TRABAJO FIN DE MÁSTER

PROBABILIDAD: Una unidad didáctica para la asignatura de Matemáticas de 3ºESO

PROBABILITY: Didactic unit for the 3th year of ESO in Mathematics

Autor

Cristian Rivera Muñio

Directora

Patricia Florentín Dueñas

Facultad de Educación

Año 2022-2023

Contenido

A-SOBRE LA DEFINICIÓN DEL OBJETO MATEMÁTICO A ENSEÑAR

1- Nombra el objeto matemático a enseñar.

Este trabajo fin de Máster está elaborado entorno a una propuesta didáctica que se va realizar sobre el objeto matemático de la Probabilidad en la asignatura de Matemáticas. He elegido la Probabilidad como unidad didáctica porque consideramos que cualquier sociedad que se considere verdaderamente libre y crítica debería tener un conocimiento, aunque fuera básico, sobre los procesos aleatorios y el cálculo de probabilidades. Esta es la razón por la que considero que la enseñanza de la Probabilidad y la Estadística debería tener más peso en los planes de estudio en España. Desafortunadamente, se puede observar como todas las reformas educativas han terminado relegando este bloque tan importante a los últimos temas en los libros de texto.

2- Indica el curso y la asignatura en la que sitúas el objeto matemático.

La unidad didáctica se impartirá al 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria en la asignatura de *Matemáticas*. La unidad didáctica se impartirá de acuerdo a los objetivos y criterios de evaluación que aparecen en Orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, siendo el sentido estocástico el que engloba a la Estadística y Probabilidad.

3- ¿Qué campo de problemas, técnicas y tecnologías asociadas al objeto matemático pretendes enseñar?

En este apartado vamos a citar los diferentes campos de problemas, de técnicas y de tecnologías que vamos a usar en esta unidad didáctica

- **CP1:** Problemas para distinguir entre fenómenos aleatorios y fenómenos deterministas y para analizar el espacio muestral y los sucesos de un fenómeno aleatorios

    T1: Conteo de todos los resultados posibles de un fenómeno aleatorio.

    T2: Compresión del fenómeno de la aleatoriedad.

Tec1: Definición de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral y la definición de suceso así como sus operaciones básicas.

T3: Compatibilidad e incompatibilidad de sucesos.

- **CP2**: Problemas sobre frecuencias relativas y absolutas. Introducción al concepto de probabilidad de un suceso.

T1: Conteo de los resultados favorables y de resultados totales.

T2: Definición de frecuencia relativa y absoluta.

Tec1: Ley de los Grandes Números

- **CP3**: Problemas del cálculo de probabilidades de sucesos simples y equiprobables

T1: Conteo de sucesos favorables y totales.

Tec1: Regla de Laplace.

- **CP4**: Problemas de cálculo de probabilidades de sucesos no equiprobables.

T1: Conteo de casos

T2: Cálculo de probabilidades usando las proporciones de áreas.

Tec1: Ley de los Grandes Números.

- **CP5**: Problemas de cálculo de probabilidades de sucesos compuestos.

T1: Dependencia e Independencia de sucesos.

Tec1: Probabilidad de la unión y de la intersección de sucesos.

T2: Diagramas de árbol y tablas de contingencia.

Tec2: Suma de probabilidades mediante árbol o en tabla de contingencia.

B. SOBRE EL ESTADO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL OBJETO MATEMÁTICO

1. ¿Cómo se justifica habitualmente la introducción escolar del objeto matemático?

En la mayoría de los libros de texto consultados, por ejemplo, el texto de la editorial Anaya (Colera *et al*, 2015) y el texto de Marea Verde (Blasco, Marea Verde) el objeto matemático de la probabilidad se introduce a partir de los juegos de azar. En particular, en el libro de Anaya, que es el que he empleado a la hora de diseñar la unidad didáctica por ser el libro empleado en el centro CPI la Jota donde he realizado las prácticas durante el curso 2021-2022, el objeto matemático se introduce desde los juegos de azar (dados, cartas, monedas) con una perspectiva histórica.

En las primeras páginas del tema de azar y probabilidad hace un breve resumen histórico sobre el concepto de la probabilidad. Comienza hablando de Cardano, un gran jugador a juegos de azar, y del caballero De Meré. El caballero De Meré introdujo al matemático francés Blaise Pascal y a Pierre de Fermat un conjunto de problemas de azar en 1654. La correspondencia entre Pascal y Fermat, su intercambio de ideas y de nuevos problemas, dio lugar al nacimiento de la teoría de la probabilidad.

Precisamente, el primer problema introductorio del tema de azar y probabilidad es el llamado problema de Cardano en cual Cardano se pregunta sobre que es más fácil si sacar un cuatro en un dado o sacar un ocho en dos dados. El siguiente problema introductorio es un problema que el caballero De Meré le propuso a Pascal.

2- ¿Qué campos de problemas, técnicas y tecnologías se enseñan habitualmente?

En esta sección vamos a analizar los diferentes campos de problemas, técnicas y tecnologías que se enseñan habitualmente a la hora de trabajar la unidad didáctica del azar y la probabilidad en 3º ESO. El campo de problemas que se suelen hacer en este curso suele incluir los siguientes:

- Problemas de Espacios muestrales y sucesos.
- Problemas de probabilidad simple.
- Problemas de probabilidad compuesta.

El campo de técnicas suele cubrir los siguientes aspectos:

- Descripción del espacio muestral y de los sucesos en diferentes fenómenos aleatorios.
- Uso de la regla de Laplace.
- Uso de diagramas de árbol y de tablas de contingencia.

El campo de las tecnologías en la mayoría de las editoriales consultadas se basa básicamente en dar un conjunto de definiciones teóricas apoyadas, para su compresión, en muchos ejemplos de cartas, dados, monedas y bolas en urnas. Las definiciones que aparecen en la editorial Anaya son: **experiencia aleatoria, espacio muestral, caso, suceso, probabilidad, ley de los grandes números, probabilidad simple, probabilidad compuesta, sucesos independientes.**

La mayoría de las editoriales deciden colocar el tema de azar y probabilidad entre los últimos temas de los libros de textos. Este hecho unido a que en general los docentes nunca pueden impartir todo el libro de texto ya que deciden dedicar más tiempo a otros temas con el de álgebra o el de funciones. Por lo tanto, no es raro que los alumnos lleguen a 3ºESO sin ningún tipo de conocimiento sobre el azar y la probabilidad. Peor aún, Muchos alumnos llegan a 2º de bachillerato con un conocimiento muy escaso de los fenómenos aleatorios y dado que este tema es evaluable en la prueba de acceso a la Universidad, esto supone una presión aun mayor para los docentes de Matemáticas.

3- ¿Qué efectos produce dicha enseñanza sobre el aprendizaje del alumno?

El estudio del azar y de la probabilidad supone un punto de inflexión fundamental en el aprendizaje de las habilidades matemáticas del alumno. Consideramos que los campos de problemas, técnicas y tecnologías aquí trabajados ayudan a que el alumno desarrolle las habilidades básicas relacionadas con el azar. Hasta este momento los alumnos fundamentalmente desarrollan el sentido numérico y el pensamiento algebraico. Los alumnos estaban acostumbrados a que las matemáticas son precisas y exactas, la probabilidad cambia radicalmente eso. El estudiante que inicia el estudio de la probabilidad se enfrenta a un nuevo paradigma mental que tienen que aprender e interiorizar.

Existen cuatro enfoques distintos a la hora de tratar el azar y la probabilidad en los currículos académicos en secundaria. Todos ellos están perfectamente expuestos y explicado en Batanero (2005). Aquí vamos a analizar si en el libro de Anaya se exponen, aunque se muy someramente.

Los enfoques son los siguientes:

- **Enfoque intuitivo**: Este enfoque está basado en las ideas intuitivas derivadas de la experiencia con los juegos de azar. Todas las sociedades primitivas e incluso los niños poseen estas ideas básicas sobre la probabilidad.

- **Enfoque Laplaciano**: Este enfoque surge de la correspondencia entre Fermat y Laplace. Ellos intentaban encontrar soluciones a algunos juegos de azar. Este enfoque es el origen de la teoría de la Probabilidad. El resultado de sus estudios es la famosa de *regla de Laplace*. En este enfoque no se da realmente una definición de la probabilidad, solo se da una manera de calcularla en casos sencillos.

- **Enfoque frecuencial**: Este Enfoque fue desarrollado por Bernoulli gracias a la demostración de la ley de los grandes números. En este enfoque se da una definición de la probabilidad. En este enfoque se define la probabilidad como el número hipotético hacia el cual tiende la frecuencia relativa al estabilizarse asumiendo la existencia teórica de dicho limite, cuya frecuencia relativa observada es un valor aproximado.

- **Enfoque subjetivo:** Este enfoque aparece junto con la regla de Bayes que permite transformar las probabilidades antes de realizar un experimento varias causas en probabilidades a posteriori, es decir después de realizar el experimento. Eso significa que las probabilidades de un suceso siempre están condicionadas por un cierto sistema de conocimientos que pueden ser diferentes para cada persona. En este enfoque hablamos de un grado de creencia que una persona tenga sobre la ocurrencia de un suceso, el juicio no está únicamente basado en el sujeto y sus características personales sino también en la experiencia (historial), y las evidencias de las que disponga. En este enfoque ya no es necesario la repetición del experimento en las mismas condiciones para dar sentido a la probabilidad.

- **Enfoque Matemático:** Este enfoque está basado en el trabajo de diferentes autores (Borel, Kolgomorov) los cuales formalizaron la teoría de la probabilidad en términos de la teoría de conjuntos y de la teoría de la media. Esta nueva visión permitía definir la probabilidad como un modelo matemático para el estudio de los fenómenos aleatorias independientes de visiones subjetivas o filosóficas.

Una vez vistas estos 4 enfoques que aparecen en el artículo de Batanero podemos analizar si aparecen en el estudio del azar y la probabilidad en 3ºESO. En el libro de la editorial Anaya se introduce el azar mediante juegos de azar lo cual encajaría muy bien en el enfoque intuitivo. En el libro de texto se definen las frecuencias relativas y se explica, aunque muy ligeramente, como convergen a la probabilidad de un suceso mediante la ley de los grandes números. Esto encaja a la perfección con el enfoque frecuencial. Se explica la ley de Laplace y hay multitud de problemas donde se puede aplicar, así que el enfoque laplaciano esta también razonablemente justificado. El enfoque subjetivo no se trata en el libro de texto ya que la regla de Bayes no entra en el currículo para 3º ESO de académicas. El enfoque matemático es el más avanzado y conceptualmente el más difícil de implementar didácticamente. El libro de texto de Anaya hace una primera aproximación define el espacio muestral como conjunto de resultados posibles y un suceso como un subconjunto del conjunto del espacio muestral. No define ni la unión ni la intersección de sucesos.

C-SOBRE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS DEL ALUMNO

1- ¿Qué conocimientos previos necesita el alumno para afrontar el aprendizaje del objeto matemático?

Los alumnos de Matemáticas de 3º ESO deberían tener un conocimiento básico de los fenómenos aleatorios y del cálculo de probabilidades en experimentos sencillos ya que el azar y la probabilidad está en el temario de 2ºESO. Como ya he comentado antes, lo más probable es que no hayan visto nada de probabilidad al estar esta unidad didáctica al final del libro de texto de matemáticas de 2ºESO. Por lo tanto, supondremos a la hora de diseñar la unidad didáctica que no tienen ningún conocimiento, salvo alguna noción intuitiva, del azar y de la probabilidad.

Los alumnos para superar esta unidad didáctica tendrán que tener los siguientes conocimientos básicos de aritmética:

- Cálculo de proporciones.
- Manejo de porcentajes.
- Operaciones con números fraccionarios y decimales.

El uso de redondeos no sería estrictamente necesario, pero a la hora de trabajar se permitirá el cálculo mediante números decimales y los redondeos al segundo decimal.

Todos estos contenidos aparecen en las matemáticas de 1º y 2º de la ESO por lo tanto el alumno debería haberlas trabajo en los cursos anteriores.

Dado que muy posiblemente, esta unidad didáctica sea la primera vez que los alumnos estudian los fenómenos es importante que el docente no caiga en ciertos errores o sesgos a la hora de explicar la probabilidad.

Como la probabilidad condicionada no se ve como parte del temario de probabilidad en 3ºESO los sesgos o falacias más importantes para nosotros son la falacia de la conjunción y el sesgo de equiprobabilidad. La falacia de la conjugación es la creencia errónea de que es más probable la intersección de dos sucesos que cada uno de ellos por separado. Por otra parte, el sesgo de equiprobabilidad es la creencia de suponer que ciertos sucesos son equiprobables cuando realmente no lo son.

Los docentes tenemos la obligación de ser muy cuidadosos y de poner el mayor número de ejemplos posibles para que los alumnos aprendan bien estos conceptos y no caigan estos sesgos. Los cuales están explicados en el artículo de Batanero y Diaz del (2013).

2- ¿La enseñanza anterior ha propiciado que el alumno adquiera esos conocimientos previos?

Hemos comentado anteriormente que no podemos estar seguros de que los alumnos de 3ºESO en donde se imparte la unidad didáctica tengan algún conocimiento formal previo sobre el azar o la probabilidad. Por lo tanto, esta propuesta didáctica se desarrolla también con el objetivo de conocer y si es necesario corregir los conceptos intuitivos que los alumnos tengan sobre el azar.

Todos los alumnos de 3ªESO en donde se imparte la unidad didáctica tenían ciertas nociones sobre probabilidad asociadas sobre todo a los juegos de azar y a la lotería. También pude comprobar que algunos poseían algunos malos entendidos asociados al sesgo de equiprobabilidad.

Los conocimientos intuitivos que los alumnos poseen es un tema muy interesante. El estudio de Fischbein en (1975) y luego Batanero en (2013) indican que hay una intuición parcial del azar en el niño, que se va desarrollando poco a poco. Pero es necesaria la enseñanza, pues de otro modo, es posible que una persona llegue a las operaciones formales con una pobre percepción del azar. Entonces buscará dependencias causales que reduzcan lo incierto, incluso en situaciones donde no existen tales dependencias.

El resto de los conocimientos básicos son de uso habitual durante la educación secundaria y los alumnos hacen uso de las operaciones con números racionales y reales, así como de los redondeos y los porcentajes. Las operaciones con conjuntos son vistas en secundaria principalmente mediante intervalos en la recta real. La combinatoria puede ser vista en cuarto curso de ESO y en cualquier caso está en el currículo de Matemáticas en bachillerato, además suele ser el tema anterior a la probabilidad.

3- ¿Mediante qué actividades vas a tratar de asegurar que los alumnos posean esos conocimientos previos?

Dado el posible nivel académico de los alumnos en cuestiones relacionadas con el azar la unidad didáctica está diseñada para contener el menor número de conceptos teóricos posibles y con una serie de actividades y problemas que se ajustan al campo de problemas planteados. Mediante la experimentación física o la simulación informática, mediante por ejemplo geografía, los alumnos en el aula van experimentando y afianzando los conceptos explicados de forma teórica. Las nuevas tecnologías se han vuelto indispensables para la docencia de la probabilidad como se ve en el artículo de García, A. y Martínez, U., (2012).

Las actividades y los problemas planteados están diseñados de menor a mayor dificultad de manera que los alumnos con un nivel de conocimientos probabilísticos inferior puedan seguir las clases e ir adquiriendo cierta "intuición" sobre el azar. Los alumnos que tengan un nivel mayor podrán ver estas primeras actividades como un repaso.

D- SOBRE LAS RAZONES DE SER DEL OBJETO MATEMÁTICO

1- ¿Cuál es la razón de ser que vas a tener en cuenta al introducir el objeto?

En unos de los primeros puntos de este trabajo comentamos que una de las razones para introducir el azar es un mejor entendimiento de los juegos de azar. Quizá esta forma de introducir la probabilidad como juegos de azar sea la más relevante visto que durante la pandemia hubo un aumento considerable de las apuestas por internet. La razón de ser consistiría en introducir la probabilidad como un modelo de razonamiento que permita a nuestros alumnos entender mejor los juegos de azar y el impacto tanto a nivel social como a nivel económico de las apuestas.

Otra de las razones de ser podría ser el planteamiento de forma matemática la frecuencia de los sucesos y la probabilidad de que ocurran determinados sucesos (p. ej. en juegos, apuestas, loterías, ...) ayudando así a formar un pensamiento crítico basado en el razonamiento matemático en este caso estadístico y probabilístico.

2- ¿Coinciden con las razones de ser históricas que dieron origen al objeto?

Coinciden en tanto en que hace referencia a los juegos de azar y como en su origen el motivo de plantear la probabilidad era el de "asegurar" una ganancia por parte de los jugadores por tener conocimiento de los sucesos que tenían lugar, buscando algún tipo de relación entre el desarrollo del juego, la decisión tomada y el posible resultado del mismo.

Vamos a hacer aquí una breve descripción histórica del concepto de probabilidad. Para ello vamos a usar el manual Morales, G. M. A. del (2002). El concepto de probabilidad aparece junto al de los juegos de azar, como ya hemos comentado anteriormente. Los juegos de azar están atestiguados que existen al menos desde la antigua Sumeria y Asiria, cuando ya desde el 2600 a.C. se conoce que estas civilizaciones utilizaban un hueso extraído del talón de animales, el cual tallaban para que cayera en cuatro posiciones diferentes, siendo el precursor del dado.

Desde la antigüedad hasta el Renacimiento se juega sin interrupción a los juegos de azar extendiéndose su uso por todo el planeta. Los primeros acercamientos serios a lo que más tarde se llamaría la Probabilidad, son debidos a grandes científicos y matemáticos de la talla de: N.Tartaglia, G.F. Peverone, Galileo y G. Cardano.

El primer tratado relacionado con los juegos de azar es debido a Cardano y se título *Liber de Ludo Alae*, cuyo objetivo es calcular de los resultados de lanzar varios dados. En sus resoluciones Cardano esboza una definición, que luego se llamara laplaciana o clásica, de la probabilidad y de forma muy imprecisa e informal lo que ahora se conoce como la ley de los grandes números al afirmar que, si un suceso tiene probabilidad p, al hacer un número grande de repeticiones n, lo más razonable es aportar a que ocurrirá alrededor de np veces.

El libro de Cardano si bien fue escrito alrededor de 1564 no fue impreso hasta el año 1663, este retraso explica, que las ideas aportadas por Cardano en esta obra fueran desconocidas para la mayoría de los matemáticos interesados en el estudio de los juegos de azar.

También Galileo escribió un tratado sobre este tema, aproximadamente entre 1613 y 1624, *Sopre le Scoperte dei dadi* (Sobre los descubrimientos del dado), su mayor contribución a la teoría de la probabilidad fue la creación de la teoría de la medida de errores. Según Galileo, los errores de medida son inevitables y los clasificó en dos tipos:

- Los errores sistemáticos, debidos a los métodos y las herramientas de medida
- Los errores aleatorios, que varían impredeciblemente de una medida a otra.

Esta clasificación sigue en vigor actualmente y es fundamental en cualquier trabajo experimental.

El impulso fundamental en el desarrollo de la teoría de la probabilidad fue dado por los matemáticos franceses. En la sociedad francesa del siglo XVII, el juego era uno de los entretenimientos más frecuentes, su complejidad y las elevadas apuestas que se hacían en ellos hicieron sentir la necesidad de calcular las posibilidades de ganar en los juegos de manera racional.

La mayoría de los historiadores coinciden en atribuir a los trabajos de Blas Pascal (1623-1662) y Pierre Fermat (1601-1665) las bases sobre las que posteriormente se asienta la moderna teoría de la probabilidad. Estos trabajos fueron desarrollados, como ya hemos dicho, a partir del problema o dilema planteado por el caballero de Meré a Pascal sobre cuál era la apuesta más ventajosa en un juego con 4 dados si sacar un 6 o no sacar ninguno.

En el año 1655, el holandés Christian Huygens (1629-1695) entró en contacto con el círculo intelectual de Pascal y Fermat. El poder compartir de primera mano las inquietudes científicas de esos grandes pensadores franceses fue crucial para su devenir intelectual, tanto es así que a su vuelta a Holanda comenzó a trabajar intensamente en problemas relativos al cálculo de probabilidades introduciendo así está recién creada disciplina en Holanda.

En 1656, Huygens envió su manuscrito sobre el cálculo en los juegos de azar a París con la esperanza de que Fermat o incluso Pascal pudieran llegar a estudiarlo y aprobar sus planteamientos. La confirmación de su trabajo fue muy satisfactoria para Huygens. Más aún, Pascal le envió otro problema sobre el azar y Fermat le envió dos cuestiones, que, junto con otros dos problemas diseñados por él mismo, fueron añadidos al final del libro y durante unos sesenta años constituyeron las pruebas estándar mediante las cuales se medía la habilidad del lector en la doctrina del azar; cabe citar que A. de Moivre, Jacques Bernoulli, B. Spinoza y G. Leibniz, entre otros, publicaron soluciones alternativas de algunos de estos problemas.

Durante muchos años, se consideró al científico holandés como el primer teórico de la teoría del azar. Sin embargo, hoy sabemos que ese honor le corresponde por igual a la a estos tres increíbles matemáticos: Pascal, Fermat y Huygens, los cuales sentaron las bases modernas de la teoría de la probabilidad, bases que fueron desarrolladas a lo largo del siglo XVIII.

A partir de entonces los juegos de azar dejaron de ser parte de las matemáticas lúdicas y se convirtieron en auténticos retos intelectuales en los que participaron las mejores mentes científicas del momento.

Uno de estos genios fue el suizo Jacques Bernouilli (1654-1705) quien propuso a los matemáticos y filósofos de su época diversos problemas relacionados con el campo de la probabilidad, cuyas soluciones ofreció después. Bernouilli escribió, además, una obra de una enorme trascendencia, *Ars Conjectandi*, que no fue publicada hasta el año 1713. Este tratado contiene importantes contribuciones a todos los dominios de la teoría de las probabilidades como el célebre teorema de Bernouilli o ley de los grandes números.

La siguiente parada en este apasionante viaje la damos con el matemático francés P. S. de Laplace (1749-1827). Con Laplace la teoría de la probabilidad adquiere rango de disciplina científica, cobrando un impulso que ha ido aumentando con el paso del tiempo. En 1812 Laplace publica un gran tratado, titulado *Théorie Analytique des probabilités* (Teoría analítica de las probabilidades).

Entre finales del siglo XIX y principios del XX la teoría de la probabilidad había experimentado un gran desarrollo gracias a grandes mentes como E. Borel (1871- 1956), K. Pearson (1857-1936), H. Poincaré (1854-1912), F. Galton (1822-1911), A. Markov (1856-1922), P. Tchebycheff (1821-1894). La última parada en el establecimiento de esta teoría se debe a A. Kolmogorov (1903-1987), que la definió de forma axiomática en términos de teoría de conjuntos y teoría de la medida estableciendo así las bases de la moderna teoría de la probabilidad.

3. Diseña uno o varios problemas que se constituyan en razones de ser de los distintos aspectos del objeto matemático a enseñar.

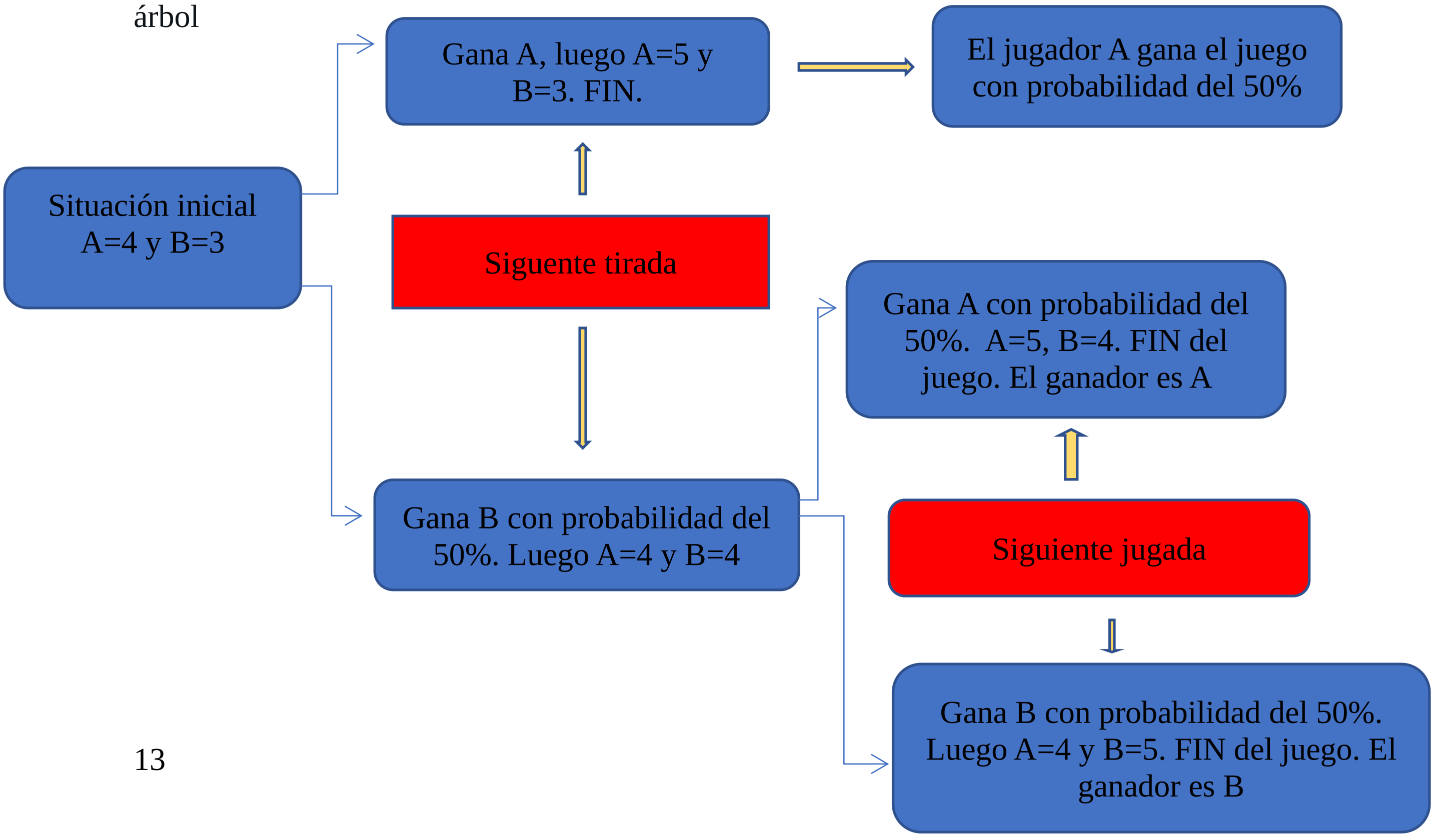
Vamos a plantear dos a problemas basados en juegos de azar y que se constituyen en razones de ser de la probabilidad. El primer problema es uno de los problemas que el caballero de Meré planteó a Pascal. Este problema se denomina la *apuesta interrumpida* y su enunciado dice así:

Los jugadores A y B apuestan a cara o cruz, tirando una moneda. El jugador que primero llega a cinco puntos gana la apuesta. El juego se interrumpe en un momento en que A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos.
¿Cómo deben repartir la cantidad apostada para ser justos?

Solución:

Inicialmente uno podría pensar que si A tiene 4 puntos y B tiene 3 puntos, la forma más justa de repartirse la apuesta en proporción de 4 a 3, a favor de A, es decir, de forma directamente proporcional a los puntos de cada jugador. Pero esta forma de proceder, de manera proporcional a los puntos de cada jugador, no es la manera más justa porque si, por ejemplo, solo jugásemos una partida y sale cara y a continuación se para el juego, entonces A, y con todo el razonamiento anterior, se llevaría todo el dinero apostado.

El reparto más justo (y, por tanto, el correcto) debe ir en función de la probabilidad que tendría cada uno de ganar el juego si éste no se hubiera interrumpido. Empecemos por expresar las formas posibles en que puede continuar el juego mediante un diagrama de árbol



Por lo tanto, vemos que A gana el 75% de las veces y B el 50% de las veces así que el reparto más justo es que A se llevara 3/4 partes del dinero apostado y B se llevara 1/4 del restante.

El siguiente problema recibe el nombre de *apuestas ventajosas* y su enunciado es el siguiente:

¿Tirando un dado 4 veces es ventajoso apostar a que sale al menos un 6? ¿Si tiro ahora un par de dados 24 veces es ventajoso sacar un doble 6?
Solución:

El caballero de Meré sabía que era ventajoso apostar por el resultado de obtener al menos un seis en una serie de 4 lanzamientos de un dado porque era un jugador profesional. Vamos a ver este primer resultado con el cálculo de probabilidades.

Al lanzar 4 veces un dado el conjunto de los resultados posibles tiene 6^4 =1296 elementos. Entre todos estos elementos estamos interesados solamente en aquellas series de cuatro tiradas que tienen al menos un 6. Estos casos vamos a calcularlos calculando primero la serie de 4 tiradas que no tienen ningún 6, decir la serie de 4 dados en donde solo me salen los números de 1 a 5. El número total de estos casos son 5^4 =625. Por lo tanto, número de casos en los que al tirar 4 dados salen al menos un 6 son 1296-625= 671. Luego al tirar 4 dados hay más casos en los que sale algún 6 que en los que no sale ninguno, por lo tanto, la apuesta es ventajosa como ya sabía el caballero de Meré.

Los problemas del caballero de Meré empezaban porque el suponía que debía ser igualmente ventajoso obtener al menos un doble 6 en una serie de 24 lanzamientos con un par de dados. No conocía otras matemáticas que la regla de tres y la uso, aunque en esta situación no hubiera proporcionalidad. Él decía: “apostar por un resultado de 6 en 4 lanzamientos será como hacerlo por un resultado de 6x6=36 en 4x6= 24 lanzamientos ". La experiencia no corroboró la suposición de De Meré.

Veamos la solución en este caso contando todas las formas posibles en que se desarrolla el juego:

En un dado tenemos 6 posibilidades (6 caras) así que en un par de dados tendremos 6x6=36 resultados posibles (el resultado de un dado es independiente al resultado del otro dado).

Por lo tanto en 24 lanzamientos de un par de dados tenemos 36x36x...x36=36^{24} partidas posibles. Ahora calculamos cuantas de esas partidas son favorables a la apuesta de obtener por lo menos un doble 6. En un par de dados tenemos 36-1=35 resultados posibles de no obtener un doble 6 y en 24 lanzamientos tendremos 35^{24} resultados posibles con ningún doble 6. La proporción de partidas con ningún doble 6 es $35^{24}/36^{24}$ =0,50859...=50,86% y la proporción de partidas con al menos algún doble 6 es 100% - 50,86%= 49,14%. Obviamente, 49,14% < 50,86% así que lo ventajoso en este juego es apostar a que no salga ningún doble 6. Se podría pensar que la diferencia es muy pequeña como para marcar alguna diferencia, pero si se juega muchas veces (como hacia el Caballero de Meré), esa desventaja se llega a notar.

Uno de los problemas que se constituyen en razón de ser de los distintos aspectos del objetos matemáticos a enseñar sigue siendo utilizado en la actualidad en concursos y programas de TV en horario de prime time corresponde al *problema de Monty Hall*.

En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra detrás. Una de ellas oculta un coche, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Ahora tiene el concursante una última oportunidad de cambiar la puerta escogida ***¿Debe el concursante mantener su elección original o escoger la otra puerta? ¿Hay alguna diferencia?***

Solución:

En la primera elección el concursante tiene una probabilidad de 1/3 de haber elegido la puerta que esconde el coche y de 2/3 de elegir la puerta que no contiene el coche.
Una vez elegida si no cambias la elección inicial la probabilidad de que haya coche en tu elección original es de 1/3, pero si cambias de puerta, pueden ocurrir dos casos:

Caso 1: si habías elegido el coche, seguro que te llevarás un premio insignificante.

Caso 2: si habías elegido un no premio, cuya probabilidad inicial era de 2/3, al cambiar seguro que ganas el coche ya que el presentador siempre te abrirá la puerta que contiene la otra puerta sin premio.

Por tanto, siempre debes de cambiar la puerta, ya que la probabilidad de ganar el coche es el doble.

El problema de *Monty Hall* plantea varios aspectos importantes sobre la probabilidad. En primer lugar, la intuición y el sentido común nos diría que, una vez que el presentador abre una de las puertas y nos pregunta si queremos cambiar de puerta, la probabilidad ahora de tener el premio seria del 50% y de no tenerlo obviamente el otro 50%. La intuición se equivoca, como hemos visto.

Este problema nos sirve para darnos cuenta de que no todo lo que percibimos se corresponde con la realidad. Al igual que las ilusiones ópticas nos engañan, estas ilusiones matemáticas nos demuestran que nuestro cerebro es imperfecto en muchos pensamientos y decisiones que tomamos.

Las posibles fuentes de razonamiento erróneo en este problema están relacionadas con los siguientes conceptos probabilísticos como se ve en Batenero (2009)

- **Percepción errónea de la independencia**: Este problema se produce porque no se percibe la dependencia de los sucesivos experimentos. Este problema es debido quizá a que no se ha interpretado correctamente la descripción verbal del experimento.

- **Percepción errónea del espacio muestral:** Otra posibilidad de error en este problema es una incorrecta enumeración del espacio muestral en uno o varios de los experimentos que intervienen. El problema radica en que estamos cometiendo un error en este planteamiento y es que no consideramos la información disponible de que "el presentador conoce donde está el premio". Ya que el presentador abre la puerta después de la elección de jugador, la elección del jugador afecta a la puerta que abre el presentador, por tanto, el espacio muestral en el segundo experimento depende del resultado del primero.

- . **Incorrecta asignación inicial de probabilidades:** Otra solución incorrecta se obtiene de la siguiente interpretación, que es una variante de la anterior: Una vez que el presentador escoge la puerta, la probabilidad que el candidato se lleve el coche (en el caso de no cambiar de puerta) es 1/2 pues el coche ha de estar en una de las puertas no abiertas. El razonamiento erróneo se debe a incorrecta aplicación de la regla de la suma de probabilidades. Esto sucede porque lo que muestra el presentador no afecta a la elección original, sino sólo a las otras dos puertas no escogidas. Una vez se abre una puerta y se muestra la cabra, esa puerta tiene una probabilidad de 0 de contener un coche, por lo que deja de tenerse en cuenta.

- **Interpretación incorrecta de la convergencia:** Podría originarse una reafirmación en la creencia de que es indiferente cambiar o no de puerta si, al experimentar un numero pequeño de veces con el problema, el alumno obtiene (debido a la aleatoriedad) un resultado parecido con las dos estrategias (cambiar o no cambiar la puerta).

4- Indica la metodología a seguir en la implementación en el aula.

La metodología propuesta en esta unidad didáctica se desarrollará a partir de distintos juegos de azar para poder introducir los conceptos del tema. Los juegos de azar versaran sobre los temas clásicos como son juegos de cartas, monedas, dados y bolas en una urna.

Una vez que se haya experimentado con los distintos juegos y que los alumnos se hayan familiarizado con los conceptos básicos dichos conceptos se introducirán formalmente. Luego se realizarán problemas para asentar los conceptos teóricos aprendidos.

La experimentación a través de juegos es muy interesante y entretenida para los alumnos, pero hay que tener cuidado en que para los alumnos no queden ningún tipo de duda que pueda confundirlos o que permanezcan ciertos sesgos propios de la probabilidad aplicada a los juegos de azar sin resolver como por ejemplo la falacia del jugador. La falacia del jugador consiste en el razonamiento errónea, en el que suelen caer ciertas personas que juegan a juegos de azar, de pensar que, como ya se ha registró un cierto suceso en el pasado, existen muchas probabilidades de que este hecho se repita en el futuro.

La ley de los grandes números nos impone alguna restricción a la hora de poder experimentar con los fenómenos aleatorios ya que solamente cuando se repiten muchas veces el fomento aleatorio la frecuencia relativa de un cierto suceso se aproxima a la probabilidad teórica. La realización de muchas repeticiones aleatorias, debido a la imposibilidad de hacerlas en clase, se realizarán mediante simulaciones informáticas. Hay muchos programas de ordenador que realizan dichas simulaciones, pero emplearemos en el aula el programa de Geogebra. Lo primero que debe quedar claro para los alumnos es que un ordenador no es capaz de realizar estrictamente hablando fenómenos aleatoria. De cualquier manera, Geogebra es solo una herramienta, un medio para lograr un fin no un fin en sí mismo. Así que tendremos que tener cuidado para no poner demasiado énfasis en ella en el desarrollo de la unidad didáctica.

E- SOBRE EL CAMPO DE PROBLEMAS.

En el tercer apartado de la sección A de este trabajo hemos comentado muy sucintamente los campos de problemas que vamos a trabajar en esta. En este apartado vamos a explicar más profundamente los diferentes campos de problemas.

Los campos de problemas que vamos a trabajar son:

- **CP.1:** *Problemas donde se trabajará la distinción entre fenómenos aleatorios y deterministas y donde se trabajará también los espacios muestrales y los distintos tipos de sucesos.*

En estos problemas el objetivo es a aprender a identificar las características fundamentales de los fenómenos aleatorios, así como ser capaz de encontrar todos los sucesos y poder determinar el espacio muestral asociado a la experiencia aleatoria. Los primeros problemas están orientados a que los alumnos puedan adquirir los conceptos más básicos de probabilidad. Los problemas aquí planteados tendrán una diversidad razonable para intentar cubrir todo tipo de situaciones.

- **CP.2**: *Problemas donde se trabajará sobre las ideas de frecuencias relativas y absolutas y la definición de probabilidad.*

El objetivo de este campo de problemas es familiarizar al alumno con estos conceptos y poder asentarlos con suficiente seguridad como para poder llevarlos un paso más lejos. El objetivo es poder tomar el límite de esas frecuencias relativas y mediante la Ley de los Grandes Números definir el concepto de probabilidad.

- **CP.3**: *Problemas del cálculo de probabilidades de sucesos simples y equiprobables*

El objetivo de este campo de problemas es, una vez los alumnos tengan bien asimilados los conceptos del CP.1, llegar de manera natural al cálculo de la probabilidad mediante la regla de Laplace a través del conteo, tanto total como parcial, de todos los sucesos. La regla de Laplace, en general, no suele plantear demasiados problemas para los alumnos debido a su sencillez, pero es necesario trabajarla para entender bien su uso para el caso de sucesos equiprobables.

- **CP.4**: *Problemas de probabilidad de sucesos no equiprobables.*

En este caso se analizará por conteo y por simulaciones informáticas la ley de los grandes números.

- **CP.5:** *Problemas de probabilidad Compuesta.*

En este caso el objetivo final del campo de problemas es introducir al alumno al concepto de probabilidad condicionada. Este concepto aparece en Matemáticas de 3º ESO aunque no se le da el nombre formal. Antes de poder hacer esto es necesario mostrar y hacer emerger la diferencia entre los sucesos dependientes de los independientes, así como las consecuencias que ello tendrá en el posterior planteamiento del cálculo de las probabilidades. No se dará una formalización estricta de estos conceptos ya que se explicarán con más detalle en los cursos siguientes. Usaremos diagramas de árbol y tablas de contingencia para resolver los problemas de este campo de problemas.

1-Diseña los distintos tipos de problemas que vas a presentar en el aula.

Hasta ahora en esta sección hemos comentado las ideas generales que tendría que contener cada uno de los campos de problemas. Vamos ahora a explicitar estos campos de problemas dando un ejemplo de un problema tipo para cada uno de ellos.

Enunciado tipo CP.1

Supongamos que tenemos dos cajas, una de ellas contiene 4 bolas numeras de 1 a 4 y la otra caja contiene 3 bolas de colores, por ejemplo, roja (R), verde(V) y azul(A). Ahora sacamos al azar un elemento caja con las bolas numeradas y a la vez otro elemento de la con las bolas de colores.

¿cuántas formas distintas tenemos de realizar estas extracciones? ¿Cuántos elementos forman el suceso “la segunda bola es Roja”?

Solución:

El espacio muestral en esta experiencia aleatoria es:

{1R,1V,1A, 2R,2V,2A, 3R,3V,3A, 4R,4V,4A} en total el espacio muestral tiene 12 elementos, es decir, esta experiencia aleatoria tiene 12 posibles casos distintos.
El suceso A=”la segunda bola es roja” viene dado por los siguientes elementos

A={1R,2R,3R,4R)

Enunciado tipo CP.2

Hemos lanzado 50 veces un dado tetraédrico y anotamos los números obtenidos. Completa la siguiente tabla:

	1	2	3	4
F_i		18	16	
f_i	0,2			0,12

Solución:

Sabemos que N=50 y que $f_i=F_i/N$ tenemos que $F_i=f_i*N$. Por lo tanto, la tabla quede de la siguiente manera:

	1	2	3	4
F_i	0,2*50=10	18	16	0,12*50=6
f_i	0,2	18/50=0,36	16/50=0,32	0,12

Enunciado tipo CP.3

Encima de la mesa tenemos estas 4 cartas de una baraja española (40 cartas):

Sacando al azar otra carta del mazo:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones de las 5 cartas (las 4 cartas de la imagen y la extraída del mazo) sea 15? ¿Y 16?
b) Cuál es la probabilidad de obtener una escalera?

Solución:

Veamos en primer lugar la solución para el apartado a). Las cartas que ya tenemos suman 5+1+4+2=12, por lo tanto, para sumar 15 solo necesitamos un 3. En la baraja española hay 4 treses. El mazo tiene ahora 36 cartas ya que tenemos 4 de ellas sobre la mesa. Vamos a emplear la regla de Laplace ya que extraer una cualquiera de las 36 cartas que quedan son sucesos equiprobables.
P(sumar 15)=P(sacar cualquier 3 de los 4 treses que me quedan en las 36 cartas restantes)=Casos favorables/Casos posibles=4/36=1/9.

P(sumar 16)=P(sacar un 4 de los 3 cuatros que aún quedan en las 36 cartas restantes)=3/36=1/12

Veamos ahora el apartado b)

P(sacar una escalera)=P(tener 5 números descendentes del 5 al 1)=
=P(sacar un 3)=4/36=1/9

Enunciado tipo CP.3

Usando un dado legal con 6 caras y lo lanzamos 2 veces. Estamos interesados en analizar la experiencia aleatoria en la que anotamos los números que salen en cada uno de los dados. Vamos **contesta a las siguientes preguntas:**

a) Calcula el espacio muestral.

b) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales

Solución:

a) El espacio muestral para este fenómeno aleatorio viene dado por:

E = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, *4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }*

b) Se ve claramente que todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad de aparecer (son sucesos equiprobables). La probabilidad de cada uno de ellos es claramente 1/36.

Enunciado tipo CP.4

Lanzamos ahora dos dados de 6 caras legales y anotamos la suma de los dos números obtenidos. Calcular la probabilidad de los sucesos elementales.

Solución:

El espacio muestral de nuestro experimento es el siguiente:

E={2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}.

Sin embargo, los sucesos no son equiprobables, así que consideramos el experimento "lanzar un dado dos veces" y definimos su espacio muestral, cuyos sucesos sí son equiprobables.

E = { (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6) }

Aplicando la regla de Laplace, calculamos ahora las probabilidades de cada uno de los sucesos. Escribimos los resultados en la siguiente tabla

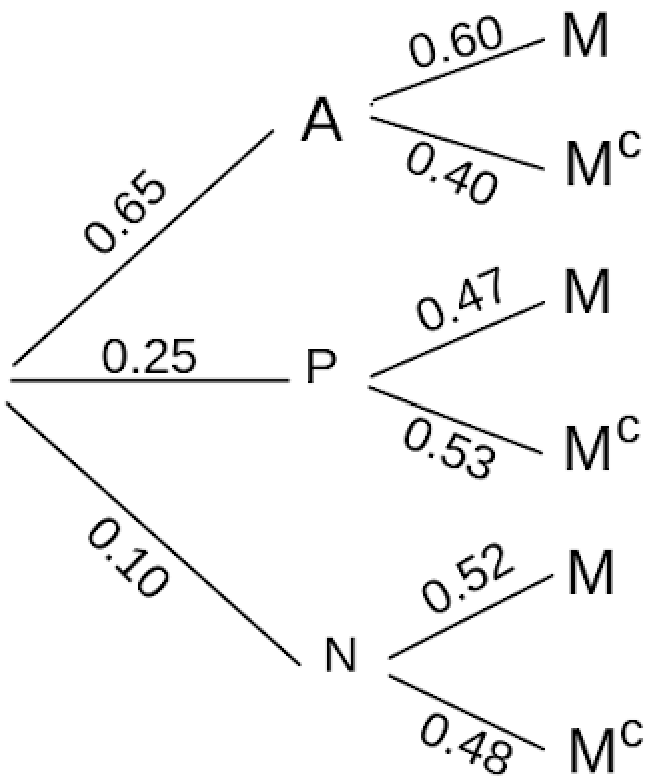
Suceso	**Casos favorables**	**Nº de casos favorables**	**Probabilidad**
{ 2 }	(1, 1)	1	1 / 36
{ 3 }	(1, 2), (2, 1)	2	2 / 36
{ 4 }	(1, 3), (3, 1), (2, 2)	3	3 / 36
{ 5 }	(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)	4	4 / 36
{ 6 }	(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)	5	5 / 36
{ 7 }	(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)	6	6 / 36
{ 8 }	(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)	5	5 / 36
{ 9 }	(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)	4	4 / 36
{ 10 }	(4, 6), (5, 5), (6, 4)	3	3 / 36
{ 11 }	(5, 6), (6, 5)	2	2 / 36
{ 12 }	(6, 6)	1	1 / 36

Enunciado tipo CP.5

En el instituto, el 65% de las personas son alumnos/as, el 25% profesores y el 10% personal no docente. Son mujeres el 60 % del alumnado, el 47% del profesorado y el 52% del personal no docente. Si seleccionamos al azar una persona del instituto. Calcula la probabilidad de que se mujer.

Solución:

P=" ser Profesor"
N=" ser personal no docente"
M=" ser Mujer"



P(M)=0,65*0,60+0,25*0,47+0,10*0,52= 0.5595.

2. ¿Qué modificaciones de la técnica inicial van a exigir la resolución de dichos problemas?

Los problemas en el campo de problemas CP4 podrían resolverse usando diagramas de árbol, como en el problema de 3 monedas. Por lo tanto, las técnicas en el CP4 podrán verse modificadas por el uso de diagramas de árbol.

3-Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Si, las técnicas están adecuadas a su campo de problemas asociado.

4-Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología propuesta, a la hora de implementar los campos de problemas, buscará, siempre que se pueda, que el alumno experimente con los fenómenos aleatorios ya sea individualmente o en pequeños grupos. Los problemas planteados también buscaran que el alumno sepa analizar los datos obtenidos, tanto los suyos como los de otros compañeros. Fomentando un espíritu crítico ante sus propios resultados y los de los demás.

Todos los problemas, o casi todos, están diseñados para que puedan hacerse sin presentación de contenidos para fomentar así el autoaprendizaje del alumno. Por último, el docente institucionalizará los conceptos que aparezcan en los campos de problemas.

Se intentará que los conceptos que hay que explicar por parte del docente sean lo mínimos posibles para favorecer el trabajo de los alumnos durante la realización de los problemas. Por eso, se dedicarán solo de 5 a 10 min al final de la clase a la institucionalización por parte del docente

F- SOBRE LAS TÉCNICAS

1-Diseña los distintos tipos de ejercicios que vas a presentar en el aula.

En esta sección vamos a presentar una serie de ejercicios que los alumnos deberán realizar para practicar las distintas técnicas asociadas a los distintos campos de problemas vistos en la sección anterior.

Los ejercicios ayudaran a los alumnos a afianzar los conceptos de relacionados con esta unidad didáctica.

CP1- Técnica de ejercitación de identificación fenómenos aleatorios y sucesos. (T2)

Ejercicio 1.CP1

Se plantean la siguiente situación siguiente para introducir el concepto de experimentos aleatorios y deterministas.

SITUACIÓN 1:

A- Tenemos una moneda. La lanzamos al aire. ¿Es seguro que vaya a caer al suelo, teniendo en cuenta que yo me voy a quedar quieto?

B- Tenemos un dado. La lanzamos al aire. ¿Es seguro que, al caer en el suelo, salga un número par?

C- Estamos en la cocina. Hemos puesto a hervir una cacerola con agua. Nos despistamos. ¿Es seguro que llegará un momento en el que el agua se evaporará?

D- Necesitamos un poco de sal. Nos hemos dado cuenta de que las especias y las sales no tienen nombre. Tenemos cinco frascos: dos con sal, uno con pimienta, dos con orégano y uno con pimentón. ¿Es seguro que vayamos a acertar y coger a la primera un frasco con sal?

SITUACIÓN 2:

Ahora les traslado a una situación familiar para seguir indagando sobre el azar. Como en muchas familias es posible que en la familia de los alumnos se juegue a la lotería o a la primitiva. El profesor les pregunta en clase a los alumnos si saben si sus padres u otros familiares juegan a dichos juegos de azar y les planteo las siguientes cuestiones:

¿Ha ganado alguien de tu familia alguna vez? ¿Piensas que hay algún truco para ganar como elegir números que creas que dan buena suerte?

Todas estas preguntas están destinadas para entablar una discusión sobre el azar y sus creencias en cuanto a los fenómenos del azar.

Ejercicio 2.CP1

Debatir en clase si los siguientes fenómenos son fenómenos aleatorio o determinista:

- Mañana me tocará la lotería.
- Amanecerá mañana.
- Al soltar una piedra caerá hacia el suelo.
- Hoy tocará en la lotería un número diferente del que ha tocado hoy.
- Mañana será un nuevo día.
- Hoy me voy a encontrar una moneda.
- Determinar el día de la semana que será mañana.
- Calcular la longitud de tu mano.

<u>CP1- Técnica de conteo de (T1)</u>

<u>Ejercicio 3.CP1</u>

Sea el experimento aleatorio “Sacar una bola de una bolsa en la que hay 8 bolas numeradas del 1 al 8”. Calcula:
a) El espacio muestral.
b) El suceso A = “Sacar un número impar”.
c) El suceso B = “Sacar un número mayor que 5”.
d) El suceso C = “Sacar un número múltiplo de 2”.
e) El suceso D = “Sacar un 9”.

<u>CP1- Técnica de conteo de (T1) y técnica de distinguir si dos sucesos son incompatibles entre sí (T3)</u>

<u>Ejercicio 4.CP1</u>

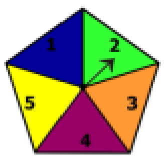
Se separa la clase en grupos de 4 personas y se le reparte 3 monedas equilibradas a cada grupo. Los alumnos tendrán que definir el espacio muestral del fenómeno aleatorio y describir 2 sucesos elementales y 3 sucesos compuestos al lanzar las 3 monedas.
¿Sería posible tener más de 2 sucesos simples en este fenómeno aleatorio? Describe dos sucesos que sean incompatibles entre si y dos que sean compatibles entre si.

<u>CP2- Técnica de ejercitación de cálculo de frecuencias relativas y absolutas, así como introducción al concepto de probabilidad y técnica de conteo de casos favorables y totales (T2 y T1 respectivamente)</u>

<u>Ejercicio 1.CP2:</u>

Después de lanzar 20 veces una ruleta pentagonal hemos obtenido los siguientes resultados:

2 1 5 4 4 5 3 5 4 2 5 5 3 4 2 2 1 2 1 2



Anota en una tabla las frecuencias relativas y las frecuencias absolutas de cada suceso elemental y después calcula las frecuencias relativas de los siguientes sucesos:
A= “Salir número par” y B= “Salir número primo”

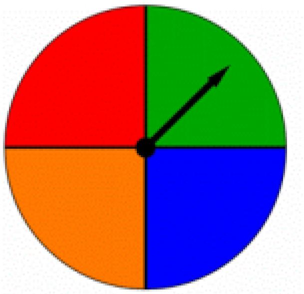
Ejercicio 2.CP2:

Hemos lanzado 50 veces un dado tetraédrico y anotamos los números obtenidos. Completa la siguiente tabla:

	1	2	3	4
F_i		18	16	
f_i	0,2			0,12

Ejercicio 3.CP2:

Se agrupa a los alumnos en grupos de 4 para que construyan este disco con diferentes cartulinas de colores y también la flecha. Los alumnos deben dar una opinión (conjetura) sobre qué color creen ellos que saldrá más. Después giramos la flecha 20 veces y anotamos el color de la cara que sale. Completa la tabla si la frecuencia relativa del azul es el doble de la del naranja:



Color	Rojo	Azul	Verde	Naranja
Fi	6		8	

Ejercicio 4.CP2:

Se lanza una moneda 1000 veces. Se les plantea a los alumnos que digan, antes de iniciar la actividad, cuántas caras y cruces saldrían. A continuación, iniciamos la actividad usando el programa de Geogebra y con la simulación https://www.geogebra.org/m/QWw944Te. Se pide contestar las preguntas siguientes:

a) Obtener las frecuencias relativas de “sacar cara” y “sacar cruz”

b) A medida que el nº de lanzamientos es mayor, ¿a qué frecuencia relativa se

aproxima? ¿Cuál crees que es la probabilidad de sacar cara?

CP.3- Técnica de conteo de casos favorables y totales (T1)

Ejercicio 1.CP3

Lanzamos un dado no trucado y anotamos el resultado.
Calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:
a) A= Sacar un número menor que 3.
b) B= Sacar un divisor de 6.
c) C= Salir múltiplo de 3.
d) D= Salir número mayor que 10.

Ejercicio 2.CP3

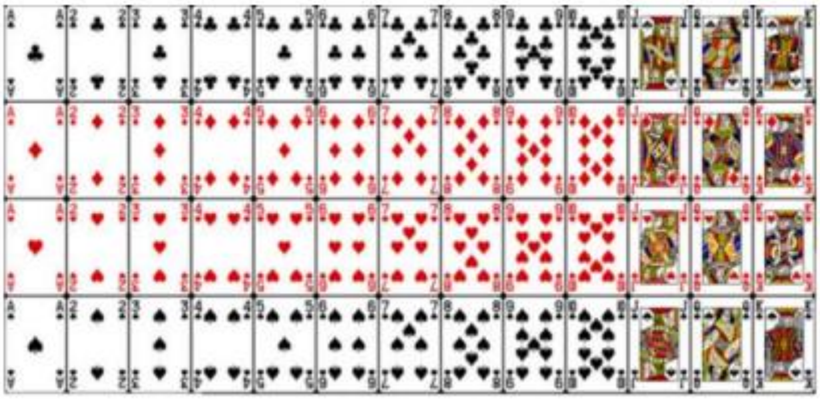
Dada la baraja de Póker mostrada en la imagen y supongamos que sacar un carta al azar del mazo. Calcular las siguientes probabilidades:
Halla la probabilidad de:
1. Sacar el Rey de Corazones:
2. Sacar una carta de Diamantes:
3. Sacar una carta negra:
4. Sacar una carta que no sea ni una figura, ni sea de picas:

TREBOLES (T)

PICAS (P)

CORAZONES (C)

DIAMANTES (D)



Ejercicio 3.CP3

Se extrae al azar una bola de una bolsa que contiene 4 bolas amarillas, 4 bolas negras y 3 bolas azules. Calcula la probabilidad de que:

a) Que sea azul.
b) Que no sea verde.
c) Que sea verde

CP.4- Técnica para calcular la probabilidad de sucesos no equiprobables mediante el conteo de casos (T1)

Ejercicio 1.CP.4

Vamos a tirar 1000 veces 2 dados no trucados y sumar los números que salen. Se les pregunta a los alumnos que si son sucesos equiprobables y que justifiquen su respuesta. Usaremos la simulación de Geogebra *https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD* Una vez realizada la experiencia se pregunta:

¿Cuál es la probabilidad de los sucesos elementales? ¿Son equiprobables?

Ejercicio 2.CP.4:

Vamos a dar a cada estudiante un trocito de plastilina para que fabriquen un dado de 6 caras con ella. Se les pregunta lo siguiente:

¿Los sucesos elementales son equiprobables? Justifica tu respuesta

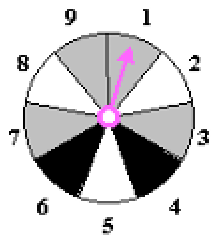
Cada estudiante debe tirar ahora su "dado" 20 veces y luego poner en común todos los resultados en la clase. El profesor anotará en la pizarra los resultados obtenidos por toda la clase.

¿Cuál es la probabilidad de cada uno de los sucesos elementales? ¿Son equiprobables?

CP4: Técnica de cálculo de probabilidades usando las proporciones de áreas (T2)

Ejercicio 3.CP.4:

Se gira la aguja de la ruleta y se observa el número del sector dónde se para. a) Describe el espacio muestral asociado. b) ¿Cuántos sucesos elementales forman cada uno de los sucesos: B = "blanco", ¿G = "gris" y N = "negro"? c) Describe los sucesos contrarios de los sucesos B, G y N. d) ¿Cuál es el suceso seguro? Indica un suceso imposible



CP5: Técnicas de uso de tablas de contingencia y diagramas de árbol (T2)

Ejercicio 1.CP.5

Queremos calcular la probabilidad de lanzar 3 monedas y sacar 3 caras. Veámoslo en el siguiente diagrama de árbol

Ejercicio 2.CP.4

Una clase consta de 6 niñas y 10 niños. Si se escoge un comité de tres al azar, hallar la probabilidad de los siguientes sucesos empleando un diagrama de árbol.

a) Seleccionar tres niños

b) Seleccionar exactamente dos niños y una niña

c) Seleccionar por lo menos un niño

-CP5: Técnicas de uso de tablas de contingencia o diagrama árbol y técnicas de determinación de sucesos dependientes o independientes (T2 y T1 respectivamente)

Ejercicio 1.CP.5

A una cena de amigos van 8 chicas y 4 chicos. A la hora de pedir los segundos platos han elegido carne 4 chicos y 4 chicas, el resto ha elegido pescado. Si el camarero que es una persona un poco despistada elige una persona al azar al entregarle un plato, calcular la probabilidad de:
a) Que sea chico.
b) Que haya elegido pescado.
c) Que sea chica y haya elegido carne.
d) Que tome carne y pescado

Demuestra si alguno de los sucesos anteriores es dependientes o independientes entre si. de los sucesos aleatorios anteriores.

2- ¿Qué técnicas o modificaciones de una técnica se ejercitan con ellos?

CP1: En este campo de problemas se emplea en primer lugar la técnica de identificación de los fenómenos aleatorios y deterministas y después se emplea técnicas de identificación de los distintos sucesos, para ello descompondremos el problema en eventos posibles e identificaremos claramente cada opción-evento como Suceso. Desde el punto de vista psicológico las técnicas empleadas deben ayudar al alumno a desarrollar el proceso mental de ¿qué puede pasar?, ¿cómo le llamo o represento?, ¿he considerado todos los casos?, ¿estoy seguro de no estar "repitiendo" casos de forma indirecta?

Dado que el concepto de probabilidad aún no se explicado correctamente, y para evitar sesgos y una mala compresión futura del mismo, nos centraremos en este primer paso inicial en ser capaz de identificar los casos posibles y así poder dar una correcta definición del concepto de espacio muestral.

La Probabilidad presenta la “ventaja” que permite realizar juegos en el aula para poder introducir los conceptos básicos. Por lo tanto, será fundamental el uso de distintos materiales como: dados, cartas, monedas, bolas etc. Esta forma de proceder permite al alumno construir los conceptos paso a paso sin asociarlos a un material en concreto.

El siguiente paso en este campo de problemas es la construcción del espacio muestral asociado al fenómeno aleatorio bajo estudio. La técnica para realizar esto se llama **inventario,** la cual consiste en determinar todos los casos posibles que se pueden construir para dicho problema. La técnica es muy simple pues únicamente hace referencia a control exhaustivo de los casos detectados y no conlleva cálculos ni operaciones de ningún tipo.

CP2: La técnica que se ejercita en la parte del campo de problemas correspondiente al cálculo de las frecuencias relativas y absolutas es simplemente el conteo parcial y total de los casos favorables y totales. En ocasiones este conteo se puede hacer mediante el uso de tablas estadísticas o mediante gráficas.

La otra técnica que se ejercita en este campo de problemas tiene que ver con el concepto de probabilidad de un suceso como límite de las frecuencias relativas. Dado que la correcta compresión del concepto de limite se escapa a los alumnos de 3ºESO. La técnica consiste en usar simulaciones informáticas, en particular usaremos Geografía, para dar una idea, aunque sea intuitiva del concepto de probabilidad.

CP3: la técnica que se ejercita en este campo de problemas es fundamentalmente es recuento de casos posibles totales frente al número de casos de nuestra opción planteada, es decir llegar a hacer emerger de forma natural la ley de Laplace.

Habrá que tener cuidado a la hora de institucionalizar en el aula la regla de Laplace ya que será importante dejar claro que solo sirve para un caso concreto de sucesos, los equiprobables. Por tanto, se tendrá que insistir en ello en este campo de problemas para evitar que una mala compresión del concepto de suceso equiprobable pueda limitar el avance del alumno en esta unidad didáctica.

Además, como ya vimos, uno de los sesgos que los alumnos cometen es precisamente el de atribuir equiprobabilidad a sucesos que no lo son. Por lo tanto, nuestro objetivo en este campo de problemas es que los alumnos intenten distinguir correctamente que sucesos son equiprobables y cuáles no.

CP4: Las técnicas en este campo de problemas están encaminadas a aprender la distinción entre sucesos no equiprobables y sucesos equiprobables. Fundamentalmente, la técnica básica es la simulación informática para que los alumnos puedan visualizar como efectivamente sucesos no equiprobables. El ejemplo paradigmático en este sentido es el lanzamiento de dos dados y la suma de los puntos obtenidos.

La otra técnica que quizá permita a los alumnos distinguir los sucesos equiprobables de los no equiprobables es la experimentación con distintos modelos y en distintas situaciones.

CP5: la técnica que se ejercita fundamental en este campo de problemas son los diagramas de árbol para el cálculo de probabilidades. En este campo de problemas se podría introducir, y así se hace en esta propuesta, el concepto de probabilidad condicionada y el de probabilidad total, aunque sin dar un nombre concreto a ambos conceptos. También se trabaja la creación de tablas de contingencia y se fomentará la comparación entre tablas de contingencia y diagramas de árbol.

También se trabajará las técnicas correspondientes a la dependencia e independencia de sucesos y a la compatibilidad e incompatibilidad de sucesos. Haciendo especial énfasis, en el campo de problemas, en la distinción entre ambos conceptos. Estas técnicas se trabajarán antes, como paso previo, al empleo de la técnica de diagrama de árbol.

3-Dichas técnicas, ¿están adecuadas al campo de problemas asociado al objeto matemático?

Si, las técnicas planteadas en esta propuesta docente están adecuadas a su campo de problemas asociado.

4-Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

Para la implementación en el aula, la metodología propuesta será la de autodescubrimiento por parte de los alumnos, aunque siempre guiados por el profesor. Para ello, se reforzará la experimentación de los fenómenos aleatorios tanto individual ente como en cooperación con otros compañeros en grupos pequeños de 2 a 4 alumnos. Se fomentará el trabajo en equipos y la puesta en común de los resultados de la experimentación de los distintos equipos buscando compartir planteamientos e ideas que realimenten el proceso individual de autodescubrimiento y refuercen el aprendizaje entre los diferentes grupos.

El siguiente paso en la metodología propuesta será una institucionalización por parte del docente pues la consideramos relevante para evitar posibles lagunas o en determinados casos dudas sobre el contrato didáctico que queremos posteriormente dejar claro de cara a la evaluación.

Una vez institucionalizado las nuevas técnicas la siguiente etapa consiste en una serie de ejercicios para que los alumnos puedan interiorizar y asentar las nuevas técnicas y su aplicación. Este proceso más mecánico y más aburrido para los alumnos, no por ello menos importante, deberá servir al alumno para validar su autoconocimiento,
viendo si ha entendido el motivo de aplicación de dicha técnica y planteando las dudas en caso de no tener claro alguna de las secuencias de la misma.

Todas las actividades serán iniciadas sin presentación de contenidos para fomentar a través del autodescubrimiento por parte del alumno las distintas opciones que hagan emerger la solución del campo de problemas planteados. También se fomentará el uso del ordenador para analizar la ley de los Grandes Números cuando sea necesario.

G- SOBRE LAS TECNOLOGÍAS

1. ¿Mediante qué razonamientos se van a justificar las técnicas?

La propuesta de esta unidad didáctica se elabora en el supuesto de que los alumnos no tienen conocimientos de probabilidad y se plantea su desarrollo desde cero. Al principio de esta memoria ya se justificó las razones que me llevan a tomar esta decisión. Por este motivo el punto partida de los razonamientos será la experimentación y la comparación de los resultados obtenidos con las ideas previas preconcebidas. En primer lugar, el alumno intentará aplicar dichas ideas preconcebidas para resolver los problemas planteados. Puede que algunos alumnos tengas ideas preconcebidas correctas y habrá otros que no. En este último caso, se fomentará los razonamientos que permitan a los alumnos llegar a la solución correcta del problema planteado a través del autoconocimiento al interactuar con ciertas situaciones. Tras la realización de las experiencias tanto de forma individualizada como en pequeños grupos el docente definirá los conceptos asociados a la mismas, institucionalizando así los conceptos desde el inicio.

La descripción del espacio muestral, por ejemplo, se razona de manera intuitiva mediante conteo de todos los resultados posibles de una experiencia aleatoria. la definición de un suceso como todo aquel evento que puede tener lugar, los distintos tipos de sucesos: seguro, imposible, complementario. Las operaciones entre sucesos que se trabajaran son sobre todo la unión y la intersección y se razonaran de una forma muy intuitiva sin emplear una notación muy recargada. Es decir, la intersección de sucesos se asemejará a la idea intuitiva que tienen los alumnos de la conjunción “y” y la unión se asemejará a la conjunción “o”.

El concepto de probabilidad, como ya se ha comentado anteriormente, se razona a partir de la Ley de los Grandes Números como un paso al límite. Esto último se comentará de forma muy somera dada la dificultad de entender correctamente el concepto de límite de una sucesión de números.

2- ¿Quién va a asumir la responsabilidad de justificar las técnicas?

Nuestra propuesta didáctica, como ya hemos comentado, está muy centrada en el alumno. El alumno va descubriendo los conceptos por sí mismo ya sea individualmente o trabajando en pequeños grupos. No obstante, y para que los alumnos asimilen e interioricen correctamente los conceptos trabajados en los campos de problemas, al final de cada sesión se dedicará un tiempo a la institucionalización por parte del docente de los conceptos trabajados en cada sesión.

Esta propuesta permite que el alumno sea parte integrante del proceso de enseñanza y no solo un mero espectador. De esta manera el alumno se motivará para seguir aprendiendo por sí mismo y buscarse retos cada vez de mayor dificultad.

3- Diseña el proceso de institucionalización de los distintos aspectos del objeto matemático

El proceso de institucionalización, como hemos visto ya anteriormente, tiene como parte fundamental al alumno y a su autodescubrimiento de los conceptos asociados con el objeto matemático. El proceso, de institucionalización empieza con una propuesta de actividad correspondiente al campo de problemas que se está trabajando, a continuación, el alumno individualmente o en grupo experimenta e intenta encontrar la solución a la actividad de forma que de forma natural pueda emerger la técnica que soluciona la actividad. Al final se realiza una institucionalización formal por parte del docente para garantizar el correcto entendimiento de la técnica por parte del alumno para la actividad planteada en el campo de problemas.

4- Indica la metodología a seguir en su implementación en el aula

La metodología de implementación en el aula consistirá fundamentalmente en trabajo de las actividades propuestas tanto de forma individual como grupal.

Las herramientas informáticas como Geogebra, permitirán, como ya se ha comentado anteriormente, realizar experiencias cuando sea necesario realizarla un número elevado de veces. No obstante, siempre que se pueda se intentará dar más prioridad en la metodología a la experimentación real que a la virtual mediante simulaciones.

H- SOBRE LAS SECUENCIA DIDÁCTICA Y SU CRONOGRAMA

La unidad didáctica de probabilidad propuesta se tratará en unas 8 sesiones aproximadamente, repartidas como 5 sesiones de clase, una de repaso, una sesión de evaluación y una sesión de corrección del examen. Cada una de las sesiones serán sesiones de unos 50 minutos aproximadamente.

He planteado esta secuencia de clases ya que esta unidad didáctica pude impartirla durante el Prácticum II y sé que con 8 sesiones es suficiente para que los alumnos de 3ºESO puedan adquirir todos los conceptos asociados a esta unidad didáctica.

SESIÓN 1

Esta es la primera sesión está pensada para ser desarrollada en una clase de 50 min. Los primeros 10 min se emplearán en explicar los criterios de evaluación.

Los criterios de evaluación son los siguientes:

- 10% Comportamiento.
- 20% Actividades (Tareas mandadas tanto en clase como para casa).
- 70% Examen.

En esta sesión vamos a realizar 3 actividades correspondientes al campo de problemas CP1. En las dos primeras actividades se plantean a los alumnos ciertas situaciones sencillas para analizar la diferencia entre fenómeno aleatorio y fenómeno determinista y sus ideas previas sobre este tema y en la tercera actividad los alumnos deben discurrir ellos mismos otros fenómenos aleatorios y deterministas. Esta última actividad se deja tarea para casa. Por último, una vez que esté claro, al menos de forma intuitiva, lo que es un fenómeno aleatorio y determinista se dará su definición en la pizarra. En esta sesión estaremos trabajando el significado intuitivo de la probabilidad.

Actividad 1

La duración de esta actividad será de unos 15 min. Se plantea a toda la clase la siguiente situación para introducir el concepto de experimento aleatorio o determinista.

SITUACIÓN 1:

A- Tenemos una moneda. La lanzamos al aire. ¿Es seguro que vaya a caer al suelo, teniendo en cuenta que yo me voy a quedar quieto?

B- Tenemos un dado. La lanzamos al aire. ¿Es seguro que, al caer en el suelo, salga un número par?

C- Estamos en la cocina. Hemos puesto a hervir una cacerola con agua. Nos despistamos. ¿Es seguro que llegará un momento en el que el agua se evaporará?

D- Necesitamos un poco de sal. Nos hemos dado cuenta de que las especias y las sales no tienen nombre. Tenemos cinco frascos: dos con sal, uno con pimienta, dos con orégano y uno con pimentón. ¿Es seguro que vayamos a acertar y coger a la primera un frasco con sal?

SITUACIÓN 2:

Ahora se plantea una situación mucho más familiar para los alumnos con el objetivo de seguir indagando sobre los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el azar. Como en muchas otras familias españolas, es posible que en la familia de los alumnos se juegue a la lotería o a la primitiva. El profesor les pregunta en clase a los alumnos si saben si sus padres u otros familiares juegan a dichos juegos de azar y les plantea las siguientes cuestiones:

¿Ha ganado alguien de tu familia alguna vez? ¿Piensas que hay algún truco para ganar cómo elegir números que creas que dan buena suerte?

Todas estas preguntas están destinadas para entablar una discusión sobre el azar y sus creencias en cuanto a los fenómenos del azar.

Actividad 2

La duración de esta actividad es de 15 min. Distribuimos los alumnos en grupos de 4 personas, debatir si los siguientes fenómenos son experiencias aleatorias o deterministas:

●Amanecerá mañana.

●Al soltar una piedra caerá hacia el suelo.

●Hoy tocará en la lotería un número diferente del que ha tocado hoy.

●Hoy voy a encontrar una moneda.

●Esta noche me va a picar un mosquito.

● Determinar el día de la semana que será mañana.

●Anotar el color de la bola que extraemos de una urna que contiene bolitas blancas y bolitas negras.

● Calcular la longitud de tu mano.

Actividad 3

Esta actividad se mandará para casa y se corregirá en la sesión siguiente. La actividad consiste en que los alumnos describan dos experiencias aleatorias y otras dos deterministas diferentes a las vistas en clase.

La actividad 3 se manda como tarea para casa. Se resolverá en la siguiente clase.

El resto de la sesión se dedicará a dar las definiciones básicas relacionadas con los fenómenos deterministas y no deterministas. La Duración será de unos 10 min.

DEFINICIÓN: Un **experimento aleatorio** es toda prueba controlada de la que se saben sus posibles resultados, sin que se pueda decir cuál de ellos se va a dar.

EJEMPLOS:

- Lanzar un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y observar el resultado de la cara superior.

- Lanzar una moneda al aire y observar la cara superior.

DEFINICIÓN: En un **experimento determinista** se puede determinar con certeza el resultado.

EJEMPLO:

- Meter un recipiente con agua en el congelador y observar el resultado.

Esta primera sesión está pensada para descubrir, por parte del docente, los posibles errores y sesgos en los que puedan incurrir los alumnos. Las actividades están diseñadas para debatir en clase entorno a la probabilidad y las posibles creencias de los alumnos sobre ella. Por lo tanto, la explicación de los criterios de evaluación de la unidad didáctica durará unos 10min, la actividad 1 y la actividad 2 durarán unos 15 min cada uno y la institucionalización de los conceptos de la sesión durará otros 10 min.

SESIÓN 2

Esta sesión está diseñada para ser impartida en una clase de 50 min. En esta sesión seguiremos trabajando los problemas correspondientes al campo de problemas CP1. En primer lugar, corregimos la actividad que se dejó para hacer en casa el día anterior y aclaramos las posibles dudas que hayan surgido de los conceptos anteriores. Esta primera parte de la sesión nos llevará 10 min.

En esta sesión vamos a plantear 4 actividades y vamos a introducir, muy por encima, el significado axiomático de la probabilidad al definir el espacio muestral como un conjunto de resultados y al hablar de un suceso como un subconjunto del espacio muestral.

Actividad 4

Esta actividad durará 10 min Se agrupan los alumnos por parejas y se le trae a cada pareja una bolsa con 8 bolas numeradas. Se les pide que piensen que números van a salir si cogen una bola al azar de la bolsa. Calcula:

a) ¿Cuántos resultados posibles puedes obtener?

Se introduce el concepto de espacio muestral

b) ¿Qué bolas tienen un número impar? (Sucesos)

c) ¿Qué bolas tienen un número mayor que 5”?

Se les introduce el concepto de suceso

d) El suceso C = “Sacar un número múltiplo de 2”.

e) El suceso D = `Sacar un 9”.

Actividad 5:

Esta actividad durará 10 min Se separa la clase en grupos de 4 personas y se les reparte 3 monedas equilibradas a cada grupo. Los alumnos tendrán que definir el espacio muestral del fenómeno aleatorio y describir 2 sucesos elementales y 3 sucesos compuestos al lanzar las 3 monedas.

¿Sería posible tener más de 2 sucesos simples en este fenómeno aleatorio?

Actividad 6

Esta actividad durará 10 min Se ponen los alumnos por parejas y se les plantean los siguientes experimentos aleatorios. Los alumnos deben determinar su espacio muestral, sus sucesos elementales y dos sucesos compuestos en los siguientes casos

a) Extraer una bola de una urna que contiene 3 bolas rojas, 2 bolas verdes y 1

bola azul.

b) Extraer una carta de una baraja española de 40 cartas.

c) Lanzar dos dados y anotar la suma de sus puntuaciones.

Actividad 7

Dado los sucesos A= {2,4,6,8,10,12}, el suceso B= {3,6,9,12} y suceso C= {1,2,3,4,5,6}. Calcular:

1. Los elementos que están en A y en B a la vez.
2. Los elementos que están en alguno de tres sucesos.
3. Los elementos que no están ni en A ni en B.
4. Los elementos que están en A no están en B.
5. ¿Los sucesos A y C se pueden dar a la vez? Y ¿B y C?

Nota: Si dos sucesos no se pueden dar a la vez se dicen ***incompatibles***. Lo contrario, es decir cuanto tienen elementos en común se dice ***compatibles.***

Los últimos 10 min se dedicarán a institucionalizar en la pizarra los conceptos vistos a lo largo de la clase.

DEFINICIÓN: El conjunto de todos los resultados posibles de un fenómeno aleatorio se denomina ***espacio muestral*** y se denota por E.

EJEMPLO:

- El conjunto E anterior sería el espacio muestral de la experiencia de tirar un dado y observar los resultados obtenidos.

- Si tiramos una moneda al aire y observamos el resultado su espacio muestral es E={C,X}.

DEFINICIÓN: Se denomina ***suceso***, y se denota con letras mayúsculas, a cualquier subconjunto del espacio muestral.

DEFINICIÓN:

- Se denomina ***suceso elemental*** el que está formado por un sólo resultado del espacio muestral.
- Se denomina ***suceso compuesto*** el que está formado por dos o más resultados del espacio muestral.
- Se denomina ***suceso seguro*** al suceso que se verifica siempre.
- Se denomina ***suceso imposible*** al suceso que nunca se realiza. Generalmente el suceso imposible se denota con Ø.

- Se denomina ***unión*** de dos sucesos A y B al suceso formado por los elementos de A y de B. Se representa por **AUB.** Por ejemplo, dado el suceso A = {2,3} y el suceso B = {2,5}, la unión será A U B = {2, 3,5}.

- Se denomina ***intersección*** de dos sucesos A y B al suceso formado por los elementos que están en A y en B a la vez. Se representa por $A \cap B$. Por ejemplo, dado el suceso A = {2,3} y el suceso B = {2,5}, la intersección será $A \cap B = \{2\}$.

- Dado el un suceso A, define el ***suceso contrario de A***, denotado por A^c, al suceso formado por todos los elementos de E que no están en A.

- Se dice que dos sucesos son ***compatibles*** cuando tienen algún elemento en común, se denota $A \cap B \neq \emptyset$. Se dice que dos sucesos son ***incompatibles*** cuando no tienen ningún elemento en común, se denota $A \cap B = \emptyset$

Actividad 8:

Usando los sucesos A, B y C, donde E son todos los números del 1 al 20, de la actividad 6 calcular:

$A \cap B \cap C$, $A^c \cap B^c$, $(A \cup B \cup C)^c$, $A \cup B \cap C$

Las actividades 7 y 8 son para realizar en casa.

SESIÓN 3

En sesión, será implementada en una clase de 50 min. En primer lugar, realizamos un repaso de los contenidos del día anterior y corregiremos las actividades mandadas para casa. La corrección y el repaso durará 5 min. En esta sesión se dan a conocer los conceptos de frecuencia absoluta y relativa, así como la manera de formalizar una tabla con los datos recogidos en un experimento aleatorio. Estos conceptos son importantes a la hora de introducir la noción de probabilidad y se darán al principio de la sesión. En esta sesión se pretende profundizar en el significado frecuencial de la probabilidad como paso previo para dar el significado laplaciano y corresponden con el campo de problemas CP2.

En esta sesión daremos la definición de frecuencia absoluta y relativa antes de hacer los problemas.

DEFINICIÓN:

Dado una experiencia aleatoria y su espacio muestral E definimos los siguientes conceptos:

- La **frecuencia absoluta** de un suceso, denotada por Fi, es el número de veces que aparece dicho suceso al realizar el experimento aleatorio.
- La **frecuencia relativa** de un suceso, denotada por fi, es la frecuencia absoluta dividida por el número, N, de veces que realizamos el experimento. Es decir, $fi=Fi/N$

Vamos a realizar las siguientes actividades para afianzar estos dos conceptos.

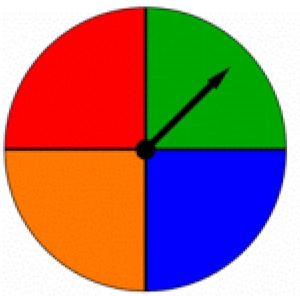
Actividad 9

Organizamos a los alumnos por parejas y repartimos un dado tetraédrico para que practiquen y observen qué resultados obtenemos cuando lo tiramos 50 veces. Se les plantea que completen la siguiente tabla:

	1	2	3	4
Fi		18	16	
fi	0,2			0,12

Actividad 10

Duración de esta actividad será de 5 min. Se agrupa a los alumnos en grupos de 4 para que construyan este disco con diferentes cartulinas de colores y también la flecha. Los alumnos deben dar una opinión (conjetura) sobre qué color creen ellos que saldrá más. Después giramos la flecha 20 veces y anotamos el color de la cara que sale. Completa la tabla si la frecuencia relativa del azul es el doble de la del naranja:



Color	Rojo	Azul	Verde	Naranja
Fi	6		8	

Actividad 11.

La duración de esta actividad es de 15 min. Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.

Durante unos días hacemos 1000 veces la experiencia de agitar, inclinar la botella y anotar el color de la bola que se ve. Se obtiene las siguientes frecuencias absolutas:

F_i(Negro)=461, F_i(Rojo)=343, F_i(Verde)=196

Estimar el número de bolas que hay de cada color en la botella.

Actividad 12:

La duración de esta actividad será 15 min y se realizará en común en clase con todos los alumnos a la vez. Se lanza una moneda 1000 veces. Se les plantea a los alumnos que digan, antes de iniciar la actividad, cuántas caras y cruces saldrían. A continuación, iniciamos la actividad usando el programa Geogebra y con la simulación https://www.geogebra.org/m/QWw944Te. Se pide contestar las preguntas siguientes:

a) Obtener las frecuencias relativas de “sacar cara” y “sacar cruz”

b) A medida que el nº de lanzamientos es mayor, ¿a qué frecuencia relativa se aproxima? ¿Cuál crees que es la “probabilidad” de sacar cara?

Actividad 13

Lanzaremos un dado de 6 caras 20 veces y anotaremos los resultados. Ahora usaremos Geogebra y la simulación https://www.geogebra.org/m/TCGCtnWA para lanzar el dado 100 y 200 veces. Se pide contestar a las preguntas siguientes:

a) ¿Qué probabilidad le asignarías al suceso "Sacar 5"?

b) ¿Y al suceso "Sacar 3"?

c) Junta los resultados con los de tus otros 3 compañeros de grupo y vuelve a calcular la probabilidad de sacar 5.

d) Junta todos los resultados de la clase y vuelve a calcular la probabilidad de sacar 5. ¿Qué resultado crees que es más fiable?

Los conceptos que han intervenido en la parte final de la clase se explicaran en los últimos 10 min.

DEFINICIÓN: Se define la **probabilidad**, *P*, de un suceso A un número que indica la posibilidad de que ocurra dicho suceso. La probabilidad de cualquier suceso es siempre un número comprendido entre 0 y 1. Cuanto mayor sea la probabilidad de un suceso, mayor será la posibilidad de que dicho suceso ocurra.

La probabilidad tiene las siguientes propiedades:

- Si la probabilidad de un suceso es igual a 1, se dice que el suceso es el **suceso seguro**.
- Si la probabilidad de un suceso es igual a 0, se dice que el suceso es el **suceso imposible.**

- La suma de las probabilidades de todos los sucesos es igual a 1.

Hasta ahora hemos definido lo que es la probabilidad, pero no cómo calcularla. El siguiente resultado nos dirá cómo calcularla

LEY DE LOS GRANDES NÚMEROS: Si realizamos un experimento aleatorio un número elevado de veces, se puede calcular la **probabilidad** de un suceso asignándole la **frecuencia relativa** que le corresponda a dicho suceso, y se simboliza: **P(A)≈fA.** Cuanto mayor es el número de pruebas que se realizan, más se aproxima el valor de la frecuencia a ese número que llamamos *probabilidad.*

Las actividades que se mandan para casa son la actividad 9 y la actividad 13.

SESIÓN 4

Nuevamente esta sesión está diseñada para realizarse en una clase de 50 min. En esta sesión repasaremos, en primer lugar, los conceptos de frecuencia relativa y absoluta haciendo especial hincapié en ver si los alumnos han asumido el concepto de probabilidad de la clase anterior y resolveremos los ejercicios que se mandaron de tarea para casa. En esta sesión vamos a trabajar el sentido laplaciano de la probabilidad. El repaso y la corrección de ejercicios debería durar unos 10 min aproximadamente.

Los problemas en esta sesión cubren el campo de problemas CP3.

Actividad 14

El tiempo estimado de duración para esta actividad es de 15 min. La actividad consiste en el lanzamiento de un dado de 10 caras por parejas que se van alternando la tarea de registrar datos y de lanzar el dado. Cada pareja hará 25 lanzamientos. Cuando terminen se pondrán los resultados en común con toda la clase y se anotarán en la pizarra todos los resultados. Ahora se hacen a la clase las siguientes preguntas:

- ¿Qué ha salido?
- ¿Ha salido lo que esperábamos?
- ¿Ha salido alguna cara del dado vas veces que otras tienen todos la misma "probabilidad"?
- ¿Seríais capaces de darme la "probabilidad" de que salga cada cara del dado?

Vamos a reforzar los conceptos asociados a la actividad anterior con la siguiente:

Actividad 15

La actividad debería durar unos 15 min. Se les da un dado no trucado a grupos de 2 alumnos y se les pide que lo tiren 20 veces y anoten los resultados. Al final se ponen todos los resultados en común y se pide que respondan a las siguientes preguntas:

¿Hay algún resultado más probable que otro?

¿Cuál creéis que es la probabilidad de cada uno de los resultados posibles?

Calcular la probabilidad de los siguientes sucesos:

A) A= Sacar un número menor que 3.

b) B= Sacar un divisor de 6.

c) C= Salir múltiplo de 3.

d) D= Salir número mayor que 10.

La actividad debería durar unos 10 min. En los siguientes 10 minutos de clase se institucionalizarán los conceptos usados en esta sesión

DEFINICIÓN: Si los sucesos elementales de un experimento aleatorio son todos igualmente probables, se verifica que la probabilidad de un suceso A es:

P(A) = nº de casos favorables en A/ nº de casos posibles

Esta regla se conoce como ***LEY DE LAPLACE.***

DEFINICIÓN: Se dice que los sucesos elementales de un espacio muestral E son ***equiprobables*** cuando todos tienen la misma probabilidad.

DEFINICIÓN:

- Se dice que una experiencia es ***regular*** si se puede calcular la probabilidad de un suceso sin necesidad de experimentar.
- Se dice que una experiencia es ***irregular*** si solo se puede calcular la probabilidad de un suceso mediante la experimentación.

Actividad 16

Vamos a experimentar con un dado no trucado.

¿Qué número saldrá más veces el 1 o el 2 o el 3, o el 4, o el 5, o el 6?

¿Cuál será la probabilidad de que salga un 1? ¿y un 2? ¿y un 3?

¿Cuál será la probabilidad del suceso sacar un número par?

Actividad 17

Dada la baraja de Póquer mostrada en la imagen y supongamos que sacar un carta al azar del mazo. Calcular las siguientes probabilidades:

Halla la probabilidad de:

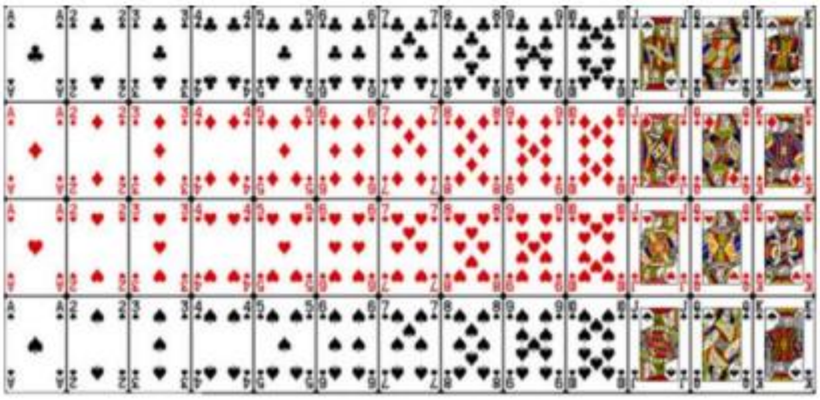
1. Sacar el Rey de Corazones:

2. Sacar una carta de Diamantes:

3. Sacar una carta negra:

4. Sacar una carta que no sea ni una figura, ni sea de picas

¿Son todos los sucesos del espacio muestral equiprobables?



La primera fila son TRÉBOLES(T), la segunda PICAS (P), la tercera CORAZONES (C) y la última DIAMANTES (D)

Las actividades 16 y 17 se mandan como tarea para casa.

SESIÓN 5

Esta sesión está diseñada para impartirse en una clase de 50 min. Trabajaremos los problemas correspondientes al campo de problemas CP4. Las actividades en esta sesión van dirigidas a aprender la distinción entre sucesos equiprobables y no equiprobables. En los primeros 10 min haremos un repaso de la ley de Laplace vista en la sesión anterior y corregiremos los ejercicios mandados para casa el día anterior. Veamos la siguiente actividad para introducir el concepto de sucesos no equiprobables.

Actividad 18

Agrupamos a los alumnos en parejas de 2 alumnos y les damos dos dados de 6 caras no cargados a cada pareja. Los alumnos deben tirar los dados y anotar la suma de resultados obtenidos en los dos dados. Cada pareja lanzará los dos dados 20 veces. Al final se pondrá en común con toda la clase el resultado obtenido por todas las parejas. Al final se responderán las siguientes preguntas.

¿Cuáles son todos los resultados posibles de este fenómeno aleatorio?

¿Son todos los elementos del espacio muestral igualmente equiprobables?

Después de discutir las soluciones de los alumnos realizaremos una simulación en clase con 1000 tiradas para confirmar o desmentir las respuestas de los alumnos. Usaremos la simulación de Geogebra https://www.geogebra.org/m/X3EEpavD.

Esta actividad debería durar 20 min.

Actividad 19

Vamos a dar a cada estudiante un trocito de plastilina para que fabriquen un dado de 6 caras con ella. Cada estudiante debe tirar ahora su "dado" 20 veces y luego poner en común todos los resultados en la clase. El profesor anotará en la pizarra los resultados obtenidos por toda la clase. Se les pregunta lo siguiente:

¿Cuál es la probabilidad de los sucesos elementales?

¿Los sucesos elementales son equiprobables?

¿La probabilidad de sacar un número par y mayor de 5?

Esta actividad debería durar 15 min.

Ahora vamos a dar la única definición de esta sesión, tardaremos 5 min,

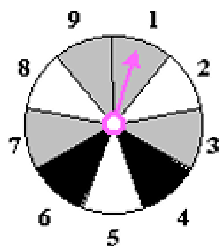
DEFINICIÓN: Se dice que los sucesos elementales de un espacio muestral E son ***no equiprobables*** cuando no todos tienen la misma probabilidad.

Actividad 20

Una urna contiene bolas del mismo tamaño pintadas de distintos colores: 3 amarillas, 5 rojas y 6 verdes. Si se extrae una bola al azar: a) Determina el espacio muestral. b) Son equiprobables los sucesos "bola amarilla", "bola roja" o "bola verde". c) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

Actividad 21

Se gira la aguja de la ruleta y se observa el número del sector dónde se para.



a) Describe el espacio muestral asociado.

b) ¿Cuántos sucesos elementales forman cada uno de los sucesos:

¿B = "blanco", G = "gris" y N = "negro?

c) Describe los sucesos contrarios de los sucesos B, G y N.

d) ¿Cuál es el suceso seguro? Indica un suceso imposible

Las actividades 20 y 21 se mandan como tarea para casa.

SESIÓN 5

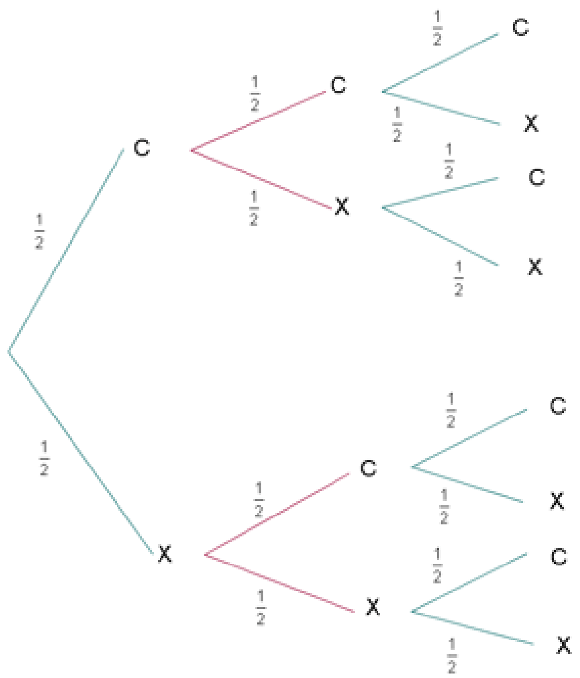
Esta sesión está diseñada para ser impartida en 50 min. En primer lugar, como siempre, repasaremos los conceptos de sesión anterior y corregiremos los problemas que se habían dejado planteados el día anterior. La duración aproximada de esto será unos 15 min.

Los problemas en esta sesión corresponden al campo de problemas CP5. Esta sesión está pensada para que los alumnos aprendan a usar los diagramas de árbol y las tablas de contingencia.

Actividad 22

La actividad siguiente será hecha entre todos en clase discutiendo cada uno de los pasos para que queden todos claros.

El problema consiste en lanzar 3 monedas al azar. La pregunta que nos hacemos es calcular la probabilidad de sacar las tres caras. Veamos la solución mediante un diagrama de árbol.



Luego la P(3 Caras)=½ * ½ * ½ =⅛. Para obtener este valor me tengo que ir desplazando por el árbol buscando 3 caras seguidas. Esta actividad durará 15 min, ya que, aunque es muy fácil esta explicada con mucho detalle.

Veamos ahora un problema usando tabla de contingencia. Considero que el problema es muy fácil así que no creo que los alumnos tengas problemas en entenderlo, aun así, este problema, al igual que el anterior lo haremos entre todos al ser el primero en que usamos tablas de contingencia.

Actividad 23

Los alumnos de 3º y 4º de ESO de un IES se distribuyen por curso y sexo como se indica en la tabla:

Curso	Chicos	Chicas	Total
3ºESO	65		135
4ºESO			
Total		132	252

a) Completa los números que faltan.

b) Si se elige un alumno al azar, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos: A = "sea una chica", B = "sea de 4º de ESO", C = "sea una chica de 4º de ESO" D = "sea un chico de 3º de ESO".

c) ¿Se verifica que la probabilidad de la intersección de dos cualesquiera de los sucesos anteriores es igual al producto de sus probabilidades?

Este problema debería durar 15 minutos.

Ahora vamos a ver alguna definición más. Esto nos llevará 5 min.

DEFINICIÓN: Se dice que dos sucesos A y B son ***independientes*** si se verifica que

$P(A \cap B)=P(A)P(B)$. Si esta igualdad no se verifica, entonces se dice que A y B son ***dependientes***.

Actividad 24

Sea la tabla que muestra el medio de transporte empleado por hombres y mujeres para llegar a su puesto de trabajo si se escoge una persona al azar calcula las probabilidades indicadas

	Hombres	Mujeres	Total
Público		50	85
Privado			
Total	120		200

a) Sea hombre y use transporte público.
b) Use transporte público sabiendo que es hombre.
c) Sea mujer sabiendo que usa un transporte privado.

d) Los sucesos ser hombre y utiliza el transporte público ¿son dependientes o independientes? Responder y justificar matemáticamente.

La actividad 24 se manda para casa.

SESIÓN 6. Repaso para el examen

SESIÓN 7. Examen

SESIÓN 8. Corrección del examen.

I. SOBRE LA EVALUACIÓN

1. Diseña una prueba escrita (de una duración aproximada de una hora) que evalúe el aprendizaje realizado por los alumnos.

A continuación, se presentan los enunciados de los ejercicios que se han diseñado para evaluar mediante prueba escrita, los campos de problemas, técnicas y tecnologías vistos a lo largo de la unidad didáctica. La prueba está evaluada sobre 10 puntos en total, el valor concreto de cada ejercicio se indica al lado del ejercicio.

(**1p**) **Ejercicio 1**: Clasifica los siguientes fenómenos entre aleatorio o determinista

a) La longitud de tu mano.
b) Amanecerá mañana.
c) Al soltar una piedra caerá hacia el suelo
d) Hoy tocará en la lotería un número diferente del que ha tocado hoy.
e) Hoy voy a encontrar una moneda.

(**1p**) **Ejercicio 2**: Sea el experimento aleatorio "Lanzar un dado de 12 caras y observar el resultado obtenido". Calcula los siguientes sucesos
a) El espacio muestral.
b) El suceso A = "Sacar un número impar".
c) El suceso B = "Sacar un número mayor que 5".
d) El suceso C = "Sacar un número múltiplo de 2".
e) E=" No se verifica C y se verifica B a la vez"
h) Dime si existen dos sucesos que sean incompatible y otros dos que sean compatibles.

(**2p**) **Ejercicio 3:** De 120 personas que fueron consultadas sobre sus preferencias a la hora de realizar un deporte, 50 practicaban fútbol, 40 practicaban baloncesto y 30 practicaban ciclismo. Además, 25 personas practicaban futbol y baloncesto, 15

practicaban fútbol y ciclismo, y 12 practicaban baloncesto y ciclismo. Por último, tan sólo 5 personas practicaban los tres deportes. El resto no sabe o no contesta.
Calcula:
a) Probabilidad de practicar fútbol;
b) Probabilidad de practicar fútbol y baloncesto;
c) Probabilidad de practicar los tres deportes;
d) Probabilidad de practicar sólo ciclismo.

(1p) Ejercicio 4: Supongamos que tenemos 1000 personas en una ciudad con las siguientes características:

	jóvenes	Mayores
Con bigote	235	218
Sin bigote	365	182

a) P(tener bigote)
b) P(ser Mayor)
c) P(Ser mayor y con bigote)
d) P(Sabiendo que tiene bigote, es joven)

(**2p**) **Ejercicio 5**: En un cajón hay calcetines. No sabemos cuántos, ni de que colores. Sacamos un calcetín, anotamos el color y lo devolvemos al cajón. Lo hacemos 100 veces y hemos obtenido 42 veces un calcetín negro, 8 veces uno rojo y 50 veces uno blanco.
a) Haz una tabla de frecuencias relativas.
b)¿Qué porcentaje calcetines de cada color hay en el cajón?
c) Si sabemos que hay 20 calcetines ¿cuántos estimas que hay de cada color?

(**1,5p**) **Ejercicio 6**: Una urna contiene bolas del mismo tamaño pintadas de distintos colores: 3 amarillas, 5 rojas y 6 verdes. Si se extrae una bola al azar:
a) Determina el espacio muestral.
b) Son equiprobables los sucesos “bola amarilla”, “bola roja” o “bola verde”.
c) Halla la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

(**1,5p**) **Ejercicio 7**: Una urna A tiene 8 bolas blancas y 10 negras, de la urna se extrae una al azar que se cambia por dos del otro color (es decir, si sale blanca por negras).
Después del cambio se extrae una 2º bola. Dibuja en primer lugar el diagrama de árbol,
Cuáles son las probabilidades de que:
a) La 2º bola sea negra
b) La 2º bola sea del mismo color que la primera.

2. ¿Qué aspectos del conocimiento de los alumnos sobre el objeto matemático pretendes evaluar con cada una de las preguntas de dicha prueba?

Ejercicio 1. Se busca evaluar que el alumno es capaz de distinguir entre un fenómeno aleatorio y un fenómeno determinista.

Ejercicio 2. Se busca evaluar que, dado un fenómeno aleatorio concreto, sea capaz de obtener su espacio muestral y que sea capaz también de determinar los elementos que verifican un cierto suceso. También se valorará que conozca la diferencia entre sucesos incompatibles y compatibles y que entienda el significado de la intersección y del complementario.

Ejercicio 3. En este problema se pretende validar el conocimiento y la aplicación de forma correcta de la ley de Laplace.

Ejercicio 4. Calcular las probabilidades por una correcta interpretación de los datos que aparecen en una tabla de contingencia.

Ejercicio 5. En este problema se valorará la correcta asimilación de los conceptos de frecuencia relativa y absoluta. La correcta elaboración de una tabla de frecuencias relativas y la correcta asimilación y aplicación de la ley de Los grandes Números y del concepto de Probabilidad.

Ejercicio 6. En este problema se valorará, nuevamente, la correcta elaboración del espacio muestral así como la correcta identificación de los elementos de los sucesos por los que pregunta el ejercicio. También se valorará conocer y saber aplicar el concepto de sucesos equiprobables y no equiprobables.

Ejercicio 7. Plantear correctamente el diagrama de árbol y los sucesos descritos, indicando en cada rama sus probabilidades y a partir de ahí saber calcular las probabilidades que se preguntan en el ejercicio.

3. ¿Qué respuestas esperas en cada uno de las preguntas en función del conocimiento de los alumnos?

A continuación, se detallan problema por problema los posibles fallos en las respuestas de los alumnos.

Ejercicio 1. En este ejercicio no espero encontrar ningún tipo de error. Los alumnos no deberían tener ningún problema para plantear las respuestas correctas con sus conocimientos anteriores y/o adquiridos.

Ejercicio 2. En este problema no espero ningún problema ni en el apartado a) ni en el b) o c). En cambio, en el apartado d) puede que tengan algún error o mal entendido al intentar expresar los elementos del suceso E, en particular, el error puede venir de la intersección y el complementario que aparecen en la definición de E. También espero error a la hora de decir si dos sucesos son incompatibles o no. La razón para este error puede ser que no prestaran atención en clase cuando se explicó este concepto o que no lo comprueben con todas las parejas posibles. Incluso, me espero algún error de la forma $P(A) \cap P(B) = 0$ o algo similar.

Ejercicio 3. En este problema los errores podrían venir de un incorrecto conteo de los casos totales o de los favorables para cada uno de sucesos que nos pide el enunciado. Otro error podría venir de no interpretar correctamente la intersección.

Ejercicio 4. Los errores en este ejercicio pueden venir de una mala interpretación de los datos que aparecen en la tabla de contingencia.

Ejercicio 5. Espero que la tabla de frecuencias se realice correctamente por todos los alumnos. Los errores y las respuestas incorrectas vendrán a la hora de aplicar la Ley de los Grandes Números. Un problema muy parecido fue explicado en clase.

Ejercicio 6: Los errores en este problema pueden venir, una vez más, de dejarse algun elemento en el espacio muestral. El conteo incorrecto de los casos favorables o totales. Por último, de la falta de asimilación del concepto de equiprobabilidad y no equiprobabilidad.

Ejercicio 7. En este caso, los errores pueden venir por dejarse alguna rama en el diagrama de árbol, de no calcular correctamente la probabilidad en cada rama y por último no saber interpretar las probabilidades que nos pide el enunciado con el diagrama que hemos dibujado.

Los mayores errores los espero en el ejercicio 3 ya que considero que es el más complicado al ser quizá el más abstracto al tener que emplear la Ley de los Grandes Números.

4. ¿Qué criterios de calificación vas a emplear?

Se valorarán las capacidades aprendidas durante el proceso, el buen uso de las técnicas y, sobre todo, la capacidad de comprensión de los contenidos y métodos: se fomentará que no se trate de un proceso mecánico, sino de un proceso de fases de comprensión de las técnicas y su aplicación.

El examen tiene que tener una nota mayor o igual que 5.

La evaluación de la unidad didáctica corresponderá, como ya se dijo al principio de la sesión 1, en tres puntos:

- 10% Comportamiento.
- 20% Actividades (las tareas tanto mandadas en clase como para casa).
- 70% Examen.

Todas las actividades para casa valen lo mismo, 1 punto si se hacen bien y 0.5 si está mal resuelta, pero se ha intentado

Se presenta a continuación una propuesta de calificación para la prueba escrita basada en un modelo de penalización de errores sustentado en la teoría curricular interpretativa (Sierra y Pérez, 2007).

En primer lugar, vamos a ver una representación gráfica de ese modelo de calificación

En segundo lugar, vamos a mostrar una breve descripción de los tipos de tareas que hay en este modelo y su jerarquía. Las tareas que aparecen en este modelo están relacionadas con las tareas exigidas a los alumnos en los ejercicios y problemas en las pruebas de matemáticas. La descripción siguiente se puede encontrar en Gairín, Muñoz y Oller (2012)

a) ***TAREAS PRINCIPALES***: Las tareas principales establecen cuál es el objetivo principal de la calificación.

b) ***TAREAS AUXILIARES*****:** Las tareas auxiliares son aquellas de las que se pueden obtener información para resolver el problema.

b.1) ***TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS***: Este tipo de tareas instrumentales sirven para conseguir resolver un problema en cual existen tareas principales pero asociadas a unos contenidos más específicos.

b.2) ***TAREAS AUXILIARES GENERALES***: Son todas aquellas tareas (algebraicas, aritméticas, geométricas, etc) que el alumno ha aprendido a resolver en cursos anteriores

Por último, en el mismo trabajo de Gairín, Muñoz y Oller (2012) también se muestra una descripción del sentido y alcance de ese método de calificación el cual da una justificación a la representación gráfica anterior.

- El conjunto de todos los errores que comete un alumno al realizar tareas auxiliares generales no podrá penalizarse con un valor superior a 1/3 de la puntuación asignada al problema, porque el conjunto de estas tareas no debe ser determinante al valorar la comprensión de los contenidos específicos contemplados en los currículos oficiales. Además, el proceso de calificación debe continuar porque quedan 2/3 de la puntuación por asignar a la respuesta que da el alumno.
- Los errores cometidos en las tareas auxiliares específicas podrán penalizarse con un máximo de 2/3 de la calificación asignada a la respuesta correcta, porque el objetivo fundamental de la calificación son los contenidos específicos y no las tareas auxiliares específicas. Es más, en esta penalización hay que tener en cuenta tanto los errores en las tareas auxiliares específicas como en las tareas auxiliares generales. Además, se debe continuar calificando el ejercicio.
- El conjunto de todos los errores cometidos por un alumno al realizar las tareas principales (contenidos específicos), pueden suponer una penalización de hasta un 100% de la calificación total del ejercicio, ya que se entiende que este tipo de contenidos constituye el objetivo principal de la calificación. El corrector puede decidir si continúa el proceso de calificación o si la da por concluido, dependiendo de cómo de importantes considere él estos errores.
- En este modelo se deja un amplio margen de actuación a los correctores por cuanto la penalización de los errores se ubica en intervalos de amplitud 1/3 de la puntuación máxima. Se han establecido intervalos de penalización porque, entre

otras razones, resulta muy complejo establecer penalizaciones concretas para cada tipo de error, pues el número de casos diferentes que se puede presentar es muy amplio.

J. CONCLUSIONES

Durante la elaboración de esta propuesta didáctica de probabilidad hemos planteado como objetivo que la secuencia cumpliese con varios aspectos que para nosotros eran esenciales.

Quizá el objetivo primordial era, como dice Batanero y Godino (1991), educar correctamente la intuición probabilística y consideramos que sea logrado mediante la metodología empleada en el diseño de las sesiones. Los alumnos antes de recibir la teoría tienen que enfrentarse al problema y poner a prueba sus ideas y sus intuiciones sobre la probabilidad.

El primer paso para comenzar a enseñar correctamente probabilidad es asegurarnos que los niños son capaces de diferenciar las situaciones aleatorias y deterministas, es decir de apreciar algunas características básicas de la aleatoriedad. Este punto a quedado recogido en el campo de problemas CP1.

He tenido la posibilidad de poder poner en práctica esta metodología en la enseñanza de esta unidad didáctica ya que tuve la suerte de poder impartirla durante el Prácticum II con excelentes resultados. Efectivamente, los alumnos venían con ciertos sesgos sobre la probabilidad y hubo que reeducar su "intuición" en los fenómenos aleatorios.

La enseñanza de la probabilidad en la secundaria ha experimentado un gran cambio en los últimos años gracias a la generalización de los recursos informáticos en los centros docentes. Ahora para los estudiantes es muy intuitivo para ellos pasar de las frecuencias absolutas a la probabilidad mediante la simulación informática de un gran número de repeticiones.

K. SOBRE LA BIBLIOGRAFÍA Y PÁGINAS WEB

- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *8*(3), 247-264.

- Batanero, C. (2013). *La Compresión de la probabilidad en los niños.¿Qué podemos aprender de la investigación?* ATAS DO III ENCONTRO DE PROBABILIDADES E ESTATÍSTICA NA ESCOLA.

- Batanero, C; Fernandes, J.A.; Contreras, J (2009). Un análisis semiótico del problema de Monty Hall e implicaciones didácticas". *Revista Suma* nº 62, páginas 11-18.

- Batanero, C; Contreras, J; Diaz, C (2013). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista Digital Matemática*, 12(2), pp. 1-13

- Blasco, F. *Matemáticas orientadas a las enseñanzas académicas: 3ºB ESO,* Marea Verde www.apuntesmareaverde.org.es

- *Colera Jimenez, J, Gatzelu Albero, I, Oliveira González, M.* (2015) *Matemáticas orientadas a las Enseñanzas Académicas 3. Trimestres.* Madrid, España. Anaya.

- Fischbein (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children.* Dordrecht: Reidel.

- Gairín, J.M., Muñoz, J.M., Oller, A.M. (2012). *Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas.* En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática 16* (pp. 261 - 274). Jaén: SEIEM

- García, A. y Martínez, U (2012). Aprendizaje de la probabilidad apoyado en las TICs. *@ti.revista d´innovació educativa (nº9)*,131-139

- Godino, J; Batanero, C; Cañizares, M.ª J (1991)*: Matemáticas: cultura y aprendizaje. 27: Azar y Probabilidad. Síntesis. Madrid.*

- Morales, G. M. A. (2002). *Historia de la Probabilidad y de la Estadística. ACE, Madrid.*

- Sierra, B. y Pérez, M. (2007). *La relación teoría-práctica: una clave epistemológica de la didáctica*. *Revista de Educación,* 342, pp. 553-576.