Trabajo fin de Máster

Propuesta para la enseñanza de los vectores en el plano en 4º ESO

Proposal for the teaching of vectors in the plane in 4º ESO

Autor:
Ángel Vincueria Cuartas

Director:
José Miguel Rubio Chueca

Facultad de Educación
2022

ÍNDICE

1. Introducción

En el siguiente trabajo vamos a estudiar el objeto matemático correspondiente al vector, cómo este se introduce habitualmente en el currículo y se presentará una propuesta didáctica para el 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (ESO). Para ello, primero veremos el estado de la enseñanza-aprendizaje del vector, y qué conocimientos previos necesitan los alumnos para abordarlo. Después veremos la razones de ser históricas del vector, así como las razones de ser escogidas para su introducción junto a los problemas que las constituyen. Por último, se presentarán los campos de problemas, las técnicas que los resuelven y las tecnologías que justifican las técnicas junto a una prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos. Así como la secuencia didáctica y el cronograma que en su conjunto forma esta propuesta para la enseñanza de los vectores en 4º curso de ESO.

2. Sobre la definición del objeto matemático a enseñar

2.1. Objeto matemático a enseñar: vector

Históricamente el desarrollo del objeto matemático del vector se puede dividir en dos frentes que avanzaron prácticamente de manera simultánea. Por un lado la necesidad de matemáticos como Gottfired Leibniz (1646-1716) de generalizar el álgebra, y por otro, la matematización de algunos fenómenos físicos de la mano de Galileo Galilei (1564-1642) o Isaac Newton (1642-1727). Cuando se estudia el movimiento de un cuerpo no basta con decir cuánto se ha desplazado, también es necesario decir en qué dirección y sentido ha tenido lugar el movimiento. Por esto la idea de vector surge de forma natural cuando es preciso indicar la dirección, el sentido y la magnitud de, por ejemplo, una fuerza o la velocidad de un cuerpo. Siguiendo con el hilo histórico, hacia finales del siglo XVIII, Lagrange aritmetiza la física descomponiendo una fuerza según otras tres y Gauss suma geométricamente vectores. Aunque el estudio matemático de los vectores tardó mucho en hacerse formalmente, en la actualidad tiene un gran interés, sobre todo a partir de los estudios de David Hilbert (1862-1943) y Stefan Banach (1892-1945), que hicieron uso de la teoría de espacios vectoriales, aplicándolos a las técnicas del análisis matemático (Engler, 2005, p14).

La generalización del concepto dio origen a nuevas ramas científicas y nuevas técnicas. En resumen, un vector geométrico (Hazewinkel, 2002, p.205) o vector espacial (Heinbockel, 2001,p.143), de aquí en adelante vector, es un objeto geométrico que tiene magnitud (o longitud), dirección y sentido. Los vectores se pueden sumar a otros vectores de acuerdo con el álgebra vectorial. Un vector euclidiano se representa con frecuencia mediante una flecha (un segmento de línea dirigido) como se muestra en la Figura 1.

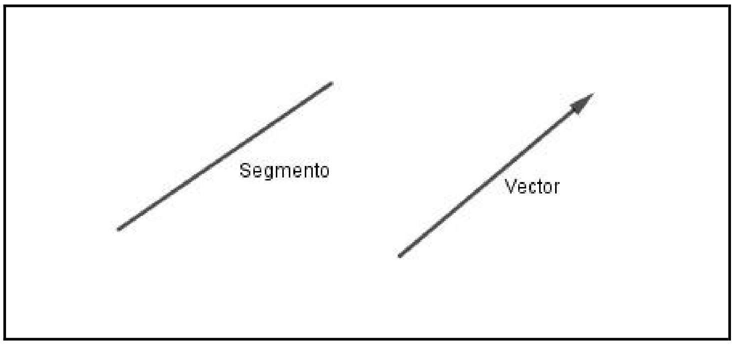


Figura 1: Representación de un segmento y un vector.

2.2. Curso y asignatura en la que se sitúa el vector.

Como se indica en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo, el currículo oficial establece que la introducción del objeto matemático de vector se dará en el cuarto curso de la enseñanza secundaria obligatoria (ESO), en concreto en las Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas dentro del Bloque 3 que engloba la geometría. Las especificaciones de los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje ligados al objeto matemático de vector son las siguientes:

- Contenidos: Iniciación a la geometría analítica en el plano: Coordenadas. Vectores.
- Criterios de evaluación:

  Crit.MAAC.3.3. Conocer y utilizar los conceptos y procedimientos básicos de la geometría analítica plana para representar, describir y analizar formas y configuraciones geométricas sencillas.
- Estándares de aprendizaje:

  Est.MAAC.3.3.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores.

  Est.MAAC.3.3.2. Calcula la distancia entre dos puntos y el módulo de un vector.
  Est.MAAC.3.3.6. Utiliza recursos tecnológicos interactivos para crear figuras geométricas y observar sus propiedades y características.

Cabe destacar que el presente trabajo se encuadra en la LOMCE, que estará vigente durante el curso 2022/23 en 4º ESO, y tras la implantación de la LOMLOE, que entrará en vigor en 4º ESO durante el curso 2023/24, sería necesario hacer las modificaciones necesarias.

2.3. Campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al vector

La unidad didáctica que se va a presentar contiene la definición de magnitud vectorial y la de vector en relación con los elementos que la definen, dirección, módulo y sentido. Además de la representación gráfica en el plano, el cálculo de las coordenadas y módulo de los mismos, su suma analítica y gráfica, su aplicación para el desarrollo de otros conceptos como el de traslación y la vuelta a problemas anteriores de geometría ahora con más herramientas como son los vectores. Todo esto se estructurará en los siguientes campos de problemas:

- CP1: Magnitudes escalares y vectoriales (módulo, dirección y sentido).
- CP2: Representación y propiedades de los vectores. Cálculo del módulo.
- CP3: Operaciones con vectores. Punto medio.
- CP4: Posiciones relativas.

La finalidad de los campos de problemas es introducir de forma justificada las técnicas que los resuelven. En concreto las técnicas que aparecen son las siguientes:

- T1. Reconocer y diferenciar una magnitud escalar y vectorial.
- T2. Representación e interpretación de vectores.
- T3. Determinar un vector a partir de dos puntos coordenados.
- T4. Calcular el módulo de un vector.
- T5. Sumas y restas de vectores.
- T6. Multiplicación de un escalar por un vector.
- T7. Cálculo del punto medio.
- T8. Vectores paralelos.
- T9. Vectores perpendiculares.

A cada técnica le seguirá su tecnología correspondiente para su justificación. La mayoría de las tecnologías se servirán de representaciones gráficas para su justificación a la vez que procedimientos analíticos, y en otros casos se apoyarán en los propios problemas para justificar las técnicas.

3. Sobre el estado de la enseñanza-aprendizaje del vector

Para averiguar en qué estado se encuentra la enseñanza-aprendizaje del objeto matemático del vector en el plano se va a analizar tres libros de texto distintos para el curso y la asignatura que queremos estudiar, Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4º ESO. Los libros de texto son los siguientes:

- Anaya (Colera, J., Oliveira, M. J., Gaztelu, I. y Colera, R., 2016)
- Santillana (Álvarez, M.D, Gaztelu, A.M. y González, A., 2008)
- Proyecto EDAD (García M.J. y Galo, J.R., 2017)

3.1. Justificación habitual la introducción escolar del vector

En el Proyecto EDAD, en el tema de *Geometría Analítica en el plano*, se comienza con el problema formulado como una pequeña historia sobre una búsqueda del tesoro que se muestra en la Figura 2 donde, a priori, no aparece de forma explícita ninguna referencia al vector.

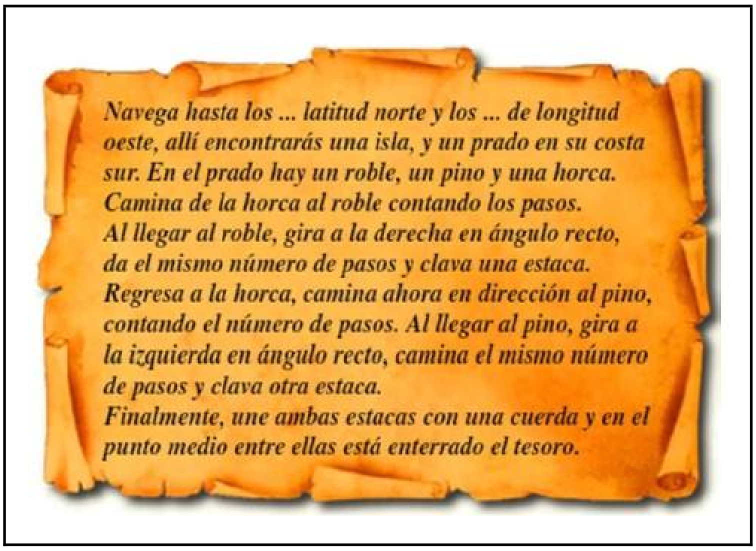
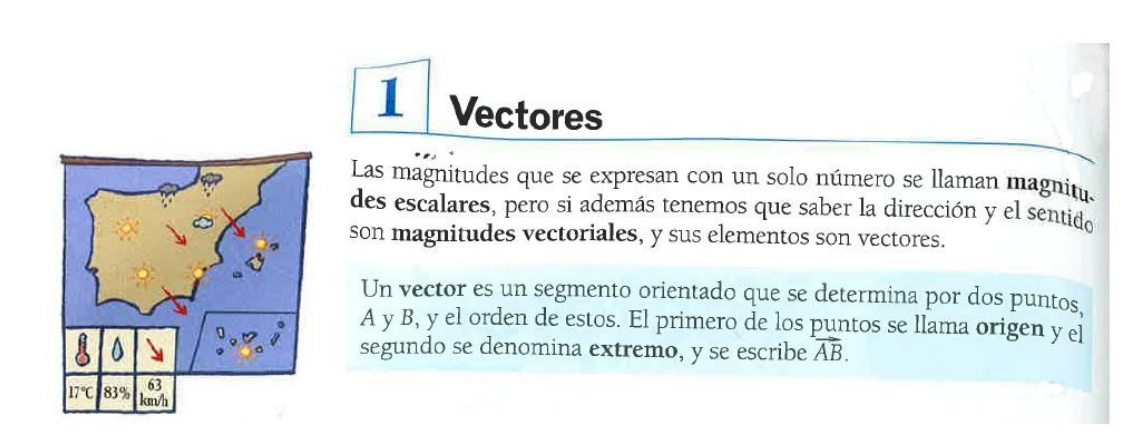


Figura 2: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.3. Problema: búsqueda del tesoro.

Sin embargo, aparecen de forma natural palabras como *dirección*, y de forma implícita *magnitud* "contando los pasos", "el mismo número de pasos", y *sentido* "camina de la horca al roble". Inicialmente se puede resolver de forma gráfica, pero al final de la unidad didáctica se indica cómo resolverlo usando vectores. Seguidamente de este problema se empieza con la definición de vector fijo como un segmento orientado, y se continúa con operaciones con vectores.

En Santillana el vector aparece por primera vez en el tema 8, *Vectores y rectas*, que comienza con un relato corto acerca de unos hermanos que viajan en un tren terminando con una pequeña reflexión acerca de los raíles, que hace referencia únicamente al tema de las rectas. Por lo que el primer contacto que tienen los alumnos con el objeto matemático del vector es un párrafo explicativo sobre la existencia de magnitudes escalares y vectoriales, acompañado este de un dibujo de un mapa meteorológico de España sin explicar explícitamente la relación entre ambos, y seguidamente la definición de vector como un segmento orientado.



1 **Vectores**

Las magnitudes que se expresan con un solo número se llaman **magnitudes escalares**, pero si además tenemos que saber la dirección y el sentido son **magnitudes vectoriales**, y sus elementos son vectores.

Un **vector** es un segmento orientado que se determina por dos puntos, A y B, y el orden de estos. El primero de los puntos se llama **origen** y el segundo se denomina **extremo**, y se escribe $\overline{AB}$.

Figura 3: Santillana, 4ºESOb, tema 8, p.144. Mapa meteorológico.

Como se ve en el mapa meteorológico de la Figura 3, se puede entender que la temperatura del termómetro y la probabilidad de lluvia son magnitudes escalares y el viento, con su magnitud, dirección y sentido, y dibujado como una flecha, es una magnitud vectorial. Sin embargo, desde el punto de vista del alumno, no se relaciona con ningún contenido.

En Anaya, el vector aparece por primera en el tema de *Geometría Analítica*, que comienza con una breve introducción histórica mediante las aportaciones de Descartes y Fermat al campo de la geometría analítica, la primera referencia la vector es únicamente para decir que en la física se usaba desde hace tiempo, pero en la Geometría no se usó hasta el s.XIX. Inmediatamente después, en la página siguiente se comienza con una definición de vector como una flecha que une dos puntos coordenados.

3.2. Campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente

El campo de problemas se constituye en la razón de ser del objeto matemático a enseñar. La aparición de la expresión ‘campo de problemas’ obliga a hacer una distinción entre ‘problema’ y ‘ejercicio’. Entendemos por problema una cuestión a resolver que exige la búsqueda de un modelo matemático y de unas técnicas asociadas que permitan encontrar la solución. En cambio, un ejercicio es simplemente la búsqueda de una solución poniendo en práctica una técnica que ha sido especificada de antemano. Las técnicas son los modelos matemáticos y la gestión de los mismos que es necesario poner en práctica para resolver los campos de problemas, y las tecnologías son todo aquello que describe y justifica dichas técnicas.

De esta manera distinguiremos entre Campo de Ejercicios (CE) y Campo de Problemas (CP).

CE1: Calcular y graficar vectores a partir de puntos coordenados.

Los tres libros cuentan con ejercicios similares al mostrado en la Figura 4.

1 ▼▽▽ Dados los puntos $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$, $C(5, 2)$ y $D(3, -4)$ halla las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$.

Figura 4: Anaya, 4ºESOb, tema 8, p.92. Coordenadas del vector.

La técnica utilizada para resolver el campo de ejercicios anterior es similar en todas las editoriales, “las coordenadas de un vector se obtienen restando las coordenadas de su origen a las de su extremo”. Cabe destacar que en el libro de Proyecto EDAD hay una errata al confundir la notación del módulo, como se muestra en la Figura 5.

- El **módulo**, $|\overrightarrow{\mathbf{AB}}|$, es la longitud del segmento.
- La **dirección**, la de la recta en que se apoya.
- El **sentido**, el que va del origen al extremo.

Podemos expresar el vector mediante sus **componentes**, que se obtienen restando las coordenadas del extremo menos las del origen:

$|\overrightarrow{\mathbf{AB}}| = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$

Figura 5: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.4. Errata.

En algunos, además de lo mostrado en la Figura 4 se pide graficar los vectores obtenidos y calcular su módulo. En las tres editoriales la técnica es $|AB| = |(x, y)| = \sqrt{x^2 + y^2}$ y no se ofrece ninguna tecnología para justificar. Sin embargo, en ningún momento se explicita la técnica para graficar vectores, aunque usualmente se encuentran graficados. Entiendo que al tratarse de "un segmento orientado" se da por sabido el graficar puntos coordenados y unirlos.

CE2: Operaciones (suma, resta, producto por escalar) con vectores, y su graficación.

4. Dados los vectores $\vec{u} = (-2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2)$ y $\vec{w} = (0, 2)$, calcula $3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.

Solución: $3\vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w} = (3 \cdot (-2) - 1 + 2 \cdot 0,\ 3 \cdot 3 - (-2) + 2 \cdot 2) = (-7, 15)$

Figura 6: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.5. Operaciones con vectores.

En los tres libros aparecen ejercicios como el mostrado en la Figura 6, siendo más sencillos los de la editorial Santillana al no incluir ejercicios que traten de forma simultánea el producto de vector por escalar y la suma o resta de vectores.

La técnica que justifica la suma y resta de vectores es "el vector suma se calcula sumando coordenada a coordenada" y el "el vector diferencia se calcula restando coordenada a coordenada". Las tecnologías que justifican estas técnicas son de carácter gráfico como se muestra en la Figura 7.

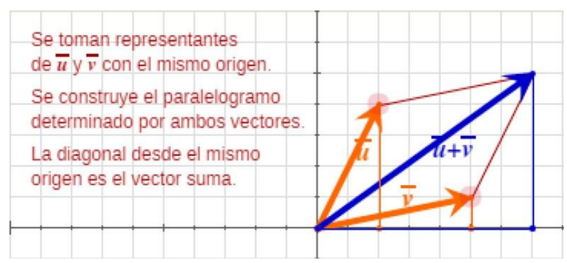


Figura 7: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.5. Justificación gráfica de la suma de vectores.

En el caso de la multiplicación de un vector por un escalar la técnica es "el producto de un número real por un vector es se calcula multiplicando cada componente por dicho número". De nuevo la tecnología que justifica la técnica es visual, como aparece en la figura 8.

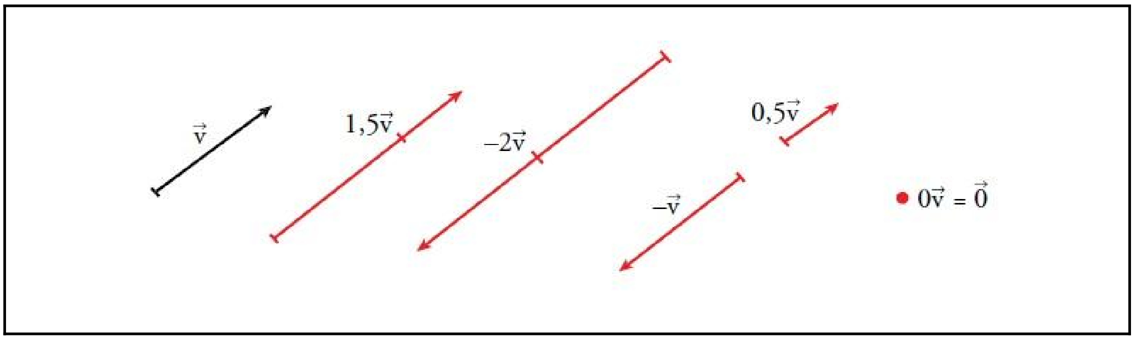


Figura 8: Anaya, 4ºESOb, tema 8, p.85. Multiplicación de un escalar por un vector.

CE3: Punto medio y distancias.

En todos los libros analizados, se suele preguntar de forma conjunta el cálculo del punto medio y la distancia entre dos puntos como aparece en la Figura 9.

18 ▼▽▽ a) Halla el punto medio del segmento de extremos $A(-2, 0)$, $B(6, 4)$.

b) Comprueba que la distancia del punto medio a cada uno de los extremos es la misma.

Figura 9: Anaya, 4ºESOb, tema 8, p.93. Ejercicio de punto medio.

La técnica para calcular distancia es la misma en los tres, identificando la distancia entre dos puntos con el módulo del vector que forman. En Anaya y Santillana no se justifica esta técnica con ninguna tecnología mientras que en el Proyecto EDAD se relaciona con el teorema de Pitágoras.

Sin embargo, a la hora de hallar el punto medio aparecen técnicas distintas. En Santillana se calcula como el punto más la mitad del vector que une los dos puntos, como se muestra en la Figura 10.

69. **Calcula las coordenadas del punto medio del segmento de extremos $A(-2, 3)$ y $B(2, -1)$.**

El **punto medio de un segmento** se calcula sumando al punto A la mitad del vector $\overrightarrow{AB}$.

PRIMERO. Se calculan las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (2 - (-2), -1 - 3) = (4, -4)$$

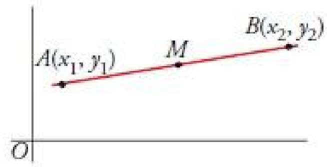
SEGUNDO. Se hallan las coordenadas del punto medio, sumando a A la mitad de $\overrightarrow{AB}$.

$$M = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \rightarrow (x, y) = (-2, 3) + \frac{1}{2}(4, -4) = (0, 1)$$

Las coordenadas del punto medio son $(0, 1)$.

Figura 10: Santillana, 4ºESOb, tema 8, p.157. Técnica para el cálculo del punto medio.

Por otra parte, tanto en Proyecto EDAD como en Anaya la técnica es "Las coordenadas del punto medio de un segmento son la semisuma de las coordenadas de los extremos" y se proporciona directamente la fórmula a aplicar en los ejercicios de la Figura 11.



Si $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$, entonces las coordenadas del punto medio del segmento AB son:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Figura 11: Anaya, 4ºESOb, tema 8, p.86. Técnica para el cálculo del punto medio.

CE4: Hallar las coordenadas de un punto o vector para cumplir requisitos (equivalentes, paralelos, módulo, origen).

Este campo de ejercicios tiene más variabilidad que el resto, y se podía llegar a confundir con un campo de problemas pero por lo general en el propio enunciado se hace referencia a la técnica que hay que aplicar para que la coordenada señalada del punto o vector correspondiente cumpla los requisitos establecidos en el enunciado. Un ejercicio tipo de este campo es el mostrado en la Figura 12.

7 Dados los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 2)$, halla las coordenadas de un punto D para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ sean equivalentes, y también para que sean paralelos.

Figura 12: Santillana, 4ºESOb, tema 8, p.145. Ejercicio sobre posiciones relativas de vectores.

Las técnicas que resuelven este tipo de ejercicios son las mismas que las de los campos de ejercicios anteriores que se haga referencia en los enunciados de los ejercicios. Los requisitos que aparecen en el libro de Anaya se quedan en que un vector tenga un origen o un módulo determinado. Los libros de Santillana o Proyecto EDAD amplían estos a equivalencias o paralelismo. Las técnicas asociadas a los requisitos de vectores equivalentes o paralelos son las siguientes de la Figura 13.

- Dos **vectores** son **equivalentes** cuando tienen el mismo módulo, dirección y sentido. En coordenadas, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son equivalentes cuando sus coordenadas son iguales: $u_1 = v_1$ y $u_2 = v_2$.
- Dos **vectores** son **paralelos** cuando tienen la misma dirección. En coordenadas, $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$ son paralelos cuando sus coordenadas son proporcionales: $\frac{u_1}{v_1} = \frac{u_2}{v_2}$.

Figura 13: Santillana, 4ºESOb, tema 8, p.145. Técnica para ver si dos vectores son equivalentes o paralelos.

Los campos anteriores están presentes en los tres libros analizados, y los siguientes sólo están presentes en el Proyecto Edad. Como se puede observar ni en Anaya ni en Santillana hay campos de problemas, sólo ejercicios de repetición de técnicas y todos ellos intramatemáticos.

CE5: Combinación lineal de vectores.

Pese a que en las editoriales de Anaya y Santillana aparecen ejercicios de operaciones con vectores y la multiplicación de un vector por un escalar como hemos notado en el CE2, la editorial de Proyecto EDAD es la única que da un paso más, planteando la combinación lineal de vectores, cuyas técnicas y tecnologías se sustentan a su vez en las del CE2. En esta clase de ejercicios se pide directamente obtener un vector como combinación lineal de otros dos vectores como en la Figura 14.

> 6. Los vectores $\vec{u} = (1, -1)$ y $\vec{v} = (0, 2)$, tienen distinta dirección. Expresa el vector $\vec{w} = (-2,\ 6)$ como combinación lineal de ellos.

Figura 14: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.6. Ejercicio sobre combinación lineal de vectores.

La técnica que resuelve estos ejercicios es “Un vector $\overline{w}$ es combinación lineal de otros dos $\overline{u}$ y $\overline{v}$, si existen dos números reales, t y s, tales que: $\overline{w} = t \cdot \overline{u} + s \cdot \overline{v}$”. La tecnología en la que se justifica esta técnica, de nuevo, es ver de forma gráfica cómo se puede descomponer un vector en una suma de otros dos vectores multiplicados por escalares como aparece en la Figura 15.

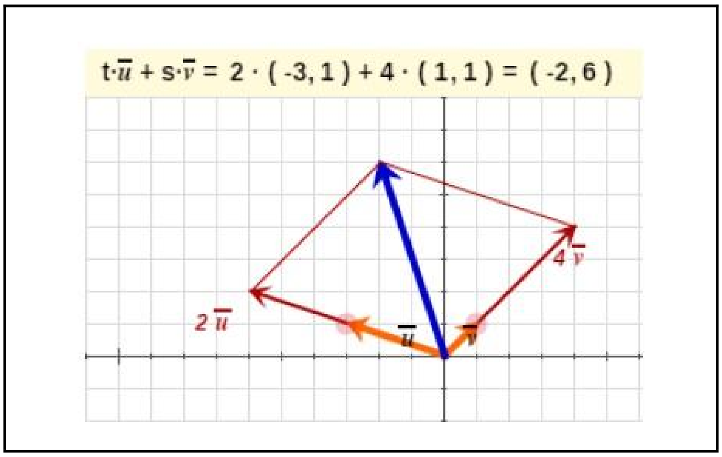


Figura 15: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.6. Justificación de la multiplicación escalar de vectores.

CE6: Producto escalar de vectores.

Los ejercicios de producto escalar que aparecen son fundamentalmente de dos tipos como se ve en la Figura 16.

10. Dados los vectores $\vec{u} = (5, 4)$ y $\vec{v} = (-3, 2)$ calcula su producto escalar, sus módulos y el ángulo que forman.

11. Comprueba mediante vectores y con el teorema de Pitágoras que el triángulo de vértices A(-4, 2), B(5, -1) y C(-2, 8) es rectángulo.

Figura 16: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.13. Ejercicios sobre producto escalar.

El ejercicio 10 de la Figura 16 es arquetípico pero el ejercicio 11 se podría confundir con un problema pero realmente el propio ejercicio propone comprobarlo mediante vectores, y la única forma que tendrían los alumnos de relacionar los ángulos con vectores es una de las fórmulas de producto escalar que aparece en la siguiente Figura 17, que a su vez es la técnica con la que se resuelven este campo de ejercicios.

Dados $\vec{u} = (u_x, u_y)$ y $\vec{v} = (v_x, v_y)$, su producto escalar es:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y$$

Si conocemos el módulo de los vectores y el ángulo que forman, el producto escalar también se puede calcular así:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Figura 17: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.7. Técnicas para el producto escalar.

La tecnología asociada a esta técnica es únicamente una comprobación para un caso particular de que ambas fórmulas arrojan el mismo resultado y su representación gráfica, como se muestra en la Figura 18.

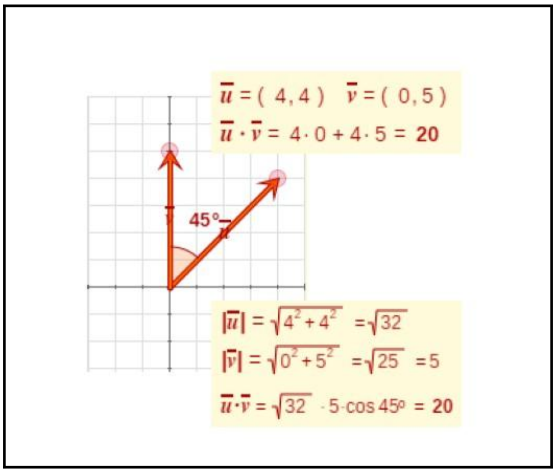


Figura 18: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.6. Justificación de la técnica del producto escalar.

CP1: Representación de vectores y punto medio.

El único problema que se puede denominar como tal se encuentra en el libro de Proyecto EDAD, ya que en el enunciado no se hace referencia a la técnica necesaria para resolverlo, y realmente hay más de una manera de hacerlo. La resolución del problema se muestra de dos formas. una gráfica e interactiva mediante un enlace a una applet y a la vez la resolución analítica como la mostrada en las Figura 19 y Figura 20.

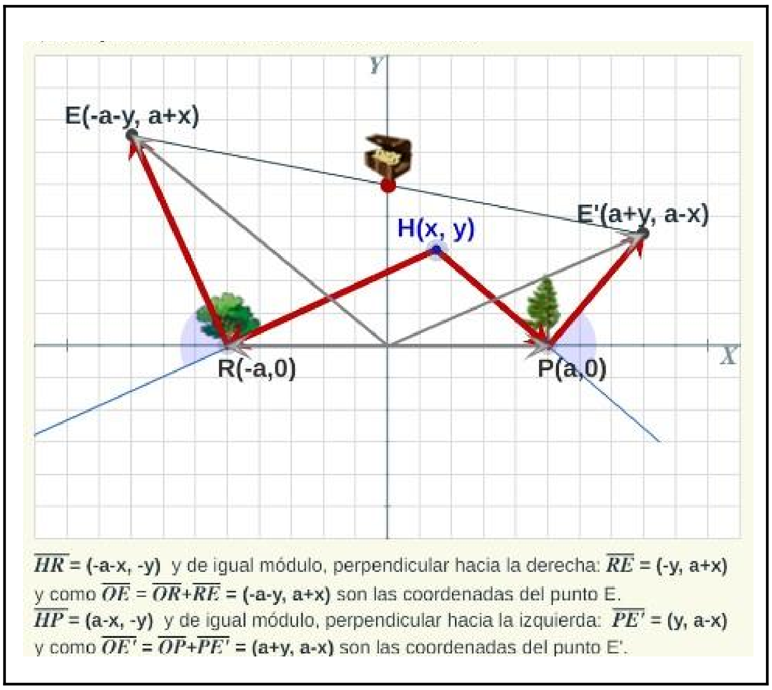


Figura 19: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.7. Applet problema búsqueda del tesoro.

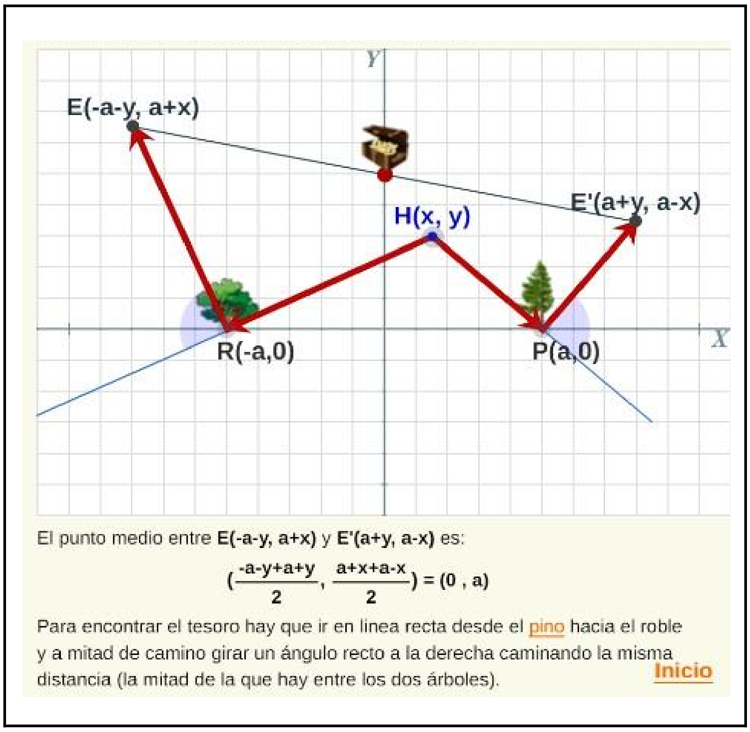


Figura 20: Proyecto EDAD 4ºESOb, tema 8, p.7. Applet problema búsqueda del tesoro.

Conclusiones

En el análisis solo se ha visto un único campo de problemas, la mayoría son campos de ejercicios que van dirigidos única y exclusivamente a trabajar las técnicas aprendidas. No hay ningún problema o ejercicio que tenga como resultado la aparición de dichas técnicas. En este sentido, podemos suponer que los alumnos se encuentran con una repetición excesiva de técnicas y pocos o ningún problema en los que sea necesario reflexionar sobre la técnicas necesarias para resolverlo.

En cuanto a las técnicas en los ejercicios analizados, estas suelen ser la aplicación de una fórmula y a veces la interpretación del resultado. Las tecnologías en las que se sustentan las técnicas suelen ser una deducción de la fórmula a partir de conocimientos previos o la justificación gráfica de que la fórmula funciona.

3.3. Efectos que produce la enseñanza habitual sobre el aprendizaje del alumno

En los libros de texto de Anaya y Santillana se introduce el objeto matemático del vector o directamente, o con una breve introducción histórica sin mencionar apenas el vector. Esto puede hacer que a vista del alumno, el vector quede como un objeto totalmente ajeno a él. En el Proyecto EDAD se empieza planteando un problema donde aparecen de forma natural los elementos constitutivos del vector, como son son la magnitud, dirección y sentido, sin necesitar una explicitación del vector, lo cuál puede mejorar el primer contacto con el objeto matemático más adelante. En esta línea, la primera toma de contacto con el vector, su definición aparece de forma más o menos parecida en las tres editoriales, o bien como un segmento orientado, o mediante la unión de puntos coordenados. Todos estos contextos son intramatemáticos, siendo la única referencia a la vida real un mapa meteorológico usado en Santillana para discernir entre magnitudes vectoriales y escalares dejando intuir con una flecha que el viento sería una magnitud vectorial porque tiene magnitud, dirección y sentido y la temperatura sería una magnitud escalar, pero sin ninguna explicitación, solamente el dibujo. Además, la justificación intramatemática es bastante pobre porque no relaciona los contenidos nuevos con los anteriores que ya se suponen conocidos por los alumnos, como puede ser la relación del Teorema de Pitágoras con el cálculo del módulo del vector.

En conjunto, la introducción del vector queda totalmente desligada del resto del temario, al menos a priori, ya que en temas posteriores como el de rectas en el plano se retomarán muchos conceptos de los vectores, y del contexto diario del alumno.

Como apuntan García-Álvarez y Rodrígez-Muñiz (2013) en base a Rico (1995), la mayor parte de los especialistas establecen unas mismas características de los errores cometidos por el alumnado: surgen de manera espontánea y sorprenden al profesorado; suelen ser muy persistentes porque su corrección «puede necesitar de una reorganización fundamental del conocimiento de los alumnos»; los errores sistemáticos son mucho más frecuentes que los cometidos por azar y, evidentemente, destapan mejor los procesos mentales que subyacen a la resolución de un determinado problema; por último, los errores no son percibidos en el momento por el sujeto, que no cuestiona los conceptos o procedimientos empleados.

Es común utilizar la clasificación de los errores matemáticos de Radatz (1979, pp. 163-172):

- Tipo 1. Errores debidos a dificultades del lenguaje: hace referencia a los problemas que surgen en la "traducción" del lenguaje matemático al que los alumnos usan habitualmente y viceversa.
- Tipo 2. Errores debidos a dificultades para obtener información espacial: a menudo las representaciones mentales que hacemos de los objetos y situaciones matemáticas inducen a error.
- Tipo 3. Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos: en esta categoría se incluye el desconocimiento de todo tipo de conceptos y procedimientos que impidan la resolución correcta de un problema matemático (símbolos, hechos básicos, algoritmos, etc.).
- Tipo 4. Errores debidos a asociaciones incorrectas o rigidez del pensamiento: aquellos que se deben a la incapacidad para adaptar la experiencia previa en la

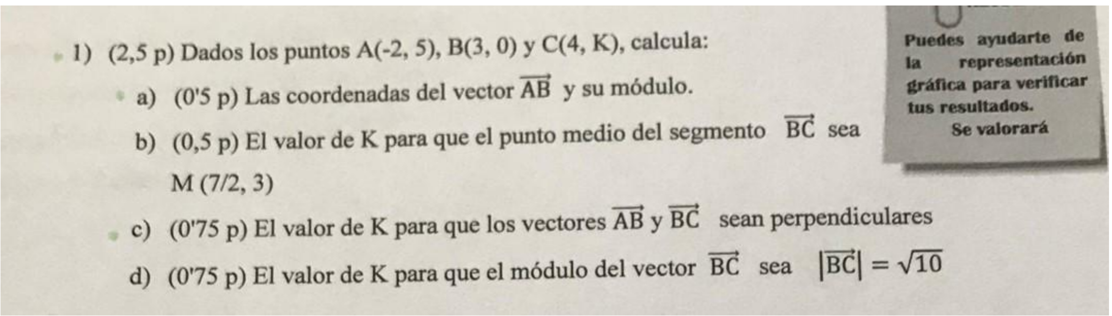
resolución de tareas matemáticas a nuevas situaciones en las que las condiciones no son las mismas. Esta categoría se divide a su vez en otras cinco: errores por perseveración, de asociación, de interferencia, de asimilación y de transferencia negativa a partir de tareas previas.

- Tipo 5. Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes: se hace una analogía errónea, de manera que se aplican reglas o estrategias parecidas en contenidos diferentes.

Con objeto de ver qué efectos, concretamente qué tipo de errores, produce este tipo de enseñanza en los alumnos he realizado un pequeño análisis sobre la parte de la evaluación referida a la unidad didáctica del vector en 4 ESO en el instituto donde realicé las prácticas, el Colegio Romareda. En este instituto no utilizaban ningún libro de texto sino que utilizaban un cuadernillo de ejercicios propio que está público en su página web y la teoría la impartía el profesor en clase. Para ello se va a analizar y clasificar los errores según su tipo, siendo posible que un error sea de varios tipos, y a modo de resumen ordenan en la Tabla 1.

La parte de contenidos de vectores de la prueba diseñada para la evaluación consistía en los siguientes ejercicios mostrados en las Figuras 19 y 23.

Ejercicio 1


1) (2,5 p) Dados los puntos A(-2, 5), B(3, 0) y C(4, K), calcula:

a) (0'5 p) Las coordenadas del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo.

b) (0,5 p) El valor de K para que el punto medio del segmento $\overrightarrow{BC}$ sea M (7/2, 3)

c) (0'75 p) El valor de K para que los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC}$ sean perpendiculares

d) (0'75 p) El valor de K para que el módulo del vector $\overrightarrow{BC}$ sea $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{10}$

Puedes ayudarte de la representación gráfica para verificar tus resultados. Se valorará

Figura 19: Ejercicio 1 Prueba de evaluación durante Practicum II.

Apartado a)

Errores comunes:

- Calcular bien el vector $\overline{AB}$ pero después simplificarlo como si se tratara de un vector director como se muestra en la Figura 20, utilizando la notación que vieron en la parte de rectas. Este error está claramente relacionado con que el objeto matemático del vector suele ir incluido en una unidad didáctica junto a las rectas, por lo que confunden técnicas al no tener bien interiorizada la teoría que las sustenta. Por lo tanto al calcular el módulo ha obtenido un número menor que el resultado correcto. Dicho error se clasifica como Tipo 3 al aplicar de forma deficiente la técnica y como Tipo 5 al aplicar la simplificación del vector director en un contexto erróneo. Además esto podía resultar un obstáculo didáctico al tratar de forma casi simultánea conceptos de vectores y rectas dificultando la asimilación de los contenidos al alumnado.

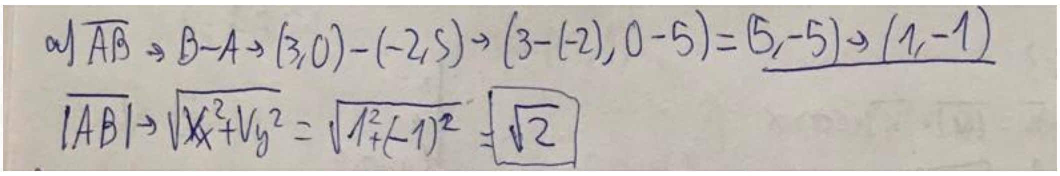


Figura 20: Error al simplificar un vector para calcular el módulo de un vector.

Otros errores:

- En vez de calcular el vector $\overline{AB}$ muchos alumnos han calculado el vector $\overline{BA}$. Pese a esto, la mayoría han calculado bien el módulo aplicando bien la técnica correspondiente. Sin embargo ha habido también algún error al confundir la técnica asociada al módulo de un vector con la del producto escalar como se muestra en la siguiente Figura 21. Este error no lo tiene la confusión de técnicas sino que denota una falta de conocimiento teórico sobre el módulo de un vector, ya que por definición este debe de ser positivo, lo podríamos clasificar como Tipo 3.

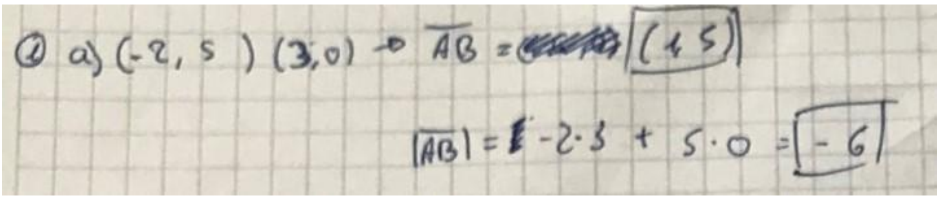


Figura 20: Error al determinar un vector y su módulo.

- De nuevo una confusión con la técnica del producto escalar, pero ahora mal aplicada con la técnica de obtener un vector a partir de dos puntos como se muestra en la Figura 21. Este error no es fortuito ya que vuelve a aparecer en los siguientes ejercicios. Este error se puede deber a una mala concepción del vector y al igual que el resto de errores se podían haber detectado por parte del alumnado con una representación gráfica.

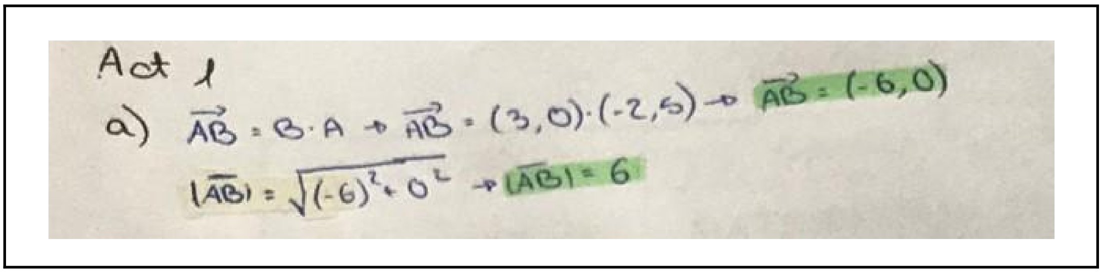


Figura 21: Error al determinar un vector.

Apartado b)

Errores comunes:

- Enunciados mal copiados, al poner otros puntos coordenados el alumno llega a una ecuación sin solución. Este tipo de error sería Tipo 1, un error al “traducir” el lenguaje matemático.
- Aplicar mal la técnica asociada al punto medio, usar la semirrecta en vez de la semisuma, llegando así a una ecuación sin solución como se muestra en la Figura 22. Es un error Tipo 3 al utilizar mal la técnica, también Tipo 4 al no haber trabajado antes con un ejercicio de punto medio con parámetros.

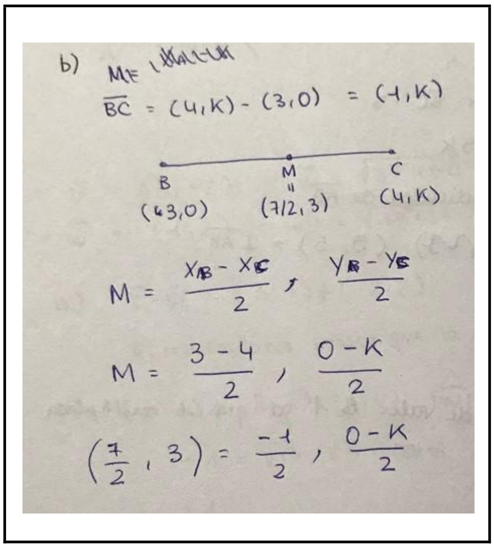


Figura 22: Error al calcular el punto medio.

Otros errores:

- Error al relacionar el punto medio con las distintas ecuaciones de las rectas.
- Confusión del concepto de punto medio con mediatriz visto en la parte de rectas, y por lo tanto realización de un ejercicio distinto al que se pide.

Apartado c)

Errores comunes:

- Confundir los conceptos de paralelismo y perpendicularidad. Este error no se si se puede deber a un error al trasladar la información del enunciado al examen de los alumnos, siendo así un error Tipo 1, o a una confusión entre los dos conceptos matemáticos, siendo así Tipo 4 al asociar erróneamente paralelismo y perpendicularidad.

Apartado d)

Errores comunes:

- Copiar mal los datos del enunciado, error Tipo 1.
- Fallos aritméticos y algebraicos al trabajar con ecuaciones con raíces

Ejercicio 2

2) (2 p) Dados los vectores $\vec{v} = (3, -2)$ y $\vec{w} = (1, 2)$, calcula:

a) (0'5 p) El producto escalar $\vec{v} \cdot \vec{w}$. ¿Qué información nos da el resultado?

b) (1 p) El ángulo formado por los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. Compruébalo gráficamente de forma aproximada.

c) (0'5 p) Un vector $\vec{u}$ que forme un ángulo de 180° con $\vec{v}$

Figura 23: Ejercicio 1 Examen durante Practicum II.

Apartado a)

Errores comunes:

- Más que un error, la mayoría de alumnos calculaban bien el producto escalar pero no se atrevían a interpretar ese resultado tal y como pedía el enunciado. Esto puede ser debido a que los alumnos aprenden las técnicas para repetirlas pero realmente no comprenden la teoría que las sustenta al justificarse con tecnologías un poco pobres, siendo así un error Tipo 3 o quizás un obstáculo didáctico al haber trabajado más en clase la repetición de técnicas que sus variaciones o fundamentaciones teóricas.

Apartado b)

Errores comunes:

- Errores al operar con ecuaciones donde aparecen raíces al aplicar la técnica del producto escalar.

- Muchos alumnos no dibujan los vectores, no se si por falta de tiempo o por desconocimiento. Por contra, los alumnos que no conocen la técnica del producto escalar sí dibujan los vectores y realizan una aproximación al ángulo que forman.

Apartado c)

Errores comunes:

- Pese a que la mayoría de los los alumnos realizaron bien el apartado b) que en esencia es parecido a este, muchos alumnos no han puesto nada en este ejercicio. Esto puede deberse al tiempo o a que no comprenden en su totalidad la técnica del producto escalar y su interpretación del ángulo entre vectores. De nuevo Tipo 3 o obstáculo didáctico relacionado con la falta de trabajo del producto escalar.

Otros errores:

- Confundir entre dirección y sentido del vector como se muestra en la Figura 24. Además se ve que el alumno ha intercambiado el valor de las componentes del vector como si hubiera aplicado mal la técnica de “intercambiar las componentes y cambiarle a una el signo” para conseguir un vector perpendicular a uno dado.

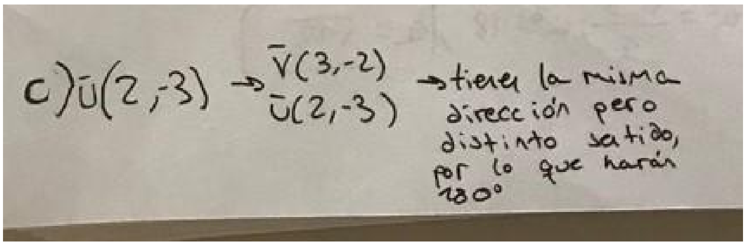


Figura 24: Error en las posiciones relativas de vectores.

Además, aprovechando este error cabe destacar que durante la clase teórica donde apareció por primera vez la noción de dirección y sentido de un vector, los alumnos entendían por dirección lo que matemáticamente es sentido, por poner un ejemplo puesto por un alumno: “en la carretera los coches del carril de al lado van en dirección contraria”, cuando realmente van en sentido contrario, la dirección es la misma salvando las distancias. Esto quizás podría considerarse como un obstáculo cultural.

3.4 Conclusiones

En la siguiente Tabla 1 se muestra la relación de los errores con los tipos de error:

Ejercicios		Errores comunes	Tipo de error
1 a)	Determinar un vector $\overline{AB}$ y calcular su módulo.	Simplificar el vector y así calcular un módulo erróneo.	Tipo 3 y 5.
		Calcular el vector $\overline{BA}$ en vez del vector $\overline{AB}$.	Tipo 3.
		Calcular $\overline{A}\cdot\overline{B}$ en vez de $\overline{AB}$.	Tipo 3.
1 b)	Hallar una condición para que se cumpla un punto medio.	Aplicar la semiresta en vez de la semisuma.	Tipo 3 y 4.
		Confundir punto medio con mediatriz.	Tipo 4.
1 c)	Hallar una condición para vectores perpendiculares.	Confundir paralelismo y perpendicularidad.	Tipo 1 y 4.
1 d)	Hallar una condición para que se cumpla el módulo de un vector.	Errores aritméticos al no tener en cuenta la raíz del módulo.	Tipo 1.
2 a)	Producto escalar e interpretación.	No interpretar que si el producto escalar es positivo el ángulo que forman los vectores es menor que 90º.	Tipo 3.
2 b)	Calcular el ángulo que forman dos vectores y comprobar gráficamente.	Aplicar mal la técnica.	Tipo 3.
		Representar gráficamente y dar un valor aproximado del ángulo.	Tipo 3.

2 c)	Hallar un vector que forme 180º con otro dado.	Confundir dirección y sentido.	Tipo 3.

Tabla 1: Relación de ejercicios y errores.

Como apuntábamos antes, la repetición de técnicas no es suficiente para que los alumnos se enfrenten a problemas o a ejercicios con variaciones de las técnicas utilizadas. Los alumnos tienen dificultades para operar con vectores y para construirlos, confundiendo habitualmente las técnicas que se usan para trabajar con vectores.

Atendiendo a la clasificación de errores de Radatz (1979) la mayoría son del Tipo 3, debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos. No aparece el el error Tipo 2, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, ya que en ningún ejercicio se requiere extraer información de representaciones espaciales. En cuanto a los obstáculos creo que la mayoría son didácticos, no habiendo ninguno ontogenético. Sobre el obstáculo epistemológico, no aparece ya que en ningún momento se plantea ninguna situación parecida al origen histórico del vector, ni en su génesis matemática ni en su génesis física.

En resumen, la mayoría de los errores vienen de la memorización de una serie de técnicas que los alumnos no entienden, por lo tanto se pueden cometer fallos por no recordar correctamente dichas técnicas o por no saber cuándo aplicarlas. Además muchos de los errores derivan de la confusión entre las técnicas asociadas a los vectores y las técnicas asociadas a las rectas.

4. Sobre los conocimientos previos

Las matemáticas son una asignatura jerarquizada en cierto sentido, “la posibilidad de pasar de un tema a otro depende con frecuencia de una buena comprensión de las cuestiones anteriores” (Cockcroft, 1895, p.83).

El objeto matemático del vector tiene la ventaja de poder trabajarse tanto de forma analítica como de forma gráfica, por lo que para afrontar de la mejor manera el aprendizaje del vector todos los conocimientos que posea el alumno acerca de geometría para su visualización, y de resolución de ecuaciones en general para operar con vectores. En concreto podemos destacar los siguientes conocimientos.

Para la visualización del vector:

- Representación de puntos coordenados en el plano, para graficar vectores en el plano.

Para operar con vectores:

- Teorema de Pitágoras, para calcular el módulo del vector.
- Proporcionalidad, para ver las posiciones relativas de los vectores en el plano.

4.1. Facilitación de los conocimientos previos por parte de la enseñanza habitual

Haciendo un breve recorrido por los contenidos de los currículos oficiales de los cursos de 1º, 2º y 3º ESO, se supone que los alumnos deberían tener los conocimientos nombrados anteriormente, o mejor dicho, la enseñanza anterior debería haber propiciado la adquisición de dichos conocimientos.

En concreto, los contenidos institucionales que aparecen en la Orden ECD/489/2016, de 26 de mayo referidos a los conocimientos previos nombrados anteriormente son:

Para la visualización del vector:

- Representación de puntos coordenados en el plano, para graficar vectores en el plano.

  - 1º y 2º ESO: Bloque 4: Funciones. Coordenadas cartesianas: representación e identificación de puntos en un sistema de ejes coordenados.

Para operar con vectores:

- Teorema de Pitágoras, para calcular el módulo del vector.

  - 1º ESO: Bloque 3: Geometría. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Aplicaciones directas.

  - 2º ESO: Bloque 3: Geometría. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

- Proporcionalidad, para ver las posiciones relativas de los vectores en el plano.

  - 1º y 2º ESO: Bloque 2: Números y Álgebra. Razón y proporción. Magnitudes directa e inversamente proporcionales. Constante de proporcionalidad.

4.2. Actividades para asegurar que los alumnos posean los conocimientos previos

En principio los alumnos deberían tener los conocimientos necesarios para afrontar la incorporación del nuevo objeto matemático del vector. Sin embargo, lo más probable es que los alumnos carezcan de soltura en alguno de estos conocimientos o directamente no los conozcan. Para ello se van a plantear las siguientes actividades introductorias con un doble objetivo, repasar los conocimientos previos necesarios y servir de evaluación inicial para permitir subsanar posibles carencias en los alumnos.

Actividad Inicial 1.

El objetivo de esta actividad es practicar la representación de puntos coordenados y segmentos en el plano. Para ellos se les planteará a los alumnos el juego de *Hundir la flota* pero donde los ejes sean los ejes cartesianos con el eje de las abscisas y las ordenadas numerados en vez de un eje con números y otro con letras como suele aparecer el juego clásico. Así mediante esta sencilla actividad introductoria los alumnos tendrán que identificar puntos en el plano.

Los alumnos recibirán una ficha con el tablero de juego, una cuadrícula de 10 unidades de lado con unos ejes coordenados en el centro, mostrado en la Figura 25 y las siguientes instrucciones:

- Dibuja en tu tablero los siguientes barcos:

  - Portaaviones: Ocupa 4 unidades del tablero solo se puede poner en horizontal o vertical.

  - Buque: Ocupa 3 unidades del tablero solo se puede poner en horizontal o vertical.

  - Lancha: Ocupa 1 unidad de tablero.

  - Barca: Ocupa 1 unidad de tablero.

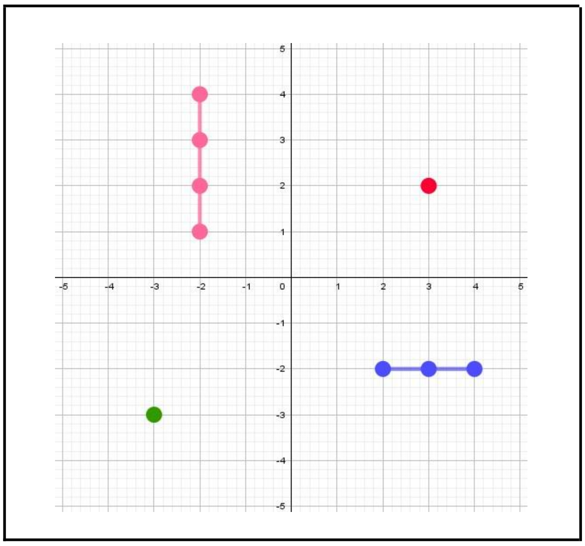


Figura 25: Ejemplo de tablero.

- Para “hundir” los barcos los jugadores van diciendo puntos coordenados una vez cada uno, y en el caso que haya un barco en dicha coordenada el barco queda “tocado”, y repite la jugada, cuando todos puntos que forman un barco están “tocados”, el barco se “hunde”. Ejemplo: para “disparar” a la coordenada (2,-3) se dice: “coordenada dos, menos tres”, no se dice “coordenada dos coma menos tres”.

Actividad Inicial 2.

El objetivo de esta actividad es repasar el teorema de Pitágoras de cara a la técnica del módulo. Los alumnos recibirán el siguiente enunciado junto a la Figura 26.

“La escalera está apoyada sobre la pared y llega a una altura de 3,5 metros, si la distancia de la pared a la base de la escalera es 1,2 metros, ¿cuánto mide la escalera?”

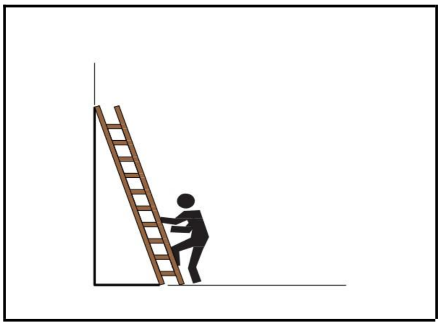


Figura 26: Actividad Inicial 2.

5. Sobre las razones de ser del objeto matemático

5.1. Razones de ser en la introducción escolar del vector

El objeto matemático del vector forma parte de la geometría, pero en este punto tenemos que distinguir entre geometría sintética y geometría analítica. La geometría sintética (o pura) es aquella que se construye a partir de una serie de axiomas y se desarrolla mediante proposiciones lógicas. Según (Gascón, 2003) la geometría sintética sería un proceso de modelización de situaciones relativas al espacio real, como problemas con “regla y compás” de construcción geométrica, mientras que la geometría analítica sería la modelización de esta geometría sintética.

En esta línea, el mismo autor precisa que son las limitaciones de las técnicas sintéticas las que dan sentido (son las razones de ser) a las técnicas analíticas. Es decir, las técnicas de la geometría analítica constituyen la respuesta a algunas de las limitaciones que presentan las técnicas sintéticas para resolver problemas originalmente geométricos pensados sin utilizar coordenadas. Estos problemas de construcción o de determinación de figuras geométricas a partir de elementos del plano como puntos o segmentos que mantienen entre sí relaciones que pueden describirse y manipularse más eficazmente con las técnicas analíticas (Gascón, 2002).

Dentro de este marco, la introducción escolar del vector aparece como un elemento necesario para la resolución de problemas de geometría sintética, pero como una herramienta fundamental en que posteriormente formará parte de la geometría analítica. Esta va a ser una de las razones de ser de la introducción del objeto matemático del vector. Otra de las razones de ser, como veremos a continuación, va a coincidir con la génesis física del vector, que podemos resumir en la necesidad de operar con magnitudes vectoriales, en concreto el desplazamiento y la velocidad.

5.2. Razones de ser históricas del vector

De las dos razones de ser que se van a proponer en el presente trabajo sólo una coincide con las razones de ser históricas del vector, la razón de ser que viene del campo de la física, ya que esta proporciona un abanico más amplio de actividades cercanas al contexto del alumno que la razón de ser de origen puramente matemático, más compleja y que podría representar un obstáculo ontogenético para los alumnos de 4º ESO.

Al principio de este trabajo apuntábamos los dos orígenes que tuvo el vector. Una génesis física, de la mano de Galileo (1564-1642) con los experimentos del plano inclinado y tiro parabólico y su consecuente modelización matemática mediante el movimiento rectilíneo uniformemente (MRU) y el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA). De esta manera nació la cinemática, la primera descripción matemática de un fenómeno físico, el movimiento. A la hora de realizar los diagramas de velocidad de los cuerpos estudiados era necesario además de indicar su magnitud, indicar también su dirección y sentido. Más evidente era la necesidad de ampliar la concepción de número a la hora de estudiar el tiro parabólico, ya que ahora la velocidad se puede descomponer en dos contribuciones, una horizontal siguiendo un MRU y una vertical siguiendo un MRUA. En esta línea se necesitaba la "creación" de un nuevo objeto matemático que permitiera realizar esta nueva suma de distintas componentes. Así, surgió todo un nuevo campo de estudio, los vectores. Newton (1642-1727) los usó para el estudio de fuerzas, y Faraday (1791-1867) amplió este concepto al de campo vectorial.

Por otra parte, unos años después y de la mano de Leibniz (1646-1716), en un contexto puramente matemático, el desarrollo del álgebra viró hacia un álgebra cada vez más abstracta y general. Más adelante, Hamilton (1805-1805) con sus estudios de los números complejos y sus operaciones utilizó una representación geométrica de éstos en el plano como segmentos dirigidos, abriendo el campo de la representación de magnitudes vectoriales. En resumen, podemos dividir la razón de ser histórica del vector en dos, una intramatemática y otra extrametemática.

5.3. Problemas que constituyen las razones de ser del vector

Según Cid y Muñoz-Escolano (2019) la didáctica de las matemáticas hace la siguiente hipótesis metodológica:

> Para que un alumno se sienta motivado, adquiera conocimiento matemático, es decir, información matemática que le sirva para resolver problemas, y organice los conocimientos y saberes en forma de buenas concepciones, es necesario que pase por la experiencia de construir personalmente, con la colaboración de sus condiscípulos y la ayuda del profesor, las praxeologías matemáticas correspondientes a dichos conocimientos.

En esta línea desde la teoría antropológica de lo didáctico, el profesor debe presentar a los alumnos tareas que contribuyan a una construcción escolar del saber matemático a enseñar. Esto exige una recontextualización y una repersonalización de dicho saber. Una recontextualización en la que se presente un campo de problemas cuyos enunciados puedan expresarse en términos de saberes anteriormente aprendidos, pero que dé sentido al nuevo objeto de saber, que justifique la necesidad de construirlo como medio para resolver dicho campo de problemas. En estas condiciones, el campo de problemas se constituye en la razón de ser del objeto matemático a enseñar. A continuación se proponen dos problemas que constituyen las dos razones de ser elegidas anteriormente para introducir a la enseñanza el objeto matemático del vector.

Problema razón de ser 1

Los alumnos tendrán una ficha con la Figura 27 junto al siguiente enunciado:

Ayuda a Mario a escapar de la tortuga Koopa. La tortuga avanza moviéndose un unidad hacia la derecha cada turno. Mario solo puede realizar los siguientes movimientos:

- Saltar (pulsando el botón A): Se mueve dos unidades hacia arriba.
- Desplazarse a izquierda y derecha (pulsando la cruceta): Se mueve una unidad hacia la dirección indicada.

Si pulsas el botón A y Mario salta y choca contra el ladrillo y cae mientras la tortuga avanza y pierdes la partida. Si pulsas la cruceta hacia la izquierda te chocas con la tortuga y pierdes. Ir con Mario hacia la derecha más allá del mapa no es una opción en este juego, ya que el mapa solo se desplaza hacia la izquierda.

- Escribe las coordenadas del ladrillo, el bloque, Mario y Koopa.

- ¿Cómo podemos salvar a Mario? Elige la combinación correcta de botones, y escribe las coordenadas del ladrillo, el bloque, Mario y Koopa en el siguiente turno.

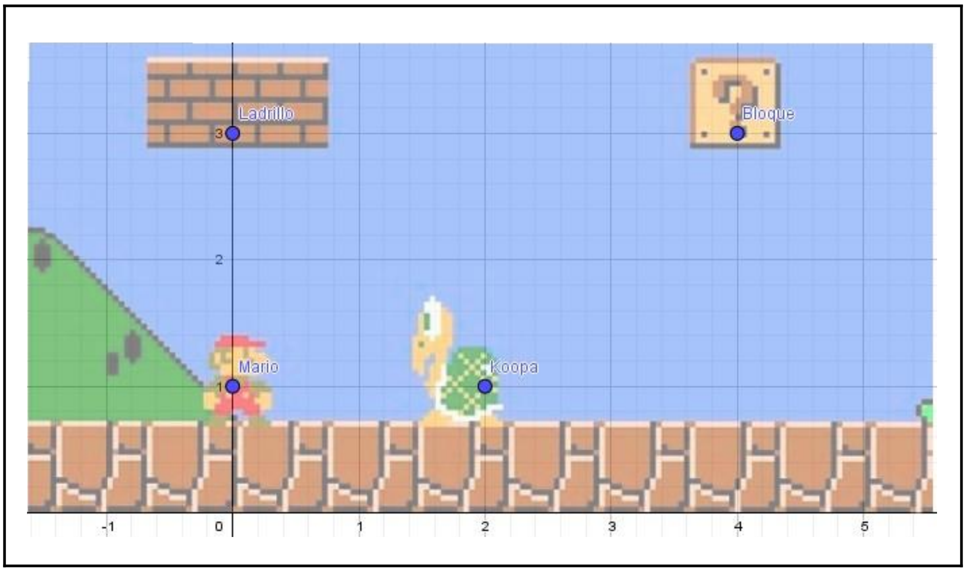


Figura 27: Problema razón de ser 1.

El objetivo de este problema introductorio es que los alumnos vean la necesidad de componer magnitudes vectoriales, en este caso el desplazamiento, sin saber aún el concepto de magnitud vectorial. Sin saberlo, estarán definiendo vectores, aplicando vectores a puntos y viendo cómo actúan los vectores. Para que vean lo que pasa cuando no se aplican vectores se sigue preguntando por las coordenadas del ladrillo y el bloque.

Solución: Al pulsar el botón A y la cruceta hacia la izquierda Mario realiza el siguiente movimiento mostrado en la Figura 28.

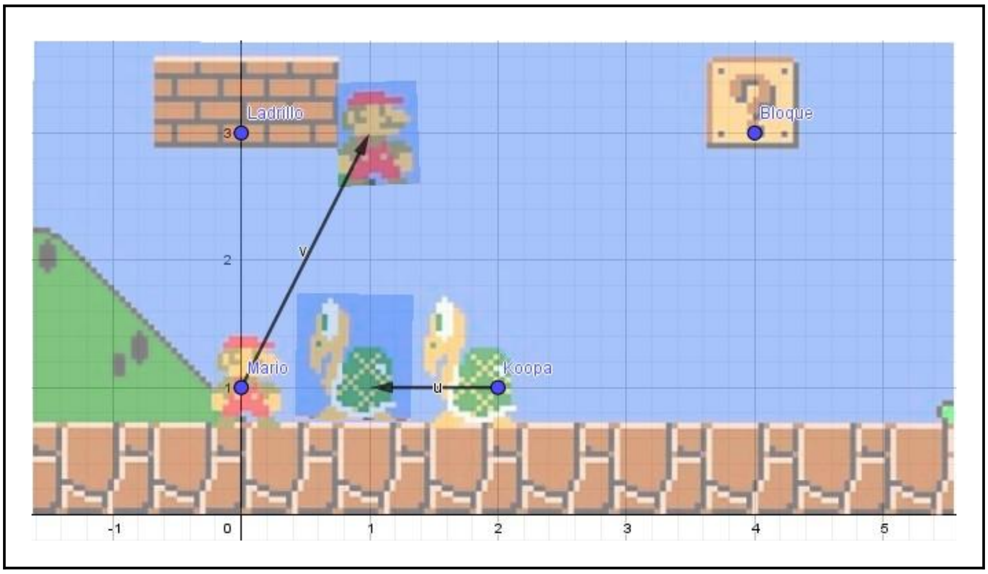


Figura 28: Solución problema razón de ser 1.

Una vez lo alumnos hayan llegado a esta solución de la Figura 28 se les planteará la segunda parte del problema:

Mario está en pleno vuelo del salto, ahora tienes dos opciones: saltar encima de la tortuga o seguir huyendo hacia la izquierda.

- ¿Qué movimientos tendría que hacer Mario para estas dos opciones?
- ¿A qué coordenadas del mapa llegaría?

Una de las soluciones de esta segunda parte del problema se muestra en la Figura 29:

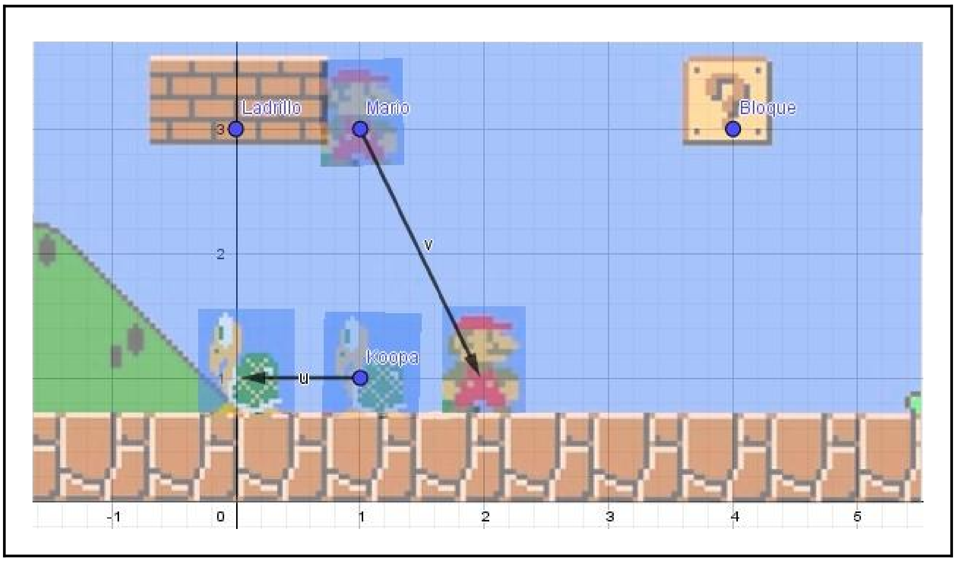


Figura 29: Solución problema razón de ser 1.

El objetivo de este problema introductorio es que los alumnos vean la necesidad de componer magnitudes vectoriales, en este caso el desplazamiento, sin saber aún el concepto de magnitud vectorial. Sin saberlo, estarán definiendo vectores, aplicando vectores a puntos y viendo cómo actúan los vectores. Para que vean lo que pasa cuando no se aplican vectores se sigue preguntando por las coordenadas del ladrillo y el bloque.

Problema razón de ser 2

Los alumnos tendrán una ficha con la Figura 30 y el siguiente enunciado:

Figura 30: Problema razón de ser 2.

Un granjero está en el huerto, y de repente una racha de fuerte viento arroja el Sombrero 1 a la localización Sombrero 1'. Si la misma racha de viento ha arrastrado el sombrero 2 del espantapájaros, ¿Donde está ahora el Sombrero 2'? Resuelve el problema utilizando regla y compás si es necesario. ¿Serías capaz de resolverlo sin regla y compás, de manera analítica?

Para la segunda solución sería necesario establecer unos ejes coordenados y situar las coordenadas de los sombreros conocidos, así, identificando el viento como una magnitud vectorial, establecer el vector que desplaza uno de los sombreros para hallar el restante como se muestra en la Figura 31.

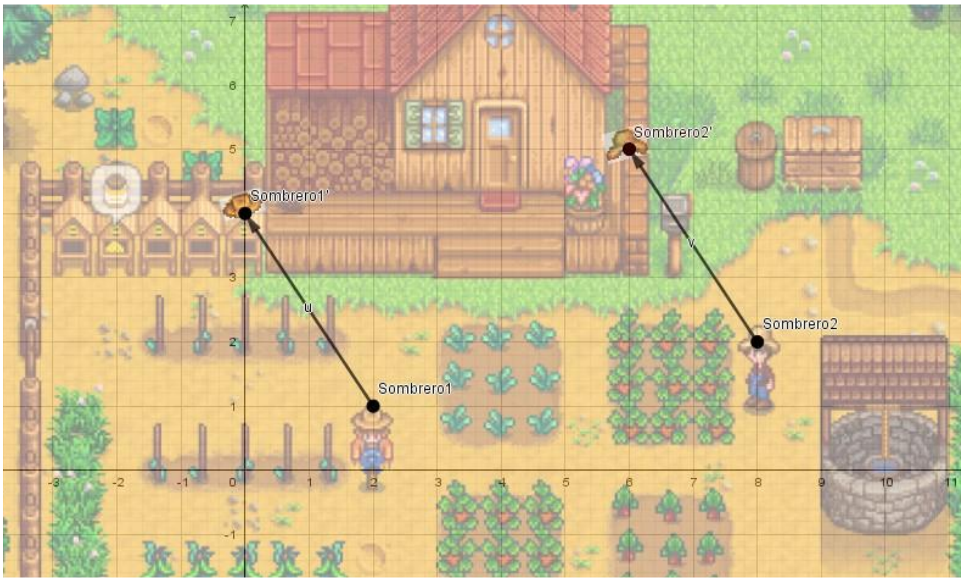


Figura 31: Solución problema razón de ser 2.

Este problema es en realidad un problema típico de traslación de puntos en un plano. Primero se les pedirá que los resuelvan como una problema de geometría sintética, y después se les pedirá resolverlo analíticamente para justificar la aparición del objeto matemático del vector como un elemento de geometría analítica y razón de ser de la geometría sintética de “regla y compás”.

5.4. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Gutiérrez y Jaime (2012) apuntan que no es posible analizar adecuadamente la enseñanza y el aprendizaje de la geometría sin tener en cuenta la influencia de las formas de presentar la información gráfica en la comprensión por los estudiantes de los contenidos estudiados. aprendizaje.

El modelo de razonamiento de Van Hiele (1986) es actualmente uno de los marcos más utilizados en la didáctica de las matemáticas para organizar la enseñanza de la geometría y realizar una correcta evaluación del aprendizaje de los estudiantes. Este modelo explica cómo se produce la evolución del razonamiento geométrico de los estudiantes dividiéndolo en cinco niveles consecutivos: la visualización, el análisis, la deducción informal, la deducción formal y el rigor, para cada aprendizaje nuevo.

En este caso estamos ante un aprendizaje de un nuevo objeto matemático como es el vector, por lo que con los problemas anteriores que constituyen la razón de ser así como con los que se plantearán en los siguientes apartados se buscará una evolución en torno a los tres primeros niveles de Van Hiele: visualización, análisis y deducción informal. Los problemas están preparados para realizarse en hojas de papel pero también se pueden realizar en Geogebra.

Para la realización de los ejercicios los alumnos se dispondrán en grupos de 3 o 4 personas para facilitar la comunicación entre los alumnos. En ambos problemas se pretende que mediante las representaciones y construcciones del propio se obtengan conclusiones y las primeras nociones de vector.

6. Sobre el campo de problemas

Una vez establecidos los problemas para asegurar conocimientos previos y los problemas razón de ser del vector en este apartado se van a presentar los distintos campos de problemas que se van a desarrollar en la unidad didáctica. En la línea de los problemas propuestos anteriormente se va intentar que los alumnos aprendan matemáticas a través de problemas, alejándonos del modelo habitual de los libros de texto analizados en el apartado B. Así, en la medida de lo posible la finalidad de los campos de problemas es introducir de forma justificada las técnicas que los resuelven. Se van a plantear los siguientes campos de problemas:

- CP1: Magnitudes escalares y vectoriales (módulo, dirección y sentido).
- CP2: Representación y propiedades de los vectores. Cálculo del módulo.
- CP3: Operaciones con vectores. Punto medio.
- CP4: Posiciones relativas.

6.1. Distintos tipos de problemas que se van a presentar en el aula

CP1: Magnitudes escalares y vectoriales (módulo, dirección y sentido).

Este campo de problemas es el primero al que se enfrentarán los alumnos y se centra principalmente justificar la necesidad de utilizar magnitudes vectoriales en vez de escalares en según qué problemas.

Problema 1.

Transcribe a lenguaje matemático o representación gráfica los siguientes enunciados, dí que magnitudes entran en juego en cada uno e intenta resolverlos analíticamente.

- El vuelo sale del aeropuerto a las 16:25, si llegué 35 minutos tarde, ¿a qué hora llegué al aeropuerto?
- Un vuelo sale de Madrid y va a recorrer 3400 Km, ¿Cuál es el destino del vuelo?

- Esta noche el termómetro marcó 6 grados menos que ayer, si ayer el termómetro marcó 21 grados, ¿qué temperatura hacía?
- Dos equipos están jugando a tirar de la soga, ¿qué equipo va a ganar?
- Mi hermano mide 185 cm, si yo mido 8 cm menos, ¿cuál es mi estatura?
- Un arquero dispara una flecha hacia tres dianas, si la flecha va a 10 una velocidad de m/s, ¿a cuál de las tres dianas le ha dado la flecha?
- Vas en coche en la carretera haciendo el trayecto Zaragoza-Teruel y ves otro coche a 105 Km/h, ¿ese coche va hacia Zaragoza o hacia Teruel?

Se supone que hasta ahora los alumnos no han trabajado con magnitudes vectoriales así que habrá enunciados en los que les falte información. Se supone que pedirán esta información que será una de las características de las magnitudes vectoriales, módulo, dirección y sentido. Además servirá para ver qué tipo de magnitudes son escalares y cuales vectoriales al ver que unas quedan completamente definida por un número, y en otras necesitan más información.

CP2: Representación y propiedades de los vectores. Cálculo del módulo.

Problema 2.1.

Los alumnos tendrán una ficha con la Figura 31 y el siguiente enunciado:

Un cartero tiene que entregar 5 paquetes en las casas situadas en las coordenadas A(2,1), B(4,2), C(2,3), D(4,3) y E(3,5). Para ello realiza los siguientes movimientos en representados por los vectores u(2,1), v(-2,1), w(1,2) y a(1,-2). El vector (x,y) significa un desplazamiento x en el eje OX y un desplazamiento y en el eje OY.

- Si fueras tú el cartero, ¿ se te ocurre una ruta más eficiente para terminar el trabajo antes y poder irte a casa?

  Demuestra por qué tu ruta es más eficiente y que 4 vectores de desplazamiento tendría.

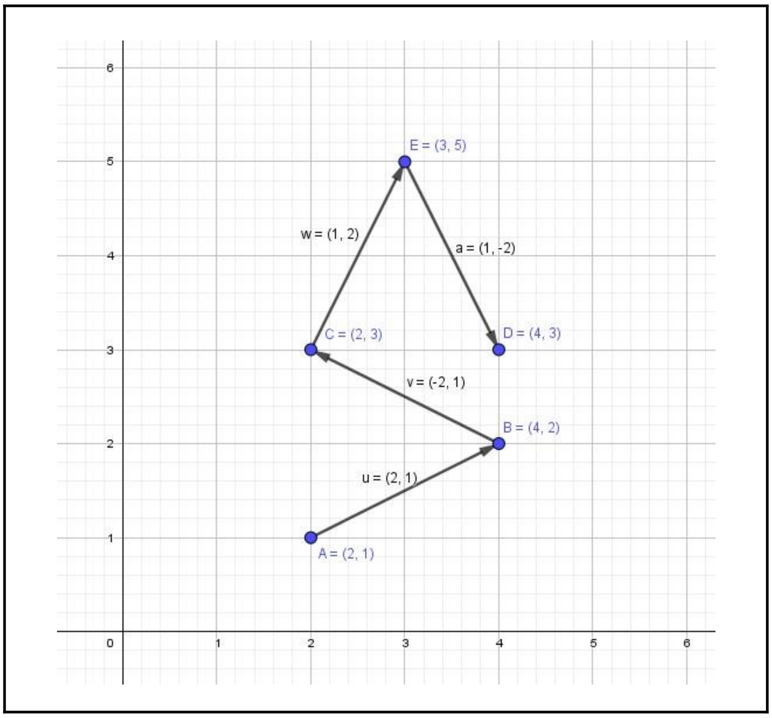


Figura 31: Problema 2.1.

El objetivo del problema es que los alumnos construyan la técnica de representación gráfica y analítica ellos mismos. Además se espera que sean capaces de dar una ruta más corta y para justificarlo tenga que aparecer la noción de módulo de vector, para poder medir las distintas distancias y comparar ambas rutas, apareciendo así la técnica asociada al cálculo del módulo.

Problema 2.2.

La imagen de la Figura 32 muestra las estrellas que forman la Osa Mayor. Une las estrellas formando vectores que cumplan las siguiente características dando las coordenadas del vector:

- Mismo módulo dirección y sentido.
- Mismo módulo dirección y sentido opuesto.
- Distinto módulo, y misma dirección y sentido.
- Mismo módulo y distinta dirección.

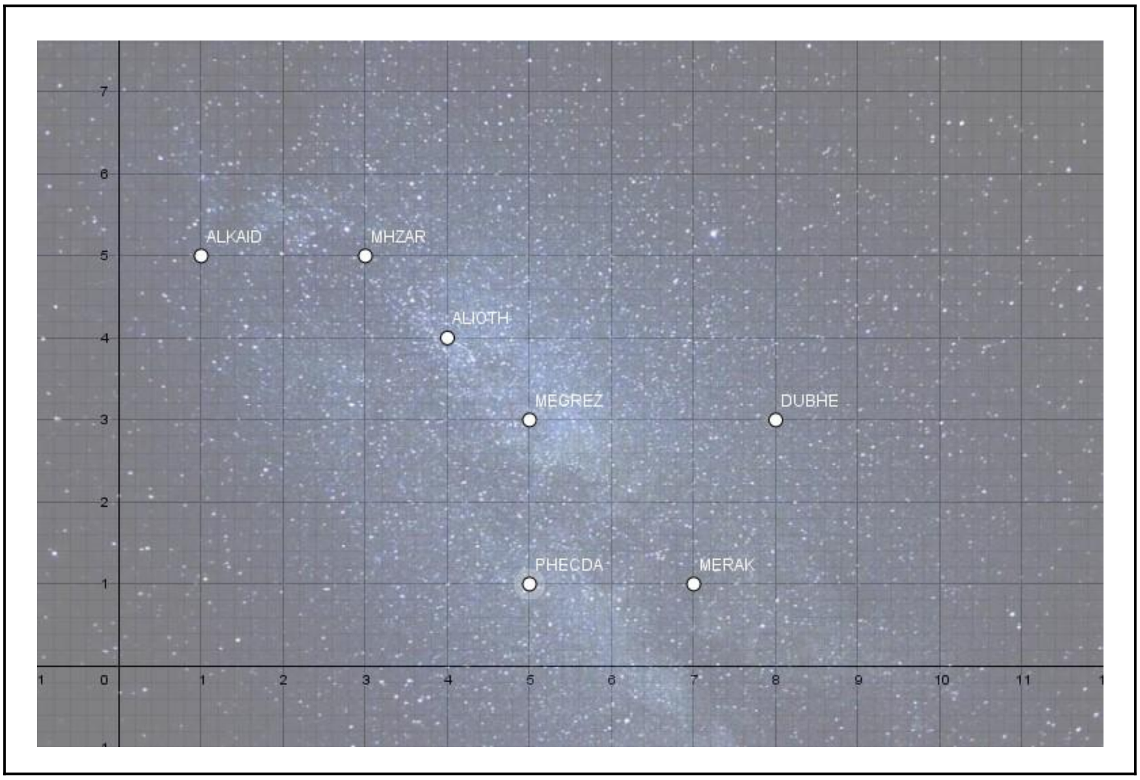


Figura 32: Problema 2.2.

El objetivo del problema es que los alumnos construyan vectores con determinadas características para introducirles después el concepto de vector equipolente, vector opuesto e ir introduciendo vectores paralelos y perpendiculares además de seguir practicando la representación de vectores.

CP3: Operaciones con vectores. Punto medio.

Problema 3.1.

Se les dará a los alumnos una ficha con la Figura 33 y el siguiente enunciado:

Estás en el supermercado y coges un carrito, las ruedas están apuntando en la dirección que indican los vectores a, w, v y u. ¿Al empujar el carrito, se desplazará hacia la izquierda o hacia la derecha? Demuéstralo matemáticamente.

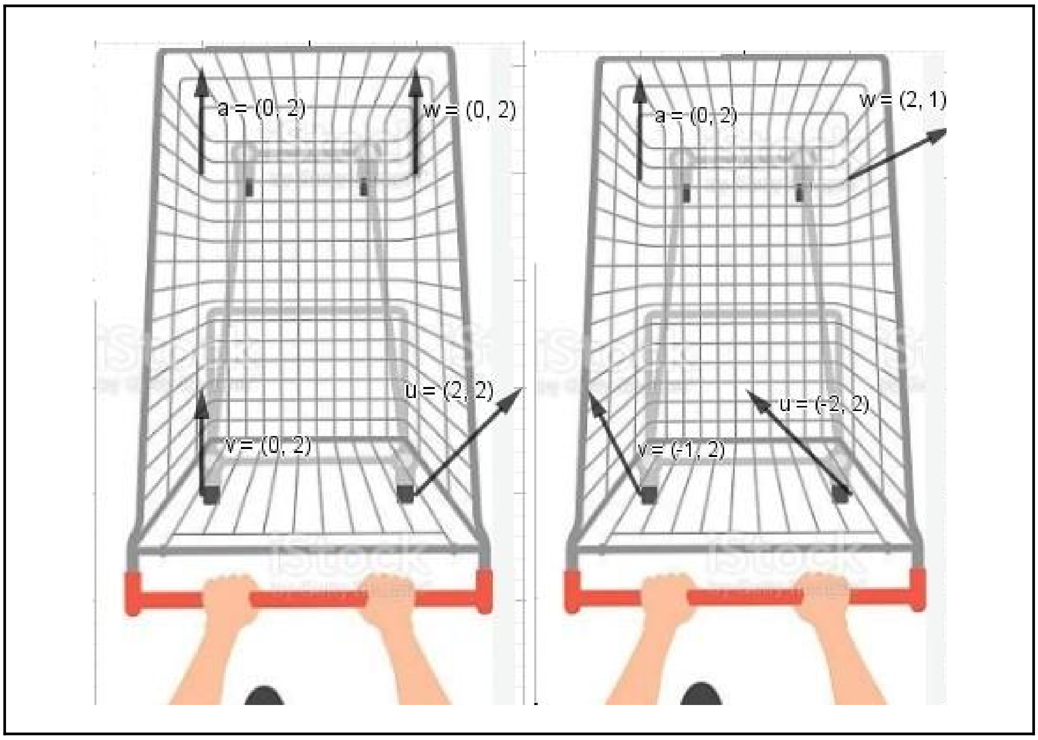


Figura 33: Problema 3.1.

El objetivo del problema es que los alumnos lleguen a una idea de la suma de vectores apoyándose en la experiencia cotidiana de la dirección de los ejes de las ruedas, este ejemplo es extrapolable a una bicicleta o un coche por ejemplo. Aunque no sepan calcular analiticamente la suma es esperable que sepan identificar si va hacia la izquierda o derecha.

Problema 3.2.

En el Lejano Oeste un carro circula por un camino tirado por dos caballos, de repente, por un tiroteo entre dos forajidos los caballos se asustan y corren en las direcciones que indican los vectores de la Figura 34. ¿Hacia dónde irá el carro?, si el caballo 1 corre el doble de rápido que el caballo 2, ¿cómo cambiaría el rumbo del carro?

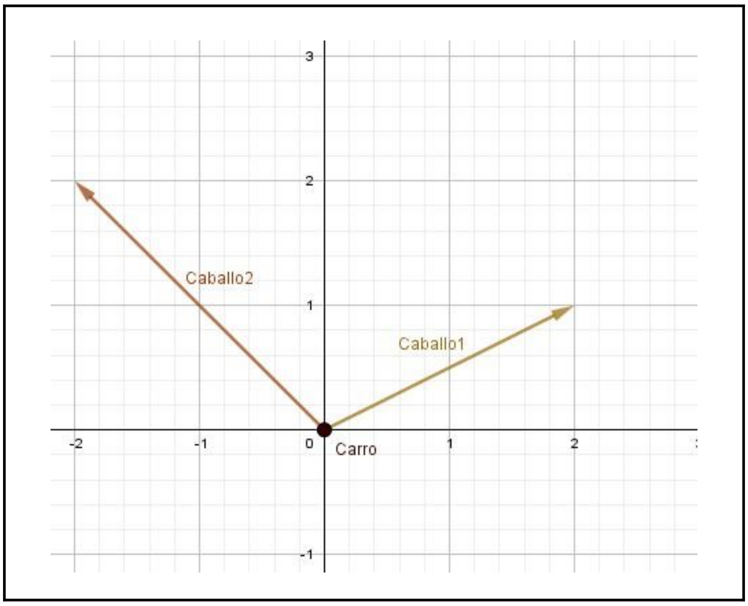


Figura 34: Problema 3.2.

Problema 3.3.

Un cuadrilátero tiene las aristas en las siguientes coordenadas: A(-2,2), B(-2,-2), C(6,-2) y D(6,2). ¿Se trata de un cuadrado o de un rectángulo?, ¿cuál es su centro?

El objetivo del problema es que de manera natural los alumnos encuentren una de las técnicas asociadas al cálculo del punto medio. Para poder encontrar el centro del cuadrilátero deberán pasar por calcular el punto medio de la diagonal o el punto medio de los lados para repetir el proceso y hallar el centro del cuadrilátero. En función de qué tipo de técnicas aparezcan durante la resolución de los problemas, será el docente el encargado de institucionalizar las técnicas y añadir otras técnicas si es necesario.

CP4: Posiciones relativas.

Problema 4.1.

En Gran Bretaña en el año 1825 se está construyendo el primer ferrocarril de la historia para conectar Stockton y Darlington. Tú eres parte del equipo que está construyendo las vías, pero el equipo del turno anterior ha dejado el trabajo a medias. Las vías del ferrocarril se construyen uniendo listones de madera, si los segmentos de la siguiente Figura 35 son los listones de madera, ¿en que coordenadas colocarías los dos que faltan?, ¿Por qué? Si los listones tienen siempre la misma longitud, ¿ podrías hallar estas coordenadas de forma analítica?

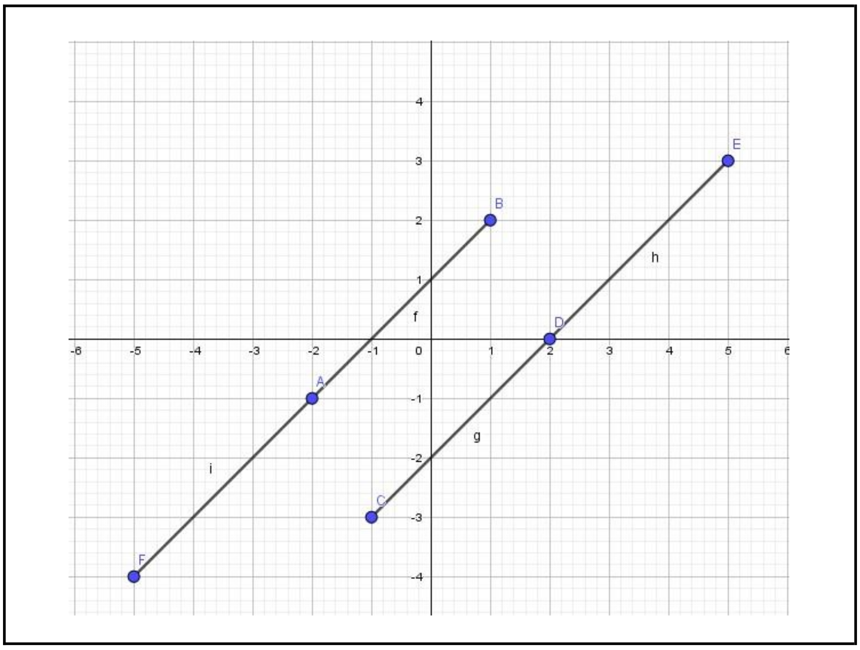


Figura 35: Problema 4.1.

El objeto del problema es que aparezca el concepto de paralelismo que surge de forma natural en las vías de tren, y, a partir de este contexto introducir el paralelismo de forma analítica. El siguiente paso sería introducir la técnica para ver cuando dos vectores están alineados o dos vectores son paralelos.

Problema 4.2.

¿Forman los puntos A(2,0), B(0,-2), C(-2,0) y D(0,2) un cuadrado?

Los puntos E(5,0), F(3,1) y G(5,5) forman un triángulo. ¿Cumple este triángulo el Teorema de Pitágoras?

El objetivo es que los alumnos dibujen estos dos polígonos y entre las coordenadas de las aristas del cuadrado y el Teorema de Pitágoras relacionen la perpendicularidad y el ángulo de 90º entre vectores. Es esperable que algún alumno llegue a la conclusión de que dos vectores son perpendiculares cuando sus coordenadas son (a,b) y (-b,a) o (b,-a), siendo esta una técnica para obtener vectores perpendiculares.

6.2. Modificaciones de la técnica inicial

En la línea del aprendizaje a través de problemas, el objetivo de los campos de problemas presentados es que las técnicas que los resuelven aparezcan como herramientas necesarias para afrontar los problemas y no como una fórmula independiente que aplicas en un caso concreto, como ocurre en prácticamente todos los casos de los campos de problemas de las editoriales analizados en el apartado B . Las técnicas aparecen en problemas contextualizados y no en ejercicios aislados. Los alumnos deberán utilizar lo aprendido en nuevas situaciones, en un contexto diferente, siguiendo un aprendizaje significativo. Así, las técnicas apenas sufren modificaciones.

6.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Para implementar estos problemas en el aula se estructurará la sesión en dos partes. La primera, al tener la mayoría de problemas una parte de representación que es esperable que sea asumible por todos los alumnos, consistirá en que los alumnos hagan una parte o el total de los problemas individualmente mientras el profesor monitorea el desarrollo de los problemas. Después una segunda parte donde los alumnos comentan sus resultados con el resto de la clase, ya que la mayoría de los problemas dan pie a distintas formas de resolución. Esta parte será dirigida por el docente para poder pasar de las distintas resoluciones de los alumnos a la institucionalización de la técnica o las técnicas que resuelven los campos de problemas.

7. Sobre las técnicas

Una vez establecidos los distintos campos de problemas vamos a clasificar las técnicas que los resuelven. Junto con cada técnica incluiremos un campo de ejercicios asociado. Como hemos comentado anteriormente, en los problemas no se pide explícitamente el uso de una técnica mientras que en un ejercicios si. Por lo tanto estos campos de ejercicios tienen como objetivo afianzar y practicar las técnicas asociadas.

7.1. Técnicas y tipos de ejercicios que se van a presentar en el aula.

Técnica 1. Reconocer y diferenciar una magnitud escalar y vectorial (T1).

Una magnitud escalar está completamente determinada por un número y sus correspondientes unidades, y una magnitud vectorial está determinada además de un valor numérico y sus unidades (módulo) por su dirección y sentido.

Ejercicios:

E1: ¿Son las siguientes magnitudes vectoriales o escalares?

- Velocidad
- Altura
- Volúmen del sonido
- Fuerza
- Desplazamiento
- Tiempo

Técnica 2. Representación e interpretación de vectores (T2).

No hay como tal una gráfica específica para graficar un vector, se intentará enseñar por el profesor cuando el problema lo requiera aunque se espera que surja a través de los dos problemas de razón de ser o mediante el problema 2.1.

Ejercicios:

E2.1: Representa gráficamente los siguientes vectores:

a) $\overline{u}$=(2,1)

b) $\overline{v}$=(3,2)

c) $\overline{w}$=(-1,2)

d) $\overline{i}$=(0,1)

e) $\overline{j}$=(1,0)

f) $\overline{k}$=(-3,-2)

E2.2: Escribe la expresión que representa los siguientes vectores de la Figura 36.

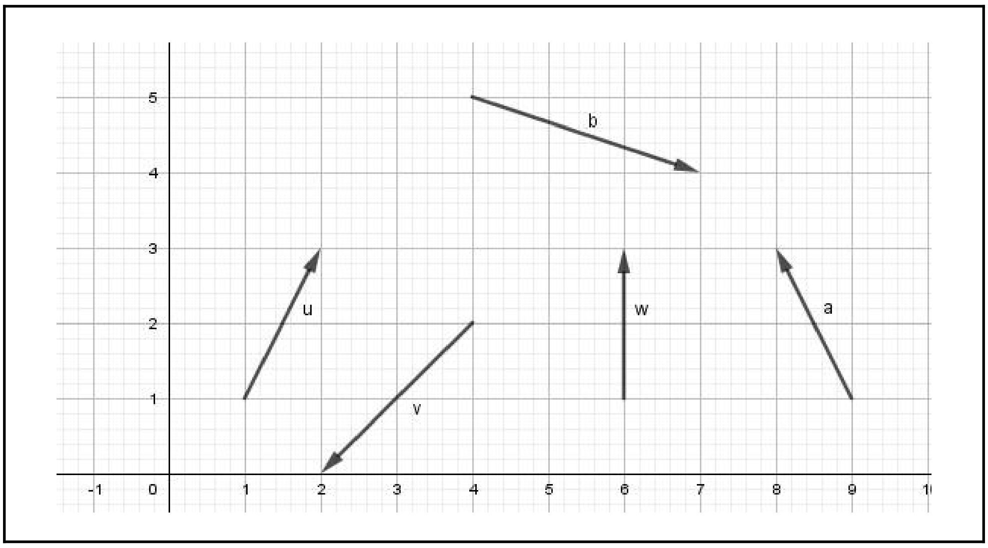


Figura 36: Ejercicio 2.2

Técnica 3. Determinar un vector a partir de dos puntos coordenados (T3).

Las coordenadas de un vector se obtienen restando componente a componente las coordenadas del extremo y las del origen. Sean los puntos A (a_x, a_y) *y* B(b_x, b_y) *el vector* $\overline{AB}$ *queda determinado por:*

$$\overline{AB} = (b_x - a_x, b_y - a_y)$$

Ejercicios:

E3: Dados los puntos A(0,3), B(2,1) y C(-1,1) calcula los siguientes vectores:

a) $\overline{AB}$

b) $\overline{BC}$

c) $\overline{BA}$

d) $\overline{CA}$

Técnica 4. Calcular el módulo de un vector (T4).

El módulo del vector $\overline{v}$ se denomina $|\overline{v}|$ y viene determinado por:

$$|\overline{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Ejercicios:

E4.1: Determina el módulo de los siguientes vectores:

g) $\overline{u}$=(2,1)

h) $\overline{v}$=(-3,2)

i) $\overline{w}$=(1,-2)

j) $\overline{i}$=(0,1)

E4.2: Determina un vector que tenga como módulo:

a) $|\overline{u}| = 4$

b) $|\overline{v}| = 3$

c) $|\overline{w}| = 2$

Técnica 5. Sumas y restas de vectores (T5).

El vector correspondiente a la suma o resta de dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ viene dado por el vector cuyas componentes son la suma o resta componente a componente de los anteriores de la forma:

$$\overline{u} \pm \overline{v} = (u_x \pm v_x, u_y \pm v_y)$$

Ejercicios:

E5: Dados los vectores $\overline{v} = (3, 1)$, $\overline{u} = (1, -2)$ y $\overline{w} = (-1, 0)$

a) $\overline{u} - \overline{v}$

b) $\overline{w} - \overline{u} + \overline{v}$

c) $\overline{v} - \overline{u} + \overline{w}$

d) $\overline{u} + \overline{v} - \overline{u}$

Técnica 6. Multiplicación de un escalar por un vector (T6).

Al multiplicar un escalar k por un vector $\overline{v}$ se obtiene el vector $k \cdot \overline{v} = (k \cdot v_x, k \cdot v_y)$

Ejercicios:

E6.1: Dado un vector $\overline{u}$=(2,1) calcula:

a) -1·$\overline{u}$=(2,1)

b) 3·$\overline{u}$=(2,1)

c) 0·$\overline{u}$=(2,1)

E6.2: Por cuál escalar hay que multiplicar el vector $\overline{u}$ =(2,3) para obtener el vector:

a) $\overline{u} = (2/3, 1)$

b) $\overline{v} = (4, 6)$

c) $\overline{u} = (1, 3/2)$

Técnica 7. Cálculo del punto medio (T7).

El punto medio entre los punto A y B viene dado por:

$$PM = (\frac{a_x + b_x}{2}, \frac{a_y + b_y}{2})$$

$$PM = A + \overline{AB}/2$$

$$PM = B - \overline{AB}/2$$

Ejercicios:

E7: Calcula el punto medio de los puntos A y B:

a) A(2,-1), B(5,3)

b) A(-2,3), B(4,-2)

c) A(-4,-5), B(-1,-2)

d) A(0,3), B(3,4)

Técnica 8. Vectores paralelos (T8).

Dos vectores $\overline{u}$ y $\overline{v}$ son paralelos si sus componentes son proporcionales entre sí:

$$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$$

Ejercicios:

E8: Determinar si los siguientes vectores son o no proporcionales:

a) $\overline{u} = (2, 3),\ \overline{v} = (6, 9)$

b) $\overline{u} = (4, 3),\ \overline{v} = (5, 9)$

c) $\overline{u} = (1/3, 3),\ \overline{v} = (1, 9)$

d) $\overline{u} = (2/3, 2),\ \overline{v} = (2, 6)$

Técnica 9. Vectores perpendiculares (T9).

Dos vectores son perpendiculares cuando sus coordenadas son (a,b) y (-b,a) o (b,-a) salvo constantes de proporcionalidad.

Ejercicios:

E9: Determinar si los siguientes vectores son o no perpendiculares:

e) $\overline{u} = (2, 3),\ \overline{v} = (-\ 3, 2)$

f) $\overline{u} = (4, -\ 3),\ \overline{v} = (5, 9)$

g) $\overline{u} = (1/3, 3),\ \overline{v} = (9, -\ 1)$

h) $\overline{u} = (2/3, 2),\ \overline{v} = (2, 6)$

7.2. Adecuación de las técnicas a los campos de problemas

Las técnicas aparecerán conforme sean necesarias para la resolución de los campos de problemas y estas mismas técnicas ayudarán a la construcción del conocimiento sobre el propio objeto matemático. En la Tabla 2 se muestra la relación entre campos de problemas y las técnicas asociadas a cada uno.

Campos de problemas	Problemas	Técnicas
CP1	P1	T1

CP2	P2.1	T2, T3, T4
	P2.1	T3
CP3	P3.1	T5
	P3.2	T5, T6
	P3.3	T5, T6, T7
CP4	P4.1	T2, T3, T8
	P4.2	T2, T3, T9

Tabla 2: Relación Campos de Problemas, Problemas y Técnicas.

7.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología para implementar las técnicas en el aula se va a estructurar en torno al trabajo de Bosch y Gascón (1994) en el que se distinguen distintos momentos de estudio de un campo de problemas, nos centraremos en tres:

- Momento exploratorio: Es el momento en el que el alumnado se enfrenta por primera vez a un campo de problemas para el que no tiene las técnicas necesarias para resolverlo sino que a partir de las técnicas preexistentes tiene que construir nuevas para poder enfrentarlo.
- Momento de la técnica: El alumnado practica la técnica encontrada al resolver el campo de problemas mediante la resolución de ejercicios.
- Momento teórico: Una vez conocida y ejercida la técnica se indaga en su justificación e interpretación de los elementos que la integran.

Así la metodología a seguir consistirá en la presentación y resolución de los distintos campos de problemas como se ha comentado en el apartado E.3, que se corresponde con el momento exploratorio, y después la presentación de las técnicas que resuelven estos problemas y su ejercitación, el momento de la técnica. En el apartado siguiente se explicará lo referente al momento teórico y la justificación de las técnicas utilizadas, las tecnologías.

8. Sobre las tecnologías

8.1. Razonamientos que justifican las técnicas

TG1. Justificación de T1. Magnitudes vectoriales y escalares.

La justificación de esta técnica se da en el propio Problema 1 ya que hay magnitudes que no quedan definidas por un número y unas unidades sino que es necesario dar más información.

TG2. Justificación de T2. Representación gráfica de vectores.

La justificación de esta técnica se da en el propio Problema 2 al identificar los vectores en el plano como los desplazamientos en los distintos ejes necesarios para resolver el problema.

TG3. Justificación de T3. Determinación de un vector.

De nuevo la justificación de esta técnica se realiza en el Problema 2 ya que para resolver el problema es necesario nombrar el vector que va de un punto a otro y en el propio problema el vector se identifica como los desplazamientos en los distintos ejes del plano.

TG4. Justificación de T4. Módulo de un vector.

La justificación de la técnica para calcular el módulo de un vector es geométrica, formando un triángulo siendo la hipotenusa el módulo del vector y los catetos las componentes en cada eje. Para introducir esta justificación se hará referencia al Problema Inicial 2 de los problemas para asegurar los conocimientos previos del apartado C.3.

TG5. Justificación de T5. Suma y resta de vectores.

La justificación de la suma y resta de vectores se realizará de forma geométrica y de forma analítica de forma simultánea, para ello se utilizará una representación como la de la Figura 37.

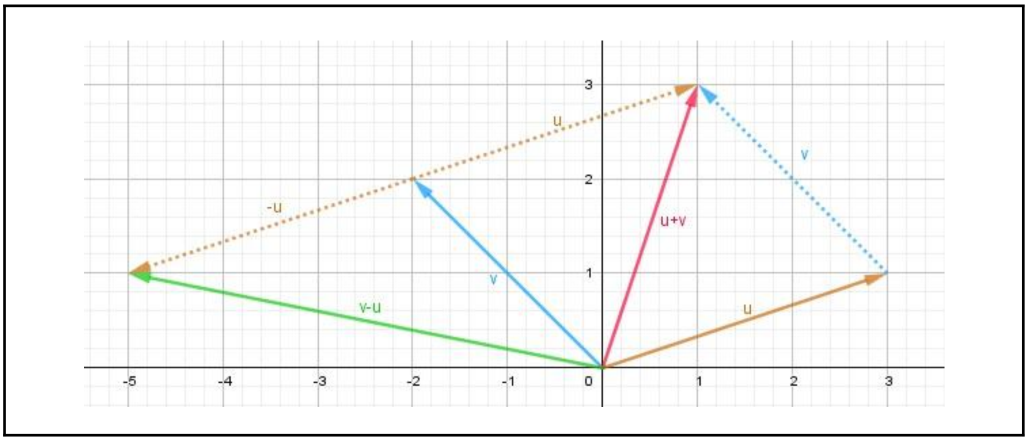


Figura 37: Justificación T5.

TG6. Justificación de T6. Producto de un escalar por un vector.

Para justificar la técnica del producto de un vector por un escalar se utilizará la resolución del Problema 3.2 y una justificación geométrica para ver cómo escalan las componentes al multiplicar un vector por un escalar como aparece en la Figura 38.

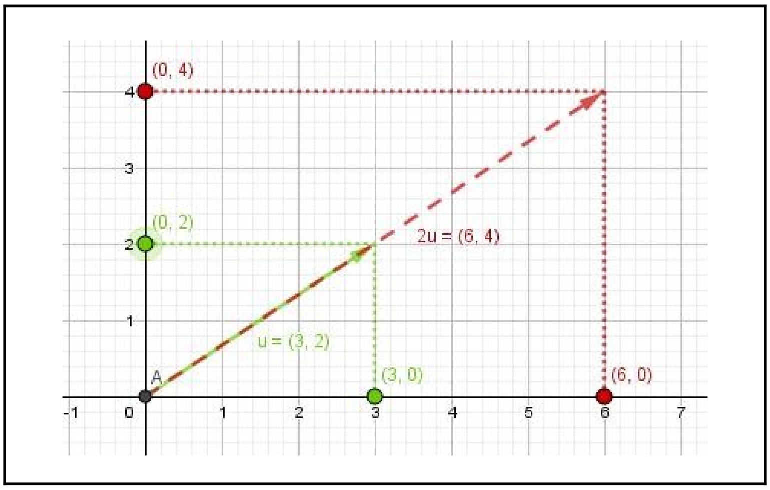


Figura 38: Justificación T6.

TG7. Justificación de T7. Punto medio.

Como hemos dicho antes se introducirán varias técnicas para resolver el campo de problemas de averiguar el punto medio. Así, será tarea del docente introducir aquellas que no hayan aparecido a la hora de resolver el Problema 3.3. La justificación de estas técnicas será de forma geométrica como se muestra en la Figura 39 a la vez que se comprueba de forma analítica.

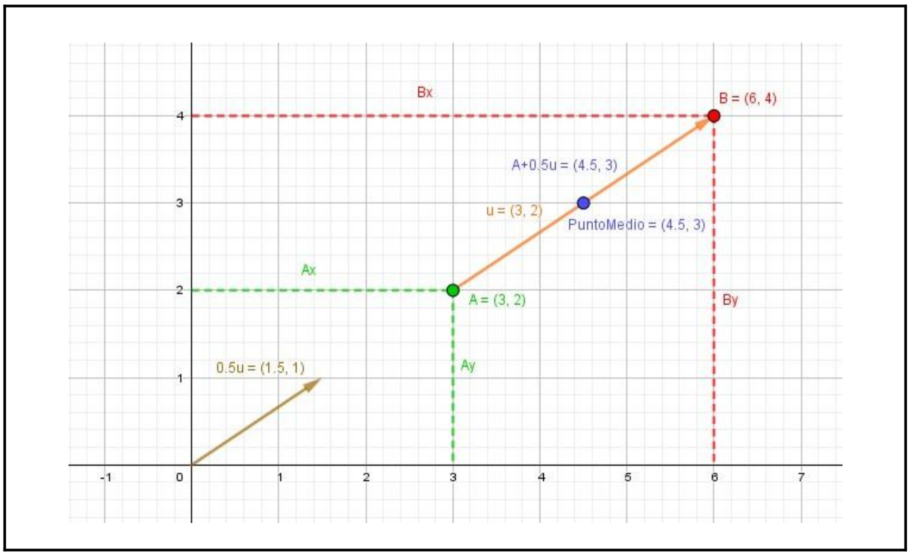


Figura 39: Justificación T7.

TG8. Justificación de T8. Vectores perpendiculares.

Para la justificación de esta técnica se hará una recapitulación del concepto de pendiente de una recta como $m = \Delta y/\Delta x$, para particularizar a un segmento orientado y poder hablar de la pendiente de un vector y justificar que dos vectores son perpendiculares cuando tienen la misma pendiente.

TG9. Justificación de T9. Vectores perpendiculares.

La justificación de esta técnica, al no conocer los alumnos todavía la noción de producto escalar de vectores, se quedará en la propia resolución del Problema 4.2 para llegar a la técnica T9. La resolución del Problema 4.2 servirá como justificación geométrica como aparece en la Figura 40.

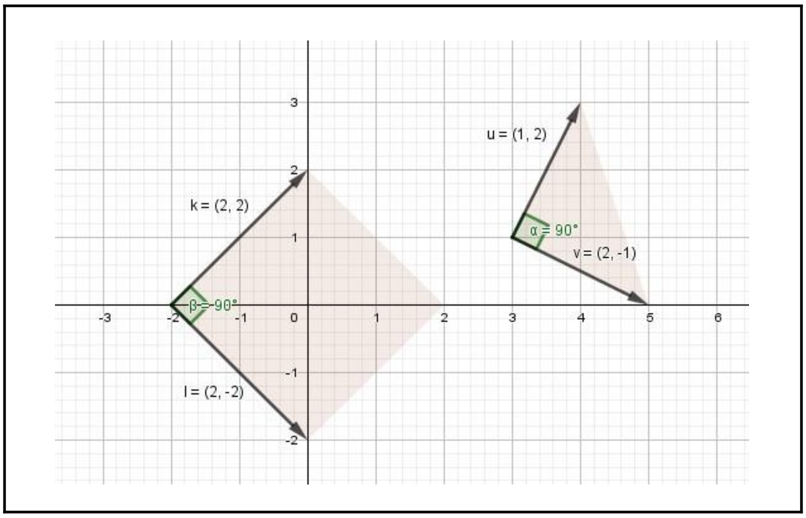


Figura 40: Justificación T9.

8.2. Responsabilidad de justificar las técnicas

El profesor será la figura que asuma la responsabilidad de institucionalizar y justificar las técnicas, aunque una buena parte de ellas se desarrollarán como parte de la resolución de los campos de problemas por los propios alumnos. Será en estas últimas tecnologías en las que el docente tendrá que estar atento para introducirlas de forma adecuada si el desarrollo de los problemas no ha sido el adecuado para institucionalizarse como el resto.

El docente pondrá en común las conclusiones a las que han llegado los alumnos al resolver los campos de problemas mostrando varias formas de resolución para dar forma e institucionalizar con el rigor necesario las técnicas asociadas a cada uno de ellos.

8.3. Metodología a seguir en su implementación en el aula

Como se ha indicado en el apartado 7.3, la metodología para introducir las tecnologías seguirá los momentos de estudio de un campo de problemas: momento exploratorio, momento de la técnica y momento teórico, que tratados en el trabajo de Bosch y Gascón (1994). La implementación de las tecnologías corresponden al momento teórico, una vez conocida y ejercida la técnica se indaga en su justificación e interpretación de los elementos que la integran.

9. Sobre la secuencia didáctica y su cronograma

9.1. Secuenciación de las actividades propuestas en los apartados anteriores

Las sesiones que se ordenan en la Tabla 3 están pensadas como sesiones ordinarias con una duración de 50 minutos. Exceptuando las sesiones 1 y 2 para las actividades previas y los problemas de razón de ser a los que se les dedicará la sesión entera de 50 minutos, el resto de sesiones, de la 3 a la 9, seguirán la misma estructura: 30 minutos para el desarrollo de los problemas, y 10 minutos para los ejercicios y otros 10 minutos para sus justificaciones.

Sesión	Nombre	Campos de problemas	Técnicas	Ejercicios	Tecnologías	Actividades previas	Razón de ser
1	Actividades previas					AP1 y AP2	
2	Razón de ser						RS1 y RS2
3	Magnitudes vectoriales y escalares	CP1 (P1)	T1	E1	TG1		
4	Propiedades de los vectores	CP2 (P2.1)	T2, T3 y T4	E2.1, E2.2, E4.1 y E4.2	TG2 y TG4		
5	Representación de vectores	CP2 (P2.2)	T3	E3	TG3		
6	Suma y resta de vectores	CP3 (P3.1)	T5	E5	TG5		

7	Multiplicación vector por escalar	CP3 (P3.2)	T5 y T6	E6.1 y E6.2	TG6		
8	Punto medio	CP3 (P3.3)	T5, T6 y T7	E7	TG7		
9	Posiciones relativas	CP4 (P4.1 y P4.2)	T8 y T9	T2, T3, T8 y T9	TG8 y TG9		
10	Repaso						
11	Prueba escrita						
12	Corrección						

Tabla 3: Secuenciación de actividades.

10. Sobre la evaluación

10.1. Prueba escrita para evaluar el aprendizaje realizado por los alumnos

Pregunta 1. Vas a contratar un crucero por Egipto para surcar el río Nilo para visitar las ciudades del mapa mostrado en la Figura 41. Hay dos opciones:

- Ruta 1: ASIUT, QUENA, LUXOR.
- Ruta 2: ASUÁN, LUXOR, QUENA.

Escribe y dibuja los vectores correspondientes a los dos desplazamientos de cada ruta. ¿Qué ruta tiene la longitud más larga?

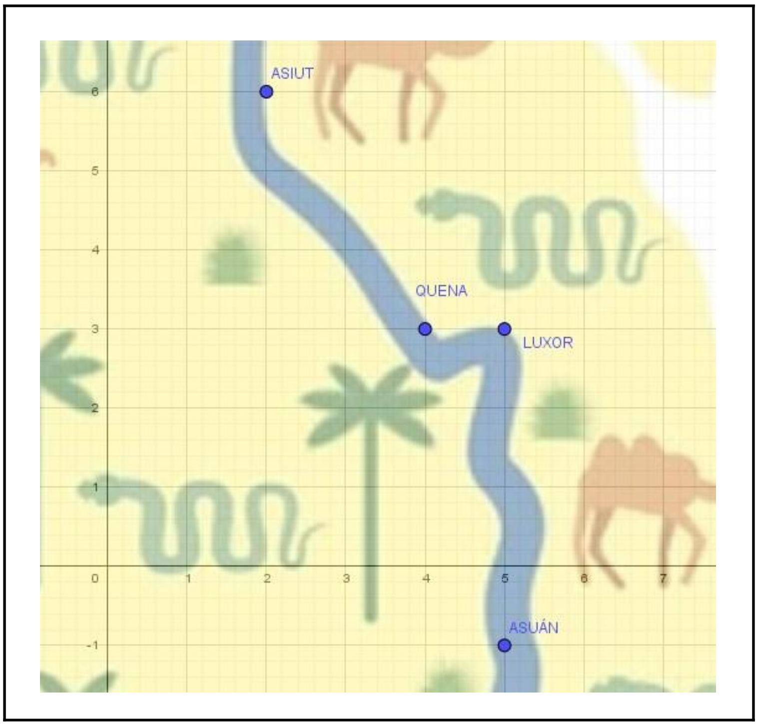


Figura 41: Pregunta 1 prueba escrita.

Pregunta 2. Los puntos A(-1-1), B(2,2) y C(-2.1,3.1) forman un triángulo. ¿Es un triángulo equilátero (tiene los tres lados iguales)? Halla el área del triángulo.

Pregunta 3. Los nudos son una magnitud vectorial usada para medir la velocidad en navegación. Si una barca navega 35 nudos en un río cuya corriente es de 10 nudos en dirección Norte. Encuentra:

a) La velocidad de la barca si va en la misma dirección y sentido que la corriente.

b) La velocidad de la barca si va en la misma dirección y sentido contrario a la corriente del río.

c) La velocidad de la barca al cruzar perpendicularmente el río de una orilla a la otra. ¿Qué dirección lleva el barco en este caso?

Estos casos se esquematizan en la Figura 42.

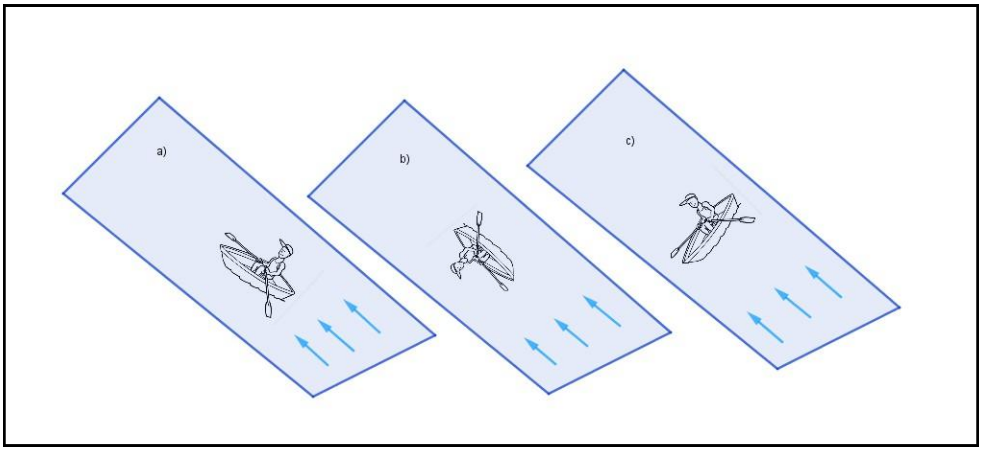


Figura 42: Pregunta 3 prueba escrita.

Pregunta 4. Obtén los siguientes resultados:

a) Encuentra un vector $\overline{u}$ que sea paralelo $\overline{v} = (-\ 2, 3)$ y que su módulo sea $|u| = \sqrt{10}$

b) Encuentra el valor de k para que los vectores $\overline{v} = (4, 3)$ y $\overline{u} = (-\ 6,\ k)$ sean paralelos. ¿Y para que sean perpendiculares?

5. Demuestra de dos formas distintas que los puntos A(-3,3), B(-1,7), C(3,5) y D(1,1) son los vértices de un cuadrado.

10.2. Aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el vector que se va a evaluar con cada una de las preguntas de la prueba

Para clasificar los aspectos del conocimiento sobre el objeto matemático del vector con cada una de las preguntas de la prueba escrita se muestra a continuación la Tabla 4, ordenada en Campos de problemas, Técnicas y Estándares de aprendizaje.

Preguntas	Campos de problemas	Técnicas	Estándares de aprendizaje
1	CP2	T2, T3 y T4	Est.MAAC.3.3.2
2	CP3	T3, T4 y T7	Est.MAAC.3.3.1 y Est.MAAC.3.3.2

3	CP3	T5	Est.MAAC.3.3.1
4	CP3, CP4	T4, T6, T8 y T9	Est.MAAC.3.3.1 y Est.MAAC.3.3.2
5	CP4	T4, T5, T8 y T9	Est.MAAC.3.3.1 y Est.MAAC.3.3.2

Tabla 4: Relación contenidos prueba escrita.

10.3. Respuestas esperadas en cada una de las preguntas

Pregunta 1.

La primera parte de la pregunta es más sencilla pero puede que aparezcan errores al determinar las coordenadas de los distintos puntos del mapa de la Figura 41. Lo esperable es que los alumnos sean capaces de obtener los distintos vectores y graficarlos, quizá teniendo alguna dificultad en el vector que va de Quena a Luxor ya que es necesario calcular ese vector y su opuesto. Sobre la segunda parte se espera que los alumnos sean capaces de entender que para calcular la longitud de la ruta tienen que realizar el módulo de los distintos desplazamientos y sumarlos.

Pregunta 2.

La pregunta está planteada para que los alumnos se puedan ayudar de una representación gráfica pero la resolución exacta tiene que ser de forma analítica. Lo esperado es que los alumnos realicen el módulo de los tres vectores que forman los lados para comprobar si miden lo mismo. Para la segunda parte será necesario que calculen el punto medio de uno de los lados para poder calcular la altura del triángulo y así determinar el área, no darse cuenta de esto puede ser uno de los posibles errores.

Pregunta 3.

Como el objetivo de esta pregunta no es la representación de vectores se les dará como apoyo el esquema de la Figura 42. Lo esperado es que el apartado a) y b) no provoque muchos errores. Sin embargo en el apartado c) al ser una composición de velocidades un poco más difícil puede aparecer algún error tanto al calcular la velocidad como la dirección.

Pregunta 4.

a) Este apartado tiene infinitas soluciones. Lo esperado es que los alumnos planteen dos ecuaciones utilizando la información del apartado para llegar a un sistema de ecuaciones y que lleguen a las coordenadas de un vector genérico para luego dar un valor concreto.

b) En este caso sólo existe una solución. Para encontrarla los alumnos deberán encontrar en forma de ecuación las condiciones del enunciado para hallar el valor de k. Lo esperado es que a partir de la T8 hallen las relaciones entre las coordenadas de los dos vectores. Un posible error es que no se den cuenta que la T8 implica también vectores multiplicados por un escalar.

Pregunta 5.

Esta pregunta admite varias respuestas. La respuesta esperada será que los alumnos comprueben que todos los lados del cuadrado miden lo mismo calculando los módulos de los vectores que lo forman y que vean que estos vectores son perpendiculares entre sí o paralelos dos a dos.

4. Criterios de calificación

Este modelo, como su nombre indica, propone una evaluación a "tercios" y tiene su origen en que los exámenes de matemáticas suelen exigir al alumno la realización de tareas de distinta naturaleza que, a grandes rasgos, se pueden dividir en tres. Las tareas principales, tareas auxiliares específicas y las tareas auxiliares generales.

- Tareas principales, constituyen el objetivo principal de la calificación. Es decir, valorar la comprensión del alumno sobre los contenidos matemáticos propios de los temarios de matemáticas de un curso determinado.
- Tareas auxiliares, son otro tipo de tareas necesarias para conseguir la tarea principal. Se identifican dos grupos de tareas auxiliares: las específicas y las generales.
  - Tareas auxiliares específicas, juegan un papel instrumental para alcanzar la solución de un problema en el que aparecen tareas principales sobre contenidos específicos.
  - Tareas auxiliares generales, son tipo de tareas matemáticas que ha realizado el alumno a lo largo de su formación matemática anterior.

Una vez analizada la tipología de las tareas, es necesario establecer un marco que oriente las penalizaciones de todos los correctores de exámenes de matemáticas de manera que se atenúen las diferencias entre las actuaciones de distintos correctores. En este sentido, los autores proponen un modelo de penalización de errores sustentado en la teoría curricular interpretativa.

El modelo se basa en limitar las penalizaciones del corrector en función del tipo de tarea en el que se da el error. Si el error se da en una tarea auxiliar general, podrá ser penalizado, como máximo, en 1/3 de la puntuación total. Si el error aparece en una tarea auxiliar específica, podrá ser penalizado con 2/3 de la calificación total. Y, por último, si el error está en la tarea principal, puede ser penalizado hasta el total de la calificación. En el caso de que en un mismo problema aparezcan varias tareas principales, deberán asignarse puntuaciones diferenciadas a cada una de ellas.

> En este modelo se deja un amplio margen de actuación a los correctores por cuanto la penalización de los errores se ubica en intervalos de amplitud 1/3 de la puntuación máxima. Se han establecido intervalos de penalización porque, entre otras razones, resulta muy complejo establecer penalizaciones concretas para cada tipo de error, pues el número de casos diferentes que se puede presentar es muy amplio (Gairín et al., 2012, pp. 261 - 274).

Así, las tareas principales y auxiliares de las preguntas de la prueba escrita son:

Pregunta 1:

- Tarea principal: Representar gráficamente y numéricamente las rutas (T2), y determinar cuál es más larga.
- Tarea auxiliar específica: Utilizar T3 y T4.
- Tarea auxiliar general: Las operaciones aritméticas necesarias para T3 y T4.

Pregunta 2:

- Tarea principal: Determinar si el triángulo dado es equilátero y hallar su área.
- Tarea auxiliar específica: Utilizar T2, T3 y T7.
- Tarea auxiliar general: Las operaciones aritméticas necesarias para T2, T3 y T7.

Pregunta 3:

- Tarea principal: Obtener la velocidad y dirección de la barca.
- Tarea auxiliar específica: Utilizar T5.
- Tarea auxiliar general: Las operaciones necesarias para T5 y representar bien las distintas sumas de vectores.

Pregunta 4:

- Tarea principal: Encontrar el vector en el apartado a) y el valor de k en el apartado b).

- Tarea auxiliar específica: Utilizar T4, T6, T7 y T8, y encontrar las ecuaciones necesarias.
- Tarea auxiliar general: Las operaciones necesarias para T4, T6, T7 y T8, y operar bien las ecuaciones obtenidas.

Pregunta 5:

- Tarea principal: Dar dos razonamientos de porque las coordenadas dadas forman un cuadrado.
- Tarea auxiliar específica: Utilizar T4, T8 y T9.
- Tarea auxiliar general: Las operaciones necesarias para T4, T8 y T9.

J. Referencias

Álvarez, M.D., Gaztelu, A.M., & González, A. (2008). *Matemáticas Opción B 4 ESO*. Santillana.

Bosch, M., & Gascón, J. (1994). La integración del momento de la técnica en el proceso de estudio de campos de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las ciencias*, *12*(3), 314-332.

Cid, E., & Muñoz-Escolano, J.M. (2019). *Apuntes de Diseño Instruccional en Matemáticas. Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico*. Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Cockcroft, W. (1895). *Las Matemáticas sí cuentan, Informe Cockcroft*. MEC.

Colera, J., Gaztelu, I., & Colera, R. (2016). *Matemáticas Aplicadas a las Enseñanzas Académicas Educación Secundaria 4*. Anaya.

Engler, A. (2005). *Geometria Analitica* (1st ed.). Universidad Nac. del Litoral.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., & Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. *Investigación en Educación Matemática XVI, SEIEM*, 261-274.

García, M.J., & Galo, J.R. (2017). *MATEMÁTICAS Orientadas a las Enseñanzas Académicas 4º ESO*. Proyecto EDAD.

García Álvarez, N., & Rodrígez-Muñiz, L. J. (2013). Errores y dificultades de aprendizaje en relación con el concepto de vector. *XVI JAEM Palma*.

Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *SUMA*, (39), 13-25.

Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. I Desaparición escolar de la razón de ser de la Geometría. *SUMA*, (44), 25-34.

Gutiérrez, A., & Jaime, A. (2012). Reflexiones sobre la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria. *Tecné, Episteme y Didaxis*, (32), 55-70.

Hazewinkel, M. (Ed.). (2002). *Encyclopaedia of Mathematics*. Springer Netherlands.

Heinbockel, J. H. (2001). *Introduction to Tensor Calculus and Continuum Mechanics* (J. H. Heinbockel, Ed.). Trafford.

Radtz, H. (1979). *Error Analysis in the Mathematics Education*. Journal for Research in Mathematics Education.

Rico, L. (1995). *Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas*.

Van Hiele, P.M. (1986). *Structure and insight. A theory of mathematics education*. Academic Press.