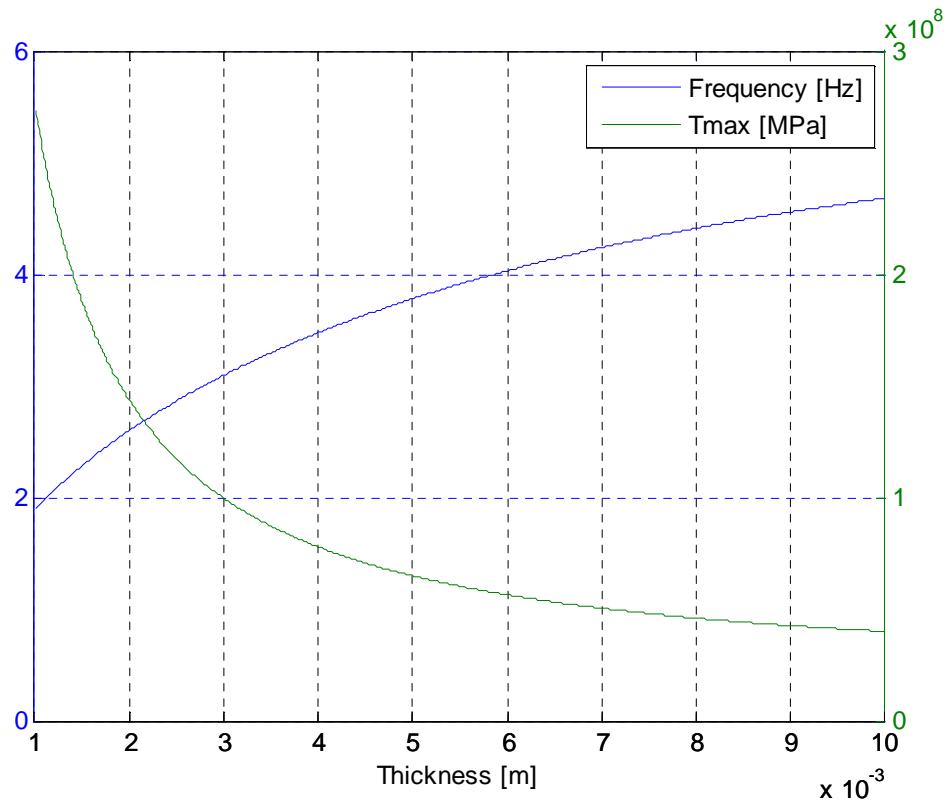




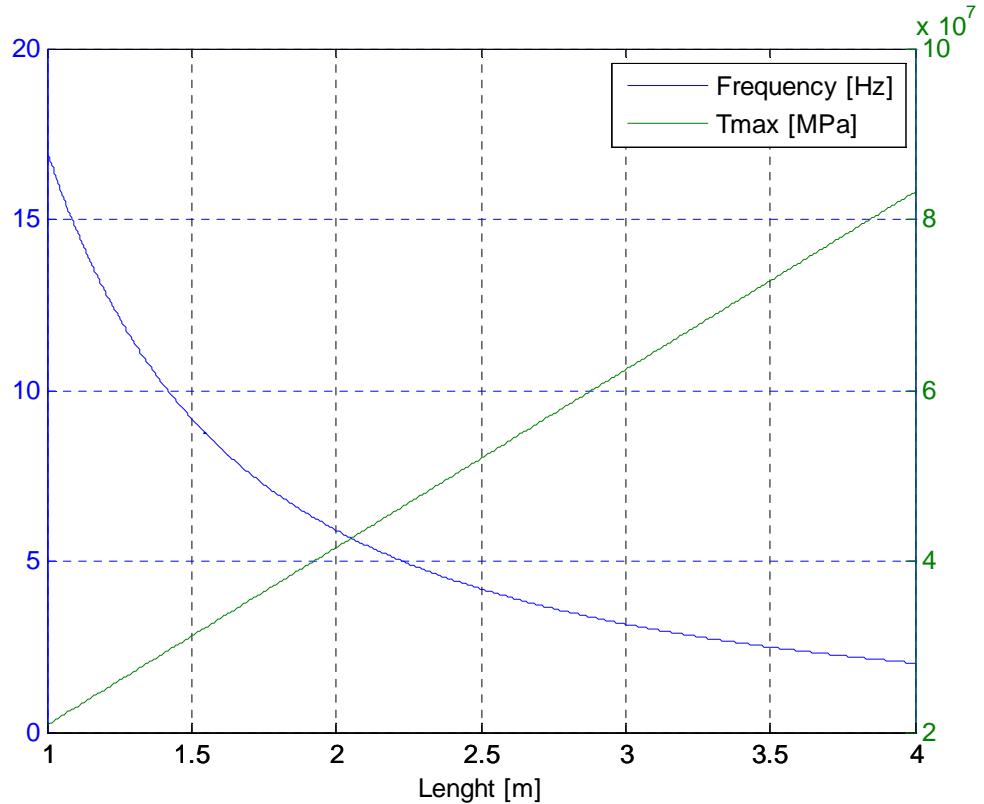
$D=0.05 \rightarrow (0.0101\%0.1)$



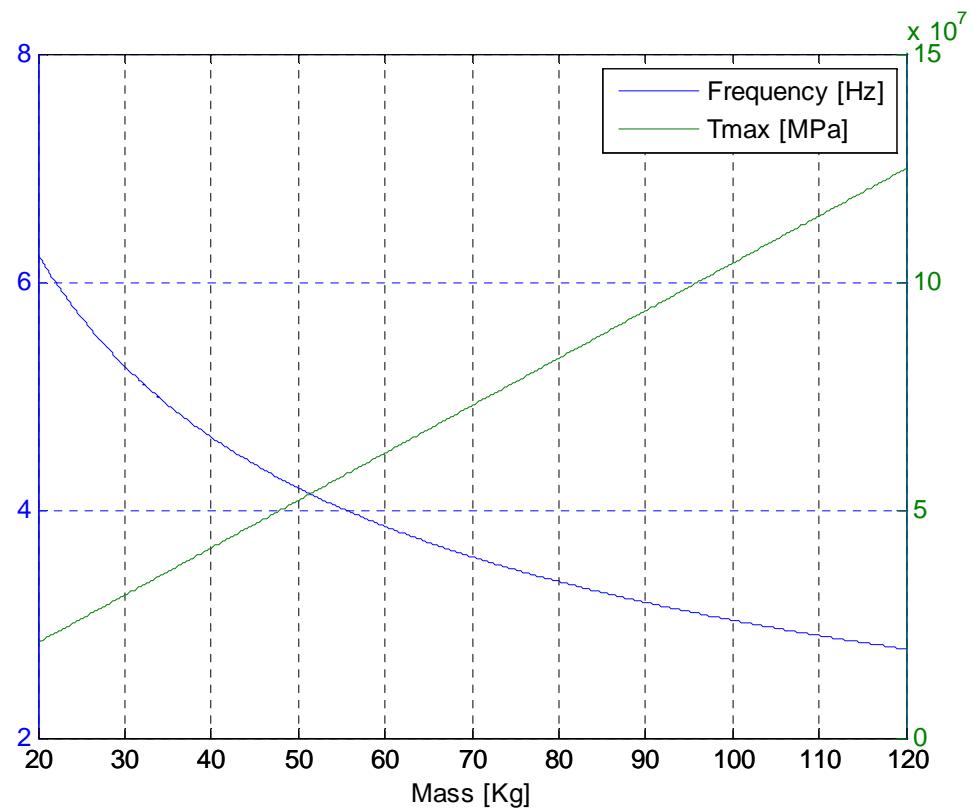
$e=0.004 \text{ m} \rightarrow (0.0014 < e < 0.01)$



$L=2.5 \text{ m}$ (2.2 m, Frequency = 5 Hz)



Mass=50 Kg (32%165)



7.2 Anexo II: Test Bench, Previous Works

7.2.1 Cylinder test bench

Design requirements of the cylinder test bench:

Natural frequency as low as possible
Minimum torque of the joint 1100 Nm
Boom angle range $-20\ldots100^\circ$
Required joint speed 45 deg/s

Joint parameters and the cylinder were selected based on:

Max force on the cylinder is high to obtain low natural frequency
Higher force (and lower natural freq.) requires bigger piston rod (buckling)
Smaller cylinder diameter gives smaller min natural frequency
Stroke is minimized; shorter stroke means shorter torque arm and higher force
When cylinder is at maximum stroke, there is enough space between joint axle and the cylinder
The total length of the cylinder is enough to fit load cell at the end of the piston rod

Joint parameters:

L1 = 170 mm

L2 = 525 mm

$\alpha_1 = 2.5^\circ$

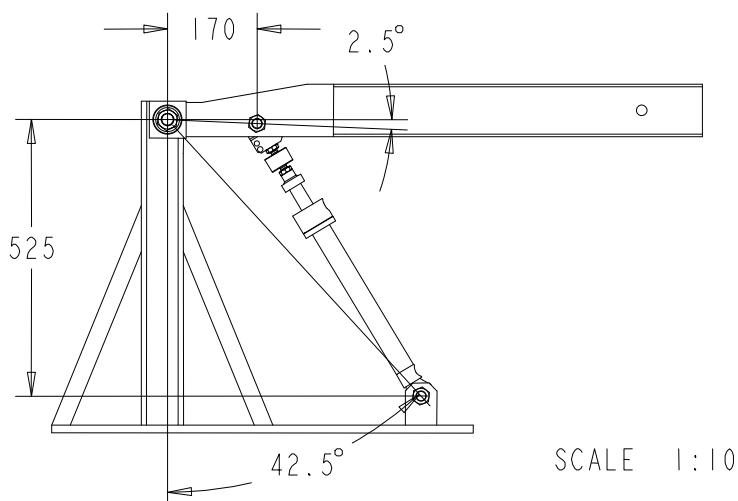
$\alpha_2 = 42.5^\circ$

Boom angle range:

$-20\ldots100^\circ$ from horizontal

Cylinder:

25/32 – 300 mm



Picture 1. Joint parameters

Calculation results

Minimum natural frequency of the joint:	8.8 Hz (Figure 1.)
Maximum force on the cylinder:	11.3 kN (Figure 2.)
Minimum torque arm:	81.1 mm (Figure 3.)
Required flow for 45 deg/s speed:	6.4 l/min (Figure 4.)
Minimum pressure to achieve max force:	177 bar
Maximum force of the cylinder (210bar):	13.5 kN
Torque at cylinder max force and min torque arm:	1100 Nm (Figure 5.)
Cylinder minimum length:	562 mm

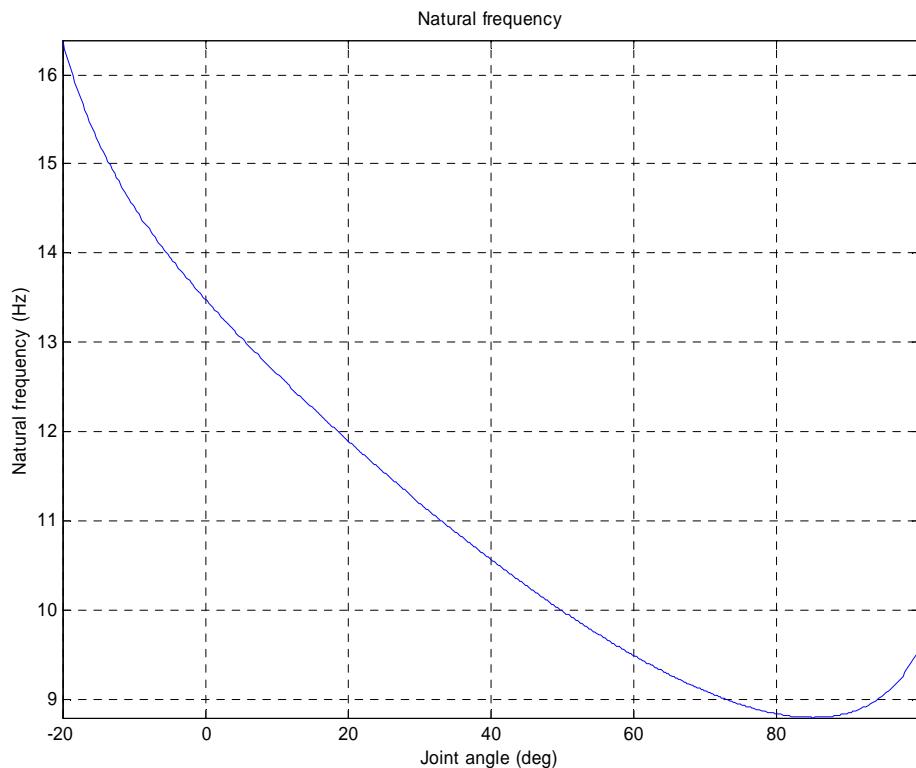


Figure 1. Natural frequency

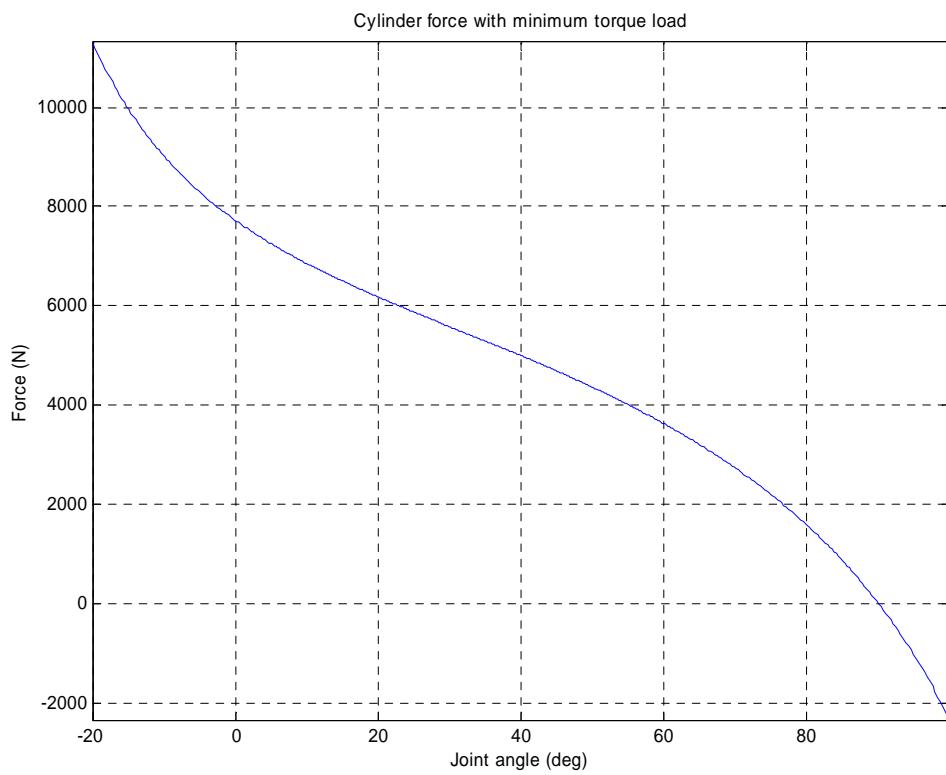


Figure 2. Cylinder force with max torque load at every point

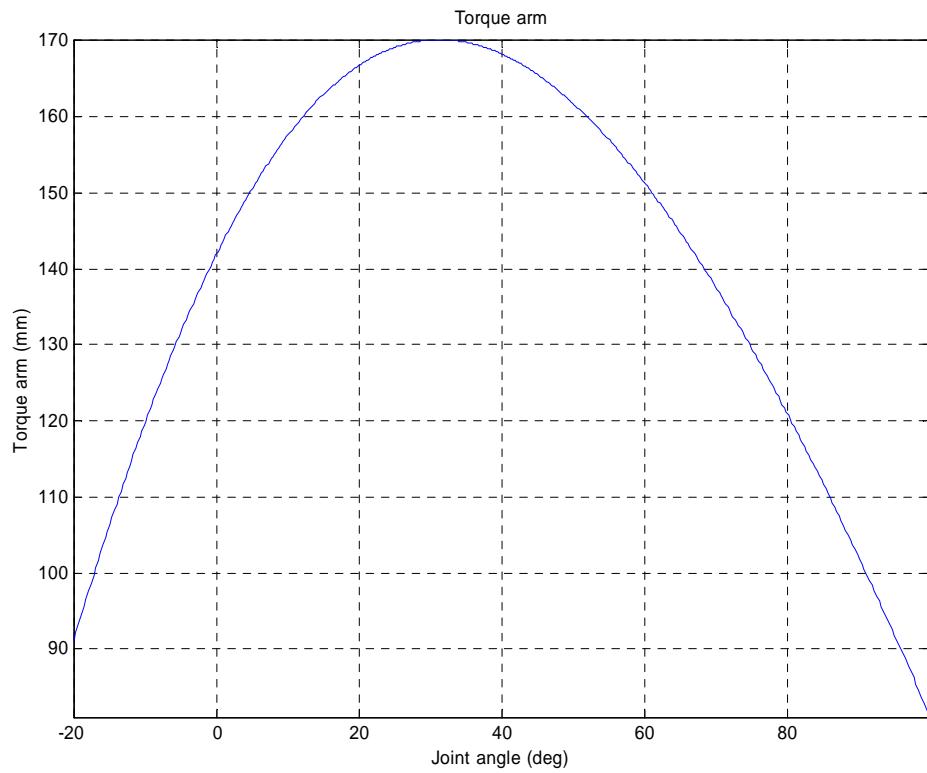


Figure 3. Torque arm

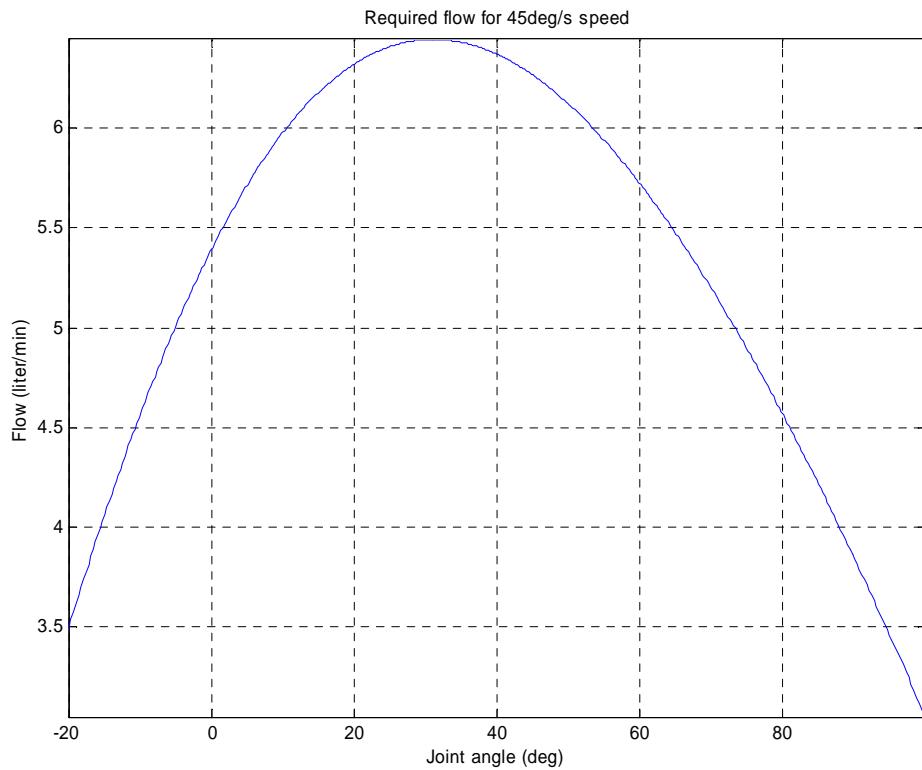


Figure 4. Required flow for 45 deg/s velocity

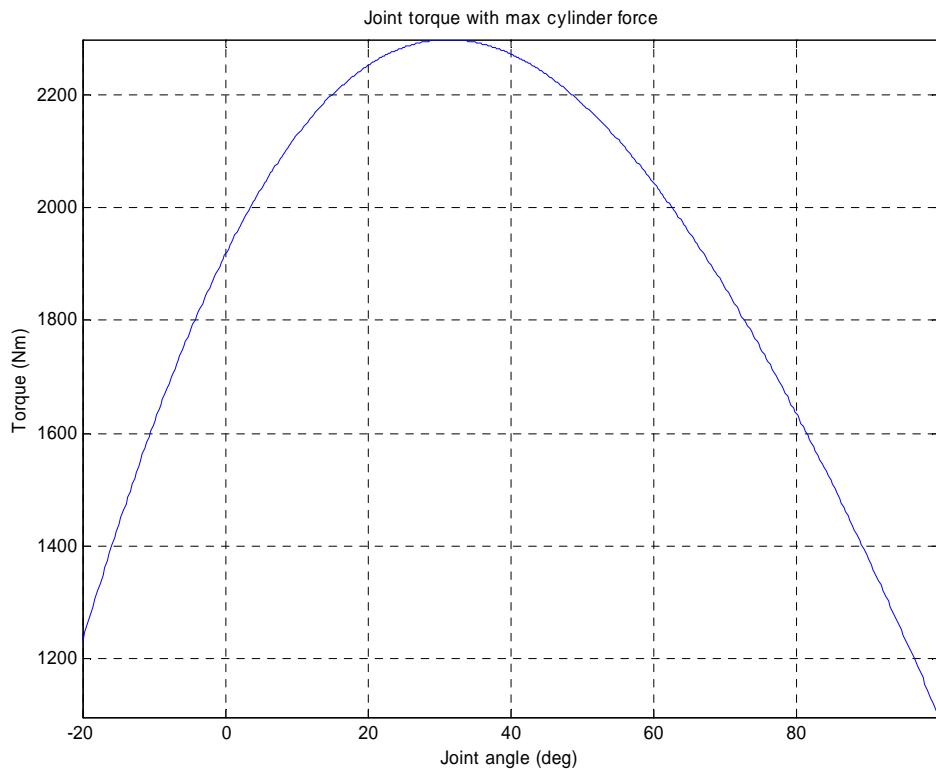


Figure 5. Joint torque with maximum cylinder force

7.2.2 Joint construction

Maximum radial force at the joint: 11.9 kN
Equivalent static bearing load: 5.9 kN

Selected bearing: SKF NU 1006 Cylindrical roller bearing

Inner diameter: 30 mm
Outer diameter: 55 mm
Height: 13 mm
Static load rating: 17.3 kN

Safety factor: 2.9

Safety factor should be higher than 1 for roller bearings.

Safety factor for joint axle: 5.2 (Fe 52)

Required bending strength of the beam material: $1.2 \times 10^4 \text{ mm}^3$

Selected tubular beam: 100x50-5
Bending strength (x-direction): $3.2 \times 10^4 \text{ mm}^3$
Weight: 10.5 kg/m

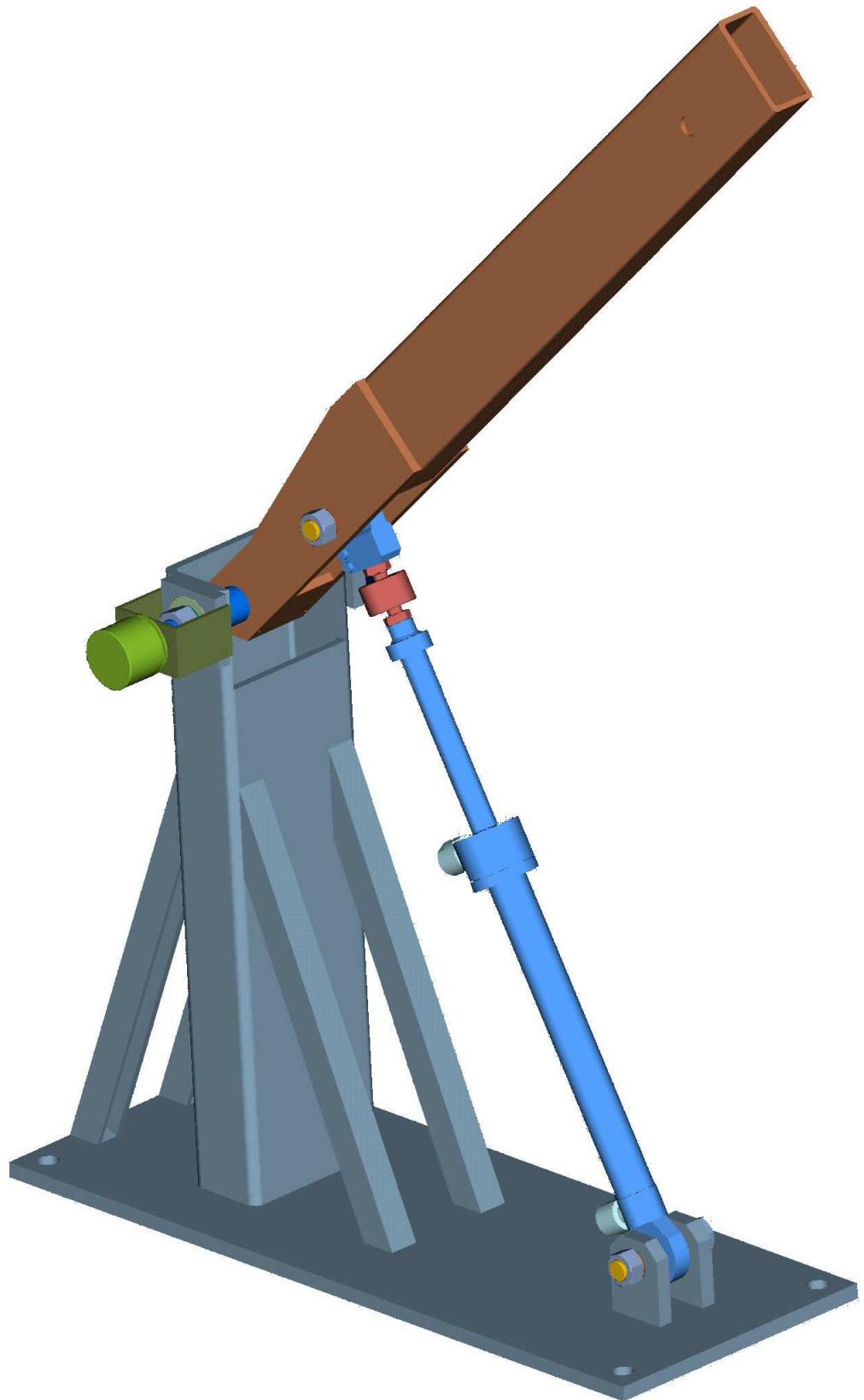
7.2.3 Strength calculations

Safety factor of the boom connection: 3.6

Safety factor of the weakest section between joint axle and cylinder support on the beam: 2.6

Safety factor of the cylinder lower supports: 5.4

Safety factor of the cylinder shafts: 2.0



Sizing of the cylinder

$$l_1 := 170\text{mm}$$

Joint parameters

$$l_2 := 525\text{mm}$$

$$\alpha_1 := 2.5\text{deg}$$

$$\alpha_2 := 42.5\text{deg}$$

$$l_{1_} := \frac{l_1}{\cos(\alpha_1)}$$

Lengths of hypotenuses

$$l_{1_} = 170.162\text{mm}$$

$$l_{2_} := \frac{l_2}{\cos(\alpha_2)}$$

$$l_{2_} = 712.0794\text{mm}$$

Cylinder torque arm when boom is inclined -20deg from horizontal

$$\alpha_B := -20\text{deg}$$

Angle of boom to horizontal

$$st := \sqrt{\left(l_1 + \frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \cdot \sin(\alpha_B - \alpha_2) \right)^2 + \left[\left[\left(\frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \right) \cdot \cos(\alpha_B - \alpha_2) - l_1 \cdot \tan(\alpha_1) \right] \right]^2}$$

$$d := l_{2_} \cdot \cos \left[90\text{deg} - \left(\arccos \left(\frac{l_{1_}^2 - l_{2_}^2 - st^2}{2 \cdot st \cdot l_{2_}} \right) \right) \right]$$

$$d = 91.0405\text{mm}$$

Cylinder minimum and maximum lengths

$$cyl_min := \sqrt{\left(l_1 + \frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \cdot \sin(-20\text{deg} - \alpha_2) \right)^2 + \left[\left[\left(\frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \right) \cdot \cos(-20\text{deg} - \alpha_2) - l_1 \cdot \tan(\alpha_1) \right] \right]^2}$$

$$cyl_min = 562.4764\text{mm}$$

$$cyl_max := \sqrt{\left(l_1 + \frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \cdot \sin(100\text{deg} - \alpha_2) \right)^2 + \left[\left[\left(\frac{l_2}{\cos(\alpha_2)} \right) \cdot \cos(100\text{deg} - \alpha_2) - l_1 \cdot \tan(\alpha_1) \right] \right]^2}$$

$$cyl_max = 857.0435\text{mm}$$

Maximum force exerted on the cylinder

$$T_{max} := 1100\text{N}\text{m}$$

$$F_{max} := \frac{T_{max}}{d} \cdot \cos(-20\text{deg})$$

Force on the cylinder, boom -20deg from horizontal

$$F_{max} = 11.353\text{kN}$$

The minimum diameter of the cylinder

$$p_{ref} := 210\text{bar}$$

$$\eta_m := 0.8$$

Mechanical efficiency of the cylinder

$$r := \sqrt{\frac{F_{max}}{\pi \cdot p_{ref} \cdot \eta_m}}$$

$$r = 14.667\text{mm}$$

$$D_c := 2 \cdot r$$

$$D_c = 29.334 \text{ mm}$$

The minimum diameter of piston rod

$$n := 4$$

Safety factor

$$E := 19300000000 \text{ Pa}$$

Modulus of elasticity (AISI 316)

$$L_c := cyl_max$$

Length of the cylinder

$$d_r := \sqrt{\frac{(F_{max} \cdot n \cdot L_c)^2 \cdot 64}{\pi^3 \cdot E}}$$

$$d_r = 24.4397 \text{ mm}$$

Proposed cylinder:

$$d_R := 25 \text{ mm}$$

$$D_C := 32 \text{ mm}$$

Maximum allowed force of the cylinder for buckling

$$F_{bmax} := \frac{\pi^3 \cdot E \cdot d_R^4}{n \cdot 64 \cdot L_c^2}$$

$$F_{bmax} = 12.4314 \text{ kN}$$

Minimum pressure to achieve necessary force F_s

$$p_{min} := \frac{F_{max}^4}{(D_C^2 \cdot \pi) \cdot \eta m}$$

Piston side of the cylinder considered

$$p_{min} = 176.5 \text{ bar}$$

$$F_{minus} := p_{ref} \cdot \left[\left(\frac{D_C}{2} \right)^2 - \left(\frac{d_R}{2} \right)^2 \right] \cdot \pi \cdot \eta m$$

$$F_{minus} = 5.2647 \text{ kN}$$

Maximum force on rod side

$$F_{plus} := p_{ref} \cdot \left[\left(\frac{D_C}{2} \right)^2 \cdot \pi \right] \cdot \eta m$$

$$F_{plus} = 13.5114 \text{ kN}$$

Maximum force of the cylinder

Minimum torque of the joint with maximum cyl force

$$d_{min} := 81.1 \text{ mm}$$

Min torque arm from Matlab

$$T_{min} := F_{plus} \cdot d_{min}$$

$$T_{min} = 1095.7714 \text{ Nm}$$

Required flow for 45deg/s speed

$$\Delta\alpha_{\min} := 0.3367\text{deg}$$

Minimum change in angle when cylinder moves 1mm (from Matlab)

$$v := \frac{45 \frac{\text{deg}}{\text{s}}}{\Delta\alpha_{\min}} \cdot 1\text{mm}$$

$$v = 133.6501 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$$

$$A_1 := \pi \left(\frac{D_C}{2} \right)^2$$

Cylinder area

$$A_1 = 0.0008\text{m}^2$$

$$Q := v \cdot A_1$$

Required flow to achieve 45deg/s speed

$$Q = 6.4493 \frac{\text{liter}}{\text{min}}$$

Minimum natural frequency of the cylinder (stroke value from Matlab)

$$A_2 := A_1 - \pi \cdot \left(\frac{d_R}{2} \right)^2$$

$$A_2 = 0.0003\text{m}^2$$

$$L_s := \text{cyl_max} - \text{cyl_min}$$

Stroke of the cylinder

$$L_s = 294.567\text{mm}$$

$$y := 269.23\text{mm}$$

Stroke at min wn, from Matlab

$$B_s := 2.3 \cdot 10^9 \text{Pa}$$

Estimated compression modulus

$$V_{10} := A_1 L_s \cdot 0.05$$

Dead volumes 5% of cyl volumes

$$V_{20} := A_2 L_s \cdot 0.05$$

$$K_h := \frac{A_1^2 \cdot B_s}{y \cdot A_1 + V_{10}} + \frac{A_2^2 \cdot B_s}{(L_s - y) \cdot A_2 + V_{20}}$$

Linear hydraulic stiffness

$$K_h = 24503779.199 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$d_k := 111.62\text{mm}$$

Torque arm at min wn, from Matlab

$$k := d_k^2 \cdot K_h$$

Torsional stiffness of the arm

$$k = 305293.1829\text{N}\cdot\text{m}$$

$$I := 100 \text{kg} \cdot 1\text{m}^2$$

$$\omega_n := \sqrt{\frac{k}{I}}$$

$$\omega_n = 55.2533 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\frac{\omega_n}{2\pi} = 8.7938 \text{Hz}$$

Minimum natural frequency

7.2.4 Joint bearings

Calculations of the bearings are based on: SKF General catalogue, 1989

$$F_{\text{smax}} := 13.5 \text{kN}$$

Max force of the cylinder (210bar)

$$d_m := 141.9 \text{mm}$$

Torque arm when boom horizontal

$$M := F_{\text{smax}} \cdot d_m$$

Torque of the horizontal boom

$$M = 1.916 \times 10^3 \text{ Nm}$$

$$L_1 := 900 \text{mm}$$

Distance from joint to load

$$L_2 := 730 \text{mm}$$

Distance from cylinder attachment point to load

$$L_3 := 170 \text{mm}$$

Distance from joint to cylinder attachment point

$$F_{Gy} := \frac{M}{L_1}$$

Force of the load

$$F_{Gy} = 2.128 \text{kN}$$

$$\alpha := 34.07 \text{deg}$$

Cylinder angle (joint horizontal)

$$F_{ry} := \frac{F_{Gy} \cdot L_2}{L_3}$$

$$F_{ry} = 9.14 \text{kN}$$

$$F_{rx} := F_{\text{smax}} \cdot \sin(\alpha)$$

$$F_r := \sqrt{F_{rx}^2 + F_{ry}^2}$$

$$F_r = 11.863 \text{kN}$$

Radial force at the joint

Due to slow operating speed of the bearing, only static forces are taken into account.

$$P_0 := \frac{F_r}{2}$$

Equivalent static bearing load, two bearings

Selected bearing: SKF NU 1006 Cylindrical roller bearing

$$d := 30 \text{mm}$$

Inner diameter

$$D := 55 \text{mm}$$

Outer diameter

$$h := 13 \text{mm}$$

Height

$$C_0 := 17.3 \text{kN}$$

Static load rating

$$s_0 := \frac{C_0}{P_0}$$

Static safety factor

$$s_0 = 2.917$$

Safety factor should be higher than 1 for roller bearings

Shaft tolerance j6 (+9 -4)um

Housing tolerance M7 (-21 0)um

Friction torque of the bearing

$$\mu := 0.0011$$

$$\nu := 100$$

$$d_m := \frac{D + d}{2 \cdot \text{mm}}$$

$$f_0 := 0.6$$

$$n := 7.5$$

$$\nu \cdot n = 750$$

$$M_0 := 160 \cdot 10^{-7} \cdot f_0 \cdot d_m^3 \cdot N \cdot \text{mmr}$$

$$M_0 = 7.369 \times 10^{-4} \text{ Nmmr}$$

$$f_1 := 0.0001$$

$$P_1 := F_r \cdot \frac{1}{N}$$

$$P_1 = 1.186 \times 10^4$$

$$a := 1$$

$$b := 1$$

$$M := f_1 \cdot P_1^a \cdot d_m^b \cdot N \cdot \text{mmr}$$

$$M = 0.101 \text{ Nmmr}$$

$$M := 2 \cdot M$$

Starting torque can be two times higher than running torque.

$$M = 0.202 \text{ Nmmr}$$

Minimum load

$$k_T := 100$$

$$F_{rm} := k_T \left(6 + \frac{4 \cdot n}{18000} \right) \cdot \left(\frac{d_m}{100} \right)^2$$

$$F_{rm} = 108.405$$

Minimum load of the bearing (N)

Calculation of the joint shaft

Bending stress

$$F_{r2} := \frac{F_r}{2}$$

Two bearings taking the radial force

$$M_b := F_{r2} \cdot h$$

$$M_b = 0.077 \text{kNm}$$

$$d := 30 \text{ mm}$$

Diameter of the shaft

$$I := \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

$$I = 39761 \text{ mm}^4$$

$$e := 0.5d$$

$$e = 15 \text{ mm}$$

$$\sigma_b := \frac{M_b \cdot e}{I}$$

Bending stress in shaft

$$\sigma_b = 29.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$A_\tau = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$\tau := \frac{F_r}{A_\tau}$$

$$\tau = 16.8 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

Comparable stress

$$\sigma_v = 41.1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$\sigma_{all} := 0.67320 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Yield point of the shaft material (Fe 52) = 320 N/mm²

$$\sigma_{all} = 214.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Allowed bending stress of the material

$$n := \frac{\sigma_{all}}{\sigma_v}$$

$$n = 5.21$$

Safety factor

Beam sizing

$$R_e := 235 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Yield point of beam material (S235JR)

$$n := 1.5$$

Safety factor

$$\sigma_{all} := \frac{R_e}{n}$$

Allowed bending stress

$$\sigma_{all} = 156.667 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

$$W := \frac{M}{\sigma_{all}}$$

Required bending strength of the material

$$W = 1.223 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

Selected beam:

$$W_1 := 3.164 \times 10^4 \text{ mm}^3$$

100x50-5: 10,48kg/m (Wx)

Beam strength calculations

Strength of the boom connection

$$F_B := \frac{M}{L_1}$$

Force at 900mm from joint

$$F_B = 2.128 \text{ kN}$$

$$M_B := F_B \cdot 635 \text{ mm}$$

Torque at the boom connection

$$M_B = 1.352 \times 10^3 \text{ Nm}$$

$$h_B := 100 \text{ mm}$$

Height of the beam

$$w_B := 50 \text{ mm}$$

Width of the beam

$$h_{B_in} := 90 \text{ mm}$$

Inner height

$$w_{B_in} := 40 \text{ mm}$$

Inner width

$$I_x := 158.19 \times 10^4 \text{ mm}^4$$

Square moment of the beam
(Koneenrakentajan taulukkokirja)

Bending stress

$$e := \frac{h_B}{2}$$

$$\sigma := \frac{M_B \cdot e}{I_x}$$

$$\sigma = 42.721 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Shear stress

$$A_B := 13.36 \times 10^2 \text{ mm}^2$$

Cross area of the beam

(Koneenrakentajan taulukkokirja)

$$\tau := \frac{F_B}{A_B}$$

$$\tau = 1.593 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Comparable stress

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_v = 42.81 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{all} := \frac{2}{3} \cdot 235 \frac{N}{mm^2}$$

Allowed stress (0.67*yield point)

Yield point from Koneenrakentajan taulukkokirja

$$\sigma_{all} = 156.667 \frac{N}{mm^2}$$

$$s := \frac{\sigma_{all}}{\sigma_v}$$

$$s = 3.66$$

Weakest point between the joint axle and the cylinder attachment point

$$M_w := \frac{L_2 \cdot \frac{L_3}{2} \cdot F_B}{L_3}$$

Calculation point is the middle point between joint axle and cyl attachment axle

$$M_w = 776.903 Nm$$

$$h_w := 65 mm$$

Height

$$w_w := 2.10 mm$$

Width (2 parallel sheets)

$$I_w := \frac{1}{12} \cdot w_w \cdot h_w^3$$

$$I_w = 4.577 \times 10^5 mm^4$$

Bending stress

$$e := \frac{h_w}{2}$$

$$\sigma := \frac{M_w \cdot e}{I_w}$$

$$\sigma = 55.165 \frac{N}{mm^2}$$

Shear stress

$$A_w := h_w \cdot w_w$$

$$\tau := \frac{F_r}{A_w}$$

$$\tau = 9.126 \frac{N}{mm^2}$$

Comparable stress

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

$$\sigma_v = 57.384 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{all} := \frac{2}{3} \cdot 220 \frac{N}{mm^2}$$

Allowed stress (0.67*yield point) Fe37?

$$\sigma_{all} = 146.667 \frac{N}{mm^2}$$

$$s := \frac{\sigma_{all}}{\sigma_v}$$

$$s = 2.556$$

Cylinder lower supports

$$F_{max} := F_{smax} \cos(51.3\text{deg})$$

Max force at 100deg (cylinder angle 51.3deg)

$$F_{max} = 8.441 \text{kN}$$

$$l := 55 \text{mm}$$

Length from cyl support axle to the attachment plane

$$M_s := F_{max} l$$

$$M_s = 464.243 \text{Nm}$$

$$h_s := 60 \text{mm}$$

Height

$$w_s := 2 \cdot 15 \text{mm}$$

Width (2 parallel sheets)

$$I_s := \frac{1}{12} \cdot w_s \cdot h_s^3$$

$$I_s = 5.4 \times 10^5 \text{mm}^4$$

Bending stress

$$e := \frac{h_s}{2}$$

$$\sigma := \frac{M_s \cdot e}{I_s}$$

$$\sigma = 25.791 \frac{N}{mm^2}$$

Shear stress

$$A_s := h_s \cdot w_s$$

$$\tau := \frac{F_{max}}{A_s}$$

$$\tau = 4.689 \frac{N}{mm^2}$$

Comparable stress

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

$$\sigma_v = 27.04 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{all} := \frac{2}{3} \cdot 220 \frac{N}{mm^2}$$

Allowed stress (0.67*yield point) Fe37?

$$\sigma_{all} = 146.667 \frac{N}{mm^2}$$

$$s := \frac{\sigma_{all}}{\sigma_v}$$

$$s = 5.424$$

Cylinder shafts

Bending stress

$$F_{r2} := \frac{F_{smax}}{2}$$

Two sides taking the radial force

$$M_b := F_{r2} \cdot 10mm$$

Width of the side wall

$$M_b = 0.068kNmm$$

$$d := 20mm$$

Diameter of the shaft

$$I := \frac{\pi}{64} \cdot d^4$$

$$I = 7854mm^4$$

$$e := 0.5d$$

$$e = 10mm$$

$$\sigma_b := \frac{M_b \cdot e}{I}$$

Bending stress in shaft

$$\sigma_b = 85.9 \frac{N}{mm^2}$$

$$A_\tau = \frac{\pi}{4} \cdot d^2$$

$$\tau := \frac{F_r}{A_\tau}$$

$$\tau = 37.8 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_v := \sqrt{\sigma_b^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

Comparable stress

$$\sigma_v = 108 \frac{N}{mm^2}$$

$$\sigma_{all} := 0.67320 \frac{N}{mm^2}$$

Yield point of the shaft material (Fe 52) = 320N/mm²

$$\sigma_{\text{all}} = 214.4 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Allowed bending stress of the material

$$n := \frac{\sigma_{\text{all}}}{\sigma_y}$$

$$n = 1.99$$

Safety factor

7.3 Anexo III: SimMechanics Model

SimMechanics

Model based on the Lumped-Parameter Method which discretizes the beam length in n beam elements. Each element is a body joint body combination:

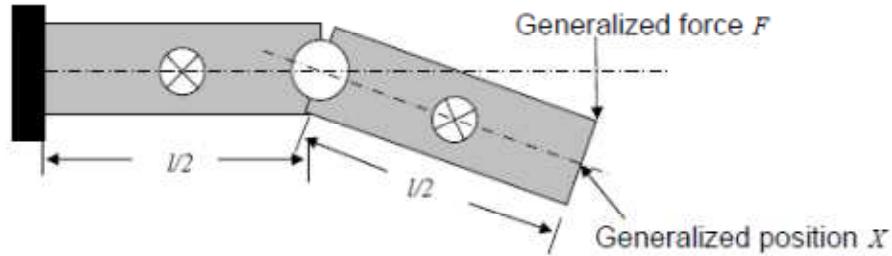


Figure 5

Also Spring and Damper parameters are added to the joint.

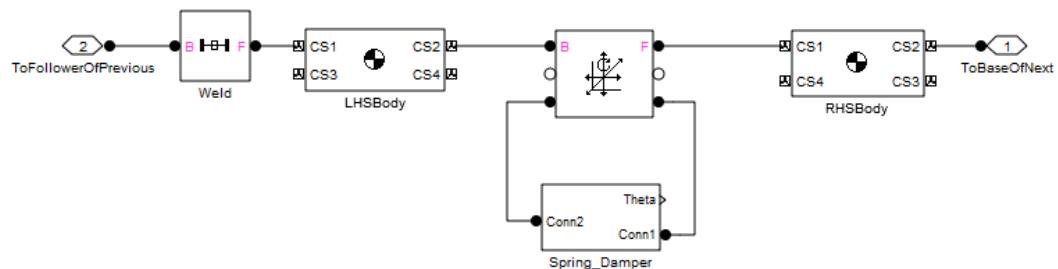


Figure 6

Spring-Damper

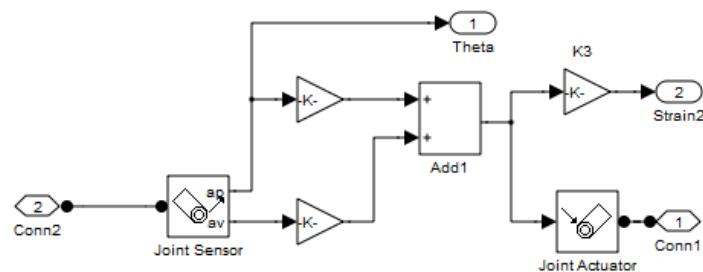


Figure 7

The normalized moment equation:

$$\ddot{\theta}n + 2\xi\omega_o\dot{\theta}n + \omega_o^2\theta n = External\ Moments$$

Where $\omega_o^2 = k/I$ and I is the moment of inertia. The damping coefficient $2\xi\omega_o$ is a quasi-empirical value that accounts for energy lost to visco-elastic effects.

In SimMechanics, the relative angle θ_n and joint velocity $\dot{\theta}_n$ are measured at the joint using a Joint Sensor block. Then k is multiplied by the angle, and a material damping coefficient $2\xi\omega_0$ is multiplied by the angular velocity (**Figure 7**). The two resulting moments are added and applied back to the joint using a joint actuator.

Entire Model

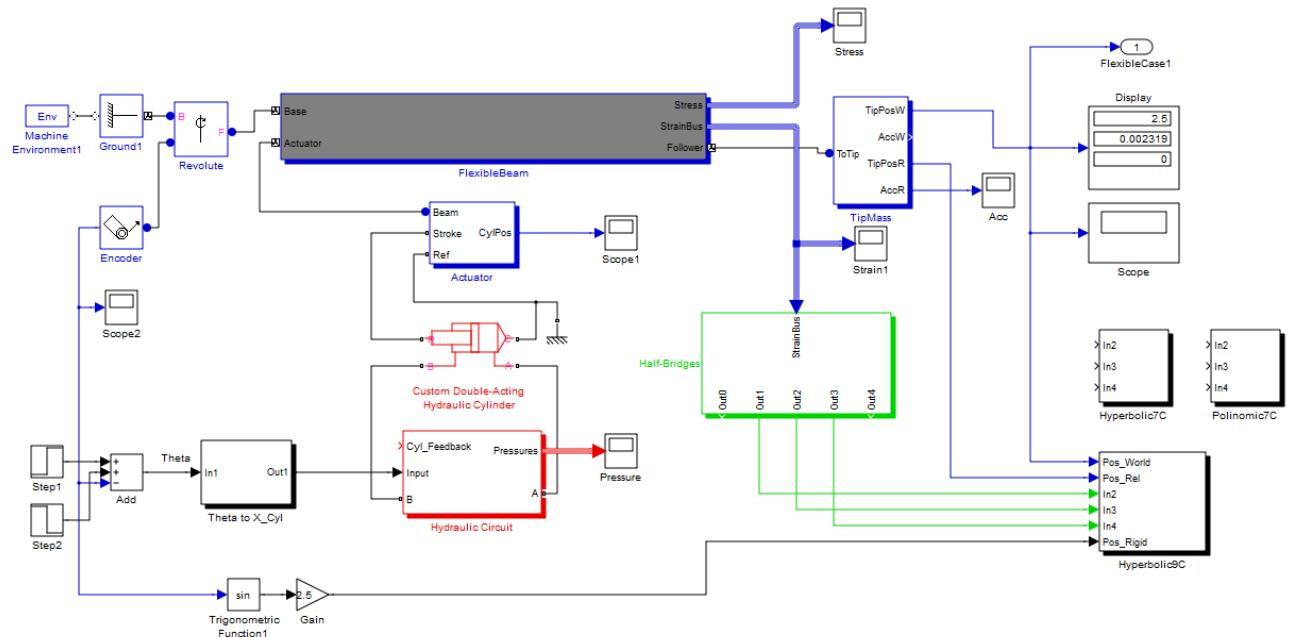


Figure 8

Global view of the entire simulation model, where there are some blocks in different colors (**Figure 8**).

The black one is just a simulink block where the trigonometric operations are done to adapt the input (theta) to the hydraulic circuit input (stroke displacement).

The red one is the Hydraulic circuit block, developed using simHydraulic components, it will be explained later.

The blue blocks are the mechanical part of the system composed by simMechanics bodies and joints. The actuator block has been done to connect the cylinder to the beam,

which is composed by two bodies, one attached to the beam and the other to the ground according to the new test bench. These bodies are connected to each other by a prismatic joint (**Figure 9**).

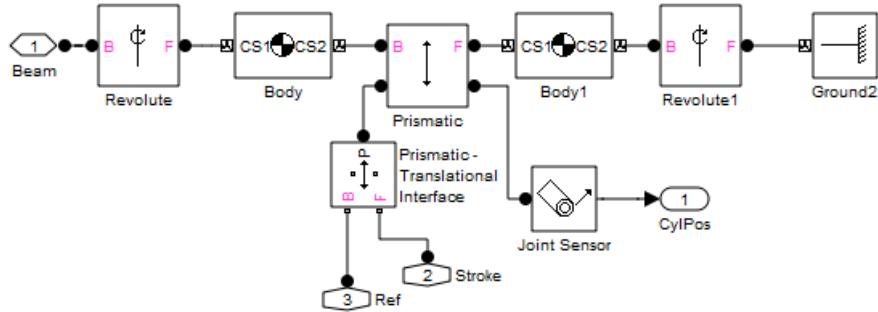


Figure 9

In the flexible beam block, the flexible manipulator is simulated by the lumped bodies shown previously. The beam is connected to the actuator and the ground by single rotational joints, according to the test bench.

The first body, which is located between the two joints (actuator and ground), is rigid and not lumped as the followers. All bodies have similar properties to the proposed flexible beam, as inertia, young modulus, shape, density and bending moment.

Hydraulic Circuit

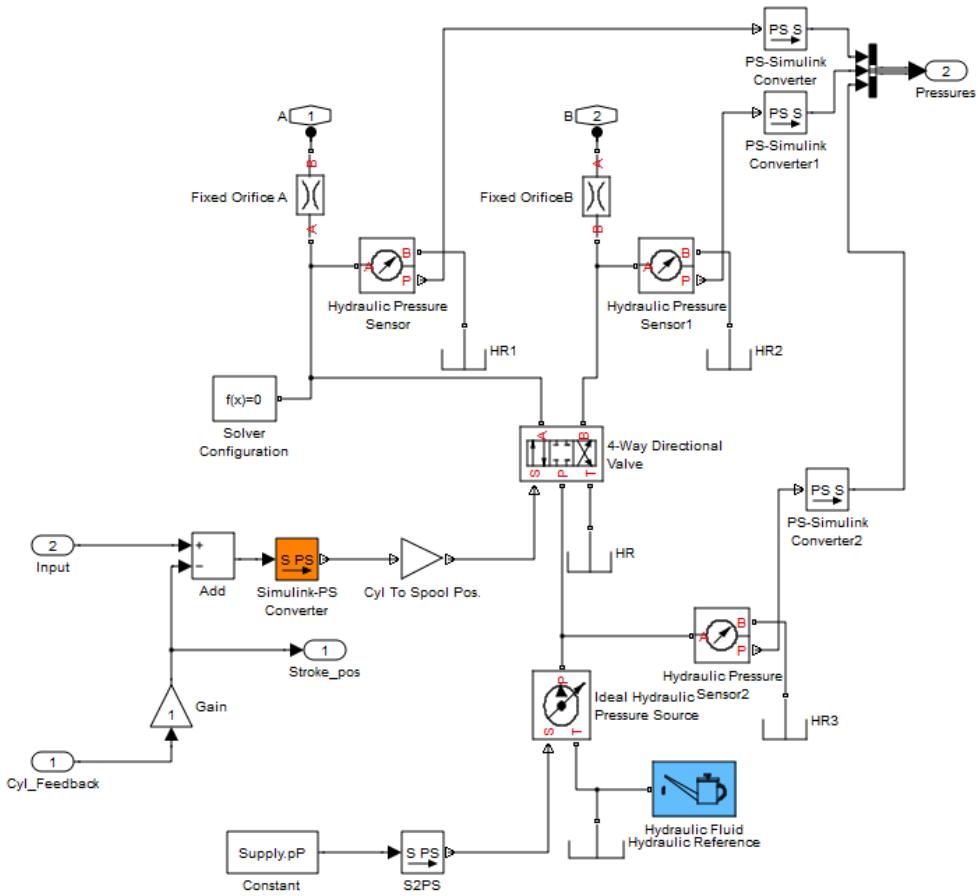


Figure 10

The hydraulic circuit is composed by a proportional valve with 4 ways and 3 positions and several manometers to measure cylinder and supply pressure (**Figure 10**). The input is adapted to the valve spool position.

Simulation

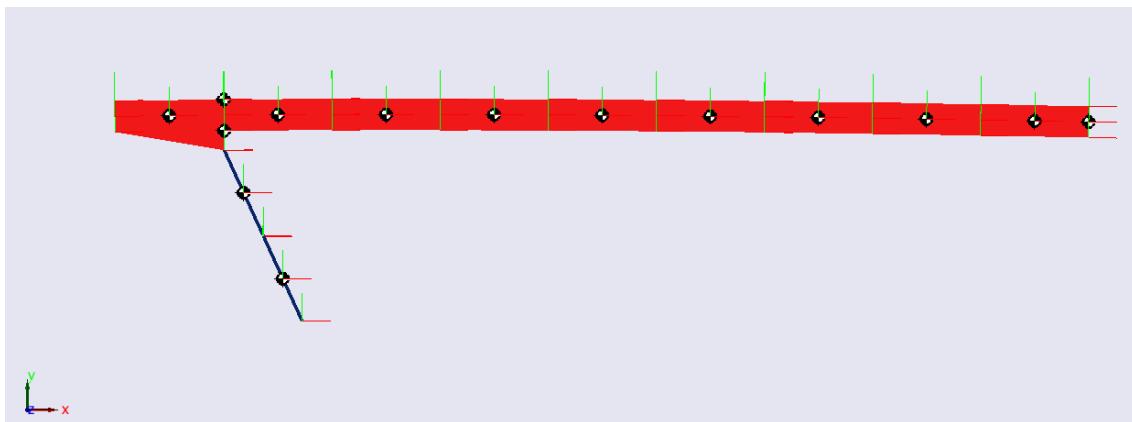


Figure 11

The tip end position (X, Y, Z) is shown in Figure 12 after a step input of 20 degrees:

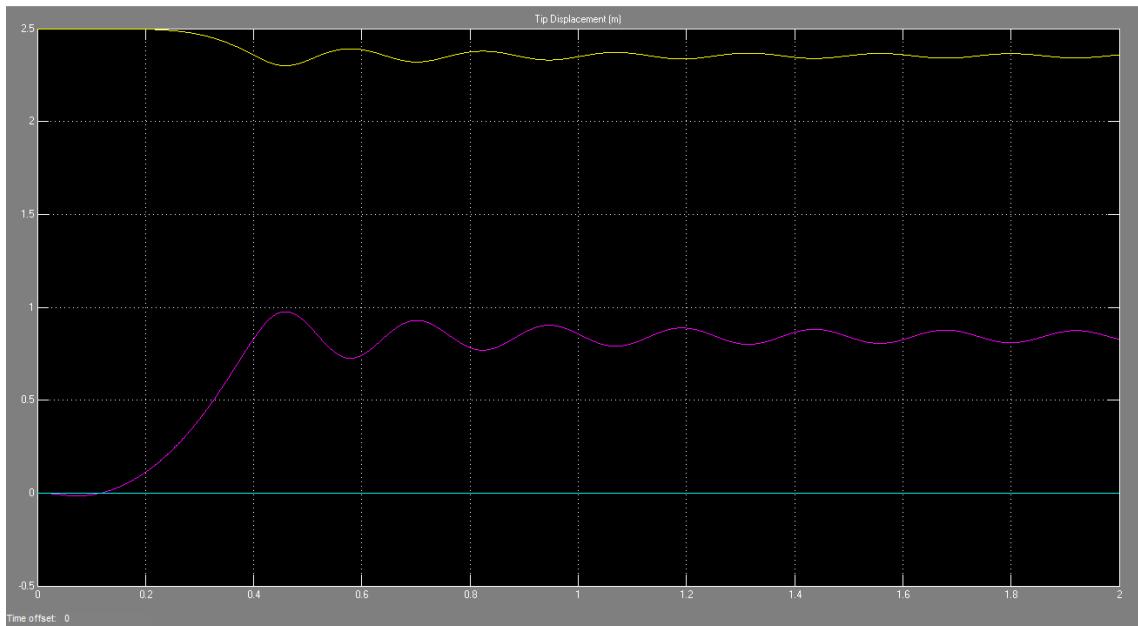
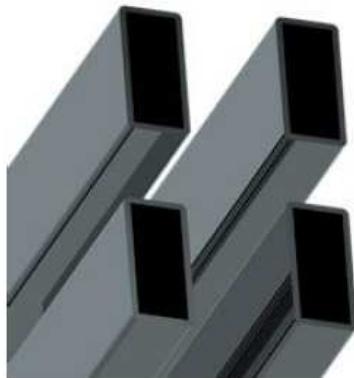


Figure 12. Tip end coordinates (X yellow, Y purple, Z blue)

7.4 Anexo IV: Hollow Section Profile



Ruukki double grade S420MH/S355J2H Rectangular

Ruukki double grade S420MH / S355J2H is a structural hollow section that meets the requirements of standard EN 10219.

It combines the high strength of grade S420MH and the excellent usability of grade S355J2H. By designing the structure using grade S420MH, considerable weight reduction can be achieved and longer spans can be used in structures.

Ruukki double grade replaces S355J2H as a stock grade and is suitable for all the S355J2H and S420MH applications.

Applications:

- Framework structures of buildings
- Bridge structures
- Railings
- Framework structures for machinery, transportation vehicles and lifting equipment
- Pillars
- Masts

Dimensions

Outside dimensions mm	Wall thickness mm / Weight kg/m										
H x B	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.1	8.0	8.8	10.0	12.5
40 x 20	1.68	2.03	2.36								
40 x 30	1.99	2.42	2.83								
50 x 30	2.31	2.82	3.30	4.20							
60 x 40	2.83	3.60	4.25	5.45	6.56						
70 x 50	3.56	4.39	5.19	6.71	8.13						
80 x 40	3.56	4.39	5.19	6.71	8.13						
80 x 60		5.17	6.13	7.97	9.70						
90 x 50		5.17	6.13	7.97	9.70						
100 x 40		5.17	6.13	7.97	9.70						
100 x 50		5.56	6.60	8.59	10.5	12.3					
100 x 60		5.96	7.07	9.22	11.3	13.2					
100 x 80		6.74	8.01	10.5	12.8	15.1					
120 x 40		5.96	7.07	9.22	11.3	13.2					
120 x 50		6.35	7.54	9.85	12.1	14.2					
120 x 60		6.74	8.01	10.5	12.8	15.1					
120 x 80		7.53	8.96	11.7	14.4	17.0	19.4	21.4	23.1	25.6	
120 x 100		8.31	9.90	13.0	16.0	18.9					
140 x 60			8.96	11.7	14.4	17.0					
140 x 70		7.92	9.43	12.4	15.2	17.9					
140 x 80			9.90	13.0	16.0	18.9					
150 x 50		7.53	8.96	11.7	14.4	17.0					
150 x 100			11.3	14.9	18.3	21.7	24.9	27.7	30.0	33.4	
160 x 70				13.6	16.8	19.8		25.2			
160 x 80			10.8	14.3	17.6	20.8	23.8	26.4	28.6	31.8	
160 x 90			11.3	14.9	18.3	21.7	24.9	27.7	30.0		
180 x 100				16.8	20.7	24.5	28.3	31.4	34.2	38.1	
180 x 120				18.0	22.3	26.4	30.5	34.0	38.9	41.3	48.7
200 x 80			16.8	20.7	24.5	28.3	31.4	34.2	38.1		
200 x 100			18.0	22.3	26.4	30.5	34.0	38.9	41.3	48.7	
200 x 120				23.8	28.3	32.7	36.5	39.7	44.4	52.6	
220 x 120				25.4	30.2	35.0	39.0	42.5	47.5		
250 x 100				26.2	31.1		40.2		49.1		
250 x 150				30.1	35.8	41.6	46.5	50.8	57.0	68.3	
260 x 140					35.8	41.6	46.5	50.8	57.0	68.3	
260 x 180					39.8	46.1	51.5	56.3	63.2		

Outside dimensions mm	Wall thickness mm / Weight kg/m										
H x B	2.0	2.5	3.0	4.0	5.0	6.0	7.1	8.0	8.8	10.0	12.5
300 x 100					30.1	35.8	41.6	46.5	50.8	57.0	68.3
300 x 150						40.5	47.2	52.8		64.8	78.1
300 x 200						45.2	52.8	59.1	64.6	72.7	88.0
400 x 200						54.7	63.9	71.6	78.4	88.4	108.0

Recommended series

[Download hollow sections dimensions and cross-sectional properties](#)

Tolerances

Characteristic	Tolerance in compliance with EN 10219-2-2006
Outside dimensions ¹⁾ (B, H):	When B, H < 100 mm: $\pm 1\%$, minimum ± 0.5 mm When 100 mm \leq B, H \leq 200 mm: $\pm 0.8\%$ When B, H > 200 mm: $\pm 0.6\%$
Wall thickness (T):	-5% / +10 %, with a minimum of ± 0.2 mm and maximum ± 0.5 mm
External corner radius (R):	When $T \leq 6$ mm: $1.6 \times T - 2.4 \times T$ When $6 \text{ mm} < T \leq 10$ mm: $2.0 \times T - 3.0 \times T$ When $T > 10$ mm: $2.4 \times T - 3.6 \times T$
Squareness:	$90^\circ \pm 1^\circ$
Concavity/convexity:	0.8%, however a minimum of 0.5 mm
Twist (V):	2 mm + 0.5 mm/m
Straightness:	0.15% of tube length ²⁾
Weight (M):	Individual tube: $\pm 6\%$
Standard length:	≥ 6000 mm: 0/+50 mm
Exact length:	Agreed when making and order

¹⁾ All external dimensions are measured with a minimum distance of B with square hollow sections and with a minimum distance of H with rectangular hollow sections and with a minimum distance of D when seen from the end of the section. The distance must be a minimum of 100 mm.

²⁾ However maximum 3 mm along 1 m.

Properties

Mechanical properties

Comparison between the mechanical properties of Ruukki double grade S420MH / S355J2H and the EN 10219 steel grades S355J2H and S420MH.

	R _{p0.2} MPa Minimum	R _m MPa T < 3	3 \leq T \leq 16	A _s % Minimum	Impact test temperature °C ¹⁾
Ruukki double grade S420MH / S355J2H	420	510 – 660	500 – 630	20 ²⁾	-40 ³⁾
S355J2H EN 10219	355	510 – 680	470 – 630	20 ²⁾	-20
S420MH EN 10219	420	500 – 660	500 – 660	19 ²⁾	-20

The mechanical properties for rectangular hollow sections are tested by Ruukki on the longer side of the cross section.

¹⁾ The impact strength requirement is a minimum of 27 J for J2H grades and a minimum of 40 J for MH grades with a 10 x 10 mm² V-notch specimen in compliance with EN 10045-1.

The value for Ruukki double grade guaranteed at minimum 40 J.

²⁾ The hollow sections with $t/T < 15$ (round) or $(B + H)/2T < 12,5$ (rectangular and square), the minimum value of elongation is 2 % lower than normal.
³⁾ Value guaranteed by Ruukki (the EN 10219 requirement for testing temperature is -20 °C)

Chemical composition

Comparison between the chemical compositions of Ruukki double grade S420MH / S355J2H and the EN 10219 steel grades S355J2H and S420MH.

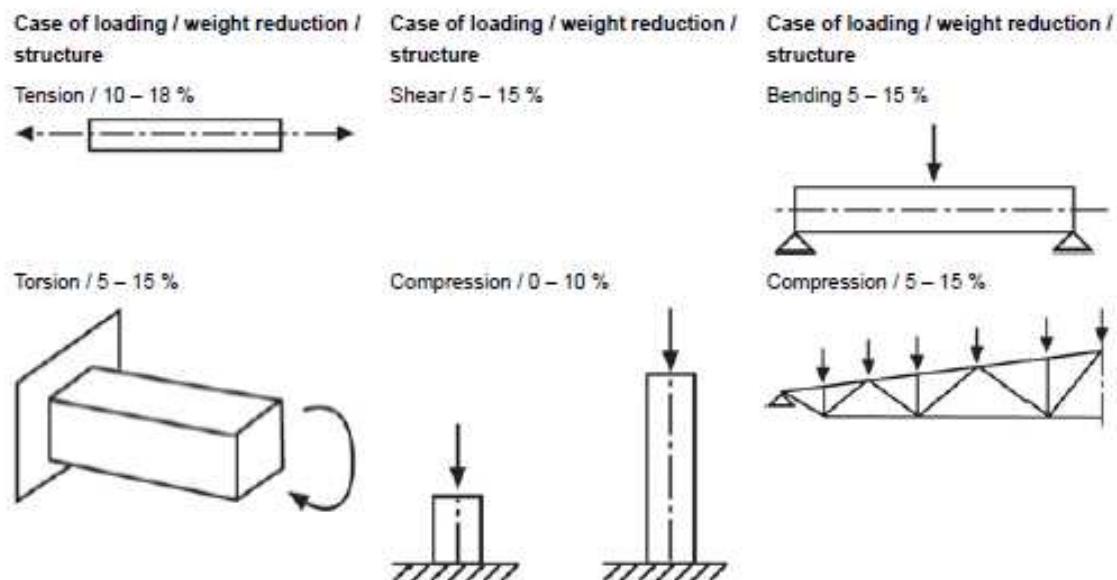
		C	Si	Mn	P	S	CEV
Ruukki double grade S420MH / S355J2H	Typical %	0,08	0,18	1,40	0,010	0,006	0,32
	Maximum %	0,16	0,25 ¹⁾	1,60	0,020	0,012	0,39
S355J2H EN 10219	Maximum %	0,22	0,55	1,60	0,035	0,035	0,45
S420MH EN 10219	Maximum %	0,16	0,50	1,70	0,035	0,030	0,43

The steel of structural hollow sections is aluminium-killed.

¹⁾ Si content guaranteed at 0,15–0,25 %.

Weight reduction

Examples of possible weight reductions, when the structure is designed using steel grade S420MH instead of steel grade S355J2H.



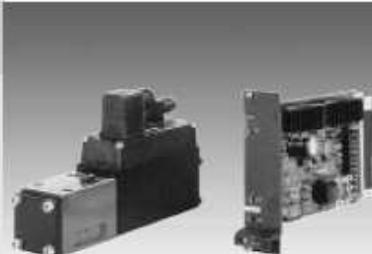
7.5 Anexo V: Servo Valve Data Sheet

Servo solenoid valves with electrical position feedback (Lvdt DC/DC ± 10 V)

RE 29028/01.05 1/10
Replaces: 09.03

Type 4WRPH 6

Size 6
Unit series 2X
Maximum working pressure P, A, B 315 bar, T 250 bar
Nominal flow rate 2...40 l/min (Δp 70 bar)



List of contents

Contents	Page
Features	1
Ordering data and scope of delivery	2
Preferred types	2
Function, sectional diagram	3
Symbols	3
Technical data	4
Valve with external trigger electronics	5 and 6
Performance curves	7 and 8
Unit dimensions	9

Features

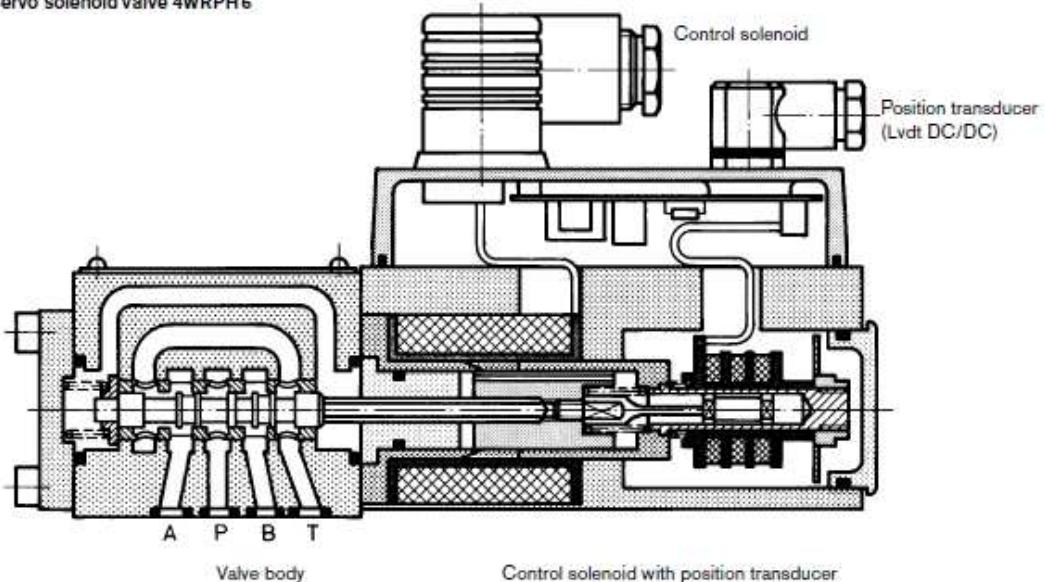
- Directly operated servo solenoid valve NG6, with control piston and sleeve in servo quality
- Actuated on one side, 4/4 fail-safe position when switched off
- Control solenoid with integral position feedback and electronics for position transducer (Lvdt DC/DC)
- Suitable for electrohydraulic controllers in production and testing systems
- For subplate attachment, mounting hole configuration to ISO 4401-03-02-0-94
- Subplates as per catalogue section RE 45053 (order separately)
- Line sockets to DIN 43560-AM2
- Solenoid 2P+PE/M16x1.5, position transducer 4P/Pg7 in scope of delivery, see catalogue section RE 08008
- External trigger electronics (order separately)
 - Electric amplifier for standard curve "L" 0 811 405 060, see catalogue section RE 30041
 - Electric amplifier for non-linear curve "P" 40 % – 0 811 405 065 and 60 % – 0 811 405 066, see catalogue section RE 30040

Variants on request

- For standard applications
- Special symbols for plastic machines
- Sturdy "ruggedized" version for applications up to 40 g, valve with metal cap and central plug (7P).

Function, sectional diagram

Servo solenoid valve 4WRPH 6

**Symbols**

	Linear	p: kink 60% [q_n 15,25 l/min]	p: kink 40% [q_n 40 l/min]
	C3, C5 C4, C1		
C3, C5, C4, C1			
Standard – 1:1, from q_n 40 l/min also 2:1			

Accessories, not included in scope of delivery

(4x) M5x 30 DIN 912-10.9	Fastening screws	2910151166
	VT-VRRA1-527-20/V0, see RE 30041	0811405060
	VT-VRRA1-527-20/V0/K60-AGC, see RE 30040	0811405066
	VT-VRRA1-527-20/V0/K40-AGC, see RE 30040	0811405065

Application

- Valve amplifier with pressure compensator (p/Q), see RE 30058.

Testing and service equipment

- Test box type VT-PE-TB2, see RE 30064.
- Test adapter type VT-PA-3, see RE 30070.

Technical Data

General

Construction	Spool type valve, operated directly, with steel sleeve					
Actuation	Proportional solenoid with position control, external amplifier					
Type of mounting	Subplate, mounting hole configuration NG6 (ISO 4401-03-02-0-94)					
Installation position	Optional					
Ambient temperature range	-20...+50 °C					
Weight	kg 2.3					
Vibration resistance, test condition	Max. 25 g, shaken in 3 dimensions (24 h)					

Hydraulic (measured with HLP 46, $\vartheta_{\text{oil}} = 40^\circ\text{C} \pm 5^\circ\text{C}$)

Pressure fluid	Hydraulic oil to DIN 51524 ... 535, other fluids after prior consultation						
Viscosity range	recommended mm ² /s	20...100					
	max. permitted mm ² /s	10...800					
Pressure fluid temperature range	°C	-20...+80					
Maximum permissible degree of contamination of pressure fluid	Class 18/16/13 ¹⁾						
Purity class to ISO 4406 (c)							
Flow direction	See symbol						
Nominal flow at $\Delta p = 35$ bar per notch ²⁾	l/min	2	4	12	15	24	40
Max. working pressure	bar	Port P, A, B: 315					
Max. pressure	bar	Port T: 250					
Operating limits at Δp	bar	315	315	315	315	315	160
Pressure drop at valve	bar	315	315	315	280	250	100
$q_{\text{nom}} > q_N$ valves	bar	315	315	315	280	250	100
Leakage at 100 bar	cm ³ /min	<150	<180	<300	-	<500	<900
	cm ³ /min	-	-	-	<180	<300	<450

Electrical

Cyclic duration factor	%	100 ED
Power supply		24 V _{com} (external amplifier)
Degree of protection		IP 65 to DIN 40050
Solenoid connector		Connector DIN 43650/ISO 4400 M16x1.5 (2P+PE)
Position transducer connector		Special Connector Pg7 (4P)
Max. solenoid current	A	2.7
Coil resistance R_{20}	Ω	2.5
Max. power consumption at 100% load and operational temperature	VA	40
Position transducer DC/DC technology	Supply: +15 V/35 mA -15 V/35 mA	Signal: 0...±10 V ($R_L \geq 10 \text{ k}\Omega$)

Static/Dynamic

Hysteresis	%	≤ 0.2
Manufacturing tolerance for q_{max}	%	< 10
Response time for signal change 0...100 %	ms	< 10
Thermal drift		Zero point displacement <1 % at $\Delta T = 40^\circ\text{C}$

¹⁾ The purity classes stated for the components must be complied with in hydraulic systems. Effective filtration prevents problems and also extends the service life of components. For a selection of filters, see catalogue sections RE 50070, RE 50076 and RE 50081.

²⁾ Flow rate at a different Δp $q_2 = q_{\text{nom}} \cdot \sqrt{\frac{\Delta p_2}{35}}$

7.6 Anexo VI: MATLAB Files

7.6.1 System Data

```
%% Beam DATA

Lengtht = 2.5; % m;
Height=0.08; % m;
Width=0.06; % m;
Thickness=0.004; % m;

TipMass=50; % Kg

%% Joint DATA

Lengtht_1=0.28; % m; first beam element Lengtht
Beam_Actuator=0.09; %m;
Lengtht_2=0.525;
J_Act_x=0.4810738664; %m; 525*sin(a2)/cos(a2)
J_Act_y=0.525; %m;
a1=atan(Beam_Actuator/Lengtht_1);
a2=42.5*Pi/180;
Lengtht_1p=Lengtht_1/cos(a1);
Lengtht_2p=0.525/cos(a2);

%%%%%%%%%%%%%
Actuator_Lengtht0=sqrt((Lengtht_2-Beam_Actuator)^2+(Lengtht_2*tan(a2)-Lengtht_1)^2);
Th0=0;
%%%%%%%%%%%%%

%% Cylinder DATA

Stroke = 0.3; % m
Piston_Diameter = 0.032; % m
Rod_Diameter = 0.025; % m

Dead_Volume = 1e-3; % m3
Bulk = 1.5e9;
Viscous_Force = 20000; % N

Supply_Pressure = 210e5; % [MPa] 210 bar
Tank_Pressure = 0; % [Pa]

Initial_Position_Cyl = 0.15; % [m]

%% Strain Gauge DATA
Voltage_Supply=24;

N_elem=5;
Lengtht_elem=(Lengtht-Lengtht_1)/(N_elem-1);

GF = 2.11;
x0=Lengtht_1;
x1=x0+Lengtht_elem/2;
x2=x1+Lengtht_elem;
```

```

x3=x2+Length_elem;
x4=x3+Length_elem;

Strain_pos = [0, Length_1, Length, x1, x2, x3];
Strain_pos7 = [0, Length, x1, x2, x3];           %%%%% just for 7 coeff
Hyp_C = [0 0 0 0 0 10e-4 5e-4 2e-4];

```

7.6.2 Lumped Method Calculation

```

material = material_Steel ;
%   cantileverData =
struct('lengthT',3,'height',0.1,'width',0.05,'thickness',0.005,'material',material);
%
%
%   L = cantileverData.lengthT;
%   h = cantileverData.height;
%   b = cantileverData.width;
%   e = cantileverData.thickness;
% volume = (cantileverData.height * cantileverData.width ...
%           - (cantileverData.height - 2*cantileverData.thickness)...
%           *(cantileverData.width - 2*cantileverData.thickness)) * L;
%
L = Length; % m;
L1=Length_1;
h=Height; % m;
h1=Height/2;
b=Width; % m;
b1=Width/2;
e=Thickness; % m;
area=h*b-(b-2*e)*(h-2*e); % m2
volume=area*L; % m3
mass = volume * material.density ; % Kg

fBeamElement.NoElms = 5;
fBeamElement.beamDir = [1,0,0];
fBeamElement.TipMass = TipMass; % Kg

fBeamElement.length = (L - L1)/ (fBeamElement.NoElms-1); % m
fBeamElement.cgLeng = (L - L1)/ (fBeamElement.NoElms-1);
fBeamElement.width = b; % m
fBeamElement.height = h; % m
fBeamElement.Thickness = e; % m

fBeamElement.mass = area * (L - L1) * material.density /
(fBeamElement.NoElms - 1) / 2; % m
fBeamElement.mass1 = material.density*area*L1;

principalMoments = (1/3) * fBeamElement.mass * [      h^2      + b^2 - (b-
2*e)^2 - (h-2*e)^2 % http://www.prt.fernuni-
hagen.de/lehre/KURSE/PRT001/course_main/node25.html
fBeamElement.length^2 +
b^2

```

```

h^2      +
fBeamElement.length^2  ] ;

% principalMoments = [
(4/3)*material.density*fBeamElement.length*e*(h1^3+b1^3+(h1-e)^3+(b1-
e)^3)
%
* ( fBeamElement.length^2 + b^2      )                               (1/12) * fBeamElement.mass
%
fBeamElement.mass *( h^2      + fBeamElement.length^2 ) ] ;           (1/12) *
fBeamElement.inertia = diag( principalMoments ) ;

principalMoments = (1/3) * fBeamElement.mass * [      h^2      + b^2 - (b-
2*e)^2 - (h-2*e)^2 % http://www.prt.fernuni-
hagen.de/lehre/KURSE/PRT001/course_main/node25.html
(L1^2) + b^2
h^2      + (L1^2) ] ;
fBeamElement.inertial = diag( principalMoments ) ;

yzyBendingMoment = ( b * h^3 - (b-2*e)*(h-2*e)^3 ) / 12
yzz = fBeamElement.length*h^3/12
springConstantAtTip = 3 * material.youngsModulus * yzyBendingMoment /
( fBeamElement.length^3 ) ;

fBeamElement.EI=material.youngsModulus * yzyBendingMoment

fBeamElement.matDamping =49;
fBeamElement.material = material;

%%%%%
material.youngsModulus * yzyBendingMoment/fBeamElement.length;

```

7.6.3 Hydraulic System Data

```

%% Hydraulic Cylinder Model
%based on the Jouni Mattila's notes

%Data
Rod.L=Lenght;
Rod.L1=Lenght_1;
Cyl.L=Stroke;  %[m]
Cyl.D1=Piston_Diameter;    %[m]
Cyl.D2=Rod_Diameter;      %[m]
Cyl.A1=(Cyl.D1^2)/4*3.1416;
Cyl.A2=Cyl.A1-(Cyl.D2^2)/4*3.1416;
Cyl.V0 = Dead_Volume;    % Dead Volume
Cyl.Vt=Cyl.L*Cyl.A1;
Cyl.V1=Cyl.Vt/2;          % Linearisation point at midstroke
Cyl.V2=Cyl.Vt/2-(Cyl.D2^2)/4*3.1416*Cyl.L/2;
Load.M=Rod.L*TipMass*9.8/Rod.L1*cos(3.1416/9);           % [3000Kg]
Cyl.B=Bulk;  % [1e6]
Cyl.Cp=0;
Cyl.Fv=Viscous_Force;    %[N]

Valve.QN=24*60/1000;      %[m3/s] 24 l/min
Valve.Xv_max=0.01;

```

```

Valve.dpN=3.5e6;           %[MPa] 35 bar
Valve.Tau = 10e-3;  % [s]

Supply.pP = Supply_Pressure;  % [100e5Pa]
Supply.pT = Tank_Pressure;    % [Pa]

%% Initial conditions
Init.p1 = Load.M/Cyl.A1;  % [Pa]
Init.p2 = 0;  % [Pa]
Init.x = Initial_Position_Cyl; % [m]

%% Linearization point
%Valve coeffs for p1=0 and x1=0

Valve.Kc1=0; %%%%
Valve.Kc2=Valve.Kc1; %%%%

Valve.Kq1=Valve.QN/Valve.Xv_max*sqrt((Supply.pP)/2/Valve.dpN);
Valve.Kq2=Valve.Kq1;

Valve.Kp=0.8*Supply.pP/0.05/Valve.Xv_max;

%% System Forwards; Output Velocity

NUM1=Valve.Kq1/Cyl.A1;
DEN1=[Cyl.Vt*Load.M/4/Cyl.B...
      (Load.M*(Valve.Kc1+Cyl.Cp)+Cyl.Vt*Cyl.Fv/4/Cyl.B)/(Cyl.A1)^2 1 0];
for Output position
%    DEN1=[Cyl.Vt*Load.M/4/Cyl.B...
%      (Load.M*(Valve.Kc1+Cyl.Cp)+Cyl.Vt*Cyl.Fv/4/Cyl.B)/(Cyl.A1)^2 1
0];

Cyl_sys=tf(NUM1,DEN1);
Cyl_sys=minreal(Cyl_sys);

%% System Forwards; Output Load Pressure

NUM2=Valve.Kq2;
DEN2=[Cyl.Vt*Load.M/4/Cyl.B Load.M*Valve.Kc1+Cyl.Vt*Cyl.Fv/4/Cyl.B
Valve.Kc1*Cyl.Fv+Cyl.A1^2];
Cyl_sys2=tf(NUM2,DEN2);
Cyl_sys2=minreal(Cyl_sys2);

%% State-space Model

%X'=A*X+B*U  X=[x' p1' p2']  U=Xv
A=[-Cyl.Fv/Load.M Cyl.A1/Load.M -Cyl.A2/Load.M; ...
    -Cyl.B*Cyl.A1/Cyl.V1 -Cyl.B*Valve.Kc1/Cyl.V1 0; ...
    Cyl.B*Cyl.A2/Cyl.V2 0 Cyl.B*Valve.Kc2/Cyl.V2];
B=[0 Cyl.B*Valve.Kq1/Cyl.V1 -Cyl.B*Valve.Kq2/Cyl.V1]';


```

```

C=[1 0 0];
D=0;

[ NUM, DEN ]=ss2tf(A,B,C,D);
System_sys=tf( NUM, DEN );
System_sys=minreal( System_sys )

% bode( System_sys );
[ Wn, Z, P ]=damp( System_sys ) %Natural frequency, zeros and poles
% hold on;

System_sys=feedback( System_sys, 1 )

% bode( System_sys );
% legend( 'Before Feedback', 'After Feedback' );
[ Wn, Z, P ]=damp( System_sys )

%%

Kh1=Cyl.A1^2*Cyl.B/(Cyl.V1);
Kh2=Cyl.A2^2*Cyl.B/(Cyl.V2);

Kh=Kh1+Kh2;      % Stiffness of the Cylinder [MN]
M_cyl=Load.M;
Wnat=sqrt( Kh/M_cyl ) % Natural frequency

Kqa=Valve.Kq1/Cyl.A1;      % Velocity Gain

a=Rod.L1*cos(-3.1416/9);
J=mass*L^2/4+TipMass*L^2;

W=sqrt( Kh*a^2/J )

```

7.6.4 Estimation functions

```

%% Hyperbolic and Parabolic Estimation

% Coefficient Calculations % coef=[A B C D E F G] X=[0 L x1 x2 x3]
%
% Strain_pos = [0, Lenght_1, Lenght, x1, x2, x3];
% Hyp_C = [0 0 0 0 0 0.07 0.045 0.028];

[Hyp_A] = Polinomic_Eq_7Coeff_Acc( Strain_pos7 )      % A*coef=C      %
[X,FVAL,EXITFLAG] = fsolve( 'Hyperbolic_Equations' ,x0 )
Hyp_APA_inv = inv( Hyp_A );

[Hyp_A] = Polinomic_Eq_7Coeff( Strain_pos7 )      % A*coef=C      %
[X,FVAL,EXITFLAG] = fsolve( 'Hyperbolic_Equations' ,x0 )
Hyp_APG_inv = inv( Hyp_A );

[Hyp_A] = Hyperbolic_Eq_9Coeff( Strain_pos )      % A*coef=C      %
[X,FVAL,EXITFLAG] = fsolve( 'Hyperbolic_Equations' ,x0 )
Hyp_AHG_inv = inv( Hyp_A );

```

```

[Hyp_A] = Hyperbolic_Eq_9Coeff_Acc(Strain_pos)      % A*coeff=C
[X,FVAL,EXITFLAG] = fsolve('Hyperbolic_Equations',x0)
Hyp_AHA_inv = inv(Hyp_A);

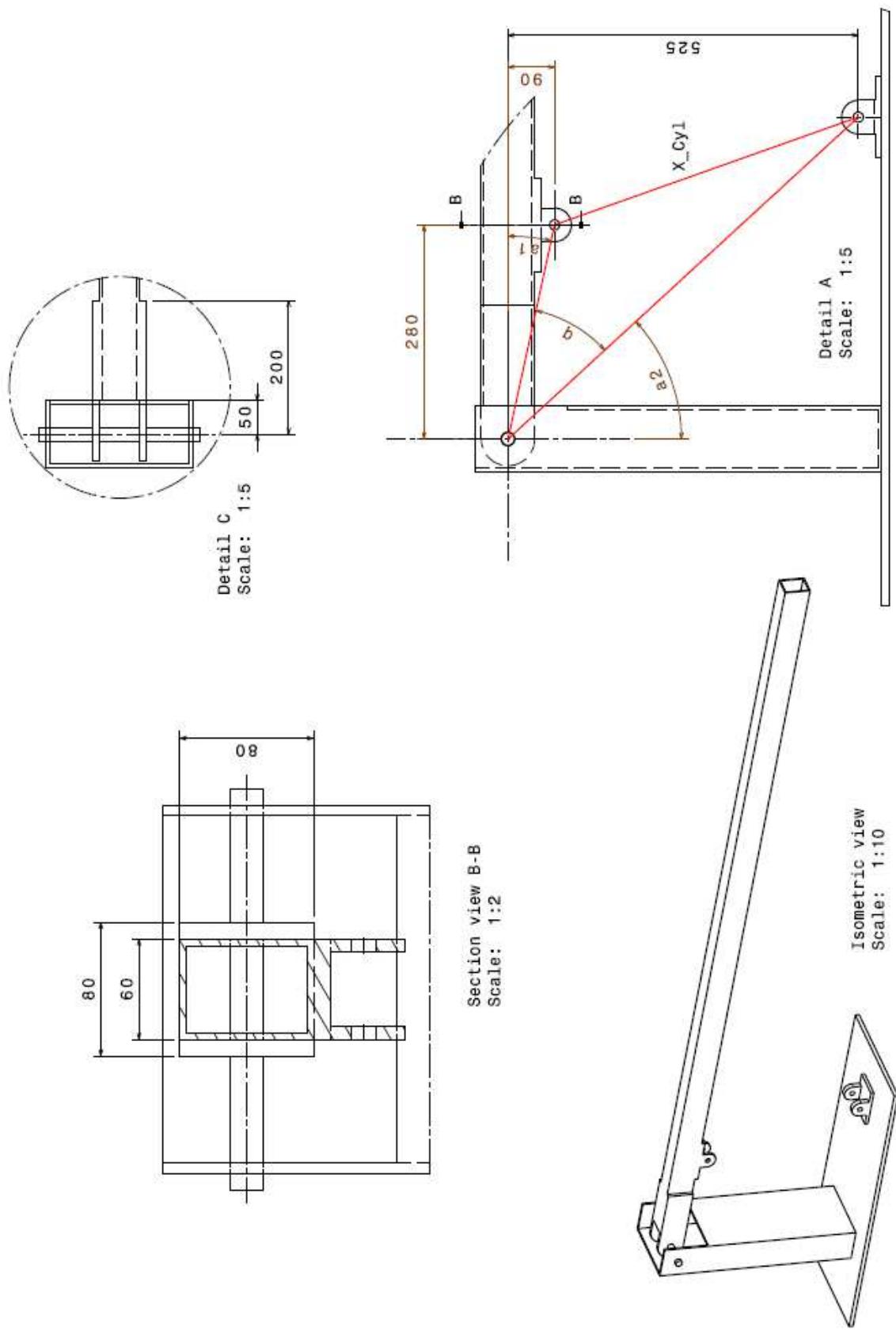
%%%%%%%%%%%%%%%
Hyperbolic_Eq_9Coeff.m;

function [A]= ecuaciones(x)                      % coef=[A B C D E F G H I]  X=[0 L1
L x1 x2 x3]

A = [sinh(x(1)) sinh(2*x(1)) sinh(3*x(1)) sinh(4*x(1)) cosh(x(1))
cosh(2*x(1)) cosh(3*x(1)) cosh(4*x(1)) 1;      %% w(0)=0 w''(0)=0
w(L1)=0 w''(L1)=0 w''(L)=0 w'''(L)=0
sinh(x(1)) 4*sinh(2*x(1)) 9*sinh(3*x(1)) 16*sinh(4*x(1))
cosh(x(1)) 4*cosh(2*x(1)) 9*cosh(3*x(1)) 16*cosh(4*x(1)) 0;
sinh(x(2)) sinh(2*x(2)) sinh(3*x(2)) sinh(4*x(2)) cosh(x(2))
cosh(2*x(2)) cosh(3*x(2)) cosh(4*x(2)) 1;      %%
sinh(x(2)) 4*sinh(2*x(2)) 9*sinh(3*x(2)) 16*sinh(4*x(2))
cosh(x(2)) 4*cosh(2*x(2)) 9*cosh(3*x(2)) 16*cosh(4*x(2)) 0;
sinh(x(3)) 4*sinh(2*x(3)) 9*sinh(3*x(3)) 16*sinh(4*x(3))
cosh(x(3)) 4*cosh(2*x(3)) 9*cosh(3*x(3)) 16*cosh(4*x(3)) 0;
cosh(x(3)) 8*cosh(2*x(3)) 27*cosh(3*x(3)) 64*cosh(4*x(3))
sinh(x(3)) 8*sinh(2*x(3)) 27*sinh(3*x(3)) 64*sinh(4*x(3)) 0;
-(sinh(x(4)))/25 -(4*sinh(2*x(4)))/25 -(9*sinh(3*x(4)))/25 -
(16*sinh(4*x(4)))/25 -(cosh(x(4)))/25 -(4*cosh(2*x(4)))/25 -
(9*cosh(3*x(4)))/25 -(16*cosh(4*x(4)))/25 0;
-(sinh(x(5)))/25 -(4*sinh(2*x(5)))/25 -(9*sinh(3*x(5)))/25 -
(16*sinh(4*x(5)))/25 -(cosh(x(5)))/25 -(4*cosh(2*x(5)))/25 -
(9*cosh(3*x(5)))/25 -(16*cosh(4*x(5)))/25 0;
-(sinh(x(6)))/25 -(4*sinh(2*x(6)))/25 -(9*sinh(3*x(6)))/25 -
(16*sinh(4*x(6)))/25 -(cosh(x(6)))/25 -(4*cosh(2*x(6)))/25 -
(9*cosh(3*x(6)))/25 -(16*cosh(4*x(6)))/25 0;
];

```

7.7 Anexo VII: Test Bench Drawing



7.8 Anexo VIII: Finite Element Analysis with MATLAB

Code modification to project boundary conditions from:

MATLAB Codes for Finite Element Analysis, Solids and Structures, A. J.M. Ferreira, Universidade do Porto, Springer 2009

```
%% FEM (directly from the example file provided w. the book)
%-----
% Example 8.11.1
% to find the transient response of a cantilever beam with a tip load
%
% Problem description
%   Find the transient response of a cantilever beam whose length is 1
% m.
%   long. The beam has the cross-section of 0.02 m by 0.02 m and the
% mass
%   density is 1000 Kg/m^3. The elastic and shear modulus is 100 GPa
% and
%   40 GPa, respectively. Use 4 elements.
%
% Variable descriptions
%   k = element stiffness matrix
%   kk = system stiffness matrix
%   m = element mass matrix
%   mm = system mass matrix
%   index = a vector containing system dofs associated with each
% element
%   bcdof = a vector containing dofs associated with boundary
% conditions
%-----
%-
clear all
clc

nel=4;           % number of elements
nnode=2;         % number of nodes per element
ndof=2;          % number of dofs per node
nnode=(nnode-1)*nel+1; % total number of nodes in system
sdof=nnode*ndof; % total system dofs

el=100*10^9;    % elastic modulus
tleng=1;          % total beam length
leng=tleng/nel;  % same size of beam elements
xi=0.02^4/12;    % height (or thickness) of the beam
area=0.004;       % cross-sectional area of the beam
rho=1000;         % mass density of the beam
ipt=1;            % option flag for mass matrix

dt=0.0001;        % time step size
ti=0;              % initial time
tf=0.2;            % final time
nt=fix((tf-ti)/dt); % number of time steps
```

```

nbc=2;                      % number of constraints
bcdof(1)=1;                  % transverse displ. at node 1 is constrained
bcdof(2)=2;                  % slope at node 1 is constrained

kk=zeros(sdof,sdof); % initialization of system stiffness matrix
mm=zeros(sdof,sdof); % initialization of system mass matrix
force=zeros(sdof,1); % initialization of force vector
index=zeros(nel*ndof,1); % initialization of index vector
acc=zeros(sdof,nt); % initialization of acceleration matrix
vel=zeros(sdof,nt); % initialization of velocity matrix
disp=zeros(sdof,nt); % initialization of displ. matrix

vel(:,1)=zeros(sdof,1); % initial zero velocity
disp(:,1)=zeros(sdof,1); % initial zero displacement
force(9)=100; % tip load of 100

for iel=1:nel % loop for the total number of elements

index=feeldof1(iel,nnel,ndof); % extract system dofs associated with
element

[k,m]=febeam1(el,xi,leng,area,rho,ipt); % compute element stiffness
matrix

kk=feasmb11(kk,k,index); % assemble each element matrix into system
matrix

mm=feasmb11(mm,m,index); % assemble each element matrix into system
matrix

end

% original simulation

mminv=inv(mm); % invert the mass matrix

% central difference scheme for time integration

for it=1:nt

acc(:,it)=mminv*(force-kk*disp(:,it));

for i=1:nbc
ibc=bcdof(i);
acc(ibc,it)=0;
end

vel(:,it+1)=vel(:,it)+acc(:,it)*dt;
disp(:,it+1)=disp(:,it)+vel(:,it+1)*dt;

end

acc(:,nt+1)=mminv*(force-kk*disp(:,nt+1));

figure
time=0:dt:nt*dt;
plot(time,disp(9,:))
xlabel('Time(seconds)')

```

```

ylabel('Tip displ. (m)')
title('Tip displacement according to the book')
grid on

%% SS analysis

% The model is made up of 4 beam elements (5 nodes,10variables)

% use the system mass- and stiffness matrices
% calculated above
M = mm;
K = kk;

% Apply constraints.
% e.g. if the first node is constrained, set K(1,:) = 0
K(1:2,:) = 0;

% add some damping
tdamp = 5;      % tip damping
damping = [16*tdamp 0 8*tdamp 0 4*tdamp 0 2*tdamp 0 tdamp 0];
D = diag(damping);

D = 0*D;          % Damping removed.. comment or uncomment..

% input influence matrix
F = zeros(s dof);
for i=1:2:s dof
    F(i,i) = 1;    % only forces allowed; no torques
end

% create a state space model
[ A, B ] = FEM_2nd_to_SS( M, D, K, F );
clear D
C = [eye(s dof,s dof) zeros(s dof,s dof)];
D = zeros(s dof,s dof);
sys = ss(A,B,C,D);
% sys.StateName = {'q1' 'q2' 'q1dot' 'q2dot'};
% sys.InputName = {'f1' 'f2'};
% sys.OutputName = {'endpos'};
%sys

% simulation
t = 0:0.1e-4:0.2;
u = zeros(s dof,length(t));
u(s dof-1,:) = 100;  % 100N load at the tip

x0 = zeros(s dof*2,1);
[Y,T,X] = lsim(sys,u,t,x0, 'zoh');

figure
plot(T,X(:,s dof-1))
xlabel('Time(seconds)')
ylabel('Tip displ. (m)')
title('Tip displacement according to CST')
grid on

% compare solutions
figure
plotyy(time,disp(end-1,:),T,X(:,s dof-1))

```

```

title('Comparison')
legend('kirjan','CST')
grid on

% export matrices
save Amatrix.txt A -ascii -double -tabs
save Bmatrix.txt B -ascii -double -tabs
save Cmatrix.txt C -ascii -double -tabs
save Dmatrix.txt D -ascii -double -tabs

function [kk,ff]=feaplyc2(kk,ff,bcdof,bcval)

%-----
% Purpose:
%     Apply constraints to matrix equation [kk]{x}={ff}
%
%-----

n=length(bcdof);
sdoф=size(kk);

for i=1:n
    c=bcdof(i);
    for j=1:sdoф
        kk(c,j)=0;
    end

    kk(c,c)=1;
    ff(c)=bcval(i);
end

function [kk]=feasmbll(kk,k,index)

%-----
% Purpose:
%     Assembly of element matrices into the system matrix
%
%-----

edof = length(index);
for i=1:edof
    ii=index(i);
    for j=1:edof
        jj=index(j);
        kk(ii,jj)=kk(ii,jj)+k(i,j);
    end
end

function [k,m]=febeam1(el,xi,leng,area,rho,ipt)

%-----
% Purpose:
%     Stiffness and mass matrices for Hermitian beam element
%     nodal dof {v_1 theta_1 v_2 theta_2}
%
%-----

```

```

% stiffness matrix

c=el*xi/(leng^3);
k=c*[12      6*leng   -12      6*leng;...
      6*leng  4*leng^2 -6*leng   2*leng^2;...
      -12     -6*leng   12      -6*leng;...
      6*leng  2*leng^2 -6*leng   4*leng^2];

% consistent mass matrix

if ipt==1

mm=rho*area*leng/420;
m=mm*[156      22*leng   54      -13*leng;...
        22*leng  4*leng^2  13*leng -3*leng^2;...
        54       13*leng   156     -22*leng;...
        -13*leng -3*leng^2 -22*leng   4*leng^2];

% lumped mass matrix

elseif ipt==2

m=zeros(4,4);
mass=rho*area*leng;
m=diag([mass/2  0  mass/2  0]);

% diagonal mass matrix

else

m=zeros(4,4);
mass=rho*area*leng;
m=mass*diag([1/2  leng^2/78  1/2  leng^2/78]);

end

function [index]=feeldof1(iel,nnel,ndof)
%-----
% Purpose:
%   Compute system dofs associated with each element in one-
%   dimensional problem
%
%-----
edof = nnel*ndof;
start = (iel-1)*(nnel-1)*ndof;

for i=1:edof
    index(i)=start+i;
end

function [ A, B ] = FEM_2nd_to_SS( M, D, K, F )

% The input should be a linearized 2nd order system
% of the form:
% M*q'' + D*q' + K*q = F*u

```

```
% The system will be rewritten in first order
% state-space form  $x' = A*x + B*u$ , where  $x = [q \ q']$ 
A = [zeros(size(M)) , eye(size(M))
      -M\K , -M\D];

B = [zeros(size(M,1),size(M,2))
      M\F];

end
```

