

Trabajo Fin de Grado

“Sensibilidad del Predictor de Smith
respecto de desviaciones en la identificación
del retardo”

“Sensitivity of Smith Predictor
Performance to time-delay estimation
errors”

Autor:

Andrés Gonzalo Borrego

Director:

Antonio Romeo Tello



Escuela de
Ingeniería y Arquitectura
Universidad Zaragoza

DECLARACIÓN DE AUTORÍA Y ORIGINALIDAD

(Este documento debe remitirse a seceina@unizar.es dentro del plazo de depósito)

TRABAJOS DE FIN DE GRADO / FIN DE MÁSTER

D./Dña. **Andrés Gonzalo Borrego**,

en aplicación de lo dispuesto en el art. 14 (Derechos de autor) del Acuerdo de 11 de septiembre de 2014, del Consejo de Gobierno, por el que se aprueba el Reglamento de los TFG y TFM de la Universidad de Zaragoza,

Declaro que el presente Trabajo de Fin de Estudios de la titulación de

Grado en Ingeniería Electrónica y Automática



(Título del Trabajo)

Sensibilidad del Predictor de Smith respecto de desviaciones en la identificación del retardo,

Sensitivity of Smith Predictor Performance to time-delay estimation errors.

es de mi autoría y es original, no habiéndose utilizado fuente sin ser citada debidamente.

Zaragoza, 18 de Junio de 2022



Fdo: **Andrés Gonzalo Borrego**

Sensibilidad del Predictor de Smith respecto
de desviaciones en la identificación del retardo.

RESUMEN

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es analizar el comportamiento del Predictor de Smith (PS) ante pequeñas desviaciones en la identificación del retardo. El análisis abarcará una casuística de sistemas con retraso puro bucle cerrado que comprenderá los más comunes.

A lo largo de este documento se abordarán distintos sistemas de primer y segundo orden con retardo puro, de forma que primeramente se analizará su comportamiento en bucle cerrado, sin Predictor de Smith. A continuación se introducirá el Predictor de Smith en condiciones ideales (es decir, con el retardo perfectamente identificado), analizando su comportamiento y en especial su estabilidad. Finalmente, se analizará el impacto que supone en las prestaciones del Predictor de Smith la introducción de una pequeña desviación en la identificación del retardo (“Predictor de Smith Real”).

Se obtendrán conclusiones del análisis realizado anteriormente, reflexionando acerca de la aplicabilidad de esta técnica a los diversos sistemas bajo estudio.

Es importante señalar que, a diferencia de otros estudios realizados sobre la cuestión que nos ocupa, todo el análisis se realizará por medio del criterio de Nyquist. Es decir, usando en todo momento un razonamiento eminentemente gráfico.

Índice

1.	Introducción.....	14
2.	Objetivos y metodología	18
3.	Sistema de primer orden.	19
3.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado	19
3.2	Predictor de Smith ideal.....	22
3.3	Predictor de Smith real.....	25
3.3.1	$\delta = 0.01$	27
3.3.2	$\delta = 0.05$	30
3.3.3	$\delta = 0.1$	30
3.4	Conclusión	31
4.	Sistema de primer orden completo	32
4.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado	32
4.2	Predictor de Smith ideal.....	34
4.3	Predictor de Smith Real	36
4.3.1	$\delta = 0.01$	38
4.3.2	$\delta = 0.05$	38
4.3.3	$\delta = 0.1$	38
4.4	Conclusión	39
5.	Primer orden completo + PI.....	40
5.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado	40
5.2	Predictor de Smith ideal.....	45
5.3	Predictor de Smith realista.....	47
5.3.1	Para $\delta = 0.01$	49
5.3.2	Para $\delta = 0.05$	49
5.3.3	Para $\delta = 0.1$	50

5.3.4	Para $\delta = 0.5$ (Caso excepcional).....	50
5.3.5	Para $\delta = 1$ (Caso excepcional).....	51
5.4	Conclusión.....	51
6.	Integrador	52
6.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado.....	52
6.2	Predictor de Smith ideal.....	55
6.3	Predictor de Smith realista.....	57
6.3.1	Para $\delta = 0.01$	60
6.3.2	Para $\delta = 0.05$	61
6.3.3	Para $\delta = 0.1$	61
6.4	Conclusión.....	62
7.	Sistema de segundo orden simple	63
7.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado.....	63
7.2	Predictor de Smith ideal.....	68
7.3	Predictor de Smith real.....	72
7.3.1	$\delta = 0.01$	74
7.3.2	$\delta = 0.05$	76
7.3.3	$\delta = 0.1$	77
7.4	Conclusión.....	79
8.	Sistema de segundo orden con un polo en el origen.....	80
8.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado.....	80
8.2	El predictor de Smith ideal	84
8.3	El predictor de Smith realista	87
8.3.1	$\delta = 0.01$	89
8.3.2	$\delta = 0.05$	90
8.3.3	$\delta = 0.1$	92

8.4	Conclusión	93
9.	Sistema de segundo orden con cero	94
9.1	El efecto del retraso puro en bucle cerrado.	94
9.2	El predictor de Smith ideal.	98
9.3	Predictor de Smith real.....	102
9.3.1	$\delta = 0.01$	106
9.3.2	$\delta = 0.05$	107
9.3.3	$\delta = 0.1$	108
10.	Conclusión	109
11.	Linkografía y Bibliografía	113
11.1	Linkografía	113
11.2	Bibliografía.....	113
12.	Anexos	114

Índice de gráficas

Gráfica 1. Respuesta de un sistema de primer orden simple ante una entrada escalón.	14
Gráfica 2. Respuesta de un sistema de primer orden simple con retardo.	15
Gráfica 3: Comparación DdB de un sistema con retardo y sin retardo.	16
Gráfica 4: Comparación respuesta escalón de un sistema con retardo y sin retardo.	16
Gráfica 5: DN de un sistema de primer orden simple sin retardo.	20
Gráfica 6: Representación de $\tan^{-1}(\omega\tau_w - T_w) + 180^\circ$, con el fin de obtener el primer corte con el semieje negativo de abscisas.	21
Gráfica 7. DN del sistema de primer orden simple con retardo.	22
Gráfica 8. Respuesta ante una entrada escalón del sistema de primer orden con retardo.	22
Gráfica 9: Diagrama de Nyquist del predictor de Smith ideal.	24
Gráfica 10: Respuesta escalón del predictor de Smith ideal.	24
Gráfica 11: Influencia de el error de estimación. Para una $K=25$	27
Gráfica 12: Comportamiento de un primer orden simple con PS y desviación en la estimación del 1%.	28
Gráfica 13: Comportamiento de un primer orden simple con PS y desviación en la estimación del 1%.	28
Gráfica 14: El DN, no alcanza el punto crítico para valores de la ganancia menores a 150.	29
Gráfica 15: Estabilidad para valores de la ganancia menores a 150.	29
Gráfica 16: Comprobación de la inestabilidad mediante el criterio de Nyquist.	30
Gráfica 17: Comportamiento de un sistema de primer orden con PS y desviación del 5%.	30
Gráfica 18: Comprobación de la inestabilidad mediante el criterio de Nyquist.	31
Gráfica 19: DN para el sistema de primer orden con PS y una desviación del 10%.	31
Gráfica 20: Comportamiento para un sistema de primer orden completo con y sin retardo.	33
Gráfica 21: DN con retardo.	34
Gráfica 22: Respuesta con retardo.	34
Gráfica 23: Oscilaciones a altas frecuencias.	35
Gráfica 24: Diagrama de Nyquist Predictor de Smith Ideal.	36
Gráfica 25: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.01.	38
Gráfica 26: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.05.	38
Gráfica 27: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.1.	38
Gráfica 29: Respuesta sistema de primer orden completo + PI sin retardo.	41
Gráfica 30: Comparación Diagrama de Nyquist exacto con la aproximación de Padé de orden 6.	42
Gráfica 31: Diagrama de Nyquist, sistema con retardo y sistema sin retardo.	43

Gráfica 32: Diagrama de Nyquist sistema con retardo.	44
Gráfica 33: Respuesta escalón, sistema con retardo.	44
Gráfica 34: Diagrama de Nyquist Predictor de Smith ideal.	46
Gráfica 35: Respuesta escalón unitario del Predictor de Smith Ideal.	47
Gráfica 36: Aproximación de Padé de orden 6.	48
Gráfica 37: Aproximación de Padé de orden 24.	48
Gráfica 38: Aproximación de Padé de orden 32.	48
Gráfica 39: Comportamiento de primer orden + PI con PS con y una desviación del 1%.	49
Gráfica 40: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 5%.	49
Gráfica 41: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 10%.	50
Gráfica 42: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 50%.	50
Gráfica 43 Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 50% y $K=3$	51
Gráfica 44: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 100%.	51
Gráfica 45: Diagrama de Nyquist de un integrador sin retardo.	53
Gráfica 46 Diagrama polar integrador con retardo.	53
Gráfica 47: Aproximación de Padé de orden 6.	54
Gráfica 48: Diagrama de Nyquist de la cadena directa del integrador con retardo.	55
Gráfica 49: Respuesta escalón del integrador en bucle cerrado.	55
Gráfica 50: Comportamiento del Predictor de Smith ideal.	57
Gráfica 51: Efecto de la estimación del retardo. Para una ganancia de 25.	59
Gráfica 52: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,01.	60
Gráfica 53: Diagrama de Nyquist con un desfase del 1%.	60
Gráfica 54: Respuesta escalón del Predictor de Smith con un desfase del 1%.	60
Gráfica 55: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,05.	61
Gráfica 56: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,15.	61
Gráfica 57: Diagrama polar del sistema de primer orden simple sin retardo.	65
Gráfica 58: Representación del argumento, con el objetivo de obtener el primer corte en el semieje negativo de abscisas.	66
Gráfica 59: Diagrama de Nyquist, segundo orden simple con retardo.	67
Gráfica 60: Comparación sistema con retardo con aproximación de Padé.	67
Gráfica 61: Respuesta a entrada escalón de un sistema de segundo orden con retardo.	68
Gráfica 62: Diagrama de Bode, donde se muestra las oscilaciones del módulo.	69

Gráfica 63: DN del sistema de segundo orden con el predictor de Smith ideal.....	69
Gráfica 64: Respuesta escalón de un sistema de segundo orden con PS ideal.	70
Gráfica 65: Comprobación de la aproximación de Padé.....	70
Gráfica 66: Diagrama de Nyquist del sistema de segundo orden con Predictor de Smith ideal.....	71
Gráfica 67: Diagrama de Nyquist del sistema de segundo orden con Predictor de Smith ideal.....	71
Gráfica 68: Diagrama de Bode del Predictor de Smith con desviaciones en la estimación.	72
Gráfica 69: Diagrama de Nyquist con la estructura del Predictor de Smith con desviaciones.	72
Gráfica 70: Comprobación de la aproximación de Padé.....	73
Gráfica 71: Respuesta entrada escalón mediante SIMULINK.....	73
Gráfica 72: Respuesta de un sistema de segundo orden con PS y un error en la estimación del 1%.	74
Gráfica 73: Diagrama de Nyquist, con un error en la estimación de un 1%	74
Gráfica 74: Aproximación de Padé de orden 12.	75
Gráfica 75: Comportamiento del PS con una desviación del 1% y ganancia 700.	75
Gráfica 76: Respuesta escalón del PS con una desviación del 5% y ganancia 200	76
Gráfica 77: Diagrama de Nyquist, del PS con desviación del 5% y ganancia de 200.	76
Gráfica 78: Diagrama de Nyquist, del PS con desviación del 5% y ganancia de 190.....	77
Gráfica 79: Respuesta escalón del PS con desviación del 5% y ganancia de 190.	77
Gráfica 80: Respuesta escalón del PS con desviación del 10% y ganancia de 45.	78
Gráfica 81: DN del sistema de segundo orden con PS, una desviación del 10% y ganancia de 45.	78
Gráfica 82: DN del sistema de segundo orden con PS, una desviación del 10% y ganancia de 40.	79
Gráfica 83: Respuesta de un sistema de segundo orden con PS y una desviación del 10% y $K=40$	79
Gráfica 86: DN, para el sistema de segundo orden con un polo en el origen y sin retardo.	80
Gráfica 87: Respuesta del sistema segundo orden con un polo en el origen y sin retardo.	81
Gráfica 88: DN, del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo.....	81
Gráfica 89: Diagrama de Nyquist, cálculo de la frecuencia.....	82
Gráfica 90: DN de la aproximación de Padé junto con el retardo.	83
Gráfica 91: DN, del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo.....	83
Gráfica 92: Respuesta del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo en bucle cerrado.....	83
Gráfica 93: Oscilaciones en el Diagrama de Bode.....	84
Gráfica 94: DN del sistema de segundo orden con polo en el origen con PS.....	85
Gráfica 95: Aproximación de Padé comparada con el del retardo puro.	85
Gráfica 96: Respuesta del sistema de segundo orden con polo en el origen y PS ideal.	86

Gráfica 97: DN para el sistema de segundo orden con polo en el origen con el PS ideal y $K=100$.	86
Gráfica 98: Respuesta ante una entrada escalón del sistema de segundo orden con un polo en el origen obtenida por SIMULINK.	87
Gráfica 99: Diagrama de Bode, oscilaciones en el módulo.	87
Gráfica 100: DN del sistema de segundo orden con polo en el origen y PS con desviaciones en la estimación del retardo.	88
Gráfica 101: Comparación aproximación de Padé con retardo puro.	88
Gráfica 102: Respuesta ante una entrada escalón del sistema de segundo orden con un polo en el origen, desviación del 1% y una ganancia de 194.	89
Gráfica 103: DN del sistema de segundo orden con un polo en el origen para una desviación del 1% y una ganancia de 194.	89
Gráfica 104: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 1% y una ganancia de 194.	90
Gráfica 105: Respuesta escalón de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 50.	90
Gráfica 106: DN de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 50.	91
Gráfica 107: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 45.	91
Gráfica 108: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 10% y una ganancia de 11.	92
Gráfica 109: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 10% y una ganancia de 10.	92
Gráfica 110: Nyquist del sistema sin retardo	95
Gráfica 111: Representación del argumento, con el objetivo de obtener el primer corte en el semieje negativo de abscisas.	96
Gráfica 112: Diagrama de Nyquist.	97
Gráfica 113: Comportamiento sistema en bucle cerrado, ante entrada escalón.	98
Gráfica 114: Diagrama de Bode del sistema de segundo orden con cero y PS.	99
Gráfica 115: Exactitud de la aproximación de Padé con la del retardo.	99
Gráfica 116: Diagrama de Nyquist.	101
Gráfica 117: Respuesta escalón al Predictor de Smith ideal.	101
Gráfica 118: Comportamiento aproximación de Padé.	102
Gráfica 119: Efecto al cometer un error en la estimación del retardo	105
Gráfica 120: DN del sistema de segundo orden con cero, PS y desviación del 1%.	106
Gráfica 121: Respuesta del sistema de segundo orden con cero, PS y desviación del 1%.	106

Índice de figuras

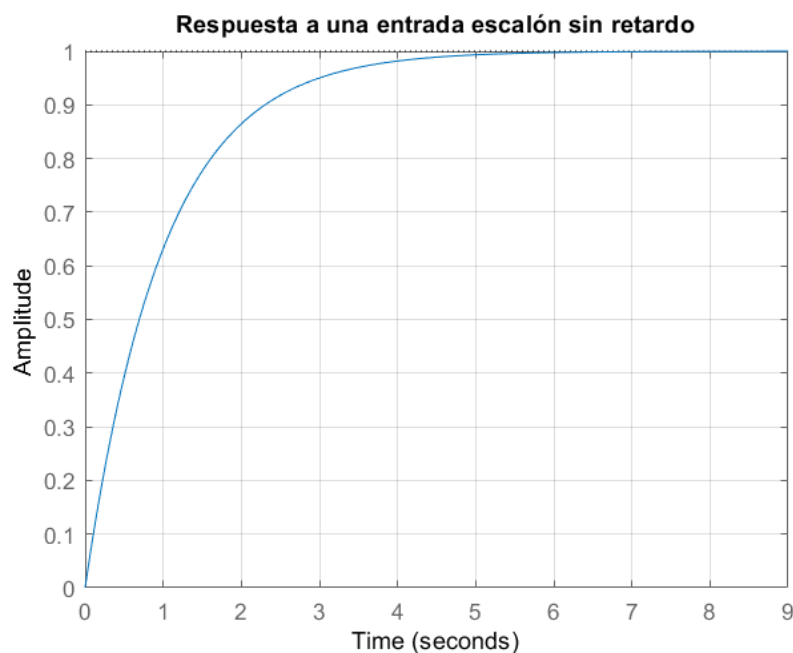
Figura 1: Sistema en bucle abierto.	15
Figura 2: Sistema en bucle cerrado.	16
Figura 3: Estructura del Predictor de Smith.	16
Figura 4: Estructura del predictor de Smith simplificada.	17
Figura 5: sistema en bucle cerrado.	40
Figura 6: Sistema de segundo orden en bucle cerrado.	63
Figura 7: Estructura del predictor de Smith.	68
Figura 8: Sistema en bucle cerrado.	94
Figura 9: Resumen de los resultados obtenidos.	112
Figura 10: Diagrama polar.	115
Figura 11: Diagrama polar, de distintas funciones de transferencias.	116

1. *Introducción*

Los sistemas con retardos aparecen en situaciones en las se tienen tiempos de procesamiento considerables (procesamiento de control o tratamiento de señales), situaciones en las que se da un transporte de materia y/o energía, en mediciones, etc. Ejemplos de ellos son: Sistemas de control en cuyos lazos hay sensores como cámaras, columnas de destilación, procesos industriales, procesos químicos, térmicos...por mencionar algunos casos.

Un sistema que presenta un retardo implica que desde que actuamos sobre el sistema, hasta que la variable comienza a responder transcurre un tiempo T.

Es decir, si se supone un sistema, $G_0(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$, donde este puede representar un circuito RC, un sistema térmico o algo similar. Su comportamiento ante una entrada escalón es:

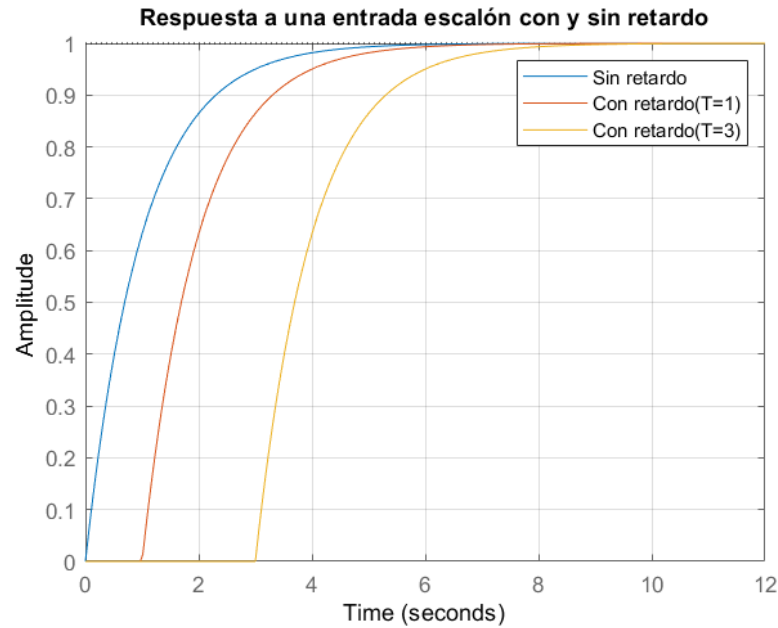


Gráfica 1. Respuesta de un sistema de primer orden simple ante una entrada escalón.

Pero si al mismo sistema se le añade un retardo de T segundos, es decir:

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} = \frac{1}{\tau s + 1}e^{-Ts}$$

Para distintos valores de T, la respuesta que se obtiene es:



Gráfica 2. Respuesta de un sistema de primer orden simple con retardo.

Como se puede observar, en un sistema que está en bucle abierto (Figura 1), es decir, en el que actuó y obtengo su respuesta, al añadir un retardo, se comportará de la misma forma pero respondiendo T segundos más tarde. Por lo que, en estos casos, un retardo puro, no va a afectar a la estabilidad.

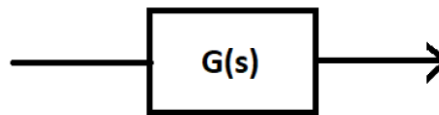


Figura 1: Sistema en bucle abierto.

Pero en cadena cerrada o si se prefiere bucle cerrado (Figura 2), es decir, al añadir realimentación, ya no ocurre esto, pues el retardo aparece en el denominador. Lo que ya no solamente provoca un retraso en la respuesta, sino que al estar también en el denominador, modifica los polos del sistema y, por tanto, puede afectar a la estabilidad. Señalar que, pese a que la ecuación característica es trascendente, es posible aproximar el término exponencial por medio de la aproximación de Padé, por lo que puede seguir hablándose en términos de polos y ceros.

$$G(s) = \frac{\frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ts}}{1 + \frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ts}} = \frac{k * e^{-Ts}}{\tau s + 1 + k * e^{-Ts}}$$

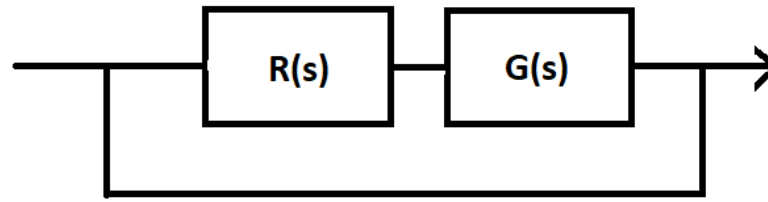
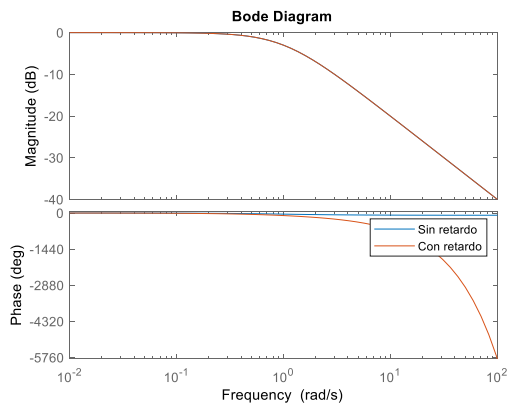
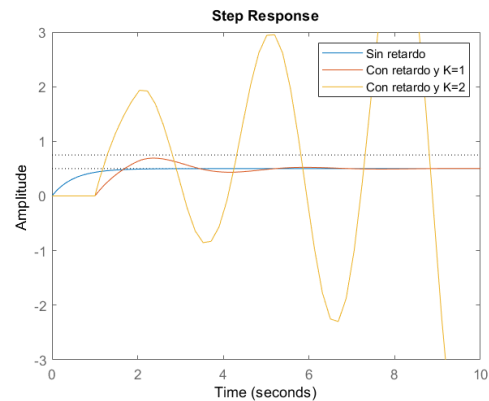


Figura 2: Sistema en bucle cerrado.

Otra forma de abordar el análisis de este tipo de sistemas es a través del diagrama de Bode (DdB) (Gráfica 3), donde el margen de fase puede llegar a hacerse negativo en el caso del sistema con retardo, y de esta forma afectar a la estabilidad de mi sistema (Gráfica 4).



Gráfica 3: Comparación DdB de un sistema con retardo y sin retardo.



Gráfica 4: Comparación respuesta escalón de un sistema con retardo y sin retardo.

A la vista de la facilidad con la que ese tipo de sistemas puede inestabilizarse, el control de sistemas con retraso puro, resulta casi siempre dificultoso. Una de las soluciones que se propone es emplear el Predictor de Smith, que es una técnica basada en la compensación del tiempo muerto, es decir, compensar el problema de los retardos matemáticamente.

Consideremos como punto de partida un proceso con retraso puro en lazo cerrado (Figura 2). Para compensar el retardo se añade un modelo dado por G_0 y $e^{-\lambda s}$, quedando de la forma:

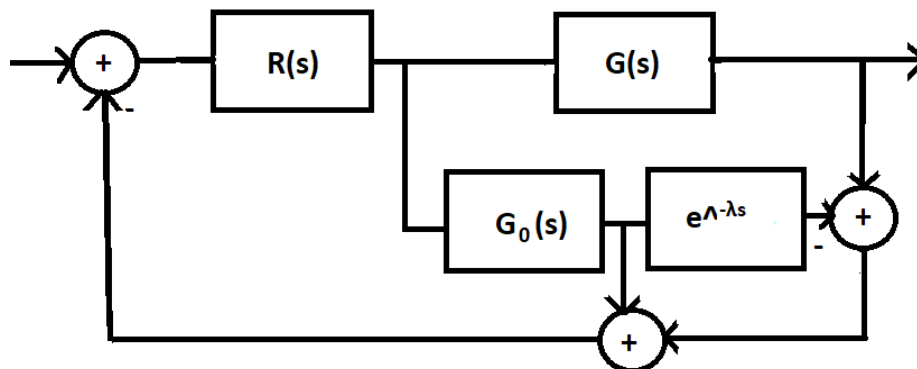


Figura 3: Estructura del Predictor de Smith.

Donde $G_n = H(s)$ representa la dinámica de mi proceso, como si este no tuviera ningún retraso y $e^{-\lambda s}$ representa el retardo. Si sustituimos, y realizamos los cálculos, la función de transferencia del sistema queda de la forma:

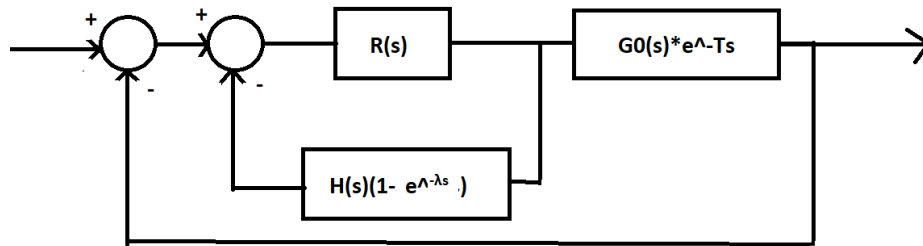


Figura 4: Estructura del predictor de Smith simplificada.

$$CD(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s)(1 - e^{-Ts})}$$

$$FdT(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s)(1 - e^{-Ts}) + R(s)G_0(s)e^{-Ts}} =$$

$$\frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s) - R(s)G_0(s)e^{-Ts} + R(s)G_0(s)e^{-Ts}} = \frac{R(s)G_0(s)}{1 + R(s)G_0(s)} e^{-Ts}$$

Como se puede observar, al aplicar la estructura del Predictor de Smith, el retardo queda únicamente en el numerador (Ecuación anterior), de forma que conseguimos que el retardo (que seguirá estando presente), no afecte a la estabilidad del sistema.

Este Predictor de Smith es capaz de predecir lo que va a suceder en la salida real en base al modelo G_0 sin retardo, y el retardo T , pues este es capaz de calcular sin error, que va a suceder. Y el controlador se consigue anticipar un tiempo igual al retraso. Pero la clave del Predictor reside en la correcta identificación de G_0 y del retardo λ , pero, como se trata de tiempos, es fácil cometer un error en la estimación del retardo, entonces... ¿Qué sucedería si se comete un error en la estimación, es decir, el retardo es la suma entre el retardo y una desviación que se ha cometido, $\lambda = T + \delta$?

La respuesta a esta pregunta, es la que se va a resolver durante este Trabajo Fin de Grado.

2. Objetivos y metodología

El Predictor de Smith (PS) es la estrategia de control más extendida cuando se trata de gobernar sistemas que presentan retardos puros. El objetivo del trabajo es analizar, por medio del criterio de Nyquist, el impacto en las prestaciones del control basado en el PS, ante la incorrecta identificación del retardo del sistema que va a ser controlado. Se analizará el efecto del error en la identificación del retardo para una casuística diversa que incluye los sistemas más habituales, permitiendo obtener conclusiones acerca de las limitaciones del uso de esta técnica.

Para cada caso de estudio, se realizarán cálculos numéricos y representaciones gráficas mediante MATLAB y SIMULINK, analizando el efecto del retardo en el control, el efecto del Predictor de Smith teórico y el efecto de un Predictor de Smith con un pequeño error en la identificación del retardo que realmente presenta el sistema a controlar.

En resumen, se analizarán diferentes casos prácticos, y se estudiará el comportamiento de un Predictor de Smith teórico (sin error en la estimación del retardo), y el de un Predictor de Smith Real (con error en la estimación del retardo), con el objetivo de poder hacer una crítica sobre el Predictor de Smith, la cual será la conclusión de este trabajo.

Los sistemas que van a ser analizados son aquellos que en su cadena directa (o bucle abierto) presentan las siguientes funciones de transferencia:

1. Sistema de primer orden.
2. Sistema de primer orden completo.
3. Sistema de primer orden + PI con cancelación.
4. Integrador.
5. Sistema de segundo orden.
6. Sistema de segundo orden con un polo en cero.
7. Sistema de segundo orden completo.

Recomendaciones de lectura: Debido a la extensión del Trabajo fin de grado y a la similitud en los procedimientos empleados para cada uno de los apartados, al lector se le recomienda leer con más detalle los apartados “3.Sistema de primer orden”, “4.Sistema de primer orden completo” y “10.Conclusión”. Con ello se consigue que el lector ya tenga una idea clara de lo que se presenta en este TFG.

3. Sistema de primer orden.

Supóngase un primer sistema de primer orden con retraso puro controlado con un regulador proporcional, igual al que se ha mencionado anteriormente (1.Introducción):

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} = K \frac{1}{1 + \tau s} e^{-Ts}$$

Para este sistema, se va a hacer un estudio de su estabilidad en bucle cerrado, del Predictor de Smith Teórico y del Predictor de Smith cometiendo un error en la estimación del retardo.

3.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado

Se comienza añadiendo una realimentación, quedando el sistema en bucle cerrado (Figura 2). Si se obtiene la función de transferencia de ambos sistemas (sistema con retardo, y sistema sin retardo):

- Función de transferencia del sistema sin el retardo:

$$FdT(s) = \frac{\frac{K}{\tau s + 1}}{1 + \frac{K}{\tau s + 1}} = \frac{K}{\tau s + 1 + K}$$

- Función de transferencia del sistema con el retraso:

$$FdT(s) = \frac{\frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ts}}{1 + \frac{K}{\tau s + 1} e^{-Ts}} = \frac{K * e^{-Ts}}{\tau s + 1 + K * e^{-Ts}}$$

Como se ha mencionado anteriormente, la presencia del retardo en el denominador puede afectar a la estabilidad de mi sistema, debido a que puede modificar los polos del sistema.

Con el diagrama de Nyquist (DN) del sistema en bucle abierto (o si se prefiere de la cadena directa), podemos estudiar la estabilidad en BC. Por tanto siguiendo con este ejemplo:

Empezamos haciendo un análisis breve para el sistema sin retardo, sustituyendo s por jw , y analizando su comportamiento a bajas y altas frecuencias:

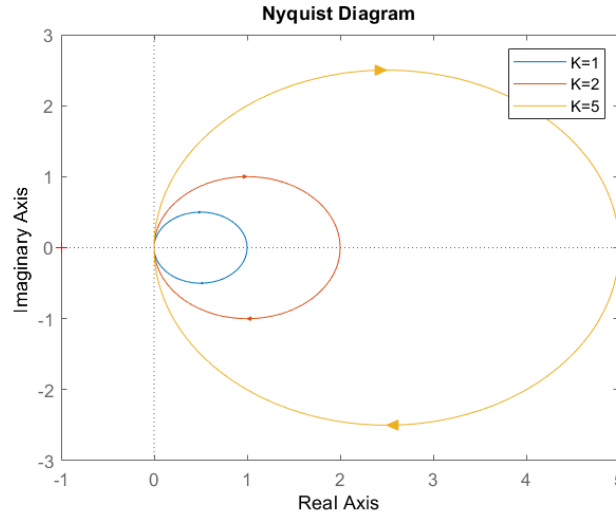
- T1 (Tramo 1): A frecuencias bajas.

$$\lim_{w \rightarrow 0} CD(jw) = \lim_{w \rightarrow 0} K \frac{1}{1 + \tau jw} = \begin{cases} |CD(jw)| = K \\ Arg(CD(jw)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2 (Tramo 2): A altas frecuencias.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} CD(jw) = \lim_{w \rightarrow \infty} K \frac{1}{1 + \tau jw} = \begin{cases} |CD(jw)| = 0 \\ Arg(CD(jw)) = -90^\circ \end{cases}$$

Por tanto el diagrama de Nyquist, partirá del valor K, y tenderá a cero, sin cortar en ningún momento el semieje negativo de abscisas. Como se puede observar a continuación, para distintos valores de K:



Gráfica 5: DN de un sistema de primer orden simple sin retardo.

Como se ha realizado la simulación para una $\tau = 1$, solo presenta un único polo, en -1, por tanto, el Criterio de Nyquist nos dice que el sistema es estable.

Repitiendo el análisis para el sistema con retardo:

$$CD(jw) = G_0(jw)e^{-Tjw} = K \frac{1}{1 + \tau jw} e^{-Tjw} = K \frac{(1 - \tau jw)}{(1 + \tau jw)(1 - \tau jw)} e^{-Tjw} =$$

$$K \frac{(1 - \tau jw)}{1 + \tau^2 w^2} e^{-Tjw} \begin{cases} |CD(jw)| = |K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 w^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(-\tau w) - Tw \end{cases}$$

Analizamos por tramos:

- T1: A frecuencias bajas, el DN partirá de K con fase 0°

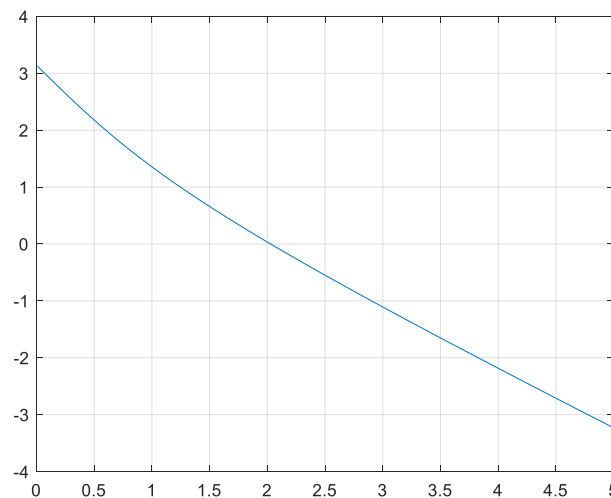
$$\lim_{w \rightarrow 0} CD(jw) = \lim_{w \rightarrow 0} K \frac{1}{1 + \tau w} e^{-Tjw} = \begin{cases} |CD(jw)| = K \\ Arg(CD(jw)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias, el DN tiende a 0 con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} CD(jw) = \lim_{w \rightarrow \infty} K \frac{1}{1 + \tau w} e^{-Tjw} = \begin{cases} |CD(jw)| = 0 \\ Arg(CD(jw)) = -\infty \end{cases}$$

Por tanto como la magnitud disminuye de forma monótonica a partir del valor de K y el ángulo de fase disminuye de forma monótonica e indefinida, el diagrama polar de la función de transferencia determinada es una espiral. Ello puede abrir una puerta a la inestabilización debido a que dicha espiral, provocada por el retardo, intersecta en el semieje negativo de abscisas.

- T3 (Tramo 3): Lo siguiente que hay que analizar es el primer punto de corte con el semieje negativo de abscisas. El cual se produce cuando $\tan^{-1}(-\tau w) - Tw = -180^\circ$. Si representamos dicha función (Con $T=1$ y $\tau=1$):



Gráfica 6: Representación de $\tan^{-1}(-\tau w) - Tw + 180^\circ$, con el fin de obtener el primer corte con el semieje negativo de abscisas.

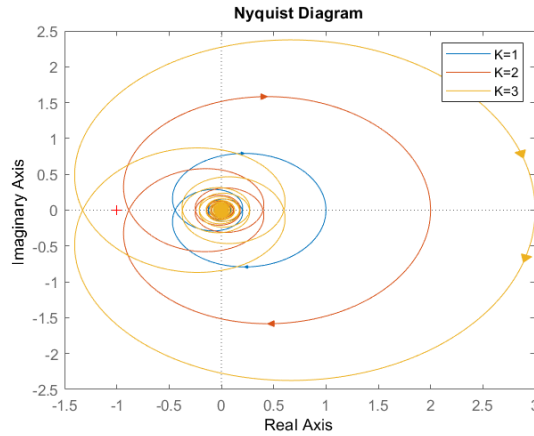
Cuando $w = 2.0288$, se produce el primer corte con el semieje negativo de abscisas. Este valor se sustituye en el módulo, obteniendo:

$$|CD(jw)| = |1||K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + 1^2 2.0288^2}} \right| = \frac{K}{2.2618} = K * 0.44211$$

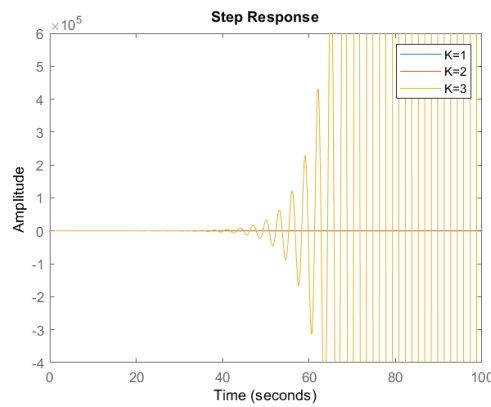
Por tanto si el modulo $|G(jw)|$ es mayor que 1, eso significa que estará dando una vuelta en sentido antihorario al punto crítico -1. Esto se produce para un valor de $K = 2.2618$.

El criterio de estabilidad de Nyquist establece que “para que un sistema sea estable, el número de polos en el semiplano derecho tiene que ser igual al número de vueltas en sentido antihorario, de lo contrario, el sistema será inestable.” Como el sistema no presenta ningún polo inestable, cuando alcance el punto crítico -1 y esto, se produce cuando $K \Rightarrow 2.2618$.

A continuación se puede observar una representación gráfica para una $T = 1$, y distintos valores de K. ($K = 1$, $K = 2$, $K = 3$)



Gráfica 7. DN del sistema de primer orden simple con retardo.



Gráfica 8. Respuesta ante una entrada escalón del sistema de primer orden con retardo.

Como se puede observar en el DN, cuando el sistema tiene una ganancia menor a 2.26 ($K = 2$ o $K = 1$), el sistema es estable. Pero al superar dicho valor ($K = 3$), el sistema rodea al punto crítico -1 , y el sistema se vuelve inestable (Gráfica 8).

3.2 *Predictor de Smith ideal*

Con el objetivo de estabilizar el sistema, se va a emplear la estructura del Predictor de Smith para el sistema con retardo (Figura 4).

La cadena directa del Predictor de Smith, como se ha mencionado anteriormente, queda de la siguiente forma:

$$CD(S) = \frac{R(s)G(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G(s) - R(s)G(s)e^{-(T+\delta)s}}$$

Que particulariza para este caso:

$$CD(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{1 + K + \tau s - Ke^{-Ts}}$$

Como se ha hecho en el apartado anterior, analizamos el diagrama polar.

$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - Ke^{-Tj\omega}}$$

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), el diagrama polar de $CD(s)$ parte de un valor finito K y con una fase de 0° :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$): Termina en 0, con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - Ke^{-Tj\omega}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

La presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo (únicamente a la fase, indicando que a altas frecuencias, el DN va a exhibir un comportamiento cíclico en forma de espiral). En cambio, la presencia de dicho factor en el denominador si afecta al módulo del sistema, por ello se analizan los valores máximos y mínimos de dicho módulo:

- Cuando $\omega T = (2N)\pi$, siendo $e^{-Tj\omega} = 1$, tenemos un mínimo en el denominador (los términos que contienen a la K se cancelan), lo que hace que el módulo del sistema presente un máximo:

$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - K} = \frac{K}{1 + \tau j\omega} e^{-Tj\omega} \begin{cases} |CD(j\omega)| = |1||K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right| \\ Arg(CD(j\omega)) = \tan^{-1}(-\tau\omega) - T\omega \end{cases}$$

- Cuando $\omega T = (1 + 2N)\pi$, siendo $e^{-Tj\omega} = -1$, tenemos un máximo en el denominador (los términos que contienen a la K se suman), lo que hace que el módulo del sistema presente un mínimo:

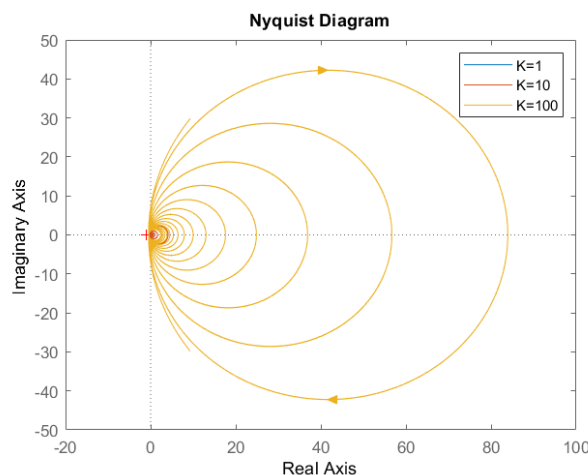
$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega + K} = \frac{K}{1 + 2K + \tau j\omega} e^{-Tj\omega} \begin{cases} |CD(j\omega)| = 1 * K * \left| \frac{1}{\sqrt{(1 + 2K)^2 + \tau^2 \omega^2}} \right| \\ Arg(CD(j\omega)) = \frac{\tau\omega}{1 + 2K} \end{cases}$$

Como estos valores extremos se producen una vez cada vuelta, con el mismo argumento y en sendos puntos del eje de abscisas (no hay desfase), solo se analizan

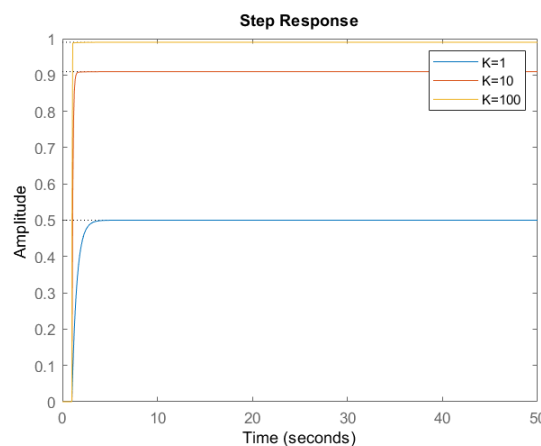
estos valores. Para el caso $w = (2N)\frac{\pi}{T}$, aunque sí que hay valores de K , donde el módulo se haga mayor que 1, este valor no preocupa, debido a que este punto va a cortar siempre en el semieje positivo de abcisas, al tratarse del extremo derecho de cada lóbulo de la espiral (*ver gráfica 9*). Sin embargo, para el caso de $w = (1 + 2N)\frac{\pi}{T}$, sí que corta en el semieje negativo de abcisas, pero su módulo siempre va a ser menor que 1, pues para una ganancia suficientemente elevada, el valor que alcanza en el primer cruce por el eje de abcisas no tiene en cuenta el término τjw (de pequeño valor en comparación con el valor de K) y por tanto solo alcanza el valor de $-0,5 \left(\frac{K}{1+2K} \right)$. De forma que en el Diagrama de Nyquist, nunca alcanzará el punto crítico.

Aplicando el Criterio de Nyquist, el sistema se va a comportar de forma estable, debido a que el número de polos inestables, es igual al número de rodeos al punto crítico, que en ambos casos es cero.

A continuación se pueden observar las gráficas, para $K = 1$, $K = 10$ y $K = 100$.



Gráfica 9: Diagrama de Nyquist del predictor de Smith ideal.



Gráfica 10: Respuesta escalón del predictor de Smith ideal.

Por tanto, el Predictor de Smith Teórico da muy buenos resultados, pues logra que el sistema con retardo puro (que era inestable para ganancias mayores que 2,26) sea estable para todo K positivo.

3.3 *Predictor de Smith real*

Como hemos visto en el apartado anterior, la eficacia del Predictor de Smith es excelente, pero esta se consigue gracias a la perfecta identificación de $H(s)$, y λ . Pero en este apartado vamos a ver qué sucedería si se ha identificado correctamente a $G_0(s)$, es decir: $H(s) = G_0(s)$, pero no así al retraso puro, es decir: $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo.

En este apartado, la cadena directa de nuestro sistema, con la estructura del Predictor de Smith Real, quedará de la siguiente forma:

$$CD(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{1 + K + \tau s - Ke^{-(T+\delta)s}}$$

Analicemos esta cuestión en detalle:

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), el diagrama polar de $CD(s)$ parte de un valor finito (K) con un ángulo de fase de 0° :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$): Termina en 0, con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - Ke^{-(T+\delta)j\omega}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Al igual que antes la presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo, pero la presencia del factor $e^{-(T+\delta)j\omega}$ en el denominador si afecta al módulo, de forma, que los valores máximos y mínimos son:

- Cuando $\omega(T + \delta) = 2N\pi$, siendo $e^{-(T+\delta)j\omega} = 1$, tenemos un mínimo en el denominador (los términos que contienen a la K se cancelan), lo que hace que el módulo del sistema presente un máximo:

$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K + \tau j\omega - K} =$$

$$\frac{K}{1 + \tau jw} e^{-Tjw} \begin{cases} |CD(jw)| = |1||K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 w^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(-\tau w) - Tw \end{cases}$$

- Cuando $w(T + \delta) = (2N + 1)\pi$, siendo $e^{-Tjw} = -1$, tenemos un máximo en el denominador (los términos que contienen a la K se suman), lo que hace que el módulo del sistema presente un mínimo:

$$CD(jw) = \frac{K e^{-Tjw}}{1 + K + \tau jw + K} =$$

$$\frac{K}{1 + 2K + \tau jw} e^{-Tjw} \begin{cases} |CD(jw)| = 1 * K * \left| \frac{1}{\sqrt{(1 + 2K)^2 + \tau^2 w^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \frac{\tau w}{1 + 2K} \end{cases}$$

El DN va a presentar una forma de espiral que tiende al origen, de forma similar a lo que venía sucediendo con el PS teórico, sólo que esta vez, debido a la incorrecta identificación del retardo, estos valores máximos y mínimos ya no corresponden con múltiplos de π , sino con los valores: $(1+2N)\pi/(1+\delta/T)$ y $2N\pi/(1+\delta/T)$, es decir, cada uno de los valores extremos se producen con T/δ argumentos diferentes. Por tanto, para que ahora el sistema sea estable, ambos módulos deben de ser menor que 1. Se trata por tanto de encontrar el módulo a la frecuencia para la cual, el primer máximo alcanza el semieje negativo de abcisas:

Como hemos visto anteriormente, la frecuencia para la cual se dan los máximos es:

$$w(T + \delta) = 2N\pi \rightarrow w = \frac{2N\pi}{T + \delta}$$

¿En cuantas vueltas (lóbulos) se alcanza el semieje negativo de abcisas? Contando con que a frecuencias suficientemente elevadas, el aporte de fase correspondiente al término $\frac{K}{1+\tau jw}$ es de -90° , y que en 360° se dan T/δ lóbulos, puede concluirse que el número de lóbulos necesario para alcanzar el semieje negativo de abcisas es $N=T/(4\delta)$. Sustituyendo dicho valor en la ecuación anterior, podemos obtener el valor del módulo a dicha frecuencia:

$$w = \frac{2N\pi}{T + \delta} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}$$

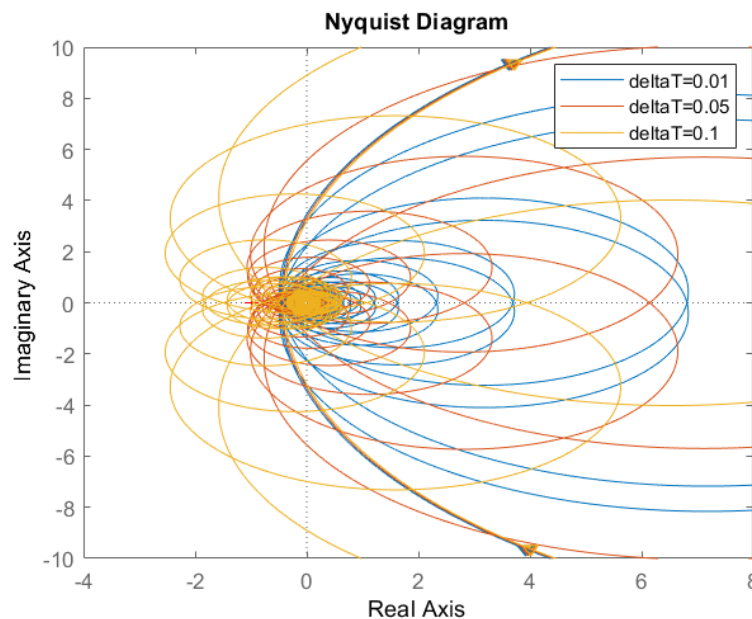
Sustituyendo w en la expresión del módulo:

$$|CD(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} = \frac{K}{\sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}}$$

Para este caso, los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo. Por ello, si se supera el punto crítico -1, el sistema se comportará de forma inestable, por lo que dicho módulo debe ser inferior a la unidad. Por consiguiente, el valor máximo de K que hace al sistema estable es:

$$K_{max} = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}$$

Como puede verse, el máximo valor de K que asegura la estabilidad depende varios factores, si bien aquí vamos a poner el foco en la dependencia de δ , por lo que mantendremos $T=1$ y $\tau=1$.



Gráfica 11: Influencia de el error de estimación. Para una $K=25$.

A continuación, se va a particularizar la expresión anterior para distintos valores de δ :

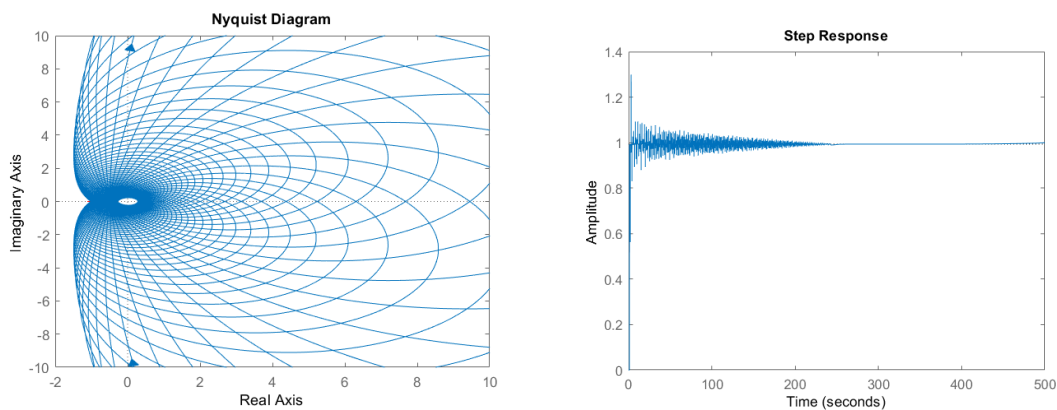
3.3.1 $\delta = 0.01$

En el caso de que se cometa un error en la estimación del retardo de un 1%, podemos calcular para qué valor de K el sistema se haría inestable. Aplicando la fórmula anterior:

$$K_{max} = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2} = \sqrt{1 + 1^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.01 * (T + 0.01)} \right)^2} = 155.53$$

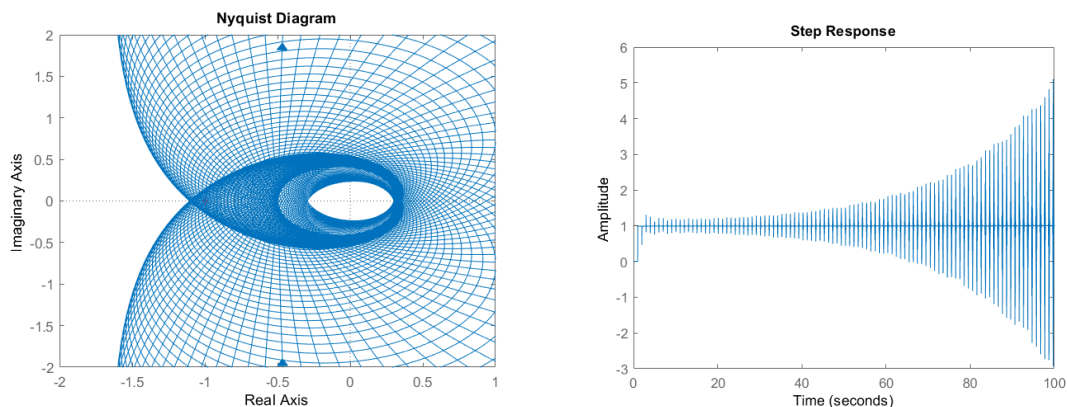
Vamos a comprobarlo mediante el Diagrama de Nyquist:

- Para un $K = 150$, se puede apreciar que el diagrama de Nyquist, no llega a alcanzar el punto crítico, y por tanto el sistema se comporta de forma estable (*Gráfica 12*).



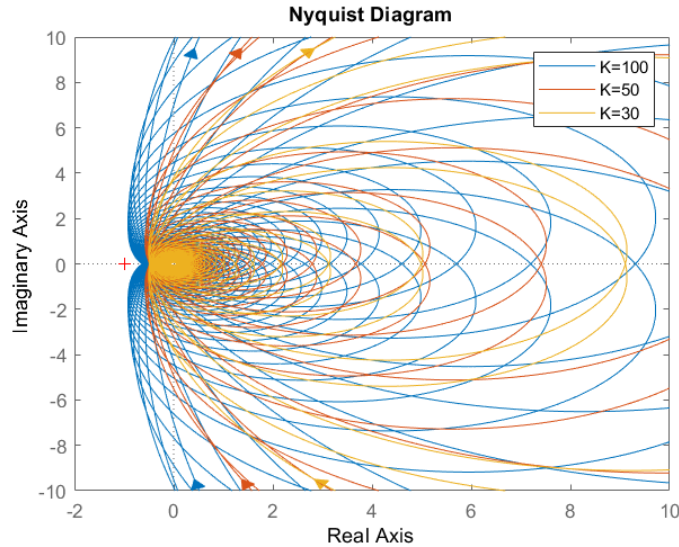
Gráfica 12: Comportamiento de un primer orden simple con PS y desviación en la estimación del 1%.

- Sin embargo, para una $K = 160$, se puede observar como alcanza el punto crítico, volviéndose el sistema inestable (*Gráfica 13*).



Gráfica 13: Comportamiento de un primer orden simple con PS y desviación en la estimación del 1%.

Par otros valores de K , distintos a los límites, el Diagrama de Nyquist queda de la forma:

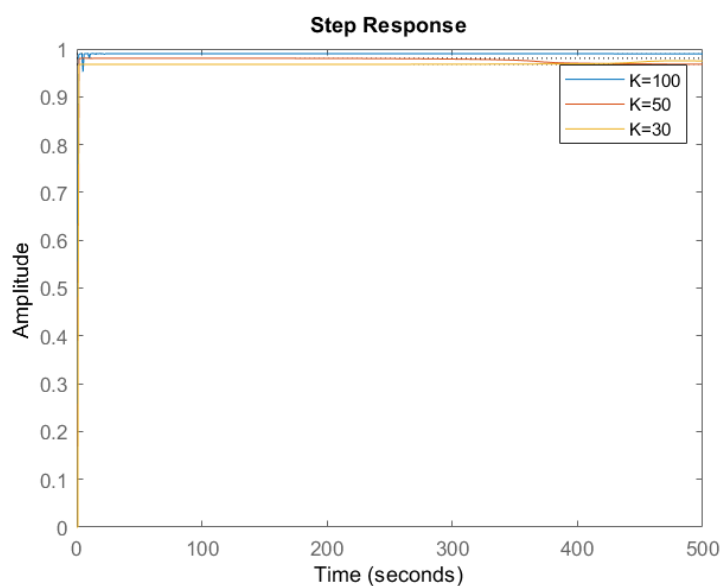


Gráfica 14: El DN, no alcanza el punto crítico para valores de la ganancia menores a 150.

Si recordamos el valor que antes no me preocupa, el de valor máximo, el de valor con módulo (que puede alcanzar un valor mayor a la unidad):

$$|CD(j\omega)| = |1||K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}} \right|$$

Debido al error en la estimación del error, se produce un desfase, y se va aproximando al eje negativo de abcisas. Pero este valor del módulo, también depende de la frecuencia y como el desfase que se comete es muy pequeño (de 0.01), la frecuencia aumenta significativamente antes de cortar con el semieje negativo de abcisas. Por ello el sistema no se vuelve inestable hasta valores de K mayores que 150.



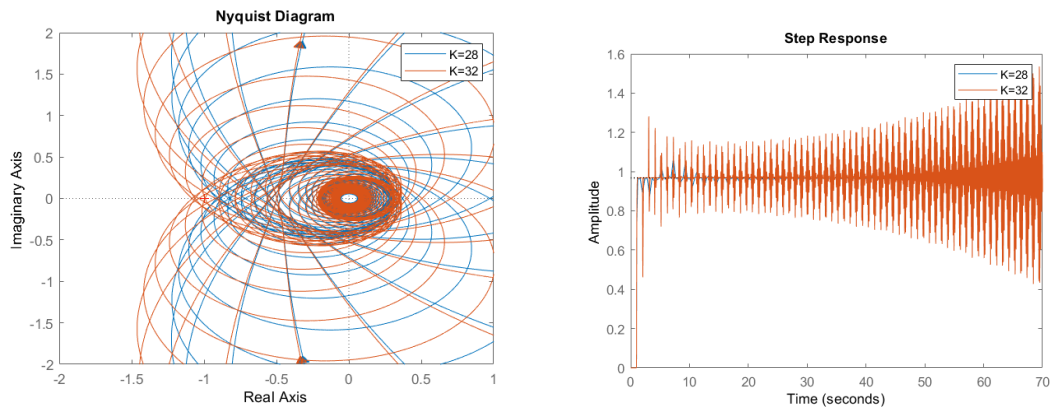
Gráfica 15: Estabilidad para valores de la ganancia menores a 150.

3.3.2 $\delta = 0.05$

Si ponemos en práctica la ecuación obtenida anteriormente, la ganancia máxima que se puede alcanzar antes de que el sistema se vuelva inestable es:

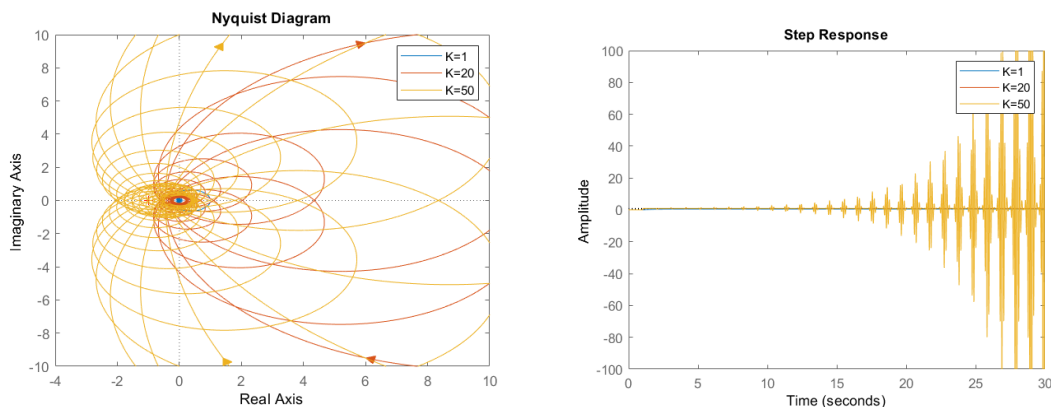
$$K_{max} = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2} = \sqrt{1 + 1^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.05 * (T + 0.05)} \right)^2} = 29,93$$

Comprobamos mediante el diagrama de Nyquist, el valor para el cual el sistema se vuelve inestable.



Gráfica 16: Comprobación de la inestabilidad mediante el criterio de Nyquist.

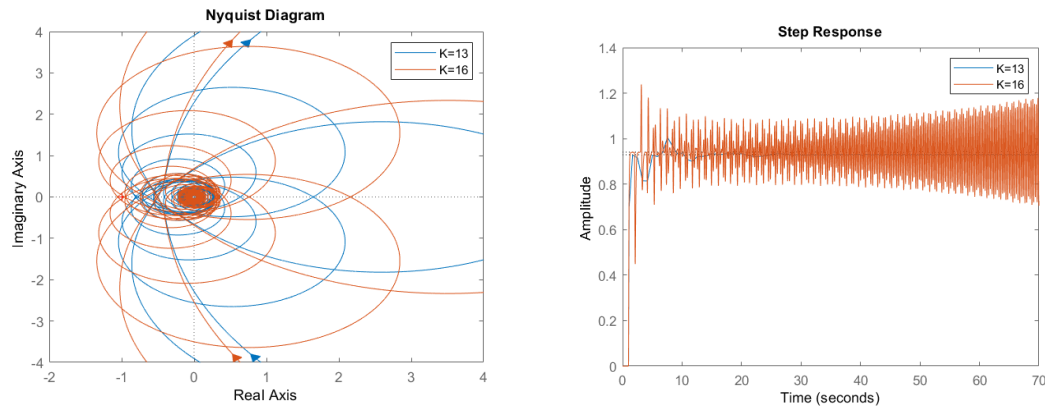
Para este caso el desfase es mayor, pues es 0.05, y la frecuencia alcanza un menor valor cuando corta con el semieje negativo. Por tanto el sistema alcanza el punto crítico con valores menores que K, y termina volviéndose inestable el sistema para valores menores. (Gráfica 17)



Gráfica 17: Comportamiento de un sistema de primer orden con PS y desviación del 5%.

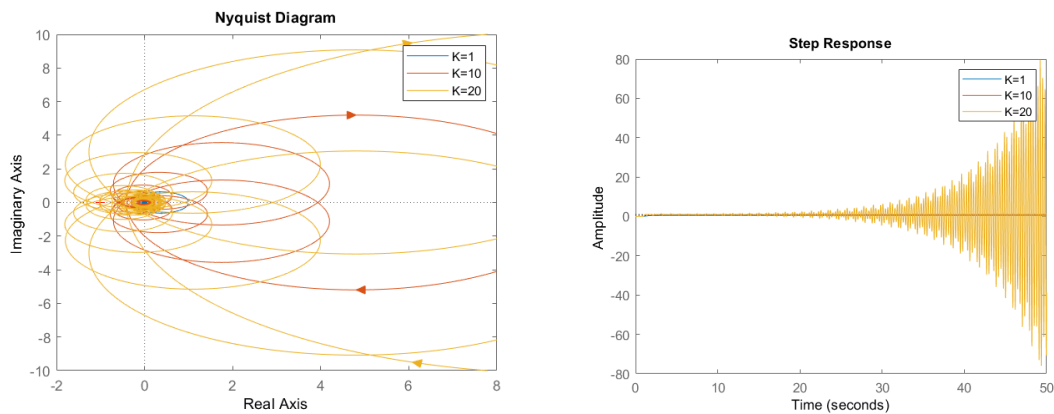
3.3.3 $\delta = 0.1$

Sustituyendo de nuevo en la ecuación pero esta vez, para una desviación de 0,1, se obtiene que el sistema se vuelve inestable para ganancias mayores que 14,31.



Gráfica 18: Comprobación de la inestabilidad mediante el criterio de Nyquist.

Para esta situación la frecuencia al llegar al semieje negativo aun es menor, debido a que el desfase es mayor. Por tanto la inestabilidad aparece para ganancias aun menores. (Como se puede observar en la siguiente gráfica).



Gráfica 19: DN para el sistema de primer orden con PS y una desviación del 10%.

3.4 Conclusión

Como conclusión para sistema, obtenemos que la inestabilidad en bucle cerrado se produce para ganancias superiores a 2.2618 (En caso de $T=1$, y $\tau = 1$), si se añade el Predictor de Smith Teórico funciona muy bien, pues se consigue la estabilidad para todos los valores de K .

En el caso de que se cometiera un error pequeño en el cálculo del retardo (alrededor del 1%), el sistema sigue siendo estable para ganancias muy elevadas. Pero, si se comete un error del 5%, al elevar la ganancia por encima de 30 se nos inestabiliza el sistema. Y el valor de la ganancia para el cual el sistema se hace inestable seguirá disminuyendo a medida que aumenta el error, de manera que para un error del 10%, se inestabiliza para una ganancia mayor que 14,31 (Como se ha obtenido en la fórmula empleada).

4. Sistema de primer orden completo

El siguiente sistema que se va a estudiar es un sistema de control en bucle cerrado (BC), en cuya cadena directa (CD) incorpora un sistema de primer orden completo con retraso puro. Dicha cadena directa puede ser el resultado de un control proporcional aplicado a un sistema de primer orden completo, o bien a un control PD aplicado a un sistema de primer orden simple. Sea como fuere, la función de transferencia de la cadena directa es:

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} = K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s} e^{-Ts}$$

4.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado

A continuación para este mismo sistema, se estudiará el comportamiento en bucle cerrado. Para ello obtenemos las funciones de transferencia del sistema con retardo y el sistema sin retardo.

- La función de transferencia sin retardo:

$$FdT(s) = \frac{K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s}}{1 + K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s}} = \frac{K * (1 + \tau_c s)}{1 + \tau s + K * (1 + \tau_c s)}$$

- La función de transferencia con el retardo queda:

$$FdT(s) = \frac{K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s} e^{-Ts}}{1 + K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s} e^{-Ts}} = \frac{K * (1 + \tau_c s) e^{-Ts}}{1 + \tau s + K * (1 + \tau_c s) e^{-Ts}}$$

Ya de un primer vistazo y en base a la experiencia del sistema anterior, se sabe que la presencia del retardo en el denominador, puede provocar la inestabilización del sistema. Lo vamos a comprobar aplicando el Criterio de Nyquist.

$$CD(j\omega) = K \frac{1 + \tau_c j\omega}{1 + \tau j\omega} e^{-Tj\omega}$$

- T1: Evaluamos a bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), y el diagrama polar de CD(s) parte de un valor finito a K con un argumento de 0° :

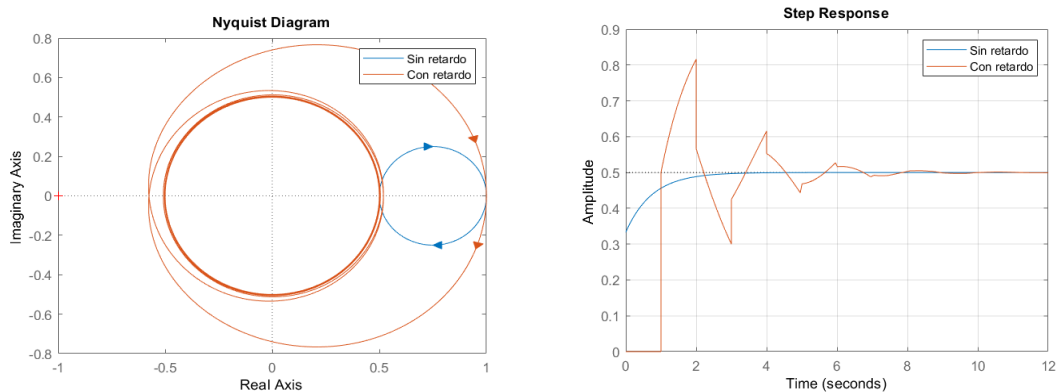
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = K \frac{1}{1} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: Evaluamos a altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$), y el diagrama polar termina alcanzando el valor $K \frac{\tau_c}{\tau}$, con un argumento de $-\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = K \frac{\tau_c}{\tau} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \frac{\tau_c}{\tau} \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Lo que supone describir repetidamente una circunferencia en torno al origen de radio $K \frac{\tau_c}{\tau}$. Es decir, esto provoca que me corte con la parte negativa, lo que va a abrir una puerta a la inestabilización del sistema.

Veamos un ejemplo del sistema con retardo (trayectoria roja) y el sistema sin retardo (trayectoria azul). Se ha empleado una $\tau_c = 0.5$, $\tau = 1$, $T = 1$ y una $K = 1$.



Gráfica 20: Comportamiento para un sistema de primer orden completo con y sin retardo.

Como se puede observar, en el sistema sin retardo, me corta en el semieje positivo de abcisas, en el punto $K \frac{\tau_c}{\tau}$, y a continuación tiende a cero, sin producirse ningún corte con el semieje negativo. Sin embargo, la presencia del retardo, hace que a altas frecuencias, tenga un argumento de $-\infty$, lo que provoca que describa una circunferencia de radio $K \frac{\tau_c}{\tau}$.

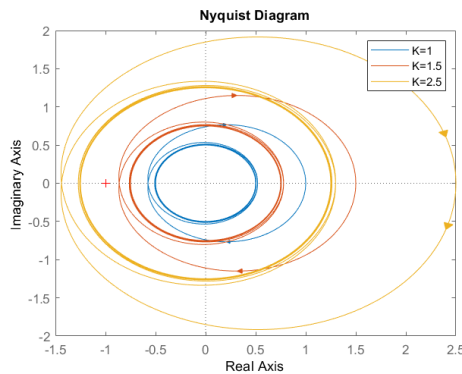
Ahora bien, con el objetivo de aplicar el Criterio de Nyquist, y saber si el sistema se va a inestabilizar. Se obtienen los polos del sistema, y como todos los polos son estables, es decir, no hay ningún polo en el semieje positivo de abcisas. Cuando el diagrama de Nyquist rodee en sentido antihorario al punto crítico -1, el número de vueltas, será distinto al número de polos inestables, por tanto se podrá decir que el sistema se comportará de forma inestable.

Como describe circunferencias de radio $K \frac{\tau_c}{\tau}$, cuando $K \frac{\tau_c}{\tau} \geq 1$, el sistema se volverá inestable. Para nuestro caso donde $\tau_c = 0.5$ y $\tau = 1$, cuando $K > 2$, el sistema será inestable.

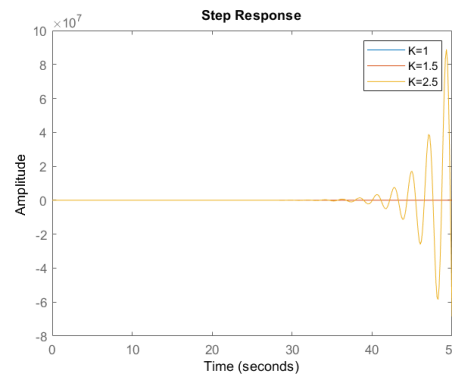
Nota: Para este caso se ha llevado a cabo la aproximación de escoger el radio de la circunferencia como punto de corte con el semieje negativo de abcisas, siendo que en realidad el primer corte se da un poco más a la izquierda, si bien

está a muy poca distancia de este. (Gráfica 21).

La gráfica siguiente ilustra el DN para distintos valores de K.



Gráfica 21: DN con retardo.



Gráfica 22: Respuesta con retardo.

Como se puede observar los resultados coinciden con los mencionado anteriormente, con una $K = 1.5$, el sistema es estable, pero con una $K = 2.5$ se vuelve inestable.

Por tanto, para un sistema de primer orden completo con un retardo puro, al analizar su comportamiento en bucle cerrado, el sistema con retardo se termina volviendo inestable, mientras que si no tuviera retardo este seguiría estable. Con el objetivo de solucionar este problema se va a colocar la estructura del Predictor de Smith.

4.2 *Predictor de Smith ideal*

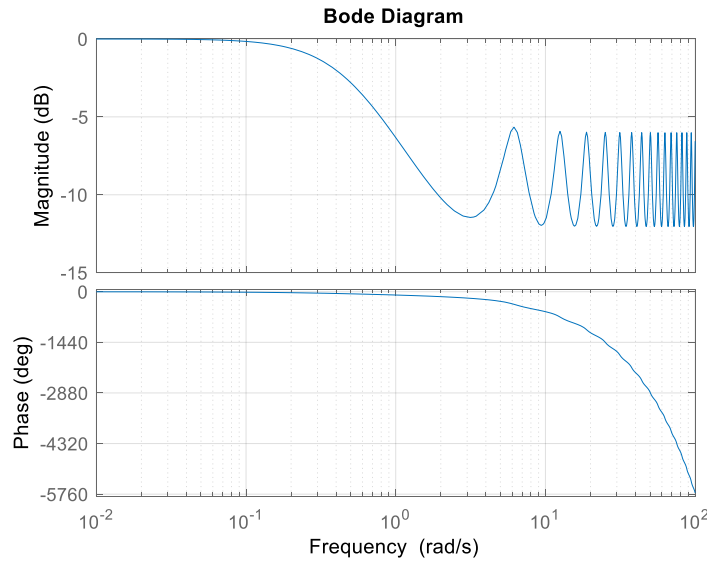
Aplicamos la estructura del Predictor de Smith para el sistema de primer orden completo, y ya realizando la sustitución, la cadena directa queda de la siguiente manera:

$$CD(s) = \frac{K(1 + \tau c * s)e^{-Ts}}{1 + K + (\tau + \tau c * K)s - K(1 + \tau c * s)e^{-Ts}}$$

$$CD(jw) = \frac{K(1 + \tau c * jw)e^{-Tjw}}{1 + K + (\tau + \tau c * K)jw - K(1 + \tau c * jw)e^{-Tjw}}$$

La presencia del factor e^{-Tjw} en el numerador no afecta al módulo (únicamente a la fase, indicando que a altas frecuencias, el DN va a exhibir ciclos límite). En cambio, la presencia de dicho factor en el denominador sí afecta al módulo, de forma que este presentará oscilaciones. Otra forma de verlo es considerar el denominador como el resultado de una suma de vectores, de los que uno de ellos gira, afectando periódicamente al módulo y al argumento de la CD. La gráfica siguiente muestra el DdB del sistema, en el que se aprecian las

mencionadas oscilaciones del módulo:



Gráfica 23: Oscilaciones a altas frecuencias.

Analizamos el Diagrama Polar por tramos:

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), el diagrama polar de $CD(j\omega)$ parte de un valor finito K y una fase de 0° :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$) su módulo oscila entre 2 valores extremos, $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T}$, (frecuencia máxima) y $\omega = (2N)\frac{\pi}{T}$ (frecuencia mínima):

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K\tau_c j\omega e^{-Tj\omega}}{\tau j\omega + K\tau_c j\omega - K\tau_c j\omega e^{-Tj\omega}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)|_{\omega=(1+2N)\frac{\pi}{T}} = \frac{K\tau_c}{\tau + 2K\tau_c} \\ |CD(j\omega)|_{\omega=(2N)\frac{\pi}{T}} = \frac{K\tau_c}{\tau} \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

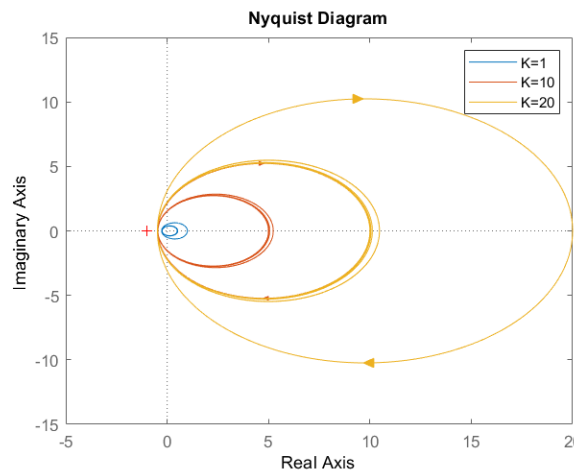
Por lo que el DN, partirá inicialmente de K , y ha frecuencias máximas debido al retardo $e^{-Tj\omega}$, describirá circunferencias, al valor máximo, cuando $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T}$ se alcanza el valor de $-K\frac{\tau_c}{\tau + 2K\tau_c}$ y en el valor mínimo $\omega = (2N)\frac{\pi}{T}$ se alcanza el valor de $K\frac{\tau_c}{\tau}$.

Como estos valores extremos se producen una vez cada vuelta, con el mismo argumento y en sendos puntos del eje de abscisas (no hay desfase), con analizar estos valores extremos será suficiente. El valor máximo $\left(K\frac{\tau_c}{\tau}\right)$, no me preocupa

porque se encuentra siempre en el semieje positivo de abscisas. Sin embargo el valor de $w = (1 + 2N)\frac{\pi}{T}$, con módulo $\left(K \frac{\tau_c}{\tau + 2K\tau_c}\right)$ sí que corta en el semieje negativo, pero como $K * \tau_c < \tau + 2K\tau_c$, este valor siempre será menor que 1, y no llega a alcanzar el punto crítico (Para ganancias elevadas el valor del módulo es 0.5).

Se han obtenido también los polos del sistema y no hay ningún polo inestable, de esta forma, como no hay polos inestables, y el sistema nunca alcanza el punto crítico -1, se puede afirmar que el Predictor de Smith consigue que el retardo no afecte a la estabilidad del sistema.

Una muestra para $\tau_c = 0.5$, $\tau = 1$, $T=1$ y para distintos valores de K (1, 10, 20) respectivamente:



Gráfica 24: Diagrama de Nyquist Predictor de Smith Ideal.

A la vista del Nyquist, dado que el módulo mínimo se corresponde con argumentos múltiplos impares de $-\pi$ (encontrándose por tanto en el semieje negativo de abscisas), al aumentar K , el módulo cuando la fase coincide en el semieje negativo de abscisas tiene una cota superior de valor 0.5, por lo que este sistema nunca se inestabilizará en BC, por muy grande que sea K . En resumen, el Predictor de Smith ideal consigue en este caso evitar la desestabilización del sistema, aun en presencia de valores elevados de K .

4.3 *Predictor de Smith Real*

En el apartado anterior, se ha supuesto un predictor de Smith ideal, con la correcta identificación de $H(s)$ y el tiempo exacto en el retardo, pero en este apartado se va a suponer que no se ha identificado correctamente el retraso puro, es decir: $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo.

Por tanto, aplicando la estructura del Predictor de Smith para nuestro sistema

y con una desviación en la estimación del retardo, queda de la forma:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K + (\tau + \tau_c K)j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-(T+\delta)j\omega}}$$

Analizamos el Diagrama de Nyquist:

- T1: Cuando $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: Cuando $\omega \rightarrow \infty$, su módulo también oscila entre 2 valores extremos, pero esta vez son: $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T+\delta}$, (frecuencia máxima) y $\omega = (2N)\frac{\pi}{T+\delta}$ (frecuencia mínima):

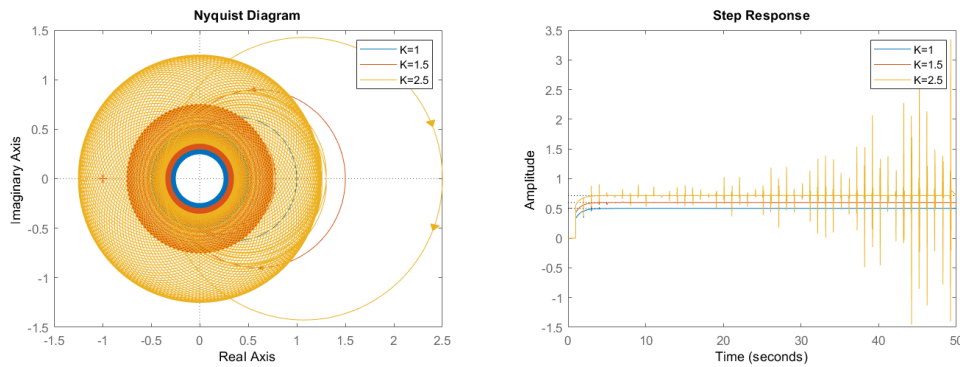
$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K\tau_c j\omega e^{-Tj\omega}}{\tau j\omega + K\tau_c j\omega - K\tau_c j\omega e^{-(T+\delta)j\omega}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)|_{\omega=(1+2N)\frac{\pi}{T+\delta}} = \frac{K\tau_c}{\tau + 2K\tau_c} \\ |CD(j\omega)|_{\omega=(2N)\frac{\pi}{T+\delta}} = \frac{K\tau_c}{\tau} \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

En este caso, las frecuencias correspondientes con los valores mínimo y máximo del módulo de la cadena directa cuando $\omega \uparrow \uparrow$ ya no se corresponden con argumentos múltiplos de $-\pi$, sino con los siguientes valores: $-\pi/(1+\delta/T)$ y $-\pi/(1+\delta/T)$, por lo que cada uno de estos valores extremos se producen con T/δ argumentos diferentes. La consecuencia es clara: el mínimo y máximo de módulo a altas frecuencias se va dando para diferentes valores de argumento (tantos como T/δ), por lo que para asegurar la estabilidad, ya no basta con que el mínimo de módulo esté por debajo de la unidad, sino que el máximo (en este caso $K\tau_c/\tau$) también debe estarlo. En el caso que nos ocupa ($\tau=1$ y $\tau_c=0.5$), el asegurar la estabilidad para cualquier valor de δ implica hacer $\boxed{0.5K < 1}$. En definitiva, ya no vale cualquier valor de K .

Empleando la aproximación de Padé se ha observado que todos sus polos son estables, de forma que si se alcanza el punto crítico -1, el sistema se comportará de forma inestable.

A continuación se pueden observar ejemplos para diferentes valores de δ considerando una $T=1$, $\tau = 1$ y $\tau_c = 0.5$. (Gráfica 25)

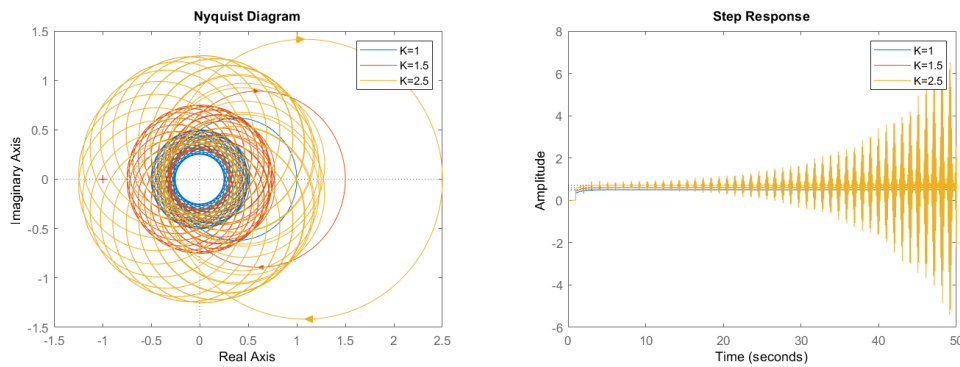
4.3.1 $\delta = 0.01$



Gráfica 25: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.01.

Se puede observar, que el Diagrama de Nyquist coincide con los cálculos obtenidos anteriormente, de forma que para valores mayores que 2, el sistema se vuelve inestable.

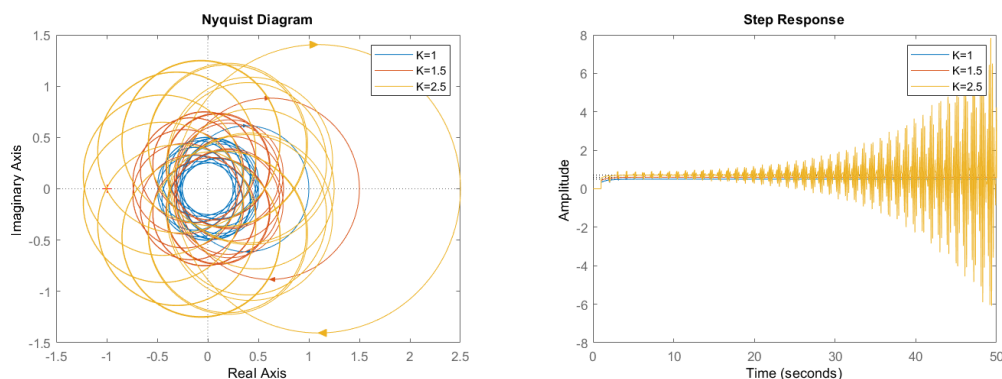
4.3.2 $\delta = 0.05$



Gráfica 26: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.05.

Para este caso, cuando el valor de la ganancia supera el valor de 2, este se vuelve inestable, al igual que en el caso anterior, por ello podemos decir que cualquier error en la estimación del retardo por pequeño que este sea, inestabilizará el sistema para el mismo valor de K.

4.3.3 $\delta = 0.1$



Gráfica 27: Comportamiento del PS en un primer orden completo con una desviación de 0.1.

4.4 *Conclusión*

Para el caso de segundo orden con cero, se observa que la presencia del retardo puro, provoca la inestabilidad del sistema en bucle cerrado, para ganancias mayores que $\frac{\tau}{\tau_c}$.

La inestabilidad del sistema se logra corregir con la estructura del Predictor de Smith Teórico para cualquier valor de la ganancia. Pero, no sería correcto llevarlo a la práctica, pues un mínimo error en la estimación del retardo (cosa que siempre va a suceder) provocaría la inestabilidad del sistema para ganancias mayores que $\frac{\tau}{\tau_c}$.

5. Primer orden completo + PI

Continuando con el sistema de primer orden completo del apartado anterior, con retraso puro, le añadimos un controlador PI con cancelación:

$$G_0(s) = K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s} e^{-Ts}$$

$$C(s) = K_c \frac{(\tau_i s + 1)}{\tau_i}$$

Donde el polo de nuestra función de transferencia sea igual al cero de nuestro controlador PI ($\tau_i = \tau$), de forma que la cadena directa (CD) queda:

$$CD(s) = G_0(s) * C(s) = KK_c \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s} \frac{(\tau_i s + 1)}{\tau_i} e^{-Ts} = KK_c \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s} e^{-Ts}$$

Un control PI, permite una corrección del error completa y ligeramente más rápida. Por eso se ha elegido este sistema, porque el control PI, es muy empleado por los ingenieros.

5.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado

El sistema se pone en bucle cerrado, y se analiza el comportamiento del sistema con retardo y el sistema sin retardo.

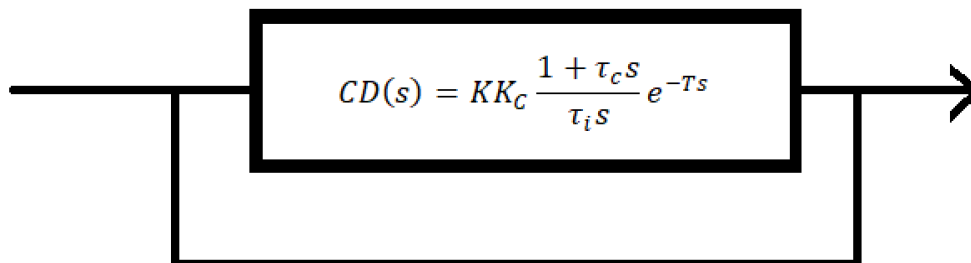


Figura 5: sistema en bucle cerrado.

- La función de transferencia del sistema sin el retardo quedará de la forma:

$$FdT(s) = \frac{KK_c \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s}}{1 + KK_c \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s}} = \frac{KK_c * (1 + \tau_c * s)}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s)}$$

Con la función de transferencia anterior se puede estudiar el comportamiento del sistema:

$$\begin{aligned}\frac{U(s)}{E(s)} &= \frac{S(s)}{E(s)} \frac{U(s)}{S(s)} = \frac{FdT(s)}{G_0(s)} = \frac{\frac{KK_c * (1 + \tau_c * s)}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s)}}{K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \tau s}} \\ &= \frac{K_c * (1 + \tau * s)}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s)}\end{aligned}$$

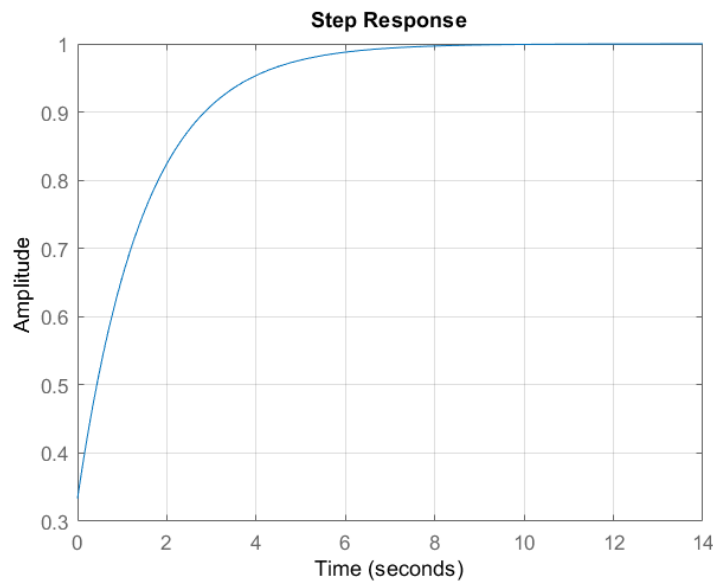
Por lo que, en $t = 0$:

$$U_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} s \frac{E}{s} \frac{K_c * (1 + \tau * s)}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s)} = \frac{K_c \tau}{\tau_i + KK_c \tau_c}$$

En $t = \infty$ (Régimen permanente):

$$U_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{E}{s} \frac{K_c * (1 + \tau * s)}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s)} = \frac{EK_c}{KK_c} = \frac{E}{K}$$

Por tanto, ya podemos adelantar que para el sistema sin retardo, el sistema se va a comportar de forma estable. (Gráfica 29).



Gráfica 29: Respuesta sistema de primer orden completo + PI sin retardo.

- La función de transferencia con el retardo me quedaría de la forma:

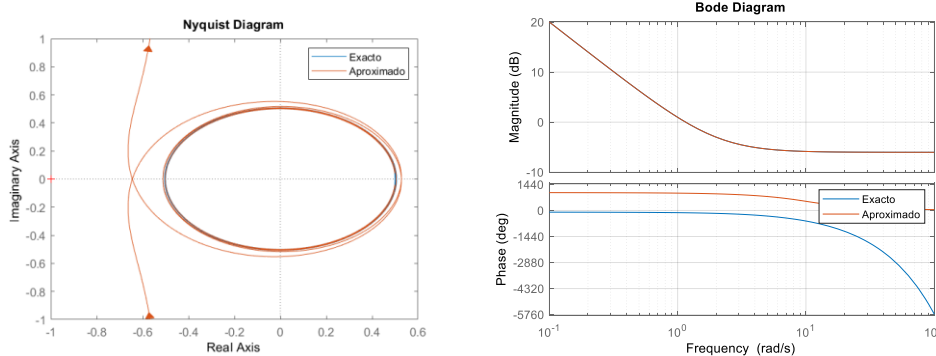
$$FdT(s) = \frac{KK_c \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s} e^{-Ts}}{1 + KK_c \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s} e^{-Ts}} = \frac{K_c * (1 + \tau * s) e^{-Ts}}{\tau_i * s + KK_c * (1 + \tau_c * s) e^{-Ts}}$$

El tener el retardo en el denominador puede suponer un problema para mi estabilidad.

Vamos a comprobarlo con el diagrama de Nyquist (DN) del sistema en bucle abierto, y a la vez mediante la representación gráfica ante una entrada escalón.

$$CD(j\omega) = KK_c \frac{1 + \tau_c j\omega}{\tau_i j\omega} e^{-Tj\omega}$$

En primer lugar vamos a obtener los polos del sistema, para ello es necesario emplear la aproximación de Padé. Se ha realizado una aproximación de Padé de orden 6 y aunque a frecuencias altas, se nota alguna diferencia, a frecuencias bajas se comporta de la misma forma (zona de interés), como se puede observar en las siguientes gráficas (*Gráfica 30*):



Gráfica 30: Comparación Diagrama de Nyquist exacto con la aproximación de Padé de orden 6.

Por tanto para una $\tau_c = 0.5$, $\tau_i = 1$, $T = 1$, y una $KK_c = 1$. Los polos del sistema son: $0.0000 + 0.0000i$, $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$. No hay ningún polo con parte real positiva, por tanto si el diagrama de Nyquist, da alguna vuelta en sentido antihorario, el sistema será inestable.

Una vez, sabemos los polos del sistema, ahora queda conocer el diagrama polar. La gráfica anterior, ya nos da una pista de cómo va a ser (*Gráfica 30, izquierda*).

○ Sistema sin retardo:

- T1: Evaluamos a bajas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = KK_c \frac{1 + \tau_c j0}{\tau_i j0} = -j \frac{KK_c}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

- T2: Evaluamos a altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = KK_c \frac{\tau_c}{\tau_i} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = KK_c \frac{\tau_c}{\tau_i} \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

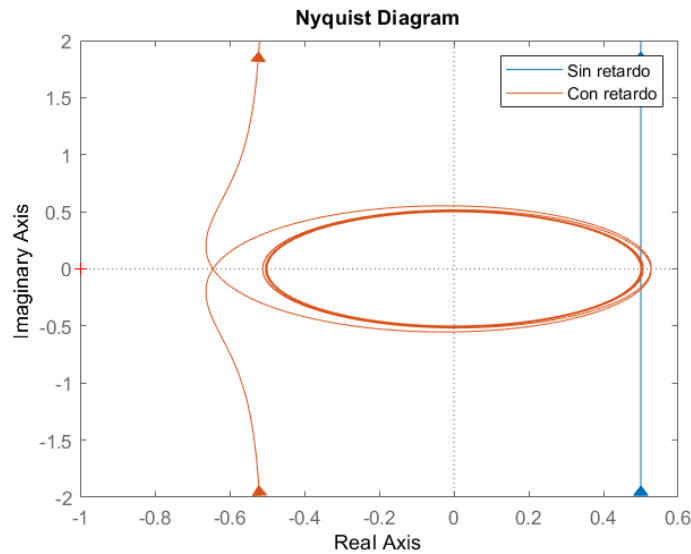
○ Sistema con retardo:

- T1: Evaluamos a bajas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = KK_C \frac{1 + \tau_c j\omega}{\tau_i j\omega} e^{-Tj\omega} = -j \frac{KK_C}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

- T2: Evaluamos a altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i} \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$



Gráfica 31: Diagrama de Nyquist, sistema con retardo y sistema sin retardo.

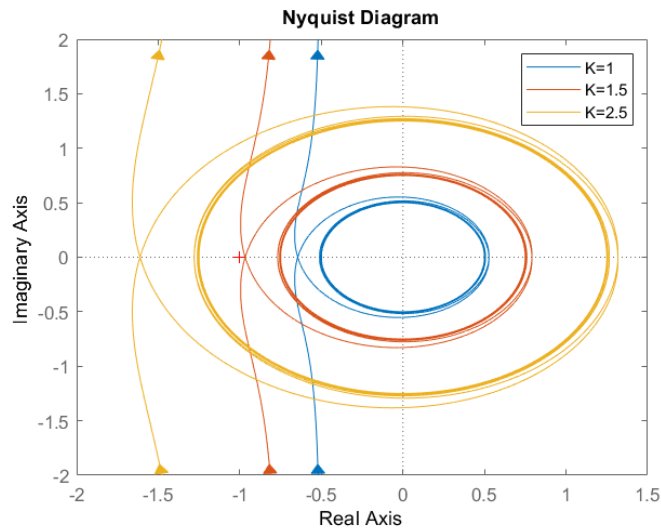
Como se puede observar ambos sistemas parten de ∞ , con fase de -90° , pero a altas frecuencias, ambos sistemas tienen un módulo $KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}$. La diferencia está en que el sistema que no hay retardo, este valor corta el semieje positivo de abscisas y el sistema es estable. Pero al incluir el retardo ($e^{-Tj\omega}$) este valor corta el semieje negativo de abscisas y eso puede influir en la inestabilidad del sistema.

Es decir, para el sistema sin retardo, a frecuencias altas, corta en el semieje positivo con valor $KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}$, de forma que cuanto mayor sea el valor de KK_C , se ira desplazando más hacia la derecha, sin llegar a cortar nunca en el semieje negativo, y por tanto siempre será estable.

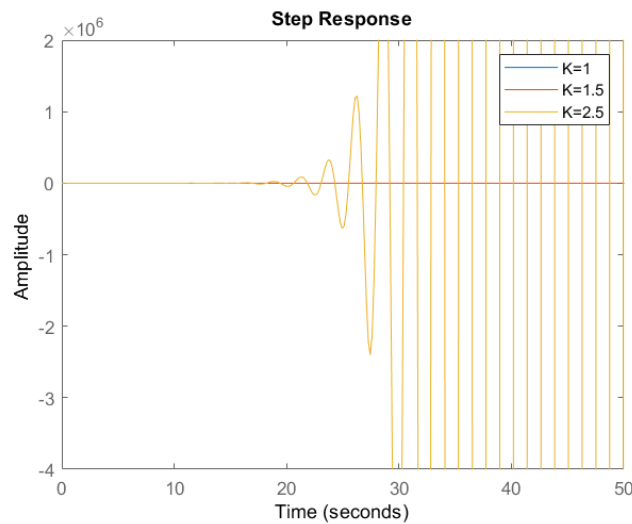
Sin embargo, el sistema con retardo, presenta un argumento con valor $-\infty$, lo que provoca que describa circunferencias en torno al origen de módulo $KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}$, de forma que si $\left|KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}\right|$ supera el valor de 1, supondrá que el Diagrama de Nyquist rodee el punto crítico, y como anteriormente se ha mencionado, el sistema no presenta polos inestables, lo que supondrá la inestabilidad del sistema.

Nota: Es cierto que hay un punto de corte, un poco más a la izquierda, que el de valor $KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}$, y es ese punto el que terminará inestabilizando mi sistema, pero se ha decidido realizar una aproximación. Por tanto, para mi sistema con $\tau_i = 1, \tau_c = 0.5$, para que mi sistema con retardo sea estable tiene que cumplir que $KK_C < \frac{\tau_i}{\tau_c} = 2$.

La gráfica siguiente ilustra el DN para valores diferentes de K ($K=1, K=1.5$ y $K=2.5$), empleando un valor de $T=1$, y una $\tau_i = 1, \tau_c = 0.5$:



Gráfica 32: Diagrama de Nyquist sistema con retardo.



Gráfica 33: Respuesta escalón, sistema con retardo.

Como conclusión del apartado, se obtiene que el sistema sin retardo es estable para todo K positivo, sin embargo, el sistema con retardo se vuelve inestable, para ganancias superiores a $\frac{\tau_i}{\tau_c}$.

5.2 *Predictor de Smith ideal*

Con el objetivo de estabilizar el sistema con retardo puro, colocamos la estructura del Predictor de Smith, que, como ya se sabe, el Predictor de Smith consigue que el retardo, aun cuando esté presente, no afecte a la estabilidad del sistema controlado. De forma que si $H(s) = G(s)$ y $\lambda = T$, el sistema me queda de la siguiente forma (*Ver cálculos del predictor de Smith*):

$$F(s) = \frac{R(s)G(s)}{1 + R(s)G(s)} e^{-Ts}$$

Y como se puede apreciar, hemos logrado que el retardo salga del denominador, y únicamente aparezca en el numerador, de forma que logramos que el retardo no me afecte a la inestabilidad.

Volvamos al caso que nos ocupa (sistema de primer orden completo + PI con retraso puro):

$$G(s) = G_0(s)C(s)e^{-Ts} = KK_C \frac{1 + \tau_c s}{\tau_i s} e^{-Ts}$$

Como se ha demostrado anteriormente, en apartado de cálculos del predictor de Smith, la cadena directa del control con el Predictor de Smith queda:

$$CD(s) = \frac{R(s)G(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G(s) - R(s)G(s)e^{-(T+\delta)s}}$$

Sustituyendo para nuestro caso y como es ideal $\delta = 0$, es decir, se ha estimado el retardo (T), sin error:

$$CD(s) = \frac{KK_C(1 + \tau_c * s)e^{-Ts}}{KK_C + (\tau_i + KK_C\tau_c)s - KK_C(1 + \tau_c * s)e^{-Ts}}$$

Nuevamente, tenemos que aplicar la aproximación de Padé, para obtener los polos del sistema. Se ha hecho una aproximación de Padé de orden 6, y no hay ningún polo inestable, de forma que si el sistema no alcanza el punto crítico -1, el sistema es estable.

A continuación se analiza el Diagrama de Nyquist es detalle:

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$):

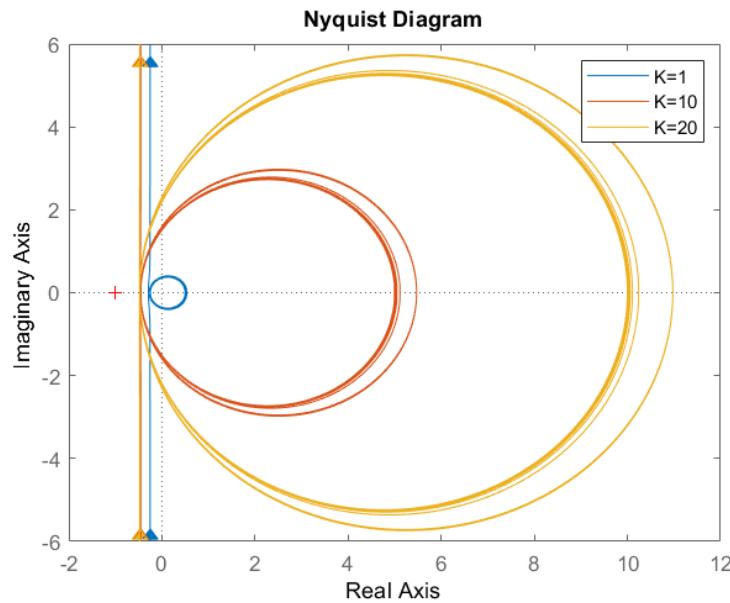
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{KK_C}{KK_C + (\tau_i + KK_C\tau_c)j0 - KK_C} = -j \frac{KK_C}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ \rightarrow \begin{cases} Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases} \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$) su módulo oscila entre 2 valores extremos, $\omega T = (1 + 2N)\pi$, (que presenta un valor mínimo en el módulo) y $\omega T = (2N)\pi$ (que presenta un valor máximo en el módulo):

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{KK_C\tau_c j\omega e^{-Ts}}{\tau_i j\omega + KK_C\tau_c j\omega - KK_C\tau_c j\omega e^{-Ts}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)|_{\omega=(1+2N)\frac{\pi}{T}} = \frac{KK_C\tau_c}{\tau_i + 2KK_C\tau_c} \\ |CD(j\omega)|_{\omega=(2N)\frac{\pi}{T}} = \frac{KK_C\tau_c}{\tau_i} \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

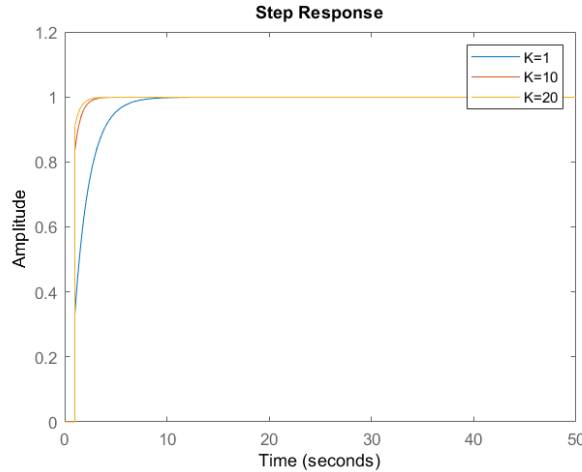
Como estos valores extremos se producen una vez cada vuelta, con el mismo argumento y en sendos puntos del eje de abscisas (no hay desfase), solo hay que analizar estos valores extremos. El valor de $KK_C \frac{\tau_c}{\tau_i}$, no me preocupa en este momento porque siempre se encuentra en el semieje positivo de abscisas. Sin embargo el valor del punto $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T}$, sí que corta en el semieje negativo, pero como $KK_C\tau_c < \tau_i + 2KK_C\tau_c$, este valor siempre será menor que 1, y no llega a alcanzar el punto crítico. En caso de que KK_C , tenga un valor muy elevado, el primer corte con el eje de abscisas, alcanzará el valor de $-0,5$.

Una muestra para $\tau_c = 0.5$, $\tau_i = 1$, $T=1$ y para distintos valores de K (1, 10, 20) respectivamente:



Gráfica 34: Diagrama de Nyquist Predictor de Smith ideal.

En resumen, el Predictor de Smith ideal consigue en este caso evitar la desestabilización del sistema, aun en presencia de valores elevados de K (Gráfica 35).



Gráfica 35: Respuesta escalón unitario del Predictor de Smith Ideal

5.3 *Predictor de Smith realista*

A continuación se supone que se ha identificado correctamente $G_0(s)$, pero no así al retraso puro, es decir: $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo. Por tanto nuestro sistema de estudio queda:

$$CD(j\omega) = \frac{KK_C(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{KK_C + (\tau_i + KK_C\tau_c)j\omega - KK_C(1 + \tau_c j\omega)e^{-(T+\delta)j\omega}}$$

En estas circunstancias, a frecuencias altas, los máximos y los mínimos de módulo no tienen por qué producirse en el eje de abscisas, debido a que la desviación en la estimación del retardo va a provocar que los valores máximos y mínimos ya no se produzcan con argumentos múltiplos de $-\pi$, sino que estos valores extremos se produzcan con T/δ argumentos diferentes.

Analicemos el Nyquist de $CD(s)$:

- T1: Cuando $\omega \rightarrow 0$

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{KK_C}{KK_C + (\tau_i + KK_C\tau_c)j0 - KK_C} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

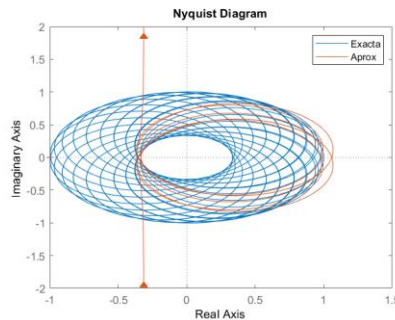
- T2: Cuando $\omega \rightarrow \infty$: Se vuelven a analizar los dos valores extremos que esta vez coinciden con $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T+\delta}$ y $\omega = (2N)\frac{\pi}{T+\delta}$.

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{KK_C\tau_c j\omega e^{-Ts}}{\tau_i j\omega + KK_C\tau_c j\omega - KK_C\tau_c j\omega e^{-Ts}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)|_{\omega=(1+2N)\frac{\pi}{T+\delta}} = \frac{KK_C\tau_c}{\tau_i + 2KK_C\tau_c} \\ |CD(j\omega)|_{\omega=(2N)\frac{\pi}{T+\delta}} = \frac{KK_C\tau_c}{\tau_i} \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Por lo que ahora, el valor que debe preocuparnos ya no es el de $\omega = (1 + 2N)\frac{\pi}{T+\delta}$, pues como en el caso del Predictor de Smith ideal anterior, este valor

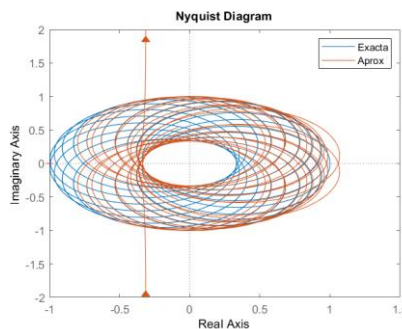
seguirá siendo menor o igual que 0,5. Ahora el punto que me preocupa es el valor de $\omega = (2N) \frac{\pi}{T+\delta}$, debido a que este se va desfasando y cuando $\left| \frac{KK_C\tau_c}{\tau_i} \right| > 1$, este alcanzará el punto crítico -1, lo que sucede cuando $KK_C > \frac{\tau_i}{\tau_c} = 2$.

Ahora hay que analizar el número de polos del bucle abierto en el semiplano derecho, para así aplicar el Criterio de Nyquist, y saber si el sistema se hará inestable. Empleando la aproximación de Padé de orden 6, un $\delta = 0.05$ y para una para una KK_C igual a 2:



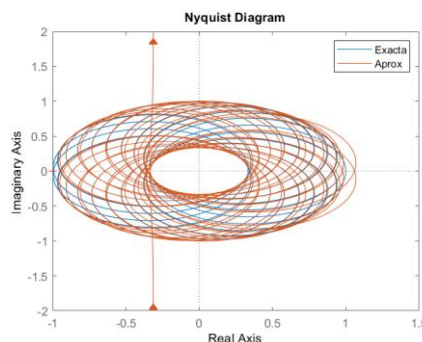
Gráfica 36: Aproximación de Padé de orden 6

Como podemos observar, una aproximación de Padé de orden 6, no es suficiente, debido a que no puede representar correctamente, las frecuencias más altas, que es cuando supera el punto crítico -1. Probamos con una aproximación de Padé de orden mayor:



Gráfica 37: Aproximación de Padé de orden 24.

Mejora, pero aun no es suficiente, si empleo una aproximación de Padé de orden 32:



Gráfica 38: Aproximación de Padé de orden 32.

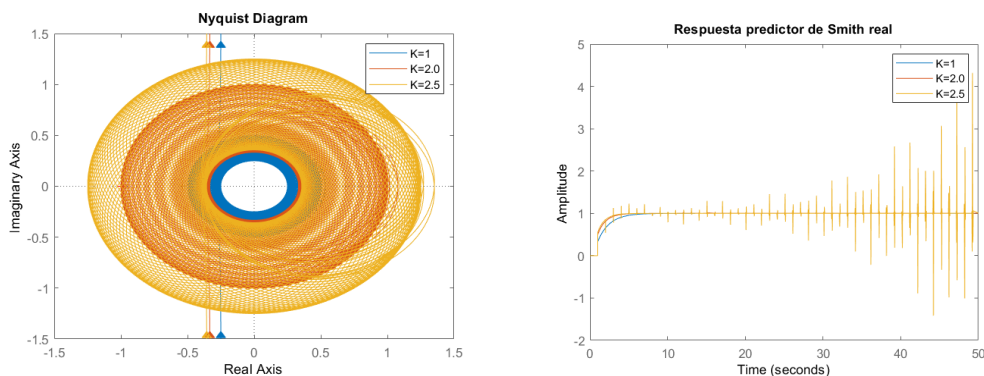
Si observamos los polos de este sistema, podemos observar que no hay ninguno en el semieje positivo. Por tanto, siguiendo el criterio de Nyquist, una vez alcance el punto crítico -1, el sistema se inestabilizará.

A continuación vamos a mostrar el diagrama de Nyquist, para $\tau_c = 0.5$, $\tau_i = 1$, $T=1$, y variando las ganancias (K) y la desviación en la estimación (δ).

Donde, como vamos a observar la inestabilidad sucederá cuando $KK_c > \frac{\tau_i}{\tau_c} = 2$

5.3.1 Para $\delta = 0.01$

- Con una $K = 1$, $K = 2$, $K = 2.5$.

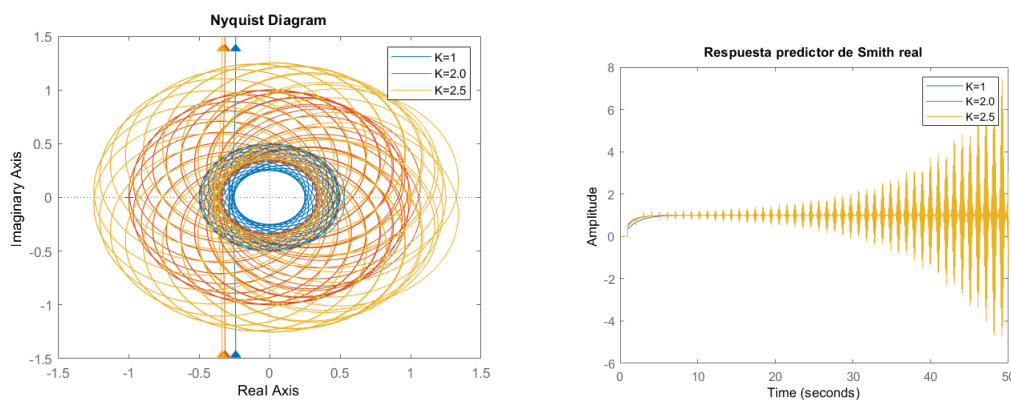


Gráfica 39: Comportamiento de primer orden + PI con PS con y una desviación del 1%.

Si observamos la imagen izquierda, podemos ver que la causa de la inestabilización es el punto que en el Predictor de Smith ideal, cortaba siempre en el eje positivo de abscisas, ahora se va desplazando y termina inestabilizando el sistema cuando su módulo es mayor que 1.

5.3.2 Para $\delta = 0.05$

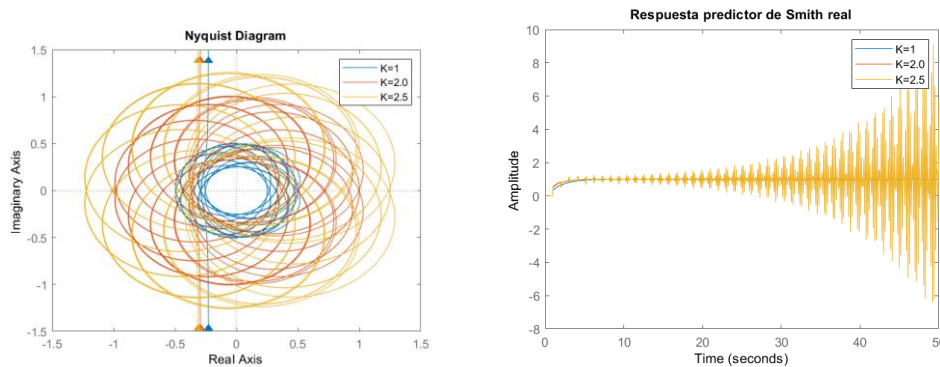
- Con una $K = 1$, $K = 2$, $K = 2.5$.



Gráfica 40: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 5%.

5.3.3 Para $\delta = 0.1$

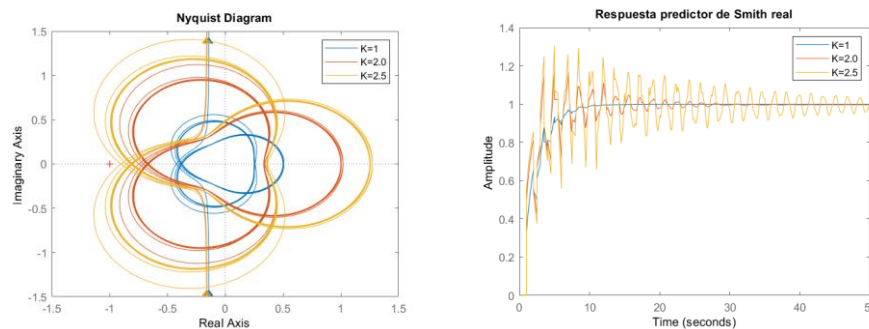
- Con una $K=1$, $K=2$, $K=2.5$.



Gráfica 41: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 10%.

5.3.4 Para $\delta = 0.5$ (Caso excepcional)

- Con una $K=1$, $K=2$, $K=2.5$.

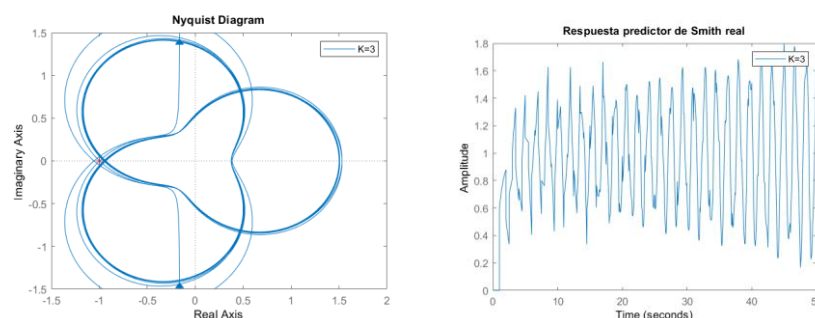


Gráfica 42: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 50%.

En esta situación lo que sucede es que como la desviación es justo un 50%, se produce un recorrido en el eje de abscisas, y luego dos recorridos más $\left(\frac{T}{\delta}\right)$. Como en total son tres recorridos estos suceden a los 120° , con lo que justo logra evitar el punto crítico, pues ningún máximo corta justo con el eje negativo.

Pero aun asi al aumentar un poco más la ganancia, con $K=3$, termina cortando el eje negativo de abscisas más a la izquierda del punto crítico. E inestabilizando el sistema.

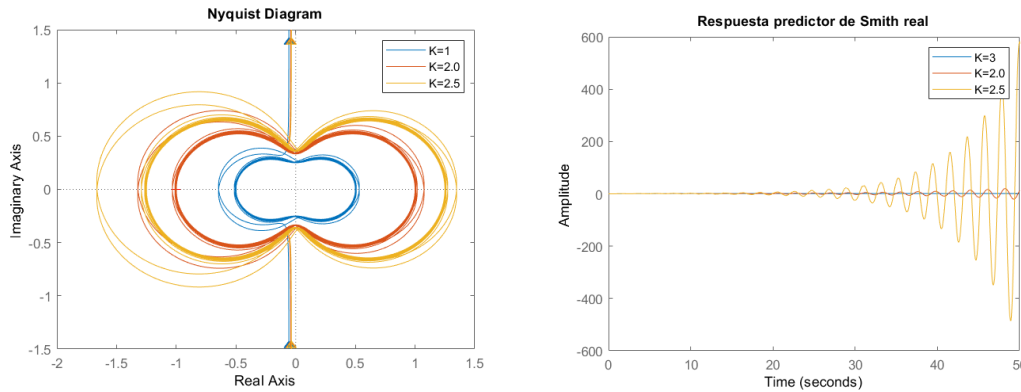
- Con una $K=3$.



Gráfica 43 Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 50% y $K=3$.

5.3.5 Para $\delta = 1$ (Caso excepcional)

- Con una $K=1$, $K=2$, $K=2.5$.



Gráfica 44: Comportamiento del primer orden + PI con PS y una desviación del 100%.

5.4 Conclusión

Este sistema se comporta de manera muy similar al sistema de primer orden completo. Donde en bucle cerrado debido a la presencia del retardo, se inestabiliza el sistema con ganancias superiores a $\frac{\tau_i}{\tau_c}$. A continuación con la estructura del predictor de Smith, suponiendo que todas las estimaciones son correctas, se logra estabilizar el sistema con retardo para cualquier ganancia.

Pero si se da un error en la estimación del retardo, por pequeño que este sea, vuelve a inestabilizarse el sistema para ganancias mayores que $\frac{\tau_i}{\tau_c}$. Por tanto, para este sistema no es recomendable el Predictor de Smith, dado que siempre va a cometerse un error en la estimación del retardo.

6. Integrador

Otro caso que va a ser analizado es el correspondiente con un integrador puro en la cadena directa. Dicha cadena directa puede ser el resultado de un control PI aplicado a un sistema de primer orden simple en el que se ha dado cancelación polo-cero. Sea como fuere, la función de transferencia de la cadena directa es:

$$G(s) = K \frac{1}{s} e^{-Ts}$$

6.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado.

A continuación se va a analizar el comportamiento en bucle cerrado. Si se obtiene la función de transferencia, se verá que el retardo está situado en el denominador, y, en base a la experiencia de todos los sistemas analizados con anterioridad, es muy probable que provoque la inestabilidad del sistema.

Nuevamente, la estabilidad del sistema se va a analizar aplicando el Criterio de Nyquist.

- Sistema sin retardo:

$$CD(j\omega) = K \frac{1}{j\omega}$$

- T1: Evaluamos a bajas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = K \frac{1}{j0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

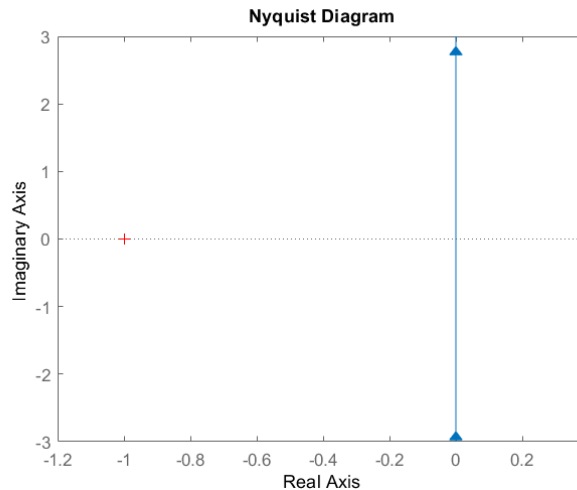
- T2: Evaluamos a altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = K \frac{1}{\infty} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T3: Puntos de corte con el eje real:

$$CD(j\omega) = K \frac{1}{j\omega} \frac{j\omega}{j\omega} = K \frac{j\omega}{- \omega^2} = K \frac{-j}{\omega}$$

El sistema parte de un valor ∞ , con argumento -90° , y termina alcanzando el valor de cero con argumento 0° . Al calcular los puntos de corte con el eje real, se ha visto que únicamente tiene parte imaginaria, por tanto, el diagrama de Nyquist de este sistema se corresponde a trazar una línea recta en el eje imaginario. (Gráfica 48).



Gráfica 45: Diagrama de Nyquist de un integrador sin retardo.

- Sistema con retardo:

$$CD(j\omega) = K \frac{1}{j\omega} e^{-Tj\omega}$$

- T1: Evaluamos a bajas frecuencias:

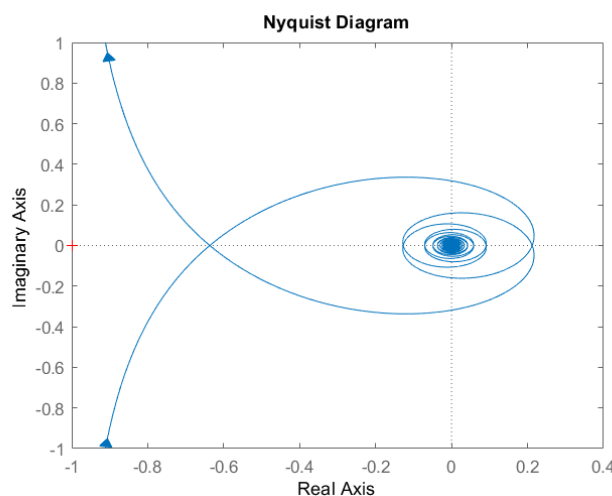
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = K \frac{1}{j0} e^{-Tj0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

Por lo que a bajas frecuencias el diagrama parte de ∞ con fase -90° .

- T2: Evaluamos a altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = K \frac{1}{\infty} e^{-Tj\infty} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

A altas frecuencias tenderá a 0 con fase $-\infty$, al tener este argumento, el sistema va a realizar una espiral en torno al origen. Esto va a suponer que corte en el semieje negativo, y dependiendo del tamaño de la espiral, es posible inestabilizar el sistema.



Gráfica 46 Diagrama polar integrador con retardo.

Para conocer cuando se inestabilizará el sistema tenemos que conocer ese punto de corte con el eje negativo de abcisas.

- T3: Puntos de corte con el eje real:

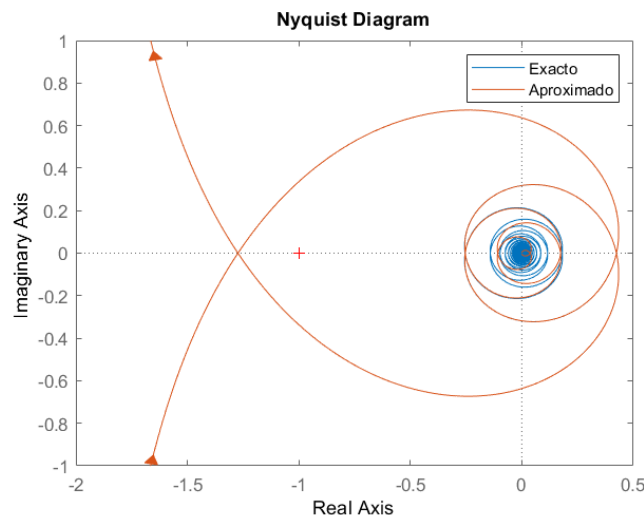
$$CD(j\omega) = K \frac{1}{j\omega} \frac{j\omega}{j\omega} e^{-Tj\omega} = K \frac{j\omega}{-\omega^2} e^{-Tj\omega} = K \frac{-j}{\omega} e^{-Tj\omega}$$

Pasamos a modulo y argumento:

$$CD(j\omega) = K \frac{-j}{\omega} e^{-Tj\omega} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \frac{K}{\omega} \\ Arg(CD(j\omega)) = -\frac{\pi}{2} - \omega T \end{cases}$$

Cuando $\omega T = \frac{\pi}{2}$, nos encontramos con argumento -180° . En ese punto la cadena directa del sistema tiene de módulo $|CD(j\omega)| = \frac{K}{(\pi/2)} = \frac{2K}{\pi}$.

Con una aproximación de Padé de orden 6, obtenemos los polos del sistema. Vemos que la aproximación de Padé donde nos interesa es bastante buena:

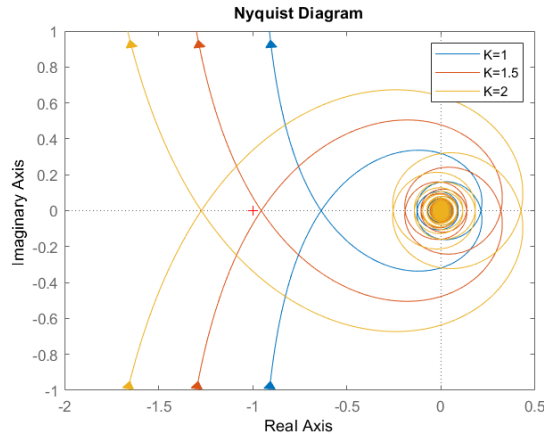


Gráfica 47: Aproximación de Padé de orden 6.

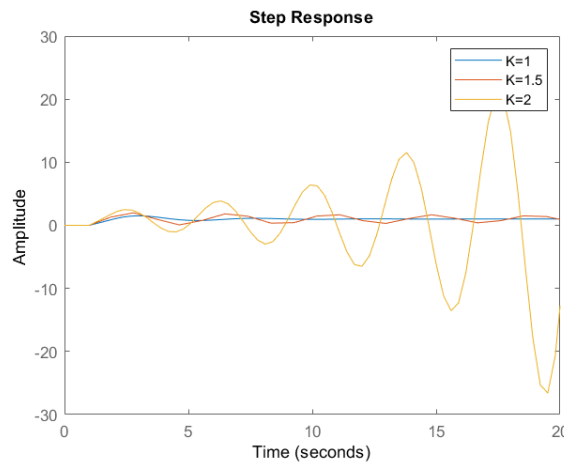
Y los polos que se han obtenido son: $0.0000 + 0.0000i$, $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$. Como no hay ningún polo que tenga parte real negativa, cuando el sistema de una vuelta en sentido antihorario al punto crítico -1 , el sistema se hará inestable.

Como conclusión, al incluir el retardo, puede provocar que mi sistema se inestabilice, debido a que cuando $2K/\pi > 1$, el sistema alcanzará el punto crítico y se comportará de forma inestable, esto sucede para $K > \frac{\pi}{2} = 1,57$.

Veámoslo para algunos ejemplos (Con $K=1$, $K= 1.5$, y $K= 2$) con $T=1$ y $\tau = 1$:



Gráfica 48: Diagrama de Nyquist de la cadena directa del integrador con retardo.



Gráfica 49: Respuesta escalón del integrador en bucle cerrado

6.2 *Predictor de Smith ideal*

Nuevamente, se recurre a la estructura del Predictor de Smith con el objetivo de que la presencia del retardo no afecte a la estabilidad de mi sistema. Para este sistema la cadena directa queda de la forma:

$$CD(s) = \frac{Ke^{-Ts}}{s + K - Ke^{-Ts}}$$

Analizando este sistema en detalle mediante el diagrama de Nyquist:

$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\omega + K - Ke^{-Tj\omega}}$$

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), el diagrama polar parte de ∞ con una fase de -90° :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{j0 + K - K} = -j\frac{K}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$) el diagrama polar termina en 0,

con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} CD(jw) = \frac{Ke^{-Tjw}}{jw + K - Ke^{-Tjw}} \rightarrow \begin{cases} |CD(jw)| = 0 \\ Arg(CD(jw)) = -\infty \end{cases}$$

Esto, en el diagrama polar supone describir una especie de espiral en torno al origen, lo que provocará que intersekte infinitas veces con el semieje negativo.

Esas elipses presentan valores máximos y mínimos de módulo para $wT = 2N\pi$ y para $wT = (2N + 1)\pi$ respectivamente:

Cuando $wT = 2N\pi$, donde el valor $e^{-Tjw} = 1$, de forma que los valores de K del denominador se anulan, y el módulo presenta un valor máximo:

$$CD(jw) = \frac{Ke^{-Tjw}}{jw + K - K} = \frac{K}{jw} e^{-Tjw}$$

$$CD(jw) = -K \frac{1}{w} j e^{-Tjw} \rightarrow \begin{cases} |CD(jw)| = \frac{K}{w} \\ Arg(CD(jw)) = -\frac{\pi}{2} - Tw \end{cases}$$

Y cuando $wT = (2N + 1)\pi$, donde el valor $e^{-Tjw} = -1$, de forma que en el denominador se suman los dos valores de K , provocando que el módulo presente un valor mínimo:

$$CD(jw) = \frac{Ke^{-Tjw}}{jw + K + K} = \frac{K}{jw + 2K} e^{-Tjw}$$

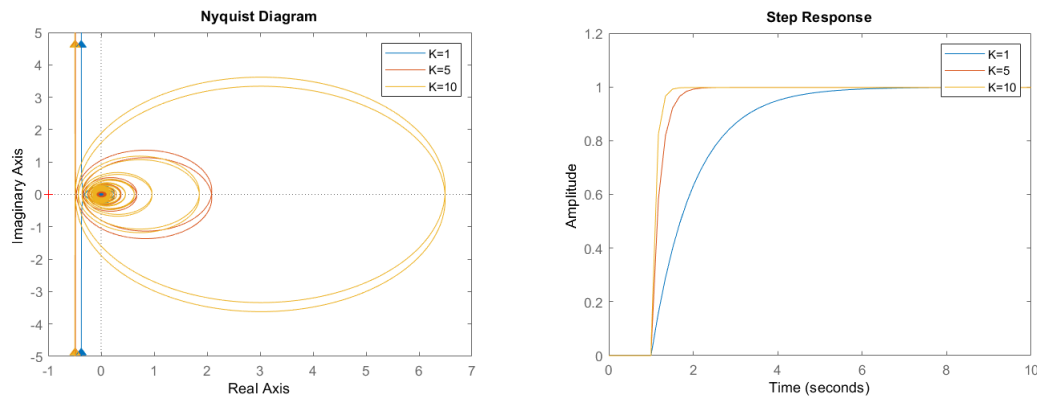
$$CD(jw) = K \frac{(2K - jw)}{4K^2 + w^2} e^{-Tjw} \rightarrow \begin{cases} |CD(jw)| = \frac{K}{\sqrt{4K^2 + w^2}} \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1} \frac{w}{2K} - Tw \end{cases}$$

Por consiguiente, los cortes con el semieje positivo de abcisas se producen con valores de módulo K/w . Aunque sí que hay valores de K que hacen que dicho módulo sea mayor que 1, no hay que preocuparse, debido a que como la elipse se repite con argumentos de π , es decir, sin producirse ningún desfase. Este valor siempre corta con el eje positivo de abcisas, sin llegar a alcanzar el punto crítico.

Observando el módulo, vemos que para un valor suficientemente elevado de K (en el límite, infinito) el primer corte con el eje de abcisas (el que más a la izquierda se produce) se da para un valor pequeño de w , por lo que dicho valor de módulo es como mucho 0,5. Por tanto, aunque corte en el semieje negativo de abcisas, no llega a alcanzar el punto crítico.

Si obtenemos los polos del sistema, se obtiene que todos son polos estables, y como establece el Criterio de Nyquist: “Si el punto $-1 + j0$ no está rodeado. Implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, el sistema es inestable”. Se obtiene así la conclusión de que el sistema es estable.

Ejemplos, para distintos valores de K :



Gráfica 50: Comportamiento del Predictor de Smith ideal.

6.3 Predictor de Smith realista

Como se puede observar, en el Predictor de Smith, se ha tenido que identificar correctamente la cadena directa, es decir: $H(s) = G_0(s)$, y también el retardo. Pero, ¿Qué sucedería sin embargo si el retardo empleado en el predictor de Smith no se correspondiese exactamente con el retardo que exhibe el sistema?

Nuestro caso de estudio, quedaría de la forma:

$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\omega + K - Ke^{-(T+\delta)j\omega}}$$

Volvemos a analizar el Diagrama de Nyquist para este caso:

- T1: A bajas frecuencias, cuando $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{j0 + K - K} = -j\frac{K}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

- T2: A altas frecuencias, cuando $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{j\infty + K - Ke^{-(T+\delta)j\omega}} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

La presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo pero, la presencia de dicho factor en el denominador si afecta al módulo, de forma, que

volvemos a analizar los valores máximos y mínimos:

- Cuando $w(T + \delta) = (2N)\pi$, siendo $e^{-Tjw} = 1$, de forma que las ganancias del denominador se anulan, provocando que el módulo presente un valor máximo:

$$CD(jw) = \frac{Ke^{-Tjw}}{jw + K - K} = \frac{K}{jw} e^{-Tjw} = -\frac{Kw}{w^2} j e^{-Tjw} \begin{cases} |CD(jw)| = |1| \left| \frac{K}{w} \right| \\ Arg(CD(jw)) = -90^\circ - Tw \end{cases}$$

- Cuando $w(T + \delta) = (1 + 2N)\pi$, siendo $e^{-Tjw} = -1$, de forma que las ganancias en el numerador se suman, y provocan un valor mínimo en el módulo:

$$CD(jw) = \frac{Ke^{-Tjw}}{jw + K + K} = \frac{K}{2K + jw} e^{-Tjw} = \frac{K}{2K + jw} e^{-Tjw} \begin{cases} |CD(jw)| = |1| |K| \left| \frac{1}{\sqrt{4K^2 + w^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1} \left(\frac{w}{2K} \right) - Tw \end{cases}$$

El DN va a presentar una forma de espiral que tiende al origen, de forma similar a lo que venía sucediendo con el PS teórico, sólo que esta vez, debido a la incorrecta identificación del retardo, estos valores máximos y mínimos ya no corresponden con múltiplos de π , sino con los valores: $(1+2N)\pi/(1+\delta/T)$ y $2N\pi/(1+\delta/T)$, es decir, cada uno de los valores extremos se producen con T/δ argumentos diferentes. Por tanto, el módulo a tener en cuenta no es $\frac{K}{\sqrt{4K^2 + w^2}}$, si no $\frac{K}{w}$, de mayor valor. Ello podría provocar (dependiendo de la magnitud de K , T , δ y w) cortes con el semieje negativo más allá del punto crítico, con la consiguiente inestabilización del sistema. Se trata en definitiva de encontrar el módulo a la frecuencia para la cual, el primer máximo alcanza el semieje negativo de abscisas:

Como hemos visto anteriormente, la frecuencia para la cual se dan los máximos es:

$$w(T + \delta) = 2N\pi \rightarrow w = \frac{2N\pi}{T + \delta}$$

¿En cuantas vueltas (lóbulos) se alcanza el semieje negativo de abscisas? Contando con que el aporte de fase correspondiente al término $\frac{K}{jw}$ es de -90° , y que

en 360° se dan T/δ lóbulos, puede concluirse que el número de lóbulos necesario para alcanzar el semieje negativo de abscisas es $N=T/(4\delta)$. Sustituyendo dicho valor en la ecuación anterior, podemos obtener el valor del módulo a dicha frecuencia:

$$w = \frac{2N\pi}{T + \delta} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}$$

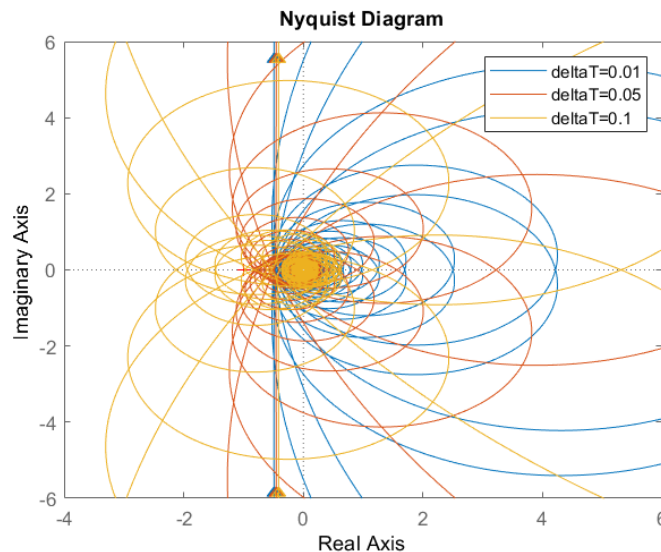
Sustituyendo w en la expresión del módulo:

$$|G(jw)| = \frac{K}{w} = \frac{K}{\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}}$$

Por consiguiente, el valor máximo de K que hace al sistema estable es:

$$K_{max} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}$$

Como puede verse, el máximo valor de K que asegura la estabilidad depende varios factores, si bien aquí vamos a poner el foco en la dependencia de δ , por lo que mantendremos $T=1$ y $\tau=1$.



Gráfica 51: Efecto de la estimación del retardo. Para una ganancia de 25.

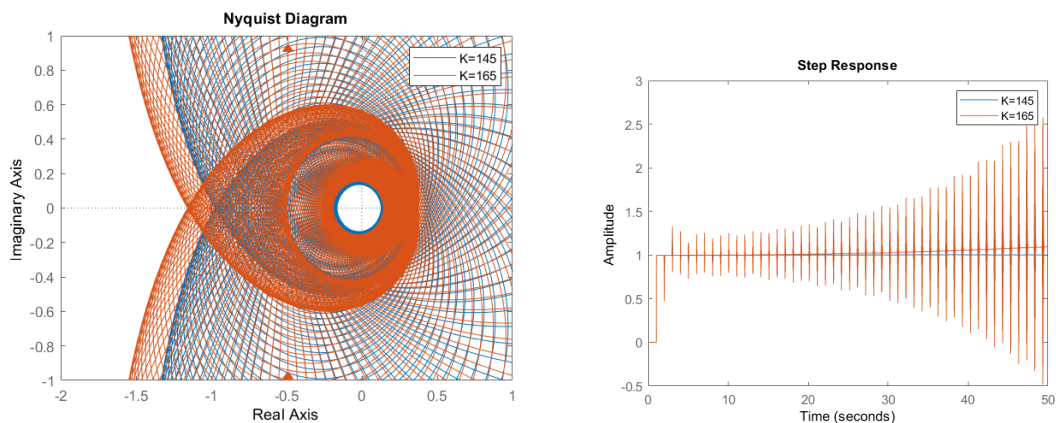
A continuación, se va a particularizar la expresión anterior para distintos valores de δ , pero en todos los casos se emplea una $T=1$ y una $\tau = 1$:

6.3.1 Para $\delta = 0.01$

Si se aplica la ecuación anterior para una desviación del 1%, se obtiene que el sistema de vuelve inestable para una ganancia de

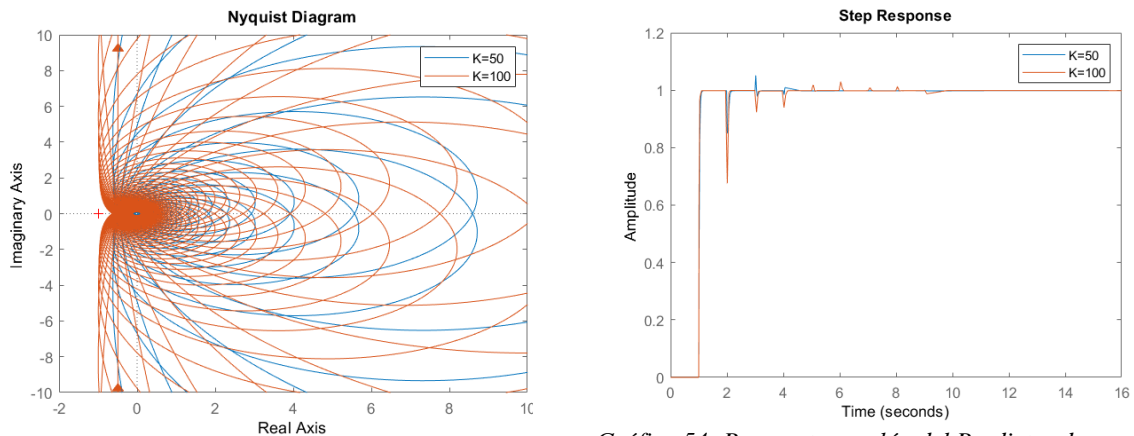
$$K_{max} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} = \frac{1\pi}{2 * 0.01 * (1 + 0.01)} = 155,52$$

Dicho resultado se puede comprobar mediante el diagrama de Nyquist, *Gráfica 52*:



Gráfica 52: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,01.

Si por ejemplo se seleccionan otros valores de la ganancia, como por ejemplo 50 y 100, se obtiene (*Gráfica 53 y 54*):



Gráfica 53: Diagrama de Nyquist con un desfase del 1%.

Gráfica 54: Respuesta escalón del Predictor de Smith con un desfase del 1%.

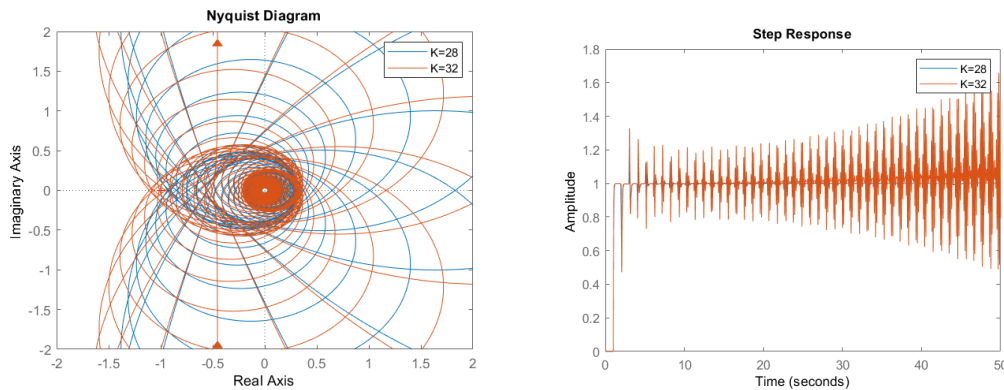
En este caso, el valor del módulo que inestabiliza el sistema (K/w) depende de la frecuencia, y como el error cometido en el cálculo de la estimación del retardo es muy pequeño, el desfase que se produce también lo es. De forma que para cuando alcanza el semieje negativo de abscisas, el valor de la frecuencia es bastante elevado, y solo alcanzará el punto crítico, para ganancias mayores que 155.

6.3.2 Para $\delta = 0.05$

Para este caso el sistema se vuelve inestable para una ganancia de 29,91.

$$K_{max} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} = \frac{1\pi}{2 * 0.05 * (1 + 0.05)} = 29,91$$

Dicho resultado se puede comprobar mediante el diagrama de Nyquist (Gráfica 55):

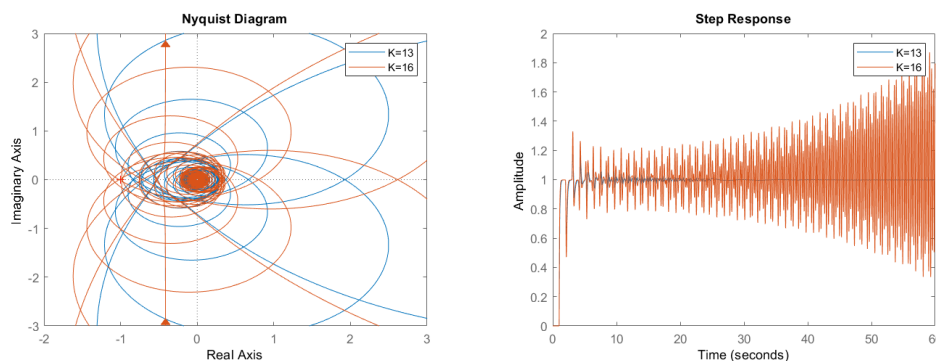


Gráfica 55: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,05.

En cambio, para este caso la desviación en la estimación del retardo es mayor, por tanto el desfase que se produce es mayor y el valor de la frecuencia es menor cuando alcanza el semieje negativo de abscisas, por tanto el sistema se inestabilizará con un valor de la ganancia menor al caso anterior.

6.3.3 Para $\delta = 0.1$

Si se sustituye en la ecuación anterior para una desviación de 0,1 se obtiene que el sistema se inestabiliza para una ganancia de 14,27. Se puede comprobar mediante el diagrama de Nyquist:



Gráfica 56: Comprobación del valor límite de la ganancia para una desviación de 0,15.

Para este caso todavía se hace más patente lo comentado anteriormente.

6.4 *Conclusión*

En el caso de este sistema, se ha observado que, en bucle cerrado, el sistema sin retardo es estable para todos los valores de K , pero, para el sistema con retardo solo para ganancias menores que $\frac{\pi}{2}$. Por ello añadimos la estructura del Predictor de Smith al sistema con retardo, y si este es ideal el sistema se estabiliza para todos los valores de K .

Pero... ¿Qué sucede si se comete un error en la estimación del retardo? Pues a diferencia de los dos casos anteriores, para este sistema si se comete un error de un 1%, no supondría mucho problema, debido a que para ganancias menores a 155, el sistema sigue comportándose de forma estable. Pero, cuanto mayor sea la desviación, el sistema se inestabiliza para ganancias menores.

Por ejemplo, para un error del 5%, el sistema se vuelve inestable para ganancias mayores que 30. O, si seguimos cometiendo más error en la estimación del retardo, a un 10%, el sistema se volverá inestable para ganancias mayores que 14. Ciertamente la ganancia disminuye bastante, pero sigue siendo mejor que para el sistema en bucle cerrado sin el PS, que únicamente para una ganancia de 1.57, se inestabilizaba.

7. Sistema de segundo orden simple

A continuación vamos a pasar de los sistemas de primer orden, a sistemas de segundo orden. El cual su función de transferencia de un sistema de segundo orden se corresponde con:

$$\frac{X(s)}{F(s)} = K \frac{w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2}$$

Dónde:

- $X(s)$ = Salida del sistema
- $F(s)$ = Entrada del sistema
- K = Ganancia estática del sistema
- w_n = La frecuencia natural no amortiguada del sistema
- ξ = Factor de amortiguamiento

El caso que se va a estudiar en este apartado, es un sistema de segundo orden simple con retraso puro controlado por un regulador proporcional. Por simplicidad se va a considerar que el sistema tiene un polo real doble, correspondiéndose así con un sistema críticamente amortiguado.

$$G_0(s) = \frac{K}{(1 + \tau s)^2} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} = K \frac{\left(\frac{1}{\tau}\right)^2}{s^2 + \frac{2s}{\tau} + \frac{1}{\tau^2}}$$

A continuación a este sistema le añadiremos un retraso puro, quedando de la forma:

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} = \frac{K}{(1 + \tau s)^2} e^{-Ts} = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} e^{-Ts}$$

Un ejemplo de un sistema de segundo orden podría ser un sistema de Masa-Amortiguador-Resorte.

7.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado.

Al sistema de segundo orden simple con un regulador proporcional, se le añade realimentación, quedando un sistema en bucle cerrado, como se ve a continuación (Figura 6):

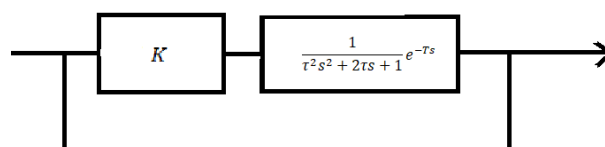


Figura 6: Sistema de segundo orden en bucle cerrado.

La función de transferencia del sistema anterior me queda de la siguiente forma:

$$FdT(s) = \frac{\frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} e^{-Ts}}{1 + \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1} e^{-Ts}} = \frac{K e^{-Ts}}{\tau^2 s^2 + 2\tau s + 1 + K e^{-Ts}}$$

Al igual que en los sistemas de primer orden, aparece el retardo en el denominador, lo que significa que puede influir en la estabilidad de mi sistema.

Se va a comprobar la estabilidad mediante el diagrama de Nyquist (DN), en cadena abierta. Reemplazamos, $s = jw$ en $CD(s)$:

- En el sistema sin retardo:

$$CD(jw) = \frac{K}{\tau^2 j^2 w^2 + 2\tau jw + 1} = K \frac{1}{1 - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega}$$

Evaluamos la función de transferencia:

- T1: Cuando $w \rightarrow 0$.

$$\lim_{w \rightarrow 0} CD(j\omega) = K \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: Cuando $w \rightarrow \infty$.

$$\lim_{w \rightarrow \infty} CD(j\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -180^\circ \end{cases}$$

- T3: Puntos de corte con el eje real.

$$CD(jw) = \frac{k}{\tau^2 j^2 w^2 + 2\tau jw + 1} = \left[\frac{(-\tau^2 w^2 + 1)k}{(-\tau^4 w^4 + 2\tau^2 w^2 + 1)} - \frac{2\tau w k}{(-\tau^4 w^4 + 2\tau^2 w^2 + 1)} j \right]$$

Puntos de corte con el eje real:

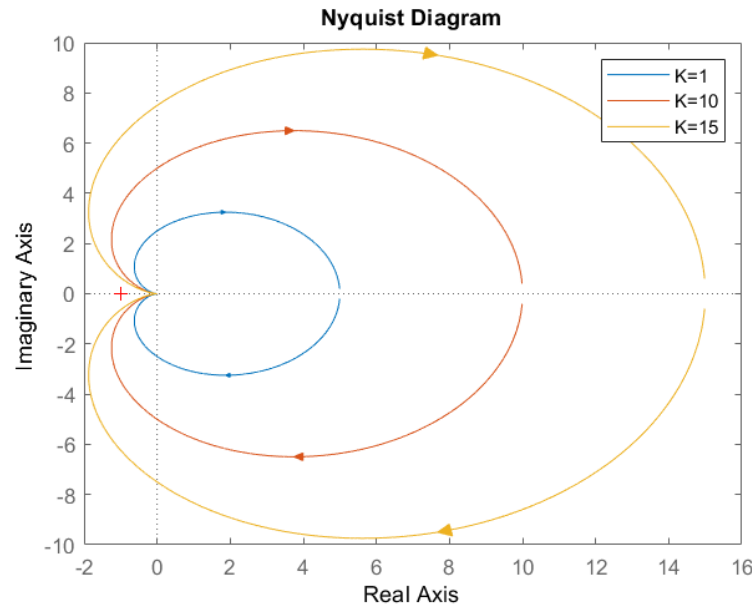
$$\frac{2\tau w k}{(-\tau^4 w^4 + 2\tau^2 w^2 + 1)} j = 0 \rightarrow w = 0 \text{ y } w = \infty$$

Sustituyendo:

$$\frac{(-\tau^2 0^2 + 1)k}{(-\tau^4 0^4 + 2\tau^2 0^2 + 1)} = K \text{ y } \frac{(-\tau^2 \infty^2 + 1)k}{(-\tau^4 \infty^4 + 2\tau^2 \infty^2 + 1)} = 0$$

Corta en los puntos $w = 0$ y $w = \infty$, dichos puntos se corresponden con los calculados anteriormente, y ninguno corta en el semieje negativo de abscisas, por tanto si el número de polos inestables de la cadena directa es nulo, el sistema sin retardo será estable.

A continuación se puede observar el comportamiento del diagrama polar del sistema sin retardo (*Gráfica 64*). A la vista de la gráfica, vemos que en ningún momento intersecta con el semieje negativo de abscisas:



Gráfica 57: Diagrama polar del sistema de primer orden simple sin retardo.

- En el sistema con retardo:

$$CD(j\omega) = K \frac{1}{1 - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega} e^{-Tj\omega}$$

Evaluamos la función de transferencia:

- T1: Cuando $\omega \rightarrow 0$:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = K \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

- T2: Cuando $\omega \rightarrow \infty$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = 0 \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ \text{Arg}(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Para el caso con retardo a bajas frecuencias el sistema parte de un valor finito K con fase 0° , y acaba en 0 con fase $-\infty$, lo que supone describir una espiral en torno al origen de radio decreciente. Ello abre una puerta a la inestabilización del sistema, dado que el DN intersecta el semieje negativo de abscisas infinitas veces, siendo el primer corte el más cercano al punto crítico.

Se obtiene el módulo y el argumento, con el objetivo de conocer el primer punto de corte:

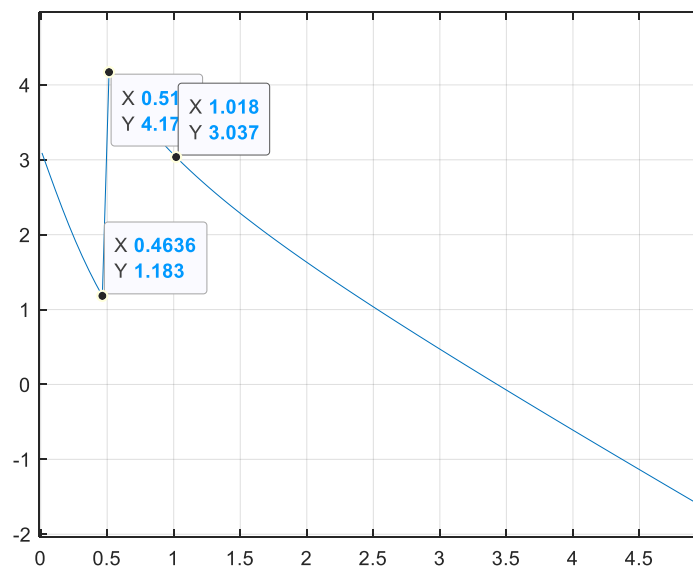
$$CD(j\omega) = K \frac{1}{1 - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega} e^{-Tj\omega} = K \left[\frac{1 + \tau^2 \omega^2}{1 + 2\tau^2 \omega^2 + \tau^4 \omega^4} - \frac{2\tau \omega}{1 + 2\tau^2 \omega^2 + \tau^4 \omega^4} j \right] e^{-Tj\omega}$$

$$\begin{cases} |CD(jw)| = |K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 w^2 + \tau^4 w^4}} \right| |1| \\ \text{Arg}(CD(jw)) = \tan^{-1} \left(-\frac{2\tau w}{1 - \tau^2 w^2} \right) - Tw \end{cases}$$

De forma que el primer corte se produce cuando el argumento tiene el valor de -180° , es decir:

$$-Tw - \text{atan} \left(\frac{2\tau w}{1 - \tau^2 w^2} \right) = -180^\circ$$

Representando dicha función en Matlab, para un valor de $\tau = 2$ y una $T = 1$. Se obtiene que el corte se produce para una frecuencia $w = 1.018$. **Nota:** para tomar la medida correcta hay que ignorar el escalón que se produce, de forma que $4.17 - 1.83 = 2.98$, hay que coger ese valor que coincide con 2.98 , y este se corresponde con 1.018 (Aproximadamente).

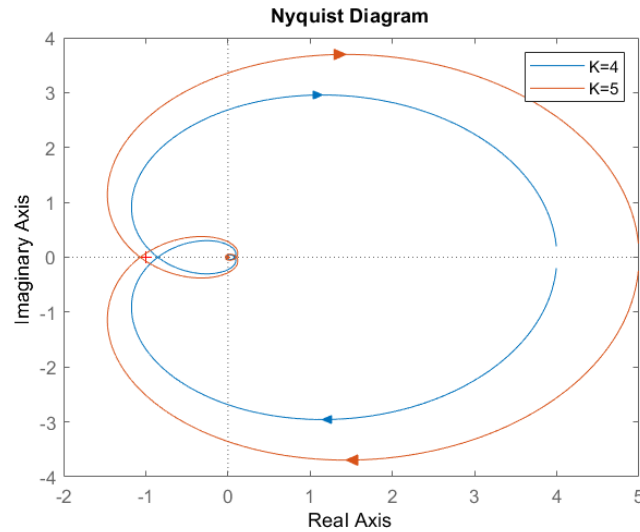


Gráfica 58: Representación del argumento, con el objetivo de obtener el primer corte en el semieje negativo de abscisas.

Sustituimos dicha w , en la parte real, y el punto de corte se corresponde con:

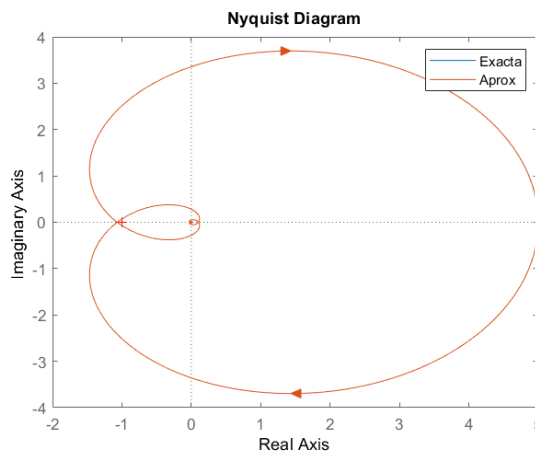
$$|CD(jw)| = |K| \left| \frac{1}{\sqrt{1 + 2\tau^2 1.01^2 + \tau^4 1.01^4}} \right| |1| = \frac{K}{5.08}$$

Por tanto cuando K sea mayor que 5 rodeará al punto crítico en sentido antihorario. Como se puede observar en la siguiente gráfica (Gráfica 59) para una $K = 5$, el diagrama polar rodeará al punto crítico, sin embargo para una $K = 4$ no llega a alcanzarlo:



Gráfica 59: Diagrama de Nyquist, segundo orden simple con retardo.

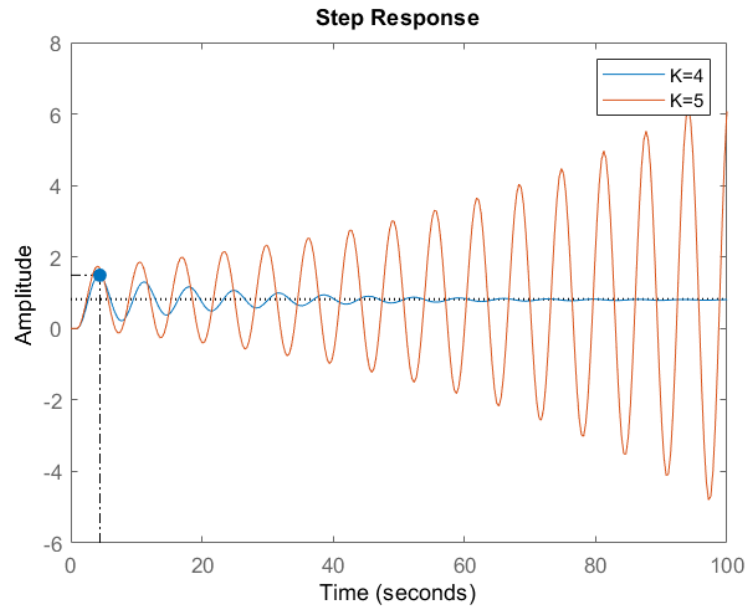
A continuación aplicamos la aproximación de Padé, para conocer los polos del sistema, y de esta forma poder aplicar el criterio de Nyquist. Aplicamos una aproximación de Padé de orden 6, que como podemos observar es más que suficiente (Se ha hecho con una ganancia de 5, debido a que es cuando rodea al punto crítico):



Gráfica 60: Comparación sistema con retardo con aproximación de Padé.

Si obtenemos los polos del sistema, vemos que todos los polos pertenecen al semiplano izquierdo, $(-5.0319 + 8.9853i, -5.0319 - 8.9853i, -7.4714 + 5.2525i, -7.4714 - 5.2525i, -8.4967 + 1.7350i, -8.4967 - 1.7350i, -0.5000 + 0.0000i, -0.5000 - 0.0000i)$. Por tanto, aplicando el criterio de Nyquist, si el número de polos inestables no coincide con el número de vuelta en sentido antihorario, el sistema se comporta de forma inestable.

Las gráficas siguientes ilustran la respuesta a una entrada escalón del sistema con ganancias 4 y 5:



Gráfica 61: Respuesta a entrada escalón de un sistema de segundo orden con retardo.

Por tanto, se puede observar como el sistema sin retardo es estable para cualquier valor de K , y al añadir el retardo, se vuelve inestable para ganancias mayores que 5.

Con el objetivo de solucionar el problema de la estabilidad en los sistemas con retardo, se añade la estructura del Predictor de Smith.

7.2 *Predictor de Smith ideal*

A continuación añadimos el predictor de Smith a la función con el retardo. De la forma:

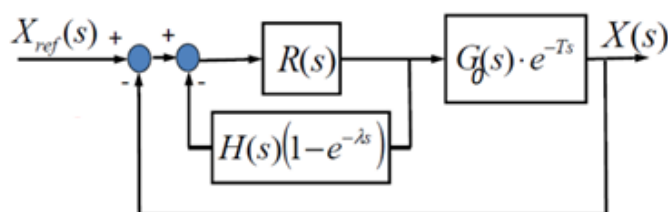


Figura 7: Estructura del predictor de Smith.

Que como hemos visto en los casos anteriores, el predictor de Smith consigue que el retardo, aun cuando esté presente, no afecte a la estabilidad del sistema controlado.

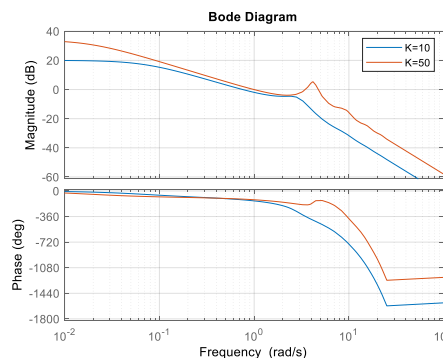
Como se ha demostrado en el apartado de cálculos del Predictor de Smith, la cadena directa de control con el Predictor de Smith quedará como sigue:

$$CD(s) = \frac{R(s)G(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G(s) - R(s)G(s)e^{-Ts}}$$

Donde sustituyendo para el caso de segundo orden simple con retardo queda de la forma:

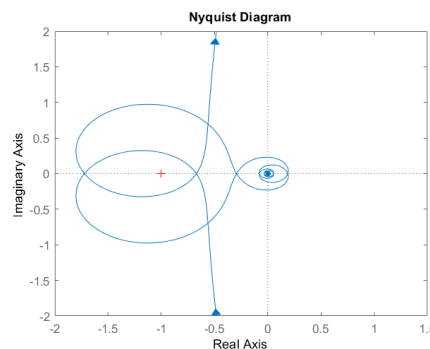
$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2\omega^2 + 2\tau j\omega - Ke^{-Tj\omega}}$$

La presencia del retardo afecta al módulo cuando este se encuentra en el denominador (también al argumento), de forma que este presentará oscilaciones. Otra forma de verlo es considerar el denominador como el resultado de una suma de vectores, de los que uno de ellos gira, afectando periódicamente al módulo y al argumento de la CD. Parece evidente que las mencionadas oscilaciones tendrán más protagonismo cuanto mayor sea K. La gráfica siguiente muestra el DdB del sistema con K=10 y con K=50, en el que se aprecian con mayor nitidez las oscilaciones del módulo (*Gráfica 62*):



Gráfica 62: Diagrama de Bode, donde se muestra las oscilaciones del módulo.

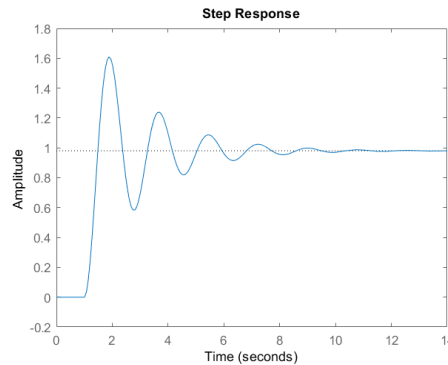
No obstante, en la gráfica anterior se aprecia una subida de módulo de en torno a 180° con un ¿pico de resonancia? que parece corresponderse con la presencia de 2 polos complejos conjugados con parte real positiva, propias de un sistema inestable. Por tanto, que el módulo crezca por encima de la unidad en torno a 4rad/seg, lo que junto al crecimiento de la fase de 180° determina que el diagrama de Nyquist de 2 vueltas en sentido antihorario en torno al punto crítico.



Gráfica 63: DN del sistema de segundo orden con el predictor de Smith ideal.

Puede apreciarse que para K=50, el DN da 2 vueltas en sentido antihorario. La pregunta que surge es: ¿esas vueltas determinan inestabilidad? La respuesta a

esa pregunta no es sencilla, pues la aplicación del criterio de Nyquist requiere conocer el número de polos de $CD(s)$ en el semiplano derecho, siendo que tenemos en su denominador una función trascendente (el término oscilante $e^{-Tj\omega}$). La gráfica siguiente muestra la respuesta al escalón, poniendo de manifiesto la estabilidad en BC:

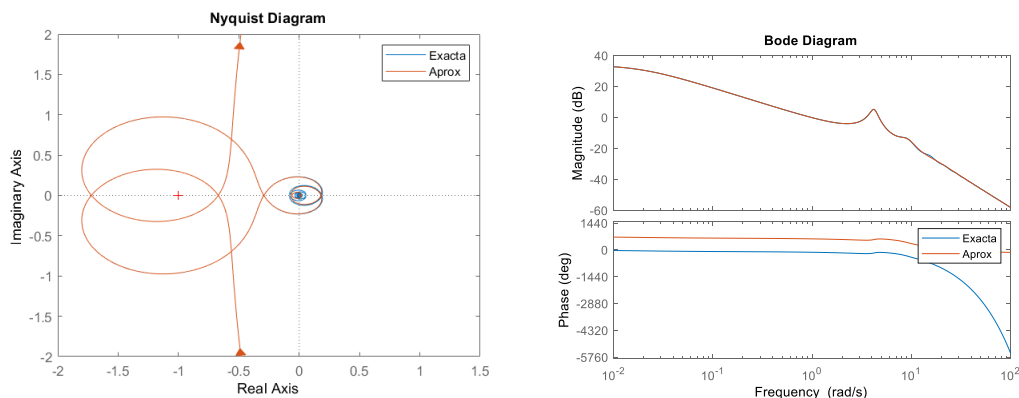


Gráfica 64: Respuesta escalón de un sistema de segundo orden con PS ideal.

Por ello, para realizar el análisis se propone sustituir dicho término oscilante por una aproximación polinomial (por ejemplo, la de Padé de un orden suficiente):

$$e^{-j\omega} = \frac{s^6 - 42s^5 + 840s^4 - 10080s^3 + 75600s^2 - 332640s + 665280}{s^6 + 42s^5 + 840s^4 + 10080s^3 + 75600s^2 + 332640s + 665280}$$

La validez de la aproximación realizada puede corroborarse comparando el DN obtenido con el retraso puro y con su aproximación de Padé, o también realizando el diagrama de Bode de ambos:

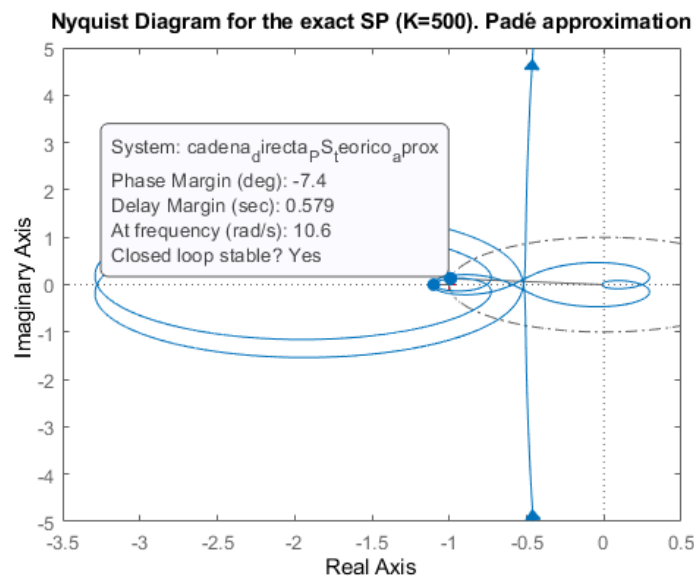


Gráfica 65: Comprobación de la aproximación de Padé.

Se observa que en la zona de interés la diferencia es nula (dicha diferencia comienza a darse para frecuencias muy altas (diagrama de Bode), para las que el módulo está próximo a cero), por lo que puede aplicarse el método de Nyquist. Los polos de $CD(s)$ con la aproximación de Padé de 6º orden son: $-22.3660 + 0.0000i$, $-8.8281 + 13.7846i$, $-8.8281 - 13.7846i$, $-1.8616 + 9.0475i$, $-1.8616 - 9.0475i$, $0.3819 + 4.1887i$, $0.3819 - 4.1887i$, $-0.0184 + 0.0000i$. Como puede

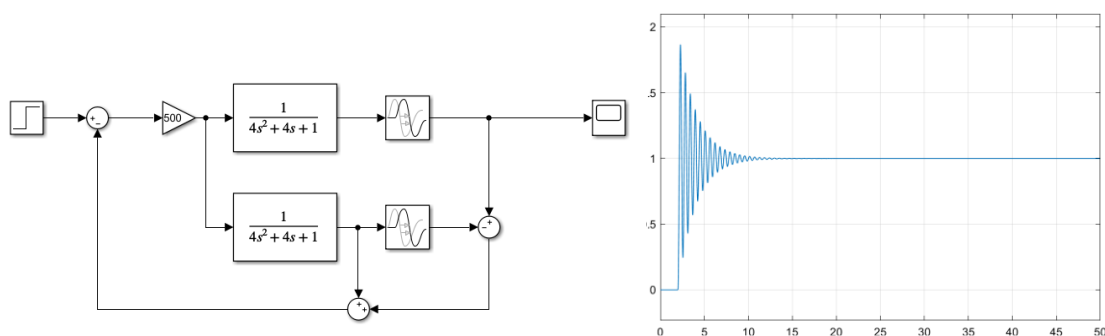
verse, hay 2 polos del bucle abierto en el semiplano derecho, por lo que para que el sistema sea estable, el DN debe circunvalar al PC 2 veces en sentido antihorario, tal y como sucede.

Buscando el límite del SP exacto, probemos con un valor de K todavía más elevado ($K=500$). Observando el DN, se aprecia que da 4 vueltas en torno al PC en sentido antihorario, pero dado que (con la aproximación de Padé de 6º orden) existen 4 polos con parte real positiva en bucle abierto ($1.4372 \pm 11.3562i$ y $0.3482 \pm 6.1657i$), el sistema sigue siendo estable:



Gráfica 66: Diagrama de Nyquist del sistema de segundo orden con Predictor de Smith ideal.

Su respuesta al escalón (obtenida del esquema de Simulink adjunto):



Gráfica 67: Diagrama de Nyquist del sistema de segundo orden con Predictor de Smith ideal.

En resumen, la estructura del Predictor de Smith Ideal es capaz de estabilizar el sistema de segundo orden simple con retardo para cualquier valor de la ganancia.

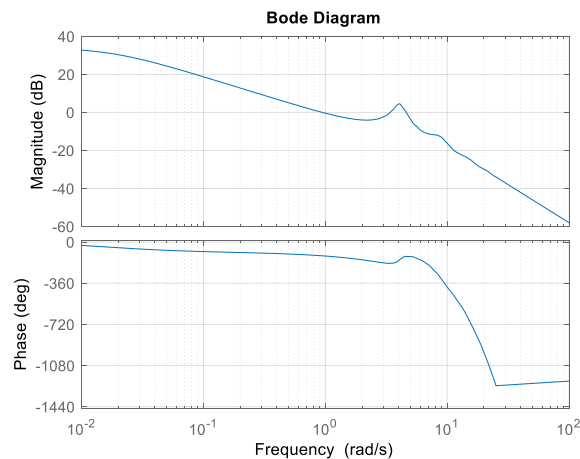
7.3 *Predictor de Smith real*

¿Qué sucede cuando en un sistema de segundo orden, se produce una desviación en el cálculo del retardo de la estructura del Predictor de Smith? Es decir: $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo.

Continuando con el sistema de estudio actual:

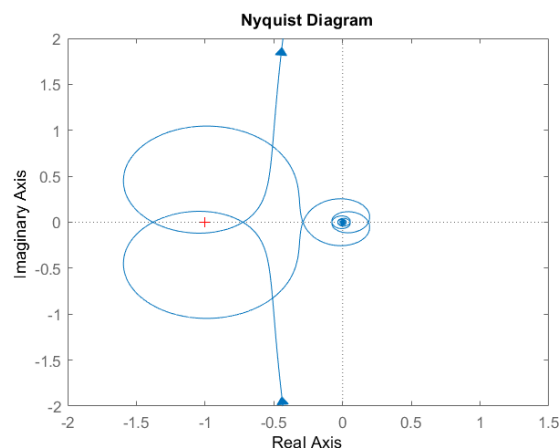
$$CD(j\omega) = \frac{K e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega - K e^{-(T+\delta)j\omega}}$$

Como seguimos teniendo el retardo en el denominador ($e^{-(T+\delta)j\omega}$), el módulo del sistema seguirá teniendo esas oscilaciones, como se puede observar en la gráfica siguiente (Con una $K = 50$, y esta vez una $\delta = 0.05$).



Gráfica 68: Diagrama de Bode del Predictor de Smith con desviaciones en la estimación.

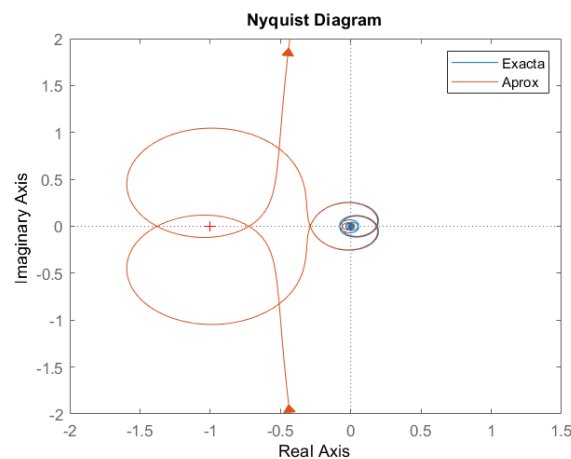
Dichas oscilaciones provocan que el módulo sea superior que la unidad, y junto al crecimiento de la fase de 180°, va a determinar que el diagrama de Nyquist rodee en sentido antihorario entorno al PC, al igual que se ha explicado anteriormente:



Gráfica 69: Diagrama de Nyquist con la estructura del Predictor de Smith con desviaciones.

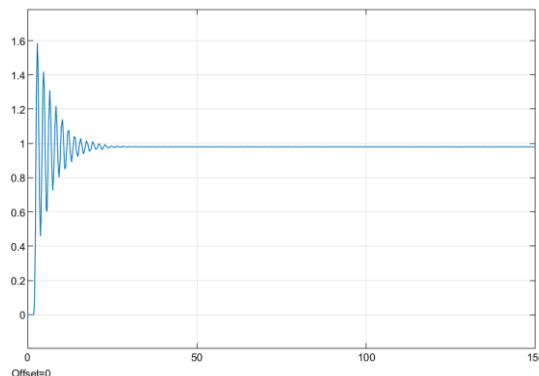
Como se puede observar, el DN rodea dos veces al punto crítico en sentido antihorario. Según el criterio de Nyquist “El punto $-1 + j0$ queda rodeado una o varias veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso, el sistema es estable si el número de rodeos en sentido contrario al de las agujas del reloj es igual al número de polos $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, el sistema es inestable.”

Por tanto para saber si es estable, sustituimos la función del retardo, por la aproximación de Padé, con el objetivo de poder obtener los polos de la cadena directa, y saber si el sistema va a ser estable. Para ello realizamos una aproximación de orden 6, que se puede ver, que en la zona de interés es bastante exacta:



Gráfica 70: Comprobación de la aproximación de Padé.

Y los polos que se obtienen son: $-21.6827 + 0.0000i$, $-8.3883 + 13.3570i$, $-8.3883 - 13.3570i$, $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-1.6699 + 8.6578i$, $-1.6699 - 8.6578i$, $0.4084 + 4.0838i$, $0.4084 - 4.0838i$, $-0.0176 + 0.0000i$. Encontramos dos polos en el semiplano derecho, por tanto se puede decir que el sistema se comporta de forma estable. Mediante SIMULINK, se obtiene la respuesta a una entrada escalón.

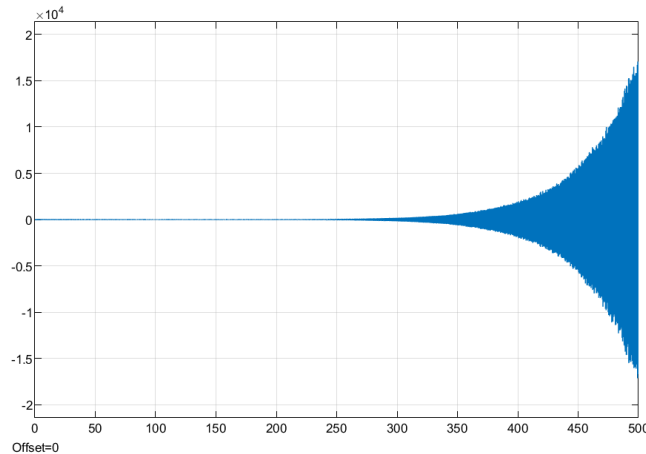


Gráfica 71: Respuesta entrada escalón mediante SIMULINK.

A continuación mediante simulaciones, se va buscar el límite de la ganancia donde el sistema se vuelve inestable. Y se va a hacer para distintas desviaciones y con un valor de $\tau = 2$.

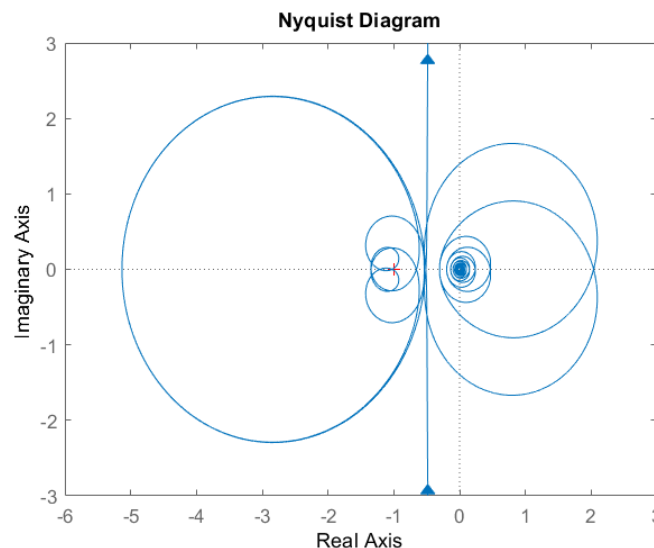
7.3.1 $\delta = 0.01$

Si se comete únicamente un error en la estimación del retardo de tan solo un 1%, el sistema se volverá inestable, con K mayores a 775. Pues mediante SIMULINK, se puede observar la respuesta a una entrada escalón:



Gráfica 72: Respuesta de un sistema de segundo orden con PS y un error en la estimación del 1%.

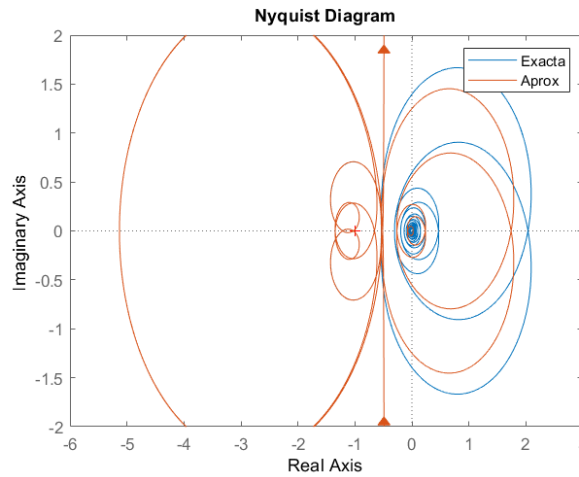
El diagrama de Nyquist que se obtiene:



Gráfica 73: Diagrama de Nyquist, con un error en la estimación de un 1%

Se puede observar, que da 4 vueltas al punto crítico en sentido antihorario, pero no corresponden con el número de polos inestables de la cadena directa, pues presenta 6 polos inestables: $0.8891 \pm 16.1509i$, $1.0565 \pm 11.8607i$, $0.2115 \pm 6.1654i$. Provocando así la inestabilización del sistema.

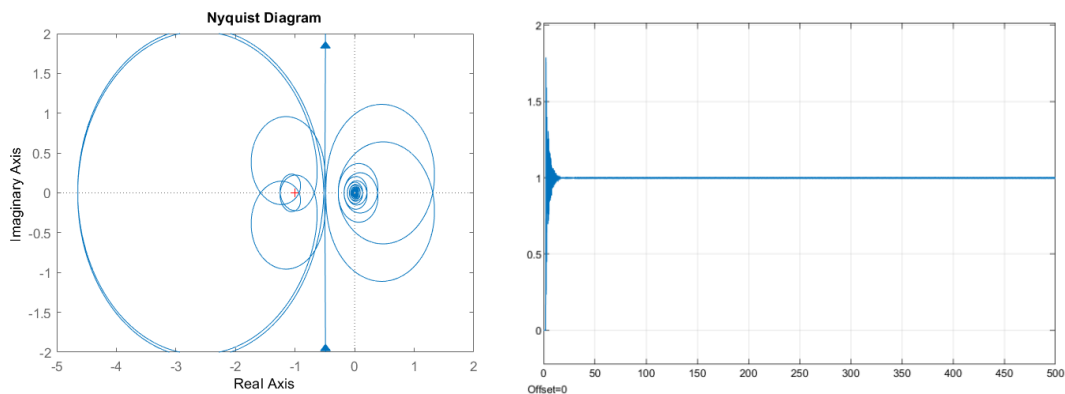
Mencionar que para este apartado se ha empleado una aproximación de Padé de orden 12, pues la aproximación de orden 6, no era capaz de imitar al diagrama de Nyquist en la zona de interés.



Gráfica 74: Aproximación de Padé de orden 12.

A continuación vamos a ver qué sucedería si se analiza el Predictor de Smith real para una K que haga que mi sistema se comporte de manera estable, por ejemplo, una $K = 700$.

Obtenemos el diagrama de Nyquist y la respuesta ante una entrada escalón:



Gráfica 75: Comportamiento del PS con una desviación del 1% y ganancia 700.

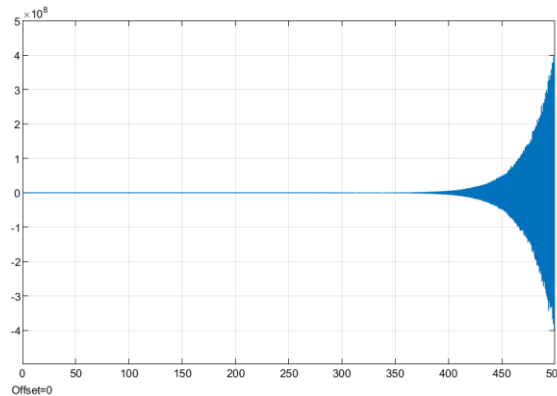
Si se observa con mucho detenimiento el diagrama de Nyquist, vemos que rodea 6 veces al punto crítico -1 . Que como coincide con los polos en el semiplano derecho ($0.6827 \pm 15.9942i$, $1.1305 \pm 11.6978i$, $0.2356 \pm 6.1559i$), se llega a la conclusión que el sistema se comporta de forma estable.

Notar que un segundo orden simple con la estructura del Predictor de Smith, es bastante bueno, debido a que aunque se cometa un error de un 1%, va a ser muy difícil inestabilizar el sistema.

7.3.2 $\delta = 0.05$

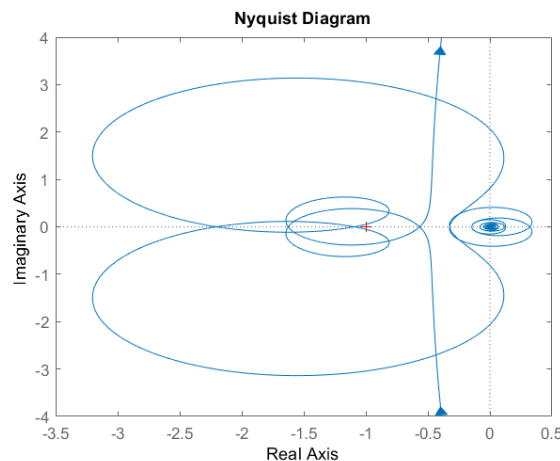
Si se comete una desviación de un 5%, en el cálculo del error, pues en base a la repetición de simulaciones, se observa que para K mayores o iguales a 197, el sistema se hará inestable.

Por ejemplo para una K = 200, se obtiene una respuesta ante una entrada escalón:



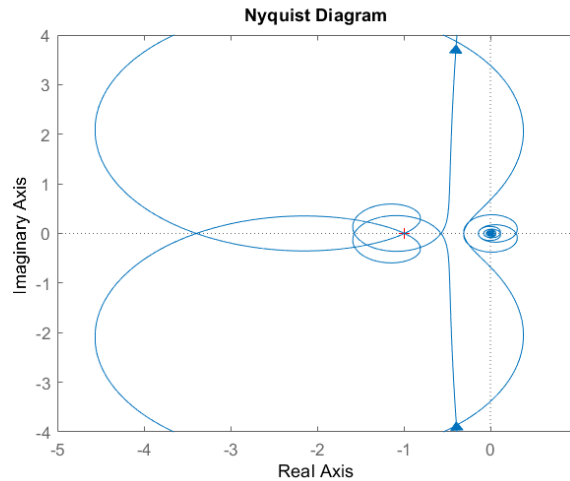
Gráfica 76: Respuesta escalón del PS con una desviación del 5% y ganancia 200

Si nos fijamos en el diagrama de Nyquist, se aprecia que da dos vueltas al PC, y si obtenemos los polos del sistema de la cadena directa, se aprecian 4 polos inestables ($0.2141 \pm 9.4582i$, $0.6642 \pm 5.4727i$), de esta forma se llega a la conclusión de que el sistema para una K = 200, el sistema es inestable.



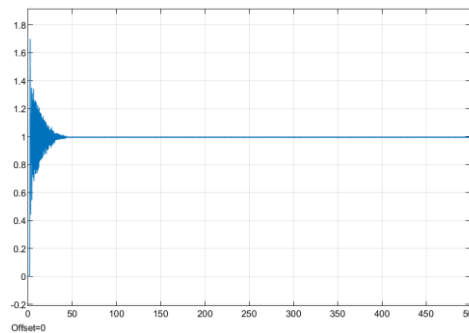
Gráfica 77: Diagrama de Nyquist, del PS con desviación del 5% y ganancia de 200.

A continuación, se va a estudiar un caso que se comporte de forma estable, pero que este próximo a la inestabilidad, para así descubrir cuál es la causa de la inestabilidad. Por ejemplo cogiendo una K = 190. Se obtiene el siguiente diagrama de Nyquist.



Gráfica 78: Diagrama de Nyquist, del PS con desviación del 5% y ganancia de 190.

Se aprecia que el diagrama de Nyquist, da 4 vueltas en sentido antihorario al punto crítico, y el número de polos inestables sigue siendo 4 ($0.6803 + 5.4286i$, $0.6803 - 5.4286i$, $0.1295 + 9.4046i$, $0.1295 - 9.4046i$). Por tanto el sistema se comporta de forma estable.



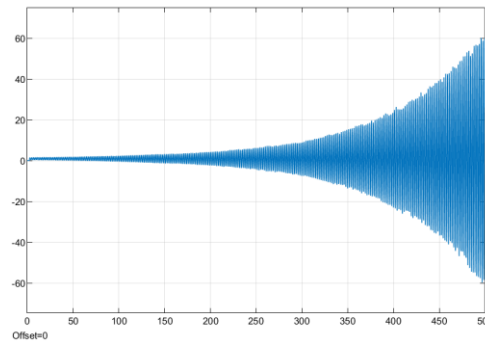
Gráfica 79: Respuesta escalón del PS con desviación del 5% y ganancia de 190.

Al final lo que provoca la inestabilidad, es que al aumentar la ganancia, el diagrama de Nyquist se desplaza un poco más hacia la izquierda, de forma que ya no rodea al punto crítico 4 veces sino 2.

7.3.3 $\delta = 0.1$

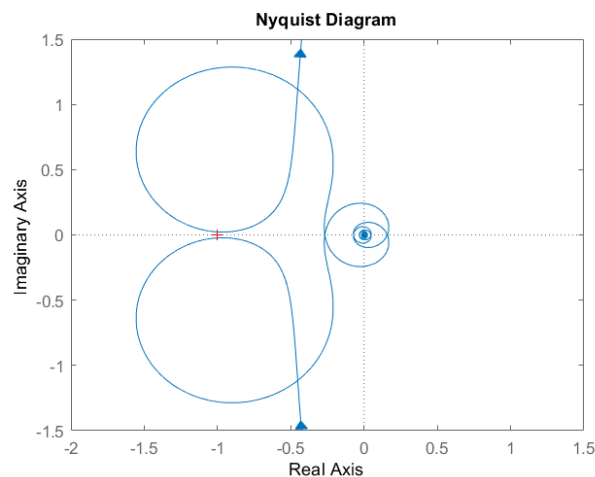
A continuación se va a suponer que se comete una error en la estimación del retardo de un 10%. Para este caso ganancias por encima de 44, se comportan de manera inestable.

Por ejemplo si se escoge una $K = 45$, se obtiene la siguiente respuesta ante una entrada escalón:



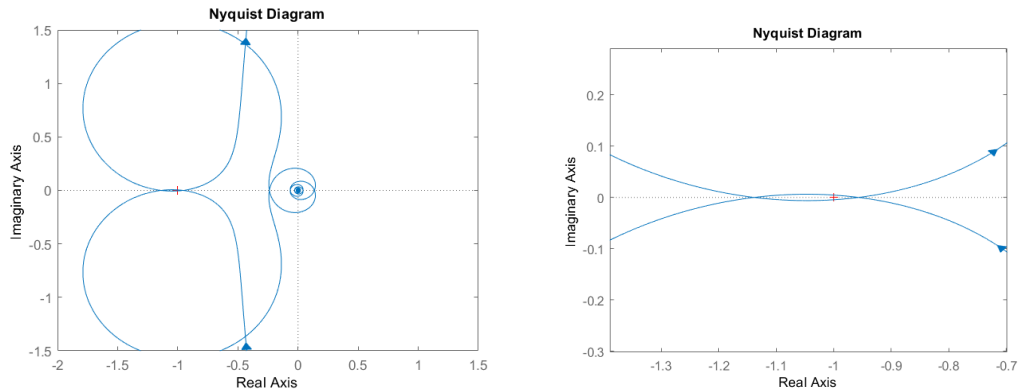
Gráfica 80: Respuesta escalón del PS con desviación del 10% y ganancia de 45.

Para entender, la inestabilidad del sistema, obtenemos el diagrama de Nyquist, en el que podemos apreciar muy bien, que no da ninguna vuelta al punto crítico, es más si nos fijamos, ni siquiera corta el semieje negativo de abscisas por encima del valor -1. Pero, ¿Por qué no es estable? Es debido a que si se obtienen los polos de la cadena directa, mediante una aproximación de Padé, se observa que hay 2 polos inestables ($0.3719 + 3.8911i$, $0.3719 - 3.8911i$), y como indica el Criterio de Nyquist, para que un sistema sea estable, el número de polos en el semiplano derecho, tiene que coincidir con el número de vueltas que de el diagrama de Nyquist, en sentido antihorario al PC.



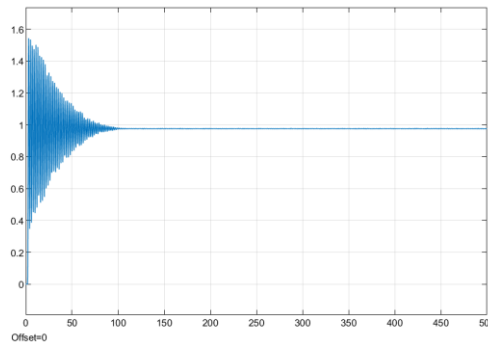
Gráfica 81: DN del sistema de segundo orden con PS, una desviación del 10% y ganancia de 45.

Si analizamos esto mismo, pero con una K menor, por ejemplo, $K = 40$, que ya sabemos de antemano que se comporta de forma estable. Se puede deducir, que el diagrama de Nyquist para este caso si que rodeará el punto crítico dos veces. Esto se puede ver, porque para una $K = 45$, el diagrama de Nyquist a bajas frecuencias parte de $-\infty$, sube, y luego da una vuelta y tiende a cero. Por ello, se puede deducir, que para $K = 40$, esa vuelta sucederá un poco más arriba, cortando con el semieje negativo de abscisas, y rodeando al punto crítico.



Gráfica 82: DN del sistema de segundo orden con PS, una desviación del 10% y ganancia de 40.

El número de polos en el semiplano derecho sigue siendo 2 ($0.3060 + 3.7885i$ y $0.3060 - 3.7885i$) y por tanto para una $K = 40$, el sistema es estable.



Gráfica 83: Respuesta de un sistema de segundo orden con PS y una desviación del 10% y $K=40$.

7.4 Conclusión

Podemos observar que en el caso de un sistema de segundo orden simple con retardo, el sistema en bucle cerrado se termina inestabilizando al elevar un poco la ganancia (En el caso explicado para ganancias mayores que 5). Al colocar la estructura del Predictor de Smith sin error en la estimación del retardo, se consigue estabilizar el sistema, para cualquier valor de la ganancia.

Pero cuando se comete un error en la estimación ya no es para cualquier valor de las ganancias, sino que por ejemplo, para el caso que se ha estudiado, si se comete un error de un 1%, se inestabiliza para una ganancia de 775, un error de un 5%, supondrá la inestabilidad cuando la ganancia sea superior a 200, de un 10% para ganancias mayores a 45.

Se puede observar que cuanto mayor sea el error en la estimación, antes se inestabilizará el sistema, por tanto, el Predictor de Smith en la realidad no consigue estabilizar el sistema.

También mencionar que para este sistema de segundo orden simple, el Predictor de Smith funciona mejor que para los casos de primer orden.

8. Sistema de segundo orden con un polo en el origen

En este apartado se va a analizar otro sistema de segundo orden, el cual consiste en un sistema que contiene uno de sus polos en el origen. Como se ve a continuación:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + \tau s)} = \frac{K}{\tau s^2 + s}$$

8.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado

El diagrama de Nyquist (DN) del sistema en bucle abierto (o si se prefiere, de la cadena directa), nos permite estudiar la estabilidad en BC:

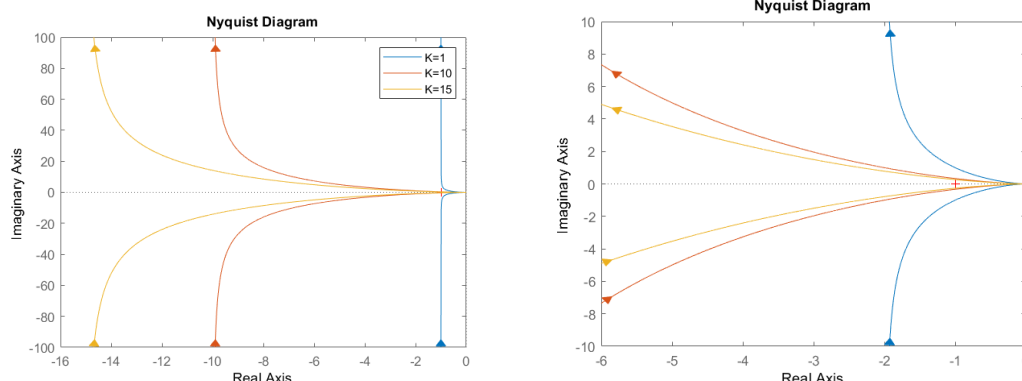
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + \tau j\omega)}$$

Para el sistema sin el retardo (Ecuación anterior), a bajas frecuencias el sistema parte de ∞ , con una fase de -90° . Cuando aumentamos la frecuencia, el sistema sin el retardo tiende a 0, con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{j0(1 + j0)} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K}{\infty(1 + \infty)} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Como se puede ver en la siguiente gráfica (Gráfica 86), para distintos valores de K:

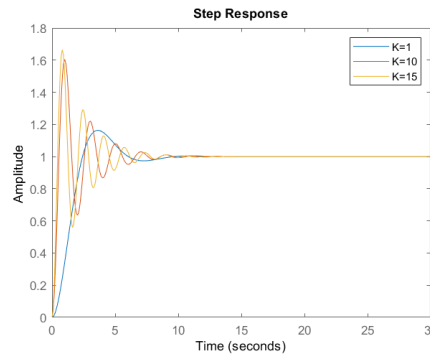


Gráfica 86: DN, para el sistema de segundo orden con un polo en el origen y sin retardo.

Se puede observar, que por mucho que aumente la ganancia, y aunque el sistema parte del semiplano negativo, llegue a cero, y se vuelva a ir por el semiplano negativo, no rodea al punto crítico en sentido antihorario, de forma que

si el número de polos de la cadena directa, se encuentra en el plano izquierdo (lo cual se cumple para este caso), el sistema se comporta de forma estable.

Se puede comprobar con la respuesta en bucle cerrado ante una entrada escalón.



Gráfica 87: Respuesta del sistema segundo orden con un polo en el origen y sin retardo.

A continuación se analiza el sistema con retardo:

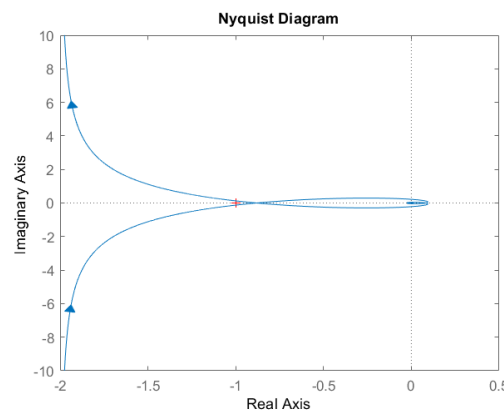
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + \tau j\omega)} e^{-Tj\omega}$$

A bajas frecuencias el sistema parte de ∞ , con una fase de -90° . Conforme aumentamos la frecuencia el sistema tiende a 0 con una fase de $-\infty$.

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{j0(1 + \tau j0)} e^{-Tj0} = -j \frac{K}{0} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = \infty \\ Arg(CD(j\omega)) = -90^\circ \end{cases}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K}{\infty(1 + \infty)} e^{-Tj\infty} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

La presencia del retardo, va a provocar con el mismo módulo que antes, que la fase sea menor debido al factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador, por lo que se producirán cortes con el semieje negativo de abscisas, como el que se puede ver a continuación para una $K = 1$:



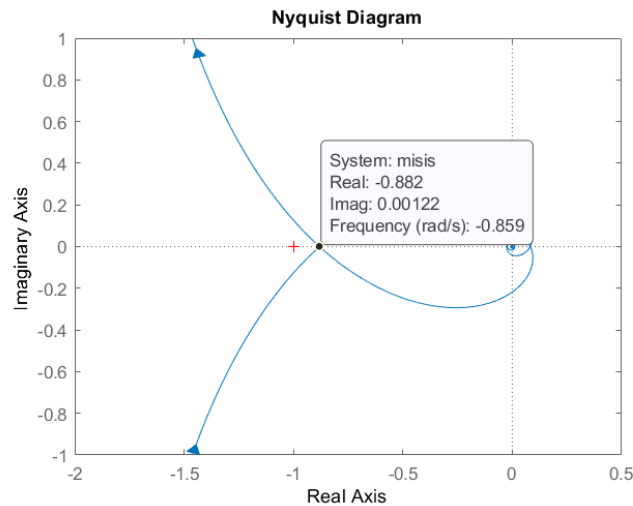
Gráfica 88: DN, del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo.

Es interesante saber cuándo se produce ese punto de corte, para ello:

$$\begin{aligned} CD(j\omega) &= K \frac{1}{j\omega(1 + \tau j\omega)} e^{-Tj\omega} = K \frac{1}{(j\omega - \tau\omega^2)} e^{-Tj\omega} = K \frac{(j\omega + \tau\omega^2)}{-\omega^2 - \tau^2\omega^4} e^{-Tj\omega} \\ &= K \frac{(j + \tau\omega)}{-\omega - \tau^2\omega^3} e^{-Tj\omega} = K \left[\frac{-\tau\omega}{\omega + \tau^2\omega^3} - \frac{1}{\omega + \tau^2\omega^3} j \right] e^{-Tj\omega} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} |CD(j\omega)| = K \frac{1}{\omega\sqrt{(1 + \tau^2\omega^2)}} \\ Arg(CD(j\omega)) = \tan^{-1} \frac{1}{\tau\omega} - T\omega \end{cases}$$

Necesito conocer el valor de la frecuencia, y ese resultado se ha obtenido a través del diagrama de Nyquist (*Gráfica 89*), siendo $\omega = 0.86$.



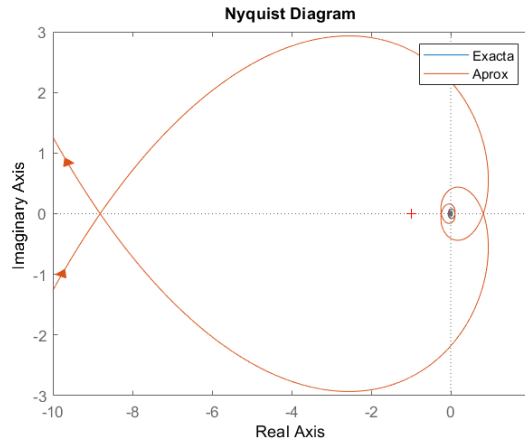
Gráfica 89: Diagrama de Nyquist, cálculo de la frecuencia.

Sustituyendo en el módulo:

$$|CD(j\omega)| = K0.88$$

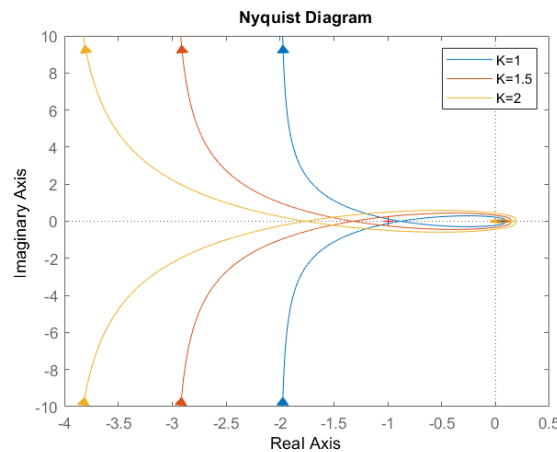
Por tanto cuando $|CD(j\omega)| > 1$, el Diagrama de Nyquist superará el punto -1, esto sucede para $K > 1.13$.

Se han obtenido los polos de la cadena directa: $0.0000 + 0.0000i$, $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$, $-1.0000 + 0.0000i$. Para ello se ha empleado una aproximación de Padé de orden 6, y una $K = 10$. A continuación se puede observar en la siguiente gráfica, una comparación entre el diagrama de Nyquist empleando la función del retardo, y empleando la aproximación de Padé.

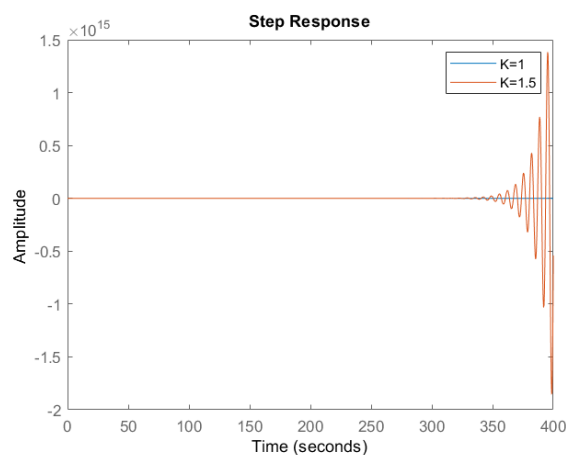


Gráfica 90: DN de la aproximación de Padé junto con el retardo.

A continuación se puede observar la gráfica del diagrama de Nyquist, para distintos valores de K:



Gráfica 91: DN, del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo.



Gráfica 92: Respuesta del sistema de segundo orden con un polo en el origen y retardo en bucle cerrado.

A la vista de las gráficas anteriores, el efecto del retardo, hace que corte el semieje negativo de abscisas, provocando la inestabilidad del sistema, con

únicamente una $K > 1.134$.

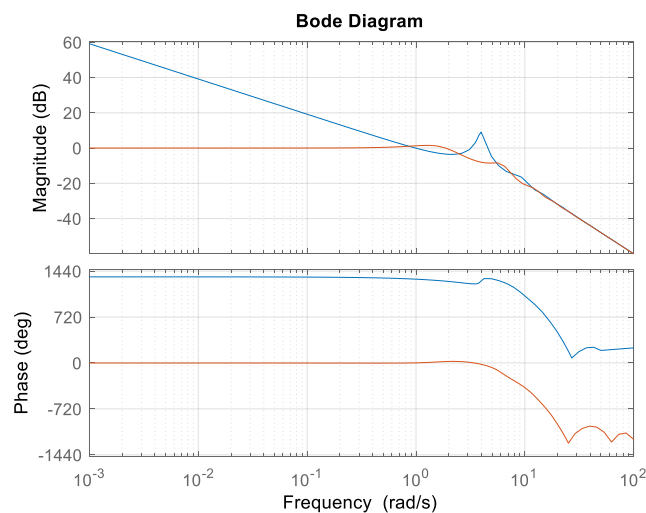
En este sistema, se aprecia muy bien como el retardo influye en la estabilidad del sistema.

8.2 *El predictor de Smith ideal*

De nuevo, se añade la estructura del predictor de Smith, donde para el caso que nos ocupa:

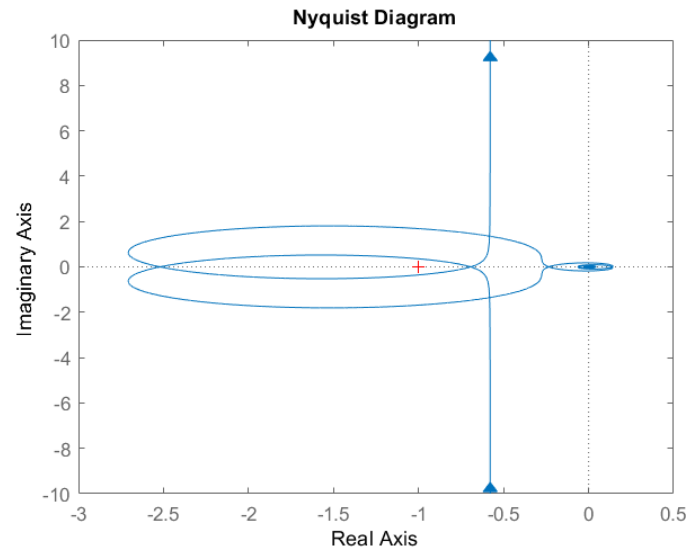
$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{(1 + \tau j\omega)j\omega + K - Ke^{-Tj\omega}}$$

La presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo (únicamente a la fase, indicando que el DN va a dar ∞ vueltas en torno al origen). En cambio, la presencia de dicho factor en el denominador sí afecta al módulo (también al argumento), de forma que este presentará oscilaciones.



Gráfica 93: Oscilaciones en el Diagrama de Bode.

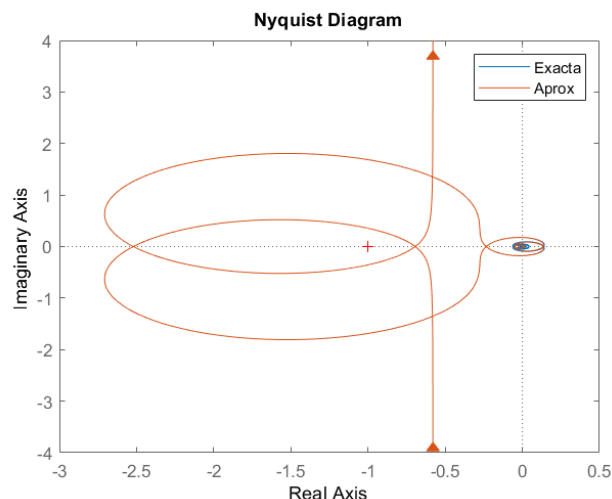
Por ejemplo para el caso de $K = 10$, con el Predictor de Smith (trazado azul), se pueden apreciar las mencionadas oscilaciones en el módulo, dicho módulo se aprecia que crece por encima de la unidad, lo que junto con el crecimiento de la fase por encima de 180° determina que el diagrama de Nyquist dará 2 vueltas en sentido antihorario en torno al punto crítico. A continuación se obtiene el diagrama de Nyquist ($K = 10$):



Gráfica 94: DN del sistema de segundo orden con polo en el origen con PS.

Al igual que antes queremos saber si esas vueltas determinan la inestabilidad del sistema. Para ello se requiere conocer el número de polos de la $CD(s)$ en el semiplano derecho, siendo que tenemos en su denominador una función trascendente (el término oscilante $e^{-Tj\omega}$).

Por ello, empleamos nuevamente la aproximación de Padé de orden 6, que la validez de la aproximación realizada puede corroborarse comparando el DN obtenido con el retraso puro y con su aproximación de Padé:

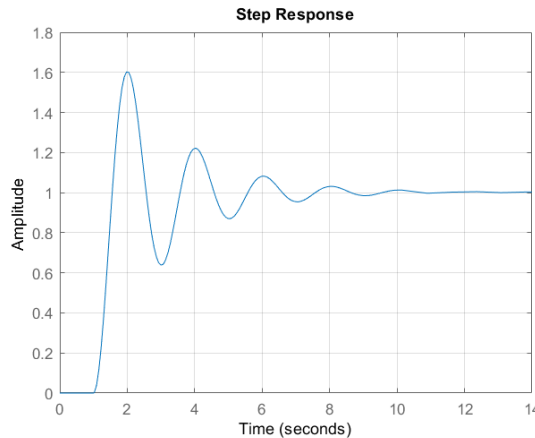


Gráfica 95: Aproximación de Padé comparada con el del retardo puro.

Se observa que en la zona de interés la diferencia es nula (dicha diferencia comienza a darse para frecuencias muy altas, para las que el módulo está próximo a cero), por lo que puede aplicarse el método de Nyquist. Los polos de $CD(s)$ con la aproximación de Padé de 6º orden son: $0.0000 + 0.0000i$, $-21.5097 + 0.0000i$, $-8.8714 + 13.2634i$, $-8.8714 - 13.2634i$, $-2.1056 + 8.9672i$, $-2.1056 - 8.9672i$,

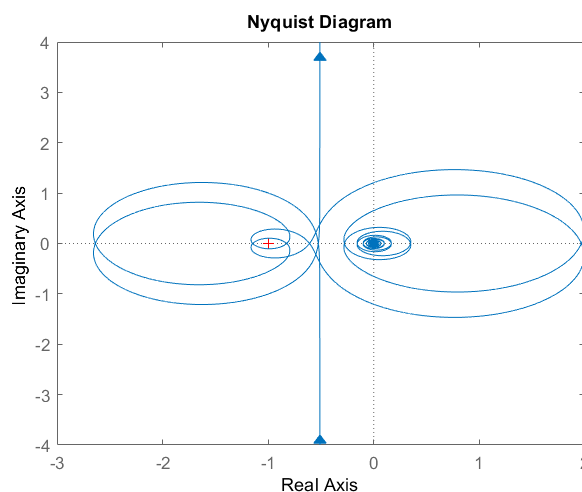
$0.2319 + 3.9617i$, $0.2319 - 3.9617i$. Como puede verse, hay 2 polos del bucle abierto en el semiplano derecho, por lo que para que el sistema sea estable, el DN debe circunvalar al PC 2 veces en sentido antihorario, tal y como sucede.

La gráfica siguiente muestra la respuesta al escalón, poniendo de manifiesto la estabilidad en BC:



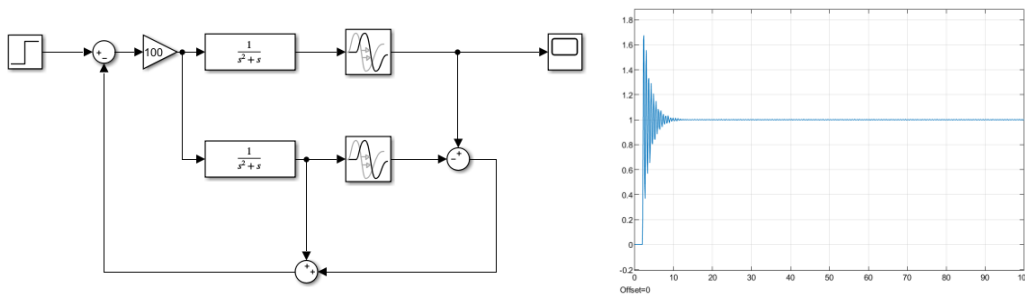
Gráfica 96: Respuesta del sistema de segundo orden con polo en el origen y PS ideal.

Buscando el límite del SP exacto, probemos con un valor de K todavía más elevado ($K=100$). Observando el DN, se aprecia que da 4 vueltas en torno al PC en sentido antihorario, pero dado que (con la aproximación de Padé de 6º orden) existen 4 polos con parte real positiva en bucle abierto ($0.0000 + 0.0000i$, $-33.5447 + 0.0000i$, $-6.3556 + 20.1657i$, $-6.3556 - 20.1657i$, $1.1869 + 10.8718i$, $1.1869 - 10.8718i$, $0.4411 + 6.1048i$, $0.4411 - 6.1048i$), el sistema sigue siendo estable.



Gráfica 97: DN para el sistema de segundo orden con polo en el origen con el PS ideal y $K=100$.

Su respuesta al escalón (obtenida del esquema de Simulink adjunto):



Gráfica 98: Respuesta ante una entrada escalón del sistema de segundo orden con un polo en el origen obtenida por SIMULINK.

8.3 El predictor de Smith realista

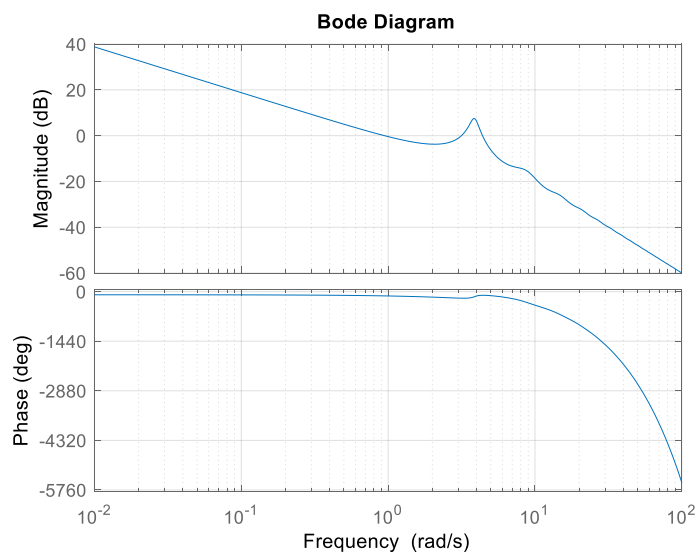
¿Qué sucedería sin embargo si el retardo empleado en el predictor de Smith no se correspondiese exactamente con el retardo que exhibe el sistema? Vamos a suponer que se ha identificado correctamente a $G_0(s)$, es decir: $H(s) = G_0(s)$, pero no así al retraso puro, es decir: $\lambda = T + \delta$, donde δ representa la desviación en la estimación del retardo. Supóngase también que inicialmente $T=1$:

$$CD(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s) - R(s)G_0(s)e^{-(T+\delta)s}}$$

En nuestro sistema de estudio:

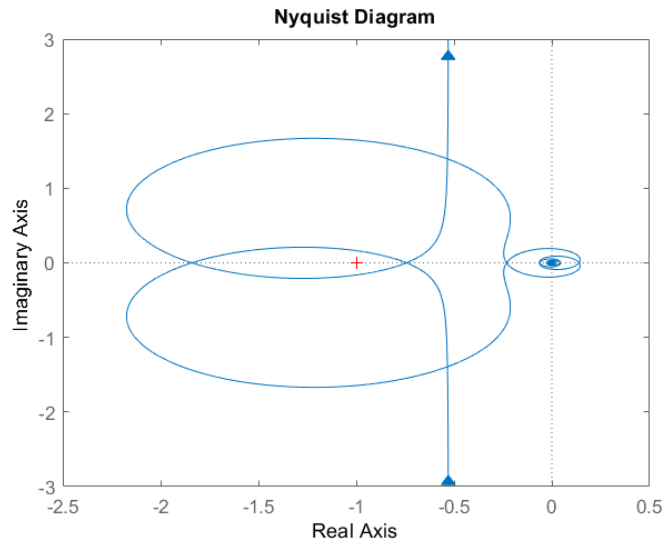
$$CD(j\omega) = \frac{Ke^{-Tj\omega}}{(1 + \tau j\omega)j\omega + K - Ke^{-(T+\delta)j\omega}}$$

Como seguimos teniendo el retardo puro en el denominador ($e^{-(T+\delta)j\omega}$), el módulo del sistema seguirá teniendo esas oscilaciones, como se puede observar en la gráfica siguiente (Con una $K = 10$, y esta vez una $\delta = 0.05$).



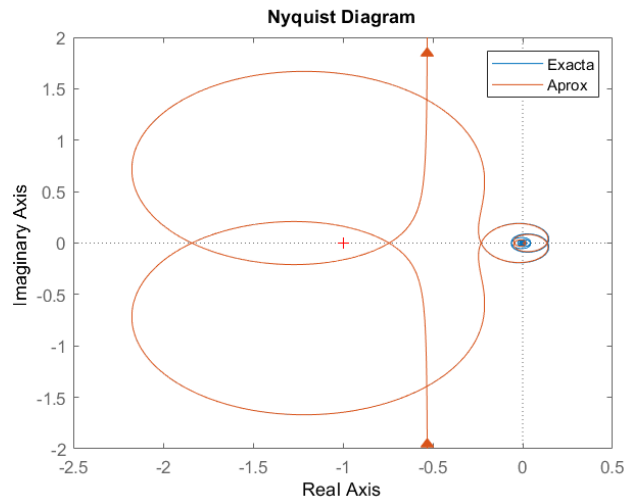
Gráfica 99: Diagrama de Bode, oscilaciones en el módulo.

Al igual que antes, dicho módulo crece por encima de la unidad. Lo que junto al crecimiento de la fase de 180° , va a determinar que el diagrama de Nyquist de 2 vueltas en sentido antihorario entorno al PC:



Grafica 100: DN del sistema de segundo orden con polo en el origen y PS con desviaciones en la estimación del retardo.

La pregunta que nos debemos hacer es si es estable, y lo mejor para ello es emplear la aproximación de Padé (de nuevo se va a emplear una de orden 6), debido a que si comparamos los diagramas de Nyquist, en la zona de interés son muy parecidas.



Grafica 101: Comparación aproximación de Padé con retardo puro.

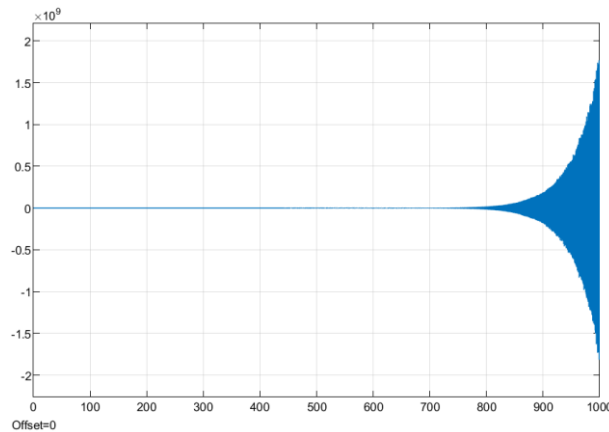
Los polos de la cadena directa del predictor de Smith realista son: $-20.8457 + 0.0000i$, $-8.4407 + 12.8496i$, $-8.4407 - 12.8496i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-1.9079 + 8.5788i$, $-1.9079 - 8.5788i$, $0.2715 + 3.8638i$, $0.2715 - 3.8638i$, $0.0000 + 0.0000i$.

Encontramos dos polos en el semiplano derecho, por tanto, como los polos del semiplano derecho, coinciden con el número de vueltas que da el Diagrama de Nyquist al punto crítico en sentido antihorario, se puede afirmar que el sistema se va a comportar de forma estable.

Pero no nos conformamos con esto, el objetivo va a ser encontrar cuando se va a inestabilizar este sistema, encontrar el límite de K para el cual el sistema es estable.

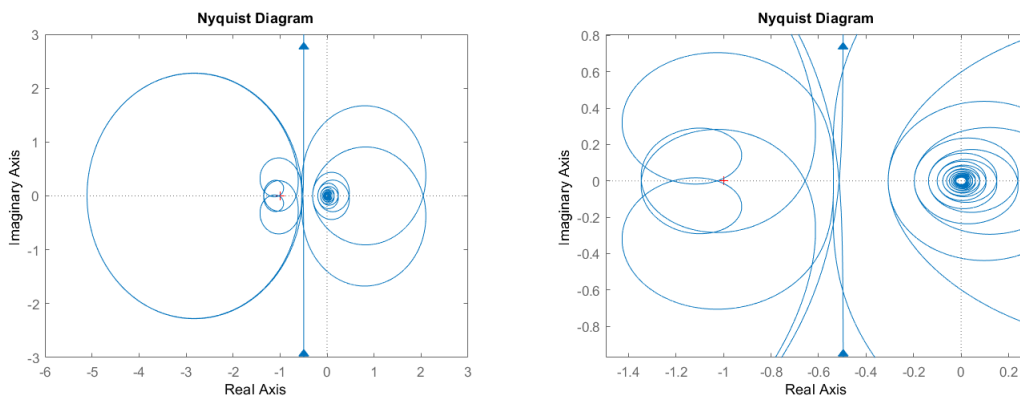
8.3.1 $\delta = 0.01$

Comenzamos con una desviación pequeña de 0.01. Mediante SIMULINK, se observa que para una $K = 194$, el sistema se inestabiliza:



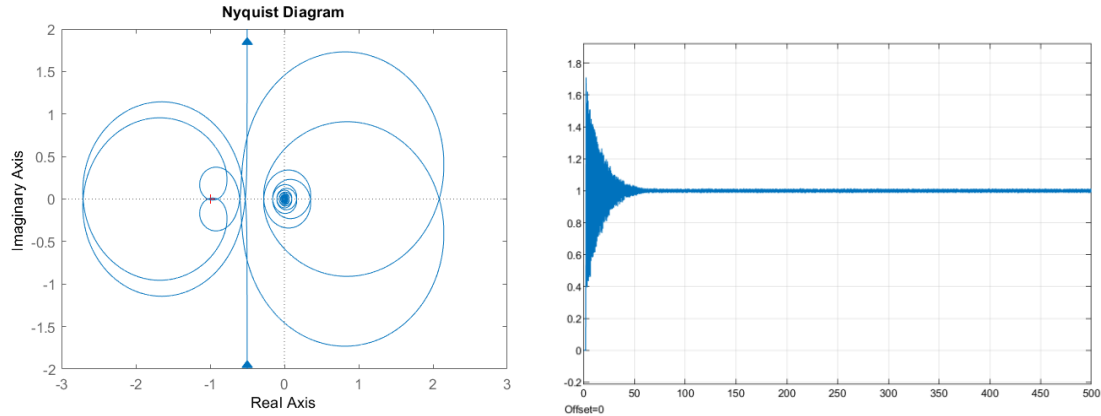
Gráfica 102: Respuesta ante una entrada escalón del sistema de segundo orden con un polo en el origen, desviación del 1% y una ganancia de 194.

Si obtenemos el diagrama de Nyquist, con dificultad se observa que da 4 vueltas al punto crítico en sentido antihorario, y el número de vueltas no coincide con el número de polos en el semiplano derecho que se obtiene con la aproximación de Padé (De orden 12, para este caso): $0.8901 \pm 16.1512i$, $1.0575 \pm 11.8605i$, $0.2127 \pm 6.1653i$.



Gráfica 103: DN del sistema de segundo orden con un polo en el origen para una desviación del 1% y una ganancia de 194.

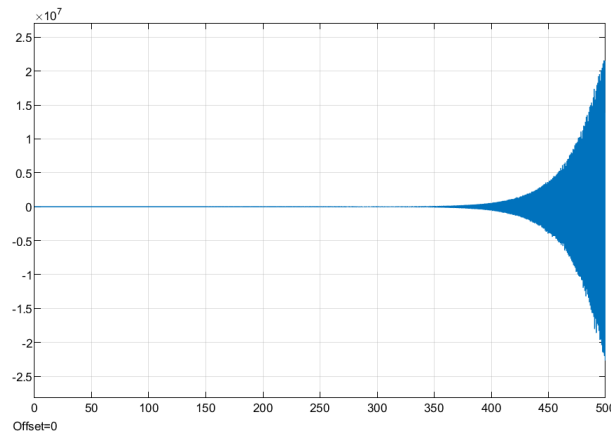
Sin embargo si hubiéramos cogido una K de 100, se observa que da 4 vueltas en sentido antihorario al punto crítico, y justo coincide con el número de polos en el semiplano derecho: $1.0552 \pm 10.5935i$, $0.4267 \pm 6.0493i$. Por tanto el sistema, es estable, se puede observar en la gráfica obtenida por Simulink.



Gráfica 104: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 1% y una ganancia de 194.

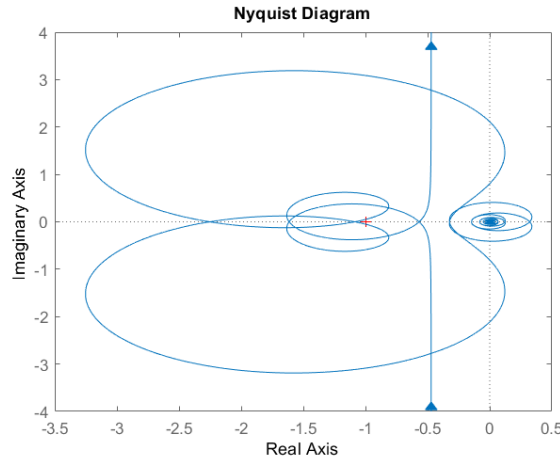
8.3.2 $\delta = 0.05$

Si aumentamos el error en la estimación del retardo a 0.05 (es decir, se ha cometido un error en la estimación del 5%), la inestabilidad del sistema se aprecia con una $K=50$. Como se puede observar a continuación:



Gráfica 105: Respuesta escalón de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 50.

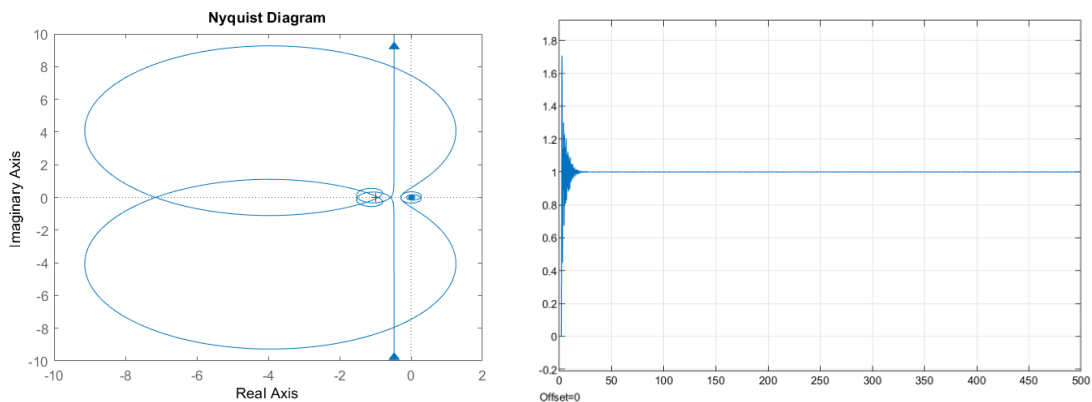
Obtenemos el diagrama de Nyquist, para saber porque este sistema es inestable:



Gráfica 106: DN de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 50.

Resulta mucho más sencillo ver que da dos vueltas al punto crítico -1. Y para este caso, presenta 4 polos en el semiplano derecho ($0.2360 \pm 9.3180i$, $0.6688 \pm 5.4677i$). Por tanto, aplicando el Criterio de Nyquist, se confirma que el sistema es inestable.

Que sucede por ejemplo con una ganancia de 45, ligeramente menor a la ganancia con 50, donde el sistema se vuelve inestable:



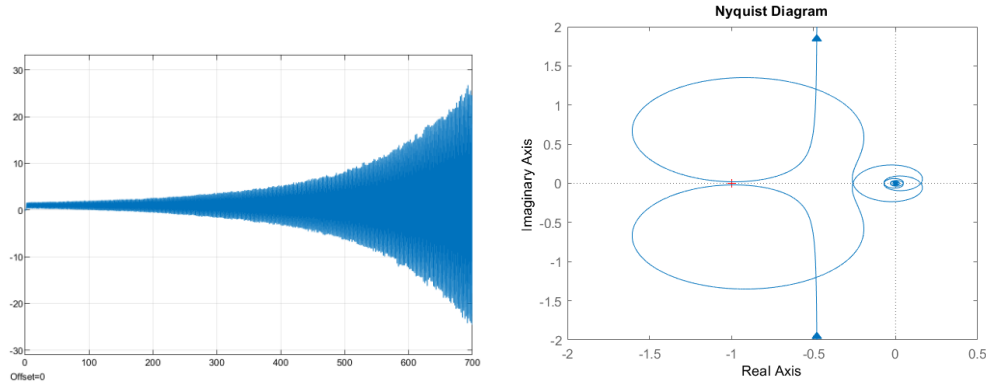
Gráfica 107: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 5% y una ganancia de 45.

Resulta complicado de ver, pero para este sistema, el diagrama de Nyquist, rodea 4 veces al punto crítico -1, y seguimos obteniendo 4 polos inestables ($0.0792 + 9.2246i$, $0.0792 - 9.2246i$, $0.6997 + 5.3742i$, $0.6997 - 5.3742i$), por tanto, esta vez, el sistema es estable.

Para este caso la inestabilidad se debe a que pasamos de dar 4 vueltas, a dar únicamente dos vueltas, por ello el sistema se termina volviendo inestable.

8.3.3 $\delta = 0.1$

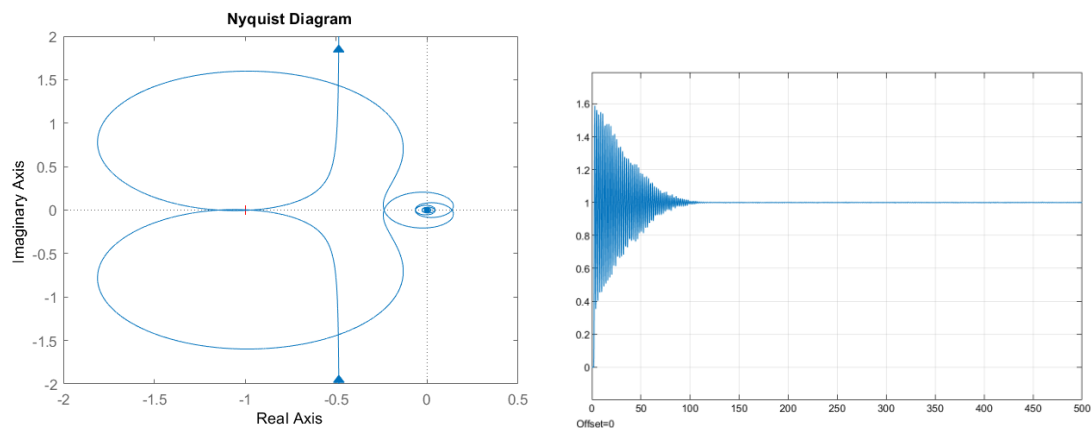
A continuación vamos a suponer que se comete un error de 0.1, es decir, del 10%. Para este caso el sistema se vuelve inestable con una ganancia igual a 11.



Gráfica 108: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 10% y una ganancia de 11.

Si se observa el diagrama de Nyquist, y los polos del sistema, se observa que no da ninguna vuelta al punto crítico, y el número de polos inestables de la cadena directa es 2 ($0.3575 + 3.8549i$, $0.3575 - 3.8549i$), por tanto, es normal que el sistema se comporte de forma inestable.

Sin embargo si obtenemos para una $K = 10$, se aprecia que da dos vueltas al punto crítico, y para esta ganancia sigue teniendo 2 polos inestables $0.3030 + 3.7715i$, $0.3030 - 3.7715i$. Por tanto la causa de que el sistema se vuelva inestable, es que en el diagrama de Nyquist, al aumentar la K hace que a bajas frecuencias no llegue a corta el eje de abcisas, sino que, da un giro sin llegar a cortar, y tiende a cero. (Ver gráfica)



Gráfica 109: Comportamiento de un sistema de segundo orden con polo en el origen, con PS, una desviación del 10% y una ganancia de 10.

8.4 *Conclusión*

Para este sistema pasa de forma similar al anterior, en bucle cerrado el sistema se inestabilizaba con tan solo una $K = 1.17$. Sin embargo el PS ideal lo estabiliza para cualquier valor de K . Pero cuanto mayor es la desviación en el cálculo del retardo, más disminuye el valor de la ganancia para el cual el sistema se vuelve inestable.

9. Sistema de segundo orden con cero

El último de los sistemas a analizar en este TFG, va a ser un sistema de segundo orden con cero. El cual se corresponde con:

$$G_0(s) = \frac{b_0 + b_1s}{a_0 + a_1s + a_2s^2} = K \frac{1 + \tau_c s}{1 + \frac{2\xi}{w_n}s + \frac{1}{w_n^2}s^2}$$

Por simplicidad, al igual que en el caso “7. Sistema de segundo orden simple”, se va a considerar que el sistema tiene un polo real doble y se va a añadir un controlador proporcional (K).

$$G_0(s) = K \frac{(1 + \tau_c s)}{(1 + \tau s)^2}$$

9.1 El efecto del retraso puro en bucle cerrado.

Nuevamente, analizamos el efecto del retardo en bucle cerrado para el sistema actual:

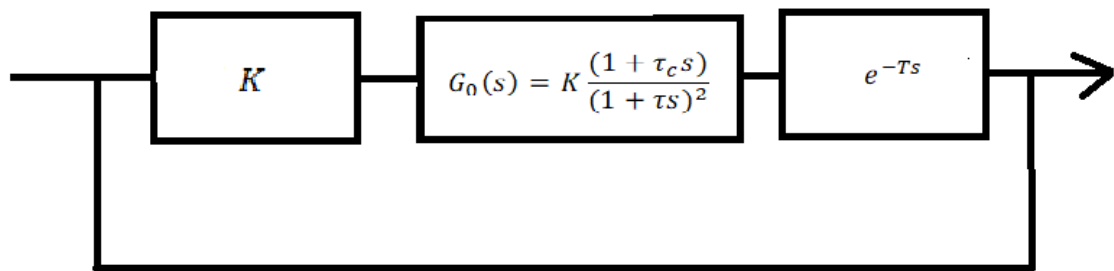


Figura 8: Sistema en bucle cerrado.

Si se obtiene la función de transferencia, el retardo se encontrará en el denominador. Y en base a la experiencia de los sistemas anteriores, esto puede causar la inestabilidad. Dicha suposición se va a comprobar mediante el Criterio de Nyquist.

$$CD(jw) = K \frac{(1 + \tau_c jw)}{(1 + \tau jw)^2} e^{-Tjw}$$

En primer lugar analizamos el diagrama polar, sin el retardo, es decir:

$$CD(jw) = K \frac{(1 + \tau_c jw)}{(1 + \tau jw)^2}$$

T1: Analizamos a bajas frecuencias, cuando $w \rightarrow 0$:

$$CD(0) = K \frac{(1 + \tau_c 0)}{(1 + \tau 0)^2} = \begin{cases} |CD(jw)| = K \\ Arg(CD(jw)) = 0^\circ \end{cases}$$

T2: Analizamos a frecuencias altas, cuando $w \rightarrow \infty$:

$$CD(\infty) = K \frac{(1 + \tau_c \infty)}{(1 + \tau \infty)^2} = \begin{cases} |CD(jw)| = 0 \\ \text{Arg}(CD(jw)) = -90^\circ \end{cases}$$

T3: Calculamos los puntos de corte:

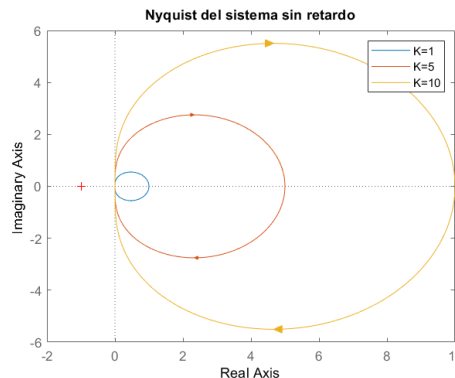
$$CD(jw) = K \frac{(1 + \tau_c jw)}{(1 + \tau jw)^2} = K \left[\frac{1 - \tau^2 w^2 + 2\tau \tau_c w^2}{(1 - \tau^2 w^2)^2 + 4\tau^2 w^2} + \frac{\tau_c w(1 - \tau^2 w^2) - 2\tau w}{(1 - \tau^2 w^2)^2 + 4\tau^2 w^2} j \right]$$

Buscamos cuando la parte imaginaria es cero:

$$\frac{\tau_c w(1 - \tau^2 w^2) - 2\tau w}{(1 - \tau^2 w^2)^2 + 4\tau^2 w^2} j = 0$$

Sucede para $w = 0$, y para $w = \infty$. Esto se corresponde con los puntos calculados anteriormente, donde la parte real es K (cortando en el semieje positivo) y 0 .

De esta forma el diagrama polar, para una $\tau_c = 0.5$ y $\tau = 1$, y distintos valores de K , queda de la forma:



Gráfica 110: Nyquist del sistema sin retardo

Se puede observar que para el sistema sin retardo, el diagrama polar, nunca corta el semieje negativo, por tanto se puede asegurar la estabilidad para este sistema de segundo orden con cero sin retardo.

Pero, ¿Qué sucede si al sistema que antes era estable en bucle cerrado, se le añade un retardo? Analizamos el diagrama polar, del sistema con retardo, es decir, cuando su cadena directa es:

$$CD(jw) = K \frac{(1 + \tau_c jw)}{(1 + \tau jw)^2} e^{-Tjw}$$

T1: Analizamos a bajas frecuencias, cuando $w \rightarrow 0$:

$$CD(0) = K \frac{(1 + \tau_c 0)}{(1 + \tau 0)^2} e^{-Tj0} = \begin{cases} |CD(jw)| = K \\ Arg(CD(jw)) = 0^\circ \end{cases}$$

T2: Analizamos a frecuencias altas, cuando $w \rightarrow \infty$:

$$CD(\infty) = K \frac{(1 + \tau_c \infty)}{(1 + \tau \infty)^2} e^{-Tj\infty} = \begin{cases} |CD(jw)| = 0 \\ Arg(CD(jw)) = -\infty \end{cases}$$

Por tanto, al añadirle el retardo, su fase a frecuencias altas es $-\infty$, lo que significa que el diagrama de Nyquist, hará una espiral en torno a cero, cortando así con el semieje negativo, y abriendo una puerta a la inestabilidad.

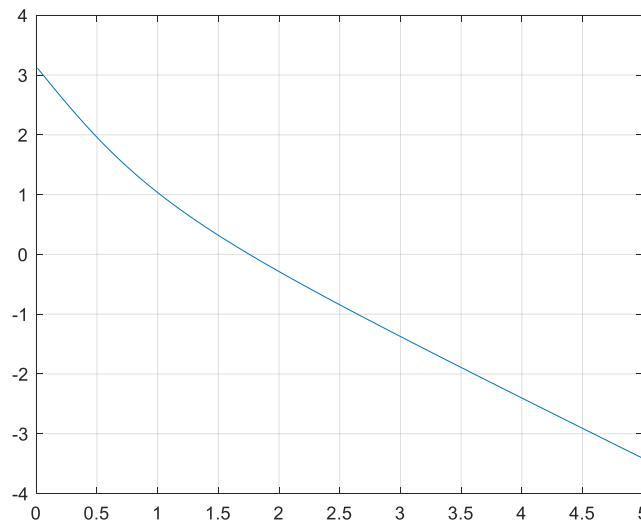
T3: Calculamos el primer punto de corte:

$$CD(jw) = K \frac{(1 + \tau_c jw)}{(1 + \tau jw)^2} e^{-Tjw} =$$

$$\begin{cases} |CD(jw)| = K \sqrt{\left(\frac{1 - \tau^2 w^2 + 2\tau\tau_c w^2}{(1 - \tau^2 w^2)^2 + 4\tau^2 w^2} \right)^2 + \left(\frac{\tau_c w(1 - \tau^2 w^2) - 2\tau w}{(1 - \tau^2 w^2)^2 + 4\tau^2 w^2} \right)^2} \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1} \frac{\tau_c w(1 - \tau^2 w^2) - 2\tau w}{1 - \tau^2 w^2 + 2\tau\tau_c w^2} - Tw \end{cases}$$

A continuación calculamos cuando el argumento es -180° . Para ello representamos la función en Matlab y calculamos el punto de corte, para los valores $\tau_c = 0.5$, $\tau = 1$ y $T = 1$.

$$\tan^{-1} \frac{0.5w(1 - w^2) - 2w}{1 - w^2 + w^2} - Tw = -\pi \rightarrow \tan^{-1}(-1.5w - 0.5w^3) = w - \pi$$



Gráfica 111: Representación del argumento, con el objetivo de obtener el primer corte en el semieje negativo de abscisas.

Se obtiene que el primer punto de corte sucede para $w = 1.7559$. Por tanto sustituyendo en la parte real.

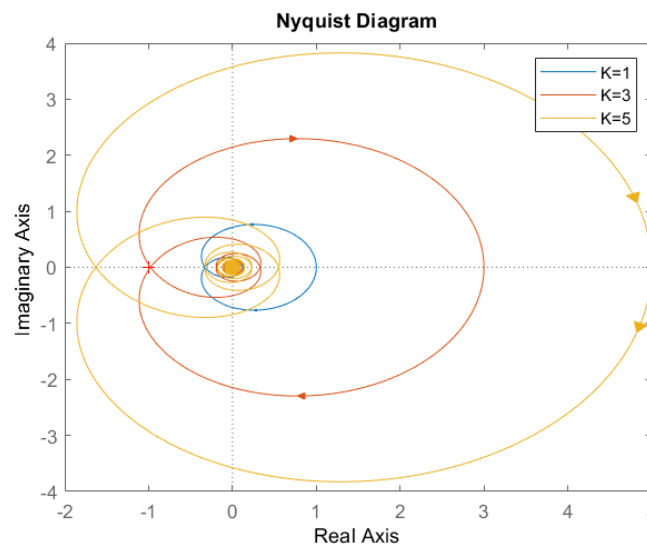
$$[CD(jw)] = K \sqrt{\left(\frac{1}{16.67}\right)^2 + \left(\frac{-5.3407}{16.67}\right)^2} = 0.3259K$$

Por tanto, cuando $0.3259K > 1$, alcanzará el punto crítico, y esto sucede para $K > 3.068$.

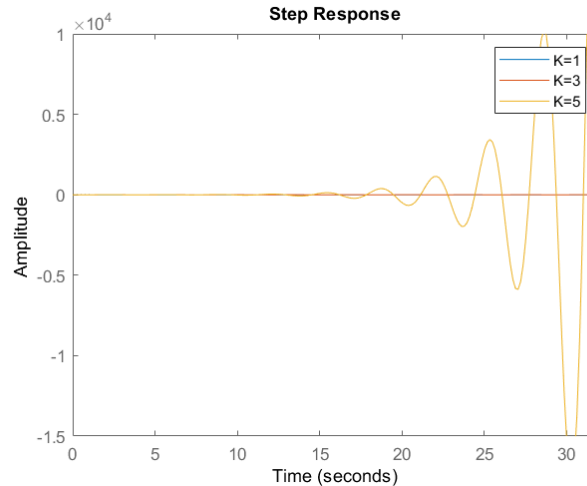
El criterio de Nyquist, nos dice que: “el sistema es estable si el número de rodeos en sentido contrario al de las agujas del reloj es igual al número de polos $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, el sistema es inestable.”

Por tanto, obtenemos los polos para una $K = 4$, por ejemplo: $-5.0319 + 8.9853i$, $-5.0319 - 8.9853i$, $-7.4714 + 5.2525i$, $-7.4714 - 5.2525i$, $-8.4967 + 1.7350i$, $-8.4967 - 1.7350i$, $-1.0000 + 0.0000i$, $-1.0000 + 0.0000i$. Se observa que no hay polos en el semiplano derecho, por tanto cuando $K > 3.07$, el sistema se volverá inestable.

Las gráficas siguientes ilustran el DN y la respuesta del sistema en bucle cerrado ante una entrada escalón con y sin retardo ($T=1\text{seg}$) para valores diferentes de K :



Gráfica 112: Diagrama de Nyquist.



Gráfica 113: Comportamiento sistema en bucle cerrado, ante entrada escalón.

Como se observa en el diagrama de Nyquist, la trayectoria para $K = 3$, aun no alcanza el punto crítico, sin embargo, si aumentamos un poco más la ganancia ($K=5$), ya se alcanza el punto -1, y el sistema se comporta de forma inestable.

También es de interés observar las diferencias entre el diagrama de Nyquist sin retardo, y el que contiene el retardo, pues se observa que el retardo es lo que provoca que mi sistema se vuelva inestable.

Por ello en el siguiente apartado se emplea el Predictor de Smith, con el objetivo de que al elevar la ganancia en el sistema con retardo, el sistema no se vuelva inestable.

9.2 *El predictor de Smith ideal.*

En el caso que nos ocupa (sistema de 2º orden simple con cero y retraso puro):

$$G(s) = G_0(s)e^{-Ts} = \frac{1 + \tau_c s}{(1 + \tau s)^2} e^{-Ts}$$

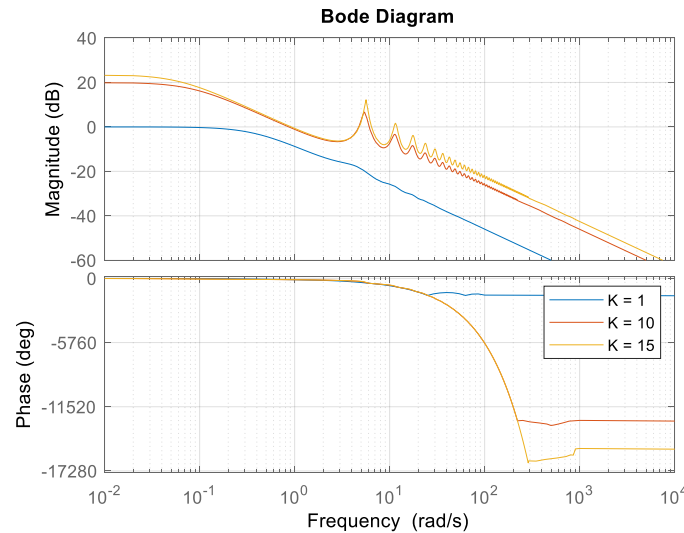
Supóngase que se emplea una estructura de control basada en el predictor de Smith, en la que se han identificado correctamente $G_0(s)$ y T , es decir: $H(s) = G_0(s)$ y $\lambda = T$. La cadena directa del control con el Predictor de Smith quedará como sigue:

$$CD(s) = \frac{R(s)G_0(s)e^{-Ts}}{1 + R(s)G_0(s) - R(s)G_0(s)e^{-Ts}}$$

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega + K\tau_c j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}$$

La presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo

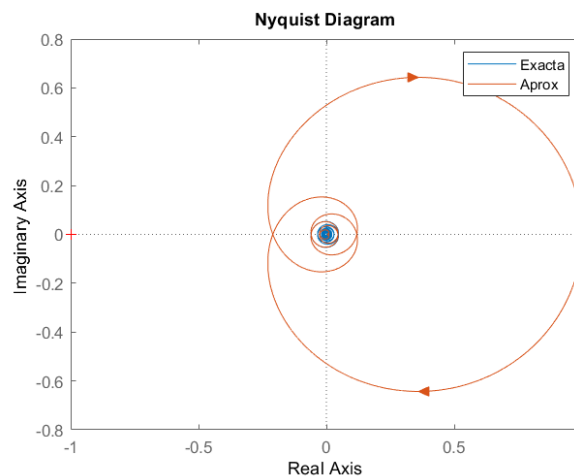
(únicamente a la fase, indicando que el DN va a dar ∞ vueltas en torno al origen). En cambio, la presencia de dicho factor en el denominador sí afecta al módulo (también al argumento), de forma que este presentará oscilaciones. La gráfica siguiente muestra el DdB del sistema, en el que se aprecian las mencionadas oscilaciones del módulo:



Gráfica 114: Diagrama de Bode del sistema de segundo orden con cero y PS.

Parece evidente que las mencionadas oscilaciones tendrán más protagonismo cuanto mayor sea K. No obstante, en la gráfica anterior se aprecian varias subidas de módulo las cuales podría corresponderse con la presencia de 2 polos complejos conjugados con parte real positiva, propias de un sistema inestable.

Por ello, se aplica la aproximación de Padé de orden 6, y se comprueba su validez, con el objetivo de poder obtener los polos del sistema.



Gráfica 115: Exactitud de la aproximación de Padé con la del retardo.

Por tanto se obtienen los siguientes polos:

- Para $K = 1$:

-15.2248 +11.2264i, -15.2248 -11.2264i, -3.5225 +10.2412i, -3.5225 -10.2412i, -2.1804 + 4.3206i, -2.1804 - 4.3206i, -1.7600 + 0.0000i, -0.3845 + 0.0000i.

- Para $K = 15$:

-19.8410 +28.3452i, -19.8410 -28.3452i, -0.9385 +12.1761i, -0.9385 -12.1761i, -0.2012 + 5.6428i, -0.2012 - 5.6428i, -1.9795 + 0.0000i, -0.0590 + 0.0000i.

Como para todos los valores de K , los polos se encuentran en el semiplano izquierdo, si el diagrama de Nyquist, no rodea al punto -1, en sentido antihorario, el sistema se comportará de forma estable. Por ello realizamos un análisis detallado del Diagrama de Nyquist.

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega + K\tau_c j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}$$

T1: Analizamos a bajas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

T2: A altas frecuencias:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega + K\tau_c j\omega - Ke^{-Tj\omega} - K\tau_c j\omega e^{-Tj\omega}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

La presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo (únicamente a la fase, indicando que a altas frecuencias, el DN va a exhibir un comportamiento cíclico en forma de espiral). En cambio, la presencia de dicho factor en el denominador si afecta al módulo del sistema, por ello se analizan los valores máximos y mínimos de dicho módulo:

- Cuando $\omega T = (2N)\pi$, siendo $e^{-Tj\omega} = 1$, tenemos un mínimo en el denominador (todos los términos que contienen el valor K se cancelan), lo que hace que el módulo del sistema presente un máximo:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)}{1 - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega} = K \frac{1 + \tau_c j\omega}{(1 + \tau j\omega)^2}$$

$$\begin{cases} |CD(jw)| = |K| \sqrt{\frac{1 + \tau_c^2 w^2}{(1 + \tau^2 w^2)^2}} \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(\tau_c w) - \tan^{-1}(2\tau w) - Tw \end{cases}$$

Si observamos el módulo, este sí que podría alcanzar el valor de 1, pero en este caso no me importa, pues este valor siempre va a cortar en el eje positivo de abcisas, por lo que el sistema no se inestabilizará a causa de este valor.

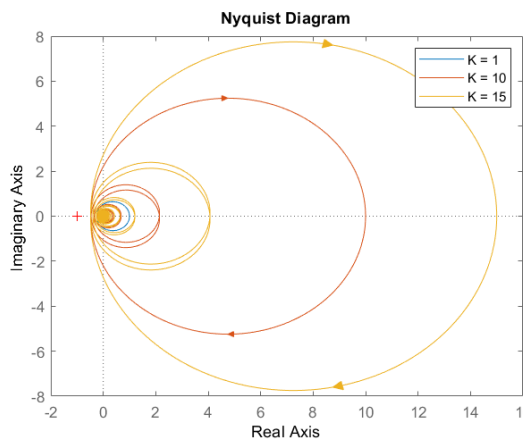
- Cuando $wT = (2N + 1)\pi$, siendo $e^{-Tjw} = -1$, tenemos un máximo en el denominador (todos los términos que contienen el valor K se suman), lo que provoca que el módulo del sistema presente un mínimo:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)}{1 + 2K - \tau^2 \omega^2 + (2\tau w + 2K\tau_c w)j} =$$

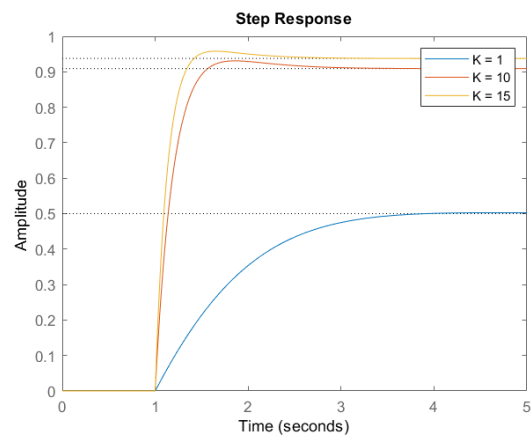
$$\begin{cases} |CD(jw)| = |K| \sqrt{\frac{1 + \tau_c^2 w^2}{(1 + 2K - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\tau w + 2K\tau_c w)^2}} \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(\tau_c w) - \tan^{-1}\left(\frac{2\tau + 2K\tau_c w}{1 + 2K - \tau^2 \omega^2}\right) - Tw \end{cases}$$

Si observamos el módulo de dicha función, para ganancias muy elevadas, el punto de corte tiende a 0.5, por tanto nunca llega a superar el punto crítico -1.

Estos valores máximos y mínimos se corresponden con múltiplos de π , es decir, cuando el módulo presenta un valor máximo este siempre corta en el semieje positivo de abcisas. Y cuando el módulo presenta un mínimo, este intersecta en el eje negativo de abcisas, pero su módulo es siempre menor que 1. Por tanto podemos afirmar que el PS consigue estabilizar el sistema con retardo.



Gráfica 116: Diagrama de Nyquist



Gráfica 117: Respuesta escalón al Predictor de Smith ideal.

Como se puede observar, en las gráficas anteriores, y en los cálculos realizados anteriormente, con el Predictor de Smith, se logra, que el retardo no afecte a la estabilidad de mi sistema.

9.3 *Predictor de Smith real*

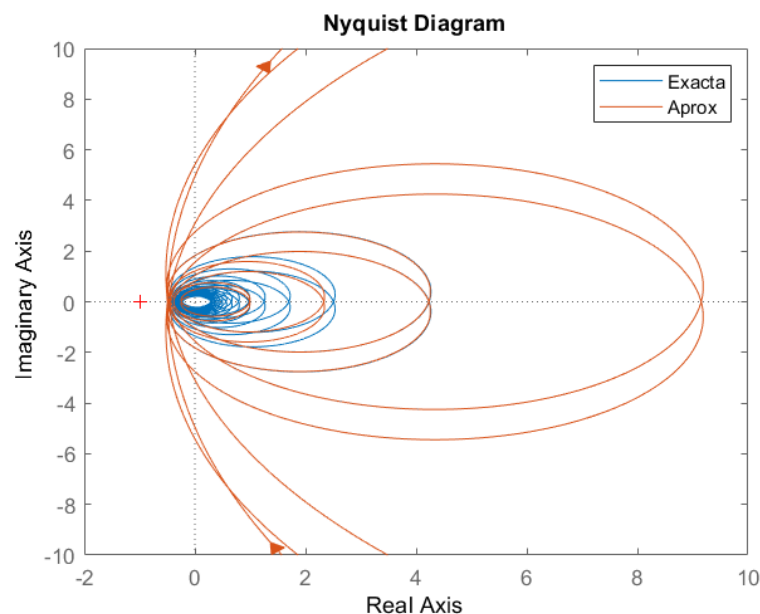
Es importante notar, que para el buen funcionamiento de la estructura del predictor de Smith, se ha calculado correctamente la $H(s) = G_0(s)$, y el retardo puro, pero ahora se va a analizar la estructura del Predictor de Smith, suponiendo que no se ha identificado correctamente el retardo puro.

Continuando con el sistema de estudio:

$$CD(s) = \frac{K(1 + \tau_c s)e^{-Ts}}{(1 + \tau s)^2 + K(1 + \tau_c s) - K(1 + \tau_c s)e^{-(T+\delta)s}}$$

Al igual que en los sistemas de segundo orden anteriores, es necesario obtener el número de Polos del sistema de la cadena directa, con el objetivo de poder aplicar el criterio de Nyquist y llegar a la conclusión de si el sistema seguirá siendo estable o si se inestabilizará.

Por ello, para realizar el análisis se propone sustituir dicho término oscilante por una aproximación polinomial (por ejemplo, la de Padé de un orden suficiente):



Gráfica 118: Comportamiento aproximación de Padé

En la gráfica anterior, se ha empleado una $K=50$, y una aproximación de Padé de orden 12, y se puede observar como en la zona de interés se comporta de la misma forma, que en el sistema que se ha empleado, la función del retardo. Por

tanto se considera valida esta aproximación. Si obtenemos los polos de la cadena directa, podremos ver que todos sus polos son estables, por tanto si el diagrama de Nyquist rodea el punto crítico, el sistema se volverá inestable.

Por tanto, a diferencia de los sistemas de segundo orden tratados anteriormente, los cuales presentaban polos inestables en la cadena directa, y su diagrama rodeaba al punto crítico en sentido antihorario, y aun así se podía comportar de forma estable. Este caso es más similar a los sistemas de primer orden, “3.Sistema de primer orden”, “6.Integrador”. En los que se podría obtener también una expresión para obtener la ganancia máxima para el cual el sistema se inestabiliza.

Continuando con el caso dado:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega + K\tau_c j\omega - K(1 + \tau_c j\omega)e^{-(T+\delta)s}}$$

Analicemos esta cuestión en detalle:

- T1: A bajas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow 0$), el diagrama polar de la $CD(j\omega)$ parte de un valor finito K a 0° :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} CD(j\omega) = \frac{K}{1 + K - K} \rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = K \\ Arg(CD(j\omega)) = 0^\circ \end{cases}$$

T2: A altas frecuencias (cuando $\omega \rightarrow \infty$), el diagrama polar de la $CD(j\omega)$ termina en 0 con $-\infty^\circ$:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)e^{-Tj\omega}}{1 + K - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega + K\tau_c j\omega - Ke^{-Tj\omega} - K\tau_c j\omega e^{-Tj\omega}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} |CD(j\omega)| = 0 \\ Arg(CD(j\omega)) = -\infty \end{cases}$$

Al igual que antes la presencia del factor $e^{-Tj\omega}$ en el numerador no afecta al módulo, pero la presencia del factor $e^{-(T+\delta)j\omega}$ en el denominador si afecta al módulo, de forma, que los valores máximos y mínimos son:

- Cuando $\omega(T + \delta) = 2N\pi$, siendo $e^{-(T+\delta)j\omega} = 1$, tenemos un mínimo en el denominador (los términos que contienen a la K se cancelan), lo que hace que el módulo del sistema presente un máximo:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c j\omega)}{1 - \tau^2 \omega^2 + 2\tau j\omega} = K \frac{1 + \tau_c j\omega}{(1 + \tau j\omega)^2}$$

$$\begin{cases} |CD(jw)| = |K| \left| \sqrt{\frac{1 + \tau_c^2 w^2}{(1 + \tau^2 w^2)^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(\tau_c w) - \tan^{-1}(2\tau w) - Tw \end{cases}$$

- Cuando $w(T + \delta) = (2N + 1)\pi$, siendo $e^{-Tjw} = -1$, tenemos un máximo en el denominador (los términos que contienen a la K se suman), lo que hace que el módulo del sistema presente un mínimo:

$$CD(j\omega) = \frac{K(1 + \tau_c jw)}{1 + 2K - \tau^2 \omega^2 + (2\tau w + 2K\tau_c w)j} =$$

$$\begin{cases} |CD(jw)| = |K| \left| \sqrt{\frac{1 + \tau_c^2 w^2}{(1 + 2K - \tau^2 \omega^2)^2 + (2\tau w + 2K\tau_c w)^2}} \right| \\ Arg(CD(jw)) = \tan^{-1}(\tau_c w) - \tan^{-1}\left(\frac{2\tau + 2K\tau_c w}{1 + 2K - \tau^2 \omega^2}\right) - Tw \end{cases}$$

El DN va a presentar una forma de espiral que tiende al origen, y debido a la incorrecta identificación del retardo, estos valores máximos y mínimos se corresponden con los valores: $(1+2N)\pi/(1+\delta/T)$ y $2N\pi/(1+\delta/T)$, es decir, cada uno de los valores extremos se producen con T/δ argumentos diferentes. Por tanto, para que ahora el sistema sea estable, ambos módulos deben de ser menor que 1. Se trata por tanto de encontrar el módulo a la frecuencia para la cual, el primer máximo alcanza el semieje negativo de abscisas:

La frecuencia para la cual se dan los máximos es:

$$w(T + \delta) = 2N\pi \rightarrow w = \frac{2N\pi}{T + \delta}$$

Queda saber en cuantas vueltas (lóbulos) se alcanza el semieje negativo de abscisas. Contando con que a frecuencias suficientemente elevadas, el aporte de fase correspondiente al término $K \frac{(1+\tau_c s)}{(1+\tau s)^2}$ es de -90° , y que en 360° se dan T/δ lóbulos, puede concluirse que el número de lóbulos necesario para alcanzar el semieje negativo de abscisas es $N=T/(4\delta)$. Sustituyendo dicho valor en la ecuación anterior, podemos obtener el valor del módulo a dicha frecuencia:

$$w = \frac{2N\pi}{T + \delta} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}$$

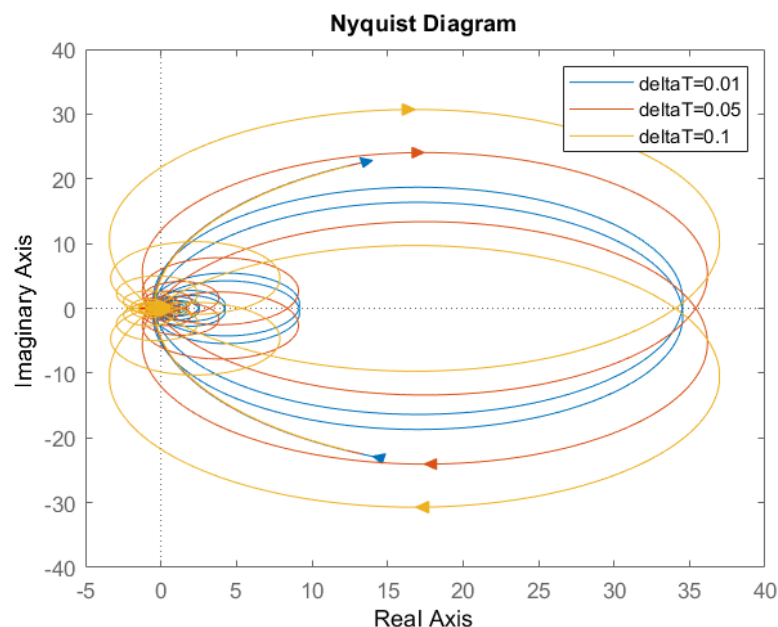
Sustituyendo w en la expresión del módulo:

$$|CD(j\omega)| = K \frac{\sqrt{1 + \tau_c^2 \omega^2}}{1 + \tau^2 \omega^2} = K \frac{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}}{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}$$

Para este caso, los polos del sistema se encuentran en el semiplano izquierdo. Por ello, si se supera el punto crítico -1, el sistema se comportará de forma inestable, por lo que dicho módulo debe ser inferior a la unidad. Por consiguiente, el valor máximo de K que hace al sistema estable es:

$$K_{max} = \frac{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}}$$

A continuación se muestra el efecto del error en la estimación de este sistema, para un valor de $T=1$, $\tau = 1$, $\tau_c = 1$. Por ejemplo para una ganancia de 50, se observa como al cometer más desfase, se aproxima más el punto crítico, y esto es debido a que contra más desfase, se llega al semieje negativo con un valor de la frecuencia menor.



Gráfica 119: Efecto al cometer un error en la estimación del retardo

Al igual que en los sistemas de segundo orden anteriores, se va a buscar el límite de la ganancia para el cual se hace inestable con SIMULINK y a continuación se corroborará con el diagrama de Nyquist.

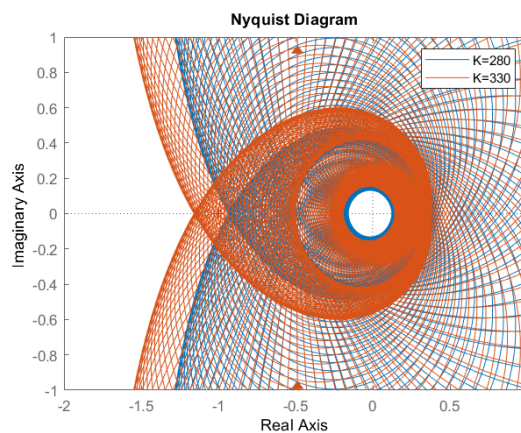
9.3.1 $\delta = 0.01$

En el caso de que se cometa un error de un 1% si se aplica la fórmula obtenida anteriormente:

$$K_{max} = \frac{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}} = \frac{1 + 1^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.01 * (1 + 0.01)} \right)^2}{\sqrt{1 + 0.5^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.01 * (1 + 0.01)} \right)^2}} = 311.0$$

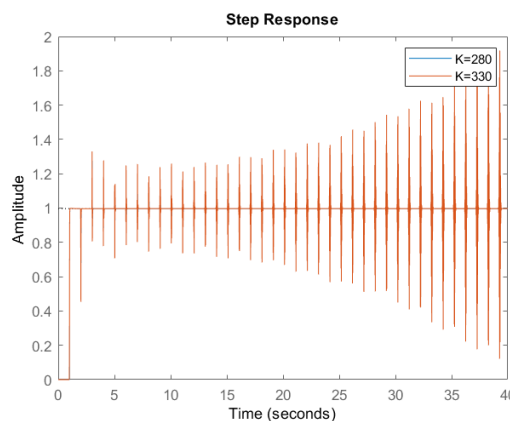
Se obtiene que para una ganancia igual a 311, el sistema se comportará de forma inestable.

Vamos a comprobarlo mediante el Diagrama de Nyquist (*Gráfica 122*).



Gráfica 120: DN del sistema de segundo orden con cero, PS y desviación del 1%.

A causa de la desviación en la estimación del retardo, se produce un desfase y el valor con frecuencia $w(T + \delta) = (2N)\pi$, se va desplazando, llegando a cortar con el semieje negativo de abscisas. Aunque el módulo de este valor se divida por la frecuencia y esta valla en aumento, si el valor de K es lo suficientemente grande se alcanzará el punto crítico. Causando así la inestabilidad (*Gráfica 123*).



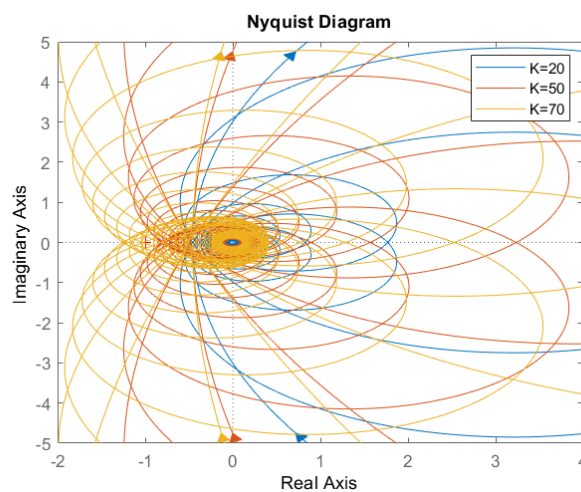
Gráfica 121: Respuesta del sistema de segundo orden con cero, PS y desviación del 1%.

9.3.2 $\delta = 0.05$

Si se comete una desviación en la estimación del retardo de un 5%, para ganancias mayores a 60,7 el sistema se comportará de forma inestable.

$$K_{max} = \frac{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}} = \frac{1 + 1^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.05 * (1 + 0.05)} \right)^2}{\sqrt{1 + 0.5^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.05 * (1 + 0.05)} \right)^2}} = 60.7$$

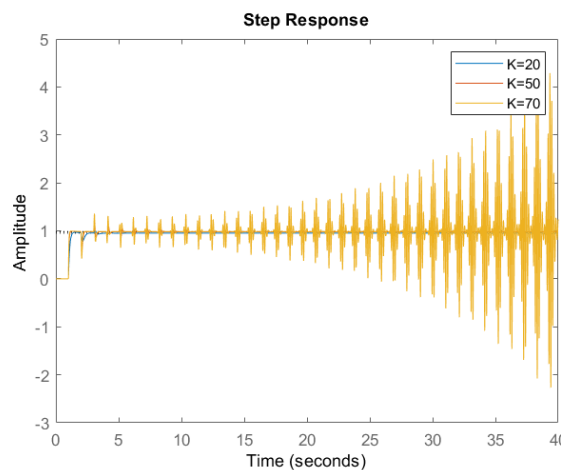
A continuación se puede comprobar el resultado obtenido mediante el diagrama de Nyquist (Gráfica 124).



Gráfica 122: Diagrama de Nyquist con un error en la estimación del retardo de un 5%.

Para este sistema, se alcanza antes el punto crítico para valores de la ganancia menor, esto es debido a que cuanto más desfase, menor es el valor de la frecuencia al llegar al semieje negativo de abscisas.

A continuación se muestra la estabilidad del sistema.



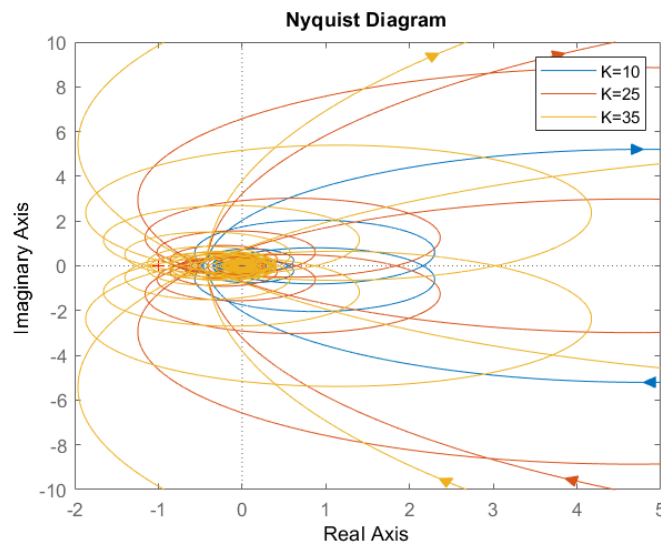
Gráfica 123: Respuesta del sistema de segundo orden con cero, con un error en la estimación del retardo de un 5%.

9.3.3 $\delta = 0.1$

Si se comete un error en la estimación del retardo, el sistema se inestabiliza para valores de la ganancia mayores que 29,28.

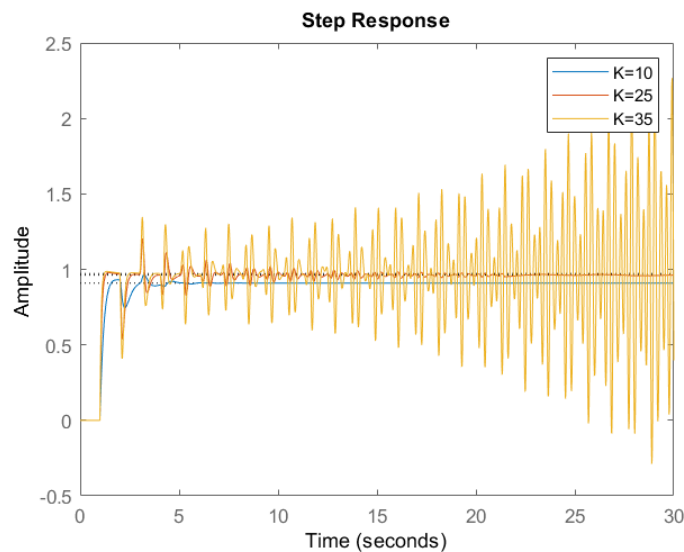
$$K_{max} = \frac{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}} = \frac{1 + 1^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.1 * (1 + 0.1)} \right)^2}{\sqrt{1 + 0.5^2 \left(\frac{1\pi}{2 * 0.1 * (1 + 0.1)} \right)^2}} = 29,28$$

Se puede corroborar con el diagrama de Nyquist:



Gráfica 124: DN del sistema de segundo orden con cero con un error en la estimación del retardo de un 10%.

Para este caso todavía se hace más patente lo comentado anteriormente.



Gráfica 125: DN del sistema de segundo orden con cero con un error en la estimación del retardo de un 10%.

10. *Conclusión*

Ya se ha visto, que un sistema con retardo puro puede volverse inestable en bucle cerrado con facilidad, a poco que se eleve la ganancia. El Predictor de Smith consigue resolver el problema satisfactoriamente en todos los casos, permitiendo un diseño del regulador como si tal retardo no existiese.

Sin embargo, un error en la estimación del retardo en el Predictor de Smith, puede ser fatal, pues en todos los casos existen valores de la ganancia de la cadena directa que hacen al sistema inestable, a diferencia de lo que sucede con el Predictor de Smith ideal, en el que se han identificado con exactitud, tanto la dinámica del sistema a controlar, como su retardo.

Lo única diferencia entre unos sistemas y otros es el valor de la ganancia para el cual el sistema se inestabiliza, es decir, en algunos sistemas con pequeños errores de estimación, el sistema se inestabiliza para valores de la ganancia elevados, sin embargo, en otros sistemas, el mínimo error en la estimación del retardo, ya causa la inestabilidad del sistema para ganancias pequeñas ($K > 2$).

Dicho esto, dentro de los sistemas de primer orden podemos diferenciar dos tipos:

- Por un lado tenemos los sistemas que si se comete un error en la estimación del retardo por mínimo que sea, se vuelven inestables para el mismo valor de la ganancia, sin importar si se ha cometido un error del 1% o del 10% (aunque puede haber alguna excepción).

Este tipo se corresponde con el *sistema de primer orden completo*, y el *sistema de primer orden completo + PI*. Por ejemplo, en el primer caso, si $K \frac{\tau_c}{\tau} > 1$, el sistema se vuelve inestable, sin depender del error que se cometa en la estimación del retardo.

Como se puede observar, ocurre en sistemas que presentan el mismo orden en el numerador y en el denominador o, si se prefiere, que tienen un cero en su cadena directa. Esto es debido a que a la hora de realizar el análisis de Nyquist, el retardo junto con el cero, van a provocar dos valores extremos que se mantienen constantes (ciclo límite), y debido al desfase que se produce a causa del error en la estimación, el valor máximo, va a terminar cortando con el eje negativo de abscisas.

- Por otro lado, tenemos los sistemas en los que la inestabilidad va a depender de la ganancia y a la vez, del error cometido en la estimación del retardo, siendo así, que si el error cometido es muy pequeño, se volverá

inestable, para ganancias muy elevadas (mayores que 100), pero si el error es mayor, se volverá inestable para ganancias menores.

Este se corresponde con sistemas, que no presentan el mismo orden en el numerador que en el denominador, como por ejemplo, el *sistema de primer orden*, o el caso del *integrador*. Esto se debe a que, esos máximos y mínimos que se producen, depende del valor de la frecuencia, de forma que si el desfase que se produce es muy pequeño, le cuesta más lóbulos (vueltas) alcanzar el eje negativo de abscisas, y la frecuencia va aumentando y como esta se encuentra en el divisor del módulo, logra que para valores de la ganancia no muy elevados, no se alcance el punto crítico. Pero en el caso contrario, en los que el error en la estimación del retardo es grande, el desfase que se produce es mayor, y el valor de la frecuencia es menor al llegar al eje negativo de abscisas, por ello, se inestabilizará con ganancias más pequeñas.

Dentro de los sistemas de segundo orden, (donde el análisis resulta bastante más complejo), la estructura del Predictor de Smith Real, sigue sin estabilizar el sistema para cualquier valor de la ganancia. Pudiendo diferenciar también dos tipos:

- Por un lado tenemos el sistema de segundo orden con cero, donde la diferencia del orden del denominador respecto del numerador, es de uno. De forma que este sistema se comporta muy similar a los de primer orden. Pues en este caso su diagrama de Nyquist, también se corresponde con una espiral, y cuando encontramos un desfase, el valor máximo del módulo intersecta con el semieje negativo de abscisas. Pero este valor también depende de la frecuencia, y por tanto, se la desviación en la estimación del retardo es pequeña, el desfase que se produce es pequeño, y el valor de la frecuencia al cortar con el eje negativo de abscisas es mayor, y por tanto será estable para ganancias mayores.
- Por otro lado tenemos el *Sistema de segundo orden simple*, y el *Sistema de segundo orden con un polo en el origen*. En estos casos el estudio de estos sistemas resulta bastante más complejo debido a que, como se ha visto en los diagramas de Bode, puede presentar un aumento de la fase a la vez que su módulo crece por encima de la unidad, lo que supone, rodear al punto crítico en sentido antihorario, de forma que para conocer su estabilidad, es necesario mirar el número de polos inestables de la cadena directa.

Por tanto, aquí ya no se produce ese ciclo límite, y con el objetivo de

conocer para que valores de la ganancia el sistema se vuelve inestable, se ha decidido analizar el sistema gráficamente, mediante la obtención de gráficas del Diagrama de Nyquist.

A continuación se puede observar una tabla que muestra las conclusiones de cada apartado (Figura 9).

Sistema de primer orden simple.	Bucel cerrado	Sin retardo (Con $T=1$ y $\tau=1$)	Estable para todo K
		Con retardo (Con $T=1$ y $\tau=1$)	Estable para $K < 2.2618$
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real		Estable para ganancias menores a: $K_{max} = \sqrt{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T+\delta)} \right)^2}$
Sistema de primer orden completo	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable para todo K
		Con retardo	Estable si: $K \frac{\tau_c}{\tau} < 1$
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real		Estable si: $K \frac{\tau_c}{\tau} < 1$
Sistema de primer orden completo + PI	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable para todo K
		Con retardo	Estable si: $K K_C < \frac{\tau_i}{\tau_c}$
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real		Estable si: $K K_C < \frac{\tau_i}{\tau_c}$

Integrador	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable para todo K
		Con retardo	Estable si: $K < \frac{\pi}{2}$
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real		Estable para ganancias menores a: $K_{max} = \frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)}$
Sistema de segundo ordne simple	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable
		Con retardo (T=1, $\tau = 2$)	Inestable para K>5
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real (Con T=1, $\tau=2$ y empleando metodos gráficos)	0.01	Estable para K < 775
		0.05	Estable para K < 197
		0.1	Estable para K < 45
Sistema de segundo orden con uno de sus polos en el origen	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable
		Con retardo (T=1, $\tau=1$)	Estable para K<1.13
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real (Con T=1, $\tau=1$, y empleando metodos gráficos)	0.01	Estable para K < 194
		0.05	Estable para K < 50
		0.1	Estable para K < 11
Sistema de segundo orden con cero	Bucel cerrado	Sin retardo	Estable
		Con retardo (T=1, $\tau=1$ y $\tau_c=0.5$)	Inestable para K<3.07
	Predictor de Smith teórico		Estable para todo K
	Predictor de Smith Real		Estable para ganancias menores a: $K_{max} = \frac{1 + \tau^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}{\sqrt{1 + \tau_c^2 \left(\frac{T\pi}{2\delta(T + \delta)} \right)^2}}$

Figura 9: Resumen de los resultados obtenidos.

Por tanto una conclusión extra que se puede obtener, es que cuanto mayor sea el orden en el denominador respecto al numerador, el Predictor de Smith, será más reacio a inestabilizar el sistema, cuando presente errores en la estimación del retardo.

11. *Linkografía y Bibliografía*

11.1 *Linkografía*

<https://controlautomaticoeducacion.com/analisis-de-sistemas/retardo-o-tiempo-muerto-de-un-sistema/> (Retardo)

https://www.youtube.com/watch?v=j8TzoFl1zxw&ab_channel=AntonioBarrientos (Sistemas de retraso puro)

https://www.youtube.com/watch?v=St5Kjn410hQ&t=5s&ab_channel=SergioA.Casta%C3%B1oGiraldo (Predictor de Smith)

https://www.youtube.com/watch?v=82spdKTltBs&ab_channel=UniversitatPoli%C3%A8cnicaVal%C3%A8ncia-UPV (Nyquist)

<https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/sistemas-de-segundo-orden/> (Sistemas de Segundo Orden)

<https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/como-sintonizar-un-control-pi-por-cancelamiento-de-polos/> (Control PI por cancelación de polos)

<https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/002071720310001609057>

11.2 *Bibliografía*

Documento dado por el profesor Antonio Romeo (Sensibilidad del Predictor de Smith respecto de desviaciones en la identificación del retardo)

K. Ogata, Ingeniería de Control Moderna, Ed. Pearson, 5ª Edición, 2010.

Wim Michiels, Silviu-Iulian Niculescu, Stability, Control, and Computation for Time-Delay Systems: An Eigenvalue-Based Approach, Ed. Society for Industrial and Applied Mathematics; N.º 2 Edición, 2015.

Tema 3: “Respuesta temporal de sistemas LTI”, asignatura “Señales y Sistemas”, Curso 2º de Ingeniería Electrónica y Automática, Universidad de Zaragoza. (Respuesta temporal)

Tema 4: “Análisis Frecuencial de Señales y Sistemas Continuos”, asignatura “Señales y Sistemas”, Curso 2º de Ingeniería Electrónica y Automática, Universidad de Zaragoza. (Criterio de Nyquist)

12. *Anexos*

A RESPUESTA EN FRECUENCIA

Los métodos de respuesta en frecuencia son los más potentes en la teoría de control convencional. También son indispensables en la teoría de control robusto.

La salida en estado estacionario de una función de transferencia de un sistema se puede obtener directamente de la función de transferencia sinusoidal, es decir, después de alcanzar el estado estacionario, la respuesta en frecuencia se puede calcular sustituyendo en la función de transferencia s por jw , donde w es la frecuencia. La cual se puede dar como

$$G(jw) = Me^{j\varphi} = M \operatorname{Arg}(\varphi)$$

Donde M es el cociente de amplitud de las señales sinusoidales de entrada y salida y φ es el desplazamiento de fase entre ambas señales.

Si tenemos un sistema de la forma

$$Y(s) = G(s)X(s) \rightarrow G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$

donde $X(s)$ es la entrada del sistema, e $Y(s)$ la salida del sistema. Este sistema después de alcanzar las condiciones en estado estacionario, la respuesta en frecuencia se puede calcular sustituyendo en la función de transferencia s por jw , donde w es la frecuencia. La cual se puede dar como

$$G(jw) = Me^{j\varphi} = M \operatorname{Arg}(\varphi)$$

donde M es el cociente de amplitud de las señales sinusoidales de entrada y salida, es decir, el módulo de la respuesta en frecuencia de nuestra función de transferencia (función de transferencia sinusoidal)

$$|G(jw)| = \left| \frac{Y(jw)}{X(jw)} \right|$$

y φ es el ángulo de $G(jw)$, que representa el desplazamiento de fase entre ambas señales.

$$\varphi = \operatorname{Arg}(G(jw)) = \tan^{-1} \left[\frac{\text{parte imaginaria de } G(jw)}{\text{parte real de } G(jw)} \right]$$

con ello se obtiene la expresión

$$G(jw) = |G(jw)|e^{j\varphi}$$

La función de transferencia sinusoidal, función compleja de la frecuencia w , se caracteriza por su magnitud y ángulo de fase, con la frecuencia como parámetro. Por lo general se usan tres representaciones gráficas de las funciones de transferencia sinusoidales:

1. El diagrama de Bode.
2. El diagrama de Nyquist.
3. Diagrama de Nichols (Este no se emplea durante el TFG)

B DIAGRAMA DE BODE

Un diagrama de Bode está formado por dos gráficas: una representa el módulo de la función de transferencia y otra representa el ángulo de fase, de la función de transferencia. La unidad utilizada en esta representación para la magnitud es el decibelio (dB), y para el ángulo de fase grados.

La ventaja principal de utilizar el diagrama de Bode es la facilidad relativa de dibujar las curvas de la respuesta en frecuencia. Pero en este TFG, se ha empleado el diagrama de Bode para obtener información general sobre las características de la respuesta en frecuencia.

C DIAGRAMA DE NYQUIST o DIAGRAMA POLAR

Es un método de respuesta en frecuencia para el análisis y diseño de sistemas de control.

El diagrama polar de una función de transferencia sinusoidal $G(jw)$ es una gráfica de la magnitud de $G(jw)$ con respecto al ángulo de fase de la función $G(jw)$ en coordenadas polares, cuando w varía de cero a infinito. Por tanto, el diagrama polar es el lugar geométrico de los vectores $|G(jw)|\text{Arg}(G(jw))$ cuando w varía de 0 a infinito. El diagrama polar, se denomina, a menudo, diagrama de Nyquist. Cada punto en el diagrama polar de $G(jw)$ representa el punto terminal de un vector en un valor determinado w .

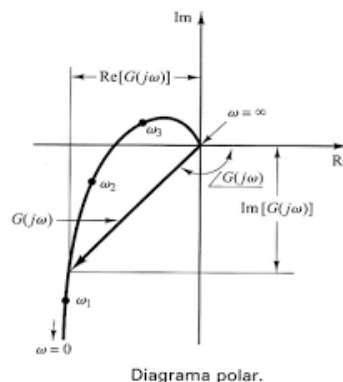


Figura 10: Diagrama polar.

A continuación se puede observar diagramas polares de funciones de transferencia sencillas.

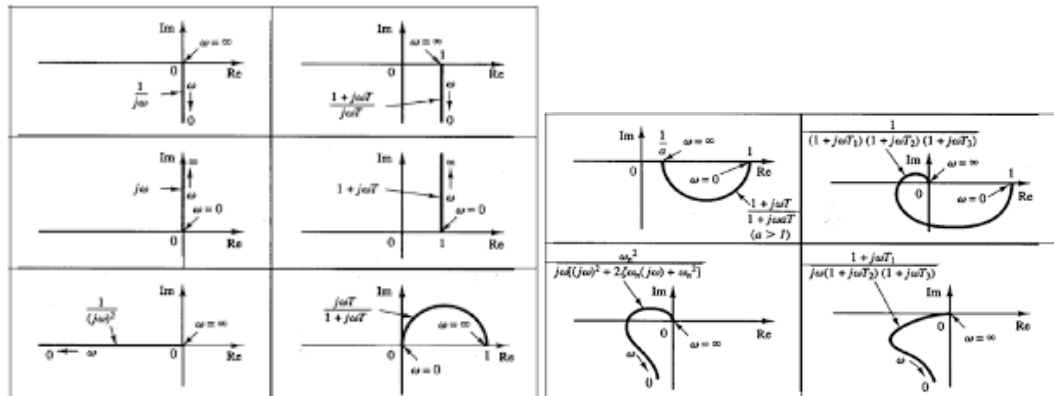


Figura 11: Diagrama polar, de distintas funciones de transferencias.

D CRITERIO DE ESTABILIDAD DE NYQUIST

El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad del sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia en lazo abierto y los polos en lazo abierto. Este criterio es muy útil en ingeniería de control, debido a que permite determinar gráficamente la estabilidad absoluta del sistema en lazo cerrado.

Considere un sistema en lazo cerrado. Donde la función de transferencia en lazo cerrado es:

$$FdT(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

para la estabilidad todas las raíces de la ecuación característica $F(s) = 1 + G(s)H(s) = 0$ deben estar en el semiplano izquierdo del lado s . El criterio de estabilidad de Nyquist relaciona la respuesta en frecuencia en lazo abierto $G(j\omega)H(j\omega)$ con el número de ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que se encuentran en el semiplano derecho del plano s .

La trayectoria de Nyquist encierra el semiplano derecho del plano s así como todos los ceros y polos de $1 + G(s)H(s)$ que tienen partes reales positivas. [Si no hay ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s , no hay polos en lazo cerrado, y el sistema es estable.]

La estabilidad del sistema en lazo cerrado se averigua examinando los rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico de $G(j\omega)H(j\omega)$. El número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$ se encuentra contando el número de rotaciones en el sentido de las agujas del reloj del vector.

Un análisis similar es aplicable para los sistemas con un retardo de

transporte. La estabilidad de un sistema con retardo de transporte se determina a partir de las curvas de respuesta en frecuencia en lazo abierto examinando el número de rodeos en el punto $-1 + j0$, al igual que en el caso de un sistema cuya función de transferencia en lazo abierto es un cociente de dos polinomios en s .

En resumen:

1. Este criterio se expresa como

$$Z = N + P$$

donde Z es el número de ceros de $1 + G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s , N es el número de rodeos en el sentido de las agujas del reloj del punto $-1 + j0$ y P es número de polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s

Si P no es cero, para un sistema de control estable, se debe tener $Z = 0$ o $N = -P$, lo cual significa que se deben tener P rodeos del punto $-1 + j0$ en el sentido de las agujas del reloj.

Si $G(s)H(s)$ no tiene polos en el semiplano derecho del plano s , entonces $Z = N$. Por tanto, para la estabilidad no se debe rodear el punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$.

2. Debe tenerse cuidado en el momento de probar la estabilidad de sistemas multilazo, debido a que pueden incluir polos en el semiplano derecho del plano s . Una simple revisión de los rodeos del punto $-1 + j0$ mediante el lugar geométrico $G(j\omega)H(j\omega)$ no es suficiente hay que determinar los polos, que se hace con facilidad aplicando el criterio de estabilidad de Routh al denominador de $G(s)H(s)$.

Si se incluyen en $G(s)H(s)$ funciones trascendentes, tales como el retardo de transporte e^{-Ts} , deben aproximarse mediante una expansión (Aproximación de Pade) en serie antes de aplicar el criterio de estabilidad de Routh.

Un análisis de la estabilidad:

Al examinar la estabilidad de los sistemas de control lineales mediante el criterio de estabilidad de Nyquist, se observa que se pueden presentar tres casos.

1. El punto $-1 + j0$ no está rodeado. Esto implica que el sistema es estable si no hay polos de $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, el sistema es inestable.
2. El punto $-1 + j0$ queda rodeado una o varias veces en sentido contrario al de las agujas del reloj. En este caso, el sistema es estable si el número de rodeos en sentido contrario al de las agujas del reloj es igual al número

de polos $G(s)H(s)$ en el semiplano derecho del plano s ; de lo contrario, el sistema es inestable.

3. El punto $-1 + j0$ queda rodeado una o varias veces en el sentido de las agujas del reloj. En este caso el sistema es inestable.

E APROXIMACIÓN DE PADÉ

Las aproximaciones de Padé son un tipo particular de aproximación en fracciones racionales respecto al valor de una función $f(x)$. La idea es que dicha aproximación coincida con el desarrollo en serie de Taylor de la misma función en la medida de lo posible. La aproximación de Padé de orden (m, n) es la función racional:

$$R(x) = \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_mx^m}{1 + q_1x + q_2x^2 + \dots + q_nx^n}$$

Trasladando la aproximación de Padé como tal a este Trabajo Fin de Grado, se reduce al ajuste a una función racional propia de la expansión en serie de una sola función trascendental, la exponencial e^{-Ts} donde T es la cantidad de tiempo que se toma el sistema analizado en responder. Esto se debe a que si se considera un retardo puro T , no se puede utilizar como función de transferencia debido a que no se trata de una división polinómica, por tal motivo se utiliza esta aproximación cuando existe un retardo, que se presenta en sistemas de orden superior. Padé permite representar el retardo como polos y ceros permitiendo considerar sus efectos al analizar el lugar de la raíz.

Un ejemplo de la aproximación de Pade de orden 6, que es muy empleada durante el Trabajo fin de Grado:

$$e^{-j\omega} = \frac{s^6 - 42s^5 + 840s^4 - 10080s^3 + 75600s^2 - 332640s + 665280}{s^6 + 42s^5 + 840s^4 + 10080s^3 + 75600s^2 + 332640s + 665280}$$

CASO 1: SISTEMA DE PRIMER ORDEN SIMPLE

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Declaración de variables.
tau = 1;
T=1;
K=1;

%Sistema sin retraso
misis_0=tf(1,[tau 1]);
```

```
%Sistema con retraso
misis=tf(1,[tau 1], 'iodelay',T);

%Sistema en bucle abierto
figure(1); hold on %Respuesta escalón bucle abierto
step(K*misis_0,K*misis)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
title ('Respuesta escalon unitario')

%Sistema en bucle cerrado
cadena_directa = K*misis/(1 + K*misis)
cadena_directa_0 = K*misis_0/(1 + K*misis_0)
figure(2); hold on %Nyquist
nyquist(K*misis_0,K*misis,0.000001:0.001:1000)
legend('Sin retardo','Con retardo')
roots([tau 1]) %Los polos del sistema sin retardo,
importante para Nyquist
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox_bc=K*num_pade
den_aprox_bc=conv([tau 1],den_pade)
cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc=tf(num_aprox_bc,den
_aprox_bc) % Sistema aprox bc
figure(3); hold on %Nyquist
nyquist(K*misis,cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc,0.0
00001:0.001:1000)
legend('Exacto','Aproximado')
roots(den_aprox_bc) %Los polos del sistema con
retardo, importante para Nyquist
figure(4); hold on
step(cadena_directa_0,cadena_directa)
legend('Sin retardo','Con retardo')

%Predictor de Smith Teorico
num= K*misis;
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(5)
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*num_pade
den_aprox=conv([tau 1],den_pade)+[0 K*(den_pade-
num_pade)]
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
```

```
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(6); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.03:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.03:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(7); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_directa
a_PS_teorico_exacto),50);
step(cadena_directa_PS_teorico_aprox/(1+cadena_directa
_PS_teorico_aprox),500);
legend('Exacta','Aprox');

%Predictor de Smith Real
Kp = 4
taup = 1
Tp = 1
deltaT=0.5;
misis_0p=tf(1,[taup 1])
misis_p=tf(1,[taup 1],'iodelay',Tp)
misis_delta_p=tf(1,[taup 1],'iodelay',Tp+deltaT)
num_p= Kp*misis_p;
den_p=1+Kp*misis_0p-Kp*misis_delta_p;
cadena_directa_PS_teorico_exacto_p=num_p/den_p
[num_pade,den_pade]=pade(Tp,6)
[num_pade_p,den_pade_p]=pade(Tp+deltaT,6) %
Aproximación de padé de orden 6
num_aprox_p=Kp*conv(num_pade,den_pade_p)
den_aprox_p=conv([taup 1],conv(den_pade,den_pade_p))-
[0 Kp*conv(num_pade_p,den_pade)]+[0
Kp*conv(den_pade_p,den_pade)]
cadena_directa_PS_teorico_aprox_p=tf(num_aprox_p,den_a
prox_p) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
roots(den_aprox_p) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
figure(8); hold on %Miramos si sale bien
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p,0.03:0.0001
:100);
%nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox_p,0.03:0.0001
:100);
%legend('K= 32','K = 30');
figure(9); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p/(1+cadena_dire
cta_PS_teorico_exacto_p),500);
```


CASO 2: SISTEMA DE PRIMER ORDEN CON COMPLETO

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Comparación  $K*(\tau_c*s + 1)/(\tau*s + 1)$  y  $K*(\tau_c*s + 1)/(\tau*s + 1)*e^{-Ts}$ 
%%Declaración de variables.
tauc = 0.5;
tau = 1;
T=1;
K=1;

%Sistema sin retardo
misis_0=tf([tauc 1],[tau 1]);

%Sistema con retardo
misis=tf([tauc 1],[tau 1],'iodelay',T);

%Comportamiento en bucle abierto
figure(1); hold on;
step(K*misis_0,K*misis)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
title ('Respuesta escalon unitario')
% bode(misis_0,misis)
% legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
% title ('Bode')

%Comportamiento en bucle cerrado
figure(2); hold on;
nyquist(K*misis_0,K*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist
en bucle abierto
legend('Sin retardo','Con retardo')
cadena_directa_0 = K*misis_0/(1 + K*misis_0)
cadena_directa = K*misis/(1 + K*misis);
figure(3); hold on;
step(cadena_directa_0,cadena_directa)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
figure(4); hold on;
bode(cadena_directa_0,cadena_directa)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox_bc=K*conv([tauc 1],num_pade)
den_aprox_bc=conv([tau 1],den_pade)
cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc=tf(num_aprox_bc,den
_aprox_bc) % Sistema aprox bc
figure(5); hold on %Nyquist
```

```
nyquist(K*misis,cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc,0.0
00001:0.001:1000)
legend('Exacto','Aproximado')
roots(den_aprox_bc) %Los polos del sistema con
retardo, importante para Nyquist

%Comportamiento del Predictor de Smith ideal
num= K*misis;
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(6); hold on;
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*conv([tauc 1],num_pade)
den_aprox=conv([tau 1],den_pade)+K*conv([tauc
1],(den_pade-num_pade))
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(7); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.03:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.03:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(8); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_direct
a_PS_teorico_exacto),50);
step(cadena_directa_PS_teorico_aprox/(1+cadena_directa
_PS_teorico_aprox),500);
legend('Exacta','Aprox');

%Comportamiento del Predictor de Smith real
taucp=0.5;
taup=1;
Tp=1
Kp = 1;
deltaT = 0.05;
misis_0p=tf([taucp 1],[taup 1]);
misis_p=tf([taucp 1],[taup 1],'iodelay',Tp);
misis_delta_p=tf([taucp 1],[taup
1],'iodelay',Tp+deltaT);
num_p= Kp*misis_p;
den_p=1+Kp*misis_0p-Kp*misis_delta_p;
```

```
%cadena_directa_PS_teorico_exacto_p=num_p/den_p;
cadena_directa_PS_teorico_exacto_p=Kp*misis_p/(1+Kp*misis_0p-Kp*misis_delta_p);
[num_pade,den_pade]=pade(Tp,24);
[num_pade_p,den_pade_p]=pade(Tp+deltaT,24); %
Aproximación de padé de orden 6
num_aprox_p=Kp*conv([taucp
1],conv(num_pade,den_pade_p))
den_aprox_p=conv([taup 1],conv(den_pade,den_pade_p))-
Kp*conv([taucp
1],conv(num_pade_p,den_pade))+Kp*conv([taucp
1],conv(den_pade_p,den_pade))
cadena_directa_PS_teorico_aprox_p=tf(num_aprox_p,den_aprox_p) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
roots(den_aprox_p)
figure(9); hold on %Miramos si sale bien
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p,0.000001:0.001:1000);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox_p,0.000001:0.001:1000);
legend('Exacta','Aprox');

% %Ayuda para las simulaciones
taucp=0.5;
taup=1;
Tp=1;
K1p=1;
K10p=2.5;
K20p=3.5;
misis_0p=tf([taucp 1],[taup 1]);
misis_p=tf([taucp 1],[taup 1],'iodelay',Tp);
misis_delta_p=tf([taucp 1],[taup 1],'iodelay',Tp*1.01);
cadena_directa_1p=K1p*misis_p/(1+K1p*misis_0p-K1p*misis_delta_p);
cadena_directa_10p=K10p*misis_p/(1+K10p*misis_0p-K10p*misis_delta_p);
cadena_directa_20p=K20p*misis_p/(1+K20p*misis_0p-K20p*misis_delta_p);
figure(10);hold on;
nyquist(cadena_directa_1p,0.000001:0.001:1000)
%nyquist(cadena_directa_1p,cadena_directa_10p,cadena_directa_20p,0.000001:0.001:1000)
%legend('K=1','K=2.5','K=3.5')
figure(11); hold on;
step(cadena_directa_1p/(1+cadena_directa_1p),50);
step(cadena_directa_10p/(1+cadena_directa_10p),50);
```

```
step(cadena_directa_20p/(1+cadena_directa_20p),50);  
legend('K=1','K=2.5','K=3.5')  
% bode(cadena_directa_p)
```

CASO 4: SISTEMA DE PRIMER ORDEN COMPLETO + PI

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%Declaración de variables.  
tauc = 0.5;  
taui = 1;  
T=1;  
kkc=1;  
  
%Sistema sin retardo  
misis_0=tf([tauc 1],[taui 0]);  
  
%Sistema con retardo  
misis=tf([tauc 1],[taui 0],'iodelay',T);  
  
%%Comportamiento en bucle abierto  
figure(1); hold on;  
step(kkc*misis_0,kkc*misis)  
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on  
title ('Respuesta escalon unitario')  
  
%Comportamiento en bucle cerrado  
cadena_directa_0 = kkc*misis_0/(1 + kkc*misis_0);  
cadena_directa = kkc*misis/(1 + kkc*misis);  
figure(2); hold on;  
nyquist(kkc*misis_0,kkc*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en bucle abierto  
legend('Sin retardo','Con retardo')  
figure(3); hold on;  
step(cadena_directa_0,cadena_directa)  
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on  
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé de orden 6  
num_aprox_bc=kkc*conv([tauc 1],num_pade)  
den_aprox_bc=conv([taui 0],den_pade)  
cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc=tf(num_aprox_bc,den_aprox_bc) % Sistema aprox bc  
figure(4); hold on;  
nyquist(kkc*misis,cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc,0.000001:0.001:1000)  
legend('Exacto','Aproximado')
```

```
roots(den_aprox_bc) %Los polos del sistema con
retardo, importante para Nyquist
figure(5); hold on;
nyquist(kkc*misis,0.000001:0.001:1000)
nyquist(1.5*misis,0.000001:0.001:1000)
nyquist(2.5*misis,0.000001:0.001:1000)
legend('K=1','K=1.5','K=2.5')
figure(6); hold on;
step(1*misis/(1 + 1*misis))
step(1.5*misis/(1 + 1.5*misis))
step(2.5*misis/(1 + 2.5*misis))
legend('K=1','K=1.5','K=2.5')

%Comportamiento del Predictor de Smith ideal
num= kkc*misis;
den=1+kkc*misis_0-kkc*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(7); hold on;
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=kkc*conv([tauc 1],num_pade)
den_aprox=conv([taui 0],den_pade)+kkc*conv([tauc
1],(den_pade-num_pade))
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(8); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.03:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.03:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(9); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_direct
a_PS_teorico_exacto),50);
step(cadena_directa_PS_teorico_aprox/(1+cadena_directa
_PS_teorico_aprox),50);
legend('Exacta','Aprox');

%Comportamiento del Predictor de Smith real
taucp=0.5;
tauip=1;
Tp=1
Kp = 2;
```

```
deltaT = 0.05;
misis_0p=tf([taucp 1],[tauip 0]);
misis_p=tf([taucp 1],[tauip 0],'iodelay',Tp);
misis_delta_p=tf([taucp 1],[tauip
0], 'iodelay',Tp+deltaT);
num_p= Kp*misis_p;
den_p=1+Kp*misis_0p-Kp*misis_delta_p;
cadena_directa_PS_teorico_exacto_p=Kp*misis_p/(1+Kp*mi
sis_0p-Kp*misis_delta_p);
[num_pade,den_pade]=pade(Tp,32);
[num_pade_p,den_pade_p]=pade(Tp+deltaT,32); %
Aproximación de padé de orden 6
num_aprox_p=Kp*conv([taucp
1],conv(num_pade,den_pade_p))
den_aprox_p=conv([tauip 0],conv(den_pade,den_pade_p))-
Kp*conv([taucp
1],conv(num_pade_p,den_pade))+Kp*conv([taucp
1],conv(den_pade_p,den_pade))
cadena_directa_PS_teorico_aprox_p=tf(num_aprox_p,den_a
prox_p) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
roots(den_aprox_p)
figure(10); hold on %Miramos si sale bien
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p,0.000001:0.
001:1000);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox_p,0.000001:0.0
01:1000);
legend('Exacta','Aprox');
```

CASO 5: INTEGRADOR

```
% Impacto de la errónea identificación del retardo
puro en los
% controladores basados en el proedictor de Smith
% El caso de un sistema de primer orden completo /
control proporcional
```

```
%Declaración de variables
K=2; T=1; deltaT=0.1;tau = 1;
```

```
%Sistema sin retraso
misis_0 = tf(1,[tau 0])
```

```
%Sistema con retraso
misis = tf(1,[tau 0],'ioDelay',T)
```

```
%%Comportamiento en bucle abierto
figure(1); hold on;
```

```
step(K*misis_0,K*misis)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
title ('Respuesta escalon unitario')

%Comportamiento en bucle cerrado
cadena_directa_0 = K*misis_0/(1 + K*misis_0);
cadena_directa = K*misis/(1 + K*misis);
figure(2); hold on;
nyquist(K*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en bucle
abierto
nyquist(1.5*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en
bucle abierto
nyquist(2*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en bucle
abierto
legend('K=1','K=1.5','K=2')
%legend('Sin retardo','Con retardo')
figure(3); hold on;
step(K*misis/(1 + K*misis))
step(1.5*misis/(1 + 1.5*misis))
step(2*misis/(1 + 2*misis))
legend('K=1','K=1.5','K=2')
%legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox_bc=K*conv(1,num_pade)
den_aprox_bc=conv([tau 0],den_pade)
cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc=tf(num_aprox_bc,den
_aprox_bc) % Sistema aprox bc
figure(4); hold on;
nyquist(K*misis,cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc,0.0
00001:0.001:1000)
legend('Exacto','Aproximado')
roots(den_aprox_bc) %Los polos del sistema con
retardo, importante para Nyquist
figure(5); hold on;
nyquist(K*misis,0.000001:0.001:1000)
nyquist(1.5*misis,0.000001:0.001:1000)
nyquist(2.5*misis,0.000001:0.001:1000)
legend('K=1','K=1.5','K=2.5')
figure(6); hold on;
step(1*misis/(1 + 1*misis))
step(1.5*misis/(1 + 1.5*misis))
step(2.5*misis/(1 + 2.5*misis))
legend('K=1','K=1.5','K=2.5')

%Comportamiento del Predictor de Smith ideal
num= K*misis;
```

```
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(7); hold on;
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*num_pade
den_aprox=conv([tau 0],den_pade)+[0 K*(den_pade-
num_pade)]
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(8); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.03:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.03:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(9); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_direct
a_PS_teorico_exacto),50);
step(cadena_directa_PS_teorico_aprox/(1+cadena_directa
_PS_teorico_aprox),50);
legend('Exacta','Aprox');

%Comportamiento del Predictor de Smith real
taup=1;
Tp=1
Kp = 3;
deltaT = 0.5;
misis_0p=tf(1,[taup 0]);
misis_p=tf(1,[taup 0],'iodelay',Tp);
misis_delta_p=tf(1,[taup 0],'iodelay',Tp+deltaT);
num_p= Kp*misis_p;
den_p=1+Kp*misis_0p-Kp*misis_delta_p;
cadena_directa_PS_teorico_exacto_p=Kp*misis_p/(1+Kp*mi
sis_0p-Kp*misis_delta_p);
[num_pade,den_pade]=pade(Tp,6);
[num_pade_p,den_pade_p]=pade(Tp+deltaT,6); %
Aproximación de padé de orden 6
num_aprox_p=Kp*conv(num_pade,den_pade_p)
den_aprox_p=conv([taup 0],conv(den_pade,den_pade_p))-
[0 Kp*conv(num_pade_p,den_pade)]+[0
Kp*conv(den_pade_p,den_pade)]
```



```
cadena_directa_PS_teorico_aprox_p=tf(num_aprox_p,den_a  
prox_p) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)  
roots(den_aprox_p)  
figure(10); hold on %Miramos si sale bien  
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p,0.000001:0.  
001:1000);  
  
figure(11); hold on;  
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto_p/(1+cadena_dire  
cta_PS_teorico_exacto_p))
```

CASO 6: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN SIMPLE

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
% Impacto de la errónea identificación del retardo  
puro en los  
% controladores basados en el predictor de Smith  
% El caso de un sistema de 2º orden simple (polo  
doble) + control  
% proporcional  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
  
K=5; tau=2; T=1;  
  
% Sistema sin retraso  
misis_0= tf(1,[tau*tau 2*tau 1])  
  
% Sistema con retraso  
misis= tf([1],[tau*tau 2*tau 1],'ioDelay',T)  
  
%Respuesta bucle abierto  
figure(1);hold on;  
step(K*misis_0,K*misis,20)  
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on  
title ('Respuesta escalon unitario')  
  
%Estudio en bucle cerrado  
figure(2); hold on;  
nyquist(K*misis_0,0.01:0.0001:100)  
nyquist(10*misis_0,0.01:0.0001:100)  
nyquist(15*misis_0,0.01:0.0001:100)  
figure(3); hold on;  
step(K*misis_0/(1+K*misis_0));  
step(10*misis_0/(1+10*misis_0));  
step(15*misis_0/(1+15*misis_0));
```

```
legend('K=1','K=10','K=15')
figure(4); hold on;
nyquist(K*misis,0.01:0.0001:100);
nyquist(1.5*misis,0.01:0.0001:100);
nyquist(2*misis,0.01:0.0001:100);
figure(5); hold on;
step(K*misis/(1+K*misis));
step(2*misis/(1+2*misis));
step(3*misis/(1+3*misis));
%Obtenemos los polos de la cadena directa
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox_bc=K*num_pade
den_aprox_bc=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade)
roots(den_aprox_bc) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_bc=tf(num_aprox_bc,den_aprox_bc)
figure(6); hold on
nyquist(K*misis,0.01:0.0001:100);
nyquist(cadena_directa_bc,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox')

% Sistema con predictor de Smith teórico
num= K*misis;
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(7); hold on;
bode(K*misis_0/(1+K*misis_0))
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
legend('Sin PS','Con PS')
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*num_pade
den_aprox=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade)+[0 0
K*(den_pade-num_pade)]
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(8); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.01:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(9); hold on
```

```
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:100)
;
bode(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(10); hold on;
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:100);
figure(11); hold on;
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_directa_PS_teorico_exacto))

% Sistema con predictor de Smith real
deltaT=0.5;
K=10;
misis_delta= tf(1,[tau*tau 2*tau
1],'ioDelay',T+deltaT) % Sistema identificado con
error
num2= K*misis;
den2=1+K*misis_0-K*misis_delta;
cadena_directa_exacto_2=num2/den2;
figure(12); hold on;
bode(cadena_directa_exacto_2);
[num_pade_2,den_pade_2]=pade(1,12) % Aproximación de
pade de orden 6 misis
[num_pade_2_delta,den_pade_2_delta]=pade(1+deltaT,12)%
Aproximación de pade de orden 6 misis_delta
num_aprox_2=conv(K*num_pade_2,den_pade_2_delta)
w=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade_2)
den_aprox_2=conv(w,den_pade_2_delta)+[0 0
(conv(K*den_pade_2,den_pade_2_delta)-
[conv(K*num_pade_2_delta,den_pade_2)])]
roots(den_aprox_2) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_aprox_2=tf(num_aprox_2,den_aprox_2); %
Sistema con aproximación de pade (orden 6)
figure(13); hold on
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.03:0.0001:100);
nyquist(cadena_directa_aprox_2,0.03:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(14); hold on
bode(cadena_directa_exacto_2,0.01:0.0001:100);
bode(cadena_directa_aprox_2,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(15); hold on
step(cadena_directa_exacto_2/(1+cadena_directa_exacto_2),500);
figure(16); hold on
```

```
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.03:0.0001:100);
```

CASO 7: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN CON POLO EN EL ORIGEN

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%  
%%Declaración de variables.  
tau = 1;T=1;K=2;  
  
% Sistema sin retraso  
misis_0= tf(1,[tau 1 0])  
  
% Sistema con retraso  
misis= tf(1,[tau 1 0],'ioDelay',T)  
  
%Estudio en bucle abierto  
figure(1); hold on;  
step(K*misis_0,K*misis,20)  
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on  
title ('Respuesta escalon unitario')  
  
%Estudio en bucle cerrado  
figure(2); hold on;  
nyquist(K*misis_0,0.01:0.0001:100)  
nyquist(10*misis_0,0.01:0.0001:100)  
nyquist(15*misis_0,0.01:0.0001:100)  
figure(3); hold on;  
step(K*misis_0/(1+K*misis_0));  
step(10*misis_0/(1+10*misis_0));  
step(15*misis_0/(1+15*misis_0));  
legend('K=1','K=10','K=15')  
figure(4); hold on;  
nyquist(K*misis,0.01:0.0001:100);  
nyquist(1.5*misis,0.01:0.0001:100);  
nyquist(2*misis,0.01:0.0001:100);  
figure(5); hold on;  
step(K*misis/(1+K*misis));  
step(2*misis/(1+2*misis));  
step(3*misis/(1+5*misis));  
%Obtenemos los polos de la cadena directa  
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé  
de orden 6  
num_aprox_bc=K*num_pade  
den_aprox_bc=conv([tau 1 0],den_pade)  
roots(den_aprox_bc) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR  
NYQUIST
```

```
cadena_directa_bc=tf(num_aprox_bc,den_aprox_bc)
figure(6); hold on
nyquist(K*misis,0.01:0.0001:100);
nyquist(cadena_directa_bc,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox')
pause
% Sistema con predictor de Smith teórico
num= K*misis;
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(7); hold on;
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto);
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*num_pade
den_aprox=conv([tau 1 0],den_pade)+[0 0 K*(den_pade-
num_pade)]
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(8); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.01:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
figure(9); hold on
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:100)
;
bode(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(10); hold on;
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:1
00);
figure(11); hold on;
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_direct
a_PS_teorico_exacto))

% Sistema con predictor de Smith real
deltaT=0.5;
K=2;
misis_delta= tf(1,[tau 1 0],'ioDelay',T+deltaT) %
Sistema identificado con error
num2= K*misis;
den2=1+K*misis_0-K*misis_delta;
```

```
cadena_directa_exacto_2=num2/den2;
[num_pade_2,den_pade_2]=pade(1,12) % Aproximación de
padé de orden 6 misis
[num_pade_2_delta,den_pade_2_delta]=pade(1+deltaT,12)%
Aproximación de padé de orden 6 misis_delta
num_aprox_2=conv(K*num_pade_2,den_pade_2_delta)
w=conv([tau 1 0],den_pade_2)
den_aprox_2=conv(w,den_pade_2_delta)+[0 0
(conv(K*den_pade_2,den_pade_2_delta)-
conv(K*num_pade_2_delta,den_pade_2))]
roots(den_aprox_2) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_aprox_2=tf(num_aprox_2,den_aprox_2) %
Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(12); hold on
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.03:0.0001:100);
nyquist(cadena_directa_aprox_2,0.03:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(13); hold on
bode(cadena_directa_exacto_2,0.01:0.0001:100);
figure (14); hold on
step(cadena_directa_exacto_2/(1+cadena_directa_exacto_
2),500);
figure(15); hold on;
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.03:0.0001:100);
```

CASO 8: SISTEMA DE SEGUNDO ORDEN CON CERO

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%K*(tauc*s + 1)/(tau^2*s^2 +2*tau*s 1) y K*(tauc*s +
1)/(tau^2*s^2 +2*tau*s 1)*e^-Ts
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%Declaración de variables.
tau = 1;
tauc = 0.5;
T=1;
K=15;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Sistema sin retardo
misis_0=tf([tauc 1],[tau*tau 2*tau 1]);

%Sistema con retardo
misis=tf([tauc 1],[tau*tau 2*tau 1],'iodelay',T);
```

```
%Estudio en bucle abierto
figure(1); hold on;
step(K*misis_0,K*misis)
legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
title ('Respuesta escalon unitario')

%Estudio en bucle cerrado
cadena_directa_0 = K*misis_0/(1 + K*misis_0);
cadena_directa = K*misis/(1 + K*misis);
figure(2); hold on
nyquist(1*misis_0,5*misis_0,10*misis_0,0.000001:0.001:
1000)
%legend('Sin retardo','Con retardo')
legend('K=1','K=5','K=10')
title('Nyquist del sistema sin retardo')
figure(3); hold on;
nyquist(K*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en bucle
abierto
nyquist(3.5*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en
bucle abierto
nyquist(4*misis,0.000001:0.001:1000)%Nyquist en bucle
abierto
legend('K=1','K=3','K=5')
%legend('Sin retardo','Con retardo')
figure(4); hold on;
step(K*misis/(1 + K*misis))
step(3.5*misis/(1 + 3.5*misis))
step(4*misis/(1 + 4*misis))
legend('K=1','K=3','K=5')
%legend('Sin retardo','Con retardo'), grid on
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox_bc=K*conv([tauc 1],num_pade)
den_aprox_bc=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade)
cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc=tf(num_aprox_bc,den
_aprox_bc) % Sistema aprox bc
figure(5); hold on;
nyquist(K*misis,cadena_directa_PS_teorico_aprox_bc,0.0
00001:0.001:1000)
legend('Exacto','Aproximado')
roots(den_aprox_bc) %Los polos del sistema con
retardo, importante para Nyquist

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
```

```
% Sistema con predictor de Smith teórico
num= K*misis;
den=1+K*misis_0-K*misis;
cadena_directa_PS_teorico_exacto=num/den % Sistema
exacto
figure(6);hold on;
bode(cadena_directa_PS_teorico_exacto)
%legend('K = 1','K = 10','K = 15')
grid;
figure(7); hold on;
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.000001:0.00
1:1000)
%legend('K = 1','K = 10','K = 15')
figure (8); hold on
step(cadena_directa_PS_teorico_exacto/(1+cadena_direct
a_PS_teorico_exacto));
%legend('K = 1','K = 10','K = 15')
[num_pade,den_pade]=pade(1,6) % Aproximación de padé
de orden 6
num_aprox=K*conv([tauc 1],num_pade)
den_aprox=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade)+[0
K*conv([tauc 1],den_pade)]-[0 K*conv([tauc
1],num_pade)]
roots(den_aprox) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_PS_teorico_aprox=tf(num_aprox,den_aprox
) % Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(9); hold on
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_exacto,0.01:0.0001:1
00);
nyquist(cadena_directa_PS_teorico_aprox,0.01:0.0001:10
0);
legend('Exacta','Aprox');
hold off

%Sistema del predictor de Smith Real
deltaT=0.01;
K=700;
misis_delta= tf([tauc 1],[tau*tau 2*tau
1],'ioDelay',T+deltaT) % Sistema identificado con
error
num2= K*misis;
den2=1+K*misis_0-K*misis_delta;
cadena_directa_exacto_2=num2/den2;
figure(10); hold on;
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.01:0.0001:100);
title('Diagrama de Nyquist, deltaT:0.05')
```



```
%figure(11); hold on; %%MEJOR OBTENERLO CON SIMULINK%%
%step(cadena_directa_exacto_2/(1+cadena_directa_exacto_2));
[num_pade_2,den_pade_2]=pade(1,12) % Aproximación de
padé de orden 6 misis
[num_pade_2_delta,den_pade_2_delta]=pade(1+deltaT,12)%
Aproximación de padé de orden 6 misis_delta
h=conv(num_pade_2,den_pade_2_delta)
num_aprox_2=conv(K*[tauc 1],h)
w=conv([tau*tau 2*tau 1],den_pade_2)
t=conv(den_pade_2,den_pade_2_delta)
p=conv(num_pade_2_delta,den_pade_2)
den_aprox_2=conv(w,den_pade_2_delta)+[0 conv(K*[tauc
1],t)]-[0 conv(K*[tauc 1],p)]
roots(den_aprox_2) % IMPORTANTE MIRARLO PARA APLICAR
NYQUIST
cadena_directa_aprox_2=tf(num_aprox_2,den_aprox_2) %
Sistema con aproximación de padé (orden 6)
figure(12); hold on
nyquist(cadena_directa_exacto_2,0.03:0.0001:100);
nyquist(cadena_directa_aprox_2,0.03:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
figure(13); hold on
bode(cadena_directa_exacto_2,0.01:0.0001:100);
bode(cadena_directa_aprox_2,0.01:0.0001:100);
legend('Exacta','Aprox');
```

EXTRA

```
%%Declaración de variables.
tau = 1;
T=1;
T3=3;
k=1;
%%Comparación  $K/(\tau*s + 1)$  y  $K/(\tau*s + 1)*e^{-Ts}$  en
bucle abierto
misis_0=tf(k,[tau 1]);
misis=tf(k,[tau 1],'iodelay',T);
misis_3=tf(k,[tau 1],'iodelay',T3);
figure(1); hold on
step(misis_0)
title ('Respuesta a una entrada escalón sin retardo')
figure(2); hold on
step(misis_0,misis,misis_3)
title ('Respuesta a una entrada escalón con y sin
retardo')
```

```
legend('Sin retardo','Con retardo(T=1)','Con  
retardo(T=3)'), grid on  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Puntos de corte para el cálculo de funciones  
fa1 = @(x) atan(-x)-x+pi;  
x = linspace(0.01,5,100);  
y = fa1(x);  
plot(x,y),grid  
x0 = 1;  
x = fzero(fa1,x0)  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Otro punto de corte  
fa2 = @(x) atan(-1.5.*x-0.5.*x.*x.*x)-x+pi;  
x = linspace(0.01,5,100);  
y = fa2(x)  
plot(x,y),grid  
x0 = 1;  
x = fzero(fa2,x0)  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Otro punto de corte  
fa3 = @(x) atan(1./x)-x-pi;  
x = linspace(0.01,5,100);  
y = fa3(x)  
plot(x,y),grid  
x0 = 0;  
x = fzero(fa3,x0)  
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%Mas puntos de corte  
fa4 = @(x) -atan((4.*x)./(1-(4.*x.*x)))-x+pi;  
x = linspace(0.01,5,100);  
y = fa4(x)  
plot(x,y),grid  
x0 = 0;  
x = fzero(fa4,x0)
```