



**Universidad**  
Zaragoza

# Trabajo Fin de Grado

## Magisterio en Educación Primaria

Aplicabilidad del ajedrez en la enseñanza de la simetría axial en alumnos de 6º de Educación Primaria

Applicability of chess in the teaching of axial symmetry in students of 6th grade of Primary Education

Autor/es  
David Sobreviela Pacho

Director/es  
Alberto Arnal Bailera

FACULTAD DE EDUCACIÓN  
2021-2022

*"El ajedrez es maravilloso para los niños en un doble sentido, como deporte y por los enormes beneficios que ofrece como herramienta educativa".*

Magnus Carlsen, tras conquistar el título mundial de ajedrez por primera vez.

(García, 2013).

# Resumen

Los juegos pueden constituir un valioso recurso educativo para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Concretamente, el ajedrez es uno de los juegos que, debido a su naturaleza lógico-matemática, más potencial tiene en el desarrollo de destrezas matemáticas, motivo por el que en los últimos años su uso se ha ido extendiendo considerablemente a las aulas de Educación Primaria. De esta forma, el presente trabajo investiga la enseñanza de la simetría a través del ajedrez educativo. Para ello, se realiza una aproximación teórica al juego educativo matemático, al ajedrez y a la simetría y, además, se diseña, implementa y evalúa una propuesta didáctica de cuatro sesiones destinada a 6º de Educación Primaria, en la que se utiliza el ajedrez como juego educativo para el aprendizaje de la simetría.

**Palabras clave:** matemáticas, juego, ajedrez, simetría.

# Abstract

Games can constitute a valuable educational resource for Mathematics teaching and learning. Particularly, chess is one of the most powerful games to develop mathematical skills and, consequently, its use has been considerably spreading to primary classrooms in the past few years. Taking into account this current situation, the present dissertation focuses on teaching symmetry through chess. In order to do this, mathematical-educational games, chess and symmetry are examined from a theoretical perspective; additionally, a four-lesson didactic proposal destined to learners of sixth grade, in which chess is used as an educational game to learn contents regarding symmetry, is designed, implemented and assessed.

**Key words:** Mathematics, game, chess, symmetry.

# ÍNDICE

<b>INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN</b>	<b>6</b>
<b>CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO</b>	<b>9</b>
1.1 Juegos educativos matemáticos	9
1.1.1 Definición de juego	9
1.1.2 Juegos y educación	10
1.1.3 El juego como recurso para enseñar matemáticas	11
1.1.4 El juego en el currículo de matemáticas	14
1.1.5 Clasificaciones de juegos educativos matemáticos	16
1.1.6 Metodología y criterios de elección	17
1.2 Ajedrez educativo	19
1.3 La simetría, enseñanza y aprendizaje	23
<b>CAPÍTULO 2: SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES</b>	<b>26</b>
2.2 Primera sesión	27
2.3 Segunda sesión	29
2.4 Tercera sesión	32
2.5 Cuarta sesión	34
<b>CAPÍTULO 3: EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA</b>	<b>37</b>
3.1 Contextualización y diseño de las sesiones	37
3.1.1 Contexto de aula	37
3.1.2 Elección de las actividades y elaboración de materiales	38
3.1.3 Temporalización y metodología de implementación prevista	39
3.1.4 Elaboración de instrumentos de evaluación	40
3.2 Experimentación y evaluación	44
3.2.1 Prueba inicial	44
3.2.2 Evaluación de la primera sesión	56
3.2.3 Evaluación de la segunda sesión	61
3.2.4 Evaluación de la tercera sesión	71
3.2.5 Evaluación de la cuarta sesión	81
3.2.6 Prueba final	87
<b>CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES</b>	<b>97</b>
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>104</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>110</b>
Anexo I: Ficha prueba inicial	110
Anexo II: Soluciones prueba inicial	111
Anexo III: Ficha primera sesión	112
Anexo IV: Soluciones primera sesión	114
Anexo V: Ficha segunda sesión	116

Anexo VI: Soluciones segunda sesión	122
Anexo VII: Ficha tercera sesión	127
Anexo VIII: Soluciones tercera sesión	130
Anexo IX: Ficha cuarta sesión	133
Anexo X: Soluciones cuarta sesión	135
Anexo XI: Ficha prueba final	137
Anexo XII: Soluciones prueba final	139
Anexo XIII: Material entregado a los alumnos	141

## **INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN**

Las matemáticas, una asignatura clave a lo largo de nuestra época escolar y pieza troncal de los currículos de todas las etapas educativas obligatorias, es a menudo considerada tanto por alumnos como por familiares una de los mayores obstáculos a superar durante el periodo escolar. Muchas personas consideran que esta área de la enseñanza es muy abstracta y que requiere mucho esfuerzo para la comprensión de sus contenidos, hecho que puede deberse en parte a la tendencia seguida por muchos centros escolares, en los cuales, a día de hoy, todavía se propone una metodología tradicional en la enseñanza de las matemáticas, tratando estas como algo alejado de la realidad cercana del alumnado y de situaciones reales o tangibles.

Como consecuencia de lo anteriormente mencionado, un número elevado de alumnos presenta actualmente dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, cifra que ha seguido una tendencia al alza en la última década. Ante esta situación, resulta necesario un replanteamiento en la forma de enseñanza de esta área, diseñando e implementando propuestas atractivas a los alumnos que fomenten el interés y la motivación por las matemáticas. Para ello, se propone transicionar hacia una forma de trabajo más manipulativa, empleando para ello recursos y materiales específicos que permitan a los alumnos experimentar, dando de esta manera más importancia a la aplicación de los procesos matemáticos en contextos reales.

Una de las principales propuestas en esta transición hacia una enseñanza más manipulativa e interactiva es el juego. A pesar de algunas de las anticuadas creencias que rechazan los juegos en las aulas, en realidad estos constituyen un valioso recurso educativo para cualquiera de las áreas en Educación Primaria. Especialmente destaca el juego educativo aplicado a las matemáticas, puesto que contribuye, tanto directa como transversalmente, a desarrollar habilidades de resolución de problemas, estratégicas, reflexivas y matemáticas, y a facilitar el aprendizaje de contenidos y algoritmos matemáticos.

Entre todos los juegos educativos del ámbito matemático destaca el ajedrez. Son múltiples los estudios que avalan la eficacia del ajedrez en el desarrollo de habilidades de naturaleza lógico-matemática. Esto ha derivado en que sean varios los países que lo hayan incluido como asignatura escolar, y en que muchos centros hayan tratado de integrar este juego deportivo en las aulas, ya sea como una actividad complementaria o como parte de una propuesta educativa.

El presente trabajo pretende investigar teórica y prácticamente el impacto educativo del ajedrez en el aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria, y más concretamente de la simetría axial, siendo este su objetivo principal.

Para ello se proponen una serie de objetivos específicos, que serán abordados de distinta manera a lo largo del trabajo, siendo estos fundamentales para la consecución del objetivo principal. Estos objetivos son:

1. Realizar una aproximación al tópico del Ajedrez Educativo en el aula de Educación Primaria mediante una revisión de la bibliografía de investigación educativa referida a dicho tópico.
2. Analizar en profundidad aspectos relacionados con el ajedrez desde un punto de vista matemático y didáctico y comprobar su utilidad y versatilidad para la enseñanza de la simetría axial con alumnos de 6º de Educación Primaria.
3. Diseñar, experimentar y evaluar unas sesiones de Ajedrez Educativo en el aula de Educación Primaria para contrastar la teoría con la práctica.

Teniendo en cuenta estos objetivos, el trabajo se divide en cuatro capítulos principales: el marco teórico, el diseño de una propuesta didáctica, el análisis sobre la implementación de dicha propuesta y las conclusiones.

En primer lugar, el marco teórico trata de establecer una base sobre la que posteriormente se fundamenta la propuesta didáctica. Para ello, se realiza una aproximación teórica a diversos conceptos de especial relevancia en este trabajo, abordando así los juegos educativos matemáticos, el ajedrez como herramienta educativa, y la enseñanza y el aprendizaje del concepto de simetría. Todo ello se hace tomando como modelo a los principales autores referentes en la temática, así como a investigaciones y propuestas elaboradas con anterioridad.

En segundo lugar, se presenta el diseño de la propuesta didáctica para el desarrollo de la simetría axial, dirigida a alumnos de 6º de Educación Primaria. Esta propuesta, la cual consta de 4 sesiones y dos pruebas de evaluación, una inicial y final, ha sido desarrollada desde cero, siendo todos los ejercicios que la componen de elaboración propia.

En tercer lugar, se analiza la propuesta de manera posterior a su implementación en el aula. Para ello se lleva a cabo una evaluación de las distintas sesiones, analizando las distintas

respuestas dadas por los alumnos a cada una de las cuestiones planteadas y buscando coincidencias o patrones en estas.

Por último, y para concluir el presente trabajo, se extraen las principales conclusiones alcanzadas tras la implementación de la propuesta y su posterior análisis. Estas serán en primer lugar explicadas, identificando aquellos puntos del trabajo donde se puede observar, y posteriormente comparadas con la opinión de autores al respecto.

# CAPÍTULO 1: MARCO TEÓRICO

## 1.1 Juegos educativos matemáticos

### 1.1.1 Definición de juego

Durante el transcurso de nuestra vida son muchos los momentos de ocio que empleamos participando en diversos juegos. Sin embargo, y pese a la evidente incidencia del juego en nuestras vidas, aparecen dificultades a la hora de definir este concepto. A lo largo de la historia han sido numerosos los autores que han tratado de definir este término, encontrándonos con acepciones distintas, las cuales pueden deberse a la influencia de la cultura y la sociedad.

El filósofo Gardner (1975) ya señalaba esta dificultad, haciendo referencia a que los múltiples significados que la palabra juego conlleva se han ido concatenando a lo largo del tiempo paralelamente a la evolución experimentada por el lenguaje, de forma que todas estas definiciones comparten que el juego está cargado de un componente lúdico.

Algo más concreta es la definición dada por Bright et al. (1985), quienes, complementando la definición de Inbar y Stoll (1970), llegaron a la conclusión de que el juego es un desafío regido por un conjunto de reglas, delimitado en espacio y tiempo, y al que uno se dedica por decisión propia.

Por último, si nos atenemos a las definiciones dadas por la Real Academia de la Lengua (s.f.a, s.f.b), el juego es la “acción o efecto de jugar por entretenimiento”, mientras que “jugar” se define como “hacer algo con alegría con el fin de entretenerte, divertirse o desarrollar determinadas capacidades”. De esta manera, podemos concluir que el juego es una acción que se realiza por entretenimiento y que permite divertirse a la par que desarrollar determinadas capacidades.

Este amplio abanico de definiciones nos conduce a la reflexión realizada por Gonzalez et al. (2014), quienes afirmaban que, debido a la complejidad de establecer una única definición de “juego”, su significado dependerá de los objetivos y finalidades que se pretendan alcanzar. De esta manera, el estar en posesión de un amplio abanico de definiciones basadas en evidencias empíricas nos permitirá poder delimitar el concepto de juego en contextos concretos.

### **1.1.2 Juegos y educación**

Enlazando con lo anteriormente mencionado cabe recalcar que, desde la perspectiva educativa, los juegos deben considerarse como una actividad importante en el aula. A pesar de que existen tendencias relucantes a la utilización de los juegos en el ámbito educativo (Molina, 1992), en realidad constituyen un valioso recurso didáctico, puesto que aportan una forma diferente de adquirir el aprendizaje, aunando descanso y recreación para el estudiante (Torres & Torres, 2007).

De esta manera, debe diferenciarse entre el concepto de juego y juego educativo: mientras que el juego gira en torno al disfrute, el juego didáctico se ajusta a una serie de objetivos y contenidos educativos. Sin embargo, esto no implica que los juegos didácticos pierdan su componente lúdico, puesto que también se caracterizan por originar sensaciones de disfrute y emoción (Brousseau, 1997).

Debido a este disfrute producido por los juegos, a lo que se suma al carácter competitivo y desafiante de los mismos (Grupo Alquerque, s.f.), podemos afirmar que estas actividades de carácter lúdico tienen a su vez un componente motivacional para el alumnado, el cual focaliza en mayor medida su interés en propuestas docentes que impliquen cierto entretenimiento y una participación activa por su parte. Esto se debe a que la motivación, correspondiente a aquella actitud interna y positiva frente al nuevo aprendizaje, es lo que mueve al sujeto a aprender (Carrillo et al. 2009), por lo que la propuesta de actividades que despierten la curiosidad y la motivación intrínseca del alumnado favorecerán que los aprendizajes transmitidos a través de ellas se adquieran de forma duradera.

Por otro lado, los juegos requieren la utilización de habilidades racionales, estratégicas y reflexivas (Grupo Alquerque, s.f.), lo que significa que este tipo de actividades también contribuyen al desarrollo de diversas destrezas cognitivas, siendo este un aspecto clave en el ámbito educativo. En este sentido, Edo (1998, p.23) señala que los juegos suelen “requerir al jugador esfuerzo, rigor, atención y memoria”, lo que promueve la adquisición de aprendizajes conceptuales, procedimentales e incluso actitudinales.

Asimismo, el hecho de que los juegos se basen sobre unas reglas y puedan jugarse de manera grupal conlleva la utilización de habilidades sociales, desarrollando así la personalidad del alumnado y aprendiendo a relacionarse con los demás (Camacho, 2012; Gairín y Fernández, 2010).

Además de todo este potencial de los juegos educativos, autores como Gairín y Fernández (2010) enfatizan que este tipo de recursos también tienen otras ventajas a nivel personal y académico, como, por ejemplo, la mejora de la actitud del alumnado, el desarrollo de la creatividad, la adaptación a las necesidades educativas de cada estudiante, y la obtención de valiosa información sobre los diversos aprendizajes.

Es decir, como señala Guirles (2005, p. 7), “la cuestión es que los juegos se conviertan en herramientas de aprendizaje”, pudiendo ser empleados como recursos didácticos que contribuyan a facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

### **1.1.3 El juego como recurso para enseñar matemáticas**

Como ya se ha reflejado en el subapartado anterior, el juego es una actividad con una amplia aplicabilidad educativa y, por lo tanto, puede ser empleado como medio de adquisición del aprendizaje en todas las áreas del conocimiento, entre las que encontramos las matemáticas.

Una de las tendencias educativas generales más difundidas hoy en día consiste en priorizar la transmisión de los procesos de pensamiento propios de la matemática más que en la mera transferencia de contenidos (De Guzmán, 2007). Esto implica que toda aquella situación problemática en la que estén implicadas las matemáticas (y que, por lo tanto requiera de procesamientos matemáticos para su resolución) está sujeta a ser aplicable en la enseñanza de las matemáticas, situaciones que pueden ser abordadas a través del juego.

De hecho, autores como Edo y Juvanteny (2017) y García (2019) exponen que los juegos contribuyen significativa y positivamente en el aprendizaje y desarrollo del pensamiento matemático, especialmente si se utilizan como recurso educativo desde edades tempranas.

Tal y como afirma De Guzmán (1989), el juego y las matemáticas tienen muchas similitudes y rasgos comunes en lo que se refiere a su finalidad y naturaleza, además de participar de la misma estructura esencial en lo que respecta a su ejercicio.

Principalmente, esto se debe a que los juegos (además de todas sus ventajas educativas generales ya mencionadas) poseen dos cualidades particulares cuando son empleados como recurso matemático: desarrollan los mecanismos propios de la resolución de

problemas y facilitan el aprendizaje de contenidos específicos (Grupo Alquerque, s.f.). Por tanto, la conexión de los juegos con las matemáticas es múltiple y se refiere tanto al aprendizaje de conceptos como a técnicas y estrategias, relacionándose además de manera directa con la resolución de problemas (Edo et al., 2007).

En este mismo sentido, Camacho (2012) también destaca que los juegos consiguen crear herramientas y mecanismos para resolver diversos problemas, incluidos aquellos de naturaleza matemática. Esto se debe a que ambas acciones (el juego y la resolución de problemas) se asemejan en gran medida, pudiendo incluso considerar que, en realidad, el juego es una forma de resolver problemas: tanto al jugar como al solucionar un problema, el alumnado debe analizar y comprender la situación inicial, para así encontrar y elaborar el procedimiento estratégico más adecuado que le permita tener éxito de forma experimental y analítica. Este paralelismo entre los juegos y la resolución de problemas matemáticos evidencia que, como se describe posteriormente, la utilización del juego como recurso educativo facilita la adquisición y el desarrollo de aquellas destrezas necesarias en la resolución de problemas, preparando al alumnado para esta tarea (Gairín, 1990). Este aspecto resulta particularmente significativo, puesto que, normalmente, el alumnado aplica insuficientemente este tipo de estrategias al enfrentarse a un problema matemático, centrándose sobre todo en los cálculos y algoritmos, lo que implica que se necesita conceder especial importancia a aquellos razonamientos que abordan el problema en los momentos iniciales (Márquez & Núñez, 2018).

Por tanto, esta similitud entre el juego y las matemáticas supone que, a través de los juegos educativos matemáticos, el alumnado desarrolla una serie de destrezas útiles y necesarias desde una perspectiva matemática, tales como las técnicas intelectuales, el pensamiento deductivo, el razonamiento lógico, las estrategias de pensamiento, la discusión matemática, la reflexión crítica y la creatividad (Gairín y Corbalán, 1988; Ferrero, 1998; Oldfield, 1991). En consecuencia, los juegos matemáticos desarrollan el pensamiento matemático (Ferrero, 1998). De hecho, Winter y Ziegler (1983) establecieron relaciones entre los juegos y el pensamiento matemático, evidenciando de manera más concreta la confluencia existente entre ambos aspectos:

**Tabla 1**

Relaciones entre los juegos y el pensamiento matemático

<i>Juegos</i>	<i>Pensamiento matemático</i>
Reglas del juego .....	Reglas de construcciones, reglas lógicas, instrucciones, operaciones.
Situaciones iniciales .....	Axiomas, definiciones.
Jugadas .....	Construcciones, deducciones.
Fichas de juego .....	Medios, expresiones, términos.
Estrategia de juego .....	Utilización hábil de las reglas, reducción de ejercicios conocidos a fórmulas.
Situaciones resultantes .....	Nuevos teoremas, nuevos conocimientos.

*Nota.* Adaptado de “Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas”, de J. M. Gairín, 1990, *Educar*, (17), p. 112.

Asimismo, los juegos aplicados a las matemáticas no solo promueven la adquisición de diversos aprendizajes, sino que también contribuyen a impedir el fracaso y desmotivación que suele predominar en este área (Vila y Callejo, 2004). El alumnado, movido por el intrínseco placer del juego, no teme experimentar ni fallar, perdiendo así un miedo comúnmente extendido hacia el fracaso y hacia las matemáticas (Ferrero, 1998). Además, Gardner (1975) afirma que mantener al alumnado motivado es de vital importancia en la infancia, puesto que es la etapa en la que se comienza a generar la curiosidad y el interés por las matemáticas. De hecho, este mismo investigador señala que la mejor forma de despertar la motivación en el aula de matemáticas es, precisamente, mediante el juego:

Siempre he creído que el mejor camino para hacer las Matemáticas interesantes a alumnos y profanos es acercarse a ellas en son de juego. [...] en niveles inferiores no es posible motivar a ningún alumno a aprender la teoría superior de grupos, por ejemplo, diciéndole que la encontrará hermosa, estimulante o incluso útil si algún día llega a ser un físico especializado en partículas. El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático [...]. (Gardner (1975, p.8)

Por tanto, el impacto de los juegos en el aprendizaje de las matemáticas resulta significativamente positivo tanto desde una perspectiva didáctica como integral del alumnado, ya que contribuyen a desarrollar habilidades y destrezas esenciales a nivel matemático, personal y social.

#### **1.1.4 El juego en el currículo de matemáticas**

Unido a la aplicabilidad del juego como recurso para enseñar matemáticas, debemos tener en cuenta y conocer cómo y en qué términos está presente el juego en el currículo educativo para el área de matemáticas, en este caso concreto en el currículo autonómico de Aragón, ya que este delimita toda práctica docente en el aula.

Tal y como viene recogido en la Resolución de 12 de abril de 2016, orientaciones sobre los perfiles competenciales de las áreas de conocimiento y los perfiles de las competencias clave por cursos, para la consecución de los objetivos del área es necesario el desarrollo de habilidades intelectuales tales como la generalización, de la cual se dice que:

Permite extender las relaciones matemáticas y las estrategias de resolución de problemas a otros bloques y áreas de conocimiento independientes de la experiencia.

A esta habilidad se llega después de un proceso que se inicia con la comprensión desde la realidad y su evidencia y finaliza con la abstracción mediante juegos y ejercicios de aplicación. (p. 5)

Es decir, se pone en evidencia la necesidad de utilizar recursos que permitan vincular la experiencia real y tangible con el entendimiento matemático abstracto, los cuales deben fomentar la reflexión matemática y la resolución de problemas.

Si bien esta es la única ocasión en la que se hace referencia explícita a la aplicación de juegos en el aula, también podemos encontrar otros conceptos que podrían ser entendidos como una forma de juego, o como una referencia indirecta al mismo, entre los que encontramos los desafíos matemáticos y la pregunta, de los cuales se menciona lo siguiente:

[...] deben ser los elementos motivadores para la adquisición del conocimiento matemático y el desarrollo del pensamiento lógico, favoreciendo en el alumno la investigación y la expresión oral de sus razonamientos con un lenguaje matemático correcto, que por su precisión y terminología debe ser diferente a su lenguaje habitual.

El trabajo en equipo y el dominio de las habilidades sociales en la interacción con el grupo de iguales servirán para desarrollar la escucha activa, intercambiar y confrontar ideas, y generar nuevo conocimiento. (p. 6)

En las orientaciones metodológicas del área también se subraya la importancia de emplear materiales manipulativos que permitan acercar la realidad experimental a la abstracción matemática y simbólica. Estas indicaciones sugieren (aunque, de nuevo, no de manera explícita) que la utilización de juegos en el aula puede constituir un valioso recurso educativo para alcanzar estos objetivos, lo que se debe a su naturaleza manipulable, experimental y tangible.

Asimismo, en el anexo II de la Resolución del 12 de abril de 2016, correspondiente al área de matemáticas (p.4), se señala que “la resolución de problemas constituye el eje principal de la actividad matemática”, indicando además que estos problemas deben ser abordados a través de situaciones desafiantes, atractivas y reales. De nuevo, la aplicación del juego en el aula se ajusta a estas orientaciones metodológicas, ya que los juegos educativos suponen retos e implican la resolución de diversos problemas o la aplicación de algoritmos matemáticos.

Por otro lado, también cabe describir brevemente la presencia del juego en el nuevo currículo de Educación Primaria, perteneciente a la LOMLOE que comenzará a estar en vigor en el próximo curso académico. En el anexo II del currículo de matemáticas de la Orden ECD/1112/2022 del 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, se relaciona en más de una ocasión el juego con el aprendizaje matemático, a diferencia del anterior currículo.

En primer lugar, la nueva legislación considera el juego como una actividad matemática esencial, defendiendo abiertamente el impacto positivo de los juegos en el aprendizaje de las matemáticas y en el desarrollo integral del alumnado. A lo largo de todo el currículo, se fomenta frecuentemente la utilización de juegos variados en el aula, con el objetivo de facilitar el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos, algoritmos y habilidades matemáticas, y promover interés por el área. Además, se especifica que, para que los juegos tengan un valor educativo significativo, siempre deben de implementarse teniendo en cuenta la secuencia didáctica y el proceso de aprendizaje del estudiantado.

De forma más práctica, se sugiere la utilización de juegos para desarrollar estrategias necesarias en la resolución de problemas y en el pensamiento computacional, así como para facilitar el aprendizaje de la probabilidad, la representación numérica, las operaciones combinadas y la geometría; también se menciona que los juegos pueden ser empleados para analizar algunos de los razonamientos del alumnado. En el propio currículo aparecen ejemplos de juegos que pueden emplearse en el aula para el aprendizaje y enseñanza de determinados contenidos, tales como el tangram, construcciones Lego, “buscando al vecino”, “carrera de coches” o “el juego del 24”, entre otros. De hecho, uno de los juegos al que más importancia se le concede es el ajedrez, el cual se relaciona con la resolución de problemas, las habilidades matemáticas básicas, el aprendizaje de un lenguaje abstracto, la planificación y los procesos deductivos, entre más habilidades y destrezas.

Por tanto, resulta evidente que se ha producido una evolución significativa en el currículo educativo en relación al concepto de juego. Mientras que la anterior legislación apenas hacía mención a los juegos educativos, la actual ley educativa especifica con mucho más detalle el ya mencionado valor y relevancia de los juegos en el ámbito educativo y, sobre todo, matemático. Esto significa que la aplicación de juegos en la enseñanza de las matemáticas puede (o debería) tener más presencia en las aulas de Educación Primaria, ya sea a través de las sugerencias didácticas o incluso mediante la implementación directa de los juegos recomendados en el propio currículo.

### **1.1.5 Clasificaciones de juegos educativos matemáticos**

El amplio repertorio de juegos implica que la clasificación de los mismos resulta demasiado compleja e, incluso, incompleta (Olfos & Villagrán, 2001). A pesar de esta dificultad, autores como Gairín (1990) y Grupo Alquerque (s.f.) apuestan por clasificar los juegos educativos matemáticos en función de dos categorías diferenciadas: juegos de conocimiento y juegos de estrategia.

En primer lugar, los juegos de conocimiento requieren de la utilización de contenidos y algoritmos que, según las programaciones del área (y, por supuesto, según el propio currículo) deben ser abordados en el aula para adquirir una serie de conceptos. Es decir, constituyen recursos que, generalmente, han sido adaptados o creados con el fin de enseñar contenidos curriculares. Por este motivo, en esta categoría pueden encontrarse juegos relacionados con múltiples ámbitos matemáticos, como, por ejemplo, el álgebra (juegos de

sustitución), la aritmética (bingo de sumas) y la geometría (juegos con poliominós), entre otros.

Por otro lado, los juegos de estrategia se centran en los procesos propios de la resolución de problemas, más que en la adquisición de determinados conceptos y algoritmos. En consecuencia, estos juegos tienen como objetivo principal el desarrollo de razonamientos, procesos mentales y habilidades que requieren las matemáticas. Asimismo, los juegos de estrategia pueden tener dos finalidades distintas: resolver una situación problemática de forma individual o encontrar estrategias para ganar a un adversario. A modo de ejemplo, en esta categoría se encuentran juegos como el ajedrez, el solitario o el wari.

Además, cabe mencionar que los juegos educativos matemáticos también pueden ser clasificados, de manera más superficial, según el número de participantes, su origen tradicional o adaptado, o su temática, o el tipo de materiales a emplear (Chacón, 2008).

### **1.1.6 Metodología y criterios de elección**

Como se ha descrito en apartados anteriores, los juegos aplicados a la educación matemática pueden ser un valioso recurso. No obstante, se debe tener en cuenta que su selección e implementación en el aula debe realizarse en base a unos criterios, para así poder alcanzar una serie de objetivos educativos concretos que permitan asegurar su eficacia y utilidad. Al fin y al cabo, el tiempo destinado a jugar en clase de matemáticas puede ser una inversión de gran valor si sabemos escoger los juegos adecuados y conseguimos involucrar activamente a los alumnos en esta actividad (Edo et al., 2007).

Para ello, Gairín (1990) establece una serie de criterios y orientaciones metodológicas que deben considerarse a la hora de emplear juegos en el aula de matemáticas:

En primer lugar, el juego debe de tener una utilidad educativa, es decir, debe poseer una serie de objetivos didácticos que, ante todo, faciliten el aprendizaje matemático del alumnado. Para ello, se deberá valorar si un juego de conocimiento o un juego de estrategia es más adecuado en cada situación, dependiendo de los objetivos que se pretendan alcanzar.

En este sentido, también se debe valorar si el juego corresponde a una situación previa a la enseñanza de contenidos, simultánea o posterior. Lo importante es que la propuesta se

corresponda con las necesidades del grupo en ese momento determinado, para que así contribuya a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Además de la utilidad de los juegos, el autor también concede especial importancia al docente. Esto se debe a que el maestro es el encargado de desempeñar una amplia variedad de tareas, entre las que destaca la selección y, sobre todo, la preparación de la actividad. Independientemente de que se puedan elegir juegos comercializados, adaptados o incluso inventados, lo más importante es que el docente valore las características propias del juego: qué conocimientos y destrezas se requieren, las experiencias previas del estudiantado, el atractivo del juego, la correspondencia entre el juego y la edad del alumnado, las condiciones espaciales y el coste económico. Para comprobar y reflexionar sobre estos aspectos, se recomienda que el docente pruebe el juego antes de implementarlo en el aula, aspecto que también es necesario para poder obtener más información del juego y diseñar las actividades en caso de que se realicen.

Asimismo, durante las sesiones de clase el maestro debe mostrar entusiasmo hacia la propuesta, detallar las normas del juego, dedicar tiempo al inicio a familiarizarse con los materiales y con las reglas a través de partidas de práctica, observar las jugadas del alumnado y facilitar que todo el estudiantado pueda aprovechar el juego lo máximo posible. Este último aspecto es especialmente relevante con los juegos de estrategia, puesto que se debe procurar que todos los alumnos consigan descubrir por sí mismos las estrategias adecuadas.

## **1.2 Ajedrez educativo**

Como ya se ha mencionado anteriormente, la tendencia actual de la enseñanza de las matemáticas permite que toda aquella situación que requiera de procesos de pensamiento matemáticos pueda ser aplicada a la educación, ya que a través de ella se adquieren aprendizajes que luego son transferibles a la resolución de otros problemas. Una de las posibles situaciones que requiere procesos de pensamiento matemático para el correcto desarrollo de su práctica es el ajedrez, actividad, juego, deporte o incluso arte de índole competitiva que se practica en un tablero de 8x8 y que replica la guerra entre dos ejércitos iguales en su composición (Gairín y Fernández, 2010).

El ajedrez es uno de los juegos más antiguos de la historia, cuyos inciertos orígenes parecen remontarse hasta el Antiguo Egipto (Martín, 1996). Sin embargo, tuvieron que transcurrir varios milenios hasta que el ajedrez comenzase a ganar popularidad en los siglos XVIII y XIX, etapa en la que este juego empezó a consolidarse a través de la creación de competiciones y escuelas de ajedrez (Paniagua, 2017).

En consecuencia, no fue hasta la década de los noventa cuando el ajedrez comenzó a interesar y estar presente en el ámbito educativo (Muñiz, 1995; Fernández, 1992). De hecho, en esta época se trató de implementar, sin éxito, una propuesta curricular que incluyese el ajedrez como una asignatura más en las aulas públicas españolas (Gairín y Fernández, 2010). A pesar del rechazo de esta propuesta, en la actualidad el ajedrez continúa estando presente en las aulas. En España destaca el caso del programa Ajedrez en la Escuela, en el cual se incluye el ajedrez como instrumento para alcanzar la consecución de las competencias clave, tal y como se describe en la Resolución del Director General de Innovación y Formación Profesional, por la que se convocan programas educativos en centros docentes sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Autónoma de Aragón. Por otro lado, muchos países, entre los que se encuentran Rusia, Cuba, Argentina, Uruguay, Ecuador, Islandia, México, Venezuela o Colombia, han decidido ir más allá, implementando el ajedrez como asignatura escolar. En cualquier caso, la utilización del ajedrez en la escuela se ve favorecida por su bajo coste, su fácil accesibilidad y por el generalizado interés del alumnado hacia este juego (Gairín y Fernández, 2010).

El imperante interés por el ajedrez desde una perspectiva educativa se debe a los resultados arrojados por los múltiples estudios realizados sobre los beneficios de la práctica del ajedrez en la escuela. Por este motivo, a lo largo de las últimas dos décadas han sido

numerosas las investigaciones que han pretendido demostrar el impacto positivo de la práctica de ajedrez en la educación, particularmente desde perspectivas cognitivas y sociales.

Algunos de estos estudios reflejan evidencias de que la práctica del ajedrez podría ser beneficiosa en el desarrollo de las funciones ejecutivas, señalando incluso que “la mayor parte de su importancia educativa reside en los aspectos cognitivos” (Gairín y Fernández, 2010, p. 69). Esto significa que el ajedrez engloba procesos mentales complejos, orientados al control y monitoreo de comportamientos dirigidos a metas (Grau & Moreira, 2015; Ramos et al., 2018).

El desarrollo cognitivo se posibilita funcionalmente mediante el despliegue de las competencias preformadas, entre las que destacan la lógica, las funciones ejecutivas y la interacción social (Sastre-Riba, 2006). Bull et al. (2008) descubrieron que un correcto desempeño en tareas donde las funciones ejecutivas la memoria a corto plazo estuvieran implicadas estaba relacionado a un mejor rendimiento del alumnado en las habilidades lingüísticas y matemáticas. De esta manera, el desarrollo de las funciones ejecutivas jugará un papel relevante en el correcto desarrollo cognitivo y, por ende, en el rendimiento académico y las habilidades sociales.

Relacionando este aspecto con el ajedrez, se ha demostrado que este juego influye en el desarrollo cognitivo de “la atención, la memoria visual, la concentración, la percepción, el razonamiento lógico, la orientación espacial, la creatividad y la imaginación” (Gairín y Fernández, 2010, p. 69). Escobar (2018) también señala que el ajedrez, sobre todo si es aplicado a contextos educativos, posee, además, beneficios en la memoria, el cálculo y la toma de decisiones. En consecuencia, autores como Aciego et al. (2012) y McDonald (2006) defienden que el ajedrez es capaz de mejorar el cociente intelectual y el rendimiento académico.

Por otro lado, también cabe mencionar el impacto del ajedrez en la dimensión social y emocional del jugador, lo que se debe, principalmente, a la competición e interacción social que conlleva el ajedrez. Gairín y Fernández (2010, p. 69) mencionan que, a través de este juego, se favorece “la responsabilidad, (...), la deportividad, la planificación, la autonomía, la decisión, el control, la tenacidad y la crítica constructiva”. Además, a través del ajedrez se desarrolla la paciencia y el control de la impulsividad (Amigó y Serrá, 2017), e incluso contribuye a formar el carácter (Gairín y Fernández, 2010) y a mejorar el comportamiento a través de los silencios, los turnos y la concentración (Escobar, 2018). Esto, sumado a los

anteriores beneficios cognitivos, también facilita la resolución de conflictos sociales y personales en la vida real (Escobar, 2018) y, en definitiva, se consigue desarrollar la inteligencia emocional (Cernuda, 2016).

Este desarrollo cognitivo y personal depende tanto de factores biológicos como de ambientales, extendiéndose desde la primera infancia hasta la edad adulta (Gonzalez, 2013), por lo que la creación de situaciones de trabajo óptimas en la escuela por parte del profesorado a través, en este caso, del ajedrez, pueden favorecer una mayor rapidez en su desarrollo, el cual puede ser Enriquecido a través de este juego milenario.

Con el objetivo de alcanzar estos beneficios, generalmente el ajedrez es relacionado con las matemáticas en contextos educativos. Esto se debe, sobre todo, a la propia naturaleza del juego, ya que es “sustentado casi en su totalidad por la lógica y la matemática”, en el que “queda poco margen para el azar” (Gairín y Fernández, 2010, p. 71-72). Esto implica que el razonamiento y el pensamiento lógico son cualidades necesarias en el ajedrez, aspecto que también resulta fundamental en las matemáticas. De hecho, algunos estudios han concluido que los estudiantes que juegan a ajedrez tienden a mostrar un mejor rendimiento en matemáticas (Kovacic, 2012).

No obstante, cabe diferenciar el ajedrez competitivo del ajedrez educativo. Aunque es cierto que en ambos el razonamiento deductivo es esencial, el ajedrez educativo posee unos objetivos didácticos y pedagógicos, yendo más allá de la propia competición (Escobar, 2018). Asimismo, es común emplear el ajedrez como herramienta para enseñar una serie de conceptos o algoritmos matemáticos, en cuyos casos el objetivo principal es aprender dichos contenidos. No obstante, Escobar (2018, p. 57) señala que los objetivos del ajedrez educativo también son transversales, por lo que se pretende “educar en valores”, “desarrollar el respeto a las normas y la disciplina” y “favorecer el trabajo cooperativo”, además de, como ya se ha expuesto anteriormente, “aumentar las capacidades cognitivas”, “enseñar a observar, pensar, razonar y tomar decisiones” y “fomentar la reflexión”.

En la línea del razonamiento llevado a cabo por Escobar (2018), son varias las propuestas didácticas diseñadas con la finalidad de emplear el ajedrez como herramienta educativa. Entre estas encontramos algunas dirigidas a la enseñanza de las matemáticas, como la realizada por Arnal y Gasca (2018), la cual se centra en el desarrollo de la argumentación y resolución de problemas; o la llevada a cabo por Arnal y Vera (2021), enfocada en la enseñanza de herramientas de combinatoria.

En conclusión, la aplicación educativa del ajedrez en las escuelas resulta evidentemente positiva tanto desde perspectivas teóricas como prácticas. De hecho, la decisión de implementar el ajedrez en la escuela es apoyada tanto por la propia UNESCO como por autores como Escobar y Escobar (2018), quienes señalan que “el ajedrez es una asignatura innovadora que mejora las capacidades cognitivas y el comportamiento del alumnado”, afirmación que va en la línea de la realizada por Gairín y Fernández (2010, p. 69), los cuales señalan que “la influencia del ajedrez, tanto a nivel cognitivo como a nivel personal, avala su implantación en los sistemas educativos de muchos países del mundo”.

## **1.3 La simetría, enseñanza y aprendizaje**

Según la vigesimotercera edición del Diccionario de la Lengua Española, publicada en 2014, la simetría se define como la “correspondencia exacta en la disposición regular de las partes o puntos de un cuerpo o figura con relación a un centro, un eje o un plano” (Real Academia de la Lengua Española, s.f.c). Por otro lado, Knuchel (2004) va más allá y vincula la simetría con aquellos patrones que estructuran la realidad conceptual.

Dicho concepto matemático, el cual será el eje vertebrador de la secuencia didáctica presentada posteriormente, es trabajado en las aulas de Educación Primaria a partir del tercer curso de la etapa, tal y como viene indicado en el Anexo II de la Orden de 16 de junio de 2014 de la Consejería de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Bajo las directrices del currículo vigente, la enseñanza de la simetría en Educación Primaria se basa en un primer lugar en la introducción a la simetría, para progresar posteriormente hacia la identificación en situaciones del entorno y el trazado de figuras simétricas, y finalizar con la resolución de problemas geométricos en los que el reconocimiento de esta propiedad otorgue al alumnado información relevante.

Durante este proceso de enseñanza se identifican diferentes tipos de simetría: axial, central y especular; sin embargo, únicamente el primero de ellos será introducido en la etapa de Educación Primaria. La simetría axial es “el movimiento que consiste en copiar todos los puntos de una figura geométrica a otra posición equidistante de una recta denominada eje de simetría” (Hernández et al., 2018, p. 3). Dentro de esta encontramos a su vez dos tipos distintos de simetría axial: por un lado aquella en la que el eje de simetría es interno a una figura, partiendo esta en dos mitades iguales; por otro lado, encontramos aquella simetría en la que el eje es externo. En este tipo nos encontramos dos figuras en lugar de una, teniendo cada una de ellas sus vértices o puntos a la misma distancia de manera perpendicular al eje de simetría.

El currículo autonómico del área, concretamente en el Anexo II de la Orden de 16 de junio de 2014 (la cual ya ha sido anteriormente mencionada) introduce estos conceptos como parte del cuarto bloque de contenidos, correspondiente a la geometría, en 3º de Educación

Primaria. Mientras que en 3º y 4º el objetivo es identificar y reconocer figuras simétricas, en los dos últimos cursos de la etapa también se incluye la creación de figuras planas simétricas.

Sin embargo, cabe mencionar que la nueva ley educativa que entrará en vigor en el próximo curso académico (LOMLOE) establece algunos cambios menores en la secuencia didáctica del aprendizaje de la simetría en Educación Primaria. Como se indica en el Anexo II, correspondiente al currículo del área de conocimiento de matemáticas de la Orden ECD/1112/2022 del 18 de julio, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, la simetría pasará a introducirse de manera más temprana en el primer ciclo de la etapa; de esta forma, el alumnado de 1º y 2º de Educación Primaria deberá comenzar a identificar regularidades y patrones simétricos en diversas figuras y dibujos sencillos, además de completar figuras en función de su simetría. Por otro lado, en el segundo ciclo de Educación Primaria, antes limitado a la identificación y reconocimiento de figuras simétricas, ahora también se introduce la generación de figuras geométricas atendiendo a la simetría. Para ello, el nuevo currículo autonómico incluye algunas actividades manipulativas que, a modo de ejemplo, podrían ser implementadas en el aula para aprender el concepto de simetría, tales como la experimentación guiada con hexaminós, tangram, papiroflexia y dibujos.

Autores como Giménez et al. (2016) inciden en la importancia de enseñar el concepto de simetría en las aulas desde edades tempranas. Como describen estos autores, esto se debe a que los niños, capaces de identificar y comprender la simetría, estimulan y desarrollan su razonamiento y, sobre todo, sus habilidades de visualización, comprensión espacial y su pensamiento geométrico, aspecto en el que se profundiza a continuación. Esto se consigue a través de actividades y tareas centradas en la simetría, lo cual también contribuye a establecer una base conceptual que enlaza los contenidos propios de cursos posteriores.

En consecuencia, el aprendizaje de la simetría contribuirá a desarrollar el pensamiento geométrico y espacial, el cual constituye una de las bases fundamentales del pensamiento matemático (Contreras et al., 2018). Asimismo, esto implica que se desarrolla la capacidad de visualización matemática, la cual hace referencia a habilidades de representación, transformación, observación, comunicación y documentación sobre información de carácter gráfico y visual (Arcavi y Hadas, 2000). No obstante, el desarrollo de este tipo de habilidades espaciales y de visualización (tal y como ocurre en el caso de la simetría) también es extrapolable a la visualización de otros conceptos matemáticos, incluyendo la resolución de

problemas. Esto se debe a que este tipo de destrezas conllevan la representación, interpretación y manipulación mental de información, aspectos que son especialmente relevantes y útiles en el aprendizaje matemático (Contreras et al., 2018).

Sin embargo, la enseñanza y el aprendizaje de conceptos geométricos y espaciales, entre los que se incluye la simetría, suele resultar demasiado compleja e incluso abstracta tanto para el alumnado como para el profesorado. Esto se debe, principalmente, a que la simetría implica habilidades de visualización y razonamiento que requieren de la creación de imágenes mentales, siendo este un proceso cognitivo complejo que, además, se relaciona directamente con el pensamiento geométrico (Giménez et al., 2016; Hershkowitz, 1989; Battista, 2007).

Por este motivo, investigadores como Giménez et al. (2016) remarcan la necesidad docente de implementar tareas manipulables y experimentales que, atendiendo a esta complejidad cognitiva, faciliten la visualización y representación conceptual de imágenes. Esto implica que la enseñanza de la simetría, tomando como referencia estas indicaciones didácticas, debería basarse en actividades que permitan experimentar con conceptos como los ejes de simetría y las figuras simétricas y que, a su vez, ayuden al alumnado a crear imágenes mentales para resolver un problema dado.

## CAPÍTULO 2: SECUENCIACIÓN DE ACTIVIDADES

Teniendo en cuenta la aproximación teórica expuesta anteriormente, en este segundo capítulo se diseña una propuesta didáctica, dirigida a un grupo de alumnos de 6º de Educación Primaria, en la que se emplea el ajedrez como juego educativo matemático para aprender el concepto de simetría.

Esta propuesta se compone de un total de cuatro sesiones, cada una de ellas constituida por diversas actividades individuales: la primera sesión supone una evaluación inicial, así como una introducción al ajedrez; la segunda y tercera sesión se centran en el desarrollo de la simetría axial a través de la resolución de problemas, mientras que la cuarta sesión incluye la creación de problemas por parte del alumnado y una evaluación final.

A lo largo de esta propuesta se emplea el ajedrez como un juego de estrategia personal, en la que el alumnado debe resolver individualmente una serie de situaciones problemáticas en relación a la simetría a través del ajedrez. De esta manera, a continuación se detalla la secuenciación de actividades diseñadas a lo largo de las cuatro sesiones propuestas.

Por último, cabe mencionar que todas y cada una de las actividades que componen la propuesta didáctica que se muestra a continuación son de elaboración propia, incluyendo la prueba inicial y final. Para la elaboración de las sesiones 2, 3 y 4 se ha tenido en cuenta no solo la simetría de las piezas, sino también la de los colores de los escaques del tablero a emplear en cada actividad. Debido a esto la mayoría de los ejercicios planteados son sobre tableros de 3x3 y 5x5, ya que permiten la aparición de ejes de simetría horizontales, verticales y diagonales, en contraposición a los tableros de 4x4, donde el único eje simétrico posible es diagonal.

Todas las sesiones serán entregadas a los alumnos mediante fichas, en las cuales están plasmadas de manera ordenada todas las actividades diseñadas (véase anexos I, III, V, VII, IX y XI).

Además, se pueden consultar posibles resultados de cada sesión en los anexos II, IV, VI, VII, X y XII, existiendo muchas más soluciones posibles a cada una de las actividades a parte de las mostradas.

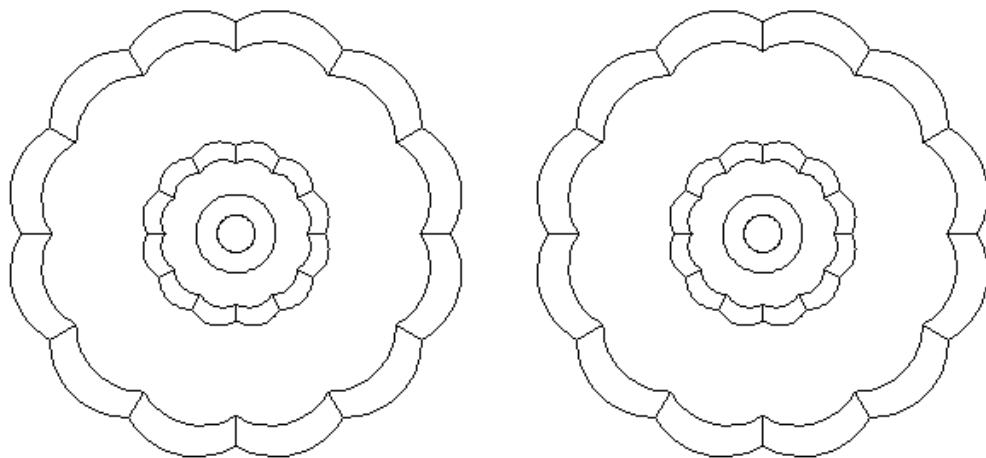
## 2.2 Primera sesión

La primera sesión será realizada el día 14 de junio y tendrá un tiempo estimado de unos 60 minutos. Al comienzo de esta se les pedirá a los alumnos que realicen una breve prueba inicial, la cual servirá para comprobar el nivel de conocimiento del que parten los alumnos y evaluar al final si ha existido progreso durante la propuesta didáctica.

La prueba inicial constará de un único problema en el cual se plantean dos preguntas relacionadas con la simetría axial, principal objeto de estudio de la propuesta. En la primera de ellas se cuestiona acerca de la presencia de ejes de simetría en una imagen, mientras que en la segunda se pide la localización de varios elementos para mantener, en la medida de lo posible, el mayor número de ejes localizados. A continuación se observa el problema en cuestión:

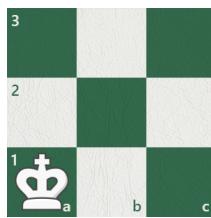
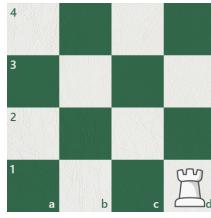
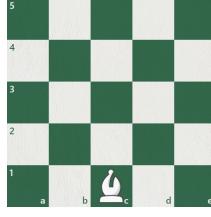
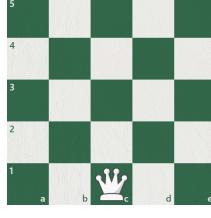
*Irina y Sergio quieren construir una fuente en el jardín de su casa y, tras mucho decidir, se han decantado por la que se puede observar en la imagen. Una vez elegida, lo último que falta antes de construirla es elegir dónde irán las seis luces que la iluminarán, las cuales deben posicionarse de manera que mantengan las simetrías de la fuente.*

- a) *En la primera imagen, identifica y dibuja los ejes de simetría presentes.*
- b) *En la segunda, selecciona dónde colocar las luces, dibujando además los ejes de simetría que se mantienen.*



Una vez terminada la prueba inicial, se explicará el funcionamiento de las actividades a realizar, las cuales tienen como objetivo principal reconocer los movimientos propios de cada ficha y describir posiciones por medio de coordenadas. Para poder realizar de manera adecuada las actividades se realizará un breve repaso sobre el uso de coordenadas. Además, se les indicará a los alumnos la nomenclatura que vamos a asignar a cada una de las piezas para indicar a qué pieza corresponde cada uno de los movimientos, la cual es la siguiente: R para el rey, D para la dama o reina, A para el alfil, T para la torre y P para el peón.

Esta primera sesión, si bien no está enfocada en el concepto de simetría, servirá para refrescar los conocimientos previos sobre el ajedrez de los alumnos, estableciendo la base de cara a las demás sesiones. A continuación se muestran las actividades a realizar por parte de los alumnos durante la primera sesión:

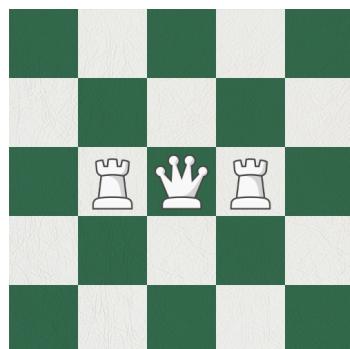
<b>Objetivo principal</b>	Recordar los conocimientos previos referentes al ajedrez y a los movimientos propios de cada una de las fichas que lo conforman.	
<b>Tablero acotado</b>	<b>P</b>	<b>Enunciado</b>
	1R	Desplaza al rey hasta la casilla c3 empleando los movimientos propios de esta ficha y realizando los mínimos posibles. Indica paso por paso los movimientos realizados.
	1T	Mueve a la torre hasta la casilla b3 empleando los movimientos propios de esta ficha y realizando los mínimos posibles. Indica paso por paso los movimientos realizados.
	1A	Desplaza al alfil hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta ficha y realizando los mínimos posibles. Indica paso por paso los movimientos realizados.
	1D	Mueve la dama hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta ficha y realizando los mínimos posibles. Indica paso por paso los movimientos realizados.

## 2.3 Segunda sesión

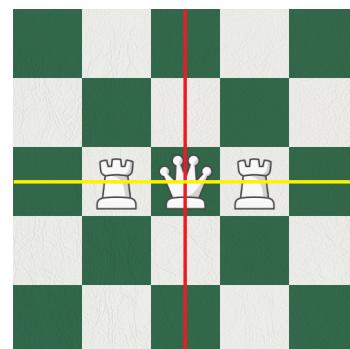
La segunda sesión se llevará a cabo durante el día 15 de junio y tendrá una duración aproximada de 60 minutos. Esta, al contrario que la primera sesión, estará ya enfocada en el concepto de simetría, teniendo como objetivo principal la identificación de posiciones simétricas y la localización del eje o ejes de simetría.

Mediante esta sesión se pretende que los alumnos comprendan un poco mejor el concepto de simetría y desarrollem la capacidad para identificar posiciones simétricas, conocimiento fundamental de cara a las sesiones posteriores.

De forma previa al comienzo de la realización de las actividades por parte de los alumnos, correspondientes a la segunda sesión, se realizará el siguiente ejemplo en la pizarra a modo de explicación. En este se muestra la identificación de los ejes de simetría de manera previa, la resolución del problema de posicionamiento planteado y la identificación de los ejes de forma posterior, al igual que en las actividades presentadas a los alumnos.



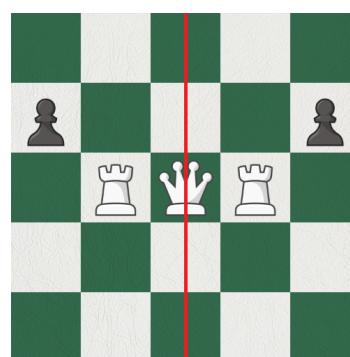
Posición inicial



Identificación de los ejes de simetría previos a la colocación de los peones

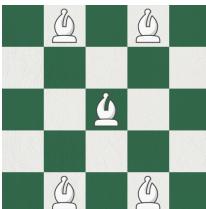


Colocación de los peones



Identificación de los ejes de simetría posteriores a la colocación de los peones

A continuación se muestran las actividades a realizar por parte de los alumnos durante la segunda sesión:

<b>Objetivo principal</b>	Identificar posiciones simétricas y localizar ejes de simetría	
<b>Tablero acotado</b>	<b>P</b>	<b>Enunciado</b>
	1A2P	<p>Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.</p> <p>Una vez dibujados, coloca dos peones de manera que no puedan ser capturados por el alfil.</p> <p>¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo</p> <p>¿Se corresponde este con los dibujados al principio?</p> <p>¿Han aparecido ejes nuevos o dejado de ser válidos algunos de los dibujados inicialmente? ¿Cuáles?</p>
	1T2P	<p>Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.</p> <p>Una vez dibujados, coloca dos peones de manera que no puedan ser capturados por la torre.</p> <p>¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo</p> <p>¿Se corresponde este con los dibujados al principio?</p> <p>¿Han aparecido ejes nuevos o dejado de ser válidos algunos de los dibujados inicialmente? ¿Cuáles?</p>
	5A2P	<p>Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.</p> <p>Una vez dibujados, coloca el máximo número de peones de manera que no puedan ser capturados por los alfiles.</p> <p>¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo</p> <p>¿Se corresponde este con alguno de los dibujados al principio?</p> <p>Imagina que solo tienes que colocar dos peones, ¿podrías hacer que fuera simétrica la imagen? ¿Podrías hacer que no lo fuera? Pon un ejemplo de cada uno indicando la colocación de las piezas mediante coordenadas.</p>

Tablero acotado	P	Enunciado
	1D2P	<p>Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.</p> <p>Coloca dos peones de manera que no puedan ser capturados por la dama.</p> <p>¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.</p> <p>En caso de que no exista un eje de simetría, ¿podrías colocarlos de manera que la ficha sea simétrica? Indica el eje de simetría.</p>
	4T2P	<p>Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.</p> <p>Coloca dos peones de manera que no puedan ser capturados por las torres.</p> <p>¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.</p> <p>¿Se corresponde este con alguno de los dibujados al principio?</p> <p>¿Existe alguna solución en la que el resultado no sea simétrico?</p>

## 2.4 Tercera sesión

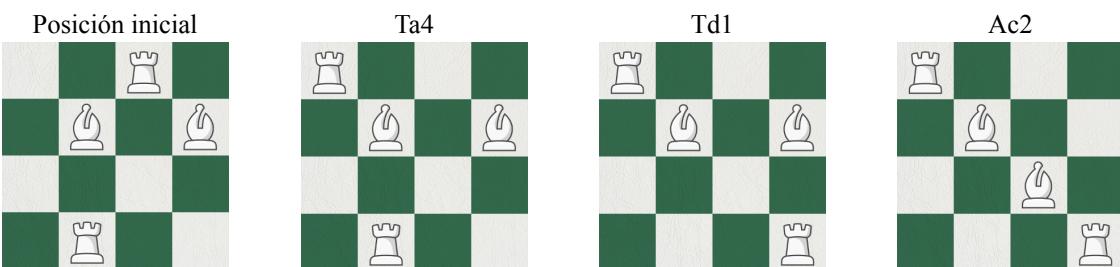
La tercera sesión se llevará a cabo durante el día 15 de junio, coincidiendo con la segunda sesión, y, al igual que las sesiones anteriores, tendrá una duración aproximada de 60 minutos. Tras haber comprendido el concepto de posición simétrica y haber identificado el eje o ejes de simetría en algunas de estas, el objetivo principal de esta sesión será que los alumnos formen estas posiciones e identifiquen el o los ejes de simetría, partiendo para ello de una posición no simétrica preestablecida. Al contrario que en la anterior sesión, en esta los ejercicios cuentan con un amplio abanico de soluciones válidas, dejando de esta manera una mayor libertad al alumnado para encontrar respuesta a las cuestiones planteadas.

Para dar comienzo a esta sesión en el aula, se explicará el funcionamiento de las actividades a realizar mencionando para ello los siguientes puntos, los cuales son de obligado cumplimiento para el correcto desarrollo de la sesión:

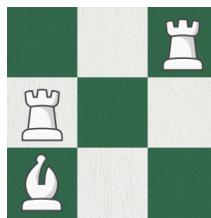
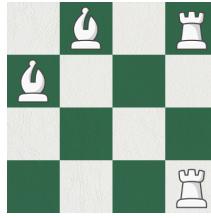
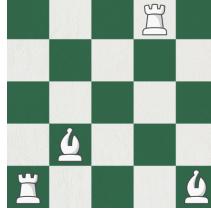
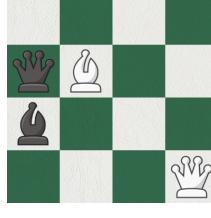
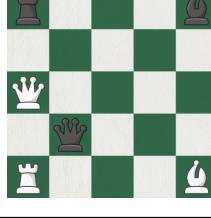
- El objetivo es formar posiciones simétricas partiendo de posiciones asimétricas.
- Una pieza no puede volver a su posición inicial una vez movida.
- En los ejercicios con fichas blancas y negras se moverá por turnos, comenzando a mover siempre en primer lugar las fichas blancas
- En los ejercicios con fichas blancas y negras estas se podrán capturar entre sí.

Además, para facilitar la comprensión de estas reglas, se llevará a cabo en la pizarra los siguientes ejemplos, de forma simultánea a la explicación.

### Movimientos realizados



A continuación se muestran las actividades a realizar por parte de los alumnos durante la tercera sesión:

<b>Objetivo principal</b>	Formar posiciones simétricas e identificar su eje de simetría, partiendo para ello de posiciones asimétricas.	
<b>Tablero acotado</b>	<b>P</b>	<b>Enunciado</b>
	1A2T	Realiza dos movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica el movimiento realizado mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja un eje de simetría.
	2A2T	Realiza tres movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.
	2A2T	Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.
	2D2A	Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.
	2D2A2T	Realiza cuatro movimientos de manera que formes una posición de simetría. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.

## 2.5 Cuarta sesión

La cuarta sesión será realizada el día 17 de junio y, al contrario que el resto de sesiones, durará aproximadamente 50 minutos. El principal objetivo de esta última sesión es que los alumnos elaboren sus propios problemas, tomando como objeto de respuesta una posición simétrica en el tablero.

Para poder llevar a cabo estas actividades se les mencionará que pueden tomar como ejemplo los dos tipos de problemas trabajados con anterioridad, es decir, tanto los que había que identificar los ejes de simetría y colocar las piezas en posiciones donde no pudiesen ser capturadas, como los que había que formar posiciones simétricas partiendo de posiciones asimétricas.

A continuación se muestran las actividades a realizar por parte de los alumnos durante la tercera sesión:

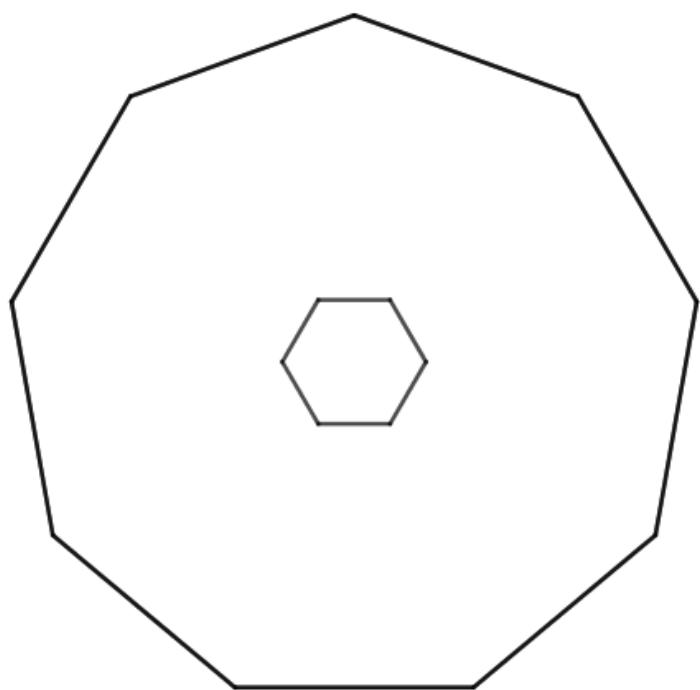
<b>Objetivo principal</b>	Elaborar problemas tomando como solución una disposición simétrica de las fichas en el tablero	
<b>Tablero acotado</b>	P	<b>Enunciado</b>
	xAxTD	Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.
	xAxTD	Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.

Por último, y para finalizar con la propuesta establecida pudiendo evaluar el desarrollo realizado, se planteará a los alumnos un problema con cuestiones fuera del ámbito del ajedrez, el cual constará de dos preguntas, al igual que la prueba inicial, pero con una mayor dificultad. A continuación puede observarse el problema en cuestión:

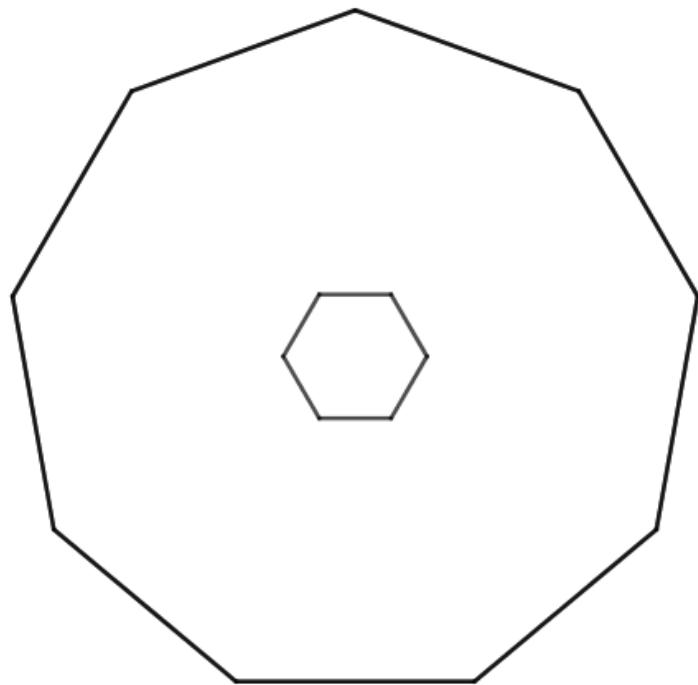
*En Italia, más concretamente en la región de Udine, se encuentra una ciudad con unas características especiales, llamada Palmanova. Esta ciudad está construida de manera que forma un eneágono regular, teniendo además una plaza central con forma de hexágono regular.*



*Nos han solicitado ayuda desde el ayuntamiento del municipio para seleccionar los lugares donde edificar, de forma que en primer lugar debemos identificar los ejes de simetría presentes en la ciudad.*



*Una vez hayas identificado los ejes, ayuda al ayuntamiento de Palmanova a distribuir 4 tiendas de alimentación a lo largo de la ciudad, teniendo en cuenta que no se puede perder la característica identificativa de la ciudad, la simetría. Indica tras haber colocado las tiendas el eje o ejes de simetría que se mantienen presentes.*



## CAPÍTULO 3: EXPERIMENTACIÓN EN EL AULA

### 3.1 Contextualización y diseño de las sesiones

#### 3.1.1 Contexto de aula

El presente estudio ha sido llevado a cabo en el colegio público Miraflores, localizado en la ciudad de Zaragoza (España). Este centro escolar se encuentra en el barrio de San José, más concretamente en el parque que lleva el mismo nombre que el centro, zona caracterizada por acoger a familias con un nivel socioeconómico medio.

En este ha participado un grupo clase completo de 6º de Educación Primaria, es decir, alumnos con edades comprendidas entre los 11 y los 13 años. El grupo está compuesto por 26 alumnos, de los cuales 14 son chicas y 12 son chicos, contando así con un ratio de entre chicas y chicos balanceado. Dentro del grupo podemos discernir a su vez alumnos de varias nacionalidades, entre las que encontramos: España, Rumanía, Ecuador, Marruecos, Argelia, Perú y Malí; estando estas ordenadas de mayor a menor representación.

Pese a haber un porcentaje considerable de alumnado extranjero, casi todos ellos llevan ya tiempo viviendo en España, por lo que tienen un nivel de manejo del idioma adecuado y no requieren de ayuda para poder leer y comprender los enunciados de las actividades diseñadas. La excepción en este aspecto es una alumna que lleva dos años viviendo en España, la cual todavía tiene dificultades para seguir el ritmo de trabajo del grupo clase, requiriendo ayuda de la especialista PT en varias asignaturas. Esta alumna muestra principalmente dificultades con el idioma, y en especial con la expresión oral y la comprensión escrita.

Respecto al ajedrez, esta es una actividad con mucha tradición dentro del colegio Miraflores, por lo que una amplia muestra del alumnado que va a participar en el estudio cuenta ya con conocimiento previo sobre las normas que rigen este deporte.

Siguiendo esta tradición ajedrecística el centro está inscrito en el programa Ajedrez en la Escuela, ofreciendo a los alumnos la posibilidad de participar en retos relacionados con el ajedrez y la lógica, los cuales se van presentando de manera semanal en la plataforma classroom, a la cual tiene acceso todo alumno del centro que lo solicite. Esta vía de comunicación sirve también para hacer llegar a los alumnos más interesados leyendas y

curiosidades sobre el ajedrez, además de hacerles conocedores de la celebración de futuros eventos relacionados con la disciplina en el entorno cercano.

### **3.1.2 Elección de las actividades y elaboración de materiales**

Respecto al uso de materiales didácticos, son múltiples los autores que los consideran necesarios como medio para que los alumnos puedan adquirir y desarrollar las habilidades matemáticas (Cascallana, 1988; Freudenthal ,1991; Mialaret; 1984) Tal y como menciona Berdonneau (2008), “el objetivo de la manipulación de materiales es el de proporcionar a los niños herramientas que ayuden a la producción de representaciones mentales”.

Debido a esto, y como facilitador para resolver las distintas situaciones que se les planteaban, se decidió proporcionar a cada uno de los alumnos un tablero de ajedrez y fichas necesarias para replicar cada una de las actividades, de forma que contasen con un soporte visual donde representar los procesos mentales.

Además, la utilización de fichas les permite tener la posibilidad de hacer y deshacer movimientos el número de veces que necesiten, siendo de esta manera una herramienta de trabajo más adecuada que el empleo únicamente de un tablero, lápiz y goma, ya que esta última, pese a necesitar de menos materiales, acaba requiriendo de un mayor tiempo por parte de los alumnos para la resolución de los ejercicios.

Al no contar con suficientes tableros y fichas reales para proporcionar a todos los alumnos, se ha decidido diseñar y fabricar todo el material empleado durante las sesiones.

Para el diseño, tanto de los tableros como de las fichas se ha empleado la aplicación gratuita Canva, herramienta de fácil empleo que permite personalizar de forma sencilla el material elaborado.

Posteriormente, todo el material diseñado ha sido fotocopiado en cartulina, eligiendo este material sobre el papel por su mayor durabilidad. Tras fotocopiarlo se troqueló las fichas de manera que quedasen con forma circular, introduciendo las fichas de cada uno de los alumnos en un sobre numerado. Tanto el sobre como el tablero fueron a su vez introducidos en una funda de plástico por alumno, que era la que se les hacía llegar al comienzo de las sesiones.

### **3.1.3 Temporalización y metodología de implementación prevista**

Las sesiones han sido realizadas entre el día 14 y 17 del mes de junio, correspondiéndose estas con las últimas semanas del curso escolar, cuando ya se ha llevado a cabo la evaluación final de los alumnos y estos deben soportar una menor carga de trabajo.

Aunque el centro sigue una jornada de horario partido, durante el mes de junio esta se adapta a jornada continua, por lo que todas las sesiones realizadas han sido llevadas a cabo en horario de mañanas.

Para la primera de las sesiones se contó con una hora al comienzo de la jornada escolar, comenzando la sesión a las 9:00. Esta misma hora de comienzo se mantuvo para la segunda y tercera sesión, realizada un día después de la primera, contando en este caso con dos horas para llevarlas a cabo. Para finalizar la propuesta se dispuso, pasados dos días de la segunda y tercera sesión, con una hora más de clase en la sesión previa al tiempo de recreo, es decir, con comienzo a las 10:00.

Respecto a la metodología de implementación prevista, esta estará basada en la resolución de problemas.

Se planteará a los alumnos una serie de cuestiones a resolver, todas ellas plasmadas en una serie de fichas. El profesor únicamente realizará un pequeño ejemplo, al comienzo de cada una de las sesiones, para que los alumnos puedan comprender el funcionamiento de las actividades. Además, en la primera sesión, se mencionará la nomenclatura que deben emplear para nombrar a cada una de las figuras (apuntando esta a su vez en la pizarra para evitar preguntas al respecto durante el transcurso de la sesión) y realizando un breve repaso sobre el empleo de coordenadas, cuestiones necesarias para la resolución de las actividades, tanto de esa como del resto de sesiones, pero que no guardan relación con el objeto de estudio.

Para favorecer que cada alumno pueda mantener un ritmo de trabajo propio todas las fichas correspondientes a cada una de las sesiones serán entregadas de manera individual al comienzo en una funda de plástico, junto con el material necesario, es decir, el tablero y las fichas, las cuales irán metidas en un sobre rojo numerado (véase Anexo XIII).

El número del sobre, el cual viene a su vez reflejado en la parte baja de la ficha del tablero, se corresponde con su número de lista y será el número identificativo que deberán utilizar al realizar cada una de las sesiones, de manera que sea anónimo lo realizado por cada uno de los alumnos.

### 3.1.4 Elaboración de instrumentos de evaluación

Para evaluar las distintas sesiones se han diseñado varios instrumentos de evaluación, con los cuales se pretende realizar una recogida de los datos relevantes en cada una de las actividades, para posteriormente poder analizarlos y compararlos.

Tanto la prueba inicial, como la prueba final, van a ser evaluadas a partir de ítems individualizados, recogidos en las tablas que se muestran a continuación. De esta manera se tendrá un registro individual previo y posterior a la implementación de la propuesta didáctica.

#### Tabla

Resultados de la identificación previa y posterior de la prueba inicial

Alumno	Nº de ejes identificados correctos				Inicio y final de los ejes		
	0	2	3	6	Vértices	Lado	Mixto
1							

#### Tabla

Resultados de la resolución del problema de la prueba inicial

Alumno	Tipo de respuesta			Localización fuente			Localización ejes		
	Buena	Sim	Mala	Abajo	Arriba	Mixta	Ext	Int	Mixta
1									

#### Tabla

Resultados de la identificación previa de los ejes de la ciudad

Alumnos	Nº de ejes identificados correctos				Eje/s Extra	Tipos de ejes		
	0	1	2	3		Vert.	Horiz.	Oblic.
1								

#### Tabla

Resultados de la resolución del problema (colocación de las farolas)

Alumno	Tipo de respuesta			Ejes identificados				Eje/s Extra
	Buena	Sim	Mala	0	1	2	3	
1								

Además, cada una de las sesiones será evaluada a través de un registro específico de lo solicitado en esa sesión, mencionando el número de personas que ha llevado a cabo cada una de las opciones posibles, pero no individualizando los resultados obtenidos en estas.

En la primera sesión, donde se pretende que los alumnos se familiaricen con los movimientos propios de cada una de las fichas, se evaluará únicamente si han encontrado o no una solución correcta y si esta es la que menos movimientos requiere, dentro de las posibles, para alcanzar el objetivo.

### **Tabla**

Resultados de las actividades de la primera sesión

	Nº participantes que ha encontrado una solución correcta	Nº participantes que ha encontrado la solución más eficaz
Ejercicio 1		
Ejercicio 2		
Ejercicio 3		
Ejercicio 4		

En la segunda sesión, se tendrán en cuenta dos aspectos por separado. Por un lado si los participantes han alcanzado una solución válida para el problema planteado, y por otro lado si han conseguido localizar los ejes de simetría de manera previa y posterior.

### **Tabla**

Resultados de la resolución del problema de la segunda sesión

	Resolución del problema		
	Bien	Mal	NS/NC
Ejercicio 1			
Ejercicio 2			
Ejercicio 3			
Ejercicio 4			
Ejercicio 5			

**Tabla**

Resultados de la identificación previa y posterior de la segunda sesión

	Identificación previa			Identificación posterior		
	Bien	Regular	Mal	Bien	Regular	Mal
Ejercicio 1						
Ejercicio 2						
Ejercicio 3						
Ejercicio 4						
Ejercicio 5						

Para la tercera sesión se tendrá en cuenta la correcta formación de una posición simétrica, empleando para ello los movimientos indicados. Además, se evaluará la identificación del eje de simetría una vez formada una posición simétrica con las fichas.

**Tabla**

Resultados de las actividades de la tercera sesión

	Formación figura simétrica			Identificación eje de simetría		
	Bien	Regular	Mal	Bien	Regular	Mal
Ejercicio 1						
Ejercicio 2						
Ejercicio 3						
Ejercicio 4						
Ejercicio 5						

Finalmente, para la cuarta y última sesión, se tendrá en cuenta la correcta elaboración de los problemas planteados por los alumnos, así como su parecido con los trabajados en sesiones anteriores. Se evaluará además la explicación dada para la resolución de los mismos, indicando si estas han sido realizadas de manera gráfica o mediante coordenadas. Para concluir, se hará mención a los ejes de simetría presentes en las actividades, los cuales, pese a no ser solicitados implícitamente, pueden ser solicitados por el creador del problema.

**Tabla**

Datos extraídos de los problemas que componen la cuarta sesión

	Nº problemas correctamente planteados	Nº problemas similares a los de la segunda sesión	Nº problemas similares a los de la tercera sesión
Ejercicio 1			
Ejercicio 2			

**Tabla**

Datos extraídos de los problemas que componen la cuarta sesión

	Nº resoluciones correctamente explicadas	Nº resoluciones gráficas	Nº resoluciones con coordenadas
Ejercicio 1			
Ejercicio 2			

**Tabla**

Datos respectivos a la identificación de los ejes de simetría en la cuarta sesión

	Nº problemas que solicitan ejes	Nº resoluciones sin ejes	Nº problemas que no solicitan ejes	Nº resoluciones con ejes no solicitados
Ejercicio 1				
Ejercicio 2				

## **3.2 Experimentación y evaluación**

### **3.2.1 Prueba inicial**

Al comienzo de la primera sesión, y antes de dar comienzo a las actividades que la conforman, se llevó a cabo una prueba inicial que tenía como objetivo evaluar el nivel del que partían los alumnos. Esta prueba, que consta de un problema compuesto por dos preguntas distintas, contaba con una duración de unos 15 minutos aproximadamente.

Para llevar a cabo la evaluación de esta prueba se tendrán en cuenta tres aspectos principales, que componen las dos tareas del problema. Estos aspectos serán denominados posteriormente como actividad 1, 2 y 3, a la hora de mencionar ejemplos llevados a cabo por los alumnos.

El primero de los aspectos a evaluar es la identificación previa de los puntos de simetría de la fuente. Para ello se analizará el número de ejes correctos identificados, así como los lugares tomados como referencia para su inicio y final.

El segundo de los aspectos a tener en cuenta es la resolución del problema, es decir, la colocación de las luces dentro de la fuente. Para ello se observará si estas han sido colocadas o no de manera simétrica, además de clasificarlas según su localización dentro de la fuente y respecto a los ejes de simetría dibujados de manera posterior.

Para finalizar, el último aspecto a evaluar será la localización de los ejes de simetría de manera posterior a la colocación de las luces. Para ello los alumnos requerirán de haber realizado correctamente el paso anterior, por lo que no todos los alumnos serán evaluados en este aspecto. Entre los que sí que lo hayan logrado, se tendrá en cuenta, al igual que en la identificación previa, el número de ejes de simetría correctamente localizados, así como los puntos de referencia tomados para su realización.

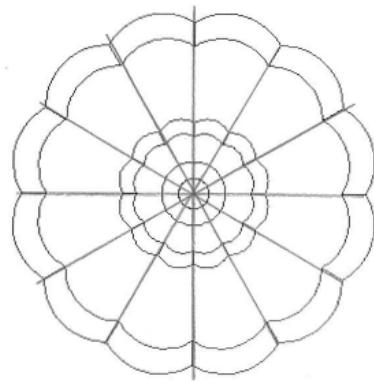
**Tabla 2**

Resultados de la identificación previa de la prueba inicial

Alumnos	Nº de ejes identificados correctos				Inicio y final de los ejes		
	1	4	6	12	Vértices	Lados	Mixto
1			x		x		
2			x		x		
3		x					x
4			x		x		
5	x				x		
6				x			x
7			x		x		
8			x		x		
9			x		x		
10			x		x		
11			x		x		
12			x		x		
13			x		x		
14			x		x		
15			x		x		
16			x		x		
17		x					x
18			x		x		
19			x		x		
20		x					x
21			x		x		
22			x		x		
23			x		x		
24		x					x
25	-	-	-	-	-	-	-
26			x		x		
<b>Total</b>	1	4	19	1	20	0	5

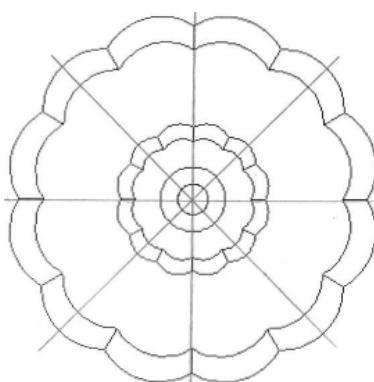
En primer lugar, la identificación previa de los alumnos destaca por compartir un mismo resultado casi de manera unánime. De los 25 alumnos que llevaron a cabo esta prueba inicial 19 de ellos encontraron únicamente 6 ejes de simetría, no siendo esta la solución completa. Cabe mencionar que entre las respuestas de estos 19 alumnos, en todas ellas los ejes de simetría comienzan y finalizan en los vértices de la figura dada, no existiendo ninguna respuesta en la que se identifiquen 6 ejes los cuales partan y finalicen a mitad de un lado.

**Figura 1**  
*Actividad 1 del participante 19*



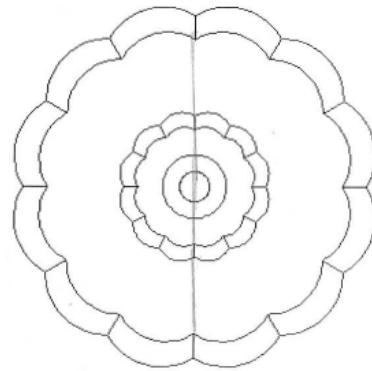
La segunda respuesta más común dada, es aquella en la que se identifican 4 ejes de simetría. Esta respuesta, muy alejada en representación de la primera, con únicamente 4 alumnos, es, al igual que la primera, incompleta. Al contrario que la primera respuesta, esta mezcla ejes de simetría de vértice-vértice y lado-lado, sin embargo, lo que más destaca de todo ello es que estos ejes se corresponden con los propios de un cuadrado, siendo el eje vertical, horizontal y los dos diagonales.

**Figura 2**  
*Actividad 1 del participante 3*



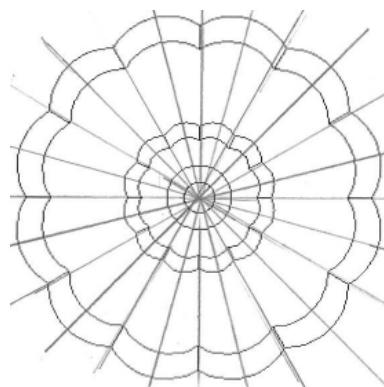
A parte de las anteriores respuestas mencionadas, se llevaron a cabo otras dos resoluciones distintas, ambas realizadas por un participante únicamente. La primera de estas resoluciones estaba compuesta de un único eje de simetría, siendo este el eje vertical. Esta respuesta pese a ser correcta, es también incompleta.

**Figura 3**  
*Actividad 1 del participante 5*



La segunda de estas resoluciones, y última de las alcanzadas por los participantes, es la respuesta completa a la tarea, compuesta por 12 ejes de simetría, 6 de ellos vértice-vértice y los otros 6 lado-lado. Como ya se ha mencionado, esta respuesta fue expuesta por un único alumno, concretamente el participante 6.

**Figura 4**  
*Actividad 1 del participante 6*



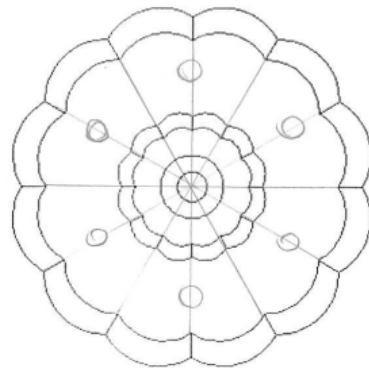
**Tabla 3**

Resultados de la resolución del problema de la prueba inicial

Alumno	Tipo de respuesta			Localización fuente			Localización ejes		
	Buena	Sim	Mala	Abajo	Arriba	Mixta	Ext	Int	Mixta
1			X		X		X		
2	X			X			X		
3		X				X		X	
4			X	X			X		
5	-	-	-	-	-	-	-	-	-
6	X			X					X
7			X	X					X
8			X	X				X	
9		X				X	-	-	-
10			X	X				X	
11	X			X			X		
12	X			X				X	
13	X			X				X	
14	X			X			X		
15			X	X				X	
16	X			X			X		
17		X				X		X	
18	X			X			X		
19	X			X			X		
20	X			X			-	-	-
21			X		X			X	
22	X			X			X		
23	X			X				X	
24		X				X		X	
25	-	-	-	-	-	-	-	-	-
26	X			X				X	
<b>Total</b>	13	4	7	18	2	4	9	11	2

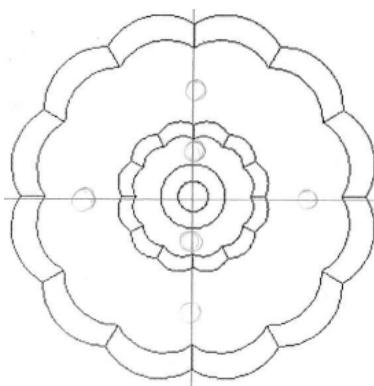
En la tarea correspondiente a la colocación de las luces, es decir, la resolución del problema relacionado con el mantenimiento de la simetría, se pueden observar 13 respuestas correctas. Cabe mencionar que en todas ellas los participantes optaron por colocar las luces en la parte baja de la fuente, es decir, la parte exterior en la vista aérea que se les proporcionaba, lo cual no era requisito para alcanzar la respuesta correcta.

**Figura 5**  
*Actividad 2 del participante 26*



Además, encontramos también 4 respuestas simétricas que, si bien respetan en cierta medida la simetría de la fuente, no mantienen el máximo número de ejes de simetría posibles, siendo este de 6 ejes posteriores a la colocación de las luces.

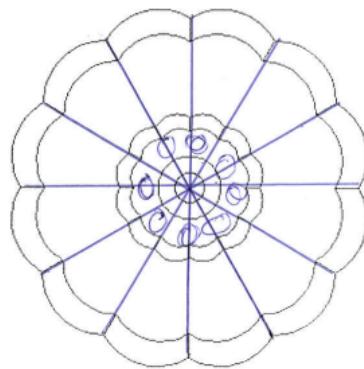
**Figura 6**  
*Actividad 2 del participante 3*



El resto de los participantes no alcanzaron resoluciones válidas, habiendo además 2 participantes que no hicieron intento de resolver el problema, probablemente ante el desconocimiento sobre cómo ejecutar lo que en este se les estaba solicitando.

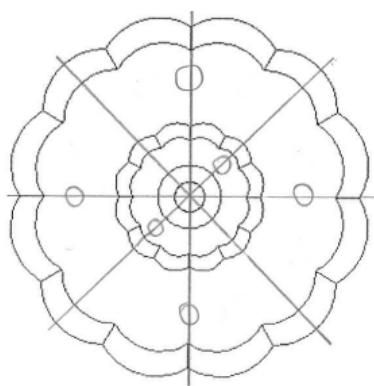
Respecto a la colocación de las luces dentro de la fuente, destaca que una amplia mayoría de los alumnos optaron por emplear para ello la parte baja de la fuente, habiendo 18 alumnos que escogieron esta localización por 2 que eligieron colocar las luces en la zona superior. Es reseñable también que, pese a poder ser utilizada la parte de arriba para la colocación de las luces, ambas respuestas en las que esta se emplea son incorrectas. A continuación se muestra una de ellas en la que son colocadas 8 luces en lugar de 6.

**Figura 7**  
*Actividad 2 del participante 21*



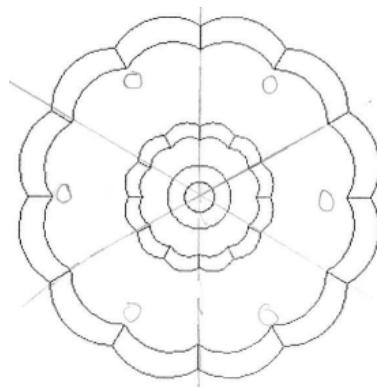
Cabe resaltar también que 4 de los alumnos optaron por algo más innovador, colocando las luces tanto en la parte inferior como en la superior de la fuente. Estos 4 alumnos se corresponden además con los 4 que alcanzaron una respuesta simétrica, mencionados anteriormente.

**Figura 8**  
*Actividad 2 del participante 24*

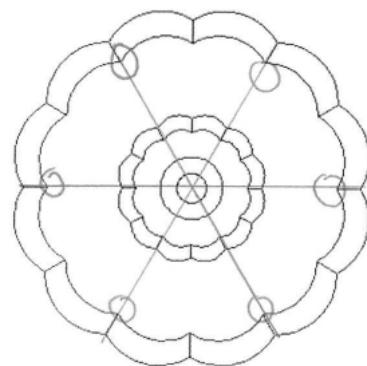


Para finalizar, hay que mencionar que aproximadamente la mitad de los alumnos colocaron las luces fuera de los ejes de simetría dibujados en la tarea siguiente, mientras que la otra mitad superpuso los ejes a las luces dibujadas, formando estas parte del propio eje. A continuación se muestran ejemplos.

**Figura 9**  
*Actividad 2 del participante 2*



**Figura 10**  
*Actividad 2 del participante*



**Tabla 4**

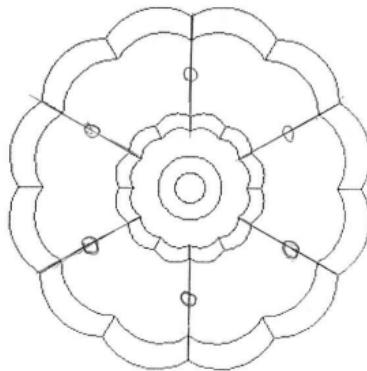
Resultados de la identificación posterior de la prueba inicial

Alumno	Nº de ejes identificados correctos				Inicio y final de los ejes		
	0	2	3	6	Vértices	Lado	Mixto
1	-	-	-	-	-	-	-
2			x		x		
3		x			x		
4	-	-	-	-	-	-	-
5	-	-	-	-	-	-	-
6		x			x		
7	-	-	-	-	-	-	-
8	-	-	-	-	-	-	-
9	x				-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-
11	x				x		
12			x		x		
13				x	x		
14	x				x		
15	-	-	-	-	-	-	-
16			x		x		
17		x			x		
18	x				x		
19	x				x		
20	x				-	-	-
21	-	-	-	-	-	-	-
22			x		x		
23			x		x		
24		x			x		
25	-	-	-	-	-	-	-
26				x	x		
<b>Total</b>	6	4	5	2	15	0	0

Para finalizar, y respecto a la identificación de los ejes de simetría posteriores a la colocación de las luces, cabe mencionar que en esta no se pudo identificar una respuesta que sobresaliera en número sobre el resto. Sin embargo, sí que es recalcable que todas y cada una de las respuestas dadas, ya fueran de 0, 2, 3 o 6 ejes, contienen únicamente ejes de simetría con comienzo y final en uno de los vértices de la figura, desecharlo definitivamente los ejes lado-lado, los cuales ya contaban con poca presencia en la identificación previa.

Destaca también la presencia de ejes que no llegan a cortar la figura en su totalidad, hecho que, si bien ya estaba presente en un par de ocasiones en la identificación previa, aquí es mucho más vistoso.

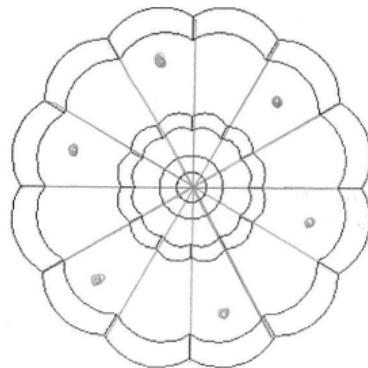
**Figura 11**  
*Actividad 3 del participante 23*



Cabe mencionar antes de comenzar con los distintos tipos de resoluciones, que muchos de los participantes no pudieron llegar a realizar esta tarea dado que no posicionaron las luces de manera simétrica en la tarea anterior. Además, nos encontramos también con 6 alumnos que, pese a haber colocado correctamente las luces no fueron capaces o no llegaron a intentar identificar ejes de simetría.

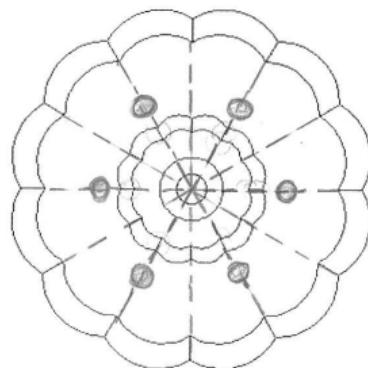
Entre las respuestas incorrectas destaca una en particular, la cual fue alcanzada por hasta 3 participantes. En esta respuesta las luces estaban colocadas de manera óptima, es decir, manteniendo los 6 ejes de simetría posibles. Sin embargo, al identificar los ejes, estos habían mantenido de los 12 ejes existentes en un principio los 6 que no se mantienen posteriormente. Esto se puede deber a que los ejes que sí que se mantenían estaban superpuestos a las luces colocadas, lo cual puede les crease reticencias para seleccionarlos.

**Figura 12**  
*Actividad 3 del participante 11*



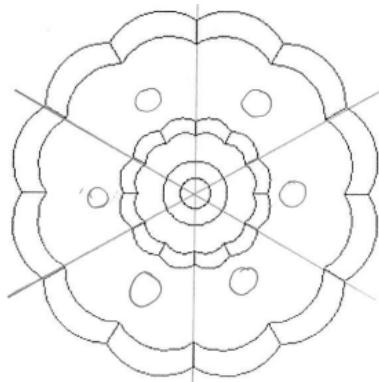
Entre las respuestas completamente correctas, es decir, aquellas que identifican todos los ejes de simetría que se han mantenido, encontramos únicamente dos. Cabe mencionar que para tener la posibilidad de alcanzar dicha resolución debías haber colocado correctamente las luces con anterioridad. Por lo que todos los alumnos que no habían encontrado la disposición óptima para las luces, se veían privados de poder identificar posteriormente todos los ejes posibles. A continuación se muestra una de estas respuestas.

**Figura 13**  
*Actividad 3 del participante 13*



Fueron también varios los alumnos que localizaron 3 ejes de simetría, concretamente 5 de los participantes. Llama bastante la atención que todos los participantes que identificaron una respuesta con 3 ejes colocaron correctamente las luces, sin embargo, no localizaron en la mayoría de ocasiones los ejes que cortaban estas.

**Figura 14**  
*Actividad 3 del participante 22*



En conclusión, la mayoría de los alumnos recuerdan y comprenden los contenidos vistos a lo largo del curso referentes a la simetría axial, sin embargo, son bastantes los alumnos que tienen reparos a la hora de establecer ejes de simetría si estos cortan líneas de la figura. Además destaca que, pese a la complejidad de añadir elementos nuevos a una figura ya dada, mientras se intenta mantener su simetría, son muchos los alumnos que han alcanzado una resolución satisfactoria.

### **3.2.2 Evaluación de la primera sesión**

Como se ha comentado con anterioridad el principal objetivo de la primera sesión era realizar un breve repaso de los movimientos propios de las fichas de ajedrez a través de varias actividades, cada una de ellas con una ficha distinta, en las que había que alcanzar un escaque del tablero partiendo de una posición ya dada.

Dado que el objetivo de esta sesión era únicamente refrescar conocimientos previamente adquiridos, los cuales no tienen relación con el eje vertebrador de la propuesta didáctica, para evaluar esta sesión se van a tener en cuenta tres aspectos principales. En primer lugar si han alcanzado el objetivo en cada uno de los ejercicios planteados. En segundo lugar si el trayecto realizado se ha llevado a cabo ejecutando el menor número de movimientos posibles, es decir, de la manera más eficaz. Y en tercer lugar si se ha realizado un correcto empleo de las coordenadas para describir cada uno de los movimientos.

Pese a que la propuesta está orientada a un grupo clase compuesto por 26 alumnos, a esta primera sesión solo asistieron 22 alumnos. A continuación se muestra una tabla en la que se extraen los datos obtenidos respectivos a los dos primeros aspectos a evaluar mencionados:

**Tabla 5**

Resultados de las actividades de la primera sesión

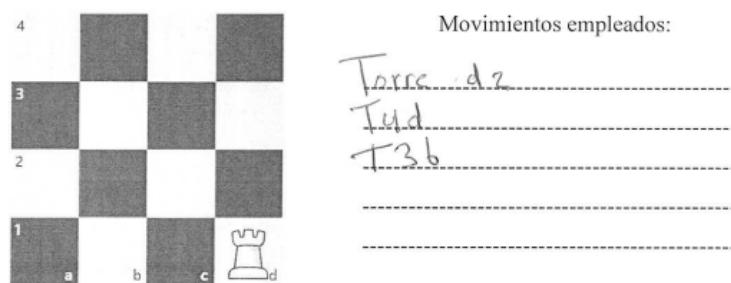
	Nº participantes que ha encontrado una solución correcta	Nº participantes que ha encontrado la solución más eficaz
Ejercicio 1	20	15
Ejercicio 2	19	18
Ejercicio 3	19	10
Ejercicio 4	19	17

Pasando a analizar los datos obtenidos, y respecto al éxito obtenido en las actividades que componen la sesión, cabe destacar que 18 de los 22 participantes han completado de manera satisfactoria todas las actividades. De esta manera, los fallos están focalizados en 4 alumnos, concretamente los participantes 5, 8, 15 y 18, siendo especialmente significativos los realizados por el participante 5, quien no ha resuelto con éxito ninguna de las actividades planteadas.

Esto se debe a que, como ya se mencionó con anterioridad en el apartado 3.1.1, dentro del grupo clase hay una alumna que lleva únicamente dos años en España. De esta manera, no solo tiene dificultades a la hora de comprender los enunciados de las actividades, también desconoce los movimientos propios de cada ficha del ajedrez, ya que al contrario que sus compañeros ella no lo ha experimentado antes.

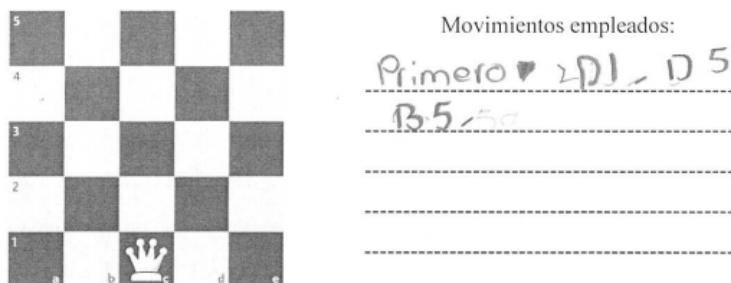
Entre el resto de los participantes que han fallado, llama la atención que dos de ellos han realizado un movimiento propio del caballo en el ejercicio 2, donde debían emplear una torre.

**Figura 15**  
*Actividad 2 del participante 15*



El resto de fallos son principalmente debido a fallos de concentración, como el mostrado a continuación, donde se puede observar que los participantes dirigen la ficha hacia otra escaque distinto al ordenado en la actividad.

**Figura 16**  
*Actividad 4 del participante 8*



Por otro lado, hay que remarcar que no todos los alumnos que consiguieron encontrar la solución correcta en cada una de las actividades hallaron el camino más rápido. Este aspecto se hace especialmente visible en los ejercicios 1 y 3.

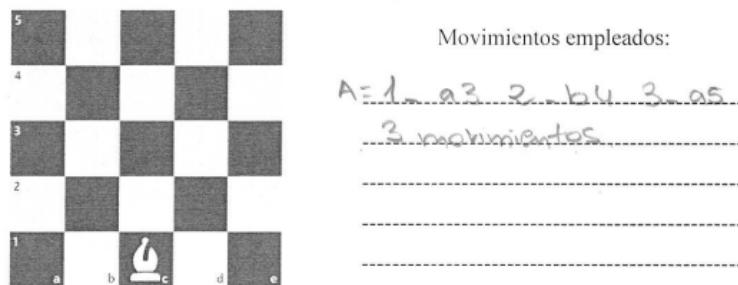
En el primero de ellos destaca que son varios los alumnos que no asocian la ficha del rey con su movimiento en diagonal, desplazando solo este de manera vertical y horizontal.

**Figura 17**  
*Actividad 1 del participante 22*



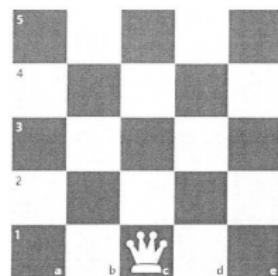
En el segundo caso, hubo un gran número de alumnos que no vio la diagonal desde d2 hasta a5, por lo que optaron por mover primero a a3 en un intento de acercar la ficha al escaque de destino.

**Figura 18**  
*Actividad 3 del participante 26*



Para finalizar este apartado cabe destacar al tercer participante, quien consiguió dar con todos los trayectos más efectivos en cada uno de los ejercicios planteados, aspecto especialmente vistoso en el ejercicio mostrado a continuación, el cual contaba con 5 respuestas posibles.

**Figura 19**  
*Actividad 4 del participante 3*



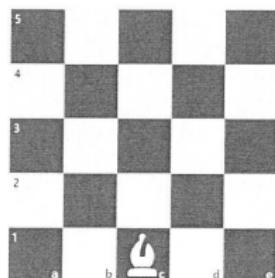
Movimientos empleados:

- Dd2 Da5
- Da1 Da5
- Dc1 Da5
- Dc5 Da5
- Da3 Da5

Respecto al tercer aspecto a evaluar, cabe recalcar que ha habido diversidad de errores en el empleo de las coordenadas, no siendo ninguno de ellos generalizado.

El fallo más repetido ha sido la identificación de la posición de partida como parte de los movimientos realizados. Este “error” ha sido realizado por varios participantes, por lo que puede haberse debido a un fallo en la explicación previa a la sesión. A continuación se muestran algunos ejemplos de este error en alumnos y ejercicios distintos.

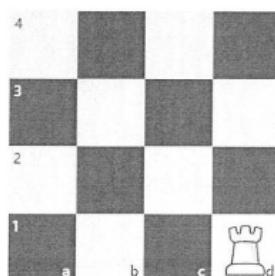
**Figura 20**  
*Actividad 3 del participante 19*



Movimientos empleados:

- Aa1, Ad2, Aa5
- 
- 
- 
- 

**Figura 21**  
*Actividad 2 del participante 17*

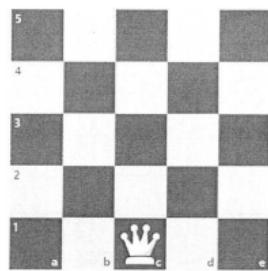


Movimientos empleados:

- T=d1, T=d3 T=b3
- T=d1 T=b1 T=b3
- 
- 
-

Otro de los errores cometidos por parte de algunos participantes ha sido redactar el proceso para describir los movimientos realizados, empleando las coordenadas de destino, pero acompañando estas de una explicación que las complementan.

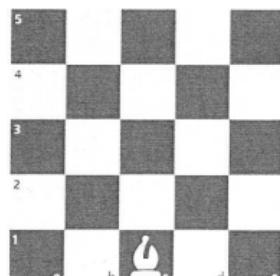
**Figura 22**  
*Actividad 4 del participante 13*



Movimientos empleados:

Lo movemos a la casilla c5. Despues lo movemos hacia la izquierda llegando al a5

**Figura 23**  
*Actividad 3 del participante 2*



Movimientos empleados:

Va de 1-c a 2-d  
y luego vamos en diagonal hasta llegar a 5-a

### **3.2.3 Evaluación de la segunda sesión**

A partir de la segunda sesión que componía la propuesta las actividades pasaban a centrarse en el tópico matemático estudiado, es decir, la simetría. El principal objetivo de esta segunda sesión era la identificación de posiciones simétricas y la localización del eje o ejes de simetría. Durante esta sesión estuvieron presentes los 26 alumnos que componen el grupo al que va dirigida la propuesta didáctica, sin embargo, como ya se mencionó en el apartado anterior, cuatro de ellos no realizaron la primera sesión.

Todos los ejercicios de esta sesión tienen la misma estructura, estando compuestos de tres partes bien diferenciadas: identificación previa de los ejes de simetría, resolución de un problema relacionado con el ajedrez e identificación posterior de los ejes de simetría. Además, al final de cada una de las actividades se añaden algunas preguntas que tienen como finalidad promover la reflexión, por parte del participante.

A continuación se muestran los resultados obtenidos por los participantes en la resolución del problema, primer aspecto a evaluar, para después dejar paso a la evaluación de la identificación, tanto previa como posterior, de los ejes de simetría, principal objetivo de la presente sesión.

**Tabla 6**

Resultados de la resolución del problema de la segunda sesión

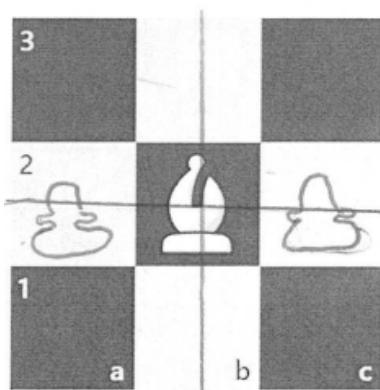
	Resolución del problema		
	Bien	Mal	NS/NC
Ejercicio 1	24	0	2
Ejercicio 2	21	0	5
Ejercicio 3	16	7	3
Ejercicio 4	18	5	3
Ejercicio 5	19	3	4

Tal y como se puede observar en la tabla, los resultados son en general positivos, superando en todos los casos el 50% de aciertos ampliamente.

Especialmente positivos son los extraídos de la actividad 1, la cual llevaron a cabo correctamente 24 de los participantes, habiendo únicamente 2 alumnos que decidieron no

contestar. Cabe mencionar que ambos alumnos siguieron esta dinámica durante el resto de actividades, por lo que en todas ellas el mayor número de resoluciones correctas posibles es de 24, pese a haber asistido 26 alumnos a la sesión. Entre todas las posibles respuestas correctas destaca notablemente la mostrada a continuación, seleccionada por la mayoría de los participantes por encima de otras posibles opciones.

**Figura 24**  
*Actividad 1 del participante 12*



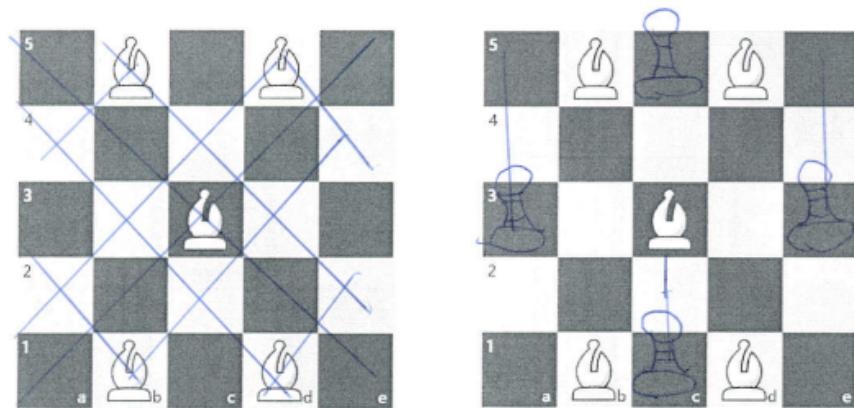
La segunda actividad, idéntica a la primera, pero cambiando el empleo del alfil por el de la torre, arrojó datos bastante similares a los de la primera actividad. Al igual que en la primera sesión no se pudieron observar fallos en las resoluciones, sin embargo, fueron en este caso 5 los alumnos que dejaron la respuesta en blanco, existiendo de esta manera 21 respuestas correctas. Entre todas ellas destacan las de los participantes 6 y 8, quienes especificaron todas las posiciones posibles donde colocar los peones.

**Figura 25**  
*Actividad 2 del participante 6*



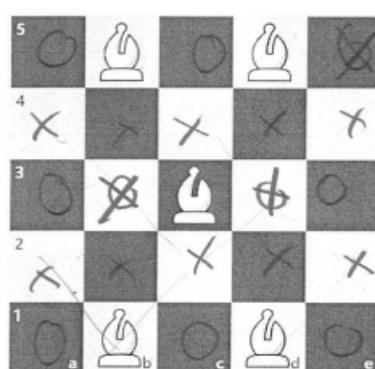
La tercera actividad fue en la que peores resultados se obtuvieron en relación a la resolución del problema, aun así fueron 16 los participantes que alcanzaron a encontrar una solución correcta. Una de las estrategias más vistas en esta actividad, la cual no se había observado a penas con anterioridad, fue la de tachar los escaques amenazados por los alfiles presentes en el tablero. De esta manera, los alumnos podían encontrar aquellos escaques libres de amenaza para colocar los peones, localizando fácilmente las cuatro posiciones en las que era posible colocarlos.

**Figura 26**  
*Actividad 3 del participante 23*



Esta estrategia, pese a ser muy útil, jugó una mala pasada a varios alumnos, más concretamente a aquellos 7 cuyas respuestas han sido consideradas como “regulares”. Muchos de ellos siguieron este método para encontrar las posiciones adecuadas, pero no llegaron a tachar algunos de los escaques que si estaban siendo amenazados, ya fuera por desconocimiento o por despiste.

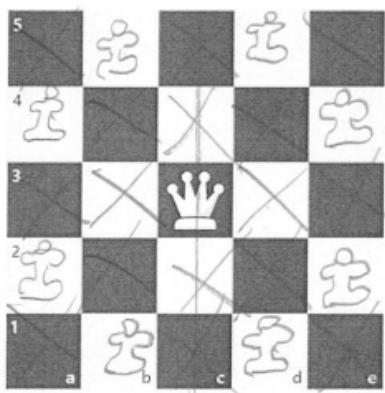
**Figura 27**  
*Actividad 3 del participante 16*



Por último, respecto a los resultados obtenidos en las actividades 4 y 5, estos fueron similares entre las dos. En ambas se obtuvieron entre 18-19 respuestas correctas, siendo el resto de respuestas no válidas o “regulares”. Llama la atención especialmente, que fueron varios los alumnos que en ambos ejercicios identificaron y colocaron peones en todas las casillas posibles, aspecto que no se solicitaba en estas actividades (únicamente se requerían 2 peones), pero que sí se pedía en la actividad 3.

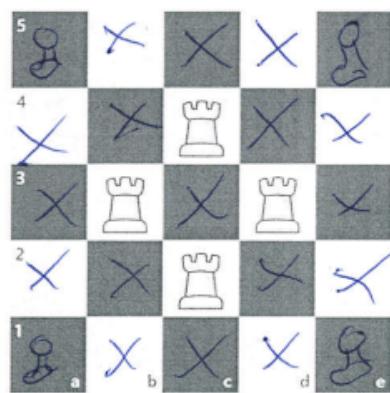
**Figura 28**

*Actividad 4 del participante 7*



**Figura 29**

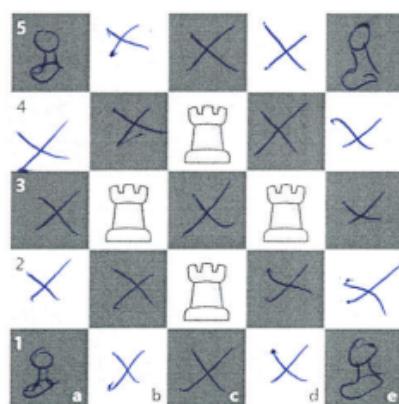
*Actividad 5 del participante 20*



Además, fueron varios los alumnos que continuaron empleando la estrategia observada en la actividad 3, tachando los escaques amenazados, bien por la reina en la actividad 4 o por las torres en la actividad 5. El empleo de esta estrategia es todavía más notorio en estas actividades, lo cual puede deberse fundamentalmente a la observación entre participantes durante el proceso de trabajo.

**Figura 30**

*Actividad 5 del participante 20*



Pasando a evaluar la localización de posiciones simétricas y la localización de los ejes de simetría, a continuación se muestran los resultados obtenidos por los alumnos en las tareas al respecto. Estos están desglosados de manera que, “bien” se corresponde con aquellos resultados en los que han sido identificados todos los ejes presentes, “regular” hace referencia a aquellos resultados en los que faltan por identificar o sobran ejes de simetría y “mal” se relaciona con aquellos que no han sido capaces de localizar ningún eje o lo no han intentado.

**Tabla 7**

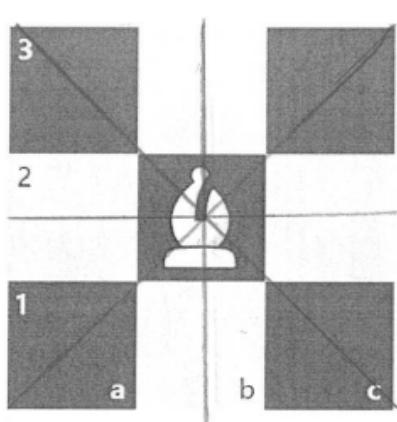
Resultados de la identificación previa y posterior de la segunda sesión

	Identificación previa			Identificación posterior		
	Bien	Regular	Mal	Bien	Regular	Mal
Ejercicio 1	7	19	0	7	12	7
Ejercicio 2	6	17	3	9	4	13
Ejercicio 3	11	12	3	7	6	13
Ejercicio 4	8	16	2	10	6	10
Ejercicio 5	7	16	3	6	7	13

Los resultados obtenidos en la primera y segunda actividad, respecto a la identificación previa de los ejes de simetría fueron similares. Esto se debe a que nos encontramos ante dos situaciones iguales en las que únicamente se modifica la ficha, lo cual no afecta de forma alguna a la simetría.

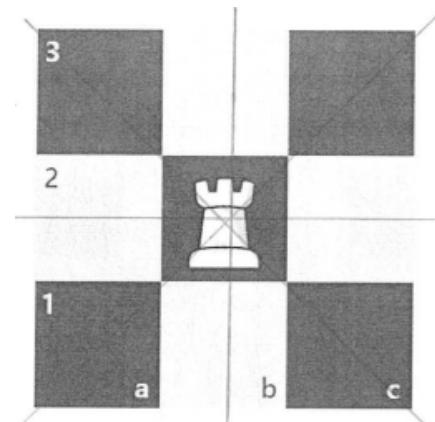
**Figura 31**

Actividad 1 del participante 19



**Figura 32**

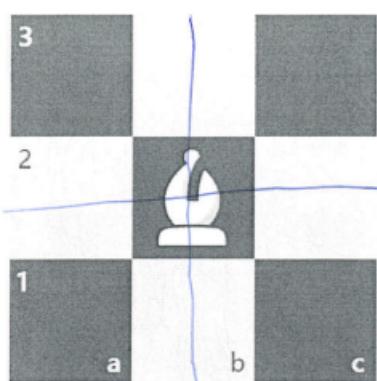
Actividad 2 del participante 6



En ambas actividades alrededor de una cuarta parte de los participantes encontraron los cuatro ejes de simetría previos, sin embargo, lo que más destaca es el alto número de resoluciones incompletas o “regulares”. Muchas de estas soluciones incompletas se debieron a la falta de los ejes diagonales, los cuales no fueron identificados por un alto número de alumnos.

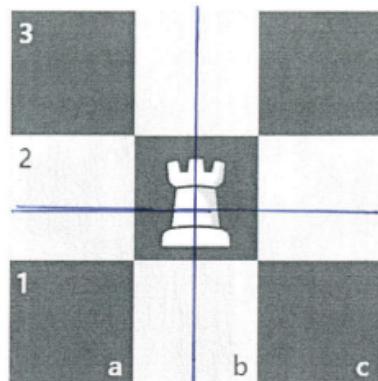
**Figura 33**

*Actividad 1 del participante 1*



**Figura 34**

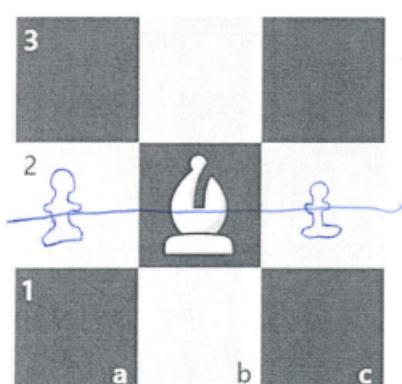
*Actividad 2 del participante 17*



Al contrario que con la identificación previa, los resultados obtenidos en la identificación posterior de los ejes de simetría fueron distintos entre una actividad y otra. En este punto cabe mencionar que, pese a existir un mayor número de resoluciones correctas en la actividad 2, la actividad 1 cuenta con un número muy elevado de resoluciones incompletas. Esto puede deberse a que, mientras en la actividad 1 la solución más común dada el problema era a2-c2, lo cual daba lugar a dos ejes de simetría; en la actividad 2 la solución más frecuente era a1-c1 o a3-c3, dando lugar a un único eje de simetría.

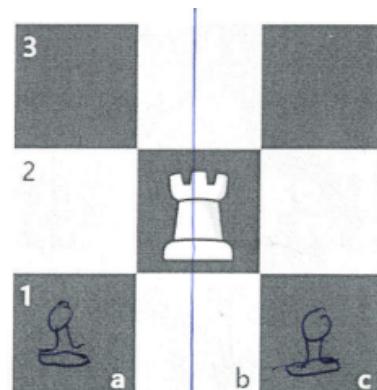
**Figura 35**

*Actividad 1 del participante 4*



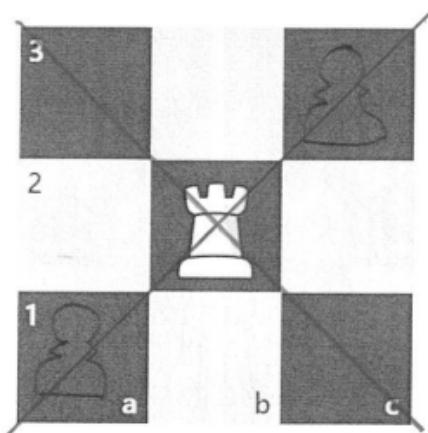
**Figura 36**

*Actividad 2 del participante 20*



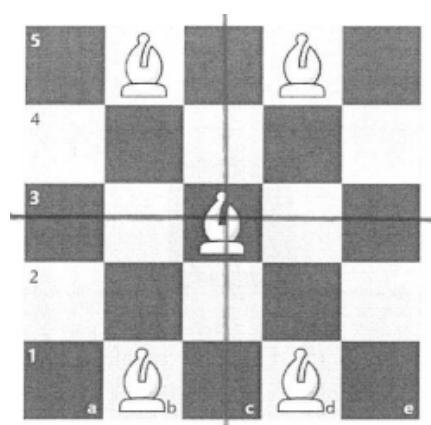
Además, y ya para finalizar con estas actividades, cabe mencionar que otra de las soluciones más comunes dada a la segunda actividad era a1-c3. Esta solución, pese a dar dos ejes de simetría, inducía a los alumnos a identificar ambos de manera más sencilla por lo observado, lo que puede deberse a que muchos de los participantes relacionan la presencia de un eje de simetría diagonal con la presencia del eje de la diagonal perpendicular.

**Figura 37**  
*Actividad 2 del participante 10*

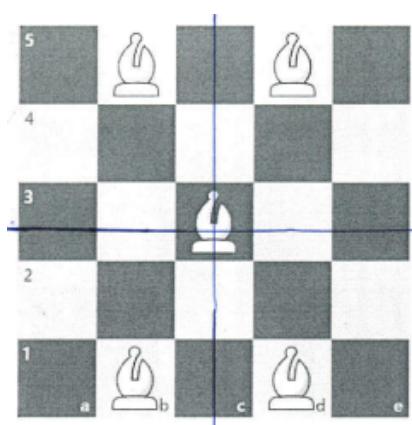


La tercera sesión fue la que mejores datos arrojó respecto a la identificación previa de los ejes de simetría. Esto puede deberse a que es la única actividad en la que no existen ejes diagonales de manera previa, lo cuales, como ya se ha comentado anteriormente, presentan una mayor dificultad para su identificación por parte de los participantes. Se han podido observar en concreto 11 soluciones correctas, entre las que se encuentran las mostradas a continuación.

**Figura 38**  
*Actividad 3 del participante 10*



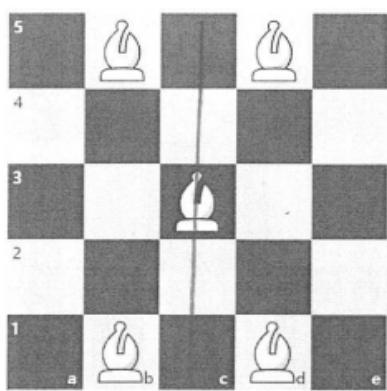
**Figura 39**  
*Actividad 3 del participante 20*



En esta actividad no encontramos solo un alto número de soluciones válidas, sino que podemos observar también una cantidad similar de soluciones incompletas. Entre estas se encuentran principalmente resoluciones en las que los participantes han identificado únicamente uno de los ejes de simetría, sin embargo, existiendo además unas pocas en las que han sido identificados más ejes de los existentes.

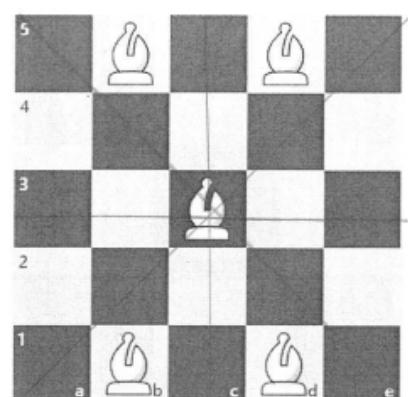
**Figura 40**

*Actividad 3 del participante 9*



**Figura 41**

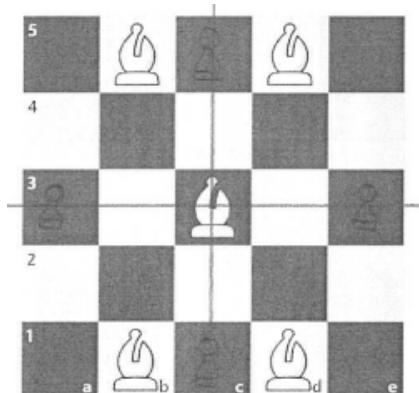
*Actividad 3 del participante 7*



Respecto a la identificación posterior, hay que recalcar la notable bajada de soluciones válidas, lo cual sorprende especialmente dado que se mantenían todos los ejes de simetría presentes de manera previa, pasando de 11 a 7 soluciones correctas.

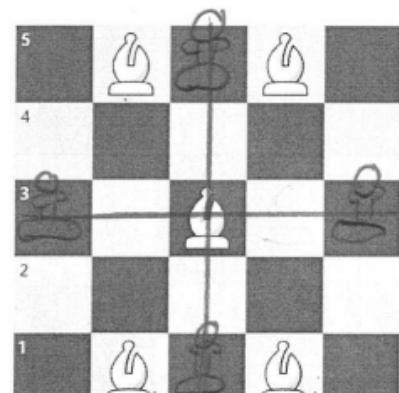
**Figura 42**

*Actividad 3 del participante 3*



**Figura 43**

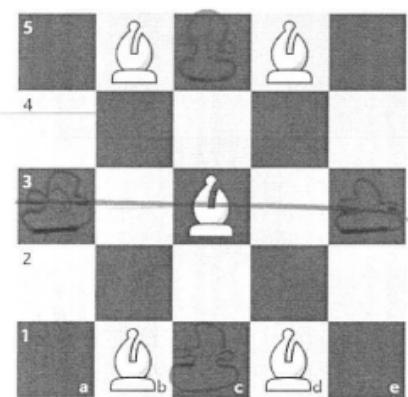
*Actividad 3 del participante 19*



Además, cabe mencionar que, al igual que en la identificación previa, destacan por su variedad las soluciones incompletas o “regulares” en la identificación posterior, pudiendo encontrar de nuevo algunas en las que faltan y otras en las que sobran ejes de simetría.

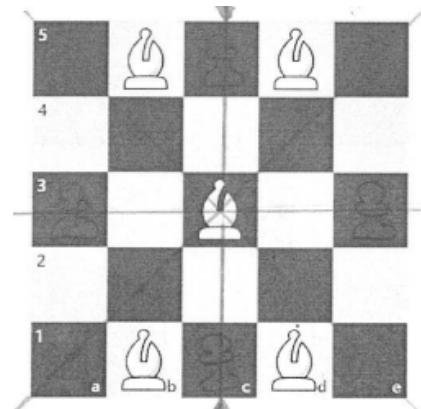
**Figura 44**

*Actividad 3 del participante 12*



**Figura 45**

*Actividad 3 del participante 6*

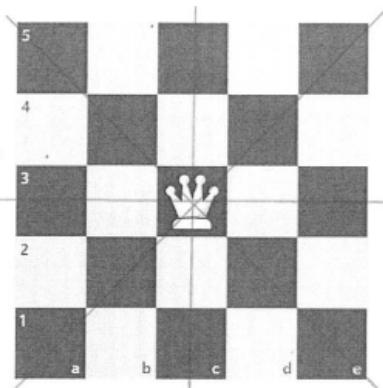


Al igual que con la primera y segunda sesión, los resultados obtenidos extraídos de la cuarta y la quinta sesión fueron bastante similares entre sí. Ambas actividades se desarrollaban en un tablero de 5x5 y contaban con todos los ejes de simetría posibles de manera previa, es decir, horizontal, vertical y diagonales.

En esta ocasión fueron entre 7-8 los participantes que lograron alcanzar una respuesta acertada, lo cual contrasta con los 6-7 existentes en la primera y segunda actividad, donde también estaban presentes todos los ejes de simetría posibles de manera previa, mostrando así un pequeño progreso durante el transcurso de la sesión.

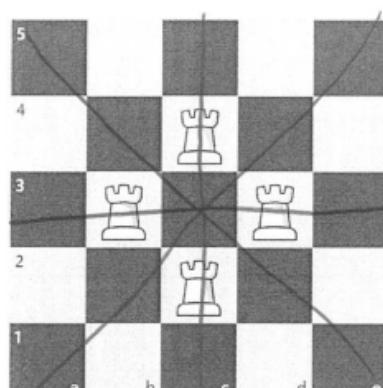
**Figura 46**

*Actividad 4 del participante 6*



**Figura 47**

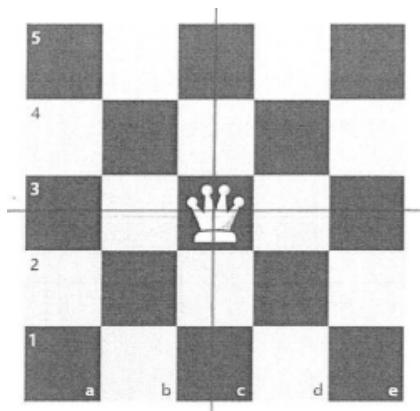
*Actividad 5 del participante 16*



Respecto a las respuestas incorrectas en este aspecto, concretamente 16 en cada ejercicio, destaca que la gran mayoría de ellas, al igual que en las actividades 1 y 2, son debidas a la no identificación de los ejes de simetría diagonales.

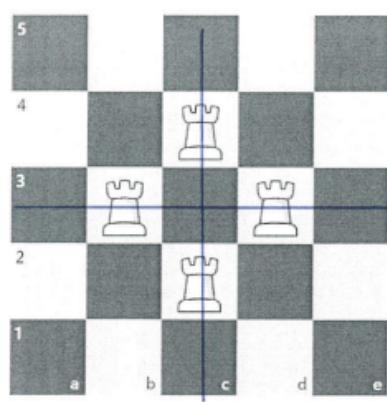
**Figura 48**

*Actividad 4 del participante 3*



**Figura 49**

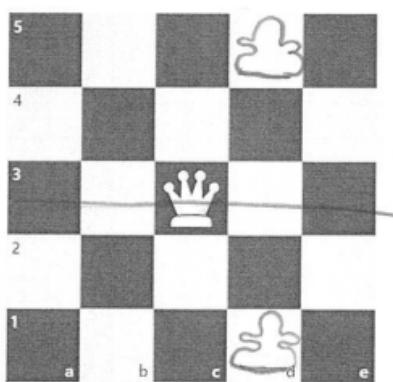
*Actividad 5 del participante 17*



La identificación posterior de los ejes de simetría fue más positiva en la actividad 4, presentando en esta 10 resultados válidos en comparación con los 6 extraídos de la actividad 5. Este hecho puede deberse a que en la actividad 4 todas las soluciones dadas al problema contaban únicamente con un eje de simetría, mientras que las soluciones dadas al problema 5 podrían llegar a contar con dos, en caso de situar los peones en esquinas diagonales. Cabe mencionar que son excluidas de este razonamiento las soluciones en las que se indicaban todos los peones posibles, las cuales contaban con todos los ejes de simetría posibles, tanto en la cuarta como en la quinta actividad.

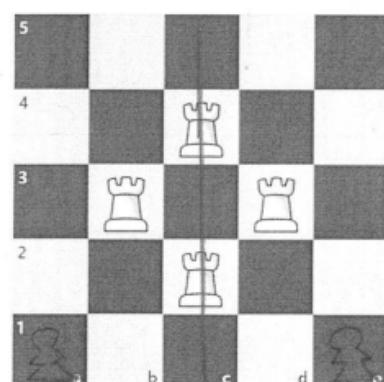
**Figura 50**

*Actividad 4 del participante 12*



**Figura 51**

*Actividad 5 del participante 13*



### 3.2.4 Evaluación de la tercera sesión

La tercera sesión tenía como objetivo principal que los alumnos formasen posiciones simétricas e identificasen el o los ejes de simetría, partiendo para ello de una posición no simétrica preestablecida. A esta sesión asistieron 24 de los 26 alumnos que componen el grupo al que va dirigida la propuesta, sin embargo, uno de ellos no realizó ninguna de las actividades al no verse capaz de resolverlas.

Esta constaba de cinco ejercicios, tres de ellos con fichas de un único bando y dos con fichas de ambos bandos, en los que los participantes debían formar una posición simétrica empleando para ello el número de movimientos que se les indicaba. Además, los dos ejercicios con fichas de ambos colores contaban con reglas especiales, explicadas con anterioridad al comienzo de la sesión y apuntadas en la pizarra. Estas reglas vienen detalladas en el apartado 2.4 del presente trabajo, donde se exponen los ejercicios que componen esta sesión.

Respecto a la evaluación de esta, se tendrán en cuenta dos aspectos principales: la correcta resolución del problema planteado y la identificación del eje de simetría. Este segundo aspecto dependerá en medida del primero de ellos, por lo que todos aquellos alumnos que no sean capaces de resolver este, aunque sea saltándose alguna regla dada, no serán capaces de llevar a cabo la segunda tarea.

A continuación se muestra una tabla con los datos obtenidos en cada una de las actividades, los cuales se analizarán posteriormente con mayor detenimiento.

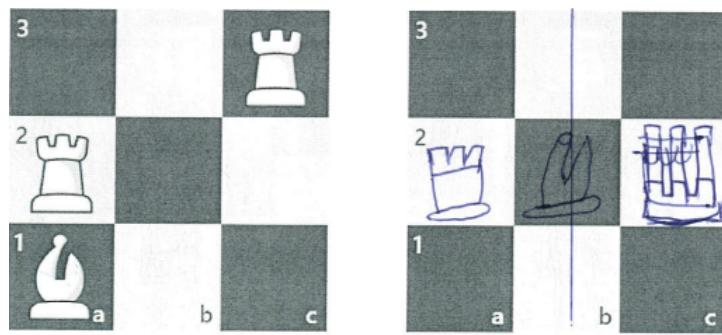
**Tabla 8**

Resultados de las actividades de la tercera sesión

	Formación figura simétrica			Identificación eje de simetría		
	Bien	Regular	Mal	Bien	Regular	Mal
Ejercicio 1	14	7	3	11	1	12
Ejercicio 2	9	2	13	7	0	17
Ejercicio 3	14	2	8	7	2	15
Ejercicio 4	0	10	14	6	2	16
Ejercicio 5	6	7	11	6	0	18

La primera de las actividades fue la que mejores resultados arrojó, debido en parte a que era la que presentaba un menor grado de dificultad. Un gran número de participantes lograron alcanzar una respuesta correcta siguiendo las instrucciones dadas, concretamente 14 de ellos. Entre las respuestas correctas se puede observar que un alto porcentaje se decantaron por la siguiente resolución, escaseando las soluciones alternativas a esta.

**Figura 52**  
*Actividad 1 del participante 21*

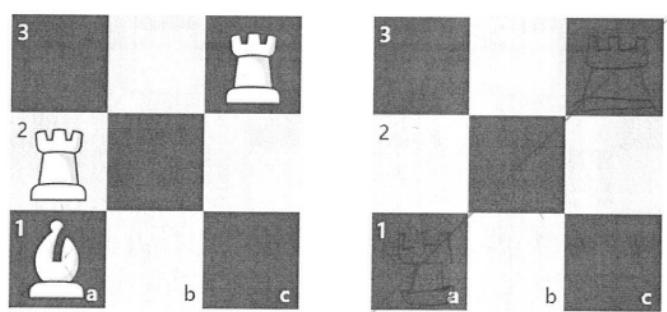


Movimientos realizados:

~~A~~ Ab2, + c2

Entre los 10 alumnos que no encontraron una de las respuestas correctas siguiendo las instrucciones proporcionadas, podemos distinguir a 7 de ellos que sí fueron capaces de encontrar una posición simétrica, aunque rompiendo algunas consignas o tomando caminos teóricamente imposibles. Entre estos destacan los casos de los participantes 2 y 26, quienes optaron por cazar fichas del mismo bando o realizar movimientos a escaques ya ocupados.

**Figura 53**  
*Actividad 1 del participante 2*

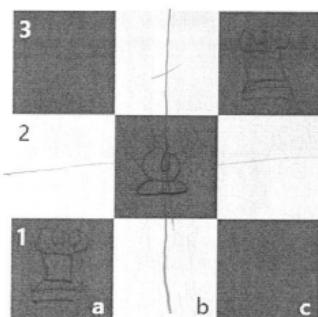
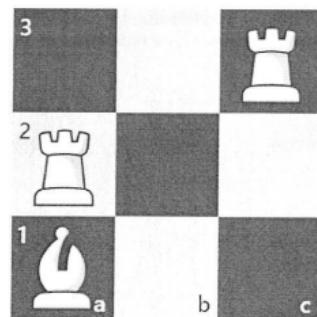


Movimientos realizados:

La torre va bayardo y se ha comido  
al alfil y se ha quedado en el rey

**Figura 54**

*Actividad 1 del participante 26*



Movimientos realizados:

T : a1 A : b2

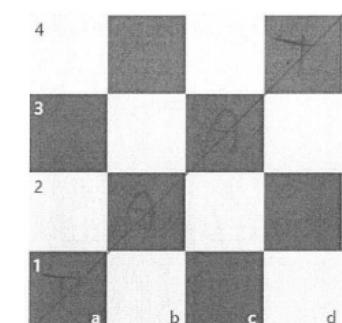
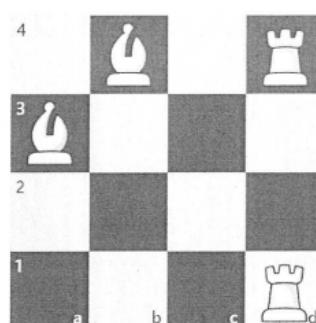
-----

Durante la segunda actividad se pudo observar una bajada del rendimiento de los alumnos, obteniendo en esta resultados bastante inferiores a los arrojados por la primera actividad. Esto puede deberse al aumento de dificultad presente entre ambas actividades, ya que no solo se aumentaba el número de movimientos sino también el número de escaques, pasando así a un tablero de 4x4, donde los ejes de simetría horizontales y verticales no eran considerados como respuestas válidas debido a la discordancia en el color de los escaques.

La primera parte de la tarea, es decir, la formación de la figura simétrica, solo pudo ser llevada a cabo de manera satisfactoria por 9 de los participantes. La mayoría de las respuestas correctas fueron además idénticas, desplazando las fichas a la diagonal a1-d4, siguiendo uno u otro orden de movimientos.

**Figura 55**

*Actividad 2 del participante 3*

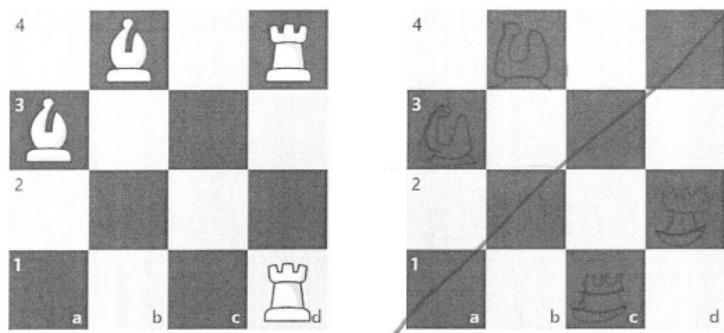


Movimientos realizados:

Ta1 Ab2 Ac3

Junto a las respuestas correctas, también se ha podido identificar dos respuestas que, pese a mostrar posiciones simétricas han sido llevadas a cabo empleando 2 o 4 movimientos, en lugar de los tres solicitados por el enunciado. A continuación se muestra el ejemplo del alumno que ha formado la posición simétrica empleando únicamente 2 movimientos.

**Figura 56**  
*Actividad 2 del participante 2*

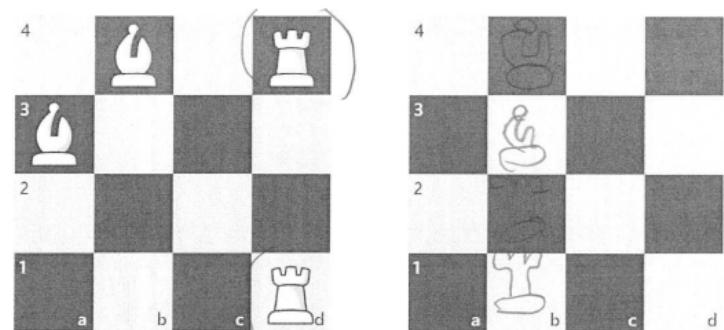


Movimientos realizados:

D1-d3, 1-d2, 2-d4

Además, también sorprende la realización de movimientos técnicamente incorrectos por parte de dos alumnos, los participantes 7 y 25, los cuales no cometieron ningún error similar durante la primera sesión. Ambos alumnos desplazaron el alfil siguiendo el movimiento propio de una torre, permitiendo que uno de los alfiles con comienzo en un escaque negro, finalizase en un escaque blanco.

**Figura 57**  
*Actividad 2 del participante 7*

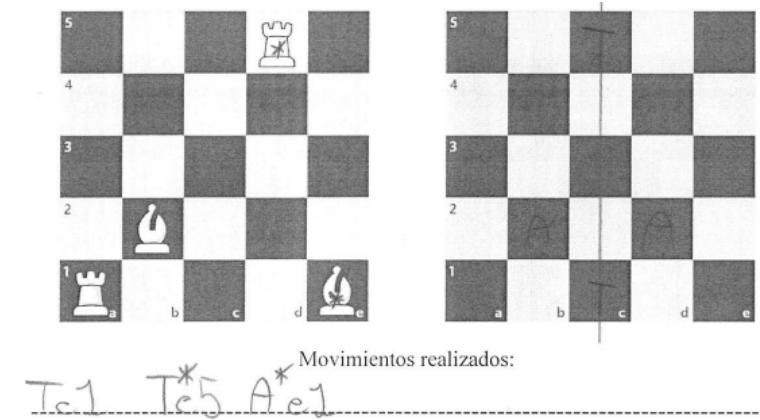


Movimientos realizados:

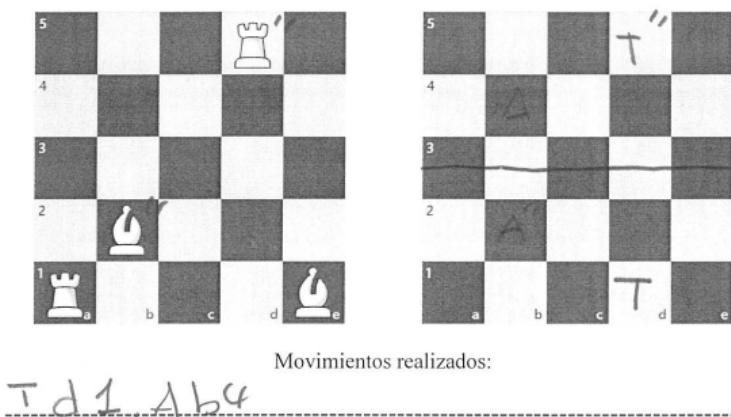
T1-d2, B2-A3, T2-b1

En la tercera actividad, con la vuelta al tablero con un número impar de escaques por lado y, por lo tanto, con el regreso de los ejes de simetría horizontal y vertical como opciones válidas de respuesta, los resultados generales de los participantes volvieron a mejorar, alcanzando el número de resoluciones válidas de la primera actividad, es decir 14. Entre ellas encontramos variedad de respuestas, pudiendo observarse soluciones tanto en 2 como en 3 movimientos y con distintos ejes de simetría. A continuación se muestran un par de ejemplos:

**Figura 58**  
*Actividad 3 del participante 3*



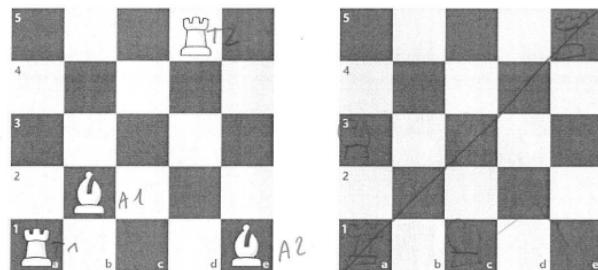
**Figura 59**  
*Actividad 3 del participante 11*



Entre los 10 participantes que no consiguieron dar una respuesta válida, encontramos a 2 de ellos que consiguieron formar una figura simétrica, pero empleando un número de movimientos que no se correspondía con los indicados en el enunciado, al igual que sucedía en la actividad anterior.

**Figura 60**

*Actividad 3 del participante 22*



Movimientos realizados:

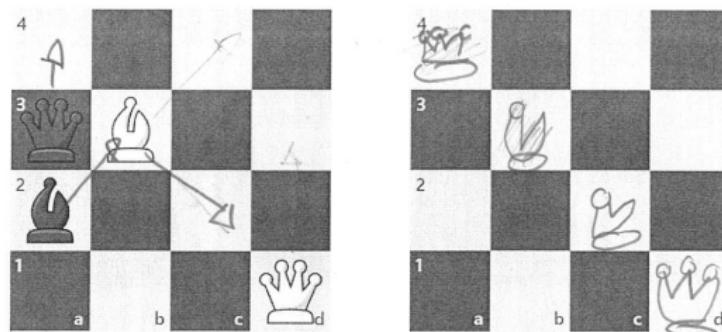
T1 → A1, A1 → A b2 A3, T2 → A5, A2 → c1, A2 → d2 C1

A partir de la cuarta actividad el nivel de dificultad subía notablemente, como consecuencia de la introducción de fichas de ambos bandos y de las reglas especiales que esto conllevaba. Además, en la cuarta actividad, en concreto, nos volvemos a encontrar con un tablero con 4 escaques por lado, lo que vuelve a invalidar los ejes de simetría horizontal y vertical. Es por ello que, debido probablemente a estos dos factores, ninguno de los alumnos ha sido capaz de resolver con éxito la actividad.

De entre todos las resoluciones, consideradas como “regulares”, cabe destacar la proporcionada por el participante 16, quien ha sido capaz de encontrar una posición simétrica respetando los turnos de movimiento, pero comenzando a mover por negras en lugar de por las blancas, tal y como venía indicado en las reglas.

**Figura 61**

*Actividad 4 del participante 16*

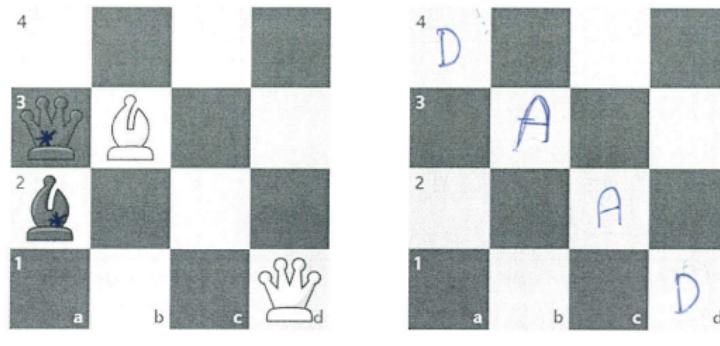


Movimientos realizados:

R. A4 A. A2 A. B3

Entre el resto de soluciones “regulares” se puede observar un error muy frecuente, siendo este el nulo respeto por el turno de movimiento, habiendo alumnos que han encontrado una solución simétrica moviendo dos veces seguidas fichas de un mismo bando o incluso no tocando las figuras blancas, como se muestra a continuación.

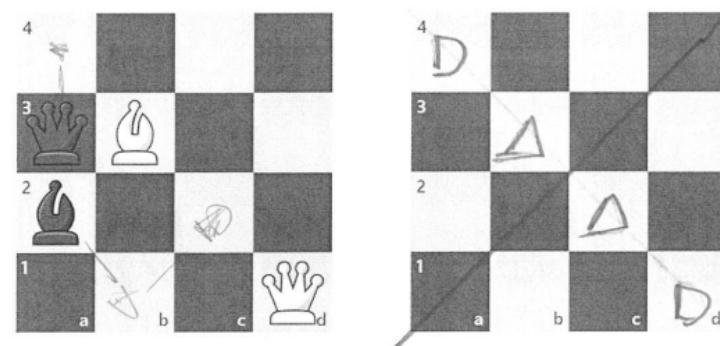
**Figura 62**  
*Actividad 4 del participante 17*



Movimientos realizados:

Ac2 Da4 Ab3

**Figura 63**  
*Actividad 4 del participante 10*

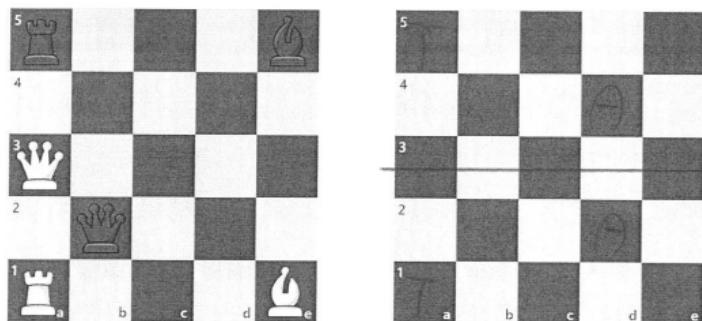


Movimientos realizados:

D-a3-a4 A-a2-b1-c2

Para finalizar, y al contrario que en la cuarta actividad, en la quinta sí que hemos podido llegar a observar resultados correctos, habiendo concretamente 6 alumnos que han alcanzado una respuesta válida. Entre las respuestas se pueden encontrar además resoluciones variadas, optando algunos alumnos por capturar y otros por no capturar fichas.

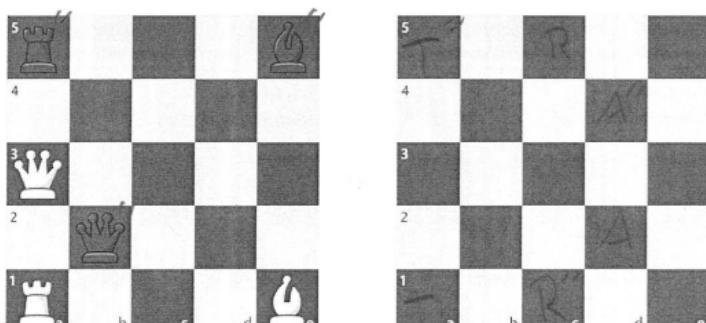
**Figura 64**  
*Actividad 5 del participante 3*



Movimientos realizados:

DxDb2 AxD62 Ad2 Ad4

**Figura 65**  
*Actividad 5 del participante 11*



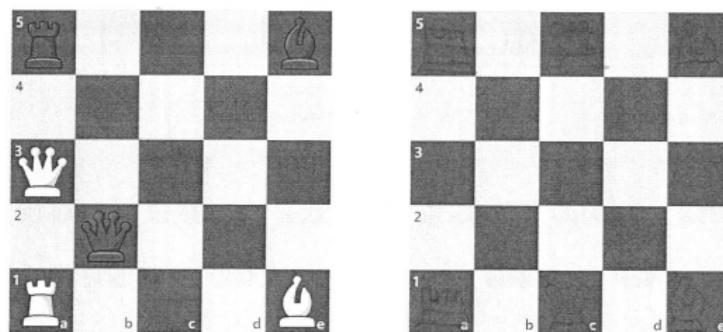
Movimientos realizados:

Rc5 R''c1 Ad2 A''d4

Entre los resultados considerados como “regulares”, en este caso 7, se puede observar una tendencia a emplear menos movimientos que los requeridos por el enunciado. Varias de las soluciones son empleando únicamente tres e incluso dos movimientos, e incluso rehaciendo movimientos ya realizados.

Además, también han sido varios los participantes que han encontrado una solución simétrica, pero que no han mencionado los movimientos realizados, por lo que pese a ser posible la solución, no se puede saber el proceso mental que ha llegado para alcanzarla, y por lo tanto el número de movimientos empleados.

**Figura 66**  
*Actividad 5 del participante 2*

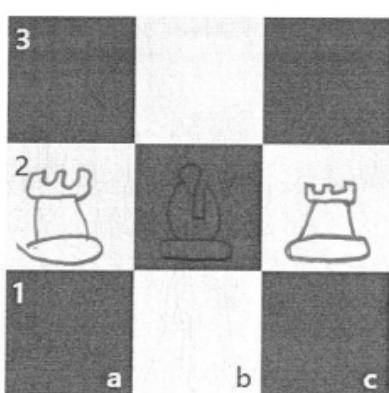


Movimientos realizados:

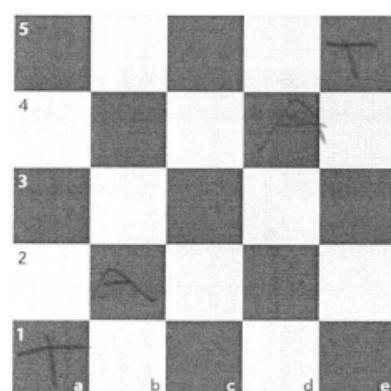
De B-2 a C-1 (Reina) y de A-3 a  
C-5 (Rana)

Respecto a la identificación del eje de simetría de manera posterior, llama la atención que varios de los alumnos que habían realizado correctamente la primera parte de las actividades no llegasen a intentar encontrar el eje de simetría. Cabe recalcar que este fallo está presente en todas las actividades que componen la sesión y que puede deberse a un fallo de concentración al leer los enunciados, ya que la segunda parte de cada una de las actividades está descrita en una oración a parte.

**Figura 67**  
*Actividad 1 del participante 11*



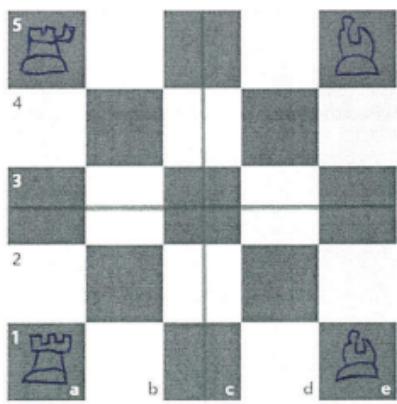
**Figura 68**  
*Actividad 3 del participante 12*



Otro de los errores más repetido por parte de los participantes, en bastantes actividades, ha sido el de intentar seleccionar más de un eje de simetría en la respuesta final, en lugar de un eje único, que era lo que se solicitaba. Esto ha dado lugar a situaciones en las que uno de los ejes era correcto y el otro incorrecto, considerando este tipo de respuestas como regulares.

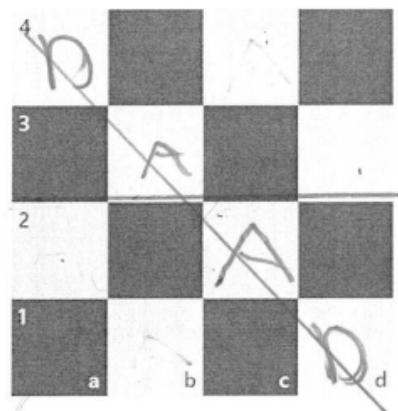
**Figura 69**

Actividad 3 del participante 24



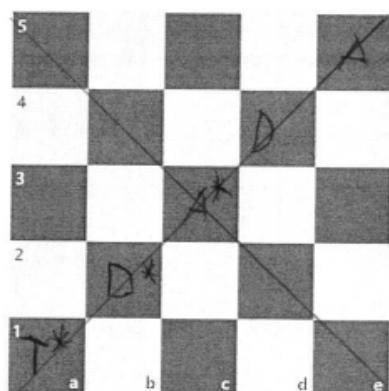
**Figura 70**

Actividad 4 del participante 12



**Figura 71**

Actividad 5 del participante 19



### **3.2.5 Evaluación de la cuarta sesión**

La cuarta sesión tenía como objetivo principal que los alumnos elaboren sus propios problemas, tomando como objeto de respuesta una posición simétrica en el tablero. Para ello contaban con dos tableros distintos, uno de ellos de 3x3 y otro de 5x5, teniendo que elaborar un problema para cada uno de ellos.

Los problemas no solo debían estar planteados, sino también resueltos, contando para ello con un tablero donde dibujar el momento de partida, otro donde dibujar la solución y espacio suficiente para elaborar una explicación o mencionar los movimientos realizados.

A la sesión asistieron 20 de los 26 alumnos que componen el grupo clase al que va dirigida la propuesta.

A continuación se muestra una tabla con los datos obtenidos de los problemas realizados por los alumnos, los cuales serán explicados posteriormente.

**Tabla 9**

Datos extraídos de los problemas que componen la cuarta sesión

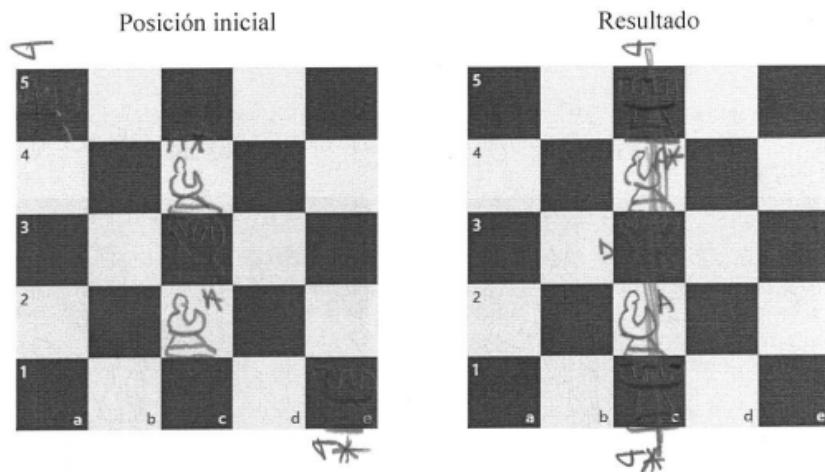
	Nº problemas correctamente planteados	Nº problemas similares a los de la segunda sesión	Nº problemas similares a los de la tercera sesión
Ejercicio 1	15	2	13
Ejercicio 2	7	1	6

La primera de las actividades planteadas era aquella en la que había que emplear para la elaboración del problema un tablero de 3x3. En esta podemos encontrar hasta 15 problemas planteados correctamente por parte de los alumnos.

Al hablar de problemas correctamente planteados, nos referimos a aquellos que tienen un enunciado con una redacción entendible para un espectador ajeno al tema de trabajo y que, además, van en consonancia con el tópico a estudiar, en este caso la simetría.

**Figura 72**  
*Actividad 1 del participante 13*

Enunciado: Realiza tres movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica el movimiento realizando mediante coordenadas. Una vez realizados, dibuja un eje de simetría.



¿Cómo se resuelve?

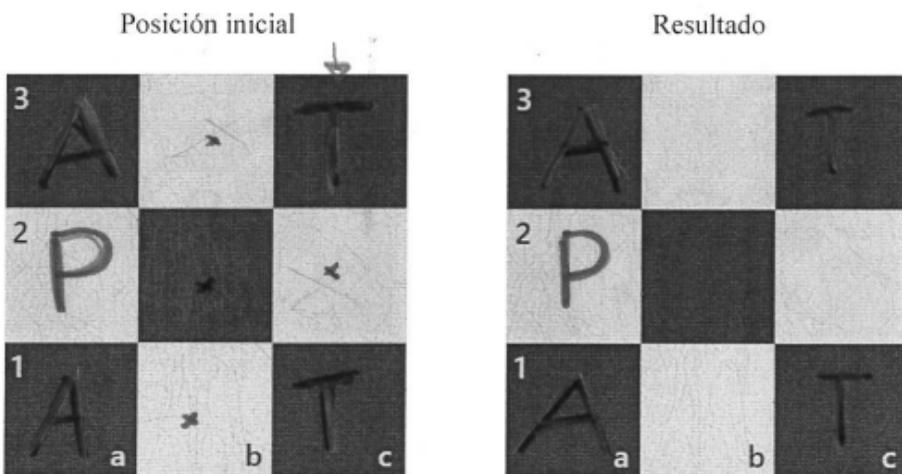
$$T^* = c1 \quad T = c5 \quad A^* = c4 \quad A = c2 \quad D = c3$$

Una gran parte de los problemas elaborados están relacionados con los vistos en la tercera sesión, como el mostrado, es decir, los alumnos plantean una posición asimétrica desde la cual hay que elaborar una disposición simétrica en un número o rango de movimientos dado.

Además de problemas relacionados o similares a los realizados en la tercera sesión, también encontramos unos pocos alumnos que recordaban lo visto en la segunda sesión y que decidieron utilizar esto como inspiración a la hora de elaborar su propio problema.

**Figura 73**  
*Actividad 1 del participante 10*

Enunciado: Cómo pondrías un peón donde no se le podría comer ninguna figura?



¿Cómo se resuelve?

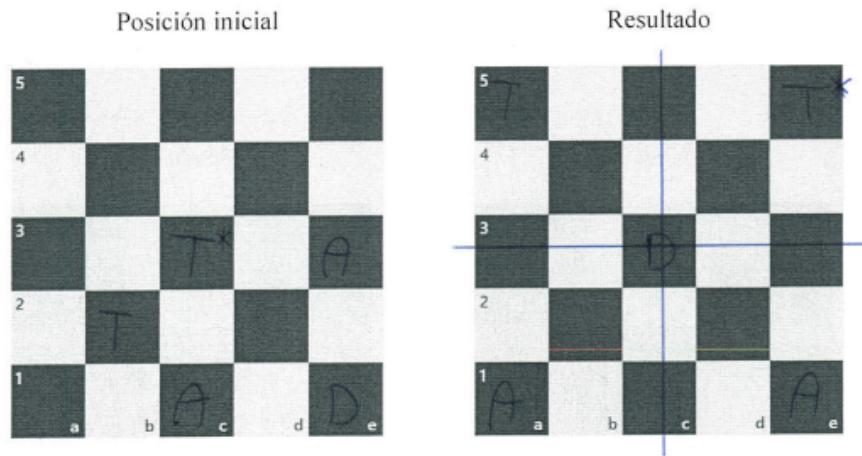
Pues es fácil, porque es la única casilla que queda libre para poder poner el peón, porque en las demás se las comería alguna figura como el alfil o la torre.

Respecto a la segunda actividad, es decir, aquella en la que los alumnos deben desarrollar de igual manera un problema, pero esta vez en un tablero de 5x5, los problemas correctamente planteados disminuyen en gran medida, en comparación con lo observado en la primera actividad. Esto puede deberse a la mayor dificultad que plantea elaborar un problema con un tablero que pasa de tener 9 a 25 escaques o a la falta de tiempo por parte de algunos alumnos al tener que realizar posteriormente y de manera obligatoria la prueba final de la propuesta.

Al igual que en la primera sesión, también encontramos alumnos que han intentado diseñar propuestas inspiradas tanto en la tercera como en la segunda sesión, siendo de nuevo las de la tercera sesión mucho más abundantes en proporción.

**Figura 74**  
*Actividad 2 del participante 3*

Enunciado:  
En el menor número de movimientos posibles realiza una posición simétrica. Explica cómo lo has hecho con coordenadas. Realiza dos ejes de simetría.



¿Cómo se resuelve?

Ta2 Ta5 Tc5 Te5 Dc3 Ab2 Aa1 Ad2 Ae1

Una vez comentados los planteamientos de los problemas, realizados por parte de los alumnos, vamos a comentar más en profundidad las resoluciones que los alumnos han dado a sus propios problemas. Para ello vamos a comentar en primer lugar si estas han sido o no correctas, además de analizar el método escogido para su realización. A continuación se muestra una tabla donde vienen recogidos los datos obtenidos al respecto:

**Tabla 10**

Datos extraídos de los problemas que componen la cuarta sesión

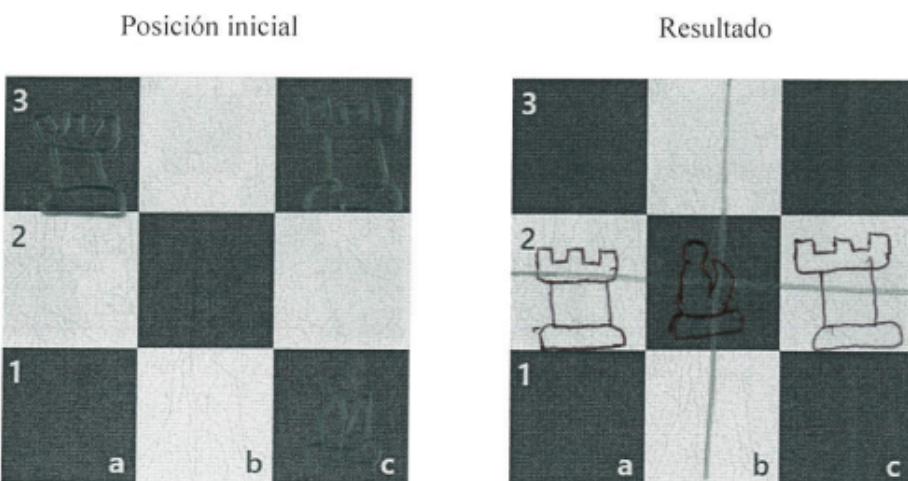
	Nº resoluciones correctamente explicadas	Nº resoluciones gráficas	Nº resoluciones con coordenadas
Ejercicio 1	12	2	10
Ejercicio 2	6	1	5

Entre los 15 problemas planteados correctamente en la primera actividad, nos encontramos además 12 cuyas soluciones han sido debidamente explicadas, mientras que en tres de ellos la explicación es nula o deficiente.

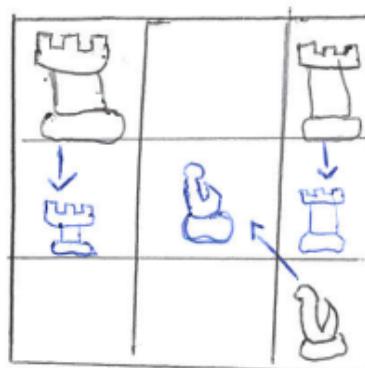
Algunos de los participantes decidieron realizar una representación gráfica para explicar el proceso de resolución del problema, mientras que otros muchos, al igual que habíamos trabajado durante la propuesta didáctica, lo explicaron mediante el empleo de coordenadas.

**Figura 75**  
*Actividad 1 del participante 9*

Enunciado: *Realiza 3 movimientos de manera que formes una posición simétrica.*



¿Cómo se resuelve?



Para finalizar, cabe destacar que, pese a haber trabajado con insistencia la identificación de los ejes de simetría durante la propuesta didáctica, son varios los alumnos que no han introducido su identificación al elaborar el problema. Además, nos encontramos también con algunos casos en los que los alumnos no solicitan. A continuación se muestra una tabla en la que se muestran dichos datos.

**Tabla 11**

Datos respectivos a la identificación de los ejes de simetría en la cuarta sesión

	Nº problemas que solicitan ejes	Nº resoluciones sin ejes	Nº problemas que no solicitan ejes	Nº resoluciones con ejes no solicitados
Ejercicio 1	6	1	9	3
Ejercicio 2	4	2	3	1

### **3.2.6 Prueba final**

Para finalizar la propuesta se realizó una evaluación final a los alumnos, a través de una prueba que constaba de un único problema. Este problema, compuesto a su vez por tres preguntas distintas, tenía como objetivo evaluar el nivel de comprensión que los alumnos habían llegado a alcanzar del concepto de simetría axial.

El problema tomaba como base una ciudad de planta eneagonal con una plaza hexagonal en el centro de la misma. Esta combinación de polígonos nos dejaba con una actividad de mayor complejidad a las vistas hasta el momento, dado que había que tener en cuenta ambos polígonos para identificar las simetrías.

La primera de las partes del problema se centraba en localizar los ejes de simetría presentes en la ciudad, tal y como se hizo en la prueba inicial con la fuente. Para evaluar este punto se han tenido en cuenta los ejes correctos identificados, si algún eje ha sido identificado sin ser correcto y el tipo de ejes dibujados.

La segunda de las actividades que componen el problema trata de la colocación de tres tiendas a lo largo de la ciudad. Estas tiendas deben ser colocadas manteniendo el máximo número de simetrías, por lo que para evaluar este punto se ha tenido en cuenta si la colocación ha sido óptima, simétrica o mala, considerando “simétricas” aquellas colocaciones que no mantienen todos los ejes de simetría.

Para finalizar, el problema cuenta con una tercera actividad, que al igual que la segunda consiste en distribuir objetos, en este caso farolas, a lo largo de la ciudad, a la vez que se mantiene la simetría de la misma. Esta actividad, es algo más complicada que la anterior, dado que requiere darse cuenta de la necesidad de utilizar la plaza central para alcanzar la solución correcta.

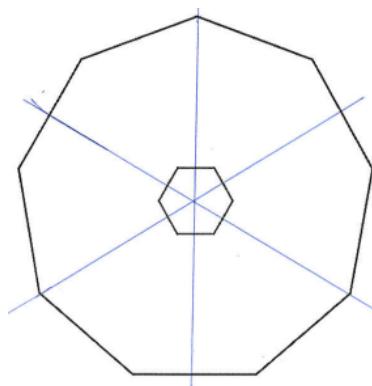
**Tabla 12**

Resultados de la identificación previa de los ejes de la ciudad

Alumnos	Nº de ejes identificados correctos				Eje/s Extra	Tipos de ejes		
	0	1	2	3		Vert.	Horiz.	Oblic.
1		x			x	x		x
2				x		x		x
3				x		x		x
4	x				x		x	x
5		x				x		
6		x			x	x	x	x
7			x		x	x		x
8		x			x	x	x	x
9		x			x	x	x	
10		x			x	x	x	x
11				x	x	x		x
12		x			x	x	x	x
13			x		x	x		x
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15		x			x	x		x
16				x		x		x
17				x		x		x
18		x			x	x		x
19				x	x	x		x
20		x			x	x	x	x
21		x				x	x	x
22				x		x		x
23	-	-	-	-	-	-	-	-
24				x	x	x		x
25		x			x	x	x	x
26	x				x			x
<b>Total</b>	2	12	2	8	16	22	9	22

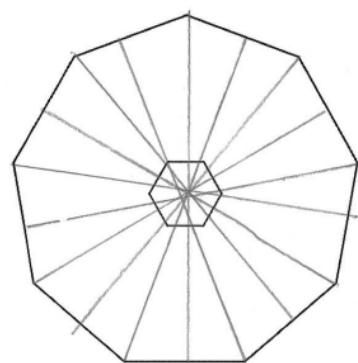
Al comienzo de la actividad los alumnos debían identificar los ejes de simetría presentes en el plano de la ciudad, la cual como ya se ha comentado con anterioridad tenía forma de eneágono con un hexágono interior. Esta combinación de polígonos nos dejaba con una figura que contaba únicamente con tres ejes de simetría, uno vertical y dos oblicuos, solución a la cual han llegado correctamente 5 alumnos.

**Figura 76**  
*Actividad 1 del participante 3*



Unidos a estos, se ha podido encontrar a otros 3 alumnos que, si bien han encontrado los 3 ejes correctos, han identificado ejes incorrectos.

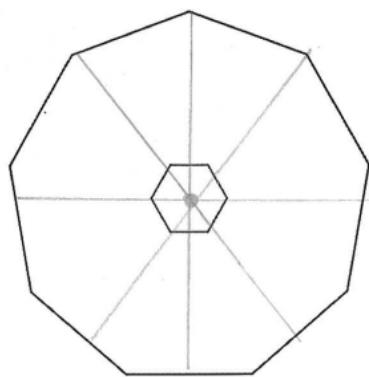
**Figura 77**  
*Actividad 1 del participante 11*



Destaca que entre los alumnos que han identificado todos los ejes, ninguno de ellos llevó a cabo correctamente la misma labor en la prueba inicial, encontrando 6 de los 12 ejes los participantes 2, 11, 16, 19 y 23, y únicamente 4 los participantes 3, 17 y 24.

Algo también destacable en la identificación previa es el alto número de alumnos que han identificado ejes extra o sobrantes, como ya se ha comentado con anterioridad, siendo hasta 16 los participantes que han incurrido en este fallo. Entre ellos podemos encontrar muchos ejemplos en los que se incorpora un eje horizontal a la figura, siendo este inexistente en la realidad.

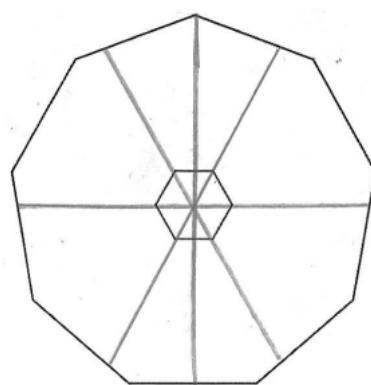
**Figura 78**  
*Actividad 1 del participante 6*



Uno de los participantes que ha incurrido en este fallo es el participante 6, como se puede observar en el ejemplo, lo cual es especialmente significativo, dado que era el único alumno que fue capaz de realizar correctamente esta misma tarea durante la prueba inicial.

Para finalizar cabe destacar también al participante 10, el cual, si bien ha incurrido en este fallo en la identificación previa, lo ha corregido posteriormente en la actividad 2 y 3 del problema, realizando estas correctamente.

**Figura 79**  
*Actividad 1 del participante 10*



**Tabla 13**

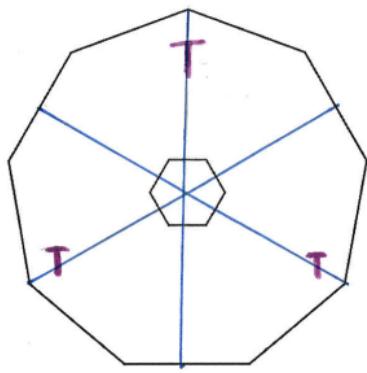
Resultados de la resolución del problema (colocación de las tiendas)

Alumno	Tipo de respuesta			Ejes identificados				Eje/s Extra
	Buena	Sim	Mala	0	1	2	3	
1			x	x				
2	x					x		x
3		x			x			
4	x			x				x
5			x	x				
6			x	x				
7			x	x				
8			x	x				
9		x			x			
10	x						x	
11			x	x				
12			x	x				
13		x			x			x
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15			x	x				
16			x	x				
17		x			x			
18			x	x				
19	x						x	
20		x			x			
21		x		x				x
22			x	x				
23	-	-	-	-	-	-	-	-
24		x		x				x
25			x	x				
26		x		x				x
<b>Total</b>	4	8	12	16	5	1	2	6

La segunda actividad de esta prueba final consistía en colocar tres tiendas de manera simétrica, manteniendo todos los ejes de simetría posibles e identificándolos. En este caso fueron únicamente 2 los participantes que consiguieron colocar correctamente las tiendas e identificar los tres ejes de simetría, concretamente el 10 y el 19, como se aprecia en la tabla.

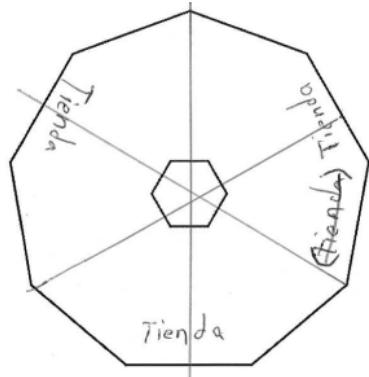
**Figura 80**

*Actividad 2 del participante 10*



**Figura 81**

*Actividad 2 del participante 19*

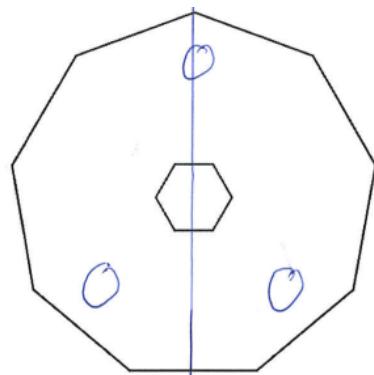


Este número de respuestas correctas es bastante inferior al obtenido en la prueba inicial, donde fueron 12 los participantes que consiguieron colocar correctamente las 6 luces que se solicitaba. Cabe mencionar además, que el participante 19 se encontraba entre esos 12, no pudiendo encontrar así al participante 10, quien ha experimentado una mejoría a lo largo de la propuesta.

Además de los alumnos que colocaron correctamente las tiendas, es decir, los dos mencionados y otros dos que no fueron capaces de identificar los ejes correctamente, encontramos también 8 participantes que colocaron las tiendas de manera simétrica, pero que, sin embargo, su disposición no mantenía todos los ejes de simetría.

**Figura 82**

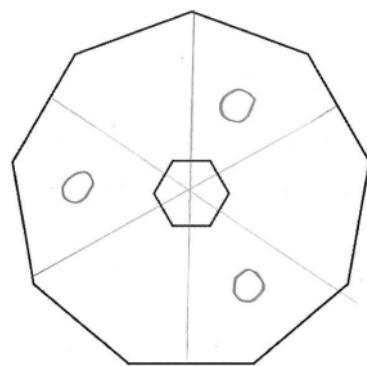
*Actividad 2 del participante 20*



Cabe destacar que, entre estos 8 alumnos se encuentran los 4 que ya dieron una respuesta similar durante la prueba inicial, donde encontraron una posición simétrica no óptima para mantener todas las simetrías posibles. Estos 4 participantes que no han modificado su modo de respuesta a lo largo de la propuesta son el 3, 9, 17 y 24

El resto de los alumnos, es decir, 12 de ellos, no fueron capaces de llegar a encontrar una posición simétrica. Pese a ello podemos encontrar respuestas que llaman la atención, como por ejemplo la de los participantes 11 y 22, quienes colocaron las tiendas de manera simétrica respecto al eneágono, pero sin tener en cuenta el hexágono interno.

**Figura 83**  
*Actividad 2 del participante 22*



**Tabla 14**

Resultados de la resolución del problema (colocación de las farolas)

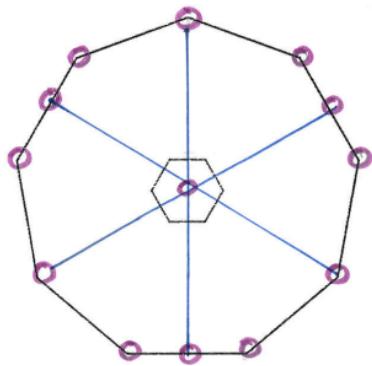
Alumno	Tipo de respuesta			Ejes identificados				Eje/s Extra
	Buena	Sim	Mala	0	1	2	3	
1			x	x				
2		x		x				
3		x			x			x
4		x		x				x
5			x	x				
6			x	x				
7			x	x				
8			x	x				
9			x	x				
10	x							x
11			x	x				
12			x	x				
13			x	x				
14	-	-	-	-	-	-	-	-
15			x	x				
16		x		x				
17		x			x			
18		x		x				x
19		x			x			x
20			x	x				
21			x	x				
22	x							x
23	-	-	-	-	-	-	-	-
24			x	x				
25			x	x				
26		x		x				x
<b>Total</b>	2	8	14	19	3	0	2	5

Respecto a la última de las actividades que componen el problema, es decir, aquella en la que los alumnos deben colocar 13 farolas, que iluminen la ciudad, manteniendo la simetría, hay que remarcar que su dificultad era bastante superior a todo lo visto hasta el momento.

La respuesta correcta a esta actividad pasaba por colocar una farola en el centro de la plaza hexagonal, ya que de otra manera no era posible mantener todas las simetrías posibles, siendo únicamente dos los participantes que se dieron cuenta de este aspecto, concretamente el 10 y el 22.

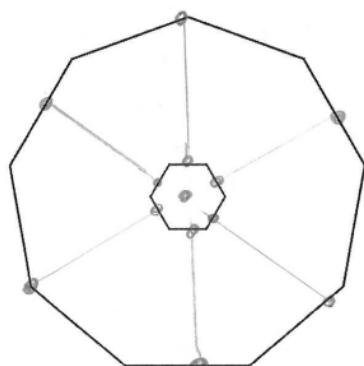
**Figura 84**

*Actividad 3 del participante 10*



**Figura 85**

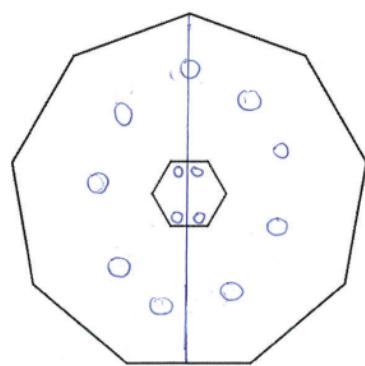
*Actividad 3 del participante 22*



Al igual que en la anterior actividad, también nos encontramos con alumnos que han llevado a cabo configuraciones simétricas, pero no siendo estas las adecuadas para mantener todas las simetrías posibles. En este caso han sido 8 los alumnos que han alcanzado una solución de este tipo, entre los que destacan los participantes 3 y 17, quienes se mantienen en la misma línea de respuesta desde la prueba inicial.

**Figura 86**

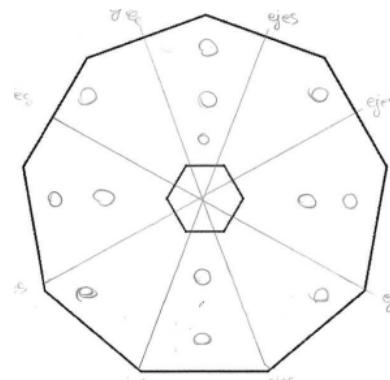
*Actividad 3 del participante 17*



Pese a la gran cantidad de errores cometidos, estos podían llegar a ser esperables debido a la mayor complejidad de la actividad. Sin embargo, cabe recalcar que algunos de los participantes que han cometido estos errores vienen siguiendo esta línea desde la prueba inicial, por lo que aparentemente la propuesta didáctica no ha ayudado a que desarrollen una mejor percepción de la simetría. Entre estos participantes encontramos al 1, 7, 8 y 15.

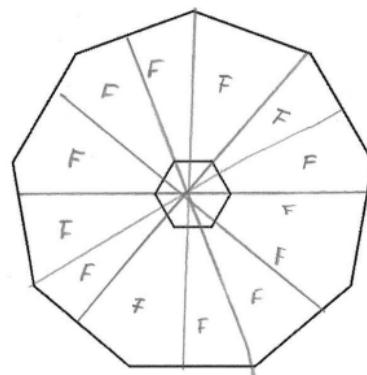
Además, cabe mencionar que entre los errores encontramos algunos que son repetidos, como el realizado por los alumnos 4 y 26, quienes consiguieron colocar las farolas en posición simétrica, pero no identificaron los ejes correctos.

**Figura 87**  
*Actividad 3 del participante 26*



O el cometido por los alumnos 11 y 25, quienes decidieron hacer particiones de la figura y colocar las farolas de manera posterior.

**Figura 88**  
*Actividad 3 del participante 11*



## CAPÍTULO 4: CONCLUSIONES

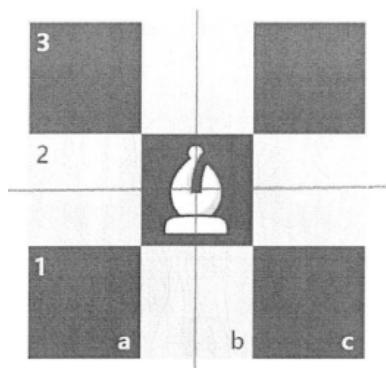
Para concluir el trabajo, se han elaborado una serie de conclusiones alcanzadas tras el análisis de las distintas sesiones realizadas y de los resultados arrojados por las mismas. A través de estas, se intenta hacer un breve sumario de lo visto en el mismo, así como un resumen de indicaciones a tener en cuenta de cara a futuras aplicaciones del ajedrez educativo en el aula.

### 1. La identificación de ejes de simetría paralelos y perpendiculares a los bordes del folio o del tablero presenta una menor dificultad respecto a los ejes oblicuos.

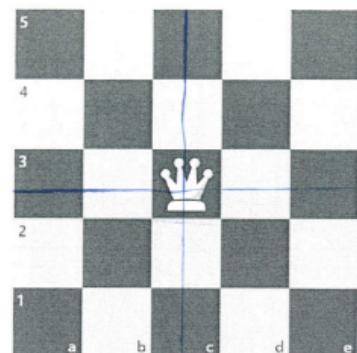
A lo largo de la propuesta, se ha podido observar en varias ocasiones que los alumnos identificaban con facilidad tanto el eje vertical como el horizontal, sin embargo, muchos de ellos tenían dificultades para hacerlo con los ejes oblicuos.

Este hecho es especialmente visible en las actividades de la segunda sesión, exceptuando la actividad 3, que únicamente contaba con eje vertical y horizontal. En el resto de actividades fueron aproximadamente una cuarta parte de los alumnos los que alcanzaron a dar una respuesta con todos los ejes, por aproximadamente la mitad que lo hicieron únicamente con los ejes vertical y horizontal, lo que nos muestra que los alumnos ya venían con una visión preconcebida de que los ejes tienen que ser paralelos y perpendiculares a los bordes del folio.

**Figura 89**  
*Actividad 1 del participante 3*



**Figura 90**  
*Actividad 4 del participante 25*



Pese a ser especialmente significativo durante la segunda sesión, este hecho se sigue manteniendo a lo largo de toda la propuesta. En la tercera sesión por ejemplo, destaca que un

alto número de participantes tiende a buscar soluciones con ejes de simetría verticales u horizontales en tableros de 3x3 y 5x5, donde los ejes oblicuos son también una solución válida. Además, los resultados positivos disminuyen drásticamente en las actividades 2 y 4, realizadas en tableros de 4x4, donde los ejes vertical y horizontal no son válidos debido a la configuración del tablero.

Esta idea puede estar relacionada con los prototipos en la construcción de figuras geométricas que tienen interiorizados los participantes del estudio. Entendemos prototipo en la escuela como “el modelo de imagen que tienen los alumnos de los conceptos geométricos”, los cuales surgen a partir de representaciones geométricas estereotipadas (Scaglia y Moriena, 2005, p.106).

Según Scaglia y Moriena (2005), quienes realizaron una revisión de los libros de texto desde 1º hasta 6º de EGB, actualmente Educación Primaria, tanto los libros como los docentes tienden a presentar a los alumnos únicamente figuras geométricas con bases horizontales, es decir, empleando como guía los bordes de la hoja o la pizarra, respectivamente.

Esta exposición continua a imágenes estereotipadas provoca que los alumnos tengan un repertorio mental limitado de representaciones geométricas, lo que suele conllevar un incorrecto entendimiento, representación e identificación de conceptos geométricos, incluyendo la simetría (Conteras et al. (2018). De hecho, estos mismos autores concluyen que los prototipos y estereotipos geométricos afectan directamente en la enseñanza de la simetría, generando en consecuencia algunas situaciones problemáticas como las que se han podido observar durante la implementación de la propuesta diseñada, donde los ejes vertical y horizontal eran identificados con mayor frecuencia que los oblicuos.

## **2. La propuesta ha servido para desarrollar en algunos alumnos la identificación de ejes de simetría formados por escaques ocupados.**

Como ya se comentó durante la evaluación de la segunda sesión, muchos de los alumnos presentaban problemas a la hora de identificar los ejes de simetría oblicuos. Este hecho se podía observar claramente en las actividades 1 y 2 de dicha sesión, las cuales se llevaban a cabo en tableros de 3x3, pero también sucedía de manera asidua en el resto de actividades.

Muchas de las situaciones en las que estos ejes no eran identificados podrían deberse a que los escaques que eran cortados por el eje de simetría estaban todos ocupados, por lo que los alumnos tenían reparos para dibujar un eje que “tachase” las fichas presentes en ellos. Son varios los casos en los que es identificado el eje de la diagonal perpendicular, pero no el eje cuyos escaques están ocupados por fichas.

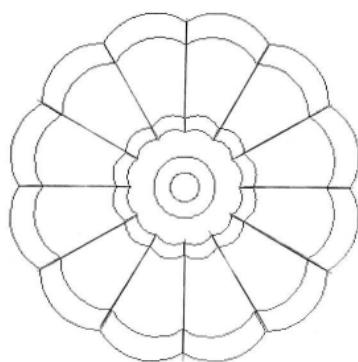
Este fallo se ha ido corrigiendo a lo largo de las sesiones, pudiendo observarse un progreso en cada una de ellas respecto a la sesión anterior. Sin embargo, donde más claro puede observarse esto es en la cuarta sesión, donde son varios los alumnos que para elaborar su problema recurren a identificar en primer lugar el eje y luego dirigir todas las fichas hacia los escaques que lo conforman.

Cabe mencionar además que esta conclusión se refleja también en la comparación entre la prueba inicial y final. Mientras en la prueba inicial muchos de los alumnos colocaban las luces entre los huecos de los ejes de simetría identificados de manera previa, en la prueba final se puede observar una mayor cantidad de participantes que emplean los ejes como referencia para colocar los elementos solicitados.

Además, son muchos más los alumnos que ahora no presentan reparo en identificar ejes de simetría que corten líneas o partes de la figura, aspecto que se podía observar con claridad al comienzo de la propuesta, donde fueron varios los alumnos que identificaron ejes de simetría que no llegaban a atravesar la figura.

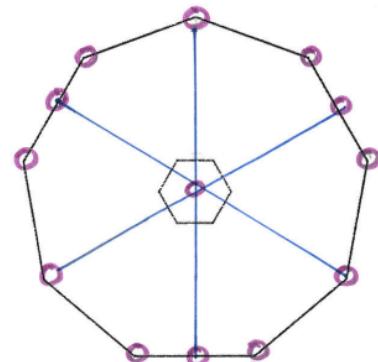
**Figura 91**

*Actividad 2 del participante 23*



**Figura 92**

*Actividad 2 del participante 10*



**3. La propuesta didáctica diseñada permite la transferencia del concepto de simetría axial a contextos externos al ajedrez donde el cuadrado esté presente, no siendo así con otros polígonos.**

Como se puede observar a lo largo de la propuesta, todas las actividades planteadas, excluyendo las pruebas inicial y final, tienen como base el empleo del ajedrez como herramienta educativa. Sin embargo, esta herramienta tiene una principal limitación para la enseñanza de la simetría, concretamente la distribución de su espacio de juego.

El tablero de ajedrez es cuadrado y está formado a su vez por escaques de igual forma. Si quisiéramos adaptar el tablero a cualquier otro polígono o situación, deberíamos en primer lugar cambiar la configuración de sus escaques, lo que nos obligaría a modificar los posibles movimientos a realizar por cada una de las fichas, creando en definitiva un juego nuevo. Esta distribución irremediable del espacio provoca que todas las simetrías posibles a obtener sean igual a las propias de un polígono regular de cuatro lados, es decir, existe un eje de simetría vertical, uno horizontal y dos oblicuos, siendo de esta manera más recomendable para cursos medios de la etapa, que para los cursos superiores, donde se trabaja con polígonos e incluso poliedros más complejos.

Si bien la identificación de ejes de simetría verticales puede aplicarse a todos los polígonos regulares representados apoyados sobre un lado, no ocurre lo mismo con el eje horizontal, no presente en aquellos polígonos regulares con un número de lados impar, si estos están representados sobre un lado también. Además, los ejes oblicuos varían en número e inclinación entre un polígono y otro, siendo esto, sin embargo, algo menos relevante.

Esta limitación en la transferencia del conocimiento a contextos ajenos al ajedrez puede deberse en parte también a la creación de prototipos y estereotipos mentales a los cuales hacían referencia Scaglia y Moriena (2005). Dicho de otra manera, si la única herramienta de trabajo que presentamos a los alumnos para el tratamiento de la simetría en el aula es el ajedrez, su concepción de esta se verá limitada a un polígono regular de cuatro lados, apoyado sobre uno de ellos, y a los ejes de simetría presentes en este. Esto hará que, ante la necesidad de extrapolar su idea de simetría a contextos distintos, centren su atención en si están presentes las simetrías propias del cuadrado.

En definitiva, se aconseja emplear esta herramienta como un complemento en la enseñanza de la simetría, no como un único medio para ello, siendo especialmente recomendada para su uso en segundo ciclo de Educación Primaria, donde los alumnos ya

trabajan la descomposición de polígonos, aspecto fundamental en la identificación de simetrías.

**4. La introducción de reglas, más allá de los movimientos posibles a realizar por cada una de las fichas, complica las actividades y diluye el enfoque del tópico matemático a trabajar, el desarrollo de la simetría axial.**

Durante algunos ejercicios a lo largo de la propuesta se ha añadido una serie de normas propias del ajedrez tradicional, como por ejemplo, la presencia de dos bandos o el respeto de los turnos, y otras que, pese a no estar presentes en el ajedrez como deporte, se consideraron necesarias durante el diseño de la propuesta, como la imposibilidad de rehacer un movimiento.

Tal y como se ha podido observar durante la realización de las actividades por parte de los alumnos, estas normas dificultan la labor de los participantes, aportando una mayor complejidad a las actividades en las que son implementadas y forzando a los alumnos a tener en cuenta un elemento más durante la resolución de las mismas, el cual nada tiene que ver con el concepto matemático a trabajar.

Este hecho se ve claramente reflejado en las actividades 4 y 5 de la tercera sesión, donde se incorpora la dificultad añadida de contar con dos bandos distintos de fichas (blancas y negras), junto a lo que se añade la norma del respeto de los turnos, siendo obligatorio comenzar las actividades mediante el movimiento de una ficha blanca. Estas normas, han producido que los resultados positivos desciendan drásticamente respecto al resto de actividades que componen la sesión, donde la complejidad era menor debido a la presencia de un solo bando de fichas y a la mayor libertad de las normas.

A nivel teórico, esta conclusión es apoyada por el modelo del procesamiento de la información, el cual sostiene que el cerebro humano es un sistema de procesamiento con una capacidad bastante limitada, lo que provoca que los procesos mentales requieran de bastante esfuerzo hasta que son automatizados (Simon, 1978).

Este modelo extrapolado a las actividades realizadas sostiene que, al no tener interiorizadas las normas propias del ajedrez empleadas en algunas de las actividades, con las cuales no se trabaja apenas durante el cómputo general de la propuesta, las actividades en las

que estas eran incluidas requerían de un mayor esfuerzo cognitivo que el resto, aunque en lo referente al tópico trabajado, es decir, la simetría, fueran aparentemente sencillas.

**5. La falta de pautas claras en actividades relacionadas con la creación de problemas proporciona a los alumnos la libertad de escoger distintas formas de proceder, favoreciendo el desarrollo de la creatividad.**

Esto se puede observar con claridad en la cuarta sesión, en la cual se solicitaba a los alumnos la elaboración propia de dos problemas que tuvieran relación con el concepto trabajado, la simetría. Durante esta sesión, las únicas imposiciones que se les hacía para que diseñasen sus problemas eran los tableros a emplear para cada una de las actividades y la obligación de que el resultado de cada uno de los problemas fuera una disposición simétrica de las fichas.

Ante esta libertad de la que gozaban los alumnos, se han podido observar gran variedad de planteamientos, métodos de resolución de los problemas y explicaciones proporcionadas, algunas de ellas empleando para ello herramientas no trabajadas durante la propuesta, pero que manteniendo la simetría como el elemento principal de la actividad.

Son muchos los autores que plantean la necesidad, no solo de resolver, sino también de plantear problemas, durante la enseñanza de las matemáticas (Bonotto, 2013; Crespo, 2003; Einstein & Infeld, 1938; Olson & Knott, 2013). Estos sostienen que la importancia de plantear un buen problema es muchas veces superior a la de una correcta resolución, ya que la formulación de las preguntas adecuadas es la base para la adquisición del conocimiento.

Es por esto que, cada día más investigadores sostienen la importancia de la introducción en la enseñanza de sesiones donde el “problem posing”, o planteamiento de problemas, sea parte fundamental de las mismas. Un estudio reciente llevado a cabo por Matsko y Thomas (2015), en el cual se podía observar cómo los alumnos planteaban y resolvían algunos problemas relacionados con el ajedrez entre otros ámbitos, mantenía que este método de trabajo en el aula no solo ayudaba a los alumnos a trabajar y fortalecer la aplicación de estrategias matemáticas, sino que también servía como medio para el desarrollo de la creatividad.

## **6. La implementación de actividades centradas en el ajedrez como juego matemático contribuye a la comprensión por parte de los alumnos del concepto matemático de simetría.**

Tras realizar una evaluación cualitativa de las distintas sesiones que componen la propuestas se ha podido observar un cierto grado de desarrollo por parte de los participantes en la comprensión del concepto matemático trabajado.

Concretamente se ha podido observar un desarrollo en la identificación de ejes de simetría oblicuos, los cuales han pasado de ser prácticamente ignorados por los alumnos a ser utilizados como herramienta para la creación de problemas en la cuarta sesión. En esta, muchos de los participantes identificaban en primer lugar un eje de simetría previo, al cual dirigir todas las piezas para realizar una posición simétrica con las fichas.

Además, esta propuesta ha servido para asentar conocimientos ya interiorizados por los alumnos, como puede ser el concepto de simetría, el cual presentaron ellos de manera grupal en la primera sesión, o el de eje de simetría. Dentro de estos últimos, y gracias al trabajo realizado con el ajedrez, y más concretamente con la disposición espacial de juego, los alumnos han podido reforzar la identificación de los ejes de simetría vertical y horizontal, aspecto que se ha visto especialmente reflejado en el trabajo con tableros de 4x4, donde han pasado de no tener en cuenta los escaques a sí hacerlo.

Si bien es cierto que no todas las actividades han tenido una utilidad real para alcanzar el objetivo principal de la propuesta didáctica, si que hay que destacar que la mayor parte de ellas han cumplido con su cometido dentro del proceso de aprendizaje diseñado, pudiendo extraer de este unas pocas que ya han sido mencionadas con anterioridad en la tercera conclusión.

Para concluir, cabe destacar que, todo el progreso realizado por los alumnos no se ha visto reflejado en la prueba final, la cual introducía a los alumnos en un contexto ajeno de mayor complejidad. Es por esto que, considero esta debería haber sido similar a la prueba inicial, siendo mucha más cercana a la realidad trabajada durante las sesiones, es decir, la simetría axial en polígonos regulares de 4 lados, pudiendo intentar extrapolarla a polígonos regulares de lados pares, pero nunca a aquellos con lados impares, donde las simetrías varían bastante.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aciego, R., García, L. Y Betancort, M. (2012). The benefits of chess for the intellectual and social-emotional enrichment in schoolchildren. *The Spanish Journal of Psychology*, 15 (2), 551-559. [https://doi.org/10.5209/rev\\_SJOP.2012.v15.n2.38866](https://doi.org/10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n2.38866)
- Amigó, M., & Serra, J. (2017). Asignatura ajedrez en Cataluña. *Capakhine*, (8), 18-20.
- Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Meditated Learning: An Example of an Approach, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 5(2), 63-85.
- Arnal, A., y Gasca, B. (2018). Actividades con el ajedrez para trabajar la argumentación y la resolución de problemas en matemáticas en Educación Primaria. *Números*, 99, 71-84.
- Arnal, A., y Vera, D.M. (2021). Enseñanza de herramientas de combinatoria a través de actividades basadas en el ajedrez en Educación Primaria. Un estudio de caso. *REIDOCREA*, 10(7), 1-18.
- Battista, M.T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. En F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Information Age.
- Berdonneau, C. (2008). *Matemáticas activas (2-6 años)*. Barcelona: Graó.
- Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. *Educational Studies in Mathematics*, 83 , 37-55. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9441-7>
- Bright, G.W., Harvey, J.G. Y Wheeler, M.M. (1985). *Learning and Mathematics Games. Journal for Research in Mathematics Education*, 1. Reston: National Council of Teachers of Mathematics. <https://doi.org/10.2307/749987>
- Carrillo, M., Padilla, J., Rosero, T., & Villagómez, M. S. (2009). La motivación y el aprendizaje. *Alteridad*, 4(1), 20-33. <https://doi.org/10.17163/alt.v4n2.2009.03>
- Cascallana, M<sup>a</sup>. T. (1988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.
- Cernuda, A. (2016). El ajedrez y el desarrollo de la inteligencia emocional. En J. L. Soler, L. Aparicio, O. Díaz, E. Escolano & A. Rodríguez (Coord.) *Inteligencia Emocional y*

*Bienestar II: reflexiones, experiencias profesionales e investigaciones* (pp. 454-460). Ediciones Universidad San Jorge.

Chacón, P. (2008). El Juego Didáctico como estrategia de enseñanza y aprendizaje. Cómo crearlo en el aula. *Nueva aula abierta*, 16(5), 1-8.

Contreras, J. L.; González, C. A. & Reséndiz, E. (2018) Prototipos geométricos en el aprendizaje de la simetría. Tercer grado de Primaria. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades SOCIOTAM*, 28(2).  
<https://www.redalyc.org/journal/654/65458498009/html/>

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 243-270.  
<https://doi.org/10.1023/A:1024364304664>

De Guzmán, M. (1989). Juegos y matemáticas. *Suma*, 4, 61-64.

De Guzmán, M. (2007). *Enseñanza de las ciencias y la matemática. Revista iberoamericana de educación*, (43), 19-58.

Edo, M., & Juvanteny, M. A. (2017). Juego y aprendizaje matemático en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 33-44.  
<https://doi.org/10.24197/edmain.1.2016.33-44>

Edo, M., Deulofeu, J., & Badillo, E. (2007). Juego y matemáticas: Un taller para el desarrollo de estrategias en la escuela. *Actas XIII JAEM, Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas*.

Einstein, A., & Infeld, L. (1938). *The evolution of physics*. New York, NY: Simon & Schuster.

Escobar, D. & Escobar, D. (2018). El ajedrez educativo como innovación. *Revista Padres y Maestros/Journal of Parents and Teachers*, (373), 56-61.  
<https://doi.org/10.14422/pym.i373.y2018.009>

Fernández, J. (1992). Ajedrez a tope. *Cuadernos de Pedagogía*, (204), 40-42.

Ferrero, L. (1998). ¡Hagan juego! Juegos matemáticos para la educación primaria. *Revista de Didáctica de las matemáticas*, (18), 39-45.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education. China Lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Gairín, J. & Fernández, J. (2010). Enseñar matemáticas con recursos de ajedrez. *Tendencias pedagógicas*, (15), 57-90.

Gairín, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, (17), 105-118.

García, A. (2019). El juego de construcción para el desarrollo del pensamiento matemático en un aula de 2-3 años. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 8(1), 58-88. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2019.58-88>

García, L. (2013, 26 de noviembre). "La experiencia está sobrevalorada". El País. [https://elpais.com/deportes/2013/11/25/actualidad/1385409599\\_362591.html](https://elpais.com/deportes/2013/11/25/actualidad/1385409599_362591.html)

Gardner, M. (1975). *Carnaval Matemático*. Madrid: Alianza Editorial.

Giménez, J.; Sámuels, L. M. & Vanegas, Y. (2016). Visualización y simetría en la formación de maestros de Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 21-32. <https://doi.org/10.24197/edmain.1.2016.21-32>

González, D. (2013). Funciones ejecutivas y educación. *Revista Argentina de Neuropsicología*, (23), 11-34.

Grau, G. & Moreira, K. (2015). Estudio del impacto del ajedrez sobre las funciones ejecutivas en niños de edad escolar. *V Congreso Internacional de Investigación de la Facultad de Psicología de la Universidad Nacional de La Plata*.

Grupo Alquerque (s.f.). *Clasificación de los juegos matemáticos*. Recuperado el 21 de marzo de 2022 de <http://www.grupoalquerque.es/recursos/lapizpapel/clasificacionjuegos.html>

Grupo Alquerque (s.f.). *Juegos tradicionales del mundo*. Recuperado el 21 de marzo de 2022 de <http://www.grupoalquerque.es/ferias/2006/juegosdelmundo.html>

Guirles, J. R. G. (2005). Los juegos en matemáticas. *Sigma: revista de matemáticas = matematika aldizkaria*, (26), 7-18.

Hernández, N.; Meneses, N.; Sánchez, Y.; Montealegre, G.; & Parra, S. (2018). *Simetría axial en figuras planas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two Sides of the Coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, (11), 61-76.

Inbar, M. Y Stoll, C.S. (1970). Games and learning. *Interchange*, (1), 53-61.  
<https://doi.org/10.1007/BF02214858>

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast*, 1(1), 3-8. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1001>

Kovacic, D. M. (2012). Ajedrez en las escuelas. Una buena movida. *PSIENCIA. Revista Latinoamericana de Ciencia Psicológica*, 4(1), 29-41.  
<https://doi.org/10.5872/psicencia.v4i1.87>

Márquez, A. & Núñez, J. (2018). Estrategias versus la cuenta de la vieja en matemáticas. *Actas del XVII Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas. Matemáticas en tierra de cine*, 122-130.

Martín, A. (1996). *La actividad física y deportiva extraescolar en los centros educativos. Ajedrez*. Madrid: Ministerio de Educación y Cultura.

Matsko, V.J., Thomas, J. (2015). Beyond Routine: Fostering Creativity in Mathematics Classrooms. In: Singer, F., F. Ellerton, N., Cai, J. (Eds.) *Mathematical Problem Posing. Research in Mathematics Education* (125-139). Springer.  
[https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3\\_6](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-6258-3_6)

McDonald, P. R. (2006). *The benefits of chess in education. A collection studies and papers on chess and education*. Ontario: Ontario Chess Association.

Mialaret, G. (1984). *Las Matemáticas: cómo se aprenden, cómo se enseñan. Un texto base para psicólogos, enseñantes y padres*. Madrid: Visor.

Muñiz, C. (1995). *Experiencias didácticas en torno al ajedrez. I Encuentro de monitores de ajedrez*. Oviedo: Escuela de Magisterio.

Olfos, R. & Villagrán, E. (2001). Actividades lúdicas y juegos en la iniciación al álgebra. *Revista Integra*, (5), 39-50.

Olson, J. C., & Knott, L. (2013). When a problem is more than a teacher's question. *Educational Studies in Mathematics*, 83, 27-36.  
<https://doi.org/10.1007/s10649-012-9444-4>

Orden ECD/1112/2022 de 18 de julio [Gobierno de Aragón, Departamento de Educación, Cultura y Deporte]. Por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Paniagua, M. (2017). *La influencia del ajedrez en los procesos cognitivos* (Tesis de maestría). Universidad Internacional de La Rioja.

Ramos, L., Arán, V. & Krumm, G. (2018). Funciones ejecutivas y práctica de ajedrez: un estudio en niños escolarizados. *Psicogente*, 21(39), 25-34.  
<https://doi.org/10.17081/psico.21.39.2794>

Real Academia Española. (s.f.a). *Juego*. En Diccionario de la Lengua Española. Recuperado el 20 de marzo de 2022, de <https://dle.rae.es/juego>

Real Academia Española. (s.f.b). *Jugar*. En Diccionario de la Lengua Española. Recuperado el 20 de marzo de 2022, de <https://dle.rae.es/jugar>

Real Academia Española. (s.f.c). *Simetría*. En Diccionario de la Lengua Española. Recuperado el 5 de abril de 2022, de <https://dle.rae.es/simetr%C3%A9tia>

Resolución [Dirección General de Innovación y Formación Profesional]. Por la que se convocan programas educativos en centros docentes sostenidos con fondos públicos de la Comunidad Autónoma de Aragón durante el curso 2021-2022. 29 de junio de 2021.

Resolución de 12 de abril de 2016 [Gobierno de Aragón, Departamento de Educación, Cultura y Deporte]. Por la que se ofrecen orientaciones sobre los perfiles competenciales de las áreas de conocimiento y los perfiles de las competencias clave establecidos en la orden de 16 de junio de 2014, de la Consejera de Educación, Universidad, Cultura y Deporte, por la que se aprueba el currículo de la Educación Primaria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón.

Sastre-Riba, S. (2006). Condiciones tempranas del desarrollo y el aprendizaje: el papel de las funciones ejecutivas. *Revista de neurología*, 42(2), 143-151.  
<https://doi.org/10.33588/rn.42S02.2005782>

Scaglia, S. & Moriena, S. (2005). Prototipos y estereotipos en geometría. *Educación Matemática*, 17(3), 105-120. <https://www.redalyc.org/pdf/405/40517306.pdf>

Simon, H. A. (1978). Information-processing theory of human problem solving. En W. K. Estes (Ed.) *Handbook of learning and cognitive processes: Vol 5. Human information processing* (pp. 271-295). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Torres, C., & Torres, M. (2007). *El juego como estrategia de aprendizaje en el aula*. Trujillo: Universidad de los Andes.

Winter, S. & Ziegler, P. (1983). *Introducción al juego de los conjuntos*. Madrid: Interduc-Schroedel.

## ANEXOS

### Anexo I: Ficha prueba inicial

PRUEBA INICIAL

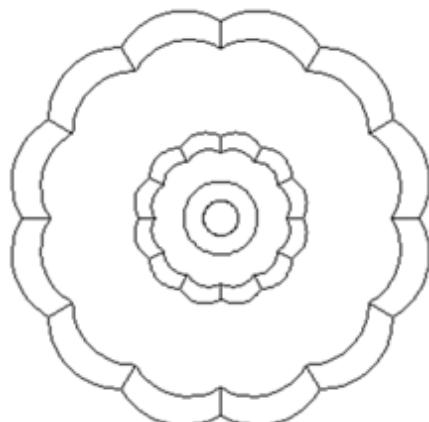
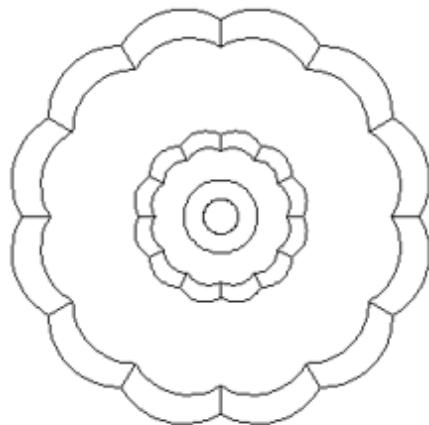
N.º:

Irina y Sergio quieren construir una fuente en el jardín de su casa y, tras mucho decidir, se han decantado por la que se puede observar en la imagen. Una vez elegida, lo último que falta antes de construirla es elegir dónde irán las seis luces que la iluminarán, las cuales deben posicionarse de manera que mantengan las simetrías de la fuente.



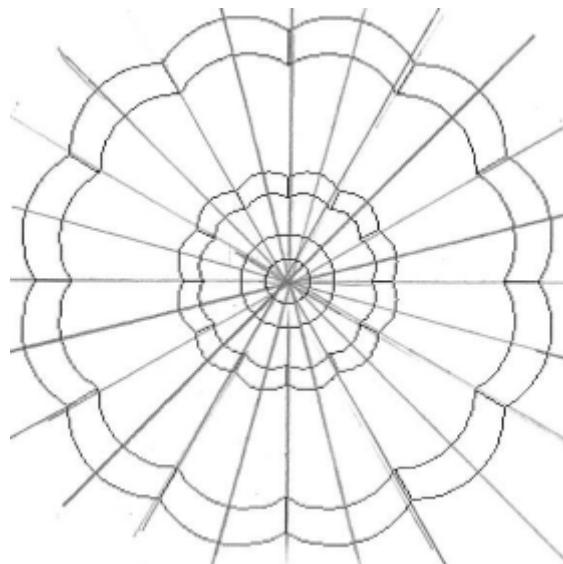
En la primera imagen, identifica y dibuja los ejes de simetría presentes.

En la segunda, selecciona dónde colocar las luces, dibujando además los ejes de simetría que se mantienen.

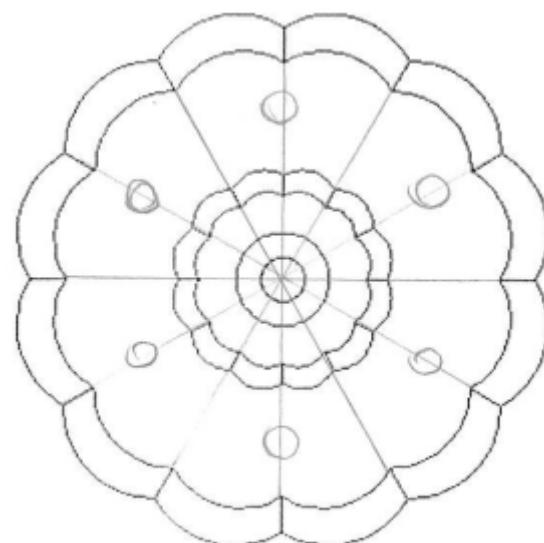


## Anexo II: Soluciones prueba inicial

En la primera imagen, identifica y dibuja los ejes de simetría presentes.



En la segunda, selecciona dónde colocar las luces, dibujando además los ejes de simetría que se mantienen.

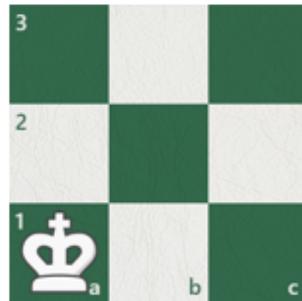


### Anexo III: Ficha primera sesión

PRIMERA SESIÓN

N.º:

Desplaza el rey hasta la casilla c3 empleando los movimientos propios de esta figura.  
Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

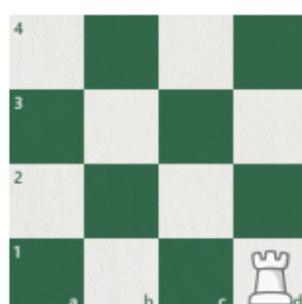
---

---

---

---

Mueve a la torre hasta la casilla b3 empleando los movimientos propios de esta figura.  
Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

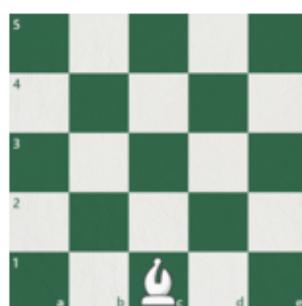
---

---

---

---

Desplaza el alfil hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta figura.  
Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

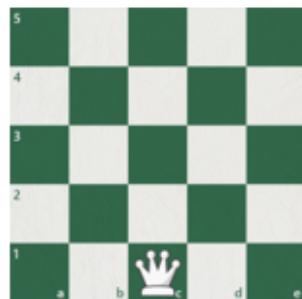
---

---

---

---

Mueve la dama hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta figura.  
Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

---

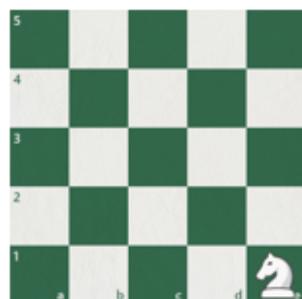
---

---

---

#### EXTRA

Mueve el caballo hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta figura.  
Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

---

---

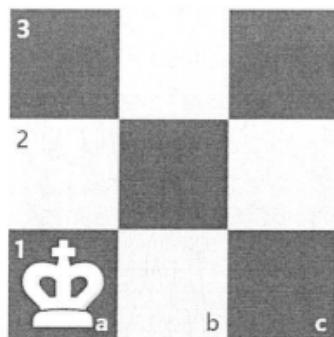
---

---

N.º Respuestas válidas	
Rey	
Torre	
Alfil	
Dama	

## Anexo IV: Soluciones primera sesión

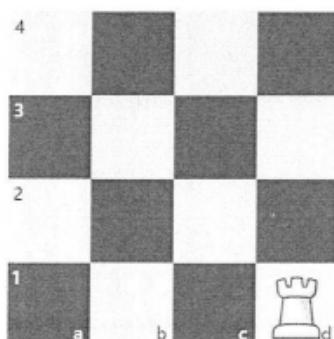
Desplaza el rey hasta la casilla c3 empleando los movimientos propios de esta ficha. Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

- Rb2 Rc3
- Rb1 Rc1 Rb2 Rc3
- Ra2 Ra3 Rb3 Rc3
- Rb1 Rc2 Rb3
- Rb1 Rb2 Rc3

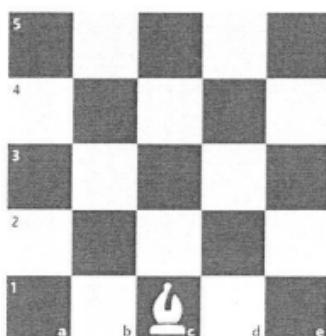
Mueve la torre hasta la casilla b3 empleando los movimientos propios de esta ficha. Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

- Tb1 Tb3
- Td3 Tb3
- Ta1 Ta3 Tb3
- Td4 Tb4 Tb3
- Td2 Tb2 Tb3

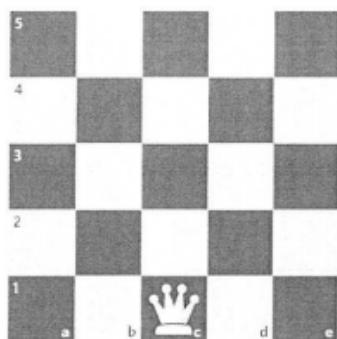
Desplaza el alfil hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta ficha. Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

- Ad1 Aa5
- Ae3 Ab4 Aa5
- Ae3 Ac5 Ab4 Aa5
- Ab2 Ac3 Aa5
- Ae3 Ad4 Ac3 Aa5

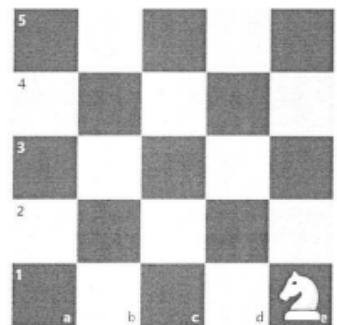
Mueve la dama hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta ficha. Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

- Dd2 Da5
- Da1 Da5
- De1 Da5
- Dc5 Da5
- Da3 Da5

EXTRA: Mueve el caballo hasta la casilla a5 empleando los movimientos propios de esta ficha. Indica paso por paso los movimientos realizados.



Movimientos empleados:

- Cc2 Ca3 Cc4  
Ca5
- Cd3 Cc5 Cb3 Ca5
- Cr2 Cd4 Cb3 Ca5
- Cd3 Cb2 Cr4 Ca5

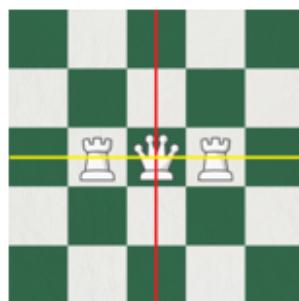
## Anexo V: Ficha segunda sesión

SEGUNDA SESIÓN

N.º:

EJEMPLO

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por la dama o las torres.

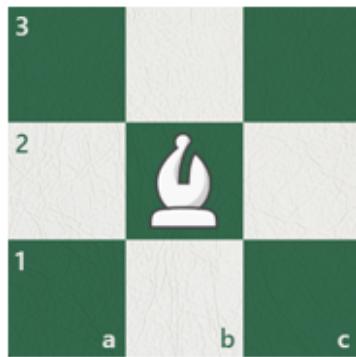


¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

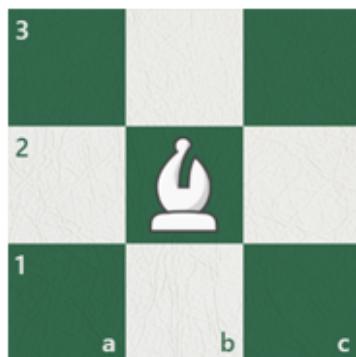


## EJERCICIO 1

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por el alfil.



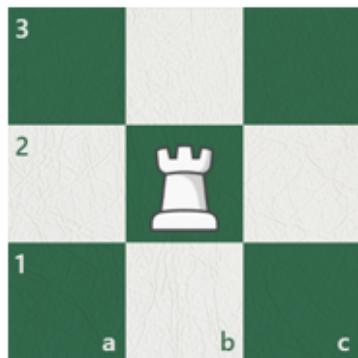
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

¿Se corresponde este con los dibujados al principio?

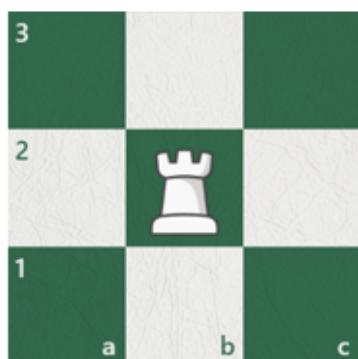
¿Han aparecido ejes nuevos o dejado de ser válidos algunos de los dibujados inicialmente? ¿Cuáles?

## EJERCICIO 2

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por la torre.



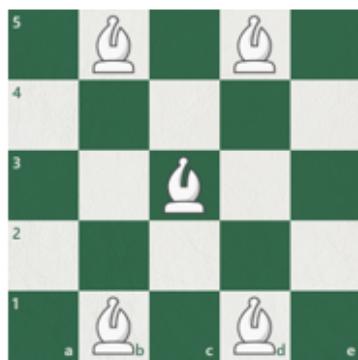
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

¿Se corresponde este con los dibujados al principio?

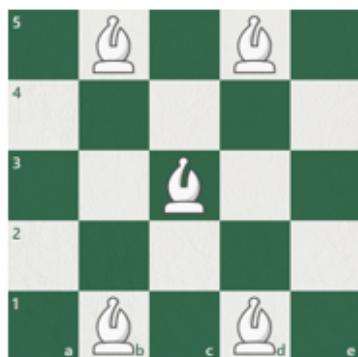
¿Han aparecido ejes nuevos o dejado de ser válidos algunos de los dibujados inicialmente? ¿Cuáles?

### EJERCICIO 3

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen el máximo número de peones de manera que no puedan ser capturados por los alfiles.



¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.

En caso de que el resultado no haya sido simétrico coloca el máximo de peones posibles sin que estos sean capturados por los alfiles. ¿Existe ahora algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.

¿Se corresponde este con alguno de los dibujados al principio?

#### EJERCICIO 4

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por la dama.

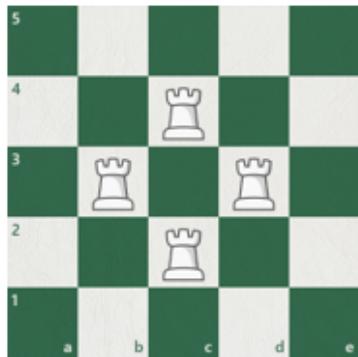


¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.

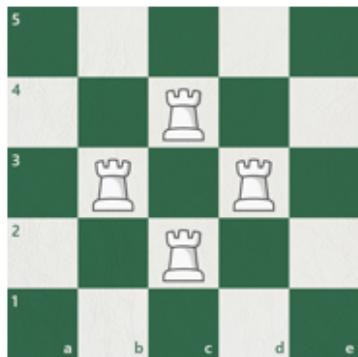
En caso de que no exista un eje de simetría, ¿podrías colocarlos de manera que la figura sea simétrica? Indica el eje de simetría.

## EJERCICIO 5

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por las torres.



¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo.

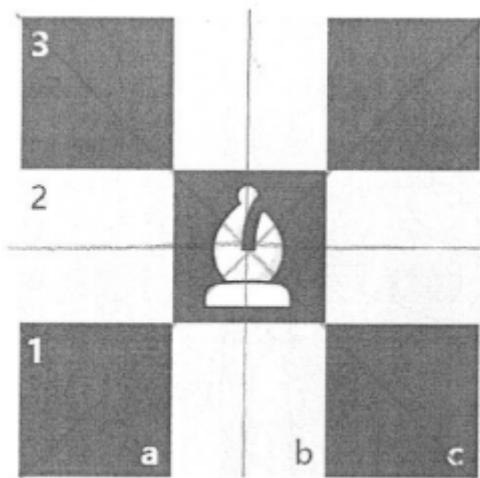
¿Se corresponde este con alguno de los dibujados al principio?

¿Existe alguna solución en la que el resultado no sea simétrico?

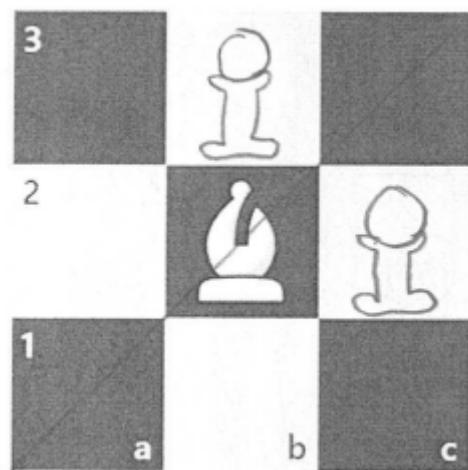
## Anexo VI: Soluciones segunda sesión

### EJERCICIO 1

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



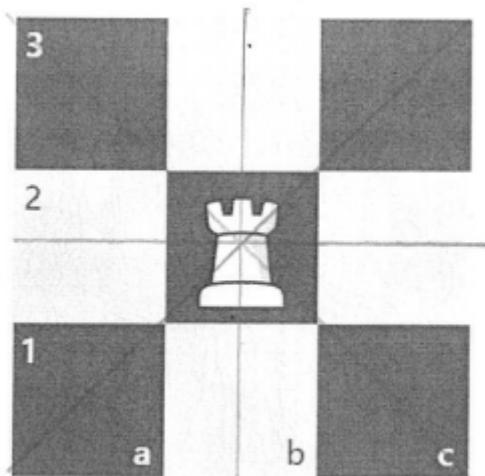
Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por el alfil.



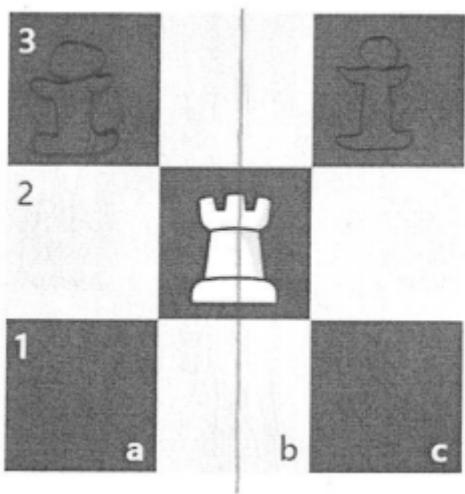
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

## EJERCICIO 2

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



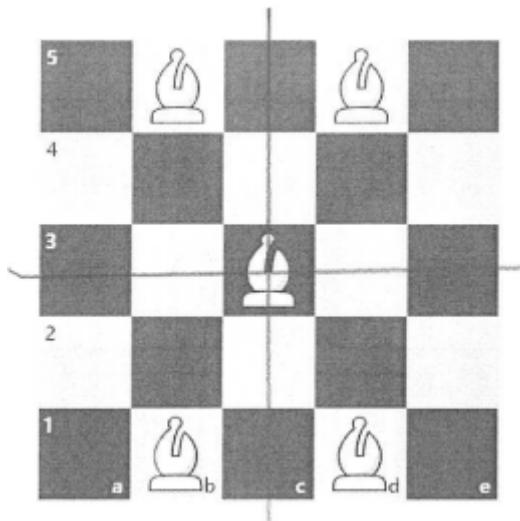
Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por la torre.



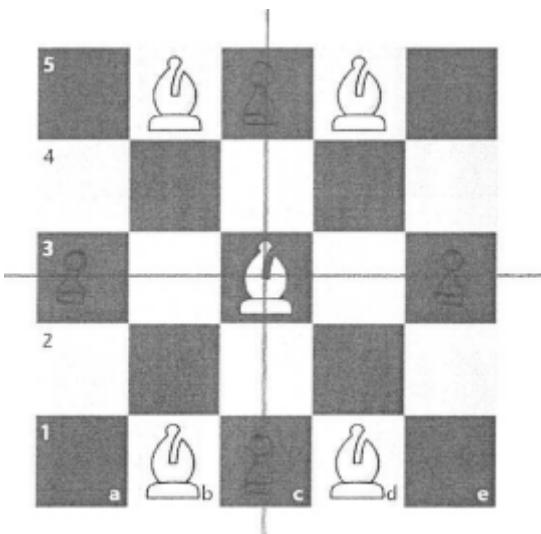
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

### EJERCICIO 3

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



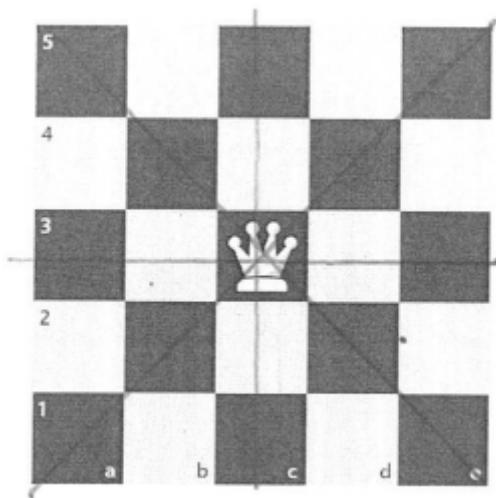
Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen el máximo número de peones de manera que no puedan ser capturados por los alfiles.



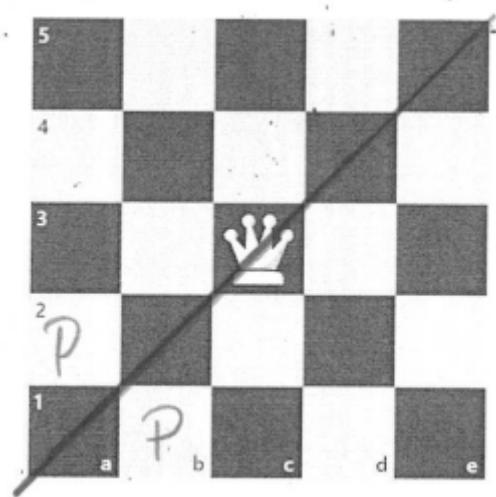
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

#### EJERCICIO 4

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



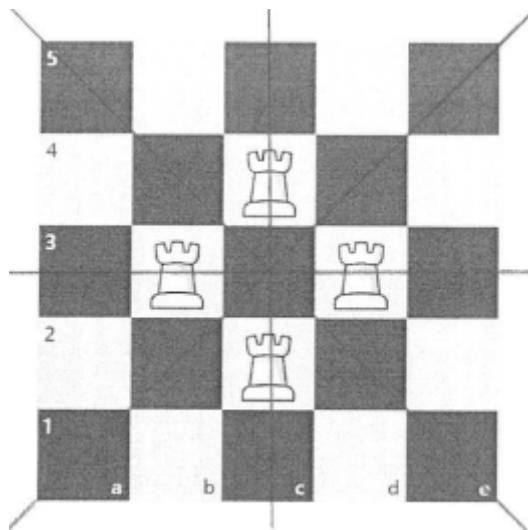
Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por la dama.



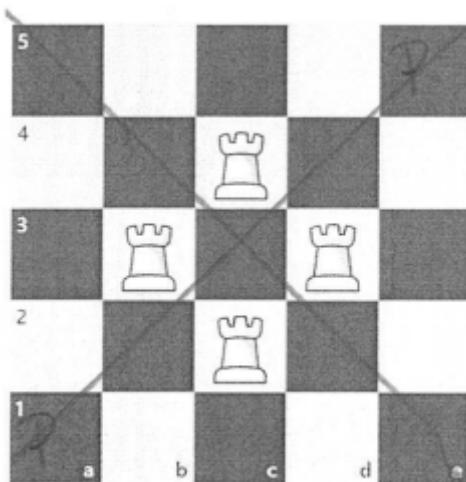
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

## EJERCICIO 5

Identifica y dibuja los ejes de simetría presentes en la imagen.



Una vez dibujados, coloca en la siguiente imagen dos peones de manera que no puedan ser capturados por las torres.



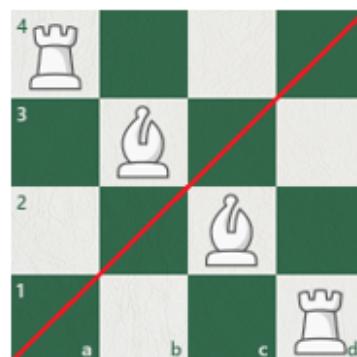
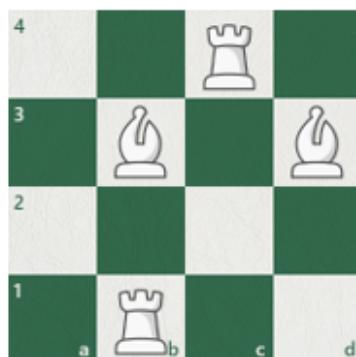
¿Existe algún eje de simetría en el resultado? Dibújalo

## Anexo VII: Ficha tercera sesión

TERCERA SESIÓN

N.º:

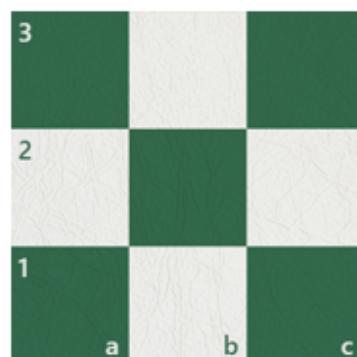
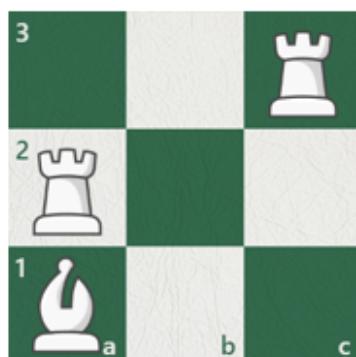
Realiza tres movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica el movimiento realizado mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja un eje de simetría.



Movimientos realizados:

Ta4, Td1, Ac2

1. Realiza dos movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica el movimiento realizado mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja un eje de simetría.

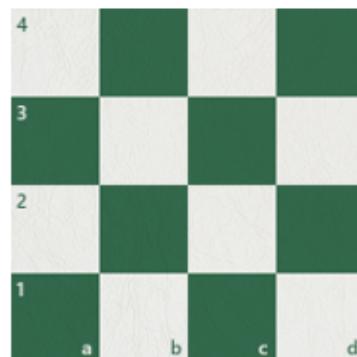
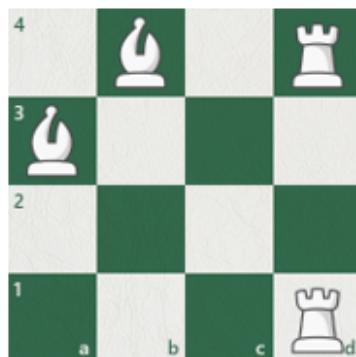


Movimientos realizados:

---

---

2. Realiza tres movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.

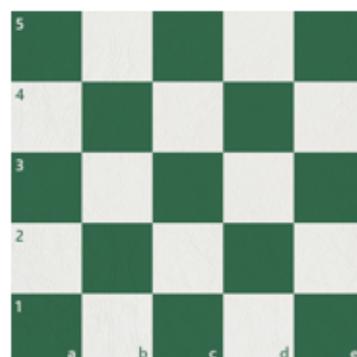
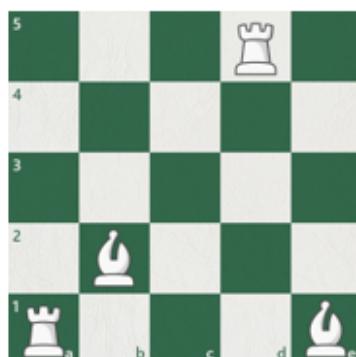


Movimientos realizados:

---

---

3. Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.

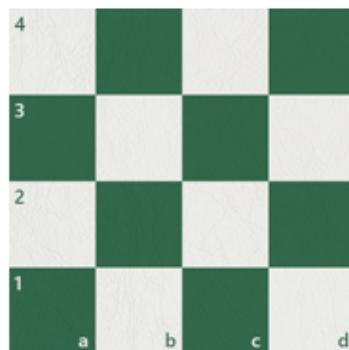
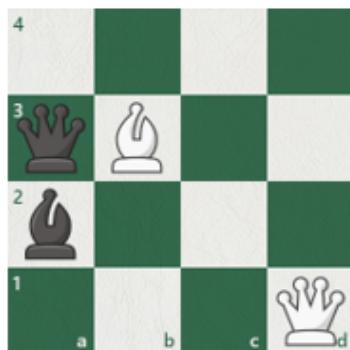


Movimientos realizados:

---

---

4. Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.

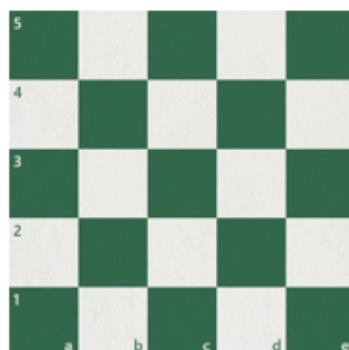
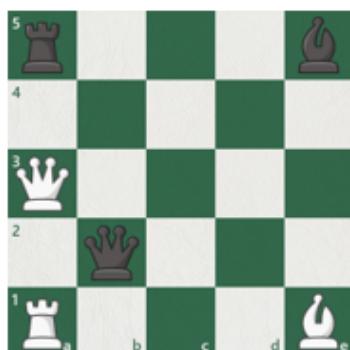


Movimientos realizados:

---

---

5. Realiza cuatro movimientos de manera que formes una posición de simetría. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.



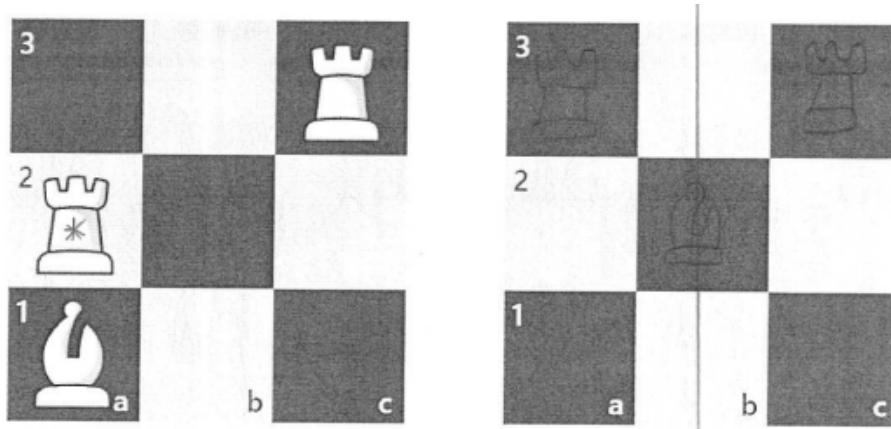
Movimientos realizados:

---

---

### Anexo VIII: Soluciones tercera sesión

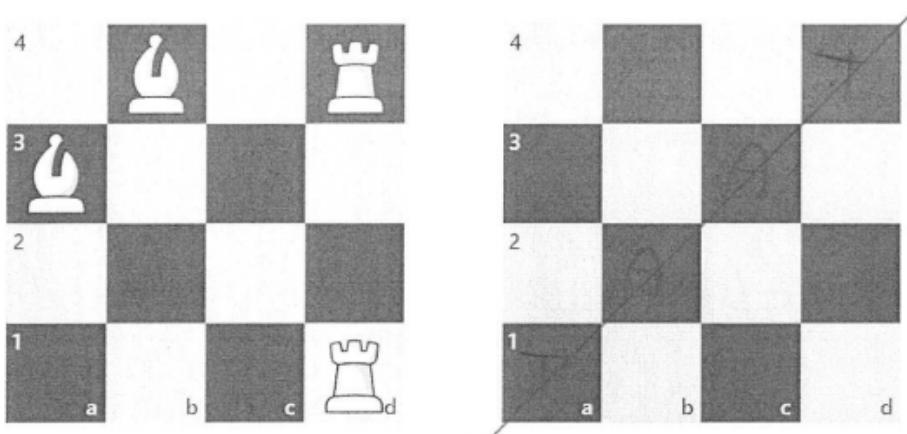
1. Realiza dos movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica el movimiento realizado mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja un eje de simetría.



Movimientos realizados:

Ta3 Ab2

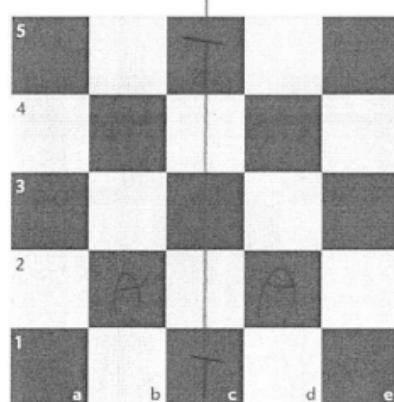
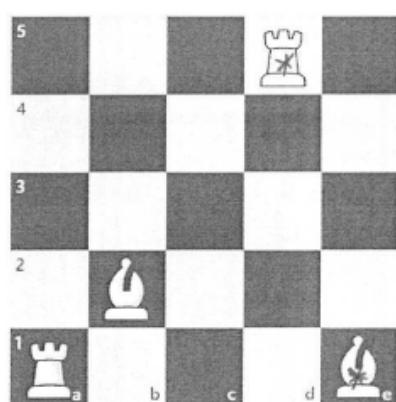
2. Realiza tres movimientos de manera que formes una posición simétrica. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.



Movimientos realizados:

Ta1 Ab2 Ac3

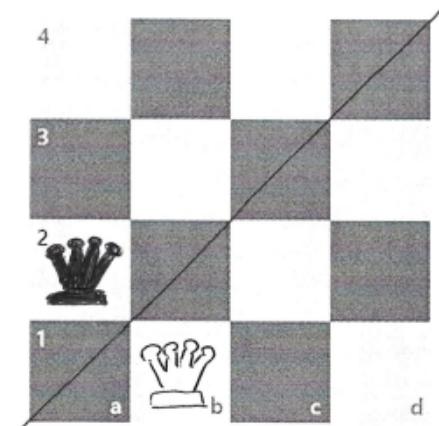
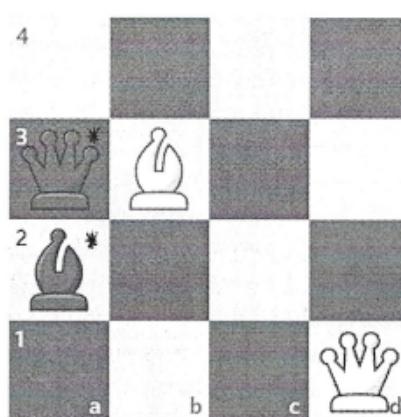
3. Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.



Movimientos realizados:

Tc1    Te5\*    Ae1\*

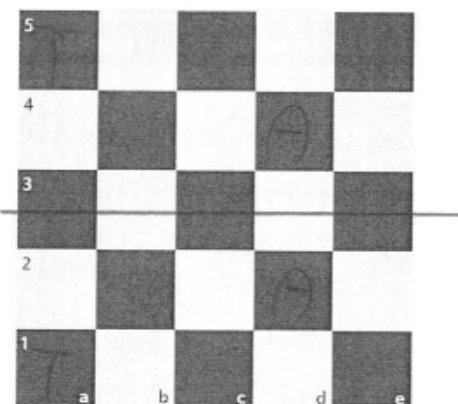
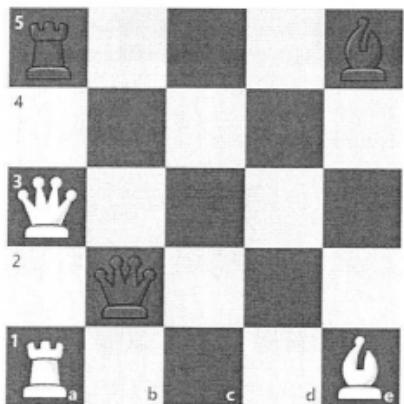
4. Forma una posición simétrica empleando dos o tres movimientos. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.



Movimientos realizados:

Ax Aa2 , Dx Aa2 , Db1

5. Realiza cuatro movimientos de manera que formes una posición de simetría. Indica los movimientos realizados mediante coordenadas. Una vez realizados dibuja el eje de simetría.



Movimientos realizados:

DxDb2 AxDb2 Ad2 Ad4

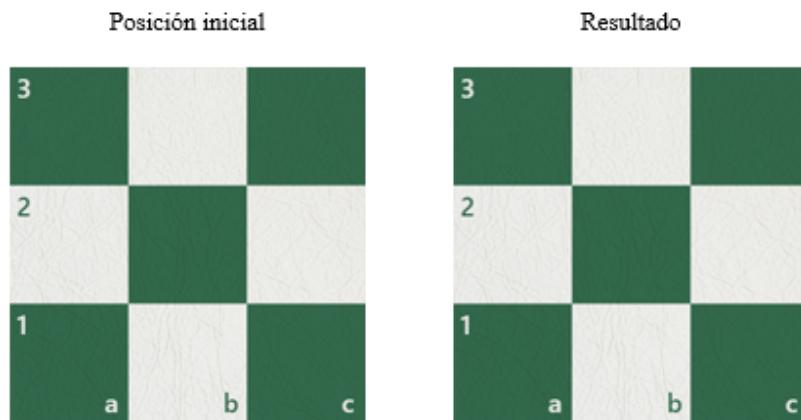
## Anexo IX: Ficha cuarta sesión

CUARTA SESIÓN

N.º:

Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.

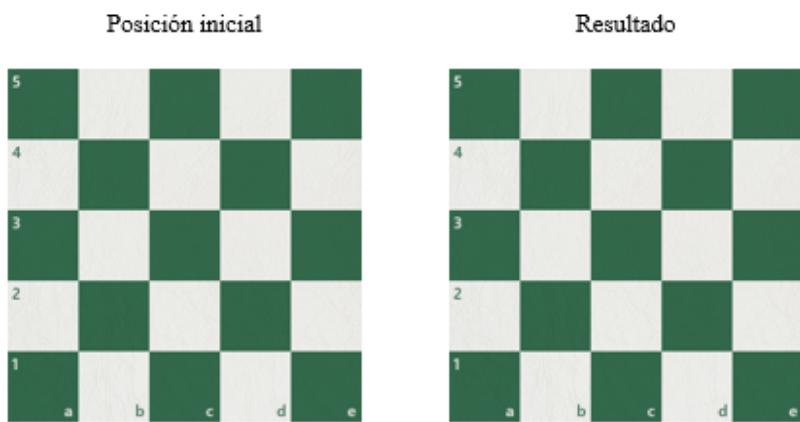
Enunciado:



¿Cómo se resuelve?

Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.

Enunciado:



¿Cómo se resuelve?

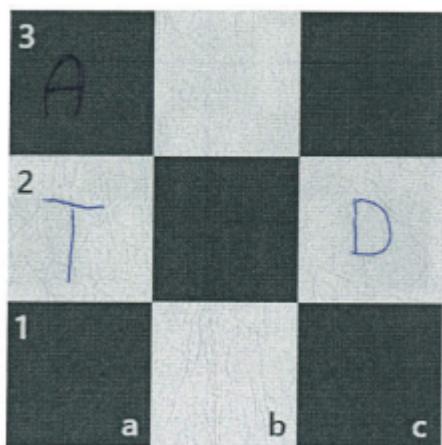
## Anexo X: Soluciones cuarta sesión

Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.

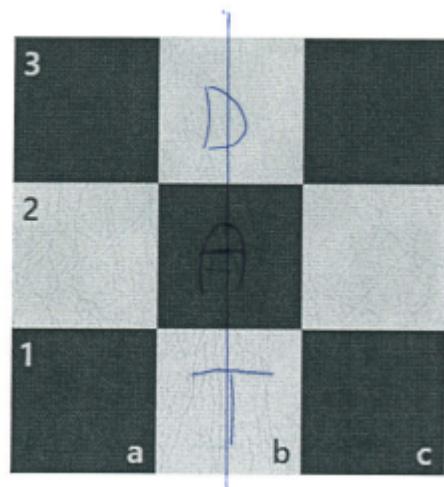
Enunciado:

En 4 movimientos realiza una posición simétrica. Indica cómo lo has hecho con coordenadas. Dibuja el eje de simetría.

Posición inicial



Resultado

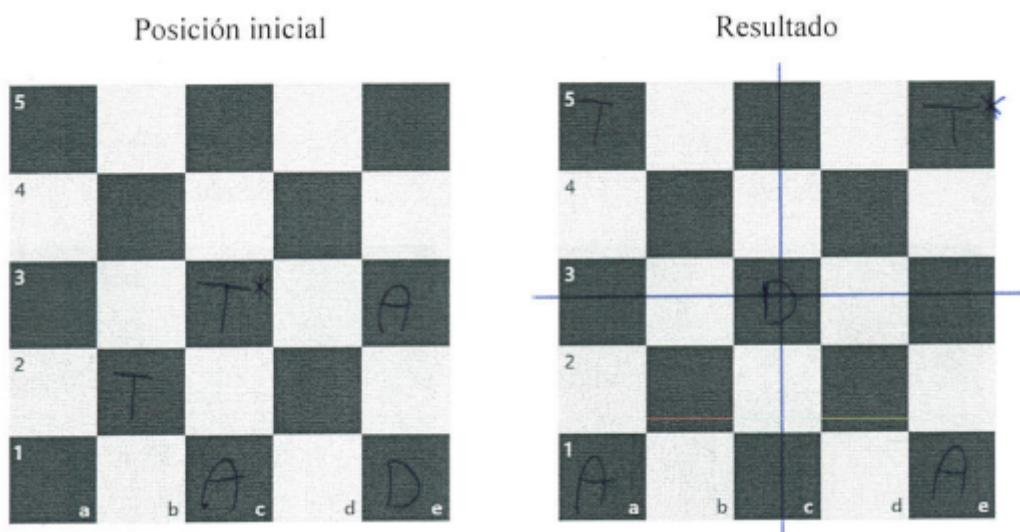


¿Cómo se resuelve?

Db3 Tb2 Tb1 Ab2

Crea tu propio ejercicio usando únicamente torres, alfiles y/o la dama. En los posibles resultados debe poder establecerse un eje de simetría.

Enunciado:  
En el menor número de movimientos posibles realiza una posición simétrica. Explica cómo lo has hecho con coordenadas. Realiza dos ejes de simetría.



¿Cómo se resuelve?

Ta2 Ta5 Tc5 Te5 Dc3 Ab2 Aa1 Ad2 Ae1

## Anexo XI: Ficha prueba final

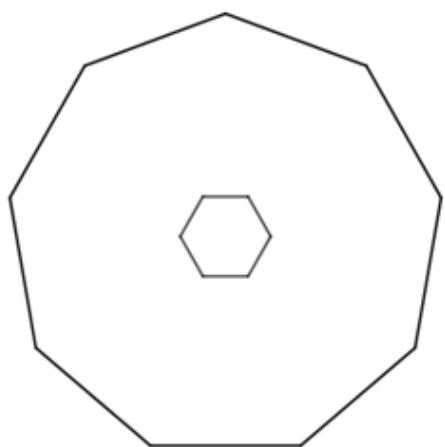
PRUEBA FINAL

N.º:

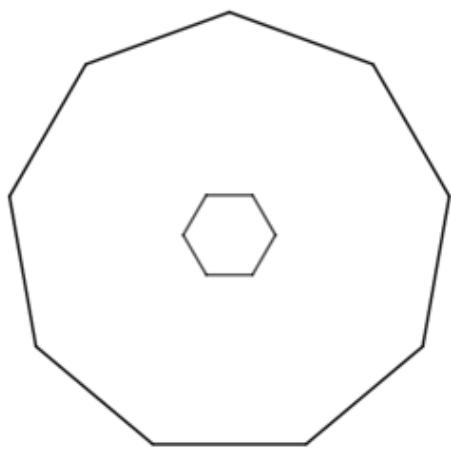
En Italia, más concretamente en la región de Udine, se encuentra una ciudad con unas características especiales, llamada Palmanova. Esta ciudad está construida de manera que forma un eneágono regular, teniendo además una plaza central con forma de hexágono regular.



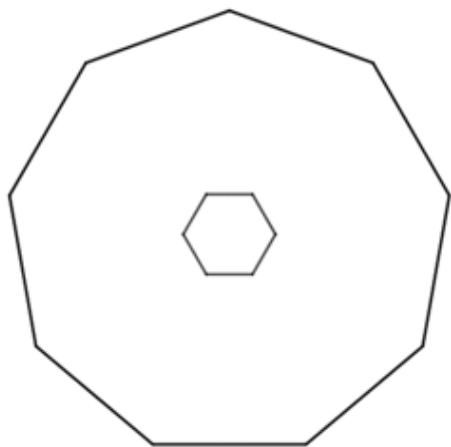
Nos han solicitado ayuda desde el ayuntamiento del municipio para seleccionar los lugares donde edificar, de forma que en primer lugar debemos identificar los ejes de simetría presentes en la ciudad.



Una vez hayas identificado los ejes, ayuda al ayuntamiento de Palmanova a distribuir 3 tiendas de alimentación a lo largo de la ciudad, teniendo en cuenta que no se puede perder la característica identificativa de la ciudad, la simetría. Indica tras haber colocado las tiendas el eje o ejes de simetría que se mantienen presentes.

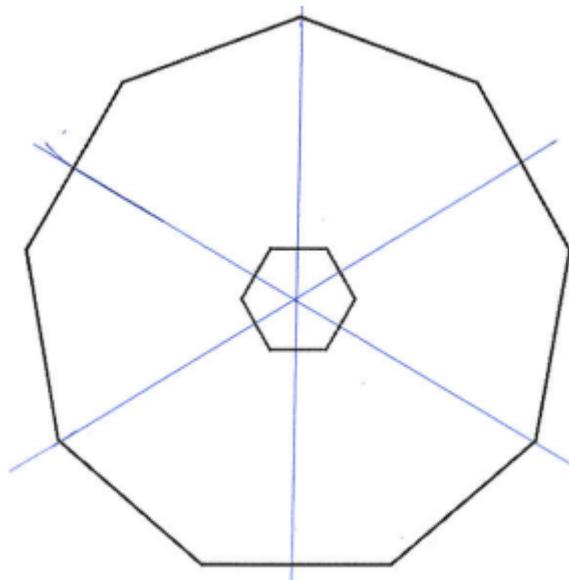


Una vez colocadas las tiendas selecciona donde pondrías las 13 farolas con las que el ayuntamiento quiere iluminar la ciudad, manteniendo de igual manera la simetría. Indica tras haber colocado las farolas el eje o ejes de simetría que se mantienen presentes.

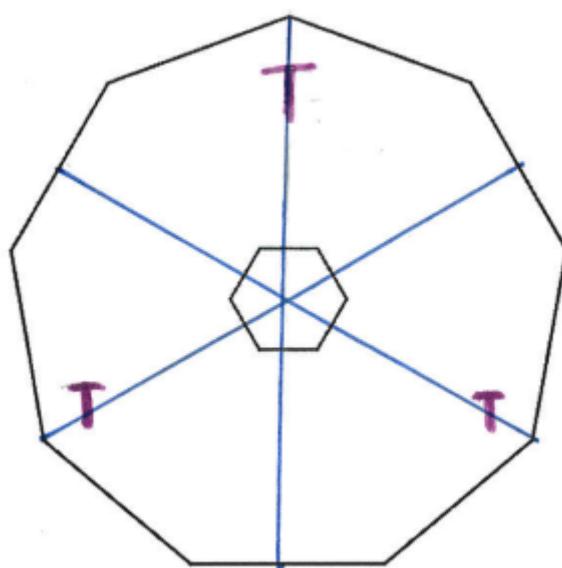


## Anexo XII: Soluciones prueba final

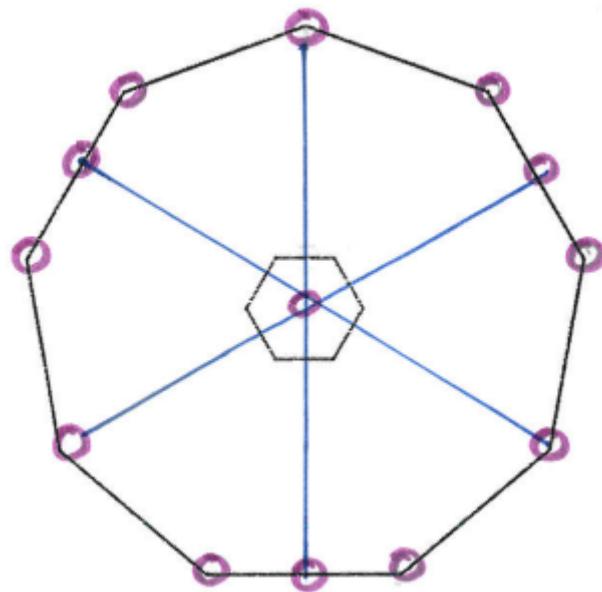
Nos han solicitado ayuda desde el ayuntamiento del municipio para seleccionar los lugares donde edificar, de forma que en primer lugar debemos identificar los ejes de simetría presentes en la ciudad.



Una vez hayas identificado los ejes, ayuda al ayuntamiento de Palmanova a distribuir 3 tiendas de alimentación a lo largo de la ciudad, teniendo en cuenta que no se puede perder la característica identificativa de la ciudad, la simetría. Indica tras haber colocado las tiendas el eje o ejes de simetría que se mantienen presentes.



Una vez colocadas las tiendas selecciona dónde pondrías las 13 farolas con las que el ayuntamiento quiere iluminar la ciudad, manteniendo de igual manera la simetría. Indica tras haber colocado las farolas el eje o ejes de simetría que se mantienen presentes.



### Anexo XIII: Material entregado a los alumnos

