



**TRABAJO DE FIN DE GRADO**

---

**GENERALIZACIÓN FRACCIONARIA DE LA  
FUNCIÓN DE BESSEL MODIFICADA**

---

*Autor:*

Andrés Martín Megino

*Directores:*

Dr. Jesús Gómez Gardeñes  
Dr. Ernesto Estrada Roger

Universidad de Zaragoza

Facultad de ciencias

Grado de matemáticas

Departamento de física de la materia condensada

Curso 2021 - 2022



"Not all those who wander are lost."  
J.R.R. Tolkien, The Fellowship of the Ring

En primer lugar, dedico este trabajo a mis padres, Lucía y Javi.  
En segundo lugar, me gustaría destacar el apoyo, la paciencia y la disponibilidad de las dos personas que han supervisado la elaboración de este TFG. A Jesús y a Ernesto, gracias por todo.  
Muchas gracias también a Valle por su ayuda en la corrección del abstract de este trabajo.



# Abstract

In the scientific sphere, the importance of the Bessel functions, which are the solutions of the Bessel differential equation  $z^2\ddot{y} + z\dot{y} + (z^2 - \alpha^2)y = 0$ , relies mainly on their broad applicability. Quantum physics, number theory or fluid mechanics are some examples of the fields in which these functions participate and can play a significant role under certain circumstances. Although they were discovered originally by Daniel Bernoulli, it was the German astronomer and mathematician Friedrich Wilhelm Bessel who first studied these functions thoroughly, generalizing and classifying them according to their mathematical form and the particular cases of the Bessel differential equation of which they are solutions.

Regarding the classification of the Bessel functions, our efforts are focused on one specific kind: the modified Bessel functions of the first kind  $I_\nu(x)$ , considering  $\nu \in \mathbb{Z}^+$ . The main objective of this thesis is to provide a fractional-order generalization of  $I_\nu(x)$  and study some of its properties, such as the corresponding Taylor series and a generalization of the recurrence equations verified by  $I_\nu(x)$ . This generalized function will be denoted as  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ . It is an original result from this work and the incorporation of the new parameter  $\alpha \in (0, 1)$  is the reason why we describe this generalization as fractional.

Motivating the incorporation of  $\alpha$  to our generalized Bessel function is another major objective that our thesis pursues. This parameter comes into play through the definition of fractional-order epidemic models in complex networks, which involve the Caputo fractional derivative instead of the standard one. This modification of the usual dynamic equations is carried out in order to build a more intricate model, that can describe more accurately the physical properties of the the real complex networks. More precisely, the variation in the network's behavior as we generalize the dynamics for  $\alpha < 1$  has been understood as a change in the memory of the system. In other words, as  $\alpha$  decreases, the infectious disease that propagates through the graph "remembers" with more clarity which nodes has visited in the past.

After defining the fractional-order Caputo derivative and proving some relevant properties in section 2, the goal in section 3 is to solve the dynamic equations in its fractional variant for a particular compartmental model and compare the results with the non-fractional case ( $\alpha = 1$ ). To accomplish this task, we have selected the SI model. This is one of the simplest compartmental models in epidemiology due to the fact that each node of the graph can only have two states: susceptible (S) or infected (I), and it is used as an initial approach for many complex networks. After studying the solution for both the fractional and the non-fractional case, we emphasize the appearance of the Mittag-Leffler function  $E_{\alpha,1}$  as a generalization of the exponential for the case involving the Caputo derivative. This function will be key in order to eventually define  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ .

Section 3 evaluates the information concerning the solution of the SI model for a particular choice of the graph in play:  $P_n$ , the linear chain of  $n$  nodes. Defining the communicability between two nodes  $p$  and  $q$  for this graph in the standard situation ( $\alpha = 1$ ) leads to the appearance of the modified Bessel function as  $n$  tends to infinity. However, the manner in which nodes communicate with each other varies as we consider  $\alpha \in (0, 1)$ . Therefore, redefining the communicability variables in the fractional case leads to the definition of  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ , which generalizes  $I_\nu(x)$  involving the Mittag-Leffler

function  $E_{\alpha,1}$ :

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(\nu \theta) d\theta \longrightarrow \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi E_{\alpha,1}(x \cos \theta) \cos(\nu \theta) d\theta$$

As previously indicated, this function is the core part of our thesis. After having defined it in its integral form, in section 4 we study its mathematical properties in further detail. On the one hand, we provide the corresponding power series and information about its radius of convergence. On the other hand, we take into account the recurrence equations that are verified by  $I_\nu$  and manage to generalize them for  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  involving both the Caputo derivative and the Riemann-Liouville integral. To conclude, it is worth stressing that the contents found in this section 4 are original, first featured in the bibliography with this work. Besides the mathematical interest that  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  raises by itself, our generalized function could as well be a substantial reference for other attempts to extend the range of applications of compartmental models making use of a fractional approach.

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Preliminares teóricos. La derivada fraccionaria de Caputo.</b>	<b>2</b>
<b>3. El modelo SI en redes</b>	<b>5</b>
3.1. Sistema diferencial ordinario . . . . .	6
3.2. Generalización al sistema diferencial fraccionario . . . . .	7
3.3. Comunicabilidad de la red con dinámica fraccionaria . . . . .	9
3.4. La cadena lineal. $G = P_n$ . . . . .	11
<b>4. Estudio de la función generalizada de Bessel <math>\mathcal{E}_{\nu,\alpha}</math></b>	<b>14</b>
4.1. Desarrollo en serie de la función $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}$ y estudio de su convergencia . . . . .	15
4.2. Ecuaciones de recurrencia de $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ . . . . .	17
4.3. Breve discusión sobre las recurrencias . . . . .	23
<b>5. Conclusiones</b>	<b>24</b>
<b>Referencias</b>	<b>25</b>



## 1. Introducción

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden son una pieza fundamental en la resolución de buen número de problemas matemáticos y físicos. Y en este marco, es muy frecuente encontrarse en cierto punto con la ecuación de Bessel, definida por<sup>1</sup>:

$$z^2 \ddot{y} + z \dot{y} + (z^2 - \alpha^2) y = 0, \quad (1.1)$$

siendo  $\alpha$  un parámetro complejo arbitrario, que en los casos más relevantes del estudio de esta ecuación tomará valores enteros y semienteros. Las diferentes soluciones de (1.1) en los casos  $\alpha \in \mathbb{Z}$  son las llamadas funciones de Bessel. Estas son algunas de las funciones matemáticas con mayor rango de aplicabilidad en el ámbito científico: las encontramos en física aplicada, en dinámica de fluidos, en mecánica cuántica, en teoría de números y por supuesto en teoría de ecuaciones diferenciales [1]. Aunque otros matemáticos habían estudiado casos particulares de estas soluciones con anterioridad, las funciones de Bessel llevan el nombre del astrónomo y matemático alemán F. W. Bessel. Él fue el primero en generalizarlas y estudiarlas en profundidad. Con respecto a esta generalización, estas se clasifican según su forma funcional y las variantes de la ecuación (1.1) a las que corresponden. Considerando  $\alpha = \nu \in \mathbb{Z}$ , destacamos las funciones de Bessel de primera especie o primer orden  $J_\nu(z)$  y las de segundo orden  $Y_\nu(z)$ . Por otro lado, las conocidas como funciones de Bessel modificadas se obtienen al tomar un argumento  $z$  imaginario puro en la ecuación diferencial de Bessel, es decir,  $z = ix$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Soluciones correspondientes a este caso son las funciones de Bessel modificadas de primer orden,  $I_\nu(x)$ , y de segundo orden,  $K_\nu(x)$ .

Como ya anticipa el título escogido, las funciones modificadas de Bessel son las protagonistas de este trabajo de fin de grado, concretamente las de primer orden. Estas aparecen en el estudio de la dinámica de modelos epidémicos en redes complejas para ciertas elecciones del grafo en cuestión (como la cadena lineal de infinitos nodos,  $P_n$  con  $n \rightarrow \infty$ ). Nuestro trabajo parte de un planteamiento más general de este problema de la dinámica en redes, que busca ampliar los horizontes de las aplicaciones de los modelos compartimentales (en concreto el modelo SI) al incorporar derivadas fraccionarias a sus ecuaciones. Desde este punto, se va conduciendo al lector a través del proceso de construcción de una generalización fraccionaria de estas funciones, denotada por  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ , para concluir estudiando algunas de sus propiedades más importantes. A diferencia de otras propuestas semejantes encontradas en la bibliografía [2], que son generalizaciones *ad hoc*, la nuestra emerge de la necesidad de estudiar la solución del problema extendido del que se parte. Es decir, nuestros motivos para definir  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  no son únicamente interés y curiosidad matemática, sino que además intentamos profundizar en las bases teóricas de este problema físico inicial.

Este trabajo, que comienza hablando sobre la teoría de la derivación fraccionaria, tiene como objetivo llegar a la definición de  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  y estudiar sus propiedades fundamentales a través del estudio e interpretación del modelo SI en su versión fraccionaria.

---

<sup>1</sup> $\ddot{y} := d^2y/dz^2$ ;  $\dot{y} = dy/dz$

## 2. Preliminares teóricos. La derivada fraccionaria de Caputo.

La idea de generalizar del concepto de derivada  $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$  a valores de  $p$  fuera de  $\mathbb{Z}$  surgió a la vez que el propio cálculo diferencial. Desde finales del siglo XVII, Leibniz, Euler, Laplace o Fourier [3] comenzaron a preguntarse sobre esta posible extensión del concepto de derivada a órdenes no enteros, sentando las bases del cálculo diferencial fraccionario. No obstante, para fijar un punto de la historia en el que esta rama del cálculo diferencial comenzó a desarrollarse propiamente debemos remontarnos al siglo XIX, a los respectivos trabajos de Bernhard Riemann y Joseph Liouville. A mediados de ese siglo, estos dos matemáticos propusieron una definición de integral de orden fraccionario, la conocida como integral de Riemann-Liouville [3, 4], que surge a partir de la fórmula de Cauchy para la integración repetida. En este trabajo la denotaremos como:

$$\mathcal{I}_{0,t}^\gamma f(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\gamma}} d\tau, \quad (2.1)$$

donde el parámetro  $\gamma \in \mathbb{R}^+$  representa el orden (fraccionario) de la integral y además se cumple que  $\mathcal{I}_{0,t}^{\gamma=0} f(t) = f(t)$ .

A partir de aquel momento, han sido muchos los autores que han propuesto otras definiciones de integral y derivada de orden fraccionario. Algunas de ellas son la derivada fraccionaria de Riesz, la de Riemann-Liouville (obtenida involucrando la derivada ordinaria y la integral del mismo nombre), la de Grünwald-Letnikov y la de Caputo [3, 4]. Nuestro trabajo gira en torno a esta cuarta, en torno a la fórmula que presentó Michelle Caputo en 1967. Sea  $\alpha \in (0, +\infty)$  el parámetro de orden y  $m := \lceil \alpha \rceil$ , la derivada de Caputo de una función  $f$  se define como [4, 5]:

$$D_{0,t}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{0,t}^{(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_0^t \frac{f^{(m)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-m}} d\tau \quad (2.2)$$

En lo que resta de trabajo, se escribirán  $D_t^\alpha$  y  $\mathcal{I}^\gamma$  en lugar de  $D_{0,t}^\alpha$  y  $\mathcal{I}_{0,t}^\gamma$  respectivamente, por simplificar la notación. En esta ecuación (2.2) ya puede observarse lo fuertemente relacionada que está la derivada de Caputo con la integral de Riemann-Liouville, concretamente con la de orden  $m - \alpha$  sobre la derivada  $m$ -ésima de  $f$ , y la simplicidad de su definición en este sentido. Esta es una de las razones por las que la definición de Caputo es una de las más utilizadas en la bibliografía cuando se habla de derivación fraccionaria. Otro motivo que explica su frecuente uso es que muchos problemas físicos y matemáticos que necesitan extender el concepto de derivada al orden fraccionario requieren a su vez que se cumpla que la derivada de una constante sea cero. Y esto lo cumple la derivada de Caputo:  $D_t^\alpha C = 0$  (ver [Lema 2.1](#)). En general, esto no sucede para otras derivadas fraccionarias, como es el caso de la de Riemann-Liouville.

En cuanto a la continuidad de la expresión (2.2) con respecto al parámetro  $\alpha$ , cabe destacar que la derivada de Caputo no coincide con la derivada estándar cuando  $\alpha$  se hace tender a un entero positivo "por la derecha", pero sí lo hace cuando el límite se toma "por la izquierda" [4]. Esto es:

$$\lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} D_t^\alpha f(t) = f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0) \quad (2.3a)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow m^-} D_t^\alpha f(t) = f^{(m)}(t) \quad (2.3b)$$

Por otro lado, este trabajo utiliza únicamente parámetros  $\alpha \in (0, 1]$  para definir la derivada de Caputo y parámetros  $\gamma \in [0, 1)$  para la integral de Riemann-Liouville, por lo que a partir de aquí se particularizará la ecuación (2.2) para  $m = 1$ :

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau; \quad \alpha \in (0, 1) \quad (2.4)$$

Cabe destacar que el caso  $\alpha = 1$  está considerado gracias a la ecuación (2.3b) con  $m = 1$ , pues efectivamente corresponde a la derivada estándar.

Una vez presentadas estas definiciones y algunas de sus características, el objetivo ahora es demostrar algunas propiedades, tanto de la derivada de Caputo como de la integral de Riemann-Liouville, que serán relevantes en secciones sucesivas. Estos resultados se proporcionan en forma de lemas.

### Lema 2.1.

Sea  $\alpha \in (0, 1]$  y  $C \in \mathbb{R}$ :

$$D_t^\alpha(C) = 0 \quad (2.5)$$

#### Demostración

Es inmediata al introducir  $f(t) = C$  en la definición (2.4), pues en este caso  $f'(\tau) = 0 \forall \tau$ . □

### Lema 2.2.

Sea  $\alpha \in (0, 1]$  y  $r > 0$ :

$$D_t^\alpha(t^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} t^{r-\alpha} \quad (2.6)$$

#### Demostración

Tomando la definición en (2.4) y aplicando el cambio de variable  $u = \tau/t$ :

$$\begin{aligned} D_t^\alpha(t^r) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t r\tau^{r-1} (t-\tau)^{-\alpha} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 r(tu)^{r-1} (t-tu)^{-\alpha} tdu = \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^1 u^{r-1} (1-u)^{-\alpha} du = \\ &= \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \beta(r, 1-\alpha) = \frac{rt^{r-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\Gamma(r)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(r-\alpha+1)} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\alpha+1)} t^{r-\alpha} \end{aligned} \quad (2.7)$$

□

Este lema relaciona la derivada de Caputo con la definición de derivada fraccionaria para la serie de Taylor centrada en  $t_0$  de una función, que Hadamard dio a finales del siglo XIX [3]:

$$D^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\alpha+1)} c_k (t-t_0)^{k-\alpha}; \quad c_k = \frac{f^{(k)}(t_0)}{k!} \quad (2.8)$$

### Corolario 2.2.1.

La expresión (2.6) coincide con la derivada estándar para  $\alpha \rightarrow 1^-$ , de acuerdo a la ecuación (2.3b).

### Lema 2.3.

Sea  $\gamma \in [0, 1)$  y  $r > -1$ :

$$\mathcal{I}^\gamma(t^r) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\gamma+1)} t^{r+\gamma} \quad (2.9)$$

### Demostración

Al igual que para la demostración del Lema 2.2, tomamos la definición en (2.1) y utilizamos el cambio de variable  $u = \tau/t$  para escribir:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\gamma(t^r) &= \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 (tu)^r (t-tu)^{\gamma-1} tdu = \frac{t^{r+\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \int_0^1 u^r (1-u)^{\gamma-1} du = \\ &= \frac{t^{r+\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \beta(r+1, \gamma) = \frac{t^{r+\gamma}}{\Gamma(\gamma)} \frac{\Gamma(r+1)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(r+1+\gamma)} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\gamma+1)} t^{r+\gamma} \end{aligned} \quad (2.10)$$

□

### Lema 2.4.

Sea  $\gamma \in (0, 1)$  y  $r > 0$ :

$$D_t^\gamma(\mathcal{I}^\gamma(t^r)) = \mathcal{I}^\gamma(D_t^\gamma(t^r)) = t^r \quad (2.11)$$

### Demostración

Para demostrar el resultado utilizamos simultáneamente las ecuaciones (2.6) y (2.9):

$$\begin{aligned} D_t^\gamma(\mathcal{I}^\gamma(t^r)) &= D_t^\gamma\left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\gamma+1)} t^{r+\gamma}\right) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\gamma+1)} D_t^\gamma(t^{r+\gamma}) = \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r+\gamma+1)} \frac{\Gamma(r+\gamma+1)}{\Gamma(r+\gamma-\gamma+1)} t^{r+\gamma-\gamma} = t^r \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\gamma(D_t^\gamma(t^r)) &= \mathcal{I}^\gamma\left(\frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\gamma+1)} t^{r-\gamma}\right) = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\gamma+1)} \mathcal{I}^\gamma(t^{r-\gamma}) = \\ &= \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(r-\gamma+1)} \frac{\Gamma(r-\gamma+1)}{\Gamma(r-\gamma+\gamma+1)} t^{r-\gamma+\gamma} = t^r \end{aligned} \quad (2.13)$$

□

Es decir, la derivada de Caputo y la integral de Riemann-Liouville son operaciones inversas la una de la otra. Aunque lo hemos demostrado para una familia de funciones concreta, se puede demostrar que este lema se cumple de carácter general si la función satisface las propiedades de integrabilidad y diferenciabilidad adecuadas.

### 3. El modelo SI en redes

Un grafo se define como  $G = \{V, E\}$ , siendo  $V$  el conjunto de vértices o nodos y  $E \subseteq V \times V$  el subconjunto de ejes o arcos, las uniones entre los nodos que forman la red. Un ejemplo de grafo se representa en la figura 1, a la izquierda. En este trabajo se asume que todo grafo considerado es conexo (para cualquier par de nodos en  $V$ , existe una sucesión de ejes en  $E$  que constituye un camino entre ambos) y no dirigido (los ejes representan conexiones bidireccionales entre nodos).

Uno de los puntos de partida en la elaboración de este escrito es la inclusión de la definición de derivada fraccionaria de Caputo  $D_t^\alpha$  ( $\alpha \in (0, 1)$ ) en las ecuaciones de la dinámica de una red compleja. Y, comparando con el caso  $\alpha \rightarrow 1^-$  (que corresponde a la derivada estándar, como dicta la ecuación (2.3b)), se buscaría interpretar el sentido físico de esta modificación.

Una buena manera de comenzar a desarrollar esta idea es plantearla sobre la dinámica del modelo SI, que es al mismo tiempo uno de los modelos epidemiológicos más sencillos y con mayor aplicabilidad en redes reales a la hora de modelizar la propagación de información, de enfermedades infecciosas con tiempo de recuperación largo o sin él, de otros movimientos sociales, de procesos difusivos en biología, etc [6, 7, 8]. También se utiliza en algunas ocasiones para estudiar modelos compartimentales más complejos en los primeros instantes de la dinámica. En el modelo SI, los nodos tienen dos estados posibles, susceptible (S) o infectado (I), y sólo se permite la transición del primero al segundo. En concreto, esta transición está cuantificada por el parámetro  $\beta$ , que representa la tasa de contagio, el ritmo o velocidad con la cual un nodo infectado (I) transmite su estado a sus vecinos sanos o susceptibles (S).

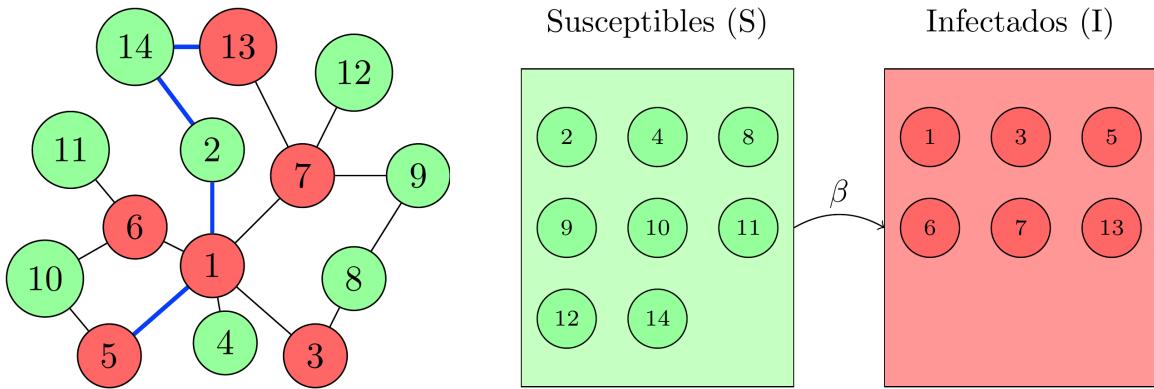


Figura 1: esquema explicativo del modelo compartimental SI. A la izquierda, la representación de un grafo de 14 nodos. Se distingue el estado de cada uno de ellos: susceptible (verde) o infectado (rojo). En azul se subraya un camino aleatorio entre los nodos 5 y 13. A la derecha, el esquema compartimental de este modelo SI aplicado al grafo.

En el transcurso de esta sección, se va a estudiar la dinámica del modelo SI para un grafo  $G$  de  $n$  nodos arbitrario, a cuya matriz de adyacencia llamaremos  $A$ . En primer lugar, se hará a partir de la ecuación estándar de la dinámica, con la derivada usual. Y en segundo lugar se presentará la variante fraccionaria, que incluye la derivada de Caputo.

### 3.1. Sistema diferencial ordinario

Se parte de la ecuación diferencial del modelo SI aplicada a un grafo  $G$  de  $n$  nodos. Denotaremos la función de estado del nodo  $i$ -ésimo como  $x_i(t) \in [0, 1] \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , cantidad que mide la probabilidad del nodo  $i$  de estar infectado a tiempo  $t$ , y la matriz de adyacencia como  $A$ . Esta es [7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \beta(1 - x_i(t)) \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j(t) & ; \quad 1 \leq i \leq n, \\ x_i(0) = x_{0i} \end{cases} \quad (3.1)$$

siendo  $x_0 = [x_{0i}]_i$  el vector  $n$ -dimensional del estado inicial de la red y  $\beta > 0$  la tasa de contagios. Para comenzar, asúmase por un momento que  $x_i(0) = x_{0i}$  corresponden a valores suficientemente próximos a cero. En esta situación, una buena aproximación de la dinámica para los instantes iniciales la da la linearización de la ecuación (3.1) [7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \beta \sum_j A_{ij} \tilde{x}_j(t) \\ \tilde{x}(0) = x_0 = x(0) \end{cases}, \quad (3.2)$$

siendo  $\tilde{x}(t) = e^{\beta t A} x_0$  la solución de la ecuación (3.2). Cabe destacar además que al ser  $\beta(1 - x_i(t)) \sum_{j=1}^n A_{ij} x_j(t) \leq \beta \sum_j A_{ij} x_j(t)$  y  $\tilde{x}(0) = x_0 = x(0)$ ,  $\tilde{x}(t)$  es de hecho una cota superior de la solución de (3.1):  $x(t) \leq \tilde{x}(t) \ \forall t > 0$ . No obstante, sabiendo que  $\beta > 0$  y dadas las propiedades de la matriz de adyacencia  $A$ , el teorema de Perron-Frobenius [8, 9] nos asegura que el radio espectral de  $A$  es estrictamente positivo, lo cual significa que la aproximación  $\tilde{x}(t)$  diverge cuando  $t \rightarrow +\infty$ . Esto refuerza el hecho de que, si bien  $\tilde{x}(t)$  puede aproximar adecuadamente a  $x(t)$  en los instantes iniciales de la evolución de la red, ciertamente existirá un tiempo  $t_0$  y cierto nodo  $i_0$  para los que  $\tilde{x}_{i_0}(t) > 1 \ \forall t > t_0$  y la aproximación dejará de tener sentido.

En busca de una mejor estimación de la solución  $x(t)$  de (3.1) se usa el siguiente cambio de variable [7, 8], que conduce a otra cota superior de  $x(t)$ . Esta resultará ser mejor que la solución  $\tilde{x}(t)$  de (3.2), ya que no es una solución divergente:

$$x_i(t) = f(y_i) = 1 - e^{-y_i(t)} \in [0, 1] \implies y_i(t) = -\log(1 - x_i(t)) \in [0, +\infty) \quad (3.3)$$

La dinámica para las nuevas funciones  $y_i(t)$  queda sencillamente como:

$$\begin{cases} \frac{dy_i}{dt} = \beta \sum_j A_{ij} f(y_j) \\ y_i(0) = y_{0i} = -\log(1 - x_{0i}) \end{cases} \quad (3.4)$$

Sea  $y(t)$  la solución de (3.4), entonces tendremos que la solución de (3.1) se escribirá como  $x(t) = f(y(t))$ . La importancia de hacer este cambio de variable reside en que el sistema diferencial en (3.4)

puede aproximarse a un sistema lineal afín de la forma [7, 8]:

$$\begin{cases} \frac{d\hat{y}}{dt} = \beta \text{Adiag}(1 - x_0)\hat{y}(t) + \beta Ab(x_0) \\ \hat{y}_i(0) = y_{0i} = -\log(1 - x_{0i}) \end{cases}, \quad (3.5)$$

donde se define la función  $b(z) := z + (1 - z)\log(1 - z)$ , que actúa componente a componente sobre los vectores. Se denota por  $\hat{y}(t)$  a la solución de (3.5) que permite obtener  $\hat{x}(t) = f(\hat{y}(t))$ , la correspondiente nueva aproximación a  $x(t)$ .

A modo de aclaración, la derivación de la ecuación (3.5) tiene en cuenta la concavidad de la función  $f(y)$  [8]:

$$\begin{aligned} f(y_j(t)) &\leq f(y_j(0)) + f'(y_j(0))(y_j(t) - y_j(0)) = x_j(0) + (1 - x_j(0))(y_j(t) - y_j(0)) = \\ &= \underbrace{x_j(0) + (1 - x_j(0))\log(1 - x_j(0))}_{b(x_j(0))} + (1 - x_j(0))y_j(t) = b(x_j(0)) + (1 - x_j(0))y_j(t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

La solución de (3.5) resulta ser [7, 8]:

$$\hat{y}(t) = \exp(\beta t \hat{A}) f^{-1}(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^{k+1}}{(k+1)!} \hat{A}^k A \cdot b(x_0), \quad (3.7)$$

donde se define  $\hat{A} = A \cdot \text{diag}(1 - x_0)$ , siendo  $\text{diag}(1 - x_0)$  una matriz diagonal con  $1 - x_{0i}$  como elementos. Juntando (3.3) y (3.6) se puede demostrar lo siguiente [8]:

$$x(t) \leq \hat{x}(t) = f(\hat{y}(t)) \leq \tilde{x}(t) = e^{\beta t A} x_0 \quad (3.8)$$

Además, se tiene que  $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$  (como ya se había advertido) y  $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  [8].

### 3.2. Generalización al sistema diferencial fraccionario

Esta subsección intenta reproducir el razonamiento anterior involucrando la derivada de Caputo. Se parte de la construcción del sistema diferencial generalizado a orden fraccionario y se calculan las dos soluciones aproximadas, paralelamente a la línea seguida en la subsección 3.1. Con esto en mente se ha optado por mantener la notación utilizada antes para las tres soluciones de la dinámica:  $x(t)$  para la solución teórica,  $\tilde{x}(t)$  y  $\hat{x}(t)$  para las aproximadas.

La generalización del sistema diferencial en (3.1), que es la que se considera en el artículo [7], es la siguiente:

$$\begin{cases} D_t^\alpha (-\log(1 - x_i))(t) = \int_0^t \frac{1}{1 - x_i(\tau)} \frac{x'_i(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau = \beta^\alpha \sum_j A_{ij} x_j(t) \\ x_i(0) = x_{0i} \in [0, 1] \end{cases} \quad (3.9)$$

Se denota por  $x(t)$  a la solución de este sistema. Al fin y al cabo, se trata de una transformación de la ecuación (3.4), sustituyendo la derivada estándar por la de Caputo y contando ahora con un nuevo parámetro  $\alpha \in (0, 1)$  ( $\alpha = 1$  reproduce lo visto en la subsección 3.1). La diferencia está en que, según se ve en (3.9), el modo en que el sistema evoluciona en un momento  $t$  ya no solo está

determinado por el estado en tal instante, sino que intervienen también todos los estados por los que el sistema ha pasado anteriormente. Lo hacen dentro de la integral que define a la derivada de Caputo, pesados con un factor  $(t - \tau)^{-\alpha}$  que resta importancia a los estados menos recientes. En otras palabras, esta modificación de las ecuaciones dota al sistema de "memoria", y este recuerdo del pasado es más fuerte, tiene mayor repercusión en la dinámica, cuanto más se aproxime  $\alpha$  a 0. Esta es la principal interpretación física de la generalización de las ecuaciones de la dinámica que se ha llevado a cabo en este trabajo, siguiendo la línea de lo que se propone en [7].

Como punto de partida para afrontar el sistema diferencial fraccionario en (3.9), es importante esclarecer algunas de las propiedades de la derivada de Caputo. Dada la definición en (2.4), está clara la linealidad:  $D_0^\alpha(a \cdot f + b \cdot g) = a \cdot D_0^\alpha f + b \cdot D_0^\alpha g$ . En cuanto a la monotonía, se proporciona el siguiente resultado demostrado en [7, lema 3.1]:

$$\left. \begin{array}{l} D_t^\alpha f \geq 0 \ \forall t \\ f(0) = 0 \end{array} \right\} \implies f(t) > 0 \ \forall t \quad (3.10)$$

Esta ecuación (3.10) nos permite obtener la primera cota superior de la solución en (3.9), obtenida a partir de la linearización de tal sistema. Para obtenerla se tiene en cuenta que si  $x_i(0) \in [0, 1)$ , (3.10) garantiza que  $-\log(1 - x_i(t)) \geq -\log(1 - x_i(0)) > 0 \ \forall t$ , lo cual tiene dos consecuencias muy importantes. La primera es que  $x_i(t) \in [0, 1) \ \forall t$ , luego el sistema en (3.9) está bien definido. Y la segunda es que  $x_i$  es no decreciente [7]. Con esta información se procede a linearizar el sistema:

$$\left. \begin{array}{l} D_t^\alpha \tilde{x}_i(t) = \beta^\alpha \sum_j A_{ij} \tilde{x}_j(t) \\ \tilde{x}(0) = x_0 \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

La solución del sistema en (3.11) es conocida [7, 10], se trata de  $\tilde{x}(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha \beta^\alpha A)x_0$ . Puede verse que en lugar de la exponencial que se obtuvo en la subsección 3.1, ahora se tiene la conocida como función de Mittag-Leffler  $E_{a,b}$  [7, 10] en su versión matricial y con el segundo parámetro  $b = 1$ . Esta es de hecho una generalización de la función exponencial a través de estos dos parámetros reales  $a > 0$  y  $b$ , y se define a partir de su desarrollo de Taylor como [7, 10]:

$$E_{a,b}(M) := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{M^j}{\Gamma(aj + b)} \quad (3.12)$$

Cabe destacar también que en la expresión para  $\tilde{x}(t)$ , la variable temporal  $t$  aparece elevada al parámetro  $\alpha$ . Este hecho reaparecerá, y de hecho será de notable importancia, en la sección 4. Por otro lado, para comparar las respectivas soluciones de (3.9) y (3.11),  $x(t)$  y  $\tilde{x}(t)$ , se tiene en cuenta la definición (2.4) y la monotonía de la derivada de Caputo (ecuación (3.10)) para llegar a:

$$\begin{aligned} D_t^\alpha x_i(t) &= \int_0^t \frac{x_i'(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau \leq \int_0^t \frac{1}{1 - x_i(\tau)} \frac{x_i'(\tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau = D_t^\alpha (-\log(1 - x_i))(t) = \\ &\stackrel{(3.9)}{=} \beta^\alpha \sum_j A_{ij} x_j(t) \stackrel{(3.10)}{\implies} x(t) \leq \tilde{x}(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha \beta^\alpha A)x_0 = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^{\alpha j} A^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \right) x_0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Es decir, se obtiene aquí un resultado análogo al visto en la subsección 3.1: la solución del sistema lineal aproximado es cota superior de la solución del sistema original [7].

A continuación, se toma el mismo cambio de variable que en la subsección 3.1, en la ecuación (3.3). De hecho, la ecuación (3.9) ya estaba adaptada para este cometido. Se tiene simplemente, para  $y_i(t) = -\log(1 - x_i(t))$ :

$$D_t^\alpha y_i(t) = \beta^\alpha \sum_j A_{ij} f(y_j(t)) \quad (3.14)$$

Aplicando ahora la modificación ya vista en la subsección 3.1 con la ecuación (3.5), obtenemos el siguiente sistema diferencial fraccionario para  $\hat{y}(t)$ :

$$\begin{cases} D_t^\alpha \hat{y}(t) = \beta^\alpha \text{Adiag}(1 - x_0) \hat{y}(t) + \beta^\alpha b(x_0) \\ \hat{y}_i(0) = y_{0i} = -\log(1 - x_{0i}) \end{cases}, \quad (3.15)$$

donde  $\hat{x}(t) = f(\hat{y}(t))$  constituye una aproximación de la solución  $x(t)$  del sistema diferencial completo. De nuevo se llega a un sistema lineal afín, pero ahora con derivada fraccionaria. La solución, que es conocida también en este caso [7, 10], es:

$$\hat{y}(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha \beta^\alpha \hat{A}) f^{-1}(x_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\beta t)^{\alpha(k+1)} \hat{A}^k A b(x_0)}{\Gamma(\alpha(k+1) + 1)}, \quad (3.16)$$

donde se define  $\hat{A} = A \cdot \text{diag}(1 - x_0)$ . Puede verse la analogía entre esta ecuación (3.16) y la ecuación (3.7). Las diferencias que presenta (3.16) están en que por un lado la función de Mittag-Leffler aparece en lugar de la exponencial, y por otro lado en el sumatorio se tiene la función gamma de Euler generalizando el factorial a través del parámetro  $\alpha$ .

Finalmente, ya para completar esta subsección, en [7] se demuestra también el siguiente resultado, análogo a (3.8):

$$x(t) \leq \hat{x}(t) = f(\hat{y}(t)) \leq \tilde{x}(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha \beta^\alpha A) x_0 \quad (3.17)$$

Además, se tiene que  $\|\hat{x}(t) - x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0$  y  $\|\tilde{x}(t) - x(t)\| \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$  [7].

### 3.3. Comunicabilidad de la red con dinámica fraccionaria

Esta subsección parte del concepto de comunicabilidad entre dos nodos  $p$  y  $q$  de un grafo  $G$ , concepto que tiene que ver con el modo en el que se transmite una excitación dentro de la red fijando para ello el origen y el destino de la misma. La comunicabilidad entre dos nodos está relacionada con la distancia a la que se encuentran estos dentro de la red, con los caminos que los unen y la longitud (número de arcos) de cada uno de ellos. En un grafo  $G$ , llamamos camino del nodo  $p$  al nodo  $q$  a un subconjunto de ejes en  $E$  concatenados de la forma  $\{(p, r_1), (r_1, r_2), \dots, (r_{k-1}, r_k), (r_k, q)\}$ , y decimos que el camino es más o menos cortos en función del cardinal de este subconjunto. Un ejemplo de camino entre dos nodos fijos se da en la figura 1.

Podemos comenzar a relacionar este concepto con el contenido de las subsecciones 3.1 y 3.2 mediante la solución de la aproximación lineal del sistema ordinario, en (3.2), la cual era adecuada para los primeros instantes de evolución si las probabilidades iniciales eran suficientemente próximas a cero.

Considerando un único nodo  $p$ , tal solución quedó:

$$\tilde{x}_p(t) = \left( e^{\beta t A} x_0 \right)_p = \underbrace{\left( e^{\beta t A} \right)_{pp}}_A x_{0p} + \sum_{q \neq p} \underbrace{\left( e^{\beta t A} \right)_{pq}}_B x_{0q} \quad (3.18)$$

Para un instante  $t = t_1$  fijo, interpretamos las cantidades  $A$  y  $B$  (ecuación (3.18)) de la siguiente manera. La cantidad  $A$  se conoce en la bibliografía como centralidad de subgrafo [11] o circulabilidad, y su valor mide la fuerza con la que el mismo nodo  $p$  atrae de vuelta el agente infeccioso previamente propagado, contabilizando todos los caminos posibles que salen de  $p$  y vuelven a él. Las cantidades  $B$  se conocen como transmisibilidades  $p - q$ , y miden el grado de importancia de la vía de propagación del agente infeccioso del nodo  $p$  al nodo  $q$  contando todos los caminos que existen en el grafo  $G$  entre  $p$  y  $q$ . La probabilidad de que el nodo  $p$  esté infectado en el instante  $t_1$  depende por tanto de la estructura del grafo, de la circulabilidad en este mismo nodo y de todas las transmisibilidades con el resto de nodos de la red. Nótese que la serie de Taylor de la función de comunicabilidad entre dos nodos es la siguiente: [12, 13]:<sup>2</sup>

$$G_{pq} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left( A^k \right)_{pq} = (e^A)_{pq}, \quad (3.19)$$

donde  $A$  es la matriz de adyacencia del grafo  $G$ . Obsérvese que la contribución de los caminos de longitud  $k$  decrece rápidamente con esta cantidad al estar pesada por el factor  $1/k!$ . Y como ya se ha avanzado antes, cuando  $p \neq q$  se habla de transmisibilidad del nodo  $p$  al nodo  $q$ , mientras que si  $p = q$  se habla de circulabilidad en torno al nodo  $p$ .

En la subsección 3.2, la inclusión de la derivada fraccionaria de Caputo en las ecuaciones de la dinámica ha llevado a encontrar en la solución al sistema linearizado una generalización de la función exponencial, la función de Mittag-Leffler. Esto indica que al sustituir la derivada estándar por la de Caputo, los conceptos de circulabilidad y transmisibilidad son los mismos pero las cantidades que los cuantifican se ven modificadas. De este modo, si tenemos en cuenta la solución del sistema fraccionario linearizado  $\tilde{x}(t) = E_{\alpha,1}(t^\alpha \beta^\alpha A)x_0$ , con el mismo razonamiento que antes llegamos a definir las cantidades  $\bar{G}_{pq}^\alpha$ , que serán a fin de cuentas una forma de generalizar las comunicabilidades obtenida a través de tomar un orden fraccionario en la dinámica:

$$\bar{G}_{pq}^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha k + 1)} \left( A^k \right)_{pq} = (E_{\alpha,1}(A))_{pq} \quad (3.20)$$

En comparación con la ecuación (3.19), la forma de incluir al parámetro  $\alpha$  que se ha escogido en (3.20) da una mayor contribución a los caminos de mayor longitud, tal que  $\bar{G}_{pq}^\alpha \geq G_{pq}$ .

La idea ahora es considerar un grafo sencillo para estudiar la solución de la dinámica y comparar para él estas dos cantidades  $G_{pq}$  y  $\bar{G}_{pq}$ . Para este cometido se ha optado por la cadena lineal de  $n$  nodos,  $P_n$ .

---

<sup>2</sup>Se considera igualmente el caso  $p = q$

### 3.4. La cadena lineal. $G = P_n$ .

Considérese que el grafo  $G$  es la cadena lineal de  $n$  nodos,  $P_n$ , cuya matriz de adyacencia es:

$$A(P_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & \\ & \dots & 0 & 1 & 0 & \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Para esta matriz, escribiremos la comunicabilidad "estándar" y la generalizada como  $G_{pq}(n)$  y  $\bar{G}_{pq}^\alpha(n)$  respectivamente, dejando constancia del número de nodos  $n$  que hay en la red.

$P_n$  es un grafo conexo y no dirigido, luego su matriz de adyacencia  $A$  es simétrica y en consecuencia también es diagonalizable. Esto nos permite asumir que existe una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  compuesta por autovectores de  $P_n$  [14], los cuales son conocidos. Denotando con  $\varphi_j(p)$  a la componente  $p$ -ésima del autovector ortonormal  $j$ -ésimo, y con  $\lambda_j$  al correspondiente autovalor, se tiene [13]:

$$\varphi_j(p) = \sqrt{\frac{2}{n+1}} \sin\left(\frac{jp\pi}{n+1}\right) \quad (3.22a)$$

$$\lambda_j = 2 \cdot \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) \quad (3.22b)$$

El teorema de descomposición espectral afirma lo siguiente:

$$A(P_n) = \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \varphi_j^T, \quad (3.23)$$

donde  $\left\{p_j := \varphi_j \varphi_j^T\right\}_{1 \leq j \leq n}$  es un conjunto de  $n$  proyectores, los cuales verifican las igualdades  $p_i p_j = \delta_{ij} p_j$  para cualquier pareja  $1 \leq i, j \leq n$ . Sea ahora una función matricial  $f : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  definida a través de su serie de potencias:

$$f(M) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k M^k; \quad a_k \in \mathbb{R} \quad (3.24)$$

Se quiere estudiar cómo queda escrito el teorema de descomposición espectral en (3.23) para la matriz  $f(A(P_n))$ . En primer lugar, se puede comprobar que:<sup>3</sup>

$$(A(P_n))^k = \left( \sum_{j=1}^n \lambda_j \varphi_j \varphi_j^T \right)^k = \sum_{j_1, \dots, j_k}^n \lambda_{j_1} \cdot \dots \cdot \lambda_{j_k} \varphi_{j_1} \varphi_{j_1}^T \cdot \dots \cdot \varphi_{j_k} \varphi_{j_k}^T = \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \varphi_j \varphi_j^T \quad (3.25)$$

---

<sup>3</sup>En la suma con  $k$  índices, todos se anulan a no ser que se tenga la coincidencia general:  $j_1 = \dots = j_k$

Teniendo (3.25) en cuenta:

$$f(A(P_n)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \varphi_j \varphi_j^T = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda_j^k \right) \varphi_j \varphi_j^T = \sum_{j=1}^n \check{f}(\lambda_j) \varphi_j \varphi_j^T, \quad (3.26)$$

donde  $\check{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es la “particularización” de la serie de potencias de  $f$  a los reales. El razonamiento expuesto detalla cómo el teorema de descomposición espectral permite extender, de forma sencilla en cuanto a notación, la exponencial matricial a la función de Mittag-Leffler aplicada a  $A(P_n)$ :

$$e^{A(P_n)} = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j} \varphi_j \varphi_j^T \longrightarrow E_{\alpha,1}(A(P_n)) = \sum_{j=1}^n E_{\alpha,1}(\lambda_j) \varphi_j \varphi_j^T \quad (3.27)$$

Ahora, teniendo en cuenta esta ecuación (3.27), se reformulan tanto (3.19) como (3.20) para calcular la comunicabilidad estándar y la generalización aportada en este trabajo. La primera queda [13]:

$$\begin{aligned} G_{pq}(n) &= (\exp(A(P_n)))_{pq} = \sum_{j=1}^n e^{\lambda_j} \varphi_j(p) \varphi_j(q) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \left[ \cos\left(\frac{j\pi(p-q)}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{j\pi(p+q)}{n+1}\right) \right] e^{2\cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Sustituyendo la exponencial por  $E_{\alpha,1}$  se obtiene la comunicabilidad generalizada:

$$\begin{aligned} \bar{G}_{pq}^{\alpha}(n) &= (E_{\alpha,1}(A(P_n)))_{pq} = \sum_{j=1}^n E_{\alpha,1}(\lambda_j) \varphi_j(p) \varphi_j(q) = \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n \left[ \cos\left(\frac{j\pi(p-q)}{n+1}\right) - \cos\left(\frac{j\pi(p+q)}{n+1}\right) \right] E_{\alpha,1}\left(2 \cdot \cos\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)\right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si ahora en (3.28) se toma el límite cuando  $n$  tiende a  $\infty$ , se transforma el sumatorio en integral identificando la variable  $\theta = \frac{\pi j}{n+1}$  y se obtiene [13]:

$$G_{pq} = \lim_{n \rightarrow \infty} G_{pq}(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(\theta(p-q)) - \cos(\theta(p+q))] e^{2\cos\theta} d\theta = I_{p-q}(2) - I_{p+q}(2) \quad (3.30)$$

Este resultado se da en función de la función de Bessel modificada de primer orden  $I_{\nu}(x)$  para  $x = 2$  y considerando  $\nu \in \mathbb{Z}$ . Esta función se define en su forma integral del siguiente modo [15, pág. 376]:

$$I_{\nu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{x \cos \theta} \cos(\nu \theta) d\theta \quad (3.31)$$

Nótese en (3.31) que  $I_{\nu} = I_{-\nu}$  por las propiedades del coseno. Por este motivo, a partir de ahora asumiremos que  $\nu \in \mathbb{Z}^+ := \{n \in \mathbb{Z} | n \geq 0\}$ . Al tomar el límite  $n \rightarrow \infty$  en (3.29), se obtiene un resultado análogo, pero con la función de Mittag-Leffler dentro de la integral en lugar de la exponencial:

$$\bar{G}_{pq}^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{G}_{pq}^\alpha(n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos(\theta(p-q)) - \cos(\theta(p+q))] E_{\alpha,1}(2 \cos \theta) d\theta = \mathcal{E}_{p-q,\alpha}(2) - \mathcal{E}_{p+q,\alpha}(2) \quad (3.32)$$

En esta ecuación (3.32) ya se ha tenido en cuenta la definición de esta nueva función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ , que es:

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(\nu \theta) E_{\alpha,1}(x \cos \theta) d\theta \quad (3.33)$$

Esta es una generalización de la función de Bessel modificada de primer orden, pues se cumple que  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha=1} = I_\nu$ . Y al igual que la función a la que generaliza, se cumple que  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha} = \mathcal{E}_{-\nu,\alpha}$ , luego de ahora en adelante se asumirá que  $\nu \in \mathbb{Z}^+$  gracias a esta simetría.

$\bar{G}_{pq}^\alpha$  es la redefinición de las comunicabilidades al sofisticar la dinámica con la derivada de Caputo. Escogiendo  $q = 1$ , estas cantidades se han representado en la figura 2.

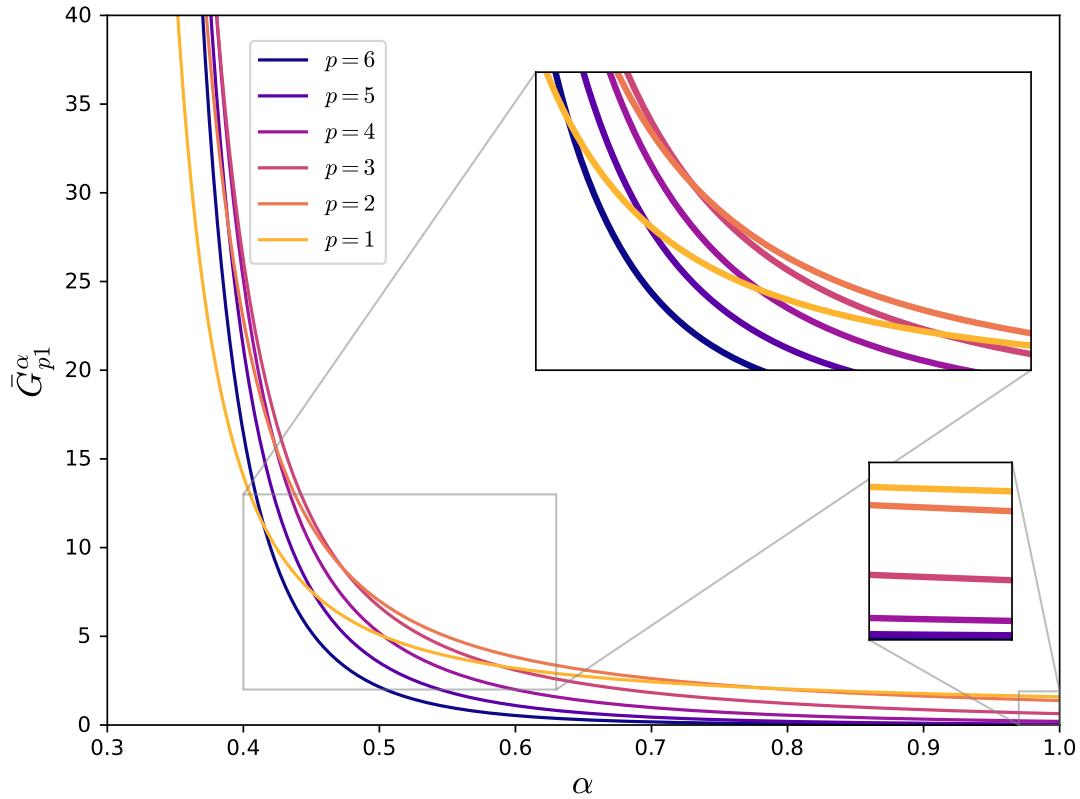


Figura 2: representación gráfica de  $\bar{G}_{p1}^\alpha = \mathcal{E}_{p-1,\alpha}(2) - \mathcal{E}_{p+1,\alpha}(2)$ , las comunicabilidades entre el nodo 1 de la cadena lineal (infinita) y el nodo  $p$ , en función de  $\alpha$ . Esto se ha hecho para seis valores diferentes de  $p$ , incluyendo la circulabilidad para  $p = 1$ . En esta figura se hace énfasis en dos zonas, la correspondiente a  $\alpha = 1$  para incorporar la comunicabilidad estándar  $G_{p1}^\alpha$ , y la correspondiente a  $\alpha \in (4/10, 6/10)$ , donde las curvas se cruzan entre sí.

Se observa que para valores de  $\alpha$  próximos a 1 todas las comunicabilidades decrecen con  $p$ , es decir,  $p_1 < p_2 \implies \bar{G}_{p_1 1}^\alpha > \bar{G}_{p_2 1}^\alpha$ . No obstante, disminuyendo el valor de  $\alpha$  esto deja de ser así, tal que

las comunicabilidades con nodos más lejanos pasan a ser mayores que las correspondientes a otros más próximos en la red. En otras palabras y conectando con lo explicado para la definición (3.20), la comunicación entre el nodo 1 y los más alejados de él va adquiriendo mayor importancia al disminuir  $\alpha$ . Esto puede entenderse recordando lo explicado en la subsección 3.2. El aumento de la memoria del sistema al disminuir  $\alpha$ , para recordar sus estados pasados, se puede interpretar en los términos de esta subsección. Con la figura 2 vemos como al considerar valores menores de  $\alpha$ , los nodos más lejanos empiezan a tener un papel más relevante en la comunicabilidad, llegando incluso a ser más importantes en este sentido que otros que estén más cerca (unidos por un camino más corto). Podría decirse que el agente infeccioso o la excitación que se propaga por la red va guardando más información sobre los nodos que ha ido visitando y los que se encuentran a su alcance, lo que se traduce en aumento de la comunicabilidad  $\bar{G}_{pq}^\alpha$  con todos ellos.

#### 4. Estudio de la función generalizada de Bessel $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}$

En esta penúltima sección se van a estudiar algunas propiedades fundamentales de la función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ . Esta es la generalización de la función de Bessel modificada de primer orden  $I_\nu(x)$ , parte central de este trabajo y original del mismo. De hecho, se ha definido por primera vez en la literatura justo al final de la sección anterior.  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  se representa para distintos valores de  $\nu$  y  $\alpha$  en la figura (3):

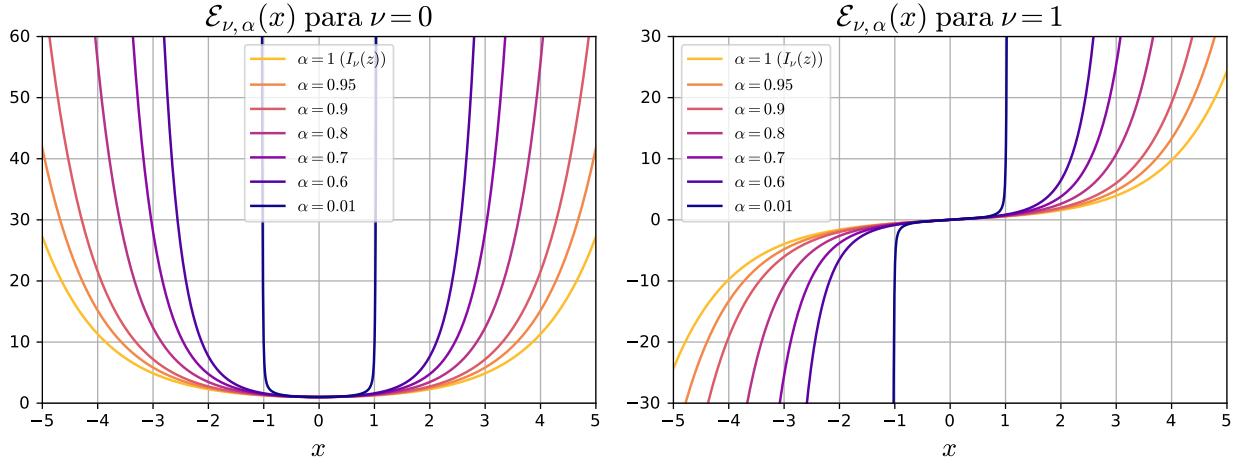


Figura 3: representación gráfica de la función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  para distintos valores de  $\alpha$ , incluyendo los casos extremos  $\alpha = 1$  (que corresponde a  $I_\nu(x)$ ) y  $\alpha = 0,01$  (muy próximo a 0). Esto se ha hecho para los dos primeros valores posibles de  $\nu$ . Obsérvese que, para un valor fijo de  $x$ , el valor de su imagen a través de la función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  aumenta al disminuir  $\alpha$ .

Esta generalización ha aparecido al estudiar las propiedades de comunicabilidad entre los nodos de un grafo. Hemos visto que el hecho de escoger un orden fraccionario en la dinámica del modelo epidemiológico SI afecta a la forma en la que el agente infeccioso se propaga a través de la red, y esto ha sido interpretado redefiniendo las comunicabilidades entre nodos (ecuación (3.20)). Esta labor la hemos llevado a cabo para un grafo en concreto, la cadena lineal con infinitos nodos. No obstante, la aparición de la generalización de la función de Bessel  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  no es exclusiva de este caso particular.

Por ejemplo, aparecería también para el grafo cíclico de  $n$  nodos,  $C_n$ , al tomar  $n \rightarrow \infty$ .

#### 4.1. Desarrollo en serie de la función $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}$ y estudio de su convergencia

Para obtener el desarrollo en serie de potencias de  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}$ , incorporamos la definición de la función de Mittag-Leffler (3.12) en la integral (3.33):

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j \cos(\theta)^j}{\Gamma(\alpha j + 1)} \cos(\nu\theta) d\theta = \sum_{j=0}^{\infty} \underbrace{\left[ \frac{1}{\pi \Gamma(\alpha j + 1)} \int_0^\pi \cos(\theta)^j \cos(\nu\theta) d\theta \right]}_{:=a_j(\nu,\alpha)} x^j \quad (4.1)$$

Para obtener los coeficientes  $a_j(\nu, \alpha)$  de la serie de potencias, téngase en cuenta que al fin y al cabo  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  es una generalización de la función de Bessel modificada de primer orden,  $I_\nu(x)$ , de la cual se conoce su desarrollo en serie [15, pág. 375]. Siendo  $\nu \in \mathbb{Z}^+$ :

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(\nu\theta) d\theta = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! (\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (4.2)$$

Al igualar (4.2) y (4.1) tomando  $\alpha = 1$ , se llega al valor de la integral definida en función de  $j$  y  $\nu$  como:

$$\int_0^\pi \cos(\theta)^j \cos(\nu\theta) d\theta = \begin{cases} \frac{\pi \cdot j!}{\left(\frac{j-\nu}{2}\right)! \left(\frac{j+\nu}{2}\right)! \cdot 2^j} & \text{si } j \geq \nu \text{ y } j + \nu \text{ es par} \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (4.3)$$

De esta manera, basta sustituir (4.3) en (4.1) para llegar a:

$$\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu + 2k)!}{\Gamma(\alpha(\nu + 2k) + 1)} \frac{1}{k! (\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (4.4)$$

Es sencillo ver que el término  $\frac{(\nu+2k)!}{\Gamma(\alpha(\nu+2k)+1)}$  es el que da la generalización de los coeficientes en (4.2) y se hace igual a 1 cuando  $\alpha = 1$ .

En cuanto a la convergencia de la serie de potencias (4.4), se tiene la siguiente proposición.

#### Proposición 4.1.

La serie de potencias

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu + 2k)!}{\Gamma(\alpha(\nu + 2k) + 1)} \frac{1}{k! (\nu + k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu} \quad (4.5)$$

converge  $\forall x$  si  $\alpha \in (0, 1]$  y en el caso límite  $\alpha = 0$  converge si  $|x| < 1$  y diverge si  $|x| > 1$ .

## Demostración

Se denotan los coeficientes de la serie anterior como  $a_j(\nu, \alpha)$ , los cuales son iguales a:

$$a_j(\nu, \alpha) = \begin{cases} \frac{(\nu + 2k)!}{\Gamma(\alpha(\nu + 2k) + 1)} \frac{1}{k!(\nu + k)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} & \text{si } j = 2k + \nu, \ k \in \mathbb{Z}^+ \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \quad (4.6)$$

Se aplica el teorema de Cauchy-Hadamard para calcular el radio de convergencia  $R(\nu, \alpha)$  de la serie de potencias (4.5) para los diferentes valores de  $\alpha$ . Este es:

$$R(\nu, \alpha) = \frac{1}{\limsup_{j \rightarrow \infty} (|a_j(\nu, \alpha)|^{1/j})} \quad (4.7)$$

En primer lugar, basta observar la expresión (4.6) para ver que en el límite  $j \rightarrow \infty$ , o más bien  $k \rightarrow \infty$ , estos coeficientes perderán la dependencia con  $\nu$ , luego se tendrá  $R(\nu, \alpha) \equiv R(\alpha)$ . Por otro lado, para calcular el límite superior anterior sólo repercutirán los valores  $j = 2k + \nu$ , para los que el coeficiente es no nulo. De este modo:<sup>4</sup>

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} (|a_j(\nu, \alpha)|^{1/j}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_{2k+\nu}(\nu, \alpha)|^{1/(2k+\nu)}) = \limsup_{k \rightarrow \infty} (|a_{2k+\nu}(\nu, \alpha)|^{1/(2k)}) \quad (4.8)$$

En el caso  $\alpha = 1$ , los coeficientes  $a_j$  no nulos, que se tienen con  $j = 2k + \nu, k \in \mathbb{Z}^+$ , se comportan de la siguiente forma al hacer tender  $k$  al infinito:

$$a_{2k+\nu}(\nu, 1) \sim \frac{1}{(k!)^2 4^k} \sim \frac{e^{2k}}{(2k)^{2k} 2\pi k} \implies (a_{2k+\nu}(\nu, 1))^{1/(2k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (4.9)$$

Habiéndose empleado la aproximación de Stirling,  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . De este modo, para  $\alpha = 1$  se tiene  $R(1) = +\infty$  y la convergencia de la serie es global en esta situación.

En el caso  $\alpha = 0$ , los coeficientes  $a_j$  no nulos se comportan de la siguiente forma al hacer tender  $k$  al infinito:

$$a_{2k+\nu}(\nu, 0) \sim \frac{(2k)!}{(k!)^2 4^k} \sim \frac{\sqrt{4\pi k}}{2\pi k} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \implies (a_{2k+\nu}(\nu, 0))^{1/(2k)} \sim (\pi k)^{-1/(4k)} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1 \quad (4.10)$$

Así, para  $\alpha = 0$  se tiene  $R(0) = 1$ , luego la serie de potencias (4.5) converge en  $z$  si  $|z| < 1$  y no converge si  $|z| > 1$ .

Para finalizar, se aborda el caso de interés  $\alpha \in (0, 1)$ . En esta situación, los coeficientes  $a_j$  no nulos se comportan al hacer tender  $k$  al infinito de la siguiente manera:

$$a_{2k+\nu}(\nu, \alpha) \sim \frac{(e/\alpha)^{2\alpha k}}{(2k)^{2\alpha k} 2\pi k \sqrt{\alpha}} \implies (a_{2k+\nu}(\nu, 0))^{1/(2k)} \sim \frac{(e/\alpha)^\alpha}{(2k)^\alpha (2\pi k \sqrt{\alpha})^{1/2k}} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad (4.11)$$

---

<sup>4</sup> $2k + \nu \sim 2k$  cuando  $k \rightarrow \infty$

Aquí, además de la aproximación de Stirling para el factorial, se ha empleado también para la función gamma de Euler de la forma  $\Gamma(\alpha(\nu + 2k) + 1) \sim \Gamma(2\alpha k + 1) \sim (2\alpha k)^{2\alpha k} e^{-2\alpha k} \sqrt{4\pi\alpha k}$ . De este modo, se ha comprobado que  $R(\alpha) = +\infty$  para  $\alpha \in (0, 1)$  y por consiguiente la convergencia también es global en esta situación. □

El cumplimiento de esta proposición puede verse representado en la figura (3), donde se observa que para un valor de  $\alpha$  muy próximo a 0, la función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  crece bruscamente hacia infinito en torno a los valores  $x = \pm 1$ . Otras propiedades que también se visualizan en la figura (3) son las de paridad. Si atendemos al desarrollo en serie en la ecuación (4.4), se ve que  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  es una función par para  $\nu = 0$  o par y que es una función impar para  $\nu$  impar.

## 4.2. Ecuaciones de recurrencia de $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$

El número de funciones reconocidas como funciones de Bessel es bastante amplio, pero todas ellas verifican ciertas propiedades específicas, siendo las propiedades de recurrencia algunas de las más representativas. La función que nos concierne en este trabajo es  $I_\nu(x)$  para  $\nu \in \mathbb{Z}^+$ , que satisface las siguientes ecuaciones de recurrencia [15, 16]:

$$\frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) = x^\nu I_{\nu-1}(x) \quad (4.12a)$$

$$\frac{d}{dx} (x^{-\nu} I_\nu(x)) = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \quad (4.12b)$$

Desarrollando (4.12a) y (4.12b) se llega a lo siguiente:

$$\frac{d}{dx} (x^\nu I_\nu(x)) = \nu x^{\nu-1} I_\nu(x) + x^\nu \frac{d}{dx} I_\nu(x) = x^\nu I_{\nu-1}(x) \iff \frac{d}{dx} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (x^{-\nu} I_\nu(x)) &= -\nu x^{-\nu-1} I_\nu(x) + x^{-\nu} \frac{d}{dx} I_\nu(x) = x^{-\nu} I_{\nu+1}(x) \iff \\ &\iff \frac{d}{dx} I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \end{aligned} \quad (4.13b)$$

Sumando (4.13a) y (4.13b) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} I_\nu(x) = \frac{1}{2} I_{\nu-1}(x) + \frac{1}{2} I_{\nu+1}(x) \quad (4.14)$$

Llegados a este punto, los esfuerzos se centran ahora en encontrar ecuaciones de recurrencia para  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  que generalicen las vistas para  $I_\nu(x)$ . Concretamente, las expresiones que se han conseguido generalizar son (4.13a), (4.13b) y (4.14). Antes de llegar a las mismas, demostremos dos lemas auxiliares.

### Lema 4.2.

Sea  $\alpha \in (0, 1)$  y  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  una serie de potencias con radio de convergencia  $R \in (0, +\infty]$ . Entonces, considerando la derivada de Caputo y la integral de Riemann-Liouville de la serie, se cumple:

$$D_x^\alpha f(x) = D_x^\alpha \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_x^\alpha x^n \quad (4.15a)$$

$$\mathcal{I}^\alpha f(x) = \mathcal{I}^\alpha \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{I}^\alpha x^n \quad (4.15b)$$

### Demostración

Teniendo en cuenta que el razonamiento para demostrar tanto (4.15a) como (4.15b) es el mismo, se demuestra únicamente el primer resultado, contando con la derivada de Caputo. La teoría de la convergencia de las series de potencia permite escribir la serie de potencias de la derivada estándar  $f'(x)$  como:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (4.16)$$

Y además sabemos que esta serie también converge para  $|x| < R$ . Ahora, por la definición (2.4) de derivada de Caputo se tiene:

$$\begin{aligned} D_x^\alpha f(x) &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{f'(\tau)}{(x-\tau)^\alpha} d\tau = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{\sum_{n=1}^{\infty} n a_n \tau^{n-1}}{(x-\tau)^\alpha} d\tau = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} g_n(\tau) d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^x \frac{n \tau^{n-1}}{(x-\tau)^\alpha} d\tau = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D_t^\alpha x^n \end{aligned} \quad (4.17)$$

Al ser  $g_n(\tau) := n a_n \tau^{n-1} (x-\tau)^{-\alpha}$  funciones positivas en el intervalo  $(0, x)$ , el teorema de convergencia monótona permite intercambiar sumatorio e integral en la ecuación anterior.

□

Este lema permite estudiar la derivada de Caputo de una función al derivar su serie de potencias término a término. En esta posición presentamos el segundo lema auxiliar.

### Lema 4.3.

Sea  $\alpha \in (0, 1]$  y  $\nu \in \mathbb{N}$ :

$$\alpha \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k! (k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} \quad (4.18)$$

### Demostración

El Lema 4.2 permite calcular  $\mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha))$  integrando parcialmente cada término de su serie de potencias. Además, se sabe que esta operación se puede aplicar a potencias de  $x$  con exponente

mayor a  $-1$ , como se ha comprobado en la demostración del [Lema 2.3](#). Esto nos permite escribir lo siguiente (siendo  $\alpha(2k + \nu) - 1 > -1$  para todo  $k$  y  $\nu$  posibles):

$$\alpha \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha)) \stackrel{4.2}{=} \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) + 1)} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{\alpha(2k+\nu)-1}) \quad (4.19)$$

Teniendo en cuenta el lema [Lema 2.3](#) con  $r = \alpha(2k + \nu) - 1$  y  $\gamma = 1 - \alpha \in (0, 1)$ , se identifica:

$$\mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{\alpha(2k+\nu)-1}) = \frac{\Gamma(\alpha(2k + \nu) - 1 + 1)}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) - 1 + 2 - \alpha)} x^{\alpha(2k+\nu)-1+1-\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha(2k + \nu))}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} x^{\alpha(2k+\nu-1)} \quad (4.20)$$

Insertando (4.20) en (4.19), se obtiene la igualdad del enunciado:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha)) &= \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) + 1)} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} \frac{\Gamma(\alpha(2k + \nu))}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\ &= \alpha \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha(2k + \nu) \Gamma(\alpha(2k + \nu))} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} \frac{\Gamma(\alpha(2k + \nu))}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} \frac{(2k + \nu - 1)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} \quad (4.21) \end{aligned}$$

□

En esta situación, se pasa a presentar y demostrar las ecuaciones de recurrencia generalizadas para  $\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x)$ .

#### Proposición 4.4.

Sea  $\nu \in \mathbb{Z}^+$  y  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$D_x^\alpha (\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{\nu-1, \alpha}(x^\alpha) - \alpha \nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha)) \quad (4.22)$$

#### Demostración

Sea  $\nu \in \mathbb{N}$ . Tratamos de encontrar la ecuación (4.22) al desarrollar la serie de potencias correspondiente a  $D_x^\alpha (\mathcal{E}_{\nu, \alpha}(x^\alpha))$ . Tenemos en cuenta el [Lema 2.2](#) con  $r = \alpha(2k + \nu)$ :

$$\begin{aligned}
D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu)+1)} \frac{(2k+\nu)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} D_x^\alpha \left( x^{\alpha(2k+\nu)} \right) = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu)+1)} \frac{(2k+\nu)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} \frac{\Gamma(\alpha(2k+\nu)+1)}{\Gamma(\alpha(2k+\nu)-\alpha+1)} x^{\alpha(2k+\nu)-\alpha} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2k+\nu}{k+\nu} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu-1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{\nu}{k+\nu} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu-1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu-1}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu}{k+\nu} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu-1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \boxtimes
\end{aligned} \tag{4.23}$$

La serie que aparece restando a  $\mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha)$  (que puede ser identificada fácilmente en (4.23)) se ha escrito como  $\boxtimes$ . Buscamos relacionarla con  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)$ , y para ello tenemos en cuenta el [Lema 4.3](#):

$$\boxtimes = \nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \tag{4.24}$$

Incorporando este resultado, llegamos a demostrar el enunciado:

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \boxtimes = \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) - \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha} (x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \tag{4.25}$$

Ahora, recordando que  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha} = \mathcal{E}_{-\nu,\alpha}$ , para  $\nu = 0$  se tiene:

$$\begin{aligned}
D_t^\alpha(\mathcal{E}_{0,\alpha}(x^\alpha)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k)+1)} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{1}{2^{2k}} D_0^\alpha \left( x^{\alpha(2k)} \right) = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k-1)+1)} \frac{(2k)!}{k!k!} \frac{1}{2^{2k}} x^{\alpha(2k-1)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2(k-1)+1)+1)} \frac{(2(k-1)+1)!}{(k-1)!k!} \frac{2}{2^{2(k-1)+2}} x^{\alpha(2(k-1)+1)} = \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+1)+1)} \frac{(2k+1)!}{k!(k+1)!} \frac{1}{2^{2k+1}} x^{\alpha(2k+1)} = \mathcal{E}_{1,\alpha}(x^\alpha) = \mathcal{E}_{-1,\alpha}(x^\alpha)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

□

### Corolario 4.4.1

La ecuación (2.3b) vista en la sección 2, junto con el resto de definiciones involucradas, permite estudiar el límite  $\alpha \rightarrow 1^-$  sustituyendo simplemente  $\alpha = 1$  en la ecuación (4.22). En esta situación, se tiene que  $D_x^{\alpha=1} = d/dx$  y  $\mathcal{I}^{1-1} \equiv \mathbb{I}$ , operador identidad. De este modo se recupera la ecuación de recurrencia (4.13a) para  $I_\nu(x)$ :

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{d}{dx} I_\nu(x) = I_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \quad (4.27)$$

### Proposición 4.5.

Sea  $\nu \in \mathbb{Z}^+$  y  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) + \alpha\nu \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \quad (4.28)$$

### Demostración

Sea  $\nu \in \mathbb{N}$ . Tratamos de encontrar la ecuación (4.28) al desarrollar la serie de potencias correspondiente a  $D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha))$ , esta vez de una manera diferente. Tenemos en cuenta el Lema 2.2 con  $r = \alpha(2k + \nu)$ :

$$\begin{aligned} D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) + 1)} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} D_x^\alpha(x^{\alpha(2k+\nu)}) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) + 1)} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} \frac{\Gamma(\alpha(2k + \nu) + 1)}{\Gamma(\alpha(2k + \nu) - \alpha + 1)} x^{\alpha(2k+\nu)-\alpha} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} \frac{(2k + \nu)!}{k! (k + \nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu)-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{2k + \nu}{k + \nu} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} \frac{(2k + \nu - 1)!}{k! (k + \nu - 1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu)-1} = \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k}{k + \nu} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} \frac{(2k + \nu - 1)!}{k! (k + \nu - 1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu)-1}}_{(A)} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu}{k + \nu} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k + \nu - 1) + 1)} \frac{(2k + \nu - 1)!}{k! (k + \nu - 1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu)-1}}_{(B)} \quad (4.29) \end{aligned}$$

Reescribamos en primer lugar la serie etiquetada como (A). Dado que la contribución del sumando para  $k = 0$  es nula, podemos iniciar el índice de sumación en  $k = 1$ :

$$\begin{aligned}
(A) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k}{k+\nu} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu-1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{(k-1)!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu-1}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2(k-1)+\nu+1)+1)} \frac{(2(k-1)+\nu+1)!}{(k-1)!(k-1+\nu+1)!} \frac{1}{2^{2(k-1)+\nu+1}} x^{\alpha(2(k-1)+\nu+1)} \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Identificando como  $k-1$  el índice de sumación (que ahora partirá de 0), nos queda finalmente:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu+1)+1)} \frac{(2k+\nu+1)!}{k!(k+\nu+1)!} \frac{1}{2^{2k+\nu+1}} x^{\alpha(2k+\nu+1)} = \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) \quad (4.31)$$

Ahora reescribimos  $(B)$  (que coincide con  $\boxtimes$  definido en la demostración de la [Proposición 4.4](#)) de la siguiente forma, utilizando el [Lema 4.3](#):

$$(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu \frac{1}{\Gamma(\alpha(2k+\nu-1)+1)} \frac{(2k+\nu-1)!}{k!(k+\nu)!} \frac{1}{2^{2k+\nu}} x^{\alpha(2k+\nu-1)} = \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \quad (4.32)$$

Combinando estos dos resultados, llegamos a demostrar el enunciado:

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = (A) + (B) = \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) + \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \quad (4.33)$$

Ahora, para  $\nu = 0$ , aplicamos la [Proposición 4.4](#) sabiendo que  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha} = \mathcal{E}_{-\nu,\alpha} \forall \nu \in \mathbb{N}$ :

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{0,\alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{-1,\alpha}(x^\alpha) + 0 = \mathcal{E}_{1,\alpha}(x^\alpha) \quad (4.34)$$

□

### Corolario 4.5.1.

Al igual que en el [Corolario 4.4.1](#), el límite  $\alpha \rightarrow 1^-$  se estudia sustituyendo  $\alpha = 1$  en la ecuación [\(4.28\)](#) gracias a la ecuación [\(2.3b\)](#):

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) + \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \xrightarrow[\alpha \rightarrow 1^-]{} \frac{d}{dx} I_\nu(x) = I_{\nu+1}(x) + \frac{\nu}{x} I_\nu(x) \quad (4.35)$$

Así se recupera la ecuación de recurrencia [\(4.13b\)](#) para  $I_\nu(x)$ .

### Proposición 4.6.

Sea  $\nu \in \mathbb{Z}^+$  y  $\alpha \in (0, 1)$ :

$$D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) + \frac{1}{2} \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) \quad (4.36)$$

## Demostración

Es consecuencia directa de la [Proposición 4.4](#) y la [Proposición 4.5](#):

$$\begin{aligned} 2D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) &= \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) + \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) + \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) - \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \\ &= \mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) + \mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) \implies D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\nu-1,\alpha}(x^\alpha) + \frac{1}{2}\mathcal{E}_{\nu+1,\alpha}(x^\alpha) \end{aligned} \quad (4.37)$$

Es sencillo comprobar, con lo visto hasta ahora en el [Corolario 4.4.1](#) y el [Corolario 4.5.1](#), que al tomar  $\alpha = 1$  en esta expresión se obtiene la ecuación [\(4.14\)](#).

□

### 4.3. Breve discusión sobre las recurrencias

A la hora de comenzar la búsqueda de posibles extensiones de las recurrencias [\(4.12a\)](#) y [\(4.12b\)](#) de la función de Bessel  $I_\nu$ , la reescritura de estas dos expresiones a las ecuaciones [\(4.13a\)](#) y [\(4.13b\)](#) fue fundamental para llegar a los resultados vistos previamente. De hecho, ya se ha mencionado que las recurrencias [\(4.22\)](#) y [\(4.28\)](#) son generalizaciones de estas ecuaciones [\(4.13a\)](#) y [\(4.13b\)](#), después de ser estas últimas reescritas.

No obstante, cuando en la bibliografía se habla de las recurrencias que satisfacen las distintas funciones de Bessel, lo más habitual es encontrárselas como en [\(4.12a\)](#) y [\(4.12b\)](#). En este punto uno puede preguntarse si sería posible generalizar estrictamente estas dos ecuaciones, sin manipular. Si, por ejemplo, se podría conseguir algo de la forma:

$$\mathcal{E}_{\nu\mp1,\alpha}(x^\alpha) = D_x^\alpha(\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \pm \alpha\nu \cdot \mathcal{I}^{1-\alpha}(x^{-1} \cdot \mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) \longrightarrow D_x^\alpha(x^{\pm\alpha\nu}\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha)) = ?? \quad (4.38)$$

Como tal, este cometido no pudo ser completado. A la hora de desglosar el desarrollo en serie de la expresión  $D_x^\alpha(x^{\pm\alpha\nu}\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha))$ , aparecían complicaciones para manipular los parámetros  $k$  y  $\nu$  como argumentos de las funciones  $\Gamma$ , las cuales impedían la obtención de un resultado coherente.

Otra idea en esta situación fue la de agrupar términos en los resultados que ya se tenían, las ecuaciones [\(4.22\)](#) y [\(4.28\)](#). Es decir, utilizar una generalización de la regla de Leibniz con la derivada de Caputo para llegar a tener  $D_x^\alpha(x^{\pm\alpha\nu}\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x^\alpha))$  o algo similar en uno de los miembros de la igualdad. De nuevo, esto no pudo lograrse, en este caso debido a lo complejo que resulta extender la regla de Leibniz cuando hablamos de derivadas fraccionarias. Para dar cuenta de las dificultades encontradas, en el artículo [\[17\]](#) se proporciona una generalización de la regla de Leibniz involucrando la derivada de Caputo. Esta es:

$$D_x^\alpha(f(x) \cdot g(x)) = \sum_{l=0}^{\infty} C(\alpha, l) \cdot g^{(l)}(x) D_x^{(\alpha-l)}(f(x)), \quad (4.39)$$

donde  $C(\alpha, l)$  es una cantidad que generaliza los números combinatorios y se define como:

$$C(\alpha, l) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(\alpha - l + 1) \Gamma(l + 1)} \quad (4.40)$$

Si bien ya se ve en (4.39) que la regla de Leibniz deja de ser tan sencilla cuando no se trabaja con la derivada estándar, al aplicar esta expresión sobre nuestras funciones se alcanzaron problemas técnicos semejantes a los anteriores, que impidieron llegar a la generalización en la forma deseada.

## 5. Conclusiones

En matemáticas, cualquier función  $f$  que uno considere puede ser generalizada por otra función  $F$ , que contando con un parámetro extra recuperará la función inicial  $f$  cuando este toma cierto valor concreto. La manera en la que se generaliza  $f$  puede ser elegida arbitrariamente, pero también puede estar motivada por un razonamiento previo. Cuando, por ejemplo, se llega a la misma a partir de un planteamiento más general del problema de partida, o se busca satisfacer un objetivo final, que es el caso de este trabajo de fin de grado. En él, hemos encontrado una generalización de la función de Bessel modificada de primer orden  $I_\nu(x)$  a través de la incorporación de la derivada fraccionaria de Caputo a las ecuaciones de la dinámica de modelos compartimentales. Y esto se hizo con un propósito, pues se sabe que una modificación semejante incorpora características físicas relevantes de las redes reales a la modelización [7].

No obstante, es evidente que se pueden llegar a construir muchas otras generalizaciones de la función  $I_\nu(x)$ . Particularmente, en el artículo [2] se presenta una forma alternativa de hacerlo, también a partir de su serie de potencias. Tal generalización, que ha tenido una notable repercusión en la literatura, es la siguiente [2]:

$$J_{\nu,h}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi e^{x \cos \theta} \cos(\nu \theta) d\theta = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\nu + hk + 1)k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k}; \quad J_{\nu,h=1} = I_\nu \quad (5.1)$$

Sin embargo, en este artículo no se da información respecto al origen de la generalización aportada ni se explican las motivaciones que han llevado a construirla. La autora se limita a definirla y a estudiar algunas de sus propiedades íntegro-diferenciales. Sin querer desestimar el gran interés matemático que despierta tal labor, los objetivos de este trabajo han ido más allá de generalizar una función tan relevante en el panorama científico como es  $I_\nu$ .

Este escrito comienza presentando una vía de extensión fraccionaria de las ecuaciones de la dinámica en redes, con el objetivo de sofisticar los modelos construidos. Esto se hace buscando aumentar y mejorar las aplicaciones de esta teoría a problemas reales en diversos ámbitos científicos [7]. Partiendo del estudio teórico preliminar de la derivada de Caputo, se ha ido explorando esta vía desde el planteamiento de nuestra versión fraccionaria del modelo SI hasta llegar a la definición de la función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$ . Se ha tratado de mostrar al lector como cada sección se iba relacionando con las anteriores, de manera que el uso de la derivada de Caputo ha llevado a la aparición de la función de Mittag-Leffler en las soluciones de la dinámica, y esta a su vez ha sido la clave para obtener esta nueva generalización de  $I_\nu(x)$ , original de este trabajo. Esta función  $\mathcal{E}_{\nu,\alpha}(x)$  y las demostraciones de algunas de sus propiedades son los resultados centrales de este trabajo de fin de grado, siendo a su vez originales del mismo. Si bien por sí mismos son ya interesantes desde el punto de vista matemático, podrían también servir de referencia para futuros trabajos en el desarrollo de modelos compartimentales a través de la incorporación de derivadas fraccionarias en sus ecuaciones de la dinámica.

## Referencias

- [1] J. Dutka, “On the early history of bessel functions,” *Arch. Hist. Exact Sci.*, pp. 105–134, 1995.
- [2] L. Galué, “A generalized bessel function,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, vol. 14, no. 5, pp. 395–401, 2003.
- [3] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev *et al.*, *Fractional integrals and derivatives*. Gordon and breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993, vol. 1.
- [4] C. Li, D. Qian, and Y. Chen, “On riemann-liouville and caputo derivatives,” *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, vol. 2011, 2011.
- [5] M. Caputo, “Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent ii,” *Geophys. J. Int.*, vol. 13, no. 5, pp. 529–539, 1967.
- [6] R. Pastor-Satorras, C. Castellano, P. Van Mieghem, and A. Vespignani, “Epidemic processes in complex networks,” *Rev. Mod. Phys.*, vol. 87, no. 3, p. 925, 2015.
- [7] L. Abadias, G. Estrada-Rodriguez, and E. Estrada, “Fractional-order susceptible-infected model: definition and applications to the study of covid-19 main protease,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 23, no. 3, pp. 635–655, 2020.
- [8] C.-H. Lee, S. Tenneti, and D. Y. Eun, “Transient dynamics of epidemic spreading and its mitigation on large networks,” in *Proceedings of the twentieth ACM international symposium on mobile ad hoc networking and computing*, 2019, pp. 191–200.
- [9] C. D. Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*. Siam, 2000, vol. 71.
- [10] R. Garrappa and M. Popolizio, “Computing the matrix mittag-leffler function with applications to fractional calculus,” *J. Sci. Comput.*, vol. 77, no. 1, pp. 129–153, 2018.
- [11] E. Estrada and J. A. Rodriguez-Velazquez, “Subgraph centrality in complex networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 71, no. 5, p. 056103, 2005.
- [12] E. Estrada and N. Hatano, “Communicability in complex networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 77, no. 3, p. 036111, 2008.
- [13] E. Estrada, “The communicability distance in graphs,” *Linear Algebra Appl.*, vol. 436, no. 11, pp. 4317–4328, 2012.
- [14] S. Lang, *Introduction to linear algebra*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [15] M. Abramowitz, I. A. Stegun, and R. H. Romer, “Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables,” 1988.
- [16] J. R. Deal, “Basics of bessel functions,” 2018.
- [17] G. Shchedrin, N. C. Smith, A. Gladkina, and L. D. Carr, “Fractional derivative of composite functions: exact results and physical applications,” *arXiv preprint arXiv:1803.05018*, 2018.