~~2f n°~~

De la Universidad

LLAVE GEOMETRICA;

DE LA RESVELTA, Y DEMOSTRADA OPERACION DE la TRISECCION DEL ANGVLO, por medio de las lineas comenſuratrices del quadrante.

DEL DOCTOR DON NICOLAS COPPOLA, NATVRAL DE LA Ciudad de Palermo, Reviſor de libros del Tribunal del Santo Oficio de la Inquiſicion del Reyno de Sicilia, primer Calculador que fuè del repartimiento general de los Regios donativos en dicho Reyno, y Profeſſor de Mathematica.

EN LA QVAL HAZE VN RESVMEN DE LAS CENSVRAS, QVE SE han hecho contra la primera ſolucion, que ſe diò à luz en 25. de Agoſto de 1691. Y SON

LA EXTRAVAGANTE IDEA DEL MAESTRE DE CAMPO DON SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO, la inſubſiſtente de IGNACIO VANDER BAREN, y la curioſa de DON FRANCISCO GVILLERMO POIGNARD, Canonigo de Namur, y Capellan de ſu Mageſtad, Profeſſores de Mathematica.

Y SE DESCVBRE, Y DEMVESTRA EL ARTIFICIO, CON EL qual ha querido el Inventor apurar el caudal de todos ſus Adverſarios.

Y SE DECLARA LA VERDADERA LLAVE DE LA REAL CERTIdumbre de eſta deſeada ſolucion, con aquellas rigurosas demonſtraciones, que pide la facultad.

SE DEMVESTRA TAMBIEN, Y SE CONCLVYE LO QVE EL PADRE ZARAGOZA demonſtrò contra el HEPTAGONO del P. MVñOZ, y dá tambien el Inventor la veridica ſolucion, y demonſtracion de DIVIDIR EL CIRCVLO EN SIETE PARTES IGVALES, y la FORMACION DEL HEPTAGONO, ſobre qualquiera recta terminada.

SE HAZE VNA ADVERTENCIA AL VIVIANI, POSTRER DISCIPVLO del GALILEO, Academico FLORENTINO, Profeſſor de Mathematica; y otra tambien à vna muy cèlebre Vniverſidad de Italia.

Y SE CONCLVYE CON VN RETO GENERAL A PVBLICO certamen, para arguir contra los que han impugnado, y pretenden impugnar las referidas ſoluciones Geometricas de la TRISECCION DEL ANGVLO, y formacion del HEPTAGONO, en la forma que ſe verà en el fin de eſte tratado.

DEDICADA AL EMINENTISSIMO SEñOR CARDENAL PANFILIO, LEGATO EN BOLONIA.

CON LICENCIA.

EN MADRID: Por JVAN GARCIA INFANZON.
Año de 1693.

EMINENTISSIMO PRINCIPI BENEDICTO CARDINALI PANFILIO, BONONIÆ LEGATO SANGVINE CLARISSIMO, NECNON OMNIBVS VIRTVTIBVS ORNATISSIMO.

S. P. D.

QVÆDAM ad publicam Patriæ vtilitatem ſpectantia, in auſpicato aggreſſus (ſiquidem infeliciter ceſſere) in adverſæ ſortis ſolatium, ſpeique excilæ levamen, quæ nunc ad tutelam tuam confugiunt Eminentiſsime Præſul, Matheſeos Problemata meditatus, in lucem edidi. Si tenuitatem muneris ſpectem, tibi equidem dicari indignum exiſtimem, ſi vero humanitatem tuam, & erga literarum ſtudioſos benevolentiam perpenderim, non iniucundum tibi fore putem, & quin benigniſsime id excepturus ſis, nequaquam dubitavero. Vt enim omni literarum genere inſtructus, non minus præclaris ingenij dotibus, quam ſanguinis claritate èluces, quantum in enitendis his doctrinæ foetibus deſudandum ſit, & quanti ideo faciendi ſint, non te latuerit. Quod cum ita ſit, non immeritò in ſpem venio, hos tibi meos gratos fore. At hercle, ſi tibi accepti fuerint, cur impoſterum, quibus huc vſque ſcripta mea petita fuere, invidiæ mordacis, & iniquæ tela verear? Immò certa ſpes inde nobis illucet, hæc modo retuſum, aut ſaltem in æmulos retortum iri, & præſertim, cum non ad tuum confugium ſupplex accedam, mendas & errores, ſiqui fuerint, nominis tui tutamine defenſurus, ſed tantum ab iniqua invidorum, & imperitorum calumnia ſcripta mea vindicaturus. Nihil enim abs te enixius eflagito, Purpurate Princeps, nihil gratius abs te ſperare poſſum, quam ſi ea accuratiſsime expendenda cu-

curaveris, & expensa, si quæ fuerint, quæ doctrinæ repugnare videantur, damnari iubeas. Quippe si secus expetam, aut abs te mihi concessum iri arbitror, ea quam vehementer expeto, tutela me prorsus indignum præstiterim, scilicet, vt qui iustissimi Principis gratiam benevolentiamque tantum captare, & aucupari viderer, veritati insidias moliturus, & vt inique oculis omnium ignorantiæ caligines offunderem. Verumsi hæc opuscula, iussu tuo, semel perpensa, Matheseos veritis probata fuerint, ea simul, authoritate tua confirmare velis, etiam atque etiam precor, vt mens iniqui livoris aculeis exagitata, calumnijsque lacessita, hoc tuo nixa tutamine, ad maiora enitatur, dignioraque tibi scribere valeat, vt ea tandem in æmulorum dedecus, veritatis præsidium, scientiæ splendorem, & gratitudinis, observantiæ quæ meæ monumentum, perpetuo maneant. Vale 15. Kal. Maij 1693.

Purpurate Præsul,

Eminentissimæ Dignitatis tuæ,
Observantissimus, & obsequentissimus.

V. I. Doct. D. Nicolaus Coppola.

APROBACION DEL DOCTOR DON IVAN Martinez, Cura de la Parroquial de Santiago de esta Corte.

POR mandado del señor Don Alonso Portillo y Cardos, Dignidad de la Iglesia de Talabera, Inquisidor, y Vicario de esta Villa de Madrid, y su Partido: He visto vn tratado, *sobre la Triseccion de el Angulo, y formacion del Heptagono*, que ha compuesto el Doctor Don Nicolàs Coppola, natural de la Ciudad de Palermo; y aviendole visto con atencion, hallo no tener cosa contra nuestra Santa Fè, y buenas costumbres, por tanto se le debe dar la licencia, que solicita para imprimirle. Assi lo juzgo, salvo meliori, &c. En Santiago de Madrid en ocho de Abril de mil seiscientos y noventa y tres años.

Doct. D. Iuan Martinez.

LICENCIA DEL ORDINARIO.

NOS el Licenciado Don Alonso Portillo y Cardos, Dignidad de Chantre en la insigne Colegial de Talavera, Inquisidor Ordinario, y Vicario de esta Villa de Madrid, y su Partido, &c. Por la presente, y por lo que à Nos toca, damos licencia para que se pueda imprimir el libro, intitulado: *La Triseccion del Angulo*, y *formacion del Heptagono*, atento, que de nuestra orden se ha visto, y reconocido, y no contiene cosas contra nuestra Santa Fè Catholica, y buenas costumbres. Dada en Madrid à treze de Abril de mil seiscientos y noventa y tres años.

Lic. D. Alonso Portillo y Cardos.

Por su mandado.

Domingo de Goytia.

APROBACION DEL DOCTOR DON JUAN FRANCISCO de la Puebla Gonçalez, Cura de la Parroquial de San Juan de esta Corte.

M. P. S.

De orden, y mandado de V. A. he visto el tratado, cuyo titulo es: *De la Trisección del Angulo, y formacion del Heptagono*, cuyo Author es el Doctor Don Nicolas Coppola Panormitano, Professor de Mathematicas; y aunque por no ser de mi Professión la materia, no puedo assegurar si el Author haze segura demonstracion del intento, no puedo dexar de dezir, que el punto de que trata, ha sido siempre tenido por vno de los dificiles (por no dezir impossibles) que han reconocido los Professores de esta facultad; y que si ha llegado à vencer este empeño, ha superado lo que ninguno hasta aora, y quando no aya conseguido seguro, y cabal desempeño del intento, à lo menos no se le puede quitar el lauro de averlo emprendido, porque: *In magnis voluisse satis.* Y en el campo que descubre, hallaràn los doctos Professores de las Mathematicas, motivo de emplear sus discursos, ya sea impugnando, ò ya favoreciendo su resolucion, que es el medio por donde las sciencias llegan à tener el estado perfecto, y adquirirse con real zelo. Por lo qual, y por no hallar en todo èl cosa que desdiga de la pureza de nuestra Santa Fè Catholica, ni que se oponga à las buenas costumbres, iuzgo se le debe dar la licencia, que para imprimirle pide; assi lo siento, salvo meliori, &c. En San Juan de Madrid en 12. de Abril de 1693. años.

Doct. D. Francisco de la Puebla Gonçalez.

LICENCIA.

TIene licencia de los ſeñores del Conſejo Real el Doctor Don Nicolàs Coppola, natural de la Ciudad de Palermo, para poder imprimir eſte tratado, *ſobre la Triſeccion del Angulo, y formacion del Heptagono*, ſin que otra perſona lo pueda imprimir ſin ſu conſentimiento, como mas largamente conſta del original, deſpachado en el Oficio de D. Diego Guerra de Noriega, Eſcrivano de Camara del Conſejo.

SVMA DE LA TASSA.

TAſſaron los ſeñores del Conſejo Real eſte tratado, *ſobre la Triſeccion del Angulo, y formacion del Heptagono*, à ſeis maravedis cada pliego, como mas largamente conſta de la certificacion, deſpachada en el oficio de Don Diego Guerra de Noriega.

PROEMIO.

CON ocasion de aver llegado à esta Corte, y hallarse actualmente en ella Don Francisco Guillermo Poignard, Presbytero Canonigo de la Ciudad de Namur, y averme dado por escrito el reparo que tiene hecho en la primera solucion de la Trisección del angulo, que publiquè en 25. de Agosto de 1691. el qual se reduce à que aviendose valido de la suposicion de Ignacio Vander Baren, Academico aplaudido en los Estados de Flandes, procurando disfraçarla, para que no se conociesse de donde sacava lo que proponia, ha vsado terminos extravagantes para sentar la conclusion que imagina, los quales manifiestan bastantemente los pocos fundamentos con que escrive, como lo reconocerà el curioso por este papel, el qual (movido yo de esta consideracion) he solicitado con toda brevedad darle à la Imprenta; y para mayor inteligencia del que le leyere, juzgo ser preciso enterarle sucintamente de todo lo que se ha escrito hasta aora, assi de mi parte, como de tódos aquellos, que han tomado por su quenta el impugnar esta solucion geometrica de la Trisección del Angulo.

Aviendo yo en dos de Enero de 1690. dado à la Imprenta la solucion geometrica de las dos medias en continua proporcion me respondieron de Palermo debaxo del nombre de D. Diego Merino de Roxas, Cavallero del Orden de Santiago, à quienes yo en primero de Iunio respondi, y resueltoles las dudas que me propusieron; y aviendoles sobre las mismas propuesto vn Problema, no me han respondido, y bueltoles à replicar que me honrassen con su respuesta, parece que han enmudecido.

En 10. de Março de 1690. publiquè la quadratura del circulo; y porque algunos Professores mas por el titulo, que por la sciencia, privadamente despreciavan lo que yo tenia escrito, sin justificar su desprecio, ni acreditar su censura con demonstraciones scientificas, como era su obligacion, alegavan que bastava dezir, que mis Problemas no estavan demonstrados, sin tener ellos mas fundamento, que el del compàs, como lo he demonstrado en otros tratados, y aora nuevamēte lo demonstrarè. Me hallè precisado de publicar en 25. de Agosto de 1691. la solucion geometrica de la Trisección del angulo; y porque quise artificiosamente ceñirme dentro del quadrante, declarè à la buelta de la pag. 3. que la raiz fundamental de este nacia del lib. 10. de los Elementos de Euclides, por los binomios, y bimedias, sin passar à demonstrar cosa alguna de estos, contentandome solo de apoyarme en la prop. 10. del lib. 6. reservando lo mas principal en los dos Problemas que propuse à los Professores, vno inverso del otro, para que con esto pudiesse qualquiera reconocer con evidencia si estas operaciones podian nacer del compàs (segun dezian) ò del fundamento de la sciencia, como lo manifestavan las mismas operaciones, como lo reconocerà el curioso por tenue que sea su habilidad.

Contra esta solucion geometrica de la Triseccion del angulo escriviò el Sargento mayor D. Iuan de Herrera y Sotomayor, si bien se sabia no era suya la obra, y que con nombre suyo (como consta bastantemente) quisieron mis emulos escrivir contra ella, juzgando por este camino acreditar su sciencia, y grangear aplausos: quando tan al contrario les sucediò, que creo, que à la hora presente (si posset vox Missa reverti) quisieran no averse metido en este empeño voluntario, pues no sirve mas, que de deslucir su habilidad imaginada, y manifestar su obstinada passion, siendo vno, y otro diametralmente opuesto à los que desean acreditarse de Professores en esta facultad.

El dia primero de Octubre de 1691. respondi satisfaciendo no solamente à todas las objecciones, que se me hizieron, sino concluyendo tambien lo contrario de lo que los dichos señores pretendian dar à entender; y conociendo yo, q̃ por no comprehender los Problemas, que propuse à los Professores, dezian que el vno era insoluble, y el otro tan facil, que qualquier principiãte no necessitava para resolverle mas que de aver llegado à entender la 32. del 1. de Euclides, fue obligado à hazer notorio à todo el mundo, quan remotos estavan estos señores del verdadero conocimiento de esta facultad; pero quise resolverlos, y demonstrar, que vno era inverso del otro, assi por quantidad continua, como por quantidad discreta, como se ha visto, y nuevamente lo demonstrarè en este papel.

A vista de esta respuesta intentaron estos señores hazer obstentacion de su gran capacidad, publicando vn papel, cuyo titulo era: *Reparos Mathematicos, en respuesta de vn papel que saliò à luz en este mes de Octubre de* 1691. *en Madrid, con vn Apendiz muy curioso*, y en la verdad lo era, pues juzgo no se ha visto otro del genero.

A estos tales reparos respondi en 21. de Enero de 1692. con el titulo de *Defensa Mathematica, &c.* en la qual aviendo nuevamente, y con evidencia demostrado la vanidad, y falsedad de sus suposiciones, me pareciò podia con sobrada razon borrar las figuras demonstrativas, por ser enteramente agenas de la facultad, y opuestas à los fundamentos de esta sciencia, advirtiendo; no las tendrian por justificadas, sino viniessen aprobadas sus demõstraciones por alguna celebre Vniversidad, y en particular por las de Padua, y Salerno, que eran las mis-

mismas con que estos señores me amenazavan.

Dexaron por entonces de responder el dicho D. Iuan de Herrera, y su Maestro, pero para dar à entender no quedavan enteramente concluidos, sacaron à luz en 8. de Febrero vn papel, cuyo titulo era: *Pareceres, y juyzios, que se hazen de vn papel, con titulo de defensa Mathematica de Don Nicolàs Coppola, que ha sacado à luz en esta Corte.* Componiase esta obra de siete pareceres, y los mas se reducia à elogios del referido Don Iuan de Herrera, y à tratarme con mucho desprecio, sin fundar algo de lo que alegavan en la sciencia, no porque no quisieron ostentarla, si porque no la tenian, como por lo que en adelante dirè, bastantemente podrà inferir el curioso Lector; y solo el parecer del Maestre de Campo Don Sebastian Fernandez de Medrano, demonstrava lo contrario de lo mismo que intētava demonstrar, no sin mucha admiracion de ver andar tan à ciegas à quien se precia de guiar à los demàs, y de que errasse quien procura enmendar desaciertos.

Finalmente saliò à campaña, con esperança de vitoria, otro nuevo papèl, con el vano titulo de *Desengaño, que en tres avisos dà al publico el* (referido) *Maestre de Campo Don Sebastian Fernandez de Medrano, Director de la Academia Real, y Militar del Exercito de los Payses Baxos, contra vnos escritos Mathematicos, que repetidas vezes ha hecho imprimir el Doctor Don Nicolàs Coppola, Palermitano, perturbando con ellos, y el orden, y acrisolada pureza de la facultad.* Contenia tambien este desengaño las censuras de algunos Professores de los Payses Baxos, entre las quales se puede dezir con verdad, que solo el papel de Ignacio Vander Baren es de hombre que entiende en esta parte la facultad, porque en medio de ser falsa su demonstracion, como lo tengo probado con sus mismos fundamentos, la dispuso con tal arte, que podrà engañar à quien no tenga los principios fundamentales de esta sciencia; pero lo mucho que me ha admirado, y me admira, es que ninguno de estos señores aya hecho mencion de la solucion que di à los dos problemas, que avia propuesto, en donde estava la verdadera raiz de estas operaciones, por medio de la linea conmensuratriz; quando real, y verdaderamente nadie ignora, que qualquier Professor, que se supone à responder està precisado à hazerlo en el todo, y no en la parte, pues lo contrario es tirar mas à obscurecer, que à manifestar la verdad, y mas à confundir con la ignorancia, que a ilustrar con la doctrina.

Respondi a estos señores en mi papel impresso en 11. de Abril de 1692. con nombre de la *Certidumbre de las resueltas operaciones de la Triseccion del angulo, &c.* Demonstrando, y concluyendo la falsedad de las operaciones hechas por los dichos Professores, como se puede ver por los escritos referidos.

Con este vltimo papel desistieron del empeño que tenian hecho de escrivir cōtra mi, porque mis razones les debieron de hazer fuerça, conocieron sin duda el poco credito, que grangeavan en escrivir; pero entre los que sintierō este (no se si diga) lauro mio, solo el referido Maestre de Campo D. Sebastian Fernandez de Medrano, mostrando lo poco q̄ alcança de la facultad afectò con expressiones indecentes, de que debia abstenerse por su mismo credito, manifestādo a todo el mundo, quan a lo vivo del coraçon le avia llegado la fuerça de mi verdad, y contentandose con dezir contra mi lo que le dictava vn odio no merecido, pues nunca le he dado el mas minimo motivo de quexa, se valiò (para multiplicar los agravios) del Gazetero de Bruselas, disponiendo que pusiesse en su gazeta de 1. de Iulio el capitulo siguiente.

Otra pelea ha suscitado en Madrid el Doctor Nicolàs Coppola, Siciliano, con la tenacidad con que pretende sustentar el aver hallado la solucion de las tres mayores dificultades de las Mathematicas, hasta oy inqueridas siempre deseadas, y nunca halladas geometricamente. La quadratura del circulo, quatro rectas en continua proporcion, dos medias entre dos extremas, y Triseccion del angulo, cōtra quien ha escrito la Vniversidad de Lovayna los Padres de la Compañia mas eminentes, y los hombres mas peritos en dicha facultad, no siendo de su opinion el Maestre de Campo Don Sebastian Fernandez de Medrano, Director de la Academia Real, y Militar de estos Payses, y sus discipulos, que son muchos ingenios, y eruditos, y no aprovechando la autoridad de personas tan ilustres, no solo queda obstinado en su perfidia el dicho de Coppola, sino habla con desacato, y aun con ignominia del referido Director de Medrano, que con modestia, y prudente atencion ha tomado el consejo primero del Sabio en no responder, sino dexar al ignorante con su ignorancia, ò locura, por ser tan conocida de todos, passando à injuriosa. Ne respondeas stulto iusta stultitiam suam. Proverb. cap. 26. v. 5. *por poderse originar de la respuesta mayor inconveniente.*

Bien conocerà qualquier hombre discreto, que no serà temerario juyzio mio el discurrir, que el referido capitulo fue disposicion del Maestre de Campo Medrano, el qual viendose vencido, mas no queriendo confessarse rendido, apela a las armas del Gazetero, para reñir con palabras agenas la pendencia, de la qual con su embotada sciencia saliò con tan poco lucimiento, siguiendo casi el exemplo de estos señores, que a vista del poco credito, que adquirian en escrivir contra mi, desistiendo del empeño costoso a su reputacion, no dexaron de valerse de las censuras que han publicado, las quales con poca diferencia tenian el mismo fundamento, que las razones del Gazetero, que si bien a todas luzes son de ninguna eficacia, y no merecen reparo, quiero sin embargo examinarlas, y responder a ellas, como lo he practicado haſta aora en todo quanto ſe ha eſcrito contra mi.

Lo primero es,que haſta oy ninguno ha eſcrito con demonſtracion contra la quadratura del circulo,que he ſacado à luz.

Lo ſegundo , que ſe conoce la paſsion , ò el poco conocimiento con que eſcriven,pues incluyen entre los principales Problemas el de las quatro rectas en continua proporcion, el qual, ademàs de ſer tan vulgar,como todos ſaben,yo no lo he tomado en la boca,cauſandome cada dia nueva admiracion la tenacidad de eſtos ſeño res en imponer à la verdad con el ſolo fin de impugnarme.

Lo tercero es, querer dar à entender, que eſtos ſeñores del Pays Baxo han eſcrito contra las dos medias entre dos extremas en continua proporcion,ſiendo tan notorio lo contrario;pues contra eſtas,ſolo ſe eſcriviò en Palermo,debaxo del nombre de Don Diego Merino de Roxas, del qual he hablado anteriormente, el qual no tenia razon para eſcrivir del modo que lo hizo,y à quien,como queda dicho,reſpondi à 1. de Iunio de 1690. con demonſtraciones tan claras, y evidentes, que baſtaron à ſatisfacerle ; y lo que eſcrivieron aqui debaxo del nombre de Don Iuan de Herrera, fue por no atreverſe à ſacar la cara , conociendo ſin duda los pocos fundamentos que tenian para eſcrivir, quando antes no ſe cōtentava ſu vanidad con paſſar plaça de los mas ſcientificos en la facultad;con lo qual, queriendo deſvanecer la referida operacion de la Triſeccion del angulo, ſacaron à luz en ſu ſegunda reſpueſta del mes de Noviembre de 1691. con el titulo de *Reparos Mathematicos*,pag.8.el parecer del referido Maeſtre de Campo Medrano , ſobre las referidas dos medias , ſi bien èl miſmo confeſsò deſpues,que era obra de vn diſcipulo ſuyo;y ſiēdo eſte reparo el miſmo , que hizieron en nombre del referido Don Diego de Merino, ſe puede dezir,que el Maeſtre de Campo, ni ſu diſcipulo Vander Baren no han eſcrito verdaderamente contra las referidas dos medias , ſino meramente copiado el miſmo reparo, al qual avia ſatisfecho antes, deſde 1. de Iunio de 1690.y aſsi ſi el Maeſtre de Campo anhelava tāto à oſtentar ſu habilidad, no debia ſer à coſta del ageno trabajo, ni valiendoſe de vn reparo hecho por otros, à quien ſe avia reſpondido mas de vn año y medio antes; y para hazerlo con lucimiento,avia de ſer poniendo nuevos reparos en la reſpueſta que yo tenia dada,como lo expliquè en mi papel de 21. de Enero de 1692. en la pag.4. y 5. y en el papel de 11. de Abril en la pag.3. y 4.como lo podrà ver el curioſo.

En quarto lugar pone la Triſeccion del angulo,contra la qual eſcrivieron en eſta Corte eſtos ſeñores,y deſpues los Profeſſores particulares de Lovayna, y no la Vniverſidad, como la gazeta quiere dar

à en-à entender,y ſemejantemente los de Bruſelas,y Namur, de los quales ninguno ſe atreviò à tomar en la boca la reſolucion de los dos Problemas, que tenia propueſto, para hallar la linea conmenſuratriz del quadrante, ni tampoco han hecho mencion alguna de la formacion del Heptagono,y de mas Poligones de lados impares,que es el quarto Problema,no reſuelto haſta aora; de donde ſe infiere claramente, que el ſeñor Gazetero eſcrive como tal, diziendo, no lo que es, ſino lo que oyò dezir;arrojandoſe à publicar,que los Padres mas eminentes, y eruditos de la Campañia, han eſcrito contra eſtos Problemas, quando los que han eſcrito han paſſado en ſilencio los mas, ſin aver tratado mas que de la Triſeccion; y aun ningun Padre de eſta Iluſtre Compañia ha ſacado la cara para eſcrivir en ſu nombre ſobre eſte punto; y los eſcritos que han ſalido à luz, han ſido meras aprobaciones de algunos miembros de eſte celebre cuerpo,ſin aver querido oſtentar en ellas lo que alcançan de eſta facultad.

En quanto à lo que dize el Gazetero de mi obſtinacion, creo no merece eſte nombre vna juſta defenſa de la verdad,que à no ſer permitida en infinitas ocaſiones,ſe quedara obſcurecida,y ofuſcada cõ las tinieblas de la mentira, ò malignidad, que debe ſer el fin à que miran ordinariamente aquellos que convencidos del poco fundamento con que eſcriven, quieren ſin embargo, por no deſacreditarſe mantener ſus errores,ſin reparar en q̃ finalmente à peſar de ſu diſsimulacion,ha de ſalir triunfante la verdad. Eſte ha ſido el motivo que me ha precisado à perſeverar en el empeño de manifeſtarla,teniendo para conſeguirlo los fundamentos reales, que no ſe ocultaràn à la inteligencia libre de paſsiones, los quales ſe han reconocido en mis eſcritos antecedentes,y ſe reconoceràn en eſte,fiando del Lector inteligente,y deſapaſsionado,me concederà la razon que me aſsiſte para publicarlos, y mas quando los que han eſcrito en contra,aunque graduados de ſabios por el Gazetero, no han podido haſta aora hazer demonſtracion,que merezca juſtamente eſte nombre.

Anda bien gracioſo el Gazetero,quando dize, que hablo con deſacato,y aun con ignominia del referido Director Medrano; quando de los papeles, que eſcriviò contra mi, y de las expreſsiones, que en ellos vſa, podrà inferir qualquiera (no aviendole dado motivo para ello, como lo he declarado antes) quien de los dos puede con razon eſtar quexoſo;y en mi primera reſpueſta, aviendome valido de todos los terminos, que me dictò la modeſtia, y que podia con razon aver eſcuſado,à viſta de los que vsò conmigo,para contemplar à quien no ha ſabido ſacarle del empeño.

Y finalmente anda tan inadvertido el Gazetero en los conſejos

que

que dà (ò que otro dà por ſu boca) que por errar tan torpemente el modo, y la forma, no merecen ninguno; quiero como piadoſo (aunque injuſtamente ofendido) advertirle, que otra vez no trueque, ni cite abuſivamente los textos, y referir las palabras divinas, que tan inconſideradamente me ha aplicado, que ſon pues las enteras, y formales en el verſo que èl cita, y en el inmediato las ſiguientes: *Ne respondeas ſtulto iuxta ſtultitiam ſuam ne efficiaris ei ſimilis.* *RESPONDE STVLTO IVXTA STVLTITIAM SVAM NE SIBI SAPIENS ESSE VIDEATVR.* De donde inferiràn los doctos, que al Idiota Autor de dicho capitulo, le obligavan en el conſejo primero, que èl cita del Sabio, como el ſegundo; pues ambos ſon igualmente de fee; y que ſi el primero le ponia ley de no reſpōder à vn necio con otra necedad, era precepto del ſegundo reſponder al necio con ſabiduria, para que no crea de ſi que es ſabio, como ſin duda alguna cree ſer el Gazetero; pues à no ſer eſto aſsi, lo que debiera aver hecho conforme à la ſagrada doctrina, que cita (ſin entenderla) fuera, ſi yo huviera hablado, como ignorãte, à no reſponderme como tal con ignorancia, ſino como ſabio, apeandome de mi ignorancia cō ſu ſabiduria; pero como eſta le falta, ſe vale de ſu oſſada necedad, ſin reparar que es mas en daño ſuyo, que en agravio mio, y que mas me excita à compaſsion, que me mueve à ſentimiẽto.

Y para mayor juſtificacion de lo que digo, y para que el curioſo quede convencido de eſta verdad, me parece no ſerà fuera de propoſito, antes de poner las cenſuras bolver à repetir aqui la artificioſa operacion, que publiquè en 25. de Agoſto de 1691.

SE REPITE LA ARTIFICIOSA SOLVCION, QVE EL AVTOR DIO A LA Triſeccion del angulo en 25. de Agoſto de 1691. la qual con toda brevedad es la ſiguiente. Cap. 1.

PRimeramente quiſe eſtablecer por ſu hypoteſi la Triſeccion del quadrante *A B D* (lamina *A*, fig. 2.) del qual tomando la parte del arco *D E*, igual al ſemidiametro *D B*, quedava la porcion del arco *E A*, tercera parte del arco del quadrante; deſpues tirada la cuerda *A D*, y tambien la cuerda *A E*, ſe corria del angulo *B* al punto *E*, la recta *B E*, la qual cortava la cuerda *A D* en punto *F*, y con eſto quedava formado el triangulo *A F E* Iſoſceles, como venia demonſtrado en aquel tratado, y tambien ſe verà en eſte.

Sobre eſta natural hypoteſi del quadrante, quiſe dezir que ſe podia triſecar qualquier arco dado.

Supueſto que fueſſe dado el angulo agudo *A B H*, ò ſea el arco *A H*, el qual ſe huviera de dividir en tres partes iguales. Tiravaſe la

cuer-

cuerda *A H*, y ſemejantemente juntavaſe *H D*, y quedava formado el Triangulo *A H D*, y por la 31. del primero, haziendo paſſar por el pũto *F* vna recta paralela à la *H D*, eſta por la 10. del 6. cortava la cuerda *A H* en punto *I*, en la miſma proporcion, que era cortada la cuerda *A D* del quadrante en el punto *F*; y aſsi tirada del angulo *B*, por el punto *I*, la recta *B I M*, eſta tambien cortava el arco *A H* en tres partes iguales en punto *M*, en la miſma forma, que la recta *B F E* cortava el arco del quadrante *A D* en tres partes iguales en punto *E*, y el triangulo *A M I*, ſemejantemente era Iſoſceles, como el triangulo *A F E*.

Por el angulo obtuſo, como es el *A B C*, ò arco *A C*, ſe levantava ſobre el lado *A B* en el extremo *B*, la perpendicular *D B*, la qual formava el quadrante *A B D*, y obrandoſe ſobre eſte, como arriba queda dicho, ſe hallava la tercera parte *A E*, y ſe cortava la cuerda *A D* del quadrante en punto *F*, ſe tomava deſpues ſobre el arco de dicho quadrante la parte *A H*, igual al arco *D C*, complemento del angulo obtuſo dado; y con eſte obrandoſe tambien, como arriba ſe ha advertido, ſe añadia à la tercera parte del arco del quadrante (que era la *A E*) la tercera parte del arco *A H* (que era la *A M*) y la compueſta *A O* era la tercera parte del angulo obtuſo, dado *A B C*, ò arco *A C*.

Siendo aora repetida eſta artificioſa operacion, paſſemos al reſumen de las cenſuras, que el referirlas es del caſo, y deſpues de viſtas guſtarà mas el Lector de lo que ſe dixere ſobre ellas, y podrà con mas acierto hazer juyzio de vno, y otro.

RESUMEN DE LA CENSURA DEL MAESTRE DE CAMPO DON Sebaſtian Fernandez de Medrano, Director de la Academia Real, y Militar del Exercito de los Payſes Baxos.

HAllandoſe Don Iuan de Herrera, y ſu Maeſtro en el embaraço, y confuſion en que les metiò mi Problema de la Triſeccion del angulo, por no poderle entender, como lo tengo demonſtrado en los papeles impreſſos en eſta Corte, à que remito el curioſo, ſe valieron del auxilio del dicho Maeſtre de Campo Medrano, el qual no deſdiciendo de la habilidad de los referidos Maeſtro, y diſcipulo, diò con mucha ſatisfacion de ſi miſmo ſu cenſura, à la qual ſi bien reſpondi, y le concluì en mi papel impreſſo en 3. de Março de 1692. ſin embargo para obſtentar de nuevo la ſingular habilidad de dicho Don Sebaſtian, me ha parecido acertado ponerla de nuevo aqui.

CARTA DEL MAESTRE DE CAMPO DON SEBASTIAN Fernandez de Medrano, al Sargento mayor Don Iuan de Herrera y Sotomayor.

SEñor mio , recibi este Correo vna de V. md. juntamente con el impresso del Doctor Coppola, y la respuesta que à èl sacò V. md. quien en ella muestra su sutil ingenio, y entero conocimiento que tiene en las disciplinas Mathematicas, como assimismo en su limado, y vrbano estilo lo noble de las prendas, que assisten à su persona, cuya modestia me obligò à leer el celebrado Problema, que el dicho Coppola propone al publico, y de otro modo huviera tomado por sentencia el parecer de V.md. que dize, que à semejante CONFVSION *omiten todos con maduro consejo responderle. Y no pudiendo V. md. tolerar semejantes abusos lo hizo ,* LO QVAL HALLO AVER SIDO CON TODO ACIERTO, *pues por el mismo supuesto de V.md. aviendo dado yo el radio* A B 10000000. (*de la tercera figura de D. Nicolàs*) *hallo que la* A I *tiene* 3660252. *y la* A M 3472964. *con que el triangulo* A I M, *no es Isosceles. Y cierto pudiera D. Nicolàs Coppola aver escarmentado, con aver visto quan poco lugar se hizieron sus no demonstradas proposiciones , en que solo se halla vn enlazamiento de lineas , ò circulo vicioso,* QVE NO RESVELVE NADA ; *los quales Problemas dize, que hasta que le demuestren alguna falsedad, los tendrà por buenos, sobre que me remito à la respuesta, en que hize ver su alucinamiento, y à la justificada que dà V.md. no obstante no estàr nadie obligado à mas respuesta, q̃ la de dezir,* no està demostrado.

Respondi, como tengo dicho, à esta censura (se merece llamar assi) à 3. de Março de 1692. en la forma siguiente.

Y assi dize el señor Don Sebastian de Medrano aver hallado no solo, que la parte *A I* sea 3660252. pero que la parte *A M* sea 3472964.

Aora quiero suplicar al señor Maestre de Campo Don Sebastian de Medrano nos detengamos aqui vn poco, para reconocer la verdad desto. Ya confiessa el señor Maestre de Campo tiene hallada la *A I* 3660252. que son las mismas partes, que hallò sin fundamento Don Juan de Herrera, y sus Maestros; y aviendoles yo demostrado estas ser con evidencias falsas, con su proprio extravagante metodo, como en mi papel antecedente, desde la pag. 12. hasta la 20. podrà ver el curioso. Debo aora del mismo genero (para mas publica evidencia de la verdad) hazerlas reconocer tambien por falsissimas, en virtud de lo mismo que ha hallado el señor Maestre de Campo , de que la *A M* sea 3472964. con la demostracion siguiente; pues no han entendido lo que el Padre Zaragoza refiriò de Caramuel.

Aviendo el señor D. Sebastian hallado la *A M* de 3472964. y siendo esta cuerda del arco *A M*, serà dicho arco *A M* de 29. grados, como qualquiera podrà hallar con las tablas trigonometricas.

En virtud de lo qual se debe examinar el triangulo *A I M*, para que se conozca la diferencia de la *A I*, à la *A M*, que supone aver hallado, y para poderla evidentemente demostrar, se necessita de hallar los angulos *A M I*, *A I M*; porque si es verdad, que la *A I*, es mayor que la *A M*, por la 18. del lib. primero de Euclides el angulo *A M I*, debe ser tambien mayor, que el angulo *A I M*.

Y assi se considera primeramente el triangulo *A B M* (de mi 2. fig. lam. A) del qual los lados *B A B M*, salen de vn mismo centro *B*, y caen en la misma circunferencia en los puntos *A*, y *M*, que por la 15. difinicion del primero, seràn dichos lados *B A*, *B M*, entresi iguales, y por la 24. difinic. del mismo, el triangulo *A B M*, serà Isosceles; y porque el arco *A M* es de 20. grados (como arriba se ha dicho) en virtud de la *A M*, que hallò el señor Don Sebastian; y siendo este arco opuesto al angulo *A B M*, serà por consequẽcia el angulo *A B M* de 20. grados, con que los angulos *B A M*, *B M A*, juntos por la 32. del primero, seràn de 160. grados. Y aviendose demostrado, que los lados *B A*, *B M*, son entre si iguales, seràn por la 5. del prim. los angulos *B A M*, *B M A* de 80. grados cada vno.

Aora considerese el TRIANGVLO *A I M*, del qual el angulo *A M I*, siendo el mismo, que el angulo *A B M*, serà precisamẽte el angulo *A M I* de 80. grados: Aora para hallar los otros dos angulos *M A I*, *A I M* del mismo TRIANGVLO, se necessita considerar vn triangulo *A H B*, del qual el lado *A H*, es cuerda del arco de 60. grados (por la suposicion hecha) y por lo que arriba se ha demostrado, serà cada angulo de dicho triangulo *A H B* de 60. grados. De genero, que el angulo *B A H*, serà de 60. grados; y porque avemos hallado antes el angulo *B A M* de 80. grados, si de este se resta el angulo *B A H* de 60. grados, quedarà el angulo *M A I* de 20. grados. Con que tenemos del TRIANGVLO *A I M* conocidos el angulo *A M I* de 80. grados, y el angulo *I A M* de 20. grados, que juntos hazen 100. grados, con que serà el angulo *A I M* por la 32. del primero, tambien de 80. grados. Y ASSI LOS ANGVLOS *A M I*, *A I M*, SON ENTRE SI IGVALES, Y POR CONSEQVENCIA LOS DOS LADOS *A M*, *A I*, OPVESTOS A ESTOS ANGVLOS POR LA PROP. 6. DEL LIB. 1. DE EVCL. SERAN IGUALES; y siendo iguales serà la parte *A I* cuerda de 20. grados, tercera parte de los 60. y el triangulo *A I M* SERA ISOSCELES.

Con que siendo los lados *A I*, *A M*, iguales como ? EL SEñOR MAESTRE DE CAMPO DON SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO, DIRECTOR DE LA REAL ACADEMIA DE LOS MILITARES EN LOS PAYSES BAXOS, incurre en vn error tan conocinocido, y tan ſin diſculpa en vn PROFESSOR, diziendo con tanto magiſterio, que ha hallado la *A I* 3660252. y la *A M* 3472964. lo que no es poſsible, por lo que ſe acaba de demoſtrar: En que pido licencia à D. Sebaſtian de Medrano para admirarme, de que vn PROFESSOR PVBLICO, que pretende dar leyes, no conſidere primero, lo que eſcrive, que no dudo, que averlo conſiderado, no ſe arrojara con tanta torpeza à hazer vn argumento, que es tan contrario à ſu credito: Que en Don Juan de Herrera (ſabiendo todos) no hazia mas de lo que le mandavan, tenia alguna diſculpa, pues ſolo ſe le debia condenar ſu facilidad en obedecer; pero! el ſeñor Don Sebaſtian, que yo eſtimava, creyendo que era vno de los mayores Profeſſores de Europa, ſalir aora con vn argumento tan ageno de la facultad, no sè que diſculpa pueda tener! Y aſsi no me admiro, que quien tiene tan pocos fundamentos, como mueſtra, diga, *nadie eſtà obligado à mas reſpueſta, que la de dezir no eſtà demoſtrado*, que para eſte genero de argumentar no ſe neceſsita de muchos eſtudios.

De donde podrà inferir qualquier hombre docto, ſi eſte Profeſſor podia hazer juyzio de las dos medias, que dezia ſer vn enlaçamiento de lineas, ò circulo vicioſo, que no reſuelve nada, quando con evidencia ſe reconoce, que ignora los principios de la facultad; y no parezca ponderacion, pues lo miſmo que eſcrive juſtifica lo que digo.

Y aſsi à viſta de todo lo referido, ſuplico al que leyere ſin paſsion diga quien ſerà el porfiado, y maldiciente.

PAPEL, QVE EN RESPVESTA DE OTRO REMITIO A Medrano vn diſcipulo ſuyo.

SEñor mio, he viſto la triſeccion del angulo del Doctor Coppola, y ſolo podia obligarme à examinarla, el mandarmelo V. md. reſpecto de que las dos medias proporcionales, que antes remitiò el Author à V. md. no daban motivo à la curioſidad de eſpecular ſus eſcritos, como yo demoſtrè, ſiguiendo ſu miſma doctrina, cenſura, que puſo en ſu reſpueſta V. md. (la qual eſtà impreſſa, en los reparos de la ſegunda reſpueſta que diò Don Juan de Herrera, à fol. 9.) y obedeciendo aora à V. md. remito demoſtrada, en pura geometria la falſedad de la triſeccion, ſiguiendo ſu conſtruccion.

Sea conſtruida enteramente la figura 3. del Doctor Coppola (que en eſte tratado es la lamina A, fig. 1. operac. 1. y la que adelante parece) y que el angulo agudo dado ſea A B H de la mitad de vn recto (dando la B H) y hallado, por la doctrina del Author, el arco A M, tercera parte de A H, y el arco A E, la tercia parte del arco A D, y que aſsimiſmo ſe tenga por fixo, que el triangulo A E F, es Iſoſceles, como lo es (aunque el Author, por no demoſtrar nada no lo demoſtrò) digo que el dicho arco A M, ſerà tan cierta la tercia parte de A H, como el arco

A E, la quarta parte de A D, aviendose por construccion hecho de su tercia; den-se E I, E M, H E, y pongase la letra X, en la intersecacion de la cuerda A H, y semidiametro B E.

Demostracion. Siendo el arco A E tercio de A D, y A M tercio de su mitad (quiero dezir de H A) seràn los arcos A M, y E M cada vno, el sexto de A D, de que se sigue que seràn iguales, como sus cuerdas (prop. 29. l. 3.) Con que los triangulos A B M, M B E, tendràn sus tres lados iguales, cada vno al suyo, y assi lo seràn los triangulos en todo ser (8. l. p.) y siendo sus angulos en M, y formados de las rectas iguales A M, M E, y de la comun I M, seràn los triangulos A M I, E M I, iguales en todo sentido (4. l. p.) de que se sigue, que las rectas A I, F I, lo seràn entre si: Aora por quanto la E I es (por construccion) paralela à la H D, serà D H, à H A, assi como F I, à I A (4. l. 6.) y aviendose dado el angulo A B H, por medio recto, lo serà tambien medio recto H B D, y los arcos A H, D H iguales (26. l. 3.) y lo mismo por la 29. l. 3. sus cuerdas, de que se infiere, que lo serà F I de I A; la qual, siendo demostrada igual à la E I, lo serà esta de I F (ax. 1.) y el trianguloE I F Isosceles descrito dentro del Isosceles E A F, con la basa F E comun. Y teniendo los triangulos F I A, E I A, los tres lados del vno iguales à los tres del otro, cada vno al suyo (por serles comun la A I) seràn los dichos triangulos iguales entre si (8. l. 1.) y quitados los angulos iguales F I A, E I A, cada vno de dos rectos, quedaràn los angulos F I X, y E I X iguales (13. l. 1.) y assi siendo en los triangulos F I X, E I X, los lados F I, E I iguales, y X I comun; seràn iguales los triangulos en todo sentido (4. l. 1.) y por consequencia sus angulos en X rectos (d. 10. l. p.) de que se infiere, que la recta A H estarà dividida por mitad en el punto X, por el semidiametro B E (3. l. 3.) y teniendo los triangulos A E X, H X E el lado A X, igual à H X, y la E X comun, con sus angulos en X iguales, seràn estos triangulos iguales en todo sentido (4. l. p.) y las rectas E A, H E, siendo iguales, lo seràn sus arcos; pero todo el arco A H es dado de la mitad de A D, y dicho arco A H se halla dividido por mitad en E; luego el arco A E, serà la quarta parte del total A D; pero aquel era (por construccion) la tercia; pues tercio, y quarto de vna misma quantidad implica el que sean iguales; y assi no serà de ninguna manera el arco A M, tampoco la tercia parte de A H. Y concluyo con que si aquella Obra magna que el Author promete al publico, no està con otras demostraciones mejores que estas, que le suplico lo omita, porque mas serà ofuscarnos, que darnos doctrina.

Respondi à este papel, como tengo dicho en 11. de Abril de 1692. con vno del tenor siguiente.

Este papel le he puesto à la letra, por ser el principal, y que en la verdad habla con mas propriedad en los terminos de la ciencia, y que muestra tener mas conocimiento en ella, que Don Sebastian: no obstante, porque vea el señor Vander Baren, que en medio de su grande habilidad, no ha sabido comprehender mis Problemas, le satisfarè por los mismos terminos que me arguye.

Dize

Dize el señor Vander Baren, que mis dos medias proporcionales, *no daban motivo à la curiosidad de especular mis escritos.*

A que respondo, que nunca podian ocasionarle curiosidad; quando no avia entendido el fundamento de ellas, como él mismo lo manifiesta, aviendo supuesto la A B de 16384. y la B C de vn quarto de vno entero, que es lo mismo que buscar dos medias entre dos extremos dados, que todas quatro sean en continua proporcion Quadrigecupla compuesta, para las quales se necessitava, no de 4. sino de 62. operaciones, que las quatro solo sirven para toda la dupla simple proporcion, como en mi respuesta de 21. de Enero de este año en la buelta de la pag. 4. periodo 2. brevemente respondi à Don Sebastian, advirtiendole debia recurrir à la respuesta, que di al señor Don Diego Merino à primero de Junio de 1690. que avia hecho el mismo reparo, en donde avria hallado plenamente la satisfacion demostrada de hallar las dos medias entre qualquier dos extremos dados; porque la verdad es, que en quanto à lo que toca à todo lo necessario en la quantidad continua, bastan las dos medias por toda la simple dupla continua proporcion, porque con esta no solo se dupla el cubo, pero se octupla, y queriendo passar mas adelante con todo el rigor en la cantidad continua, bastarà hallar dos medias en continua proporcion, entre la dupla compuesta por toda la tripla simple, que con esta se viene à multiplicar el cubo progressivamente, hasta la 27. no obstante para todos los curiosos dì el modo general de poderlo multiplicar en infinito.

De genero, que aviendo yo respondido bastantemente vna vez sobre este mismo reparo, no estoy obligado à repetirlo siempre, porque la respuesta que se dà à vno, sirve para todos los que hazen el mismo reparo: y assi debia el Vander Baren aver considerado mi respuesta, y hallando otro nuevo reparo, responderme lo que se le ofrecia, sin que el Vander Baren pueda alegar no aver llegado à sus manos, quando D. Sebastien confiessa averla recibido, diziendo, *aver visto lo que dediquè al Excelentissimo señor Duque de Vzeda, que es la respuesta dicha.*

Mayormente se prueba, que el Vander Baren no ha entendido la operacion de mis dos medias en continua proporcion, porque respondiendo à la triseccion del angulo, no dize cosa sobre los dos Problemas que tengo resueltos, que son la llave de estas operaciones, que estando puestos en vn mismo escrito, tenia obligacion qualquiera que responde à vn papel, responder à todo lo que contiene, y mas à los puntos essenciales, como son estos dos Problemas, de que depende el hallar la linea conmensuratriz del quadrante, con las mismas operaciones de los binomios, con los quales se hallan las dos medias, pues para la solucion de los dos Problemas se hizieron tres operaciones demostradas por el Al-

go-

gorithmo que ſe ha viſto, y las medias por toda la ſimple dupla continua proporcion, ſe demueſtran con 4. operaciones: con que ſi el Vander Baren no conſidera la reſolucion de eſtos dos Problemas, que ſon el fundamento principal de los quatro Problemas no reſueltos, como podrà entender la reſolucion de las dos medias en continua proporcion? Y aſsi es neceſſario, que conſidere bien la referida operacion de los dos Problemas; y ſi tiene algun reparo que hazer lo ponga, porque de eſtas operaciones ſe dà principio para hallar la linea conmenſuratriz del quadrante, que es la raiz de la *TRISECCION DEL ANGULO*, formacion del *HEPTAGONO*, y otras muchas operaciones, y deſpues progreſsivamente continuando con los binomios, y bimedias, ſe paſſa à hallar la *QUADRATURA DEL CIRCULO*, y las *DOS MEDIAS* en la forma que tengo dicho en mis eſcritos.

Paſſa deſpues el Vander Baren (pag. 8.) à hazer cenſura de la triſeccion del angulo; y dize, que aunque el triangulo A E F ſea Iſoſceles, no obſtante no lo he demoſtrado.

A lo que reſpondo, que el ſeñor Vander Baren no ha conſiderado bien lo que tengo eſcrito; porque aviendo yo referido la demoſtracion de Caramuel, que trae el Padre Zaragoça, que dado el angulo F C B (de aquella figura, que en mi tratado es la 1.) que todas las vezes que ſe tire C I G, con tal arte, que la F G, F I fueſſen iguales, ſeria el arco F G la tercera parte de F B. Con que aviendo ſido eſto demoſtrado de Caramuel, y referido por mi, baſtantemente (deſpues de aver conſtruido la hypoteſis del quadrante) demonſtrè, quando dixe: *Porque por ſu hypoteſis el arco A D, es la tercera parte de dicho quadrante, aſsi la recta B F D cortarà la cuerda A G en punto F, en tal genero, que los lados A F, A D, ſeràn iguales; pues ſi como antes ſe ha demoſtrado, que ſiendo los lados A E, A F, iguales al arco A D cortado, serà la tercera parte de todo el arco A G dado: aſsi aora ſiendo por hypoteſis el arco A D, la tercera parte del arco del quadrante A D, los dos triangulos A B D, A D F, tambien por lo que ſe tiene antes demoſtrado ſon Iſoſceles.*

Pero ya que eſta no es baſtante, para que la entienda Vander Baren, harè para mayor claridad la ſiguiente, que es la miſma que he hecho privativamente, à quien me ha hecho el miſmo reparo.

Conſt. Si ſobre el arco A D del quadrante A B D (figura 1. de eſte) con la diſtancia del ſemidiametro B D, ſe cortarà la porcion del arco D E, eſta por el corolario de la prop. 15. del lib. 4. de Euclides, ſerà vna ſexta parte del circulo; de genero, que quedarà la parte A E, que ſerà por ſu hypoteſis, tercera parte del arco del quadrante A D. Del punto A, al punto D, ſe tire la recta A D, eſta ſerà la cuerda del arco del quadrante A D; deſpues del punto A al punto E, ſe tire la recta A E, que ſerà la cuerda

del

del arco A E, tercera parte del arco del quadrante A D. Finalmente del angulo B al punto E (en donde ſe termina la tercera parte del arco del quadrante) ſe tire la recta B E, eſta cortarà la cuerda del arco del quadrante A D en punto F. Digo, que los triangulos A B E, A E F, ſon Iſoſceles.

Porque los lados B A, B E del triangulo A B E, ſalen de vn miſmo centro B, y caen en la miſma circunferencia del quadrante en los puntos A, y E, por la difinic. 15. del 1. ſeràn los dichos lados entre ſi iguales, *Dem.* y por la 24. difinic. del miſmo el triangulo A B E, ſerà Iſoſceles. Conſidere el dicho triangulo A B E, del qual ſiendo el angulo A B E, opueſto al arco A E, tercera parte del quadrante, ſerà dicho angulo de 30. grados; y porque los tres angulos de qualquier triangulo, por la 32. del primero ſon iguales à dos angulos rectos, ſeràn los dos angulos B A E, B E A juntos 150. grados, y aviendoſe demoſtrado ſer el triangulo A B E Iſoſceles, ſeràn preciſamente los dos angulos B A E, B E A, por la prop. 5. del lib. 1. de 75. grados cada vno.

Aora ſe debe conſiderar el triangulo rectangulo A B D, del qual (por lo que ſe tiene demoſtrado) los lados B D, B A, ſon entre ſi iguales, ſerà pues el angulo B A D de 45. grados, el qual ſi ſe reſta del angulo B A E, que ſe ha hallado de 75. grados, quedarà el angulo E A F de 30. grados.

Finalmente conſidereſe el triangulo A E F, del qual ſon conocidos el angulo E A F de 30. grados, y el angulo A E F (que es el miſmo que A E B) de 75. grados, ſerà luego el angulo A F E (por la citada 32. del 1.) tambien de 75. grados, y ſiendo eſtos dos angulos A E F, A F E, iguales, ſeràn los dos lados opueſtos A E, A F (por la 6. del 1.) tambien iguales, y el triangulo A E F por la referida difinic. 24. del 1. ſerà Iſoſceles; y ſiendo el lado A E cuerda del arco A E, tercera parte del arco del quadrante, ſerà ſemejantemente el lado A F, igual à la cuerda de dicho arco A E, tercera parte del arco del quadrante, que era lo que ſe debia demonſtrar.

De genero, que ſe ha demonſtrado, que el triangulo A E F es Iſoſceles, y que la A F es igual à la cuerda de la tercera parte del arco del quadrante; y con eſte fundamento demonſtrè en mi primer papel de 25. de Agoſto de 1691. y aora del miſmo genero demueſtro, que el triangulo A M I es Iſoſceles, y que la A I es igual à la cuerda A M, tercera parte del arco A H.

Si la propoſicion 10. del lib. 6. de Euclides es cierta, como en la verdad lo es, no es dudable que ſe puede dividir qualquiera otra recta en el quadrante, con la miſma razon que eſtà dividida la A D en punto F; y aſsi ſi ſe quiere dividir qualquiera arco A H en tres partes iguales, ſe debe formar el triangulo A H D, y por la 31. del lib. 1. haziendo

paſſar

passar por el punto F vna paralela a la H D, esta por la 10. del 6. dividirà el lado A H en punto I con la misma razon que està dividido el lado A D en punto F, y asi como el lado A F se demostrò igual à la cuerda del arco A E, tercera parte del arco del quadrante A D, y ser el triangulo A E F Isosceles, asi aora la A I serà igual à la cuerda del arco A M, tercera parte del arco A H, y el triangulo A M I serà Isosceles.

Con que querer demostrar, que la A I no sea igual à la A M, tercera parte del arco A H, es vanamente demonstrar, que la prop. 10. del lib. 6. de Euclides sea falsa.

Antes de satisfacer à la artificiosa, aunque poca fundada censura del Vander Baren, me ha parecido acertado de poner otra, que privadamente, y por escrito hizieron de mis Problemas, y à la qual aviendo satisfecho en la misma forma en 14. de Febrero de 1692. sin que los Authores de ella se ayan dignado de responderme, determinè publicarla en mi referido vltimo papel de 11. de Abril, sin passar à nombrarlos, juzgando con esto se hallarian obligados à lo menos a responderme en particular, ya que se avian empeñado en censurar mis Problemas; pero viendo, que no por esto se daban por entendidos, con averles escrito en diversas ocasiones, y diversas vezes suplicadoles se dignassen de responderme. Finalmente tomè la resolucion de advertirles en 25. de Septiembre del año passado, seria la vltima vez que les escriviria; pero que en la primera obra que sacasse à luz publicaria, que esta censura venia de vna muy cèlebre Vniversidad de Italia; y si a esta no me respondian, en otra obra que diesse à la Imprenta pondria el nombre de la tal Vniversidad; y asi cumpliendo a esta palabra, pongo aqui nuevamente la censura de dicha Vniversidad, y mi respuesta.

CENSVRA HECHA POR VNA MVY CELEBRE Vniversidad de Italia.

PRetenden estos señores: *Que yo no huviesse demonstrado, ni que en eterno podia demonstrar, que el triangulo A M I fuesse Isosceles, ni menos que la A F sea cuerda de la tercera parte del arco A D, y que tambien A I fuesse cuerda de la tercera parte del arco A H* (confessando) *que en virtud de la 10. del lib. 6. de Euclides ser certissimo, que los lados A H, A D del triangulo A H D, estàn divididos proporcionalmente; pero q̃ de dicha proporcion no se puede inferir otra cosa, sino que segun la razon que tiene la A D à la A F, assi seria la A H à la A I,* diziendo despues: *Que no por esto, si la A F es cuerda de la tercera parte del arco A D, serà la A I cuerda de la tercera parte del arco A H; y que quando esto fuesse verdad, tambien lo seria, que pudiendose tirar*

rar infinitas I F paralelas à la H D, ò mas proximas à la misma, ò mas proximas al angulo A, del mismo genero; aquella parte del arco A D, de que fuesse cuerda la A F, de semejante parte del arco A H, seria cuerda la A I.

A esto respondi, diziendo, que para demostrar, que el triangulo A M I sea Isosceles, se debia primeramente demostrar, que el triangulo A E F es tambien Isosceles, y que el lado A F es igual por su hypotesis à la cuerda A E, tercera parte del arco del quadrante; y di primero la demonstracion que tengo dicha, y por segunda, aviendome concedido ser certissimo, que por la 10. del lib. 6, los lados A H, A D del triangulo A H D, estàn divididos proporcionalmente. Concluyendo, probè con la misma demonstracion, que el triangulo A M I era Isosceles, añadiendo despues lo siguiente.

No sè como se pueda negar, que si la A F es cuerda de la tercera parte del arco A D, la A I no pueda ser cuerda de la 3. parte del arco A H? Quando en la misma censura confiessan, que la proporcion que tiene A D à A F, la misma tiene A H à A I. Y caso que la A I no fuesse cuerda de la tercera parte del arco A H, me parece que esto se debia demonstrar; porque dezir solo, que no, porque A F es cuerda de la 3. parte del arco A D, serà A I cuerda de la 3. parte del arco A H; esto es hablar voluntariamente, y no probar nada, de que la A I no sea cuerda de la 3. parte del arco A H.

Finalmente tampoco tiene fundamento alguno la razon, que en la censura se pretende dar, diziendo: *Que quando esto fuesse verdad, tambien lo seria, que pudiendose tirar infinitas I F paralelas à la H D, ò mas proximas à la misma, ò mas proximas al angulo A, del mismo genero à aquella parte del arco A D, de que fuesse cuerda la A F, de semejante parte del arco A H, seria cuerda la A I.* Porque la A F, solamente puede ser cuerda de la 3. parte del arco A D del quadrante, en donde vnicamente se puede formar el triangulo Isosceles A E F, como evidentemente se ha demonstrado en virtud de los angulos, y assi fuera desta tercera parte, no puede nunca la A F ser cuerda de otra parte de aquel arco, porque mudandose los angulos, se mudan tambien los lados. Y assi era menester dezir, que tirandose infinitas I F paralelas à la H D, ò mas proximas à esta, ò mas proximas al angulo A, segun la parte del arco A D, fuesse lado A F de aquel triangulo, que se forma con la cuerda de la parte del arco A D, de otra semejante parte del arco A H, seria la razon del lado A I de aquel triangulo, que se forma con la cuerda de aquella parte del arco A H; y para mayor evidencia de esta verdad, se harà la siguiente demonstracion.

Supongase el arco A E fuesse la mitad, y no la tercera parte del arco A D, seria el angulo A B E de 45. grados, y consequentemente los angulos B A E, B E A, seràn de 67. grados, y 30. minutos cada vno, con que restandose del angulo B A E de 67. grados, y 30. minut. el angulo B A D (ya demonstrado de 45. grados) quedarà el angulo E A F de 22. grados, y 30. minut. y A E F de 67. grados, y 30. minut. que juntos hazen 90. grados, serà el angulo A F F de 90. grados, y siendo este angulo opuesto à la cuerda del arco A E, por la 19. del primer. serà mayor la cuerda A E del lado A F, y asi la parte A I no puede ser cuerda del arco A E, mitad del arco A D del quadrante, que era lo que se debia demonstrar.

Lo que se demonstrarà en todas las demàs partes, sino es solo la tercera, en donde vnicamente la A F puede ser cuerda, y aqui se podrà dezir con toda razó, que en eterno la parte A F podrà ser cuerda, sino es la tercera parte del arco A D del quadrante; y es demonstracion tan clara, como verà qualquiera que tuviere mediano conocimiento de esta facultad.

PEro aunque las demonstraciones hechas en general, parece podrian ser bastantes para qualquier Professor: me ha parecido no obstante (para mayor claridad) satisfacer en particular à cada vno de estos señores; y particularmente à Vander Baren, por ser el que vnicamente habla en terminos de la ciencia.

ESTE Cavallero despues de aver establecido, segun mi hypotesis el arco A E, tercera parte del arco A D del quadrante; y la A M, tercera parte del arco A H (que es mitad del arco A D) pone los arcos A M, M E, cada vno por la sexta parte de A D (que se refiere à la tercera parte del arco A H) demonstrando, que los triangulos A B M, M B E, son entre si iguales, y del mismo genero demuestra, no solo que los triangulos A M I, E M I, son en todo sentido iguales; pero tambien, que siendo los lados A I, I E, I F iguales, no solo el triangulo E I F, sea Isosceles, descrito dentro del Isosceles E A F, teniendo la basa E F comun; pero tambien, que los dos triangulos F I A, E I A, teniendo los tres lados de vno igual à los tres lados del otro, cada vno al suyo, seràn dichos triangulos iguales entre si: Con que pretende, que quitando los angulos iguales F I A, E I A, cada vno de dos angulos rectos, queden los angulos F I X, E I X iguales; y con esto pretende concluir, que el angulo en X sea recto, y consiguientemente la recta A H, serà dividida por mitad por el semidiametro B E en punto X, &c.

Con que aora hemos menester considerar, si esto que pone Vander Baren es cierto, que si lo es, desde luego le concederè todo lo demàs.

El principal fundamento, que inutilmente pretende dar por cierto el señor Vander Baren, consiste en querer demonstrar, en virtud de los lados, que los angulos F I A, E I A, sean entre si iguales. Para reconocer esta demonstracion, se debe con los mismos fundamentos de Euclides vèr si dichos dos angulos F I A, E I A, sean efectivamente iguales, y esto se debe hallar con la indubitable demóstracion del valor de los mismos an-

gu-

gulos, pues la demonſtracion del Vander Baren, ſe funda ſobre el arco de la mitad del quadrante, que es de 45. grados.

Para eſto ſe debe primeramente conſiderar, que la I F, es por conſtruccion paralela à la H D, y que la recta A H, cuerda del arco de la mitad de A D, corta las dos rectas paralelas en los puntos H, y I, que por la 29. del 1. de Euclides el angulo A H D interno, debe ſer igual angulo A I F externo, y porque la recta H D, por ſupoſicion es cuerda de la mitad del arco A D del quadrante, ſerà luego el angulo H B D de 45. grados, y conſequentemente el angulo A H D en la circunferencia ſerà de 135. grados, con que el angulo A I F por la referida 29. del 1. ſerà tambien de 135. grados.

Aora ſe debe hallar el angulo A I E; ſi eſte es de 135. grados la demonſtracion de Vander Baren, ſerà enteramente contra la prop. 10. del lib. 6. de Euclides, que es donde eſtà fundada mi operacion, pero ſi dicho angulo A I E no fuere de 135. grados, ſerà vana la demonſtracion de Vander Baren, y juſtificada la mia, como ſe verà por lo que ſigue.

Y aſsi para hallar el angulo A I E, es neceſſario primero hallar el angulo A I M, que es ſu mitad (por lo que tiene demoſtrado Vander Baren) para lo qual ſe debe hazer las demonſtraciones ſiguientes.

Porque aviendo pueſto Vander Baren, ſegun la demonſtracion que hizo, que los arcos A M, y E M, cada vno ſea la ſexta parte de A D, que viene à ſer lo tercero de A H, y aviendo èl miſmo demonſtrado, que los triaungulos A B M, M B E ſean entre ſi iguales; y ſemejantemente, que los triangulos A M I, E M I ſean tambien en todo iguales. Con eſto ſe debe conſiderar el triangulo A B M, del qual los lados B A, B M, ſalen de vn miſmo centro B, y caen en la miſma circunferencia en los puntos A, y M, que por la 15. difinic. del 1. ſon entre ſi iguales, y por la difinic. 24. del miſmo el triangulo A B M ſerà Iſoſceles; y aviendo ſido demonſtrado, que el triangulo M B E, es igual al triangulo A B M, ſerà luego tambien el triangulo M B E Iſoſceles.

Conſidereſe aora el triangulo A B M, del qual el arco A M, aviendoſe pueſto por la ſexta parte del arco A D del quadrante, ſerà el angulo A B M de 15. grados, y los angulos A M B, B A M, juntos ſeràn por la 32. del 1. de 165. grados; y porque ſe ha demonſtrado, que el triangulo A B M es Iſoſceles, ſeràn los dos angulos A M B, M A B (por la 5. del 1.) de 82. grados, y 30. minutos cada vno, y ſiendo el angulo A M B el miſmo, que el angulo A M I, con eſto tendrèmos conocido del triangulo A M I, el angulo A M I de 82. grados, y 30. minutos.

Aora para hallar del triangulo A M I, el angulo A I M, ſe debe primeramente hallar el angulo M A I, y eſte ſe hallarà, reſtando el angulo B A H, del angulo B A M, el reſiduo ſerà el angulo M A I.

Y aſsi ſe debe conſiderar el triangulo A B H, del qual el arco A H ſe tomò por la mitad del arco A D del quadrante; de genero, que ſerà el angulo A B H de 45. grados, y por lo que ſe demonſtrò en el triangulo A B M, ſerà el angulo B A H de 67. grados, y 30. minutos, y eſte reſtado del angulo M A B (que ſe hallò de 82. grados, y 30. min.) quedarà el angulo M A I de 15. grados. Con que del triangulo M A I ſon conocidos el angulo M A I de 15. grados, y el angulo A M I de 82. grados, y 30. minut. que juntos hazen 97. grados, y 30. minut. y aſsi por la referida prop. 32. del 1. ſerà el angulo A I M tambien de 82. grados, y 30. minut. Con que los lados A M, A I opueſtos à dichos angulos A I M, A M I, ſiendo (por la prop. 6. del 1.) entre ſi iguales, ſerà el triangulo M A I (por la 24. difinic. del miſmo) Iſoſceles; y ſiendo el lado A M cuerda del arco A M, tercera parte del arco A H, ſerà tambien la A I igual à la cuerda de la tercera parte del arco A H, y porque el triangulo E M I ſe demoſtrò igual al triangulo A M I, aſsi ſiendo el lado A M opueſto al angulo A I M, igual al lado E M, opueſto al angulo E I M, ſerà luego eſte angulo E I M tambien de 82. grados, y 30. minut. De genero, que juntos eſtos dos angulos A I M, E I M, formaràn todo el angulo A I E de 165. grados. Y aviendoſe hallado antes que el angulo A I F ſerà de 135. grados, con que no puede ſer el angulo A I E igual al angulo A I F.

Y aſsi ſi el angulo F I A de 135. grados, ſe reſta del valor de dos angulos rectos, quedarà el angulo externo F I X de 45. grados, y ſi el angulo A I E conſequentemente ſe reſta del valor de otros dos angulos rectos, quedarà el angulo E I X externo de 15. grados. De genero, que los angulos F I X, E I X, no ſon iguales; y por conſequencia, ni el angulo en X ſerà recto, ni tampoco la recta A H eſtà dividida por mitad por el ſemidiametro B E en el punto X, como pretende Vander Baren demonſtrar con el miſmo Euclides; porque no ſolo con eſta pretendida demonſtracion ſeria falſa la prop. 10. del lib. 6. y la 29. del primero; pero tambien ningun arco podia medir ſu angulo, ſegun ſu demonſtracion.

Con que aviendo yo evidentemente demoſtrado (como ſe ha viſto) con los miſmos terminos de Vander Baren, que el ſemidiametro B E no corta la recta A H por mitad en punto X, y tambien he demonſtrado, que el triangulo A I M es Iſoſceles, y que el lado A I es cuerda igual à la A M, tercera parte del arco A H, ſe vè quan ſin fundamento es toda la demonſtracion de Vander Baren.

Aſsi, aviendo yo ſatisfecho, y concluido à todos los que han eſcrito con los miſmos fundamentos, de que ſe han valido contra mi, y deſvanecido el concepto que tenian, de que me concluirian, como aviendo yo tambien publicado la linea comenſuratriz del quadrante, con lo demàs que ſe ha viſto, y ſe puede ver en mis eſcritos, ſin que

à toà todo ello aya respondido alguno, podia por esto no proseguir en este empeño: pero como mi fin ha sido, es, y serà siempre, que se conozca la verdad, quiero manifestar lo que hasta aora no he querido declarar del todo (fiādo en que à los legitimos Professores de esta sciencia les bastava lo que yo escrivia) y descubrir con evidencia à los ojos de los scientificos, que ninguno de estos señores, que ha respondido, ha sabido entender mis Problemas, y assi primeramente demostrarè aqui, contra mi primera operacion de la triseccion del angulo, publicada en 25. de Agosto de 1691. para que se reconozca con la experiencia, qual ha sido la habilidad de estos señores, los quales si hasta aora, no han podido, podràn con esto aprender, como se debe demostrar vn error, para descubrir vna verdad; la qual, como mas arriba he insinuado, he querido en parte tener hasta aqui oculta, para que con mayor evidencia, se reconociesse la importancia de estas operaciones tan mal entendidas, como injustamente calumniadas.

DEMVESTRA EL MISMO INVENTOR COPPOLA, LO QVE ninguno de sus Censores ha sabido con realidad demonstrar contra su primera operacion de la triseccion del angulo, publicada en 25. de Agosto de 1691. Cap. 2.

NO ay duda, que la trigonometria es vna sciencia incomparable: es la piedra del toque de la Mathematica, como el elixir de ella; y en fin es el tribunal, en que sin apelacion, se substancian sus operaciones, como lo han confessado mis adversarios: pero esto es quando se exercitan las verdaderas doctrinas trigonometricas, y no alteradas, y del modo q̄ mis emulos han vsado de ellas, como se ha reconocido, por faltarles enteramente el conocimiento de esta ciencia, como les he demostrado; pues con las mismas doctrinas de mis censores, les probè lo contrario de lo que ellos pretendian dar à entender, como el curioso podrà ver en mis escritos de 21. de Enero de 1692. con el titulo de *Defensa Mathematica, desde la pag.* 15. *hasta la de* 19. demanera que se persuadieron con mis expressiones, à que no entravan operaciones trigonometricas, porque no las entendian, y ninguno se atreviò à replicar demostrativamente sobre ellas. Quando (como repetidas vezes tengo dicho) la real demostracion en estas operaciones, es por las referidas doctrinas, que son incontrovertibles, como aquellas que vnicamente miden los angulos; y assi para que se reconozca esta verdad, y certidumbre de mis operaciones, quiero demostrar aqui con las verdaderas, y legitimas doctrinas trigonometricas, el artificioso error de mi referida operacion, pues con

esto

eſto tambien ſe conocerà con claridad, quienes ſon los que ſe ſirven del compàs, y quienes ſon los que no entienden los principios de la facultad, yo,ù mis adverſarios.

Para demoſtrar contra mi primera operacion de la triſeccion del angulo,era meneſter que huvieſſen demoſtrado,que el angulo ABM no era la tercera parte del arco A H, y que por lo conſiguiente el triangulo A I M no era Iſoſceles, y por eſto ſe debia conſiderar los triangulos A I F, A I B,de los quales eran conocidos los angulos, y lados neceſſarios, como ſe ha viſto, por lo que tengo demoſtrado contra Vander Baren,y referirè aqui nuevamente.

Por lo que eſtableciò el Vander Baren, que ſe huvieſſe de triſecar el arco A H,mitad del quadrante (lamina A, fig.1.oper.1.) y ſegun mi primer metodo,formar el triangulo A D H, del qual ſiendo los lados A H,H D,cada vno de ellos cuerda de la mitad del arco del quadrante, ſeria el triangulo A D H Iſoſceles. Deſpues tirada por el punto F la recta N L, paralela à la H D, eſta cortaria la cuerda A H en el punto I, por donde haziendo paſſar la recta B M, eſta avria de cortar la tercera parte del arco A H en el punto M. Aora para demoſtrar,que el arco A M no es la tercera parte del arco A H,primeramente ſe avia de conſiderar el triangulo A D H, del qual el lado H D es cuerda del arco H D, ſerà el angulo D B H al centro (por la 20.del 3.) doble del angulo H A D à la circunferencia;y ſiendo el angulo D B H por la conſtrucion de 45. grados, ſerà el angulo D A H de 22. grados, y 30.min. y ſiendo el lado A H igual à la H D, ſemejantemente el angulo A D H,ſerà de 22.grados,y 30.min. y porque el lado I F,por conſtruccion,es paralelo al lado H D, ſerà el angulo A F I por la 29. del 1.ſemejantemente de 22.grados,y 30.min.y aſsi del triangulo A I F,ſiendo conocidos los angulos I A F,A F I, luego ſeràn por la 32.del 1. conocidos los angulos A I F de 135. grados,y el angulo H I F externo de 45.grados.

Aora para hallar el lado A F,conſiderelſe el triangulo A B F,del qual el angulo A B F, ſiendo opueſto al arco A E, que por ſu hypoteſis la tercera parte del arco del quadrante, ſerà pues de 30. grados; y el angulo F A B, ſiendo el miſmo,que B A D,ſerà de 45. grados;y conſiguientemente el angulo A F B,ſeria de 105.grados,y el angulo A F E externo, ſerà de 75. grados; aora ſupongamos el lado A B de quantas partes iguales ſe quiſiere,por exemplo de 7.partes; y aſsi del triangulo A B F, ſon conocidos los referidos angulos,y el lado A B, con lo qual ſe dirà por las doctrinas trigonometricas; ſi como el ſeno del angulo externo A F E de 75.grados al lado A B de ſiete partes, aſsi el ſeno del angulo A B F de 30.grados al lado A F;y obrando

do segun los preceptos, se hallarà el lado A F, que sera de 3. partes,
3011113.
y———— Aora se debe hallar el lado A I del triangulo A I F.
4829629.

Y asi del triangulo A I F, son conocidos, no solo los tres angulos, pero tambien el lado A F, con lo qual se dirà por las doctrinas trigonometricas, y asi como el seno del angulo externo A I E de 45. grados al lado A F, asi el seno del angulo A F I de 22. grados, y 30. min. al lado A I, y de ello resultarà el lado A I de 1. parte,
3281895992622 8.
y ————
341506350737 72.

Finalmente para hallar el angulo A B M, considerese el triangulo A B I, del qual son conocidos los lados A B, y A I, y el angulo I A B (y siendo este el mismo, que el angulo H A B) sera pues de 67. grados, y 30. min. y con esto se dirà por las doctrinas trigonometricas, asi como la suma de los lados A B, A I, à la diferencia de los mismos, asi la tangente de la mitad de la suma de los dos angulos opuestos à los dichos lados, à la tangente de la diferencia de vno, y otro angulo à la mitad de la suma de los mismos.

Y por lo que se puede inferir de los escritos publicos de estos señores, con dificultad podràn entender, y penetrar los terminos desta doctrina, dirè (para aliviarles el trabajo, y escusarles vn estudio, q̃ les seria muy costoso) que se deben sumar los dos lados A B, A I, cuya su-
3281895992622 8.
ma serà de 8. partes, y ———— y este serà el primer ter-
341506350737 72.
mino de la regla, despues se resta el lado A I del lado A B, y queda-
1331675147544.
ràn las partes 5. y ———— que es el segundo termino de
341506350737 72.
la regla; y finalmente, porque el angulo I A B, es de 67. grados, y 30. min. serà la suma de los dos angulos A B I, A I B de 112. grados, y 30. min. cuya mitad serà de 56. grados, y 15. min. y la tangente de estos, que es 14966058. serà el tercero termino de la regla, y asi obrando, segun los preceptos se hallaràn 8415782 que es la tangente, que corresponde à 40. grados, y 5. min. (y algunos segundos, que no hazen al caso) y esta serà la diferencia del vno, y otro angulo de la mitad de la suma de los angulos referidos; y asi restando 40. grados, y 5. minutos de 56. grados, y 15. min. (que es la mitad de la referida suma) quedaràn 16. grados, y 10. minutos, que serà el valor del

angu-

angulo A B I, que se buscava; y porque este debia ser de 15. grados, tercera parte de 45. pues no es verdad que la recta, que se tira del pũto B, y passa por el punto I, corte el arco A H en tres partes iguales en el punto M; desuerte, que queda claramente demostrado, que el angulo A B M, que es el mismo que A B I, no es la tercera parte del arco A H, como se juzgava debia ser por mi primer metodo.

Y aunque esta demonstracion seria bastantemente para concluir, que el triangulo A I M no es Isosceles, sin embargo demonstrarè, que el lado A I, no es igual al lado A M.

Considerese nuevamente el triangulo A B I, del qual (por lo que poco antes se ha hallado) es conocido el angulo A B I de 16. grados, y 10. min. y semejantemente el angulo I A B de 67. grados, y 30. min. y assi el angulo externo A I M, por la 32. del 1. es de 83. grados, y 40. min. Con esto considerese aora el triangulo A B M, del qual es conocido el angulo B de 16. grados, y 10. minutos; y siendo el triangulo A B M (por lo que muchas vezes se ha demostrado) Isosceles, seràn los angulos B A M, B M A de 81. grados, y 55. min. cada vno; y assi del triangulo A I M son conocidos el angulo A I M de 83. grados, y 40. min. y el angulo A M I de 81. grados, y 55. min. y consiguientemente el angulo I A M por la 32. del 1. serà de 14. grados, y 25. min. y siendo el lado A M opuesto al angulo mayor A I M, serà por la 18. del 1. semejantemente el lado A M I mayor, que el lado A I, el qual es opuesto al angulo menor A M I. De suerte, que los lados A M, A I del triangulo A I M no son iguales, y por lo consiguiente el triangulo A I M no es Isosceles, que es lo que se debia demonstrar.

Y esta es la vnica demonstracion, que puede hazerse para concluir con evidencia, que la recta B M, que passa por el punto I, no corta qualquier arco dado A H en tres partes iguales: que es lo que ninguno de mis adversarios, hasta aora ha sabido demonstrar, por no hallarse con aquel preciso conocimiento, que requiere la facultad; y especialmente *el Maestre de Campo Don Sebastian Fernandez de Medrano*, el qual con tanto magisterio, como se ha visto, queria con el mismo supuesto de Don Iuan de Herrera, y su Maestro, que la A I fuesse mayor que la A M, diziẽdo con aquella satisfaciõ, tan hija de su vanidad, que avia hallado con todo acierto, que la A F era 3660252. y la A M 3472964. lo qual es totalmente ageno de la facultad, y contra los principios geometricos, como qualquier principiante lo puede conocer; pues todas las vezes que el arco A M fuere mayor, que la tercera parte del arco A H, siempre el angulo A I M serà mayor, que el angulo A M I, y consiguientemente el lado A M tambien serà ma-

yor,

yor,que el lado A I. Y assi si el *Director Medrano* huviera entendido este principio de la facultad,huviera hallado en aquel arco de 60. grados,que la A M tenia 3679028.y la A I 3659322.y no se huviera arrojado à copiar la A I de D.Iuan de Herrera,y su Maestro, y la A M de los Canones Trigonometricos: pero porque en la verdad nada entiende de la Theorica,y muy poco de la practica, reduciendose su habilidad à ostentar vna ciencia fantastica,y fundada en sola vanidad, bien merece el que desvanezcan su presuncion, y que se desengañen de la satisfacion que tiene de si,y à los otros del concepto,que tienen hecho de èl.

Y assi estando en este conocimiento,como en el de la vanidad de mis Adversarios,y persuadido à que nunca huvieran entendido las raizes de estas operaciones,por el poco fundamento que mostravan en sus papeles,serviame de diversion el responderles,como bastantemente lo he declarado en mis escriptos publicos, y particularmente en el de 11.de Abril de 1692.con el qual despues de aver concluido demostrativamente la censura del Vander Baren dixe en la pag.11. §.2.

PEro para que no parezca,que no doy la inteligencia que se debe dar à la prop.8.del 1.y 4.del 6.de Euclides,por lo q̃ se me podria oponer,y no dexar la menor sombra de duda en perjuyzio de los Elementos de Euclides,me ha parecido hazer con mayor evidencia reconocer, no menos la poca inteligencia que han tenido de la solucion de los dos Problemas,sino tambien las consequencias grandes, que trae consigo la linea conmensuratriz del quadrante,que tengo dada.

Desde el principio que di la triseccion del angulo, dixe , que la raiz fundamental de esta,nacia de los binomios,y bimedias,y à este fin propuse los dos Problemas,y despues en las respuestas que hize à los papeles que escrivieron estos señores con el nombre de D.Juan de Herrera, no solo demonstrè lo poco fundado de las vanas demonstraciones , que tan fuera de la ciencia pretendian hazer contra la triseccion ; pero tambien las vanas,y ridiculas interpretaciones,que presumiã hazer à los dos Problemas, como podrà ver el curioso en mis respuestas; y aviendo yo dado la resolucion de los dos Problemas, y demonstrado tambien por quantidad discreta la certidumbre de la linea conmensuratriz del quadrante,en donde està incluida la inalterable operacion de la triseccion del angulo,he siempre advertido, que se debia considerar la solucion de los dos Problemas,y para dar mayor motivo à la curiosidad de los Professores, di tambien el modo(aunque de passo con la practica) de trisecar el angulo, en virtud de la linea conmensuratriz;y viendo que ninguno hazia mencion de la solucion de los dos referidos Problemas, dixe

D en

en la respuesta de 21. de Enero, pag. 20. lin. 17. *Sirviendome mientras tanto de este medio, para la resolucion de la triseccion del angulo, para que se reconociesse despues con mayor evidencia las operaciones de los dos Problemas, y la incontrovertible certeza de la linea conmensuratriz del quadrante, cuya consequencia no es de poca consideracion, como saben todos los verdaderos Professores, no solo, porque de esta nace la inalterable resolucion de la triseccion del angulo, y formacion del heptagono, &c. Pero tambien continuando las bimedias, como lados de los espacios medios, se hallaràn las dos medias en continua proporcion, y la quadratura del circulo, como tengo escrito, y con el tiempo espero en Dios se conocerà.*

Con que podia qualquiera aver reconocido en donde estava el verdadero fundamento de esta resolucion; y porque estos señores, sin averles yo dado motivo ninguno, mormuravan en secreto, como despues se ha visto en publico, diziendo, que yo me servia del compàs, y no de la demonstracion: y reconociendo yo à quanto se estendian las fuerças de estos señores, quise por esto disponer la resolucion de la triseccion del angulo en el mismo quadrante, en la forma que se ha visto, con las demonstraciones fundadas sobre la prop. 10. del lib. 6. de Euclides, à que no han sabido responder cosa que tenga fundamento, manifestando el embarazo de su cōfusion, pues no han sabido no solo responder, pero ni aun dar algun color à los que querian dezir: y en este conocimiento, no me he querido explicar mas, hasta aora, que he visto la demonstracion artificiosa de Vāder Baren; que bien que le he demonstrado con sus proprios terminos lo contrario de lo que pretendia concluir; y pudiendo yo quedar con entera satisfacion, no obstante por no dexar (como he dicho) sombra ninguna de duda en perjuyzio de los Elementos de Euclides, y siendo tambien mi verdadero fin el beneficio publico, me ha parecido explicar nuevamente con la verdadera claridad que se debe las consequencias grandes de la linea conmensuratriz del quadrante, ya que ninguno ha querido hazer mencion de ella, sea por falta de inteligencia, ò sea por sobra de malicia, deseando ocultar la verdad, quiero aora demonstrar con evidencia la triseccion del angulo, y formacion del heptagono, reservandome lo demàs para otro tiempo.

LA linea conmensuratriz del quadrante, es (con todo el rigor que pide la demonstracion) vna recta, de genero proporcionada, que dividida en tres partes iguales, divide tambien el quadrante en tres partes iguales. De genero, que si se quiere dividir el arco del quadrante en tres partes iguales, se debe dividir esta en tres partes iguales, vna de las quales puesta sobre el arco del quadrante, esta serà la cuerda de la tercera parte del arco de dicho quadrante, el qual quedarà dividido en tres partes iguales.

 Y assi

Y afsi la divifion de las partes iguales de la linea conmenfuratriz, para dividir el arco del quadrante en las mifmas partes iguales, y con la mifma diftancia tiene principio de la tercera parte, y efta no folo fe funda en las operaciones de los binomios, y bimedias, como he dicho; pero tambien, lo eftà por fi, por la hypotefis del mifmo arco del quadrante, como poco antes he demonftrado, que la cuerda A E de la tercera parte del quadrante, es igual à la A F, y que el triangulo A E F es Ifofceles: por lo qual no fe puede poner en duda, que la parte A F, como cuerda igual à A E mide la tercera parte del arco A D, y por confequencia divide todo el quadrante en tres partes iguales, con que viene à fer medida de todo el arco; y afsi con efte feguro fundamento fe puede (para facilitar la operacion) prolongar en infinito la cuerda A D del quadrante, y fobre efta triplicar la parte A F, que ferà hafta el punto G. De genero, que la A G fea tripla de A F; digo, que la A G ferà la verdadera linea conmenfuratriz del quadrante, que es la mifma, que hallè, y demonftrè por medio de los binomios, y bimedias.

Aora fi fe quiere trifecar qualquier angulo agudo, ò arco menor del quadrante, y mayor que las dos tercias partes de èl, como por exemplo fupongafe, que el arco A H fea mayor, que las dos tercias partes del arco del quadrante, fe continue la cuerda del arco A H, fobre la qual fe dupla la cuerda A E, tercera parte del arco del quadrante (que es la mifma que la parte A F) defpues fe toma la diftancia del arco, que refta de las dos tercias partes del quadrante, y efta fe añade à las dos tercias partes pueftas fobre la cuerda A H, prolongada hafta Q; de genero, que A Q eftè compuefta de la medida del arco A H, medido de la cuerda de la tercera parte del arco del quadrante; con que A Q ferà la linea conmenfuratriz del arco A H, y tirada del punto G al punto Q la recta G Q, quedarà formado el triangulo A G Q, y haziendo paffar por el punto F la paralela N L, efta cortarà el lado A Q en punto I, con la mifma proporcion que eftà cortado el lado A G en punto F; con que tirada del punto del angulo B por el punto I la recta B I M, efta dividirà el arco A H en tres partes iguales en punto M.

Quando el angulo dado no fueffe mayor de las dos tercias partes del arco del quadrante, entonces por la prop. 30. del lib. 3. de Euclides, fe dividirà aquel arco en dos partes iguales, y de las dos cuerdas, que fubtenderàn eftas dos partes, fe formarà vna linea recta, y efta ferà la linea conmenfuratriz de aquel arco; porque afsi como el arco de 60. grados dividido por mitad, las dos cuerdas que fubtenden aquellas dos mitades, fon las dos tercias partes del quadrante, las quales forman la linea conmenfuratriz de dicho arco de 60. grados, afsi qualquier arco, que no fea mayor, que las dos tercias partes del arco del quadrante, dividido por mitad, las dos cuerdas que ſubtenden eſtas dos mitades; dàn la linea conmenſuratriz de aquel arco.

Y aſsi ſi ſe quiere triſecar el arco A H, mitad del quadrante (fig. 1. oper. 1. lam. A.) ſe dividirà dicho arco en dos partes iguales, y de las dos cuerdas, que ſubtenden las dos mitades, ſe formarà la linea A Q, que ſerà la linea conmenſuratriz del arco A H. Con que ſe tire del punto G al pũto Q la recta G Q, y ſe formarà el triangulo A G Q, y por la 31. del 1. haziendo paſſar por el punto F la recta N L paralela à la G Q, eſta cortarà el lado A Q en punto I con la miſma porcion, que eſtà cortada la A G en punto F, que (por la 10. del 6.) ſerà aſsi como la A G conmenſuratriz del quadrante à la A F, aſsi la A Q conmenſuratriz del arco A H à la A I, y tambien (por la 4. del lib. 6.) ſerà la G Q à la Q A, como la F I à la I A; y aſsi como la A F ſe demoſtrò igual à la cuerda de la tercera parte del arco del quadrante, y ſer el triangulo A E F Iſoſceles, aſsi del miſmo genero la A I ſerà igual à la cuerda A M, tercera parte del arco A H, y el triangulo A M I ſerà Iſoſceles.

Si el arco dado no es mayor, que la tercera parte del arco del quadrante, ò menor quanto ſe quiſiera, como el arco D n (fig. 1. oper. 2.) el qual ſe debe dividir en tres partes iguales. Se divida con el miſmo modo el arco D n en dos partes igulas en punto m, y ſe tiren las cuerdas D m, m n, y ſe continue la cuerda D n, haſta. y. de genero, que la recta D y ſea igual à las dos cuerdas D m, m u juntas. Digo, que la recta D y ſerà la linea conmenſuratriz del arco D n, la qual (por la 10. del 6.) divididos en tres partes iguales en punto, q, ſerà la parte D q igual à la cuerda de la tercera parte del arco D n: con que tirada del angulo B por el pũto. q. la recta B q r, eſta dividirà el arco D n en tres partes iguales en punto r; y aſsi por lo que diverſas vezes ſe ha demonſtrado, la parte del arco D r, ſerà la tercera parte del arco D n, que era lo que ſe buſcava.

O ſe halle la linea conmenſuratriz del arco. a e. tercera parte del arco del quadrante, y ſegun ſe tiene dicho, ſe divida en tres partes iguales, y ſerà a o ſu tercera parte (como en dicha fig. 1. operac. 3.) deſpues ſe tire del angulo B por el punto O la recta B o. 10. eſta cortarà dicho arco a e en tres partes iguales en punto 10. De genero, que el triangulo a o. 10. ſerà Iſoſceles. Aora ſi fueſſe dado qualquier arco menor del arco a e, tercera parte del arco del quadrante, como. a t. el qual ſe huvieſſe de dividir en tres partes iguales, ſe continue la a t quanto ſe quiere, y con la diſtancia a 10. ſe mida el arco a t, y ſe lleva ſobre la cuerda a t, prolongada en x; de genero, que la a x ſea la recta conmenſuratriz del arco a t, y continuando la operacion, como ſe hizo en la primera; ſe hallarà, que la a u ſerà la tercera parte del arco a t.

Y porque eſta tercera operacion en los arcos menores, es confuſa

por

por la cercania de las lineas, lo que no ſucede en la ſegunda operacion, ſerà mejor ſervirſe de eſta, que de la otra, pues ambas tienen vn miſmo fin.

En quanto al angulo obtuſo, buelvo à dezir lo que tengo dicho en mis papeles antecedentes, que ſiendo ya conocida la tercera parte del arco del quadrante, no es meneſter mas, que hallar la tercera parte de aquel arco, que excede el angulo recto (obrando en eſto, como ſe hizo en el angulo agudo) y eſta tercera parte ſe junta con la tercera parte del arco del quadrante, y ſerà toda la compueſta la tercera parte del angulo obtuſo. Como en eſte caſo ſea el angulo obtuſo A B C, lamina A, fig. 1. ſe tome el arco A H, igual al arco D C; y hallada la tercera parte de dicho arco A H, que ſerà A M, eſta llevada ſobre el arco en punto E (en donde termina la tercera parte del arco del quadrante) àzia el punto O, que aora cae en el miſmo punto H, ſerà el arco A H, tercera parte del angulo obtuſo A B C, ò de todo el arco A D C, y tirada del angulo B al punto H la recta B H, eſta cortarà la cuerda del arco A D C en punto R, y ſerà el triangulo A R H Iſoſceles, como ſe tiene demonſtrado.

Con que reconocerà Vander Baren, ſi eſtà baſtantemente demonſtrada la reſolucion de la triſeccion del angulo, en virtud de la linea conmenſuratriz. Y para que qualquiera reconozca con mayor evidencia el fundamento grande de los dos Problemas, para hallar eſta linea conmenſuratriz, pondrè nuevamente aqui la quarta vez los miſmos Problemas reſueltos, dexando aquella poca practica operativa, que quiſe dar de paſſo, para ver como la entendian eſtos ſeñores.

PROBLEMA I.

Dada vna determinada diſtancia de 30. grados, y ſe quiera graduar vn circulo con aquella miſma diſtancia, es neceſſario hallar el ſemidiametro, que ha de circunſcrivir aquel circulo, que debe ſer capaz de dicha graduacion.

Sea dada qualquiera cuerda I——G de 30. grados, y ſe debe hallar el ſemidiametro, que ha de circunſcrivir aquel circulo, el qual ſe debe graduar con la dada diſtancia de I.G. de 30. en 30. grados.

PROBLEMA II.

Dado vn circulo ſe ha de hallar vna recta con tal proporcion, que divididas en tres partes iguales, y eſtas pueſtas ſobre el arco del quadrante, ha de dividir dicho quadrante en tres partes iguales; de genero, que cada vna debe ſer cuerda de ſu parte.

Alo

A lo que ſe debe reducir el primer Problema, es que dada qualquiera determinada recta, y eſta dividida en tres partes iguales, ſe debe hallar el ſemidiametro, que circunſcriva aquel circulo, cuyo quadrante ſea capaz de dicha diviſion, y con la miſma diſtancia; con que ſe vè, que eſte Problema es el inverſo del ſegundo que he propueſto.

Para reſolver eſtos Problemas, ſe debe ſiempre eſtablecer la operacion dentro del quadrante, y aſsi quando ſe propone de dividir todo el circulo, ſe debe ſiempre tomar la quarta parte de aquella diviſion que ſe pide, como en eſte caſo, ſiendo la graduacion del circulo de 360. partes iguales, ſerà la quarta parte 90. con que ſiendo la dada determinada diſtancia de 30. grados, eſta ſe triplicarà, y tendrà vna recta de 90. partes iguales, que es la quarta parte de los 360. y eſta prolongada por ſu mitad, ſe halle entre eſtas dos partes por la 13. del 6. vna media proporcional. De nuevo ſe tome la recta de 45. partes (que es la mitad de aquella recta de las 90. partes iguales) y ſe junte con eſta media hallada (que harà vn binomio) y ſe hallarà entre eſtas dos partes otra media proporcional; finalmente ſe juntan eſtas dos medias halladas (que hazen otro binomio) y tambien ſe halle entre eſtas otra media proporcional. Digo, que eſta vltima media proporcional, es la verdadera, juſta, y riguroſa media del ſemidiametro, que debe circuſcrivir aquel circulo, cuyo quadrante ſerà capaz de la dicha graduacion de 90. grados, y todo el circulo de 360. y tendrà la dada diſtancia de I—G de 30. en 30. grados.

EL ſegundo Problema es inverſo del primero, y que es la raiz fundamental de la triſeccion del angulo, y formacion del heptagono, &c. porque en eſte ſe dà el circulo, y ſe buſca la recta con tal proporcion, que dividida en tres partes iguales, divida el quadrante del circulo dado en las miſmas partes iguales, y con la miſma diſtancia, y deſpues ſe puede dividir el circulo en quantas partes iguales ſe quiſiere. De genero, que la linea que ſe buſca, es la linea conmenſuratriz del quadrante; y aſsi para hallar eſſa linea conmenſuratriz del quadrante, nos ſervirèmos para el circulo dado del miſmo que ſe hallò en la primera operacion, y aſsi ſe hallarà entre el diametro, y ſemidiametro vna media proporcional, deſpues entre eſta media, y el diametro del circulo ſe hallarà otra media proporcional; y finalmente entre eſtas dos medias, ſe debe hallar otra media proporcional, eſta vltima ſerà la recta, que con todo rigor correſponde à la miſma recta dada en el primer Problema, con aquella proporcion referida, que es la linea conmenſuratriz del quadrante.

POr lo qual qualquiera con evidencia puede reconocer la certidumbre de eſtas operaciones, pues la principal, Real, y breve demonſtratracion de la seguridad de vna operacion es la conversa; y para que sea mas evidente esta verdad, resolverè vno, y otro Problema (con el mismo metodo) por quantidad discreta con el Algorithmo que pide.

Sea el diametro del circulo cosas 7. (como ha establecido el Grande Archimedes) el semidiametro serà cosas 3. $\overset{1}{\text{—}}$ la media proporcional entre estas serà ℞ 24. $\overset{1}{\text{—}}$ aora entre esta media, $\overset{2}{\ }$ y diametro del circulo (que tambien junto es (2) vn binomio) se halle otra media, que serà ℞ qq 1200. $\overset{1}{\text{—}}$ Finalmẽte entre estas dos medias (que es otro binomio) se halle $\overset{2}{\ }$ otra media proporcional, que serà ℞ qqq. 720600. $\overset{1}{\text{—}}$ Cuyo lado es la recta, que en el segundo Problema se pedia, y (8) nombramos conmensuratriz del quadrante.

Para breve demonstracion de esto se resolverà el otro Problema, que es el converso de este; Y es dada vna recta, la qual dividida en tres partes iguales, hallar el semidiametro, que circunscrive aquel circulo, cuyo quadrante sea capaz de las mismas divisiones, y con la misma distancia.

Tomemos que sea la recta linea dada la que avemos hallado, para que resolviẽdo con la misma operacion se muestre con evidencia la certidumbre de estas grandes operaciones, y assi porque el lado hallado es ℞ qqq. 720600. $\overset{1}{\text{——}}$ que es irracional, assi nos servirèmos de la misma ℞ qqq. y por (2) mayor facilidad de las denominaciones de las especies de las ℞ nombrarèmos solamente sus dignidades, ò potestades con el exponente, y porque el lado que se hallò fue ℞ qqq. cuyo exponente es 8. por lo qual en esta segunda operacion se comẽçarà de la dignidad 8.

Con que la dada recta linea serà, la que se hallò de la dignidad 8. ℞ 720600. $\overset{1}{\text{——}}$ cuya mitad serà de la misma dignidad 8.

8

1729.

℞ 2814. ——— y assi la media proporcional entre estas, es la dignidad

2048.

15745.

16. ℞ 2028377109. ——— de nuevo entre esta media proporcional, y la mitad de la (16384.) dignidad 8. (que juntas hazen vn binomio) se halle otra media proporcional, que serà de la 32. dignidad

℞

36209749953.

℞ 16071537891459893. ———— Finalmente entre estas dos medias (que juntas es otro 6871947673 6. binomio)se halle otra media proporcional, y esta serà de la dignidad 64.

℞ 661233366101297989093337551871 34102. *Sigue lo quebrado.*

1635455846365842 9569.

———— cuyo lado con todo el rigor que se pide,

18446744073709551616.

1

corresponde à cosas 3.—que es el semidiametro, que se busca, el qual por el antecedente (2) operacion se ha hallado la misma dada recta linea conmensuratriz del quadrante.

Sobre que podràn reconocer los Professores verdaderos, no menos el Real fundamento de estas operaciones, sino tambien la facilidad de vn medio tan claro para hallarlas, y assi le pido las examine, para que conozcan, y se satisfagan de su certidumbre; pues de estas verdaderas operaciones dependen la incontrovertible seguridad de la Quadratura del circulo, y de las Dos medias en continua proporcion, que el año passado di à luz, observando tambien, por mayor seguridad la proporcion que yo he hallado entre el semidiametro, y la recta, con tal proporcion, &c. que es (como se ha dicho) la recta conmensuratriz del quadrante, es como 35. à 54. que por la irracionalidad de las radices esta es la mas practicable con mas certidumbre, y assi tambien serà la proporcion del semidiametro con la cuerda de la tercera parte del quadrante, como 35. à 18. que es quanto por aora puedo con brevedad demonstrar, reservandome de hazer reconocer en otro tiempo lo demàs que fuere menester.

Con que evidentemente queda demonstrada la linea conmensuratriz del quadrante por cantidad discreta, con todo el rigor que se debe.

A esta mi respuesta hasta aora ninguno ha respondido publicamente con alguna, sino es el Maestre de Campo D. Sebastian Fernandez de Medrano con el capitulo tan sazonado, que segun he referido se incluyò à instancia suya en la Gazeta de Bruselas.

AOra nuevamente sale à luchar en esta Mathematica Palestra D. Francisco Guillelmo Poignard, Presbitero Canonigo de Namur, Capellan de S. M. y q̃ dize ser professor de Mathematica, el qual llegò à esta Corte en el mes de Diziẽbre, y que lexos de hazer como debia algun nuevo reparo cõtra mi respuesta arriba referida de 11. *de Abril, en la qual no solo satisfacia, y concluìa à todos mis Adversarios, pero tãbien respondia à vna atestacion, que el dicho Poignard tenia hecha contra mi, sin aver demostrado, ni hablado cosa alguna de la facultad, como el curioso lo podrà ver en la pag,* 20. *de ella, la qual inserirè tambien en este tra-*

tratado: y dandose aora por no entendido de la referida respuesta, haze vna nueva censura contra el primer methodo, que publiquè en 25. de Agosto de 1691. la qual por ser bien curiosa, se pondrà aqui à la letra, en el mismo Idioma Francès, en que me la tiene dada, y traducida en Castellano por el mismo Poignard, para que sea entendida de todos.

REMARQVE DE FRANCOIS GVILLAVME POIGNARD PRETRE, Professeur en Mathematique, sur vn papier imprimè, qu'il intitule Resolution Geometrique de la trisection de l'angle, nouvellement expliquèe par son Autheur le Docteur D. Nicolas Coppola, Professeur en Mathematique, naturel de la Ville de Palerme dans le Royaume de Sicile.

Proposition de l'imprimè de l'Autheur.

Couper un Angle proposè en trois egalement.

SOit proposè à partager en trois egalement un angle comme A B H (lam. B. fig. 1. oper. 1.) qui est par exemple moitiè du quart de cercle A B D. Voici la pratique generale de l'Autheur. Tirez les lignes droites D A, D H, & H A portez en suite du point D le demi diametre D B en E, tirez la ligne B E qui coupera la ligne D A au point F; menez parce point F la ligne L N parallele à D H, elle coupera la ligne H A dans un point comme I: mennez parce point I, la ligne B M l'angle A B M sera la troisieme part de l'angle proposè A B H. Il faut maintenant examiner cette pratique.

Examen de la ditte resolution.

L'arc A E estant par la construction de 30. degrez & l'arc A H de 45. degrez, il faut que l'arc E H qui est leur difference soit de 15. degrez. Tirez les lignes E A, E I, maintenant le triangle A B E estant Isosceles, parce que les cótez A B, B E sont egaux, les angles en A, & E seront ausi egaux, or l'angle E A B, ou E A P a sa mesure egale à la moitiè de l'arc E D P; eest à dire à la moitiè de 150. degrez: donc l'angle A E B qui lui est egal, aura la mesme mesure. Au regard maintenant du triangle A B F, son còtè B F estant prolongè, l'angle exterieur A F E est egal aux deux interieurs opposez A, & B. Or l'angle F A B ou D A P a sa mesure egale à la moitiè de l'arc D P, & l'angle A B F ou A B E a pour mesure l'arc A E, qui par la cõstruction, est moitiè de l'arc E D, donc les deux angles F A B, A B F pris ensemble, auront leur mesure egale à la moitiè de l'arc D P: plus la moitiè de l'arc E D, ou cequi est la meme chose a la moitiè de tout l' arc E D P de 150. degrez, donc l'angle exterieur A F E estant egal aux deux interieurs F A B, A B F, aura la meme mesure qui

5. p. 1. 20. p. 3. 32. p. 1. 20. p. 3.

qui est aussi (comme il a estè dèmonstrè auparauant) celle de l' angle
6.p.1. A E F ou A E B, ainsi les angles en E, & F du triangle E A F, estant egaux, leurs cótez opposez A F, A E, seront aussi egaux, & le triangle sera Isosceles; or comme l' arc A E, est par la construction de 30. degrez, il sera les deux tiers de l' arc A H, pris de 45. degrez; Ainsi la ligne B M, qui passe par le point I, deuroit couper l'arc A E en 15. degrez, afin que les parties A M, M E, E H fussent egales, comme le promet la methode de l' Autheur: mais on va demonstrer que cela ne peut estre.

Les triangles A B I, I B E ayant le cóté I B commun, & les cótez A B, B E egaux: de plus, l'angle A B I, deuant etre egal à l'angle E B I
4.p.1. (par la methode de l' Autheur) il faut necessairement que les triangles A B I, I B E, soient egaux en toutes choses, ainsi le cóté I E sera egal au cóté I A. Maintenant les triangles A I F, & A H D sont semblables, parce qu'ils ont l'angle en A commun, & la ligne F I estant par la constru-
28.p.1. ction parallele à D H, l'angle A F I sera egal à l'angle A D H, & par consequent l'angle A I F egal à l'angle A H D: or dans le triangle A H D,
32.p.1. le costè A H, par la construction est egal au costè H D, le costè A I du triangle A I F, sera donc aussi egal au costè I F: or nous avons prouuè
4.p.1. que le costè I E estoit egal au costè I A, il sera donc aussi egal au costè
6.p.1 I F. Nous avons aussi prouuè que le costè A E estoit egal au costè A F; donc
8.p.1. les trois còtez du triangle A F I, seront egaux aux trois còtez du triangle A E I; ainsi l'angle I A F sera egal à l'angle F A I: or l'angle I A F, ou H A D a la mesure egale à la moitiè de l'arc H D de 45. degrez, sur le quel il est appuiè, donc l'angle E A I ou E A H, que nous avons dèmonstrè etre egal à l'angle H A D, aura aussi pour mesure, la moitiè
20.p.3. de 45. degrez: mais l'angle E A H, a la mesure egale à la moitiè de l'arc E H de 15. degrez, sur le quel il est appuiè: il faudroit donc que cet arc E H fût egal a l'arc H D de 45. degrez; Ainsi les angles A B M, M B E chacun desquels (selon l' Autheur) est egal à l'angle E B H, qui est aussi egal (comme on vient de le voir) à l'angle H B D, au lieu de faire chacun la troisieme partie de l'angle proposè A B H, c' est à dire au lieu d'estre chacun de 15. degrez, seroient chacun de 45. Ainsi la troisieme partie de 45. degrez se trouueroit par ceste methode, egale à 45. degrez, c'est à dire à son tout, & les arcs A M, M E, E H, H D seroient egaux entre eux, & feroient tous ensemble quatre fois 45. degrez, cest à dire, un demi cercle d'où l'on concluroit non seulement, que la partie egale son tout; mais qu'elle la surpasse, & que l'on pourroit avoir 180. degrez où l'on suppose qu'il ne peut y auoir que 90. degrez.

D. Francisco Guillermo Poinard, Sacerdote.

ADVERTENCIA DE D. FRANCISCO GVILLERMO POIGNARD, Canonigo de Namur, y Capellan de su Mageſtad, Presbytero Profeſſor de Mathematica, ſobre vn papel impreſſo, que ſe intitula: Reſolucion geometrica de la triſeccion del angulo, nuevamente explicada por ſu Author el Doctor Don Nicolas Coppola, Profeſſor de Mathematica, natural de la Ciudad de Palermo en el Reyno de Sicilia.

Propoſicion impreſſa del Author.

Cortar vn angulo propueſto en tres partes iguales.

PRoponeſe à dividir en tres partes iguales vn angulo, como A B H (lamin. B, fig. 1. oper. 1.) que es por exemplo la mitad de vn quarto de circulo A B D: eſta es la practica general del Author. Tirenſe las lineas rectas D A, D H, y H A, lleveſe deſpues del punto D el ſemidiametro D B en E, tireſe la linea B E, que cortarà la linea D A en el punto F, lleveſe por eſte punto F la linea L N, paralela à D H, cortarà la linea H A en el punto como I, lleveſe por eſte punto I, la linea B M; el angulo A B M ſerà la tercera parte del angulo propueſto A B H. Aora ſeha de examinar eſta practica.

Examen de dicha reſolucion.

El arco A E, ſiendo por conſtrucion de 30. grados, y el arco A H de 45. es meneſter que el arco E H, que es ſu diferencia, ſea de 15. grados, tirenſe las lineas E A, E I, aora el triangulo A B E ſiendo Iloſceles, porque los lados A B, B E ſon iguales, los angulos en A, y E, ſeràn tambien iguales: ſed ſic eſt, que el angulo E A B, ò E A P, tiene ſu medida igual à la mitad del arco E D P, es dezir à la mitad de 150. grados, luego el angulo A E B, que le es igual, tendrà la miſma medida: aora en quanto al triangulo A B F, ſu lado B F, ſiendo alargado, el angulo externo A F E, es igual à los dos interiores opueſtos A, y B; ſed ſic eſt, que el angulo F A B, ò D A P, tiene ſu medida igual à la mitad del arco D P, y el angulo A B F, ò A B E, tiene por medida el arco A E, que por la conſtrucion es mitad del arco E D, luego los dos angulos F A B, A B F, tomados juntamente, tendràn ſus medidas iguales à la mitad del arco D P, mas la mitad del arco E D, ò lo que es lo miſmo la mitad de todo el arco E D P de 150. grados; luego el angulo externo A F E, ſiendo igual à los dos internos F A B, A B F, tendrà la miſma medida, que es tambien (como ſe ha demonſtrado arriba) la del angulo A E F, ò A E B, y aſsi los angulos en E, y F del triangulo E A F, ſiendo iguales, ſus lados opueſtos A F, A E, ſeràn tambien iguales, y el triangulo ſerà Iloſceles; mas como el arco A E es por la conſtrucion de 30. grados, contendrà las dos tercias del arco A H, tomado de 45. grados, y assi la linea B M, que passa por el punto I, avria de cortar el arco A E en 15. grados, porque las partes A M, M E, E H fuessen iguales, como lo ofrece el metodo del Author; pero ya se demonstrarà que no puede ser.

Los triangulos A B I, I B E, teniendo el lado I B comun, y los lados A B, B E iguales, à mas de esto el angulo A B I, aviendo de ser igual al angulo E B I (por el metodo del Author) es preciso que los triangulos A B I, I B E sean Isosceles en todo; y asi el lado I E serà igual al lado I A, aora los triangulos A I F, y A H D, son semejantes, porque tienen el angulo en A comun, y la linea F I, siendo por la construcion paralela à D H el angulo A F I serà igual al angulo A D H, y consiguientemente el angulo A I F igual al angulo A H D. Mas en el triangulo A H D, el lado A H, por la construcion es igual al lado H D, el lado A I del triangulo A I F, serà tambien igual al lado I F; sed sic est, que hemos probado, que el lado I E era igual al lado I A, luego serà tambien igual al lado I F. Tambien se ha demonstrado, que el lado A E era igual al lado A F, luego los tres lados del triangulo A F I, seràn iguales à los tres lados del triangulo A E I, y asi el angulo I A F serà igual al angulo F A I; sed sic est, que el angulo I A F, ò H A D, tiene su medida igual à la mitad del arco H D de 45. grados, sobre el qual insiste; luego el anguloE A I, ò E A H, que hemos demostrado igual al angulo H A D, tendrà tambien por medida la mitad de 45. grados. Pero el angulo E A H, tiene su medida igual à la mitad del arco E H de 15. grados, sobre el qual insiste; luego, seria preciso, que este arco E H fuesse igual al arco H D de 45. grados, y asi los angulos A B M, M B E, cada vno de los quales (segun el Author) es igual al angulo E B H, que es tambien igual (como se acaba de ver) al angulo H B D, en lugar de hazer cada vno la tercera parte del angulo propuesto A B H, es dezir en lugar de ser cada vno de 15. grados, seria cada vno de 45. y asi la tercera parte de 45. grados, se hallaria por este metodo igual à 45. grados; conviene à saber à su todo, y los arcos A M, M E, E H, H D, serian iguales entre si, y harian juntos quatro vezes 45. grados, conviene à saber medio circulo, de donde se colegirà no solo, que la parte igualarà su todo, sino que aun es mayor, y que pudieran tener 180. grados, donde por la suposicion no puede aver mas de 90.

D. Francisco Guillermo Poignard, Sacerdote, Capellan de S. M.

NO ignoro, que muchas vezes para ostentar el ingenio, y habilidad, se suele hazer alguna demonstracion, que si bien no puede subsistir, no dexa de merecer reparo, y estimacion, por acompañarla las circunstancias, que requiere la facultad, como es la demonstracion del Vander Baren; pero querer adelantar quimeras sin fundamento alguno, y contradezirse formalmēte por si misma, del genero que

que se vè à los ojos de los menos peritos en la Profession, como es la que haze el Canonigo Poignard, confiesso que es cosa dura, y que apura la paciencia.

Para demonstrar con brevedad el juyzio que se debe hazer de la censura de dicho Canonigo, antes que le concluya con su misma demostracion (sin añadir cosa alguna) he de referir vna de sus cèlebres doctrinas entre las demas q̃ publica; pues quiere el dicho Poignard, que los triangulos A I F, A H D (lamin.B, fig.1. operac.1.) sean semejantes, porque tienen el angulo en A comun; y assi en virtud de esta vnica autoridad de nuestro señor Canonigo, en qualquier triangulo A H D podra tirarse qualquier recta H S opuesta al angulo A, que tambien el triangulo A H S seria semejante al triangulo A H D, porque tuvieran el angulo en A comun; lo que dexo al juyzio de aquellos que tienen alguna luz de la facultad, para que vean, y digan sino son disparates de buen tamaño, y por donde se pueden salvar, y passo à la demonstracion concluyente.

Despues de aver hecho el Canonigo Poignard vna muy larga, è inutil demonstracion, quiere probar, que el angulo I A F sea igual al angulo E A I (que si bien tengo demonstrado publicamente, y concluido lo contrario, en la respuesta que di à Vander Baren, al qual en parte el dicho Canonigo ha querido imitar) y concediendoselе assi por esta vez, pues tiene el Poignard tambien demonstrado, que el angulo E A B sea la mitad de 150. grados, y assi serà dicho angulo E A B de 75. grados; y semejantemente aviendo demonstrado, que el angulo F A B tiene su medida igual à la mitad del arco D P, cuya mitad es de 45. grados, sed sic est, rebaxando del angulo E A B de 75. grados, el angulo F A B de 45 quedarà el angulo E A F de 30. grados, y porque quiere nuestro señor Canonigo, que el angulo E A I, y el angulo I A F (que es el mismo que H A D) sean iguales, seràn pues dichos angulos de 15. grados cada vno; y assi de esta tan admirable demõstracion del referido Poignard, se infiere no solo, que el angulo E B H al centro sea igual al angulo E A H de la circunferencia; pero tambien, que el angulo H A D à la circunferencia, sea tercera parte del angulo D B H al centro; pues sus mismas cõstruciones, y demonstraciones lo manifiestan. Passa despues à demonstrar, que el angulo I A F es igual à la mitad del arco H D de 45. grados, que seria de 22. grados, y 30. min. y tambien por lo que pretende tener probado, seria el angulo E A I del mismo valor. Y assi con esta demonstracion quiere aora probar nuestro Canonigo, que el angulo E A H à la circunferencia, sea mayor que el angulo E B H al cẽtro, quando este angulo por la construccion del mismo Poignard, fue

esta-

eſtablecido de 15.grados, mitad del arco A E,tercera parte del arco del quadrante, no obſtante quiere aora el ſeñor Canonigo por ſu celebrada doctrina,que la parte ſea mayor de ſu todo. De donde pueden inferir los Peritos, ſino es doctrina bien curioſa, y digna de que muchos ſe inclinen à valerſe de ſu habilidad.Y ſin embargo,ſe atreve el tal ſeñor Canonigo à deſacreditarme, porque defiendo la verdad; no reparando en que aplaude à lo que ſe opone diametralmente à la facultad. Y finalmente,para cõfundirſe iras à ſi miſmo,ſin mirar por ſu proprio punto,concluye,como ſe ha viſto,con las palabras ſiguiẽtes,cõforme à ſu original. *Pero el angulo E A H tiene ſu medida igual à la mitad del arco E H de 15.grados, ſobre el qual inſiſte, luego ſeria preciſo, que eſte arco E H fueſſe igual al arco HD de 45.grados, y aſsi los angulos A B M, M B E, cada vno de los quales (ſegun el Author) es igual al angulo E B H, que es tambien igual (como ſe acaba de vèr) al angulo H B D,en lugar de hazer cada vno la tercera parte del angulo propueſto A B H,es dezir en lugar de ſer cada vno de 15.grados, ſeria cada vno de 45. y aſsi la tercera parte de 45.grados, ſe hallaria por eſte metodo igual à 45.grados; conviene à ſaber à ſu todo, y los arcos A M, M E, E H, H D, ſerian iguales entre ſi, y harian juntos quatro vezes 45.grados; conviene à ſaber medio circulo, de donde ſe colegirà no ſolo,que la parte igualarà ſu todo, ſino que aun es mayor, y que pudieran tener 180.grados, donde por la ſupoſicion no puede aver mas de 90.*

En la verdad es eſta demonſtracion curioſiſsima, pues con grande evidencia ſe deſcubre la ſingular habilidad de eſte nueſtro ſeñor Canonigo Poignard; y para que eſta ſea conocida de todos (como es de razon) no es meneſter mas, ſino demonſtrarlo con toda brevedad, pues ſu miſma demonſtracion lo manifieſta, ſin añadir coſa alguna.

Eſte tan aplaudido Profeſſor, ſatisfecho de ſi miſmo, claramente quiere demonſtrar ſu grande inteligencia en la facultad, pues primeramente entiende probar, que los angulos E A I, I A F ſean de 15. grados cada vno: deſpues olvidandoſe de eſta demõſtracion,no quiere,que dichos angulos ſean de 15. grados cada vno, mas que ſean de 22. grados, y 30. min. y porque tampoco ſe acuerda luego de eſta que ha demonſtrado, buelve deſpues à dezir: *Que el angulo E A H tiene ſu medida igual à la mitad del arco E H,que le confieſſa de 15. grados.*Con lo qual quiere ſemejantemente dezir, que el angulo E A H (que es el miſmo que E A I) ya no ſea de 22.grados,y 30. min. ſi bien de 7. grados, y 30. min. (pues eſte es el valor de la mitad del arco E H) y con eſto tambien ſeria el angulo I A F de los miſmos grados; pues, como ſe ha viſto,quiere el dicho Poignard,q̃ eſtos dos angulos E A I, I A F ſean iguales. Aora diganme los curioſos deſapaſsionados, ſino

es

es bien curiosa esta demonstracion, solamente digno parto de vn Professor tan grande como es el Poignard.

Sin embargo aora la conclusion es mucho mas curiosa, pues quiere por su vnica autoridad (diziendo) *que seria preciso, que el arco E H fuesse igual al arco H D de 45. grados* (quando poco antes lo tenia confessado ser de 15. grados) y assi quiere concluir con aquellas misteriosas palabras, que por ser tan scientificas, y concluyentes, las quiero repetir aqui tercera vez, para que el curioso pueda sin trabajo aprovecharse de ellas, y son las siguientes: *Y assi los angulos A B M, M B E, cada vno de los quales (segun el Autor) es igual al angulo E B H, que es tambien igual (como se acaba de ver) al angulo H B D, en lugar de hazer cada vno la tercera parte del angulo propuesto A B H, es dezir en lugar de ser cada vno de 15. grados seria cada vno de 45. grados, y assi la tercera parte de 45. grados, se hallaria por este metodo* (a) *igual à 45. grados, conviene à saber à su todo, y los arcos A M, M E, E H, H D, serian iguales entre si, y harian juntos entre si quatro vezes 45. grados, conviene à saber medio circulo, &c.* Y dexando lo demas, que pudiera demonstrar, y dezir, suplico al curioso considere, à vista de las demonstraciones referidas, que tan sin empacho se ha arrojado à publicar nuestro señor Canonigo Poignard, el juyzio que se puede hazer de èl, y de su doctrina.

(a) *Del Poignard.*

En segundo lugar manifiesta este celebre Professor, lo mucho que ha mirado por su proprio punto: pues quando para satisfacer su natural passion, se huviera propuesto el fin de contradezir mis operaciones, no faltavan modos de executarlo, aunque insubsistentes, sin contradezir vna demonstracion suya con otra, y à fuer de emulo perjudicar à su proprio credito. Conforme es licito vim vi repellere, si yo quisiera vsar de mi derecho pudiera con mucha mas razon hablar de èl, como èl hablò, y habla de mi; pero dexando correr mi desagravio por el juyzio desapassionado de los Sabios (los quales sabràn tambien conocer quien serà aquel que pueda con toda razon dezir: *Me pudet cum ignavijs convenire*) me contentarè con poner aqui la atestacion, que el dicho Poignard diò contra mi, y la respuesta que yo le di en 11. de Abril de 1692. en la pag. 20. para que reconozca qualquier hombre de razon, è inteligente en la materia que se trata, à vista de sus manifiestos errores, la que tenia de hablar de mi del modo que ha hablado.

ATES-

ATESTACION DE DON FRANCISSO GVILLERMO POIGNARD, Canonigo de Namur, y Professor (que dize ser) de Mathematica, contra D. Nicolas Coppola.

YO Francisco Guillermo Poignard, Sacerdote, Professor en Mathematica, certifico aver leido vna proposicion Geometrica de la triseccion del angulo, inventada por Nicolàs Coppola, en la qual he hallado vna practica falsa, con vna prueba de demonstracion, que en lugar de probar la proposicion del Author, haze ver su ignorancia, y su poca capacidad en las Mathematicas. Hecha en Namur à 28. de Enero de 1692. Quod attestor.

℞. Este genero de explicarse, sin dar razõ ninguna, diziendo al mismo tiempo, que es Professor de Mathematicas, no sè que disculpa pueda tener, y mas quando entra tan satisfecho de si proprio, diziendo: *Certifico*, y concluye, *quod attestor*. Con que en rigor, lo que certifica, y lo que atesta, es no saber lo que se dize.

No contento este señor Canonigo con aver hablado de mi en terminos poco decentes, queriendo ostentar su demostrada habilidad, y sustentar su referida demonstracion en dos diferentes vezes, en presencia de algunos Cavalleros quiso apostar conmigo ciertas cantidades, y no aviendo yo hecho caso de esta primera provocacion, ni respondidole, por ser cosa, que mas me divertia, que me daba cuydado, aviendo despues passado la segunda vez en el quarto de la Magestad de la Reyna Reynante N. S. que Dios guarde, el dia que el señor D. Enrique Xavier Vvisier, Embiado extraordinario del Sereniss. Elector Palatino hizo su entrada, à hazerme la misma proposicion de la apuesta, por llevar adelante el empeño en que se avia puesto, de hazer alarde de su grande capacidad, y acreditar su demõstracion; y esto en presencia tambien de muchos Cavalleros, que no entendian la facultad. Acetè entonces el reto, pero diziendole lo pusiesse por escrito, si bien no lo ha hecho, ni lo he solicitado tampoco, por conocer no podia yo en conciencia ganarle el dinero; y para que lo crea èl assi, todas las vezes que no solo qualquiera Vniversidad (aunque hemos convenido en la Real de Paris) pero tambien qualquier docto, y publico Professor, *como el R.mo P. Iacobo Chresa, de la Compañia de Iesus, Cathedratico de Mathematicas en los Estudios Reales del Colegio Imperial de esta Corte*, sustentarè, que pueda subsistir su demonstracion: doy mi palabra de darle, no solo la cantidad apostada, pero lo que quisiere.

HAsta aqui aviendose visto quan invalidos han sido todos los reparos hechos por mis adversarios contra mi primera solucion de de la trisseccion del angulo, que publiquè en 25. de Agosto de 1692. por las quales con evidencia han manifestado, no aver entendido mis Problemas, pues ninguno de ellos se ha atrevido à hablar en los dos, que propuse, y resolvi, ni tampoco ha replicado ninguno à la referida respuesta, que di en 11. de Abril, en la qual demonstrè la dicha solucion por la linea conmensuratriz del quadrante; y si bien esta la di, y la demonstrè, real, y verdaderamente, sin embargo en lo demàs, por los arcos menores quise darlas con artificio, para averiguar la grande, y singular habilidad de estos señores; pero porque en estas el compàs no les podia manifestar el error, que con el mismo compàs avian hallado en la primera, no se han atrevido à respirar: y siendo (como ya tengo insinuado) mi fin, no solo demonstrar la verdad de mis operaciones (como la demonstrarè) pero tambien manifestar el poco conocimiento, que estos señores han tenido de ellas, quiero aora demonstrar el engaño, que con artificio puse en las lineas conmensuratrices de los arcos menores del quadrante.

DEMUESTRA EL MISMO INVENTOR EL ARTIFICIO QUE USO EN las lineas conmensuratrices de los arcos menores del quadrante, hasta aora no demonstrado, ni conocido por sus Adversarios, Cap. 3.

DEspues de aver concluido la demonstracion del Vander Baren, como se ha visto, podia con esto quedar contento, y aguardar à otros censores mas perspicaces; pero aviendo reconocido, que quantos hasta aora han escrito contra mi, no han dado en el punto, ni en la dificultad de mis operaciones, si bien tuvieron para ello sobrado tiempo; y por no dexar por otra parte à algunos inexpertos con duda perjudicial à los Elementos de Euclides, resolvi salir fuera del quadrante con la linea conmensuratriz. Y porque los vltimos que escrivieron, fueron algunos Professores de Lovayna, los quales bastantemente dieron à entender, que mas lo hizieron por contemplar à mis adversarios, que con otra mira, pues en substancia nada dixeron en sus escritos, como el docto curioso lo podrà reconocer en mi respuesta de 11. de Abril; y por darles motivo de replicar, quise introducir con artificio las lineas comensuratrices de los arcos menores del quadrante, y mayores de sus dos tercias partes; pues dixe, que añadiendo à las dos cuerdas de las dos tercias partes del quadrante, la cuerda del residuo del arco dado, la compuesta de estas tres cuerdas seria lo comensuratriz de aquel arco, Semejantemente dixe, que quãdo el arco no fuesse mayor de las dos tercias partes del quadrante, entoces ſe avia de dividir aquel arco en dos partes iguales, y las dos cuerdas de eſtas dos partes juntas, formarian la comenſuratriz del miſmo arco dado, &c.

A eſte metodo mio (como ya tengo dicho) ninguno ſe atreviò à reſponder, reduciendoſe ſiempre à hablar en el primero, en el qual hallaron la ſeguridad del compàs, del qual en eſte vltimo no podian valerſe, por ſer tan grande la aproximacion, que aunque Franciſco de Salvis (que es el que abre las laminas de mis operaciones) como Artifice inteligente, reconociò en la triſeccion del arco de 60. grados alguna tenue diferencia, no obſtante en los mas arcos menores, no fue poſsible reconocerla, pues aquella poca diferencia ſiempre minora, ſegun ſe minora el arco dado de 60. grados; de ſuerte, que por el compàs, ſe impoſsibilita el reconocerlo. Y aſsi eſtando yo ya empeñado en demonſtrar theoricamente, y deſcubrir eſte artificioſo error, de ninguno conocido, ni demoſtrado, paſſarè brevemente à executarlo en las operaciones, y demonſtraciones ſiguientes.

SEa dado el arco A R de 60. grados (lamina B, fig. 1. oper. 2.) el qual dividido por la mitad en el punto E, las dos cuerdas A E, E R juntas, forman la linea A Q, que ſegun el metodo, que tengo dado, ſeria la commenſuratriz del arco de 60. grados, cuya tercera parte A I, por donde paſſa la recta A I V, debe ſer igual à la cuerda del arco A V, tercera parte del arco A R de 60. grados.

Contra eſta hypoteſis mia quiero demonſtrar aora, que la recta A Q, no es la comenſuratriz del arco de 60. grados, para cuya demonſtracion ſe debe conſiderar el triangulo A B E, cuyo lado A E, es cuerda de la mitad del arco A R; y porque el arco A R fue eſtablecido ſer de 60. grados, ſeria por eſto el lado A E cuerda del arco de 30. grados, que es la medida del angulo A B E, y por lo que muchas vezes tengo demonſtrado, los angulos E A B, A E B, ſeràn de 75. grados cada vno; y porque el lado A B fue ſupueſto de 7. partes, con eſte tendrèmos conocidos del triangulo A B E, todos los tres angulos, y el lado A B, y aſsi por las doctrinas trigonometricas, ſe dirà: aſsi como el ſeno del angulo A E B, al lado A B, aſsi el ſeno del angulo A B E al lado A E, y obrando ſegun los preceptos de la regla, ſe hallarà el lado A E de 3. partes, y $\frac{3011113.}{4829629.}$ el qual duplicado, ſerà la A Q de 7. partes, y $\frac{1192597.}{4829629.}$ que ſegun lo que ha ſido dicho, ſeria la comenſuratriz del arco de 60. grados, cuya ter cera parre A I,

ſe

ſe reduce à partes 2. y $\frac{6022226.}{14488887.}$ que debe ſer la cuerda A R de 20. grados, tercera parte del arco de 60. grados.

Aora ſe debe examinar,ſi real,y verdaderamente,el angulo A B I, opueſto al lado A I,tercera parte de la comenſuratriz A Q, y opueſto al arco A V, ſerà de 20. grados, pues ſegun el metodo que tenia dado,debe ſer tercera parte del arco A R de 60. grados; y aſsi conſiderese el triangulo A B I, del qual ſon conocidos los lados A B de 7. partes, y el lado A I de 2. partes, y $\frac{6022226.}{14488887.}$ y ſemejantemente el angulo I A B, el qual ſiendo el miſmo,que el angulo R A B, ſerà de 60.grados , pues ſiendo la A R cuerda del arco de 60. grados, igual al ſemidiametro, ſerà el triangulo A B R equilatero, y conſiguientemente todos los tres angulos ſeràn de 60. grados cada vno , y aſsi obrando por las doctrinas trigonometricas,ſe dirà:aſsi como la ſuma de los dos lados A B,A I à la diferencia de los miſmos,aſsi la tangente de la mitad de la ſuma de los dos angulos opueſtos à dichos lados, à la tangente de la diferencia del vno, y otro angulo,à la mitad de la ſuma de los miſmos ; y obrando ſegun las reglas , darà 8433131. y eſta ſerà la tangente, que correſponde à 40. grados 8. min. y 29. ſegundos , los quales reſtados de 60. grados, mitad de la ſuma de los dos angulos opueſtos à los lados referidos, lo que quedarà ſerà la diferencia, que es de 19. grados, 51. min. y 31. ſeg. que es el valor del angulo A B I,ò ſea el arco A V; y porque eſte debe correſponder à 20. grados , no ſerà pues la tercera parte de eſta linea comenſuratriz A Q, cuerda de la tercera parte del arco A R, como fue ſupueſto , y aſsi la diferencia es de 8. min. y 29. ſegundos ; de donde ſe infiere clara , y evidentemente , que ninguno de mis adverſarios ha ſabido haſta aora reconocer eſte artificio , ni con la eſpeculativa , ni con la practica del compàs,con el qual haſta aora ſe han regido,y governado,y ſin fundamento ſcientifico han hecho tanto ruido.

Y con el miſmo metodo continuando el examen de la comenſuratriz del arco de 45. grados, ſe hallarà ſer la diferencia de 3. min. y 23. ſeg. como en todos los demàs arcos menores de eſtos, ſe hallarà la diferencia minorada.

Y aſsi aviendo yo por la miſericordia,y favor de Dios demoſtrado con evidencia, para mayor confuſion de mis adverſarios , lo que ellos no han,ni entendido,ni demoſtrado, paſſarè aora à deſcubrir el verdadero teſoro de eſta grande operacion de la triſeccion del angulo, en la forma ſiguiente.

DESCVBRIMIENTO DEL THESORO GEOMETRICO DE LA verdadera solucion de la triseccion del angulo. Cap. 4.

AViendo yo fundado esta operacion de la triseccion delangulo, en la solucion de los dos Problemas que propuse, y resolvi, como se ha visto en todos mis escritos, y en este lo repito la quarta vez en la pag.29. y siẽdo estas operaciones legitimo parto del 10. de losElementos, siempre he declarado en mis escritos anteriores, que se avia de atender con cuydado à la solucion referida de los dichos dos Problemas, para venir en el conocimiento de la operacion real, y verdadera; pero porq̃ hasta aora ninguno se ha atrevido à hablar en ella, ò sea por falta de conocimiento, ò por malignidad: tampoco he querido yo antes de aora descubrirme con entera realidad: si bien me he admirado mucho, si alguno ha llegado à conocer el artificioso error que puse en todos los arcos menores del quadrante, que lo aya podido dissimular con el silencio; de donde infiero, que no lo han sabido conocer, ni tampoco la circunstancia del arco de 45. grados, en que se podia ver claramente, que no era mi intento dar la llave para lo demàs; pues aviendo dicho, que la linea comensuratriz del quadrante, no necessitava mas que de su hypotesis, como qualquiera podrà ver en mi referida respuesta de 11. de Abril de 1692. pag. 12. §. vltimo, y como en este escrito lo repito en la pag. 27. §. 1. Y si la hypotesis de la triseccion del quadrante nos daba la comensuratriz del missmo arco. Porque razon? La hypotesi del arco de 45. grados, mitad del quadrante, no avia de dar la verdadera comensuratriz del arco de 45. grados?

Que la comensuratriz del arco de la mitad del quadrante, no necessita de otra operacion mas que de su propria hypotesis, claramente se demuestra; pues assi como el quadrante, por su referida hypotesis se mide tres vezes por la cuerda del arco AE (lam.B, fig.1. oper. 1.) y forma los tres arcos por exemplo AE, EX, XD; assi siendo el arco de la mitad del quadrante vn arco y medio de los tres referidos, serà pues el arco H E, mitad del arco X E, tercera parte de todo el arco del quadrante; y assi triplicando sobre vna recta linea la cuerda H E, serà la compuesta sin controversia alguna la linea comensuratriz de la mitad del arco del quadrante: y es de admirar mucho, que ninguno aya reparado, en que aviendo yo dicho, que dividiendo el arco A H, mitad del quadrante en dos partes iguales, la compuesta de las dos cuerdas de estas dos partes iguales de arcos, seria la comensura-

ra-

ratriz de la mitad del arco del quadrante, pues este era vn evidente artificio, que con mucha claridad se podia reconocer. Y assi con esto queda bien manifiesto, que si mis adversarios no han sabido penetrar, y descubrir vna hypotesis tan clara, como es de la mitad del arco del quadrante, no era facil; pero aun impossible el que entendiessen la raiz de la solucion de los dos Problemas, en que estavan ocultas las conmensuratrices de todos los arcos, por las trisecciones de los angulos, por cuya razon me determino à construir, y demonstrar realmente las comensuratrices de todos los arcos entre el quadrante, que son el fundamento principal de esta solucion de la triseccion del angulo.

MODO DE HALLAR LAS VERDADERAS COMENSVRATRICES DE todos los arcos en el quadrante. Cap. 5.

PAra hallar las justificadas lineas comensuratrices de todos los arcos en el quadrante, es menester considerar la solucion que yo di à los referidos dos Problemas, que propuse à los Professores (como siempre tengo dicho) en los quales demonstrè, que la linea comensuratriz del quadrante de vn circulo, es la bimedia que nace de su mismo diametro, y semidiametro, y tiene su termino en la octava dignidad.

Y con esto terminando la comensuratriz del quadrante en la octava dignidad, debe considerarse su orden progressivo de los exponentes de estas dignidades, de que nos hemos valido en la operaciõ; pues este orden es el norte, que nos conduce al puerto deseado: y assi es preciso reconocer en que lugar, ò termino viene à caer esta octava dignidad; y porque este orden progressivo de estos exponentes, ò sean denominaciones, ha sido duplo en continua proporcion, por esto caerà la octava dignidad en el quarto termino, pues su principio fuè de la Cosa, que es el primer termino de la progression, que como exponente del primer principio de las dignidades, tiene la vnidad, que es 1. Despues se multiplicò Cosa por Cosa, y produxo quadrado, que es la segunda dignidad, cuyo exponente es el 2. y este es el segundo termino de la geometrica progression. Semejantemente se multiplicò despues quadrado por quadrado, y produxo quadrado de quadrado, que quiere dezir dos vezes quadrado, que es la quarta dignidad, cuyo exponẽte es el 4. y es el tercer termino de la dupla continua proporcion; y finalmente se multiplicò quadrado de quadrado, por quadrado de quadrado, y produxo quadrado de quadrado de quadrado, lo qual quiere dezir tres vezes quadrado, que es la octava dig-

dignidad, cuyo exponente es el 8. quarto termino de dicha dupla continua progresion, en donde se hallò la linea comensuratriz del quadrante.

Cosa. q. qq. qqq. Dignidades ascendentes en dupla proporcion.
1. 2. 4. 8. Exponent.de las dignid.ascend.en dup.proporcion.
1. 2. 3. 4. Ord.progresiv. nat.de los term.de los exponentes.

Con este real fundamento, que la comensuratriz del quadrante cae en la octava dignidad, quarto termino de su dupla continua progresion, se hallaràn con todo el rigor todas las comensuratrices de qualquier arco dentro del quadrante.

Y porque las virtudes intrinsecas de los exponentes, ò denominaciones de las dignidades, y sus terminos progresivos, ascendentes, y descendentes, y en particular en estas operaciones, para hallar las mediales, y bimedias, no son de poca consideracion, como à su tiempo, con lo demàs de que se necessitare para las dos medias en continua proporcion, y Quadratura del circulo, mediante el favor de Dios demonstrarè; pues por aora dexando esto à la consideracion, y examen de los doctos, y peritos Professores, solo me estrecharè, con la brevedad que pudiere, à las operaciones, y demonstraciones de las referidas comensuratrices, para la solucion de la Triseccion del Angulo.

Y assi siendo ya demostrado, que la comensuratriz del arco del quadrante termina en la octava dignidad, se ve claramente, que queriendo descender à los arcos menores de èl, su principio radical debe ser la misma octava dignidad, quarto termino de su dupla continua geometrica progresion, que en la descension, siêdo el primero, serà este en quien se estableceràn todas las comensuratrices de qualquier arco dentro del mismo quadrante, como se demostrarà.

Dignidades descendentes en su dupla proporcion——qqq. qq. q. c.
Exponent. de las dignid. descend. en su dupla proporc. 8. 4. 2. 1.
Orden.progresiv.nat.de los termin.de los exponent. 1. 2. 3. 4.

Con lo qual, assi como para hallar la comensuratriz del quadrante, la operacion ascendia con proporcion dupla, que es como 2. a 1. assi aora permutando las operaciones para los arcos menores, los quales descienden, es preciso, que tambien las denominaciones, ò los exponentes de las dignidades se permuten, el antecedente en subsequente; y assi esta proporcion viene à ser sub dupla, como 1. à 2. que es la misma comparacion, que la de 4. à 8. y porque la octava dignidad, en que termina la comensuratriz del quadrante, es el quarto termino de la progression de su exponente, assi aqui por los arcos menores (como se ha dicho) serà primer termino de la denominacion de su exponente; luego el establecer las operaciones de todos los arcos menores dentro del quadrante, consiste en saber hallar la comensuratriz de la octava parte del mismo.

Para hallar la comensuratriz de la octava parte del quadrante, se debe considerar la proporcion que tiene el orden progressivo del exponente con su subsequente, la qual siendo como 4. à 8. se dividirà el antecedente por el subsequente el quociente, que es $\frac{4.}{8.}$ serà la raiz fundamental, de donde se saca la denominacion de la proporcion subdupla: aora observando la referida proporcion, se tomarà la mitad del nombrador, y mitad del denombrador, y se tendràn dos quartos de la octava parte del arco del quadrante, y continuando con estos la referida proporcion, en la misma conformidad tẽdrèmos vna mitad, y assi tomando del arco de vna octava parte del quadrante, $\frac{2.}{4.}$ ✠ $\frac{1.}{2.}$ serà dividido este arco en tres porciones de arcos, en la forma referida, cuyas cuerdas juntas daràn la comensuratriz de vna octava parte del quadrante, que es lo que se debia hallar.

COROLLARIO.

DE esto se infiere, que queriendo hallar la comensuratriz de qualquier arco, no mayor de la octava parte del arco del quadrante (que es la guia fiel de todos los demàs arcos, como lo demonstrarè) se dividirà aquel arco en dos partes iguales, y vna de estas tambien se dividirà en dos partes iguales, las tres cuerdas de estos tres arcos juntas por la linea recta, esta quedarà formada de $\frac{2.}{4.}$ ✠ $\frac{1.}{2.}$ del arco, no mayor de vna octava parte del quadrante, y serà con todo el rigor la comensuratriz de aquel arco dado.

Y porque no me digan, que todo lo referido es vn discurso fundado en razones, y no en demostraciones, pues no es tan facil lo que tengo dicho, que puedan todos los sugetos penetrar sin trabajo el fundamento, de donde nacen estas grandes operaciones; y aunque pudieran los Professores inteligentes comprehender por si mismos la raiz de estas tan organizadas proporciones, sin explayarme sobre estas; pues como tengo dicho, espero mediante el favor de Dios demonstrarlas en forma, con mayor claridad en la obra mayor que tẽgo ofrecida, no obstante para que sea generalmente, y de todos conocida con evidencia la verdad deseada, quiero aqui demonstrarlas, con aquellas incontrovertibles demonstraciones de las doctrinas trigo-

go-

gonometricas, que (como tengo dicho) ſon las piedras del toque de las ſciencias Mathematicas, y vnicas en eſtas operaciones, pues en ellas ſe trata de medir los angulos.

SE DEMVESTRA POR LAS DOCTRINAS TRIGONOMETRICAS LA fiel, y verdadera ſolucion de la triſeccion del angulo, por las lineas comenſuratrices. Cap. 6.

SIendo ya notorio, que la octava parte del quadrante es el arco de 11.grados, y 15. min. como qualquiera lo puede con facilidad hallar geometricamente, y reconocer ſu mas, ò ſu menos con eſte real fundamento ſe conſtruirà, y demonſtrarà eſte Problema, por el qual primero ſe halla la linea comenſuratriz, y deſpues ſe haze la triſeccion del angulo.

Sea dado el arco A C (lamina B, fig. 2.) de 11.grados, y 15.min. octava parte del arco de 90.grados, del qual ſe debe hallar la comenſuratriz.

Conſtrucion por lineas. Por la 30. del 3. ſe divide el arco A C en dos partes iguales en el punto P, y aſsimiſmo ſe divide el arco P C (mitad del referido arco A C) en dos partes iguales en el punto E, y ſe tiran las cuerdas A P, P E, E C (que por no embaraçar la figura demõſtrativa, con lineas tan cortas, ſe ſuponen corridas) deſpues alarguese la cuerda A C del arco de 11. grados, y 15.min. àzia el punto O; de ſuerte, que A O ſea igual à las tres cuerdas A P, P E, E C; digo que la recta A O, ſerà con todo rigor la comenſuratriz del arco dado A C, la qual dividida en tres partes iguales, tambien dividirà el arco dado A C en las miſmas 3. partes iguales, y con la miſma diſtancia.

Demonſtracion. Coſraſe de el extremo del angulo B al punto P la recta B P, y conſiderese el triangulo Iſoſceles A B P, del qual el angulo A B P, ſiendo opueſto al arco A P, que por la conſtrucion es la mitad de la octava parte del arco del quadrante, ſerà dicho arco A P de 5. grados, 37. min. y 30. ſegundos, y por la 32. del 1. los angulos B A P, B P A, juntos ſeràn de 174. grados, 22. min. y 30. ſegũdos, y por la 5. del miſmo, cada vno de ellos ſerà de 87. grados, 11. min. y 15. ſegundos; y aſsi del triangulo A B P, tenemos conocidos los angulos A B P, y A P B, y ſemejantemente el lado A B, el qual ſe ha conſtituìdo de 7. partes, con lo qual ſe dirà por las doctrinas trigonometricas, aſsi como el ſeno del angulo A P B al lado A B, aſsi el ſeno del angulo A B P al lado A P, y obrando ſegun los preceptos, ſe hallarà el lado A P de partes $\frac{6861204}{9987954}$ de vn entero.

Aora

A ora nuevamente tirese del extremo del angulo B al punto E la recta BE, y considerese el triangulo Isosceles PBE, del qual el angulo PBE, siendo opuesto al arco EP, que por la construcion es la mitad del arco CP, el qual fue demostrado de 5. grados, 37. min. y 30. segundos, serà pues el arco PE, ò el angulo EBP de 2. grados, 48. min. y 45. segũdos, y asi los dos angulos BEP, BPE juntos seràn 177. grados, 11. min. y 15. segundos; y por lo consiguiente, cada vno de los dos seràn de 88. grados, 35. min. 37. segundos, y 30. tercios, y asi del triangulo PBE son conocidos los angulos EBP, PEB, y el lado BP, que siendo igual al lado BA, serà tambien de 7. partes. Con lo qual se dirà por las doctrinas trigonometricas, asi como el seno del angulo BEP al lado BP, asi el seno del angulo EBP al lado PE; y obrando segun las reglas, serà el lado PE $\frac{3434739.}{\quad}$ de vn entero; y porque la cuerda EC por construcion, es (9996987.) igual à la cuerda PE, por esto se debe doblar el lado hallado PE, y se tendrà $\frac{6869478.}{(9996987.)}$ los quales juntos con el lado AP (que arriba ha sido hallado) lo agregado serà vna parte, y los quebrad. q̃ sigue $\frac{37353951165762.}{(99849446294598.)}$ que serà el valor de la recta AO comensuratriz del arco AC, octava parte del arco de 90. grados, cuya tercera parte AI serà $\frac{45734465820120.}{(99849446294598.)}$ la qual debe ser cuerda, y medida de la tercera parte del arco dado AC de 11. grados, y 15. min. octava parte del arco del quadrante; y asi en virtud de la hallada AI, tercera parte de la comensuratriz del arco AC, se ha de hallar el angulo ABI, ser tambien tercera parte del arco dado AC, lo qual demonstrarè en la forma siguiente.

Para demodstrar, que la AI es cuerda de la tercera parte del arco AC, tirese por el punto I la recta BIN, y considerese el triãgulo ABI, del qual el angulo IAB, es el mismo que el angulo CAB, siendo pues el angulo ABC por construcion de 11. grados, y 15. min. serà (por lo que muchas vezes tengo demonstrado) el angulo CAB de 84. grados, 22. min. y 30. segundos, y del mismo valor serà el angulo IAB; y asi el triangulo ABI tenemos conocidos los lados AB, AI, y el angulo IAB contenido de dichos lados, con lo qual por las doctrinas trigonometricas, se dirà asi como la suma de los dos lados AB, AI à la diferencia de los mismos, asi la tangente de la mitad de la suma de los dos angulos opuestos à los referidos lados (que serà de 47. grados,48. min. y 45. ſegundos) à la tangente de la diferencia de vno, y otro angulo de la mitad de la ſuma de los miſmos, y obrando ſegun los preceptos, darà 9678079. que correſponde à la tangente de 44. grados, 3. min. y 45. ſegundos (y algunos tercios, que por razon de ſer las lineas inconmenſurables, ſe quitan ſin eſcrupulo, y ſi alguno lo tuviere, le ſatisfarè en todo lo que dudare) y eſtos reſtados de la mitad de la ſuma de los angulos referidos, que es de 47. grados, 48. min. y 45. ſegundos, quedarà el reſiduo de 3. grados, y 45. min. que ſerà el valor del angulo ABI opueſto al lado AI, tercera parte de la comenſuratriz AO, y ſemejantemente ſiendo el dicho angulo ABI, opueſto al arco AN, ſerà dicho arco tambien de 3. grados, y 45. min. que es la tercera parte del arco dado AC de 11. grados, y 15. min. y aſsi queda demonſtrado, que la AI, como tercera parte de la linea comenſuratriz AO, ſerà la verdadera medida del arco AN, tercera parte del arco dado AC, octava parte del quadrante; y tambien queda demonſtrado, que la AO, es la verdadera comenſuratriz del arco dado AC, que era lo que ſe avia de conſtruir, y demonſtrar. *Con que ſe tiene hallado el modo, como ſe debe tirar aquella recta CIG, con aquel arte, que FI, FG ſean iguales, que dexò Caramuel de enſeñarnos, que el P. Zaragoza deſeò huvieſſe quien la hallaſſe, como yo referi en lo eſcrito de 25. de Agoſto de 1691. en la pag. 1.*

COROLLARIO I.

DE lo qual reſulta, que la tercera parte hallada del arco de 11. grados, y 15. min. ſi ſe doblare ſobre el arco, darà la tercera parte del arco de 22. grados, y 30. min. y ſi ſe quadruplicare, darà la tercera parte del arco de 45. grados, y finalmente ſi ſe octuplicare, darà la tercera parte del arco de todo el quadrante.

COROLLARIO II.

SEmejantemente de eſto procede, que todos los arcos menores de 11. grados, y 15. min. octava parte del arco del quadrante, dividido por mitad, y vna de ellas tambien dividida por mitad las tres cuerdas de eſtos tres arcos juntas por linea recta, forman la comenſuratriz del arco dado.

COROLLARIO III.

Y Aſsi todos los arcos mayores de 45. grados, haſta los 90. incluſive, divididos en ocho partes iguales, y hallando (como queda dicho) la comenſuratriz de vna octava parte de èl, la tercera parte de eſta comenſuratriz octuplicada ſobre el arco dado, darà la tercera parte de aquel arco.

Y tambien todos los arcos mayores de 22 grados, y 30. min. haſta los de 45. incluſive, divididos en 4. partes iguales, y hallando la comenmenſuratriz de vna quarta parte dèl, la tercera parte de eſta comenſuratriz, quadruplicada ſobre el arco dado, darà la tercera parte de aquel arco.

Finalmente todos los arcos mayores de 11. grados, y 15. minut. haſta los de 22. grados, y 30. min. incluſive, divididos en dos partes iguales, y con el miſmo metodo hallada la comenſuratriz de vna de las dos partes de èl, la tercera parte de eſta comenſuratriz doblada ſobre el arco dado, darà la tercera parte de aquel arco.

COROLLARIO IV.

LO miſmo, y en la miſma forma ſe puede obrar en el arco de 60. grados, progreſsivamente aſcendiendo, y deſcendiendo, como ſe ha practicado en el referido arco de 90. grados del quadrante.

SOLVCION DE LA TRISECCION DEL ANGVLO, PARA LOS que fueren meramente practicos. Cap. 7.

AViendo ſatisfecho à todos los ſcientificos con la theorica, ſerà razon tambien dar guſto à los meramente practicos, los quales aunque con cuydado, y aplicacion obraſſen con el compàs, no obſtãte pudieran hallarſe embaraçados con las diviſiones tan cortas de los arcos, y en lugar de ſerles de provecho, les cauſaria confuſion; y aſsi para la ſimple practica, ſin eſcrupulo ſe les puede permitir el obrar en la forma ſiguiente.

Queriendo triſecar qualquier arco menor de 45. grados, quiero dezir de la mitad del arco del quadrante, ſe dividirà eſte arco en la miſma manera, que ſe hizo con el arco de la octava parte del quadrante; pero ſe dividirà el arco dado menor de la mitad del arco del quadrante en dos partes iguales, vna de las quales ſe dividirà tambien en dos partes iguales; y aſsi ſeràn tres porciones de arcos, cuyas cuerdas juntas por linea recta, formarà la comenſuratriz de aquel arco, cuya tercera parte ſerà la cuerda de la tercera parte del arco dado, y dividirà dicho arco en tres partes iguales.

Para el arco de 45. grados, ſu tercera parte ſe halla en ſu hypoteſis, como ſe ha referido en eſte tratado en la pag. 44. §. 2.

Para la triſeccion de todos los arcos mayores de 45. grados, haſta lo de 90. ſe dividirà el arco por la mitad, y hallando la comenſuratriz de vna mitad, la tercera parte de eſta comenſuratriz doblada ſobre el arco dado, darà la tercera parte de aquel arco dado.

Y aſsi por eſpecial gracia de Dios, ſe tiene reſuelta, y demoſtrada con todo el rigor que ſe pide, la ſolucion de la triſeccion del angulo, tan deſeada, de la qual no ſolo los Theoricos, y eſpeculativos Profeſſores; pero tambien los meramente practicos podràn aprovecharſe con toda facilidad, y gozar de ella.

OBSERVACIONES QUE DEBEN HAZER LOS PROFESSORES. Cap. 8.

CON especial cuydado deben aqui atender los Professores en considerar la solucion de los dos referidos Problemas, en que se encierra la fuerça virtual de las mediales, y bimediales, las quales hasta aora (como repetidas vezes tengo advertido) ninguno las ha considerado con este fin; y tambien deben observar los efectos, que producen las continuas progresiones geometricas de la denominacion, ò sean exponentes de las dignidades, con aquellas de sus ordenes, y sus ℞, &c. pues se reglan los arcos menores del quadrante en la ascension, doblando, quadruplicando, y octoplicando, segun la qualidad de los arcos, que son dados, y en la descension el contrario; y les asseguro no les serà inutil esta observacion, pues sin este conocimiento no son de provecho alguno las resoluciones analicticas en este genero de operaciones.

Tampoco puedo excusar el advertir en este lugar, que sobre aver llegado algunas personas, que si bien hazian particular estimacion de la solucion de mis dos Problemas referidos, sin embargo no les parecian (entonces) que hazian al caso para la triseccion de todos los arcos, y que para esto avia yo de aver examinado la subtilissima operacion del Cartesio, por medio de la figura Parabolica.

Respondi à esta objeccion, que en medio de aver aprobado dichos señores la solucion de mis dos Problemas, me daban ocasion de persuadirme à que no los avian entendido fundamentalmente, pues el averme citado la subtilissima operacion del Cartesio, por medio de la parabolica, sin entrar en demonstracion alguna, como tambien el dezir, que la solucion de mis dos Problemas, no era del caso para la triseccion de los demàs arcos, me motibava el creer, que no avian penetrado bien mis operaciones, y que assi les suplicava se dignassen de nuevo de observarlas con mas atencion, y cuydado, y que despues passando à alguna demõstracion, me citassen entonces la del Cartesio.

ES cosa muy notoria, que Renato Cartesio, fue sugeto singularissimo por su doctrina tan bien fundada; Y nadie niega, que sus operaciones parabolicas no merecen la estimacion que han logrado: pero que con estas se pueda con toda seguridad conseguir el fruto de la solucion de la triseccion del angulo, como de los demàs Problemas no resueltos, es lo que duda la cortedad de mi entendimiento, y no penetra mi discurso; porque concediendoles, que la operacion del Cartesio aya sido enteramente, y con todo rigor demostrada (aun quando no fuesse) no por esto se puede en este caso practicar con aquel rigor que pide la facultad la construcion de la parabola, ni hallar por li-

lineas porciones de aquellas ℞,ſegun la equilacion, que ſe debe hazer en los angulos diverſos,pues eſto no ſolo no es tan practicable por lo comun, pero tambien por los Profeſſores miſmos, aũque ſean confirmados en la analithica, y ſecciones conicas ; y para que ſe reconozca ſi eſto es verdad, conſtruya qualquier perſona deſapaſsionada vna figura parabolica por medio de la qual ſe huvieſſe de triſecar qualquier angulo agudo,y tome aquellas partes,ſegun la diſpoſicion de la igualacion, y obſerve à que termino viene la operacion,que con eſto hallarà con evidencia la diferencia que ay en ſemejantes operaciones entre el demonſtrar vna operacion que nace por ſu propria hypoteſis, como es la triſeccion del quadrante, que al conſtruir, y demonſtrar otras diverſas,aun del miſmo genero;y aſsi lo que ſe puede dezir, que ſi ſe huviera podido executar la operacion del Carteſio,no ſe dixera,que haſta aora eſte Problema no ha ſido reſuelto,como los miſmos ſugetos, que me han dado motivo con eſta operacion, tambien lo confieſſan ; y dexando para otro tiempo lo demàs , que ſobre eſto pudiera dezir,y demonſtrar, me remito por aora à lo que dize Ariſtoteles en el ſegundo lib. de ſu Metaphiſica: Que en tanto es loable, è inmortal la eſpeculacion de las coſas, en quanto demonſtrando la verdad de las operaciones,ſe pueda deſpues executar, y conducir actualmente al fin,lo que ſe ha deſcubierto con la eſpeculativa.Que como dize Marco Tulio, en el primero de officijs , toda la alabança de la virtud conſiſte en las obras.

DEL HEPTAGONO REGVLAR. Cap. 9.

LA ſolucion que di, aſsi del heptagono, como de todos los Poligonos de lados impares , eſtava comprehendida en el miſmo artificio,que he manifeſtado, y demonſtrado en las comenſuratrices de los arcos menores,de la qual no aviendo hablado palabra mis adverſarios, reſervo para otra ocaſion la llave de eſte Arcano, por via de las comenſuratrices.

Pero ya que pues ſe habla del heptagono regular, no puedo dexar de dezir,como caſualmente llegò à mis manos vn tratado *del M. R.P. Maeſtro Fray Ignacio Muñoz, Cathedratico proprietario de Mathematica de la Real Vniverſidad de Mexico, ſobre la conſtrucion, y demonſtracion geometrica del triangulo Iſoſceles proprio del heptagono regular , y deſcripcion de la miſma figura, el qual es en la forma ſiguiente.*

HEPTAGONO DEL PADRE MVÑOZ. Cap. 10.

ESTE Reverendiſsimo Padre , y digniſsimo Profeſſor (que fue) pretende aver fundado geometricamente ſu hypoteſis para la ſo-

ſolució de la formacion del heptagono, en vn triangulo Iſoſceles proprio del heptagono regular, en que cada vno de los dos angulos en la baſa, es triple del angulo vertical, y lo conſtruye, y demueſtra por la fig. 1. lamina C. Pero el fundamento de eſta hypoteſis, conſiſte en ſubſtancia en los triangulos ABD, ADC, que forman el triangulo Iſoſceles ABC, pues no ſon del caſo la formacion de los paralelos grammos; con los quales el Author creia demonſtrar, que la AC era igual à la CD, lo que en la realidad no ha demoſtrado, como lo harè ver con toda claridad.

CONSTRVCION DEL P. ADRE MVñOZ.

HAgaſe el triangulo Iſoſceles ABD; (*lamin.C. figur.* 1.) de ſuerte, que la baſa AB, tenga 9. partes iguales, y cada vno de los lados AD, BD, tenga 5. partes iguales, como AB. Continueſe el lado BD; de ſuerte, que DC tenga 4. de dichas partes iguales, y es toda la recta compueſta BC de 9. partes iguales, como A B, junteſe A como C. Y porque el triangulo total ABC, tiene los dos lados AB, BC iguales entre ſi, por la conſtruccion, es triangulo Iſoſceles, como tambien ſu triangulo parcial ADB (*defin.* 24. *prim.*)

Continua el Padre Muñoz con los ſiguientes.

Ademàs deſto, el otro triangulo parcial ACD, ſobre la baſa conocida AD 5. partes, tambien es Iſoſceles, que cada vno de ſus dos lados DC, AC, es de 4. partes iguales. Es el lado DC conocido de 4. partes iguales (*por la conſtrucion*) y es ſu igual el otro lado AD. Eſta vltima propoſicion es la dificultoſa, y es la radical deſta conſtruccion, y ſe demueſtra de dos modos en la forma ſiguiente.

Demontracion I Primeramente por el punto conocido D, tireſe la recta DE iguàl, y paralela à la recta conocida AC. Junteſe el punto C con E. Y porque AC, DE ſon paralelas iguales, por la conſtruccion, tambien las dos rectas, que las vnen AD, CE, ſon entre ſi paralelas iguales (*por la* 33. *prim.*) Y el quadrilatero ADEC, es paralelo grammo (*definit.* 45. *prim.*) Y ſu diametro conocido DC de 4. partes iguales, le divide en dos triangulos ADC, CED, de angulos, y lados homologos iguales (*por la* 34. *prim.*)

Fuera deſto el lado AD, partaſe por medio en el punto F; y aſsimiſmo el lado CE por medio en el punto G (*por la* 10. *del prim.*) Junteſe el punto F con G. y el punto D con G, y C con F, y ſon iguales entre ſi, y parelelas las tres rectas AC, FG, DB (*por la* 33. *prim.*) porque juntan las paralelas iguales AF, CG, FD, GE por la conſtrucion. Y por la miſma razon ſon iguales, y paralelas entre ſi las dos rectas FC, DG, porque juntan las dos paralelas iguales FD, CG, por la cóſtrucion. Y el quadrilatero

FDCG,

FDCG, es paralelogrammo (*definic. 35. prim.*) Y sus angulos, y lados opuestos son iguales, y el diametro DC; y assimismo el diametro FG, cada qual divide esse paralelogrammo en dos partes iguales (*por la 34. prim.*)

Además desto en el triangulo ADC, porque la recta FG, es paralela à la basa AC, y corta por medio en F al lado AD, por la construccion, tãbien corta por medio en R al lado diametral CD (*por la 2. sext.*)

Vltimamente en los triangulos parciales FDG, CFD del dicho paralelogrammo, porque los dos lados FC, DG, son paralelos iguales contrapuestos, y el lado FR es igual al lado GR, mitades de la basa FG, y el angulo CFR, es igual à su angulo alterno DGR. Y assimismo el angulo FCR, es igual à su angulo alterno GDR entre las dos paralelas opuestas FC, DG (*por la 29. prim.*) y el angulo FRC, es igual à su vertical DRG (*por la 15. prim.*) y el triangulo FRD, es comun à los dos triangulos parciales FDG, DFC. Luego (*por la 4. y por la 26. prim.*) estos dos triangulos en los angulos, y lados homologos, y en la basas DC, FG, son totalmente iguales. Siendo pues la recta DC de 4. partes iguales, por la construccion, luego su igual FG, por lo demonstrado, y la igual, y paralela de esta AC, cada qual tiene 4. partes iguales, como DC (*por el axiom. 1.*)

Y finalmente porque en el triangulo parcial ACD, la basa AD tiene 5. partes iguales, y el lado DC tiene 4 de essas partes, por la construccion, y el lado AC tiene otras 4. de essas partes iguales, por lo demonstrado. Luego el dicho triangulo parcial ACD, es triangulo Isosceles (*por la difin. 24. prim.*) que es la proposicion dificultosa, y radical de nuestra construccion, que se debia demonstrar.

Demonstracion II. *de esta misma proposicion.* En el paralelogrammo ADEC, por la construccion, dividido el lado AD por medio en F, y assimismo su lado paralelo igual CE, divido por medio en G, tirando la recta FG, es igual, y paralela à las dos rectas paralelas AC, DE (*por la 33. prim.*) porque vnen las paralelas iguales AF, CG, FD, GE, mitades de las dos paralelas iguales AD, CE por la construccion.

Además deste, desde los dos puntos conocidos DF, levantense las dos perpendiculares DG, FC, sobre la recta AD, y las dos rectas DG, FC son entre si iguales, y paralelas, porque son perpendiculares entre las dos paralelas AD, CE, y los quatro angulos FDG, DGC, GCF, CFD, son rectos iguales (*por el axiom. 12. y por la 29. prim.*) Y porque las dos rectas FD, CG por la construccion, son mitades de las dos paralelas iguales AD, CE, y las dos perpendiculares iguales FC, DG salen de los dos puntos extremos FD por la construccion, tambien passan por los dos puntos extremos CG de la recta CG igual, y paralela contrapuesta à la recta FD (*por la 29. y por la 33. prim.*)

Vlti-

Vltimamente los dos angulos FDG, CFD, ſon rectos iguales,por la conſtruccion, y los dos lados DG, CF ſon iguales paralelos contrapueſtos, y el lado FD, es lado comun, luego en los dos triangulos rectangulos FDG, CFD, las dos baſas FG, DC, ſon entre ſi iguales (*por la 4. prim.*) Siendo pues DC de 4. partes iguales, por la conſtruccion, tãbien ſu igual FG, y ſu paralela igual AC, por lo demonſtrado, cada qual tiene 4. partes iguales, como DC (*por el axiom. 1.*) Y porque los dos lados DC, AC, cada qual es de 4. partes entre ſi iguales, por lo demonſtrado, el triangulo ACD es Iſoſceles (*defin. 24. prim.*) que es lo que ſe debia demonſtrar.

NO ay duda, que la invencion es digna de alguna alabança, aſsi por acercarſe mucho à la verdad, como por la facilidad, que puede tener qualquiera en executarla: pero no por eſſo el P. Muñoz debia quexarſe del Reverendiſsimo Padre Ioſeph Zaragoça, de la Compañia de Ieſus; por averle demoſtrado, que era falſa, ſegun requiere el rigor de la facultad, ni tuvo razon en dezir contra èl (pag. 10. §. 1.) las ſiguientes palabras.

Lo ſegundo infiero, que el dicho P. Zaragoça, aunque ſe tenia por oraculo de la geometria tampoco comprehendiò, ni raſtreò el ſecreto, que encierra el dicho triangulo total ABC, y que para el examen de dicho triangulo parcial ACD, ſe valiò de vn medio inutil, como ſon los numeros de las tablas de los ſenos, &c.

Perdoneme el P. Muñoz ſi digo que tiene poca razon, pues ſi queria quexarſe del P. Zaragoça, y condenar como inutiles los numeros de las tablas de los ſenos, debia primeramente demonſtrar en ſorma las razones que tenia que alegar para ſu defenſa, y deſpues dezir lo que le parecieſſe; porque picarle à vno ſin demonſtracion antecedente, y prueba bien fundada, qualquiera lo puede hazer, ſi cierra los ojos à ſu proprio interès, pero no ſi mira por ſu punto: pues en el examen de los hombres doctos, è inteligentes (obrando en la forma referida) quedan muy lexos de acreditar ſus operaciones, pues ſerviràn ſolo de deſcubrir la paſsion con que han obrado; y para juſtificaciõ de lo que digo, quiero ſobre eſto poner aqui la demonſtracion que ofrece al curioſo la cortedad de mi talento.

EL P. Zaragoça, como digniſsimo, y doctiſsimo Profeſſor, que fue de eſta facultad, aviendo deſcubierto con evidẽcia el error de la operacion referida del P. Muñoz, quiſo fundamentalmente, y con las verdaderas doctrinas trigonometricas demonſtrarla; no porque el dicho Padre no fueſſe vn grande Analitico, y mayor Geometra, como lo manifieſtan ſus obras dignamente aplaudidas; pero porque en ſemejantes operaciones de ſolucion de angulos, las doctrinas trigonometricas ſon vnicamente aquellas, que apuran la verdad, y de la ſentencia de ellas no ay apelacion. De ſuerte, que el P. Zaragoça, aviendo demonſmonſtrado en forma el error referido,no le ſirve al P.Muñoz dezir, que los numeros de las tablas de los ſenos ſon inutiles; porque es hazer diſcurſos en el ayre,y no fundar en razon,y demōſtracion lo que ſe dize; y para que ſe reconozca eſta verdad con evidenciá, yo la demonſtrarè,no ſolo con las legitimas doctrinas trigonometricas,pero tambien con la miſma demoſtracion geometrica,que elP.Muñoz ha pretendido executarlo.

QViere el P.Muñoz,que el examen de eſta operacion ſuya dependa vnicamente de la cantidad continua,y no de la cantidad diſcreta; Quando no ſolo ſu referida operacion depende de eſta (como lo demonſtrarè en ſu lugar) pero aun la cantidad diſcreta es aquella , que como principio,y madre de las diſciplinas Mathematicas contribuye à ſu intrinſeco valor;pues es ya notorio, que todas las coſas, que ſon naturalmente primeras vna vez que ſe quitan , quitanſe tambien las conjuntas;y de eſto ſe ſigue,que ſi ſe quitan los numeros, de los quales nacen los Triangulos,Quadrados,yPoligones,ytodas las demàs figuras geometricas,ſe quitan juntamente todas eſtas figuras,ſupueſto que en qualquiera figura geometrica,ſiempre ſe halla el numero que ſe le aplica:Pero quando no huvieſſe,ò ſe concedieſſe,que no ayTriāgulo , ò qualquiera otra figura geometrica , no por eſto dexaria de aver el 1.el 2.y el 4. &c. porque la eſſencia del numero no neceſsita de las figuras geometricas,como eſtas neceſsitan de èl.De ſuerte,que es ſubterfugio muy tenue dezir, que los numeros de las tablas de los ſenos ſon inutiles:ſi bien por otra parte no me admiraria,de que el P. Muñoz huviera adelantado eſto, ſi dando à luz eſta operacion la huvieſſe fundado con algun artificio oculto , teniendo prompta la demonſtracion en contra,no ſolo en el caſo,que la demonſtracion Trigonometrica huviera ſido tan extravagante, como la de eſtos ſeñores mis adverſarios,à quienes he concluido con ſus miſmas doctrinas (como podrà ver el curioſo en mi reſpueſta de 2.deEnero de 1692.) pero aun quando huviera ſido con las verdaderas doctrinas,como ha ſido la del P. Zaragoça (cuya inteligencia en eſta facultad es digna, y vniverſalmente aplaudida) tenia obligacion el P.Muñoz de deſcubrir aquel artificio, y lo que tenia reſervado, ù darſe por concluido, pues contra vna verdadera, y legitima demonſtracion trigonometrica,no ſe puede arguir;y aſsi el aver querido el P.Muñoz ſuſtentar vn error demoſtrado,ſin vna demoſtracion fundada en cōtra, ha ſido vn error de peor calidad que el primero, pues eſtas ſon materias demonſtrativas, y no de diſputa ; porque finalmente en la domonſtracion la verdad ſe manifieſta, y para que à todas luzes quede eſta clara, y viſsible, la demonſtrarè en la forma ſiguiente.

EL P. Muñoz ſe acogiò al amparo de la geometria, con la qual ſupone aver demonſtrado ſu operacion. Yo aora con la miſma demonſtrarè, que no ha demonſtrado en manera alguna, que el triangulo ACD parcial (como èl le llama) es Iſoſceles: que es en donde conſiſte la fuerça de eſta operacion ſuya, y deſpues le demonſtrarè el error con las verdaderas doctrinas trigonometricas.

Que la primera demonſtracion del P. Muñoz ſea inutil, ella miſma lo manifieſta, pues ſin alterar parte alguna de ella, ſe puede pretēder dèmonſtrar con la miſma, que qualquier triangulo Iſoſceles ABC (lamina C, fig. 4.) cada vno de ſus lados iguales AB, BC pueda tener con la baſa AC qualquiera proporcion dupla ſexquiquinta, que viene à ſer como 11. à 5. y con eſta eſtablecer el triangulo Iſoſceles parcial ABD, cuya baſa AB fueſſe de 11. partes iguales, y los dos lados AD, BD, de ſeis partes cada vno, y en lo demàs imitando el miſmo metodo del P. Muñoz, ſe pudiera tambien dezir, que eſte triangulo Iſoſceles fueſſe proprio del heptagono, ſiendo eſto evidentemente falſo, pues no neceſsita de otra demonſtracion, ſino de la miſma del P. Muñoz, como ſe vee; y aſsi no ſe puede dezir, que el P. Muñoz en la primera demonſtracion que hizo, aya concretamente demonſtrado, pero confundido; y aviendo dicho P. muy bien reconocido la inutilidad de eſta demonſtracion ſuya, quiſo por eſto paſſar à la ſegunda, la qual es bien curioſa, y digna de reparo, como lo podrà reconocer qualquier hombre inteligente en eſta facultad.

En la ſegunda demonſtracion pretende el P. Muñoz, que ſobre el punto F (fig. 1.) el qual divide el lado AD en dos partes iguales, y ſemejantemente ſobre el punto D, ſe levanten las dos perpendiculares DG, FG, y deſpues de aver hecho vna amplia demonſtracion, dize: *Y porque las dos rectas FD, CG, por la cōſtrucion ſon mitades de las dos paralelas iguales AD, CE, y las dos perpendiculares iguales FC, DG, ſalen de los dos puntos extremos F, y D, por la conſtruccion tambien paſſan por los dos puntos extremos C, y G de la recta CG igual, y paralela contrapueſta a la recta FD.* De ſuerte, que pretende el P. Muñoz, que de la vna conſtrucion proceda la otra, y eſta ſirva por demonſtracion de aquella, pues quiere que la cōſtrucion, que haze de levantar en los puntos F, y D, ſobre la recta AD las perpendiculares FC, DG, tambien la DG aya de dividir por conſtruccion la CE en dos partes iguales en el punto G, y que ſemejantemente la perpendicular FC aya de paſſar por conſtruccion por el punto C, extremo de la baſa AC. Si eſta ſe llama demonſtracion, lo dexo al juyzio, y conſideracion, no digo de Profeſſores eruditos, pero de qualquier mediano Geometra.

PErdoneme el P. Muñoz, eſta no es demonſtracion para hombre de ſu capacidad, porque el levantar ſobre el punto D la perpendicular DG, no reſulta el que aya de paſſar por el pũto G, dividiendo la CE en dos partes iguales; pues debia demonſtrar, que levantandoſe ſobre el punto D la perpendicular DG, eſta dividia el lado CE en dos partes iguales en el punto G, y ſemejantemente levantandoſe ſobre la recta CE en el punto C la perpendicular CF, eſta dividia el lado AD en dos partes iguales en el punto F, y en eſta forma podia aſſegurar aver demonſtrado ſu operacion, y no en la conformidad que lo ha ſupueſto, que levantandoſe ſobre el punto D la perpendicular DG, paſſe eſta por el punto G, en el qual ha ſido dividida por otra conſtruccion la recta CE en dos partes iguales; pues à ſer eſto aſsi, ſe pudiera pretender demonſtrar lo miſmo en la referida figur. 4. en la qual el triangulo Iſoſceles ABC, los dos lados iguales AB, BC, cada vno de eſtos es de 11. partes, y la baſa AC es mas de 4. partes, y las perpendiculares, aunque paſſan fuera de aquellos puntos, que pretende el P. Muñoz, no obſtante, ſegun la demonſtracion de dicho Padre, ſe pudiera demonſtrar el miſmo. Y aſsi queda concluido, que el dicho P. Muñoz no ha demonſtrado, ni ya podia demonſtrar mas, en ſu forma referida, que el triangulo ACD era Iſoſceles, pues para demõſtrarlo, ſegun ſu opinion, era preciſo demonſtrar primeramente, que los dos lados AB, BC tenian cada vno proporcion dupla ſeſquiquarta con la baſa AC, y no aſſegurar ſolo por quererlo, que avia hallado la referida proporcion, ſin demonſtrarla, pues eſto no es mas que obrar con el adminiculo de ſolo compàs, como por lo que demonſtrarè ſe conocera.

Dize el P. Muñoz (hablando contra el P. Zaragoça, y de la inutilidad de los ſenos, pag. 10. lin. 8.) porque no podia ignorar dicho Padre, que muchiſsimos numeros de las dichas tablas, no pueden ſer mas que aproximaciones, porque ſe reducen por las extraciones numerales de raizes quadradas, que muchos numeros no la tienen preciſas en el Arithmetica, ſino meramente aproximadas; pero la Geometria ſin dependencia de la Aritmetica, halla las raizes quadradas perfectiſsimas entre las lineas que ſon entre ſi incomenſurables.

Eſte modo de diſcurrir, y de hablar deſcubre manifieſtamente el poco conocimiento que tiene en la facultad, pues no teniendo otra demonſtracion para ſuſtentar ſu erronea operacion, ſe adarga con ocioſas palabras, y con ellas intenta perſuadir, que los numeros de las Tablas de los ſenos, ſiendo aproximaciones dellos, no pueden ſer de vtil en las operaciones Mathematicas: Quando al contrario ſe puede dezir, que la Mathematica ſeria vn Cuerpo ſin cabeça ſin eſtas operaciones trigonometricas; pues todo aquello que no ſe puede demonſtrar por linea, ò por numeros abſolutos, ò figurados, ſe demueſtra por los numeros de los ſenos, como lo hallamos en eſte caſo, en que el Padre

Muñoz,no aviendo primeramente demoſtrado (como debia)la proporcion que dixo aver hallado, como 9. à 4. jamàs ſerà poſsible demonſtrar,que el triangulo ACD es Iſoſceles,porque de eſte triangulo no ſe tiene otra noticia cierta, ſino que el lado AD, que es de 5. partes,y el ladoCD de 4.de ſuerte,que en la realidad queda incognito el lado AC,el qual (ſegũ la forma referida)jamàs ſe podrà demoſtrar, que ſea igual al lado CD, ni geometricamente, ni Analithicamẽte,ni de qualquier otro modo;y porque el P. Muñoz eſtableciò comenſurables los lados AB,BC del triangulo ABC, cada vno de 9.partes,y la baſa AC de 4.part.por eſto en eſte caſo la trigonometria es vnicamẽte aquella que decide, ſi el angulo ACB ſobre la baſa, ſerà triple del angulo ABC vertical,como el dicho Padre intenta perſuadir, y para eſto ſe harà la demonſtracion ſiguiente.

SE DEMVESTRA EL ERROR DEL REFERIDO TRIANGVLO Iſoſceles del P. Muñoz. Cap. 11.

SEa el triangulo Iſoſceles del P. Muñoz (el qual dize ſer proprio del heptagono) ABC (lamin. C, fig. 2.) del qual los dos lados AB, BC, ſean cada vno de 9. partes iguales, y la baſa AC de 4.

Hagaſe caer del angulo vertical B ſobre la baſa AC, por la 12. del 1. la perpendicular BE, que por la 9. y 10. del miſmo dividirà el angulo ABC, y la baſa AC en dos partes iguales.

Conſidereſe el triangulo rectangulo BEC, angulo recto en E, del qual es conocida la hypotenuſa BC de 9. partes; y ſiendo el lado EC mitad del lado AC, ſerà de dos partes, por lo qual ſe dirà por las doctrinas trigonometricas, aſsi como el lado BC al radio, aſsi el lado EC, mitad del lado AC al ſeno del angulo EBC, y obrando ſegun los preceptos, darà el ſeno 2222222. que correſponde à 12. grados, 50. min. 22. ſegundos, y 30. tercios, &c. que ſerà el valor del angulo EBC, y por la 32. del primero, el angulo ECB de ſobre la baſa, ſerà de 77. grados, 9. min. 37. ſegundos, y 30. tercios, &c. y porque el angulo EBC por la conſtruccion, es mitad del angulo vertical ABC, por eſto ſu duplo ſerà de 25. grados, 40. min. y 45. ſegund. &c. que ſerà el valor de todo el angulo vertical ABC; y porque el triangulo Iſoſceles proprio del heptagono, ha de tener cada vno de ſus angulos en la baſa el triple del angulo vertical, por eſta razon triplicando el angulo referido ABC, ſerà ſu triplo 77. grados, 2. min. y 15. ſegundos, &c. que debria ſer el angulo ACB, como triple del angulo vertical ABC; pero porque el angulo ACB ſe hallò por las doctrinas trigonometricas de 77. grados, 9. min. 37. ſegundos, y 30. tercios, no es pues el angulo ACB ſobre la baſa triplo del angulo vertical ABC; deſuerte, que con evidencia ſe reconoce el error de la operacion del P. Muñoz,

el

el qual ſolamente por las doctrinas trigonometricas, queda manifieſta-mente deſcubierto.

Y no le vale à dicho Padre alegar, que eſta diferencia nace de la irracionalidad de los numeros de las tablas de los ſenos, pues el error no es de tercios, ó algunos ſegundos, en el qual caſo pudiera mantener ſu opinion; pero queda patente ſer de 7. min. 22. ſegundos, y 30. tercios. Quando baſtantemente quedaria demoſtrada por falſa la operacion, aunq̃ la diferencia fuera no ſolo de vn minuto, pero tambien de pocos ſegundos; pues ſiendo computados los numeros de los ſenos por grados, y minutos la diferencia que puede dar la irracionalidad de los numeros, es à lo mas de algunos ſegundos, no aviendo en las operaciones Mathematicas, y particularmente para los angulos examen mas riguroſo, y exacto, que el de las doctrinas trigonometricas.

De ſuerte, que que ſe concluido, que la formacion del heptagono del P. Muñoz, es vna mera, y ſimple aproximaciõ, pues en el rigor de la verdad, la baſa del triangulo Iſoſceles proprio del heptagono, es Incomenſurable, y la proporcion de eſta con cada vno de los dos lados iguales, no ſe puede comparar con numeros abſolutos, ſino es con los numeros figurados de ℞, y conſiguientemente aviendoſe de obrar geometricamẽte, para hallar los lados con el rigor que ſe pide, es preciſo valerſe de las operaciones de las medias, y mediales, y no de la ſupoſicion de numeros abſolutos, como demoſtrarèmos mas abaxo.

DEDVCCION QVE HAZE EL COPPOLA A ESTE Problema. Cap. 12.

SI bien no ſe niega, que qualquier triangulo Iſoſceles, ſiendo cada vno de los dos angulos en la baſa triple del angulo vertical, eſte es triangulo proprio del heptagono, tampoco ninguno me puede negar, que el angulo al centro del heptagono no ſea con el de la circunferencia ſub duplo ſeſquialtero, quiero dezir como 2. à 5. de ſuerte, que de eſto reſulta, que qualquier triangulo Iſoſceles, como AKC (lamin. C, fig. 3.) teniendo cada vno de los dos angulos en la baſa con el angulo vertical, proporcion ſeſquiquarta, que viene à ſer como 5. à 4. eſte triangulo Iſoſceles es el mas proprio del heptagono.

En demonſtracion de lo qual ſea la circũferencia de vn circulo $\frac{7.}{(7.)}$ (en lugar de todo el entero de 360. grados) ſerà el angulo al centro AKC de vn heptagono (ò ſea el angulo vertical del triãgulo AKC, que es el mas proprio del heptagono) vno ſeptimo, el qual reſtado de $\frac{7.}{(14.)}$ mitad de los ſiete ſeptimos (en lugar de 180. grados) el reſiduo que es de $\frac{5.}{(14.)}$ ſerà el valor del angulo à la circunferencia, ò ſea la ſuma de los dos angulos KAC, ACK; y aſsi ſien-

siendo el valor del angulo al centro vno septimo,q̄ quiere dezir $\frac{2.}{14.}$ y el valor del angulo à la circunferencia $\frac{5.}{14.}$ serà la proporcion del angulo al centro con el de la circunferencia sub dupla sesquialtera, que viene à ser como 2. à 5. y por lo consiguiente, siendo el valor de cada vno de los dos angulos en la basa de $\frac{5.}{28.}$ y el angulo vertical de $\frac{4.}{28.}$ serà pues la proporcion de cada vno de los dos referidos angulos en la basa con el angulo vertical sesquiquarta, que quiere dezir como 5. à 4. que era lo que se avia de demonstrar.

Y cō este metodo se hallaràn las proporciones de los referidos angulos en todos los triágulos Isosceles de qualquier poligono regular.

CON el fundamento de estos dos triangulos Isosceles, que son proprio del heptagono regular, no obstante lo que tengo demostrado contra la referida operacion del P. Muñoz, quiero aora con demostracion geometrica probar, que el triangulo Isosceles de dicho P. Muñoz, es fiel, y verdaderamente proprio del heptagono, que era lo que debía demonstrar dicho Padre antes de hablar contra el P. Zaragoza, y dar por inutiles los numeros de las tablas de los senos: no porque con esto quiera yo conceder, que la construcion dada por el dicho P. Muñoz del triangulo Isosceles proprio del heptagono, tuviesse rigurosamente cada vno de los dos lados AB, BC la proporcion dupla sesquiquarta con su basa AC; pero para que se vea con demostracion evidente, quan grande es la fuerça de los numeros de las tablas de los senos; pues estos son los que vnicamente descubren los valores de los angulos, lo que no se consigue con la sola geometria. Y con esto tambien se demuestra la verdad de lo que dixe sobre esto en la pag. 57. § 1. hablando del numero, cuya virtud intrinseca es inexplicable: pues quien nos demuestra los valores de las lineas inconmensurables, las superficies irracionales, &c. sino el numero figurado, en donde tiene sentado su solio la Analytica? Y para que conozcan mis adversarios con quanta inadvertencia han obrado, y de oy en adelante se enmienden (si gustan) me obligo si alguno quisiere impugnar la primera demonstracion, que tengo hecha contra la referida operacion del P. Muñoz, ò gustan de impugnar la siguiente, que harè en favor de la misma, à darle entera satisfacion; y si mis pocas conveniencias no me permitieren hazerlo en la forma que aora, por ser grandes los gastos de la Imprenta, y laminas, lo harè con manuscriptos, para que con estos certamenes literarios se consiga con mas claridad el descubrimiento de la verdad de estas operaciones, y con esto establecer no solo la verdadera construccion de la formacion del hepta-

go-

gono, sobre qualquiera dada linea determinada; pero tambien dividir el circulo en 7. partes iguales, que es lo que se desea saber, pues para esto es inutil la referida operacion de dicho P. Muñoz, aun por aproximacion.

DEMONSTRACION QUE SE HAZE A FAVOR DEL TRIANGULO Isosceles del P. Muñoz, en que se prueba que es proprio del heptagono. Cap. 13.

1 AL rededor del triangulo Isosceles ABC (lamin. D, fig. 2.) proprio del heptagono del P. Muñoz (por la 5. del 4.) describase vn circulo cuyo centro sea K, tirense de este centro K à los dos extremos de la basa AC, las rectas KA, KC; digo, que el triangulo AKC es Isosceles, pues los lados KA, KC, salen de vn mismo centro, y concurren en la circunferencia en los puntos A, y C, que por la 15. defin. del 1. seràn iguales, y por la 24. defin. del mismo, el triangulo AKC serà Isosceles, que es el mas proprio del heptagono (como lo demostrarè) si los dos triangulos Isosceles ABC, AKC fueren proprios del heptagono la basa AC, medirà siete vezes el circulo, descripto al rededor del triangulo ABC, y tambien los angulos sobre la basa del triangulo ABC, cada vno de ellos serà triplo del angulo vertical ABC, y semejantemente los angulos sobre la basa del triangulo AKC, cada vno de ellos tendrà proporcion sesquiquarta con el angulo vertical AKC.

2 Continuese el lado AK en M; y el lado CK en L (de suerte, que toquen el circulo en los puntos L, y M) y tirese la cuerda LM, digo que el triangulo LKM, por lo que queda demostrado, serà Isosceles; y porque el angulo AKC por la 15. del 1. es igual al angulo LKM, y los dos lados AK, KC del triangulo AKC son iguales à los dos lados KL, KM del triangulo LKM; porque todos salen de vn mismo centro, y concurren en la misma circunferencia por estas razones el lado LM, serà igual al lado AC, y el triangulo LKM en todas maneras, por la 4. del 1. serà igual al triangulo AKC.

3 Aora cortese el arco LP igual al arco LM, serà la cuerda PL igual à la cuerda LM, y por lo que arriba queda demostrado, serà semejantemẽte la cuerda LP igual à la cuerda AC, basa del triangulo Isosceles ABC.

4 Dividanse por la 30. del 3. el arco, y cuerda LP en dos partes iguales en el punto G, y en el punto I, y continuese la recta GI; de suerte, que toque la circunferencia en el punto D, serà ID por la proposicion citada, perpendicular sobre la cuerda LP, y por el corollario de la prop. 1. del 3. la recta perpendicular DIG passarà por el centro K. Tirense de este centro K à los dos puntos L, y P las dos rectas KL, y KP, y semejantemente del punto D à los dichos puntos L, y P, tirense las dos rectas DL, DP, digo que los dos triangulos PDL, PKL por la 24. defin. del 1. seràn Isosceles;

les;

les; continuense los dos lados LK, PK àzia la circunferencia en los puntos C, y T, y tirandose la cuerda CT, se formarà el triangulo CKT, el qual, por lo que queda demostrado, serà Isosceles, y tambien serà igual al triangulo LKP; y assi la cuerda CT, siendo igual à la cuerda LP, la qual ha sido demostrada igual à la cuerda AC basa del triangulo Isosceles ABC, semejantemente serà la cuerda CT igual à la cuerda AC, basa del triangulo Isosceles ABC, y el triangulo CKT, por lo que ha sido demostrado, serà igual al triangulo AKC.

5 Cortese nuevamente el arco PV igual al arco LP, serà la cuerda PV igual por construccion à la cuerda LP, y porque arriba queda demostrado en el n. 3. que la cuerda LP es igual à la cuerda AC, serà tambien la cuerda PV igual à la cuerda AC, basa del triangulo ABC.

6 Dividanse el arco, y cuerda PV en dos partes iguales en punto F, como arriba queda dicho, y obrandose en todo, como se ha demostrado en el n. 4. se hallarà, que la cuerda TH serà igual à la cuerda AC, basa del triangulo Isosceles ABC, y semejantemente el triangulo TKH, serà igual al triangulo AKC.

7 Finalmente cortese el arco VE igual al arco PV, y obrando, segun se ha demostrado en el num. 3. y 4. se hallarà que la cuerda HB serà tambien igual à la cuerda AC, basa del triangulo Isosceles ABC, y el triangulo BKH serà igual al triangulo AKC.

Y continuando con este orden, se demostrarà, que las remanentes tres cuerdas del heptagono, en virtud de lo que hasta aqui se tiene demostrado, son iguales à la cuerda AC, basa del triangulo Isosceles ABC.

Aora con estas quiero con especialidad demostrar, que el triangulo Isosceles ABC, cada vn angulo en la basa, es triplo del angulo vertical, y semejantemente del triangulo AKC, cada vno de los dos angulos en la basa, tendrà con el angulo vertical proporcion sesquiquarta, quiero dezir, como 5. à 4. y assi estos dos triangulos Isosceles seràn proprios del Heptagono.

Para cuya demonstracion considerense los triangulos Isosceles ABC, AKC, de los quales el angulo AKC, siendo al centro, y el angulo ABC, siendo à la circunferencia, serà el angulo AKC (por la prop. 20. del 1.) doble del angulo ABC.

Aora considerense los dos triangulos ABC, ABH, porque la cuerda del arco BH, basa del triangulo Isosceles ABH, ha sido demostrada igual à la cuerda del arco AC, basa del triangulo Isosceles ABC, serà el angulo BAH (por la 27. del 3.) igual al angulo ABC, y consiguientemente el angulo AKC serà doble del angulo BAH.

Semejantemente considerense los triangulos TKH, TAH, de los quales siendo la cuerda del arco TH basa comun, serà (por la referida 20. del 3.)

del 3.) el angulo TKH al centro doble del angulo TAH à la circunferencia; y por lo que queda demostrado, el triangulo TKH es igual al triangulo AKC, serà pues el angulo TAH, igual al angulo BAH.

Finalmente consideren se los dos triangulos CKT, CAT, de los quales siendo la cuerda del arco CT basa comun, serà por lo arriba referido el angulo CKT al centro doble del angulo CAT à la circunferencia, y por lo que se tiene demostrado, siendo el triangulo CKT igual al triangulo AKC, serà pues el angulo CAT igual al angulo TAH, y tãbien igual al angulo HAB; y porque el angulo HAB, ha sido demostrado igual al angulo vertical ABC del triangulo ABC, serà pues el angulo CAB en la basa triplo del angulo ABC vertical; y asi tenemos demostrado, que el triangulo Isosceles ABC, cada vno de los dos angulos en la basa, es triplo del angulo vertical, y con esto viene demostrado, que el triangulo Isosceles ABC del P. Muñoz, es proprio del Hepragono.

Aora para demostrar, que el triangulo Isosceles AKC, es proprio del Heptagono, es menester probar, que cada vno de los dos angulos en la basa tenga con el angulo vertical proporcion sesquiquarta, que es como 5. à 4. Para cuya demonstracion dividase (por la 20. del 3.) el arco, y cuerda AC en dos partes iguales por la recta EB, esta (por el corolario del 1. del 3.) passarà por el centro K, y tambien dividirà el angulo ABC en dos partes iguales. Considerese el triangulo AKB, del qual los lados KA, KB salen de vn mismo centro K, y concurren en la circunferencia en los puntos A, y B, que por la 15. definic. del 1. son entre si iguales, y por la 24. defin. del mismo el triangulo AKB, serà Isosceles, y por la prop. 5. del 1. el angulo KAB serà igual al angulo KBA, y porque este angulo KBA por construccion es mitad del angulo ABC (como se tiene demonstrado) serà pues el angulo KAB igual à la mitad del angulo ABC, y porque semejantemente ha sido demostrado, que el angulo BAH, es igual al angulo ABC, serà pues el angulo KAH igual à la mitad del angulo ABC; finalmente aviendo sido demostrado, que el angulo AKC, es doble del angulo HAT, y tambien del angulo TAC, serà pues todo el angulo CAH igual al angulo AKC, y por lo que se tiene dicho, y demostrado, que el angulo AKC es doble del angulo ABC; y el angulo KAH igual à la mitad del angulo ABC, serà pues el angulo KAH vna quarta parte del angulo AKC, con lo qual se concluye, que del triangulo Isosceles AKC, cada vno de los dos angulos en la basa, serà vna medida, y vn quarto del angulo vertical AKC, y asi de dicho triangulo AKC, cada vno de los dos angulos en la basa, tiene con el angulo vertical proporcion sesquiquarta, que es como 5. à 4. que es lo que debe tener el triangulo Isosceles, que es el mas proprio del Heptagono, y que se debia demonstrar.

No debo dexar de dezir, que la referida operacion del P. Muñoz, no es del caso (aun con aproximaciones) para dividir el circulo en 7. partes iguales, que es lo que siempre se ha deseado saber; y porque como tengo dicho, y demostrado, que el P. Muñoz tiene hallada esta operacion aproximada acaso, y sin real fundamento, pues la solucion de dividir el circulo en 7. partes iguales, y formar sobre qualquiera recta terminada vn Heptagono, son operaciones vna inversa de la otra, y para que no solo se reconozca esta verdad, pero tambien à contemplacion del *EMINENTISSIMO SEñOR CARDENAL PANFILIO*, à quien consagro este fruto de mi estudio, quiero dar para el publico beneficio de los aficionados de esta noble sciencia la verdadera solucion del Heptagono.

RESOCVCION DEL AVTHOR, DE DAR, Y DEMOSTRAR PARA *el publico beneficio la verdadera solucion Geometrica de dividir el circulo en 7. partes iguales, y sobre qualquiera recta terminada formar el HEPTAGONO. Cap. 14.*

AViendo yo reparado, que todo lo que he sacado à luz, y dado al publico hasta aora en lugar de mover à la consideracion, que se le debia, y de responder à ello, los que se precian de inteligentes en esta facultad, conforme ella requiere, para darme con esto motivo de adelantar mas el conocimiento de estas singulares operaciones, ha sido de tal suerte calumniado, que me daba bastante ocasion de desalentarme, y quitarme el despreciar joyas de inestimable valor, dandolas à quiẽ no las aprecia, como debe, porque no las conoce, como supone. Pero prefiriendo la atencion q̃ debo à personage tan sublime, como es el *EMINENT. SEñOR CARDENAL PANFILIO*, no solo por su sangre esclarecida, pero tãbien por las singulares prendas, que le añaden nuevo explendor, y le han adquirido el aplauso vniversal de todo el Mundo. Y tãbien anteponiendo en mi consideracion el vtil publico à mi sentimiento, y interès particular, he resuelto dar aqui la verdadera solucion del *HEPTAGONO*, que si bien no dudo tendrà en la opinion de mis emulos la misma suerte, que las obras antecedentes, que he publicado, no obstante atendiendo solo à beneficiar con mi corto estudio à los curiosos, quiero llenar con esto el numero de los quatro Problemas antes de hasta aora no resueltos, que aunque piden tratados muy dilatados, para descubrir los demàs de los arcanos ocultos en esta materia, sin embargo quedando esto por aora demostrado, y su certidumbre establecida, me reservo à declarar lo demàs de este inmenso tesoro Mathematico, quando halle Professores, q̃ mas anhelen à acreditar la sciencia, que à desacreditarla quien la professa, y se inclinen mas à amparar la verdad de qualquier parte, y en qualquier trage que venga, que à despreciarla por no ser conocida; y dexando lo lo demàs, que pudiera dezir, paſſò à la ſolucion, y demoſtracion de lo referido.

Construccion. Para dividir el circulo en 7. partes iguales, ſe hallarà por la 13. del 6. entre el ſemidiametro de aquel circulo, y las tres quartas partes del miſmo vna media proporcional, y eſta ſerà la medida del lado del *HEPTAGONO*, que dividirà aquel circulo en ſiete partes iguales.

Sea dado el circulo AEBN (lamina D, fig. 1.) el qual ſe quiera dividir en ſiete partes iguales.

Dividaſe vno de los ſemidiametros en quatro partes iguales, y ſea la GX tres quartas partes del ſemidiametro GB, y con eſtas hallando entre el ſemidiametro AG, y GX la media proporcional GD, eſta ſerà el lado del *HEPTAGONO*, y dividirà el circulo en 7. partes iguales.

Aora para formar vn *HEPTAGONO* ſobre qualquiera dada recta terminada, ſe hallarà por la referida prop. 13. del 6. entre la dada recta terminada, y los quatro tercios de la miſma vna media proporcional, eſta ſerà la medida del ſemidiametro de aquel circulo, en el qual ſobre la dada recta ſe eſcrivirà el *HEPTAGONO* deſeado.

Y porque eſta operacion es inverſa de la primera, ſe darà por el lado del *HEPTAGONO* el miſmo que ſe hallò en el circulo dado, pues debe reſtituir el miſmo ſemidiametro de aquel circulo; y aſsi ſea dada qualquier recta terminada FG (en la miſma figura) ſobre la qual ſe aya de formar el *HEPTAGONO*.

Se alargue la recta dada FG àzia el punto P; de tal ſuerte, que la GP ſea tāto, como la FG, y vn tercio màs que la miſma FG, que quiere dezir, que la GP ſea quatro tercios de la dada FG, la media proporcional entre la FG, y GP, ſerà la GN, y eſta ſerà medida igual al ſemidiametro de aquel circulo, dentro del qual ſe inſcrivirà ſobre la dada recta FG el *HEPTAGONO*, que ſe deſea.

Se demueſtra la verdad de eſta deſeada ſolucion, con reſolver vno, y otro Problema con aquel Algorithmo, de que ſe neceſsita, en la miſma forma que demoſtrè en la ſolucion de los dos Problemas, para hallar la comenſuratriz del quadrante. Pero antes de paſſar à executarlo, me parece ſerà àpropoſito dar eſte prudente, y Chriſtiano conſejo à cierto ſugeto, que pretende tener lugar entre los Profeſſores de eſta ſciēcia, no le ſuceda hablar de eſte Algoritmo, como le ſucediò hablando en la trigonometria, y en los dos Problemas, cō aquel curioſo Apendiz que hizo, para embarazar aquella incontrovertible ſolucion de los dos referidos mis Problemas, conforme ſus miſmos eſcritos, publicados en el mes de Octubre de 1691. lo manifieſtan; cō los quales ſolicitando acreditarſe de hombre inſigne, en el concepto del vulgo, ſe ha deſacreditado en la opinion de los inteligentes en la facultad, y dado à conocer no menos la poca habilidad, que ſu mucha (pero injuſta) emulacion, ſin advertir le huviera eſtado mejor el ſilencio, pues con èl, ſin duda no huviera deſvanecido el concepto en que le tenian; y finalmente ſino puede contenerſe, no puedo yo dexar ☞ de dezirle, que antes de hablar examine lo que dize, aſsi en particular, como en publico, pues redundarà en perjuyzio, y deſcredito ſuyo, y no mio, quanto dixere, y eſcriviere, ſino lo conſulta mejor con la razon, y la ſciencia, como haſta aora lo ha experimentado, y lo experimentarà mucho mas, ſino ſigue el conſejo que le doy; y aſsi conſidere con atencion, y cuydado lo que es ſumar de ℞, pues en eſte Algorithmo es preciſo reconocer antes de todo, ſi el binomio de las dos ℞, que ſe deben ſumar (como mas abaxo ſe avrà de obrar para hallar aquella media proporcional, que ha de ſervir por ſemidiametro del circulo) ſon entre ſi comenſurables, ò no; y ſi acaſo no acertare à conocerlo (que es coſa factible) lo podrà inquirir en la prop. 19. y 20. del libro 10. de Euclides, y la forma, y modo de ſumar las ℞ de eſte genero, la hallarà en la prop. 4. del lib. 2. del miſmo; pues eſte, y el 10. de los Elementos, ſon la llave del teſoro Mathematico, como repetidas vezes lo tengo dicho.

Sea el ſemidiametro de vn circulo AG (lamin. D, fig. 1.) coſas 7. (aunque en la figura demonſtrativa la ſuponga vna vnidad, pues ſe puede ſuponer lo que ſe quiere) ſerà la GX coſas 5. y vn quarto (pues la GX debe ſer las tres quartas partes del ſemidiametro AG) la media proporcional entre la AG, y GX, ſerà GD ℞ 36. y tres quartos, que es el lado del *HEPTAGONO* que ſe buſca.

Aora para reconocer ſi en la realidad el lado del *HEPTAGONO* es ℞ 36. y tres quartos (ſiendo el ſemidiametro 7. coſas) ſe debe hazer la operacion inverſa, para que con eſta ſe demueſtre, que el ſemidiametro del circulo buelve otra vez ſer coſas 7. como fue ſupueſto; y por eſto aora ſe darà el lado del Heptagono para hallar el ſemidiametro, que debe deſcrivir aquel circulo, en el qual ſobre el lado dado ſe debe deſcrivir el Heptagono.

Sea pues dado por el lado del *HEPTAGONO* la miſma media proporcional hallada, y ſea la FG ℞ 36. y tres quartos, y ſegun la referida conſtruccion ſerà la GP ℞ 36. $\frac{3.}{}$ ✠ ℞ 4. $\frac{1.}{}$ la media proporcional (que es la medial entre la (4.) FG, y (12.) GP) ſerà la GN ℞. qq. 2401. cuyo lado correſponde à coſas 7. que es el ſemidiametro que ſe buſca, que como ſe vee ha buelto à ſer coſas 7. como antes fue ſupueſto, que es lo que ſe deſeava conſtruir, y demoſtrar.

CO-

COROLLARIO.

DE lo qual resulta, que el triangulo Isosceles del Heptagono, es el mas proprio aquel que tiene su angulo vertical al centro, y no à la circunferencia, cuyos dos lados iguales son semidiametros de aquel circulo que lo circunscrive, y la proporcion fiel que tiene cada vno de estos dos lados con la basa (la qual es el lado del *HEPTAGONO*) es co-

1. 3.

mo ℞ — à ℞ — de lo qual se infiere lo que poco antes tengo referido (1.) del (4.) triangulo Isosceles proprio del *HEPTAGONO*, que la comparacion de la proporcion, que cada vno de los dos lados iguales con la basa, es como ℞ à ℞, y no como numero absoluto, cō numero absoluto. Y aunque pudiera demonstrar mucho mas en estas operaciones, y descubrir los fundamentos mas ocultos de esta preciosa mina, sin embargo por lo que tengo dicho anteriormente, me importa reservarlos para otro tiempo, y si examinaren, y reconocieren mis operaciones con vn animo libre de pasiones, advertiràn, que sin particular favor de Dios no pudiera aver hecho el descubrimiento de tan inmenso tesoro; y si por medio de la Divina Providencia, no me faltaren medios por los muchos gastos de la Imprenta, y laminas, darè lo demàs, que no dudo serà de mucho vtil, y agrado à todos los curiosos, contentandome por aora con estas proposiciones, que con toda verdad se pueden dezir ser adicion al 4. lib. de Euclides.

ADVERTENCIA QVE SE HAZE AL VIVIANI, VLTIMO DISCIPVLO del Galileo Academico Florentino, Professor de Mathematica.

AViendo el Viviani, desde 4. de Abril de 1692. dado à luz vn escrito, debaxo del nombre de D. Pio Lisci Pusillo Geometra, cuyo titulo era: *Ænigma Geometricum de miro opificio testudinis Quadrabilis Hemisferice, &c.* y à los 29. del mismo mes, dado al publico vn tratado, intitulado: FORMATIONE E MISVRA DI TVTTI I CIELI CON LA STRVTTVRA, E QVADRATVRA ESATTA DE L'INTIERO, E DELLE PARTI D'VN NVOVO CIELO AMMIRABILE, ED VNO DE GL'ANTICHI DELLE VOLTE REGOLARI DE GL'ARCHITETTI. En el qual tratado, no solo publicò ser èl el Author de aquella obra, no menos curiosa, que famosa, arriba referida de Enigma, pero tambien pretendiò averla resuelto, con dar solo la construccion de ella.

Llegò à mis manos el tratado referido en el mes de Septiẽbre del mismo año, y movido no menos de la curiosidad, que de la obligacion que tiene qualquier Professor en semejantes ocasiones de Problemas tan cèlebres de aplicarse con quanta atẽçion es posible al co-

no-

nocimiento de la verdad,para despues hazer de ellos el desapassionado juyzio que se debe; pues de esta conformidad se establecen en beneficio del publico las soluciones de las mas dificultosas operaciones, exercitandose los entendimientos,y habilitandose para el conocimiẽto de los arcanos mas reconditos. Leì con sumo cuydado el referido tratado,juzgando sacaria de èl el fruto,y vtil,que avia esperado de semejante operacion;quando no sin admirarme,reconoci que no solamente no estava demostrada, pero aun falsissima; y para que tan curiosa operacion no quedasse irresuelta, me determinè primeramente à demonstrar,que la dicha operacion no estava demostrada, en segũdo lugar el error evidente de ella, y en tercero dando algun mes de tiempo al Author para responderme,y no haziendolo,me obligava à resolver el Problema; porque qualquier Professor, quando censura alguna operacion, no le basta el dezir que no està demostrada, ò que es falsa, pues en esta forma qualquier idiota es capaz de dezir lo mismo; y assi la obligacion del Professor,es de demonstrar lo que quiere censurar. Y aviendose embiado esta respuesta mia à Florencia, desde el dia 11. de Septiembre del año passado,y no aviendo yo tenido aviso alguno hasta aora,ni dadose èl por entendido,pareceme que ya pudiera escrivir cõ toda libertad,y demostrar el referido Problema. Sin embargo para continuar à obrar con la atencion propria de mi obligacion,hame parecido primeramẽte dar à entender el motivo de mis quexas, y dar al Author algun tiempo mas, para poder despues con mas justificada razõ dar à luz; no solamente las demostraciones referidas que tengo hechas contra la operacion de dicho Viviani,pero tãbien la resolucion del mismo Problema, para que (como es legitimo parto del 10. de los Elementos) siempre se reconozca con mas evidencia la virtual fuerça de las bimediales, y bimedias, las quales ninguno hasta aora ha examinado con este fin.

CONCLVSION, Y RECTO A PVBLICO CERTAMEN.

QVedando ya con el favor de Dios establecidas las geometricas soluciones de dividir el circulo en 7. partes iguales, y de formar el HEPTAGONO sobre qualquiera recta terminada, como tambien la TRISECCION DEL ANGVLO, y semejantemente declarados los artificios, de los quales me he valido para dar cebo à mis adversarios, Siendo ya justo que se reconozca la verdad real de estas operaciones, repito nuevamente mis suplicas à todos los doctos Professores, y hombres inteligentes en la facultad, para que no desdeñando lo tosco de mis expressiones, se sirvan por el publico beneficio de aplicar toda su atencion,y desvelo à examinar rigurosamente estas operaciones, y si hallaren en ellas algun error, por tenue, y leve que sea, me hagan el favor de demostrarlo en la forma que pide la facultad (pues estas son materias demostrativas, y no disputables) y

en

en el mismo tiempo condenar mi demasiado atrevimiento, y en caso de hallar en mis operaciones algun reparo, ò duda, passen à demostrarmela en la forma legitima, como se debe, que les darè entera satisfacion.

Semejantemente aviendo escrito anteriormente (como repetidas vezes lo tengo advertido) para entretenerme con los referidos señores mis adversarios, viẽdoles en aquella confusion, en que cada vno puede reconocer que se han hallado; pues no aviendo podido demostrar theoricamente el primer error que les descubriò el compàs, no sabiendo que responder, discurrieron en mudar el sentido de lo que escrivia, y en negar lo mismo que avian dicho, como podrà ver el curioso en sus escritos, y en los mios, como si huvieran pretendido desacreditarse, pero con todos hanse valido de mi primera operacion, enseñando à todos con el compàs mi artificioso error, sin passar à las operaciones de las comensuratrices para la solucion de la TRISECCION DEL ANGVLO, porque si bien en aquellas de los arcos menores del quadrante, avia avido el mismo artificio, como lo tengo dicho, y demostrado: sin embargo no pudiendo con el compàs, no solo dar à entẽder el error, como en la primera operacion, pero que el mismo compàs les huviera podido persuadir à que era la operacion verdadera; por esta razon han dado à entender à los inexpertos, y simples, que lo demàs de mis Problemas no son proposiciones practicables, si enigmas, que no se pueden resolver, ni entender; y con esso se han apartado de este metodo de las comensuratrices, y se han atenido al primero. Y porque mi vnico fin ha sido siempre, que se reconozca la verdad inalterable de estas grandes operaciones, como tambien la malignidad, la qual ha pretendido, y pretende desacreditarlas con su desenfrenada passion, y ofuscar sus luzes con las tinieblas de su ignorancia, hago la declaracion siguiente.

ME ofrezco à satisfacer personalmente en publico certamen, y controversia, no solo à todos aquellos Professores, que han escrito cõtra mi referida solucion de la TRISECCION DEL ANGVLO, y quieran mantener, y sustentar las vanas, è invalidas demostraciones, que tienen publicadas; pero tãbien à qualquiera otra persona, que en qualquier modo que sea aya hecho, ò haga nuevos reparos contra la referida *TRISECCION DEL ANGVLO, Y FORMACION DEL HEPTAGONO.*

Y para que se eviten todas las ocasiones, que suelen buscarse para confundir la verdad, como es el negar lo que se propone, ò responde; por esto todo lo que se propusiere, ò respondiere fuera de lo que se ha escrito sobre estos resueltos Problemas de la TRISECCION DEL ANGVLO, Y FORMACION DEL HEPTAGONO, se avrà de escrivir, y firy firmar de vna parte, y otra, para que sin obstaculo alguno se consiga el conocimiento de vna verdad tan deseada en materia de tanto relieve.

Y para el cumplimiento del publico certamen referido, se fixaràn en los lugares mas publicos de esta Real Corte carteles, en que se señalaràn los dias, y horas de la semana, y el lugar que se eligiere para dicho certamen.

Tambien ofrezco à todos los curiosos, que desearen enterarse de estas veridicas referidas soluciones darles con demostraciones especulativas, y practicas (segun la capacidad del sugeto) toda la satisfaciõ que pide la gravedad de la materia; y para esto no señalo, ni dia, ni hora precisamente, pues à qualquiera, y en qualquier tiempo, que el estudioso sea servido de buscarme, me hallarà prompto à darle todo el gusto, que alcançare mi corta capacidad, à la qual supliré con el mucho anhelo de ser de vtil à todos.

☞ Y finalmente despues de quedar reconocida la verdad de la solucion de estas dos cèlebres operaciones, tambien se estableceràn con infalibilidad las soluciones geometricas de las *DOS MEDIAS EN CONTINVA PROPORCION, Y QVADRATVRA DEL CIRCVLO*, con todas aquellas evidentes, è incontrovertibles demostraciones, que fueran precisas, y se pudiessen desear.

PRVEBA INCONTRASTABLE DEL PROFVNDO CONOCIMIENTO, Y singular habilidad en las Mathematicas del Maestre de Campo Don Sebastian Fernandez de Medrano.

YA tenia dado à la Imprenta el presente tratado, quando casual llegò à mis manos vn libro, cuyo titulo es: *Rudimentos geometricos, y Militares, que propone al estudio, y aplicacion de los Professores de la Milicia el Alferez DON SEBASTIAN FERNANDEZ DE MEDRANO, Maestro de Mathematica por su Mageftad en estos estudios de Flandes (el qual libro està impresso en Bruselas en casa de la viuda Vlegart) en el año de* 1677. Me moviò la curiosidad que passasse los ojos por esta obra, por ser de mi emulo, y ver, si hallaria en ella cosas, que correspondiessen mas al gran concepto que tienen hecho de èl en esta Corte, que las que avia visto en otros tratados suyos, que con tanto credito, y abono de su talento ha sacado à luz con-

contra mis Problemas, y en breve tiempo tropecè con vnas definiciones, que dà este cèlebre Author, q̃ por ser tan erroneas, me empeñaron en passar adelante, para ver si se enmendaria; pero quanto mas discurri las hojas de su obra, tanto mas hallè su discurso intrincado en vn laberinto de errores tan negados, à quien se precia de Professar las Mathematicas, que en medio de estar convencido, con lo que tiene publicado contra mi, del poco conocimiento que tiene de esta facultad, nunca me huviera persuadido, à que llegasse à tal extremo, que le faltassen los rudimentos, y principios de ella; y porque no permite la precision de concluir esta obra mia, el examen individual de los falsos documentos, que propone à los estudiosos de esta noble sciencia, me reservo para otro tiẽpo à demõstrarlo en vn tratado particular, para vniversal desengaño, porque si bien me han assegurado, que ha condenado èl mismo algunos de sus escritos: mucho tiene que andar todavia en esta materia, si quiere, y puede hazerse justicia, y juzgo no serà escusado mi trabajo. Y entre tanto quiero tocar, aunque levemente, y de passo algunas de sus definiciones, y operaciones.

En la pag. 2. §. 3. *dize el angulo se forma del concurso de dos lineas en vn mismo punto.* De donde qualquiera puede inferir, quan erroneo sea este modo de definir, y de quanto perjuyzio à los principiantes, trocar la luz à las tinieblas, porque siempre que se les propusiesse vn punto, y que en este por via recta se hiziesse concurrir dos lineas rectas, se formaria vna linea recta, y no vn angulo, de donde no se les seguiria poco embaraço, y assi para dar vna acertada, è infalible inteligencia de esta definicion, avia de averla explicado en la forma siguiente. *El angulo es el contacto de dos lineas inclinadas vna en otra, puestas en vn mismo plano; de modo, que no sean en vna misma derechura.*

Passa despues el señor *MAESTRE DE CAMPO MEDRANO*, à dar otras definiciones en nada inferiores à la antecedente, pero porque necessitan de figura demonstrativa, las reservo para el tratado que dixe mas arriba.

Semejantemente passa à dar el vso del compàs, y propone algunos Problemas para formar algunas figuras geometricas, y estas las incluye en las definiciones, pues en el titulo de cada pag. pone; *Tratado de las definiciones*, entre las quales en la pag 11. està el Probl. 13 en que propone *de tres lineas dadas descrivir vn triangulo Escaleno.* Considere qualquiera si este es modo de proponer, y si vn principiante puede sacar algun vtil de semejante doctrina, pues si se le propusiessen tres lineas rectas iguales, ò de las tres, dos fuessen iguales, y vna desigual, ò tres lineas rectas, dos de las quales juntas por linea recta, la compuesta de estas dos, fuesse menor, ò igual à la tercera, como se hallaria embaraçado el pobre principiante en formar este triangulo Escaleno, y nada sirve dezir para disculparse, que se ha de entender, q̃ dichas tres lineas han de ser desiguales, como se ven en aquella figura; pues fuera de que los principios que se dàn à los que empieçan, han de ser claros, è inteligibles, hazer lo contrario, es dar à entender, que los ignora, el mismo que los propone para la enseñança, y lo que se debia proponer era: *Dadas tres lineas rectas desiguales, dos de las quales tomadas (como quiera) sean mayor que la tercera, formar con ellas vn triangulo Escaleno.*

Passando despues à la Planimetria, Altimetria, y Stereometria (que es el medir los cuerpos solidos) escrive notables cosas, y que divertiràn al curioso, como à su tiempo lo demostrarè; y de aqui passa al libro quinto, y le intitula: *Geometria especulativa*, y en èl explica algunas proposiciones de Euclides; y para que cada vno vea en la forma que este celebre Author las demuestra especulativamente, pondrè aqui (por ser la mas breve) la 4. de dicho lib. 5 pag. 86. donde dize.

Siendo conocida la diagonal de vn quadrado, como se sabrà el lado del quadrado?

Sea el quadrado ABCD, y tenga la diagonal AD 10. pies, para saber quanto serà el lado del quadrado, se quedarà la dicha diagonal, y de su quadrado, que es 100. se tomarà la mitad, que es 50. de esto, sacada la raiz quadrada, que es 7. y vn dezimoquarto, darà cada lado del quadrado.

Este es el metodo, que especulativamente demuestra este insigne Author; y no se hallarà en dicho lib. 5. que intitula: *Geometrica especulativa*, proposicion que passe à la construccion, y esta es la que en su gran capacidad tiene comprehendida, como demonstracion especulativa.

En el mismo lib. pag. 87. dize: *De dos lineas dadas descubrir la tercera proporcional*, y la construye, segun el metodo comun. Entra despues en la prop. 6. que es muy digna de reparo, y dize: *Dadas tres medias proporcionales, descubrir la quarta*, la qual por la construccion, se puede presumir, que ha querido dezir: *Dadas tres rectas lineas, hallar la quarta proporcional*: sin duda, que como ignora lo que es media proporcional, le pareciò que era cosa grande proponer el Problema, en la forma referida; pero mas curiosa es la proposicion 7. donde dize: *De tres medias proporcionales, dada la media proporcional, y la suma de las otras dos, saber la cantidad de cada vna.* Esta es menos tolerable, que la antecedente, no digo en hombre, que se precia de enseñar, pero aun en vn principiante; pues segun su construccion, se trata de seccion de linea, que es la misma del *Peletario*, que trae el P. Clavio en su Euclides, lib. 6. prop. 13. que quiere dezir: *Dadas dos rectas lineas desiguales, vna de las quales no sea mayor que la mitad de la otra, dividir la mayor de las dos rectas dadas, de suerte, que la menor dada sea media proporcional entre las partes de la mayor dada.*

Passa despues este celebrado Author à la prop. 8. de su mismo lib. 5. don-

donde dize: *De tres medias proporcioneles,dada la media proporcional,y la diferencia de las otras dos,hallar sus cantidades.* En conciencia,esta es insufrible,pues la misma explicacion manifiesta su enormidad, supuesto,que segun su construccion,se vè clara,y evidentemente,que ha sido sacada *de la prop.36. del lib. 3.de Euclides*, en que se demuestra, *que si se dà qualquier punto tomado fuera del circulo,y se tiran dos lineas rectas,vna que corte el circulo, y la otra que le toque; el rectangulo contenido de la secante, y de la parte externa entre el punto,y la convexa periferia,es igual al quadrado de la tangente.* Sobre lo qual algun Author avrà querido proponer: *Que dado vn quadrado, formar vn quadrilungo,igual al dado quadrado, segun vna diferencia dada,de vno, y otro lado del quadrilungo.*

Pudieran estos pocos renglones dar à conocer bastantemente la razon que tuvo el Maestre de Campo Medrano de escrivir contra mi,y de pronunciar como Juez,que mis dos medias en continua proporcion,eran vn enlaçamiento de lineas,ò circulo vicioso,pues es tan grande el conocimiento que tiene de la proporcionalidad media (como mas arriba lo he manifestado) que llama medias proporcionales à las lineas absolutas; pero como esto es nada, comparado con lo demàs que se halla en esta obra suya,y creo serà lo mismo de otras, que ha sacado à luz, aunque no las he visto,y se necessita para su demostracion de figuras, y de dilatado discurso,para exponer tantos,y tan enormes desvarios à los ojos del publico, me reservo para otro tiempo (como ya lo tengo advertido) à tratar esta materia por extenso,y examinar por menor su Architectura Militar,y los preceptos que dà de esquadronar,y haziendo entonces la anotomia de essos defectuosos tratados, reconocerà el curioso, que es esqueleto sin substancia, ni hermosura, lo que juzgò cuerpo en todas sus partes perfecto.

RESPONSIO AD PROFESSOREM BENEVOLVM, ET AMICVM, ET ab Problemata ab eo proposita.

VIx primum huiusce opusculi mei folium typis excussum erat, cum litteræ ad me allatæ sunt datæ Kalen. sept. anno 1692 .... Et quibus ad plurimas quas antea scripseram,verbis sequentibus rescriptum est.

D Nicolao Coppolla.

Ad inveniendas medias proportionales per locum solidum. Vide meum opus de Resolutione, & compositione Mathematica, lib. 1. pag. 359. Tu per locum planum idem agressus effectionem Geometricam præscribis, sed illam non demonstras.

Ad trisecandum angulum rectilineum per locum solidum. Vide lib. 2. eiusdem mei operis, pag. 364.

Per locum planum,vt eidem Problemati satisfacias, solve Problema sequens.

Dato vno ex lateribus trianguli,datum verticis angulum ambientibus,dataque differentia segmentorum baseos invenire triangulum.

Ad tuam Geometricam effectionem demonstrandam, sequens ostendere theorema tuum est.

Si quatuor sint chordæ in eodem circulo, inter se proportionales; arcus etiam, quos illæ subtendunt, inter se proportionales erunt.

Hoc si demonstraveris, eris mihi maior Apolline.

VILO absque dubio, qui has ad me litteras misit, problemataque his contenta, celeberrimus Matheseos Professor est, & dignus qui ab omnibus magni fiat. Quod autem vnica operum suorum authoritate, Problemata mea damnare velit, bona eius venia dixero, hoc nihil ad rem facere: & præsertim cum ipse duas medias proportionales, & trisectionem anguli per locum solidum invenisse fateatur, ego vero duas meas in Proportione continua, simulque trisectionem anguli per locum planum repererim, quod equidem prædictis operationibus penitus adversatur. Quippe si ille insignis doctrinæ nostræ Professor, Problemata mea (vt par erat) impugnare statuerit, error eorum concrete demonstrandus, non autem ad opera sua confugiendum erat, siquidem (vt modo dixi) nihil ad hoc conferunt. Cæterum hæc tantum fama, existimationeque, qua apud omnes Matheseos peritos valent, mihi innotescunt, quod plus satis est, vt eorum Autorem omni honore prosequar, eaque omni cura, & diligentia conquiram, quod autem minime sufficit, vt operationes meæ tanquam falsæ redarguantur, cum vel minimus earum error, hoc vnico testimonio comprobari nequeat. Si secus autem putarit inclitus Doctor noster, doctrinæ veritatem demonstrationibus clarissimis stabilire tenebatur, & præcipue cum ad omnes, quæ ab illius schola adversus prædicta mea Problemata factæ sunt mihi obiectiones, responderim, & abunde his satisfecerim: nec ponderis vllius est, ad opera sua confugere, & duas meas medias proportionales non demonstratas fuisse, tantum asseverare, quando quidem hac agẽdi ratione ductus, meritò possem ad eius obiectiones non respondere, immò licet invitus, hanc respondendi formulam, non hominis peritissimi esse dicere liceret, siquidem (vt paulo ante significavi) quilibet idem dicere potest, si id satis sit, vt postea nihil demonstrare teneatur. At vero publici Professoris, & in scientiis versatissimi, alia in certamine arma esse debent, & in publicum beneficium, quod semel probare statuerit, demonstrare teneatur, sin minus potiori ratione dixero, non tantum nihil adversus operationes meas demonstrasse, immò sibi, nominique suo notam inussisse cum tam vulgari effugio vsus sit, vt vlla sine demonstratione, meas operationes non demonstratas fuisse asserere non dubitarit. Quoquidem modo, nunquam in lucem profertur, semper caligine obscuratur veritas. Præterea autem, ni, quem damnat errorem demonstraverit, vt id assequi possit, doctrina peritiaque carere tacitè fateri videatur. Quippe nominis sui, & veritatis ergo, id præstare, & de qua agitur materiæ momentum: non dignitatem meam perpendere tenetur. Quoniam & si illum mihi hac in scientia anteponendum fateor, quamvis multo inferior essem, vbi de operationibus huius ponderis agitur, & de quibus ipse noster celeberrimus Professor in scriptis suis agens, huc vsque neminem eas assecutum fatetur, nequaquam miretur velim, si, donec secus demonstraverit, (& prout Doctrina nostra exigit) tenaciter in sententia permanserim. Verum, cum pro humanitate sua, iam ad me scribere dignatus sit, huic præ-

sen-

senti tractatui, quæ ab illius doctrina expectari possunt, doctis eruditisque demonstrationibus respondere velit, illum vehementer rogo; vt hoc modo, vel illi satisfacere, vel me victum fateri posim. Et vt simul illi pateat quanti eum faciam, quanto honore prosequar, & quam obsequens sim ad illius præcepta, docta quæ mihi proposuit Problemata, hic dissolvere placuit, spe quadam certa adducto, vbi hanc obsequij mei significationem viderit, non imposterum; vt antea operationes meas se tantum damnaturum, sed adhibitis quas exigit doctrina, demonstrationibus, quasque ab illius eximia peritia sperare licet, id præstiturum, quodque præstare velit circa huius opusculi operationes etiam atque etiam oro.

Expositio primi Problematis mihi propositi.

DAto triangulo DSB (lam. E, fig. 1.) cuius innotuerint verticalis angulus DSB, latus SB, & differentia lateris DS ad basim DB, sit vt NB, & expediat omnes dati trianguli partes invenire.

Constructio, & demonstratio.

IN infinitum ducatur latus minus DS, & ex basi DB sumatur pars DN æqualis lateri DS, & ducatur recta SN, per. 24. def. lib. 1. dico quod triangulum DSN Isosceles est. Dividatur per prop. 10 eiusdem, differētia NB, in duas partes æquales in puncto A, & ex latere protenso DS, sumatur pars SF æquali medietati differentiæ NB, & ducatur recta AF; dico illam rectam AF (per schol. prop. 31. lib. 1.) parallelam esse rectæ NS, & sic per. 10. lib. 6. latus SB in duas partes æquales in puncto X divisum erit.

Nunc considerandum est triangulum SFX, cuius cognitum est latus SF, quod ex constructione æquale est medietati differentiæ NB, & simili modo latus SN, quod demonstratum est tāquam medietas lateris cogniti SB, & quoniam datus est cognitus angulus verticalis DSB, igitur per 32. lib. 1. similiter cognitus erit angulus FSX, & ideo cum cognita sint trianguli SFX, latera SF, SX, & angulus FSX, per doctrinam trigonometricam cognitus erit angulus SXF.

Spectandum tandem est triangulum AXB, cuius, cum cognita sint latera AB, BX per 15. lib. 1. pariter cognitus erit angulus AXB, ita vt operando iuxta prædictam doctrinam trigonometricam, angulum ABX cognitum habituri simus, & quoniam hic idem est ac angulus DBS dati trianguli DBS, ideo per allatam 32. lib. 1. cognitus erit angulus BDS eiusdem propositi trianguli, ita cum dati trianguli BDS, cogniti sint omnes tres anguli, & latus SB, per allatam doctrinam trigonometricam, cognoscentur latus DS, & basis DB, quod erat inveniendum, & demonstrandum.

Cum autem allatum Problema mihi propositum solverim, in significationem existimationis, & benevolentiæ, & vt eodem tempore erudiri posim, nunc etiam sequens Problema, & secundum eandem speciem mihi proponere licebit.

Dati trianguli cum cogniti sint anguli, & differentia cuiusvis duorum laterum, invenire omnia tria latera.

Expositio secundi Problematis mihi propositi.

SIt datus circulus DFNA (lamina E, fig. 2) in quo quatuor chordas inter se proportionales invenire velimus, & similiter arcus quibus illæ subtenduntur, sint inter se proportionales.

Con-

Constructio. Ducatur diamiter DN, quæ erit chorda maxima in dato circulo, quæ subtenditur semiperipheriæ, quæ constat ex gr. 180. & erit æqualis lateri quadrati descripti circa datum circulum; Inveniatur postea per 13. lib. 6. inter diametrum DN, & semidiametrum SN media proportionalis, quæ est, vt DF, æqualis lateri quadrati descripti in dato circulo, quæ & ideo erit chorda quartæ partis Peripheriæ, quæ constat ex grad. 90. vnde nobis tres chordæ, & tres arcus proportionales innotescent, scilicet chorda maxima, quæ subtenditur semiperipheriæ grad. 180. inventa media proportionali DF, quæ subtenditur arcui gr. 90. & FX æqualis semidiametro SN, quæ per corol. prop. 15. lib. 4. est chorda sextæ partis Peripheriæ, quæ constat ex gr. 60. reliquum est igitur vt habeamus quartam chordam, & quartum arcum iuxta proportionalitatem quæsitam, per quam invenietur per 12. lib. 6. quarta proportionalis XN ad tres chordas iam inventas, & ista erit chorda arcus 30. grad. itaque inventæ sunt quatuor chordæ, & quatuor arcus qui habebunt proportionalitatem quæsitam.

Qua quidem pro demostratione facienda, supponatur Chorda maxima, aut sit Diamiter DN partium 14. erit semidiameter SN partium 7. Media proportionalis DF, quæ est chorda arcus grad. 90. erit R. 98. ita vt cum sit chorda maxima DN (quæ subtenditur, grad. 180.) partium 14. futura sit hæc R. 196. & chorda DF (quæ subtenditur arcui grad. 90.) inventa sit R. 98. futura sit igitur chorda FX, quæ per constructionem est æqualis semidiametro SN (quæ subtenditur arcui grad. 60.) erit R. 49. & ideo corda XN quartaproportionalis ad tres ante dictas (quæ subtenditur arcui grad. 30.) erit R. 24. cum dimidio. Hoc solido, atque vero fundamento abunde demonstrari poterit (licet breviter) non solum quatuor istas chordas in ipso circulo esse inter se proportionales, sed etiam arcus quibus illæ subtenduntur proportionales interse existere. Et arcus, & chordas ad invicem inter se similiter esse proportionales, vt & denique simul sumptis Arcubus, & chordis, quolibet ad suum relativum, aggregata erunt inter se proportionalia.

DE-

DEMONSTRATIO AMPLISSIMA.

Arcus ſemiperipheriæ G. 180. cuius chorda mayor ſeu diamet. ℞ 196.
Med. eiuſd. ſive quad. G. 90. cuius chorda. ——— ℞ 98.

Arc. ſext. part. Periph. G. 60. cuius chorda——— ℞. 49.
Medietas eiuſdem. — G. 30. cuius chorda——— ℞. 24. $\frac{1}{2}$

Pro grad. ſicut ſe habent G. 180. ad G. 90. Ita ſe hab. G. 60. ad G. 30.
Sicut ſe habent G. 180. ad G. 60. Ita ſe hab. G. 90. ad G. 30.
Sicut ſe habent G. 30. ad G. 60. Ita ſe hab. G. 90. ad G. 180.
Sicut ſe habent G. 30. ad G. 90. Ita ſe hab. G. 60. ad G. 180.
Ergo per. 16. lib. 5. ſunt Proportionales.

Pro Chor. Sicut ſe habet. ℞. 196. ad ℞. 98. Ita ſe hab. ℞. 49. ad ℞. 24. $\frac{1}{2}$
Sicut ſe habet ℞. 196. ad ℞. 49. Ita ſe hab. ℞. 98. ad ℞. 24. $\frac{1}{2}$
Sicut ſe habet ℞. 24. $\frac{1}{2}$ ad ℞. 49. Ita ſe hab. ℞. 98. ad ℞. 196.
Sicut ſe habet ℞. 24. $\frac{1}{2}$ ad ℞. 98. Ita ſe hab. ℞. 49. ad ℞. 196.
Ergo per. 16. lib. 5. ſunt Proportionales.

Ad invic. Sicut ſe hcbent G. 180. ad ℞. 196. Ita ſe hab. G. 90. ad ℞. 98.
Sicut ſe habent G. 180. ad G. 90. Ita ſe hab. ℞. 196. ad ℞. 98.
Sicut ſe habet ℞. 98. ad G. 90. Ita ſe hab. ℞. 196. ad G. 180.
Sicut ſe habet ℞. 98. ad ℞. 196. Ita ſe hab. G. 90. ad G. 180.
Sicut ſe habent G. 60. ad ℞. 49. Ita ſe hab. G. 30. ad ℞. 24. $\frac{1}{2}$
Sicut ſe habent G. 60. ad G. 30. Ita ſe hab. ℞. 49. ad ℞. 24. $\frac{1}{2}$
Sicut ſe habet ℞. 24. $\frac{1}{2}$ ad G. 30. Ita ſe hab. ℞. 49. ad G. 60.
Sicut ſe habet ℞. 24. $\frac{1}{2}$ ad ℞. 49. Ita ſe hab. G. 30. ad G. 60.

Ergo per. 16. lib, 5. ſunt Proportionales.

Arcus.	G. 180.	G. 90.	G. 60.	G. 30.
Chordæ.	℞. 196.	℞. 49.	℞. 24.	℞. 24. $\frac{1}{2}$
Agregata.	376.	188.	109.	54. $\frac{1}{2}$

Ar-

Arcus, & Chordæ coniunctim secundum ordinem.

Sicut se habet Agregat. 376. ad 188. —— Ita se habet 109. ad 54. $\frac{1}{2}$

Sicut se habet Agregat. 376. ad 109. —— Ita se habet 188. ad 54. $\frac{1}{2}$

Sicut se habet Agregat. 54. $\frac{1}{2}$ ad 109. —— Ita se habet 188. ad 376.

Sicut se habet Agregat. 54. $\frac{1}{2}$ ad 188. —— Ita se habet 109. ad 376.

Ergo per. 16. lib. 5. sunt Proportionales.

Arcus, & Chordæ coniunctim, & divisim.

Sicut se habet Agreg. 376. ad G. 180. Ita se habet Ag. 188. ad G. 90.

Sicut se habet Agreg. 376. ad Ag. 188. Ita se habent G. 180. ad G. 90.

Sicut se habent G. 90. ad Agreg. 188. Ita se habent G. 180 ad Ag. 376.

Sicut se habent G. 90. ad G. 180. Ita se habet Ag. 188. ad Ag. 376.

Sicut se habet Agreg. 109. G. 60. Ita se habet Ag. 54. $\frac{1}{2}$ ad G. 30.

Sicut se habet Ag. 109. ad Ag. 54. $\frac{1}{2}$ Ita se hab. G. 60. ad G. 30.

Sicut se habent G. 30. ad Ag. 54. $\frac{1}{2}$ Ita se habet G. 60. ad Ag. 109.

Sicut se habent G. 30. ad G. 60. Ita se habet Ag. 54. $\frac{1}{2}$ ad Ag. 109.

Ergo per. 16. lib. 5. sunt Proportionales.

Arcus —— G. 180. —— G. 90. —— G. 60. —— G. 30.

5400

5400.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Chordæ —— ℞. 196. —— ℞. 98. —— ℞. 49. —— ℞. 24. $\frac{1}{2}$

4802.

4802.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Arcus, & Chordæ coniunctim secundum ordinem.

Agregatum —— 376. —— 188. —— 109. —— 54. $\frac{1}{2}$

20442.

20492.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Ar-

Arcus, & Chordæ coniunctim, & diuisim.

Agregat. 376. —— Arcus 180. —— Agreg. 188. —— Arcus 90.

33840.

33840.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Agreg. 376. —— R. 196. —— Agreg. 188. —— R. 98.

36848.

36848.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Agreg. 109. —— Arcus 60. —— Agreg. 54. $\frac{1}{2}$ —— Arc. 30.

3270.

3270.

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Agreg. 109. —— R. 49. —— Agreg. 54 $\frac{1}{2}$ —— R. 24. $\frac{1}{2}$

2670. $\frac{1}{2}$

2670. $\frac{1}{2}$

Ergo per. 16. lib. 6. sunt Proportionales.

Ita vt, cum enodaverim, dissolverim, atque demonstraverim, secundum Problema mihi propositum, quod equidem temporis intercessu non parum conferet ad ea quæ dixi, quæque mihi dicenda supersunt, nunc mihi liceat, tantum vt edoceat, hoc benevolum Professorem interrogare.

Cum demonstraverim, vt mihi propositum est, non tantum proportionalitatem quam inter se servant quatuor chordæ in eodem circulo, & Propor-tionalitatem quam inter se habent quatuor arcus, quibus illæ subtenduntur. Sed etiam arcus, & chordas ad invicem esse inter se proportionales, & pariter simul sumptis arcubus, & chordis quolibet ad suum relativum aggregata esse proportionalia, &c. Sequens dubium mihi super est.

Quamobrem chordæ sint in continua proportione, arcus vero in discontinua, si quidem omnes sibi proportionaliter simul, & semel, separati, & iuncti ad invicem responderunt.

Simili autem modo, si ille noster Professor R. 24. $\frac{1}{2}$ non esse veram chordam arcus grad. 30. dixerit, expedit etiam, vt mihi demonstret prædictam Rad non tantum non esse chordam arcus, grad. 30. sed & mihi notum faciat, cuius arcus prædicta Radix sit chorda.

Quæ aliorum consilia tetegimus, non ea semper fuere probabitur, at hercle multo minus, si ex silentio aliquid damni nobis evenire senserimus; hac igitur de causa, cum huiusce nostri Professoris, cuius Problemata dissolvere placuit, mentem plus satis agnoverim, & ea mihi illum proposuisse pateat, scilicet, vt tantum ad responsa, quibus mihi obiectionibus ab illius vniversitate factis, abundè satisfactum est, qua tenebatur respondere; necessitatis vrgens telum effugere valeat, quæ quidem in anguli trisectione tantum sistebant, nulla duorum Problematum à me propositorum, atque enodatorum mentione facta, nec ratione habita, quæ ad inveniendam Quadrantis commensuratricem spectabant, in quo arcanum huiusce operationis (vt semper mihi dictam est) consistit, quod sane haud mediocriter mirandum est, in hominibus doctissimis, & in scientia de qua agitur versatissimis, qui semel super qualibet materia scribere agressi, non modo leviter, & per transitum partem eius attingere, sed quidquid ad eam spectat enucleare teneantur, quod equidem exemplum si sequutus essem, ad duo illius nostri Professoris Problemata, non respondere merito potuerim (at vt antea dixi) benevolentia in illum mea ductus, id pro ingenij mei tenuitate præstiti, vt magis, atque magis hac honoris, & ob temperantiæ significatione concrete ad omnia, quæ in hoc tractatu præcipua inveniantur, quemadmodum etiam atque etiam eum rogavi, respondere dignetur, quod mihi se concessurum spero. Postea autem duas medias in continua proportione, quæ vt perpetuo dicere non dubitavi ex medijs medialibus, bimedijs, & binomijs pendent, aggredi iuuabit; quæ ad hoc propositum nunquam expensa fuere. Et quoniam cognitio virtualis harum potentiæ incipit à solutione Heptagoni, cui Deo ita providente vltimum in hoc tractatu locum addixi, ideo progrediendo ad Trisectionem Anguli, subsequuntur duæ mediæ in continua proportione, & Quadratura circuli, siquidem hæc quatuor operationes ordinatim subsequuntur, per eandem viam rectam, & planam, non solidam, & vt hæc veritas omnibus patefiat, sequentia proponere lubet.

Licet vulgo iuxta Euclidis doctrinam in tres partes æquales circulus dividatur, & in eo inscribatur Triangulum æquilaterum, similiterque in quinque partes æquales ad inscribendum in eo Pentagonum; nihilominus vt cunctis innotescat quanta sit virtus potentialis mediarum, & medialium, adinstar solutionis, atque demonstrationis quas Heptagoni tradidi, quæque in hoc tractatu pag 66. referuntur sequentia Problemata proponenda duxi.

Sit data recta terminata inter cuius partes invenienda sit media proportionalis, quæ sit semidiameter illius circuli in quo supra data illa recta describatur Triangulum æquilaterum; & similiter dato circulo inter partes illius diametri invenienda sit media proportionalis quæ trifariam circulus dividatur.

Iterum sit data recta terminata supra qua modo prius allata Pentagonum describere lubeat, & similiter ipsius ope, inter partes diametri dati Circuli invenienda sit media proportionalis, qua circulus in quinque partes æquales dividatur.

Ex quorum Problematum solutione modo patebit mediæ proportionalis adminiculo circulum in 3. in 4. in 5. in 6. & in 7. partes æquales dividi, & similiter quovis horum latere dato, per mediales semidiametrorum eiusdem circuli inveniri vnum quodque ad suum relatiuum, quæ pro tempore præsenti satis sint, siquidem statuis semel quæ huc vsque scripsi adiuvante in posterum Deo, qui divinam mihi opem præstitit, quæ dicenda super sunt, me feliciter peracturum spero.

Si aliquid bonum invenietur,
Soli
Deo Gloria,
&
Patræ meæ Decus, & Honor.

FEE DE ERRATAS.

PAg 1 lin. 33. de publicar, *lee* à publicar. Pag. 2. lin. 25. fue, *lee* fuy. Pag. 3. lin 21. y el orden, *lee* el orden. Pag. 3. lin. 32. supone, *lee* pone. Pag. 4. lin. 7. manifestando, *lee* manifestar. Pag 4 lin. 16 inqueridas, *lee* inquiridas. Pag. 6, lin. 3 propuesto, *lee* propuestos. Pag. 6. lin. 9 campañia, *lee* compañia, Pag. 7. lin 2. quiero, *lee* pero quiero. Pag. 7. lin. 16. à no, *lee* no. Pag. 8 lin. 4. en punto, *lee* en el punto, *y leaſe aſsi donde quiera que ſe halle en punto.* Pag 9. lin 22. se merece, *lee* si se merece. Pag 11. lin. 6. averlo, *lee* à averlo. Pag. 13. lin. 37. responder, *lee* de responder. Pag. 14. lin. 17. à lo que, *lee* à lo qual Pag. 14 lin. 36. cortarâ, *lee* cortare. Pag. 16. lin. 11. de poner, *lee* poner. Pag. 19. lin. 23. triangulo, *lee* triangulos. Pag. 26. lin. 28. con, *lee* contra. Pag. 22. lin. 33. hipotesis la, *lee* hipotesis es la. Pag. 25. lin. 8. se desengañen, *lee* le desengañen. Pag. 25. lin. 16. con el qual, *lee* en el qual. Pag. 25. lin. 23. no menos, *lee* no solo. Pag. 26. lin 21. à los, *lee* à lo. Pag. 27. lin. 25. medido, *lee* medida. Pag. 28. lin. 18. se quisiera, *lee* se quisiere. Pag. 28. lin. 35. se quiere, *lee* se quisiere. Pag. 28. lin. 37. se lleva, *lee* se lleve. Pag. 32. lin. 12. no meno, *lee* no solo. Pag. 32. lin. 15. examine, *lee* examinen. Pag. 32. lin. 22. radices, *lee* raizes. Pag. 32. lin. 25. de hazer, *lee* à hazer. Pag. 46. lin. 17. pues por. *lee* por. Pag. 49. lin. 19. sigue, *lee* siguen. Pag. 51. lin. 25. pero, *lee* y. Pag. 49. lin. 37. el, *lee* del. Pag. 51. lin. 25. pero, *lee* y. Pagin. 52. lin. 2. en considerar, *lee* à considerar. Pag. 53. lin. 11. que al, *lee* y el. Pag. 59. lin. 1. del levantar, *lee* de levantar. Pag. 59. lin. 17. el mismo, *lee* lo mismo Pag. 59. lin. 23. de solo, *lee* del solo. Pag 60. lin. 4. que es, *lee* es. Pag. 61. lin. 37. vno septimo, *lee* vn septimo. Pag. 62. lin. 1. vno septimo, *lee* vn septimo. Pag. 66. lin. 11. resocucion, *lee* resolucion. Pag. 66. lin. 20. de tal suerte, *lee* del todo. Pag. 66. lin. 38. desacreditarla, *lee* desa-

cre-

creditar à. Pag. 70. lin. 2. de esta, *lee* en esta. Pag. 70. lin. 30. recto, *lee* reto. Pag. 71. lin. 11. todos, *lee* todo esso. Pag. 72. lin. 22. fueran, *lee* fueren. Pag. 72. lin. 23. pudiessen, *lee* pudieren. Pag. 72. lin. 27. casual, *lee* casualmente.

ERRATAS DE LAS FIGVRAS DEMONST.

Pag. 18. lin. 21. MF, *lee* ME. Pag. 24. lin. 22. AMI, *lee* AM. Pag. 67. lin. 22. FG, *lee* FG igual à la media proporcional hallada GD.

De orden del Consejo he visto este libro, intitulado: *Llave Geometrica de la Trisección del Angulo, y formacion del Heptagono*, y con estas erratas corresponde con su original. Madrid, y Mayo 13. de 1693.

Lic. Don Simon Joseph de Olivares y Balcazar.

Corrector general por su Magestad.