



**Universidad**  
Zaragoza

## Trabajo Fin de Grado

Ondas estacionarias y armónicos en cuerdas  
tensas pulsadas

Standing waves and harmonics in plucked  
loaded strings

Autora:

Miriam Ordovás Lavega

Directores:

Francisco Javier Salgado Remacha

Jesús Mario Subías Domingo

Facultad de Ciencias – Departamento de Física Aplicada

2022



# Ondas estacionarias y armónicos en cuerdas tensas pulsadas

## Resumen

La formación de una onda estacionaria en una cuerda tensa es un problema clásico que se estudia desde los niveles fundamentales del Grado en Física. Sin embargo, pocas veces se profundiza en el proceso de aparición de la onda estacionaria y en la dependencia del espectro armónico con las condiciones de excitación. Este fenómeno no solo guarda relación con otros aspectos de la Física (la formación de una onda estacionaria en una cavidad resonante), sino que tiene mucha importancia, en particular, en el campo de la Música.

En este trabajo se hará un estudio de la formación de la onda acústica generada al pulsar una cuerda tensa y se analizará su riqueza armónica, para lo que será necesario hacer un tratamiento de las señales acústicas obtenidas. Se evaluará cómo cambia este espectro en función de diferentes condiciones iniciales combinando el análisis teórico y las simulaciones con medidas experimentales.

# Standing waves and harmonics in plucked loaded strings

## Abstract

The formation of a standing wave in a loaded string is a classical problem that is studied from the fundamental levels of the Physics Degree. However, the process of the appearance of the standing wave and the dependence of the harmonic spectrum on the excitation conditions are rarely studied in depth. This phenomenon is not only related to other aspects of Physics (the formation of a standing wave in a resonant cavity), but is also of great importance, particularly in the field of Music.

In this work we will study the formation of the acoustic wave generated by plucking a loaded string and analyse its harmonic richness, for which it will be necessary to treat the acoustic signals obtained. It will be evaluated how this spectrum changes as a function of different initial conditions, combining theoretical analysis and simulations with experimental measurements.



## Índice

1.	Motivación y procedimiento .....	1
2.	Objetivos del Trabajo.....	3
3.	Marco teórico .....	4
3.1.	Propagación de una perturbación en cuerda tensa.....	4
3.2.	Descripción de la perturbación mediante Fourier .....	6
3.3.	Simulación de la perturbación mediante Fourier .....	7
4.	Montaje experimental.....	11
4.1.	Descripción del montaje .....	11
4.2.	Calibración del micrófono .....	12
5.	Resultados experimentales .....	16
5.1.	Análisis temporal.....	16
5.2.	Análisis frecuencial.....	17
5.3.	Comparación con las simulaciones .....	19
6.	Conclusiones.....	21
7.	Referencias .....	23



## 1. Motivación y procedimiento

Supongo que la gestación de este trabajo comienza hace unos cuantos años; desde que tocar la guitarra pasó de ser una mera actividad extraescolar a interesarme cada aspecto que involucraba su emisión de sonido, posiblemente hasta el punto de encaminarme a estudiar esta carrera.

A lo largo del Grado de Física se cursan asignaturas como Fundamentos de Física II y Mecánica Clásica II que abordan ligeramente temas relacionados con la Acústica [1, 2], tales como la propagación de ondas en una cuerda tensa o las ondas estacionarias en tubos de aire. En ellas se aplican las leyes de Mersenne para conocer la afinación de una cuerda a partir de su tensión, su longitud y su densidad lineal, o se calcula la frecuencia de batimiento entre dos ondas armónicas de frecuencias cercanas; podríamos decir que nos enfocamos principalmente en dos cualidades del sonido: el tono, relacionado con la frecuencia fundamental, y la intensidad. Sin embargo, una cualidad tan importante como es el timbre [3], asociada al reparto energético entre los armónicos superiores, que nos permite diferenciar en gran medida entre unos instrumentos musicales u otros, entre la voz de una persona u otra, y que le ha servido al ser humano desde sus inicios para reconocer amenazas de forma auditiva, apenas es estudiada.

Más allá de esto, los juegos tímbricos son un recurso muy empleado en cualquier instrumento musical y, en especial, en la guitarra clásica; ya que permite dar un carácter diferente a un mismo pasaje musical o, tratándose de un instrumento polifónico, buscar un determinado “color” para cada voz semejando la variedad tímbrica orquestal.

Bajo esta curiosidad por el timbre desde el punto de vista físico y su estudio en la guitarra como instrumento de cuerda pulsada surgen las siguientes dudas: ¿qué factores influyen en el cambio de timbre de este instrumento? ¿qué le ocurre a la cuerda cuando se producen estos cambios? ¿se puede apreciar en su espectro de armónicos y medir cuantitativamente?

Para tratar de responder estas preguntas se llevará a cabo un montaje con una cuerda tensa fija por ambos extremos y, una vez calibrado el micrófono, del cual se desconocen previamente las características, se tomarán diversas medidas pulsando la cuerda con el dedo, al igual que se hace en el instrumento. Los parámetros que se variarán serán la tensión y, en particular, para producir el cambio de timbre, la posición longitudinal en la que se pulsa la cuerda, moviéndonos del centro a uno de los extremos.

También se prestará atención a otro parámetro por lo general poco estudiado como es la forma de excitación de la cuerda que, tratándose de una cuerda pulsada, dista mucho de ser una excitación armónica [4, 5]. Se verá cómo esta excitación abrupta se transforma en una onda estacionaria y armónica.

## 2. Objetivos del Trabajo

Los objetivos principales de este trabajo serán analizar el espectro de armónicos de una onda generada al pulsar una cuerda tensa bajo diferentes condiciones iniciales, así como su implicación en el timbre del sonido producido, y comparar estos resultados con las simulaciones numéricas.

Para llegar a estos objetivos se proponen otros secundarios que serán necesarios para su consecución:

- Construcción de un montaje con una cuerda tensa fija en ambos extremos para realizar las medidas necesarias.
- Utilización de aparatos de medida del campo de la Acústica, como son el sonómetro y el micrófono, y calibración de este último.
- Familiarización con la toma de medidas acústicas y el tratamiento de estas.
- Análisis teórico y simulación numérica de la onda producida en una cuerda tensa bajo diferentes condiciones iniciales.

### 3. Marco teórico

#### 3.1. Propagación de una perturbación en cuerda tensa

Empezaremos explicando en qué consiste el problema de una cuerda tensa. Todos hemos visto la cuerda de una guitarra, la que mantiene suspendido a un escalador o los cables que sujetan las antenas de comunicaciones. Estos son ejemplos de cuerdas tensas fijas en ambos extremos.

Para hallar la expresión que describe el comportamiento de este tipo de cuerdas partiremos de la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio [4, 5, 6]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} , \quad (1)$$

donde  $\psi$  es la función dependiente del tiempo,  $t$ , y de la posición longitudinal a lo largo de la cuerda,  $x$ , que representa el desplazamiento transversal de esta, y  $c$  es la velocidad de propagación de las ondas transversales en la cuerda, que se puede calcular como:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}} , \quad (2)$$

siendo  $F$  la tensión de la cuerda y  $\mu$  su densidad lineal.

La resolución de la Ec. (1) en derivadas parciales de segundo orden pasa por aplicar separación de variables en primer lugar, asumiendo que tenemos una onda estacionaria y no una onda viajera, se divide la función  $\psi(x, t)$  en producto de dos funciones tal que  $\psi(x, t) = \Phi(x) \cdot T(t)$ , y en segundo lugar, aplicar condiciones de contorno y condiciones iniciales para hallar las constantes de integración.

Al aplicar separación de variables en la Ec. (1) se obtiene:

$$\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T}{dt^2} = \frac{c^2}{\Phi(x)} \frac{d^2 \Phi}{dx^2} = -\omega^2 , \quad (3)$$

donde  $\omega$  es una constante que representa la frecuencia de oscilación propia de la cuerda. Se ha podido igualar a una constante porque cada lado de la ecuación depende exclusivamente de una variable. Escribiendo por separado las dos ecuaciones diferenciales encontramos soluciones conocidas:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 \cdot T = 0 \Rightarrow T(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (4)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{dx^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(x) = C \cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) + D \sin\left(\frac{\omega}{c}x\right) \quad (5)$$

Las **condiciones de contorno** en una cuerda fija por ambos extremos se basan en que el desplazamiento transversal en estos puntos tiene que ser siempre nulo, lo que se traduce en la Ec. (5) como  $\Phi(0) = 0 = \Phi(L)$  y, consecuentemente,  $C = 0$  y  $\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0$ , con  $D \neq 0$  para una solución no trivial.

Así, los posibles valores de  $\omega$ , conocidos como frecuencias naturales, son:

$$\sin\left(\frac{\omega}{c}L\right) = 0 \Rightarrow \omega_n = \frac{n\pi c}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6)$$

siendo  $L$  la longitud de la cuerda y  $n$  el modo de vibración, que se corresponde además con el número de vientos. Para  $n = 1$  tenemos la frecuencia fundamental o primer armónico. El resto de armónicos son múltiplos de esta.

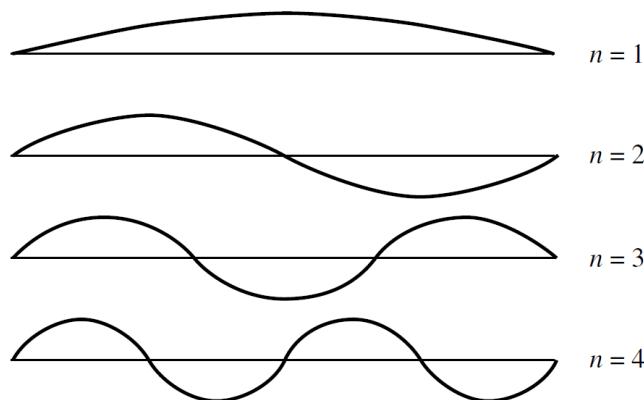


Figura 1. Primeros modos de vibración de una cuerda tensa [1].

La solución de la Ec. (1) para el modo  $n$  de vibración sustituyendo las Ec. (4) y (5) queda:

$$\psi_n(x, t) = \Phi_n(x) \cdot T_n(t) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \left[ A_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) \right] \quad (7)$$

Así, la solución general para el desplazamiento transversal de la cuerda en función del tiempo y de la posición longitudinal a lo largo de esta se expresa como superposición de todos los modos normales:

$$\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) [A_n \cos(\omega_n t) + B_n \sin(\omega_n t)] \quad (8)$$

Como veremos con más detalle en la siguiente sección, las expresiones para los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$  se van a poder determinar mediante las condiciones iniciales y su analogía con los coeficientes de Fourier. Estos términos nos permitirán describir la onda estacionaria como composición de n-ésimos senos y cosenos correspondientemente pesados.

### 3.2. Descripción de la perturbación mediante Fourier

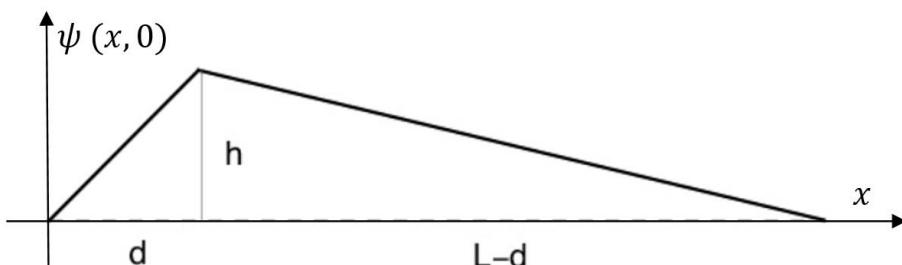
Las expresiones generales para la posición y la velocidad en el momento inicial quedan de la siguiente forma:

$$\psi_0(x) = \psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (9)$$

$$\dot{\psi}_0(x) = \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (10)$$

Para obtener el valor de los coeficiente  $A_n$  y  $B_n$  debemos reflexionar sobre la forma de pulsar la cuerda, que será lo que determine su desplazamiento y velocidad iniciales: suponemos que la separamos de su posición de equilibrio una distancia máxima  $h$  en la posición longitudinal  $d$ , como se muestra en la *Figura 2*, y que en ese momento se suelta, comenzando su movimiento con una velocidad nula, es decir,  $\dot{\psi}_0(x) = 0$ .

Hay que puntualizar que se considera que el desplazamiento máximo se da en un único punto de la cuerda y no abarca un tramo de esta. Dada la relación en orden de magnitud entre la longitud total de la cuerda y la anchura de un dedo que la pulsa, se estima una aproximación razonable (sería más parecida a pulsar con una púa).



*Figura 2. Cuerda pulsada con los parámetros iniciales que asumimos en la perturbación.*

Finalmente, hallamos los valores de estos coeficientes considerando las funciones posición y velocidad integrables en el intervalo de 0 a  $L$  y resolviendo la integral geométricamente conforme a la *Figura 2*.

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{h}{d}x, & 0 \leq x \leq d \\ \frac{h}{L-d}(L-x), & d < x \leq L \end{cases}, \quad \dot{\psi}_0(x) = 0$$

Las ecuaciones para  $A_n$  y  $B_n$ , Ec. (11) y (12), se corresponden con los coeficientes de Fourier de  $\psi_0(x)$  y  $\dot{\psi}_0(x)$  respectivamente:

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \psi_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{2h}{n^2\pi^2} \frac{L^2}{d(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right) \quad (11)$$

$$B_n = \frac{2}{\omega_n L} \int_0^L \dot{\psi}_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \quad (12)$$

De la Ec. (11) se puede deducir que los armónicos cuyo orden sea múltiplo de  $L/d$  se anularán; por ejemplo, si se pulsa en una posición de la cuerda  $d = L/3$ , el peso de todos los armónicos múltiples de 3 será cero debido a la anulación de la función seno.

Tal y como se ha definido  $B_n$  siempre que la cuerda parte del reposo estos coeficientes serán 0. Esta condición se ha tomado tanto por facilidad experimental como por semejanza con la realidad. En el caso de que la cuerda no partiera del reposo ( $\dot{\psi}_0(x) \neq 0$ ), como sería el caso de una cuerda percutida en el piano, el valor de estos términos sería:

$$B_n = \frac{2v_{máx}}{n^2\pi^2\omega_n} \frac{L^2}{d(L-d)} \sin\left(\frac{n\pi d}{L}\right)$$

### 3.3. Simulación de la perturbación mediante Fourier

A partir de los coeficientes calculados en el apartado anterior y de la Ec. (8) se puede obtener la representación gráfica de la cuerda con sus armónicos correspondientemente pesados.

Los parámetros usados para la simulación van a ser: longitud de la cuerda,  $L = 1\text{ m}$ , desplazamiento máximo,  $h = 0,1\text{ m}$ , y velocidad de propagación de las ondas

transversales por la cuerda,  $c = 1 \text{ m/s}$  (a partir de esta se obtienen las frecuencias de oscilación de cada modo, como se ve en la Ec. (6)).

En la *Figura 3* se representa el comportamiento de la cuerda como suma de sus veinte primeros modos de vibración, aunque solo se han dibujado los cinco primeros para una mayor claridad.

La simulación muestra la pulsación de la cuerda en tres posiciones distintas, tal que  $d/L = 1/2, 1/4, 1/10$  (*Figura 3* de izquierda a derecha), y para tres tiempos diferentes, desde el instante inicial ( $t = 0\text{s}$ ) hasta que la perturbación alcanza el máximo desplazamiento en el sentido opuesto ( $t = 1\text{s}$ , que corresponde con la mitad del periodo de oscilación de la cuerda,  $L/c$ ) (*Figura 3* de arriba a abajo).

Cabe destacar que si se tomaran los infinitos armónicos para simular la cuerda en lugar de los veinte que se han tomado, se encontraría la señal armónica triangular de la explicación teórica que se muestra en la *Figura 2*.

Cada uno de los modos normales de vibración de la cuerda,  $\psi_n(x, t)$ , que oscila a una frecuencia y amplitud máxima características, evoluciona con el tiempo, haciendo que la suma de todos ellos, representada por la onda en la cuerda,  $\psi(x, t)$ , también lo haga.

La solución que se observa es periódica, es decir, la cuerda recupera su forma inicial al cabo de cierto tiempo, al igual que ocurre con los modos que la componen. Si se observara la simulación para un tiempo igual al periodo de oscilación, volveríamos a tener la misma imagen que para el instante inicial.

El peso de cada modo de vibración permanece constante en el tiempo, ya que los coeficientes  $A_n$  y  $B_n$ , Ec. (11) y (12), no dependen de este sino de la posición en la que se pulsa la cuerda y el desplazamiento máximo inicial. Esto hace que una vez pulsada la cuerda se mantengan los mismos modos característicos a lo largo del tiempo.

Con estos mismos coeficientes también podemos representar la transformada de Fourier para cada posición de pulsación. En la *Figura 4* se pueden ver los pesos de los primeros veinte modos para cuatro posiciones distintas correspondientes a  $d = 0,5 \text{ m}, 0,25 \text{ m}, 0,1 \text{ m}$  y  $0,01 \text{ m}$ .

Se observa con claridad como, acorde con la Ec. (11), los armónicos cuyo orden es múltiplo de  $L/d$  (múltiplos de 2 para  $d = 0,5 \text{ m}$ , múltiplos de 4 para  $d = 0,25 \text{ m}$  y múltiplos de 10 para  $d = 0,1 \text{ m}$ ) se anulan. También es destacable el peso del modo fundamental cuando la pulsación se realiza en el centro de la cuerda respecto a cuando se realiza en el extremo. A mayor proximidad al extremo menor es el peso de este primer armónico y mayor el de los modos más elevados.

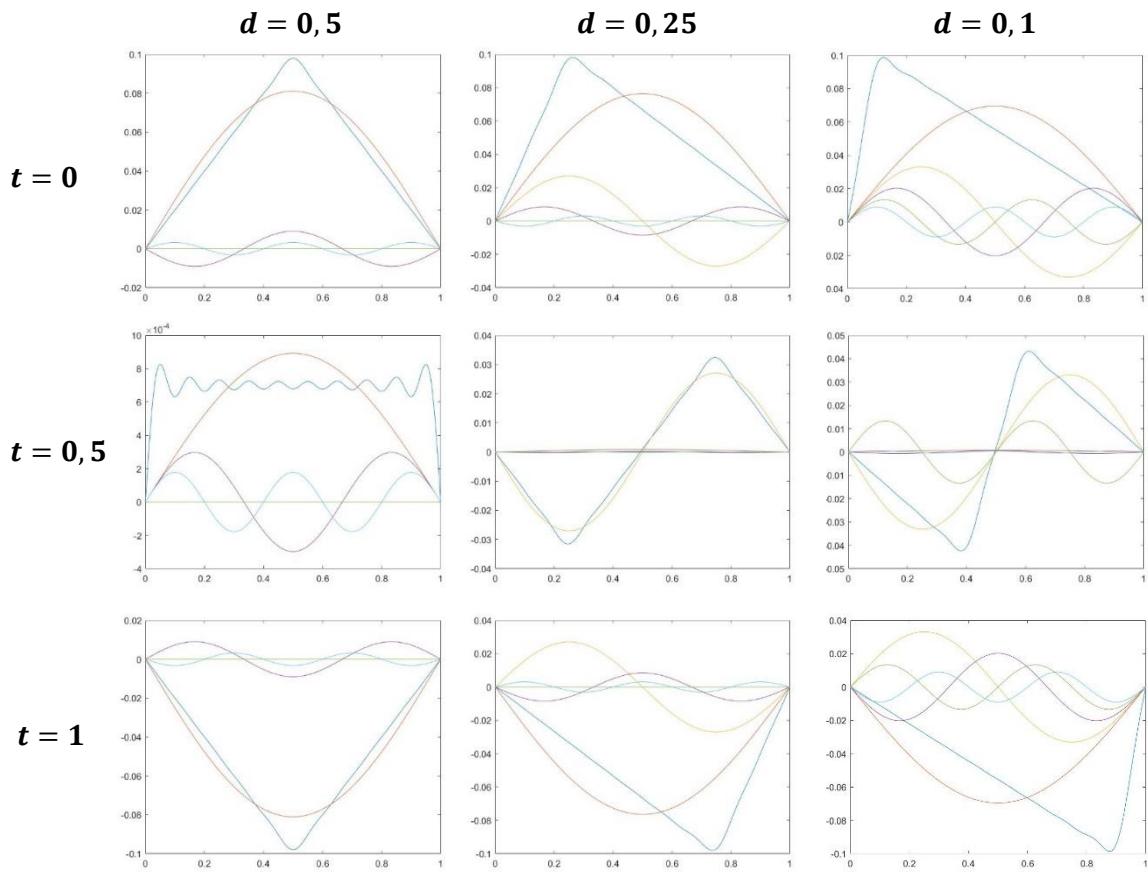


Figura 3. Simulación en los instantes  $t = 0s$ ,  $0,5s$  y  $1s$  de una cuerda tensa de  $L=1$  pulsada en  $d = L/2$ ,  $L/4$  y  $L/10$ , respectivamente.

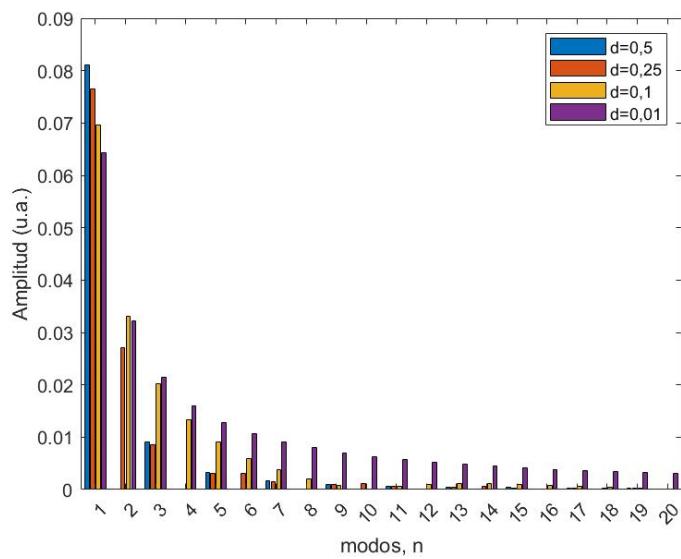


Figura 4. Pesos teóricos de los primeros veinte armónicos para diferentes posiciones de pulsación,  $d$ .

Con este análisis teórico hemos podido predecir el comportamiento de una cuerda tensa, aunque con un número reducido de armónicos. En la sección 5.3. podremos comprobar si las medidas experimentales se ajustan a estas simulaciones teóricas comparando los pesos de cada armónico para las distintas condiciones iniciales de la cuerda. Pero antes de ver los resultados experimentales será necesario hablar del montaje experimental y de los aparatos de medida.

## 4. Montaje experimental

### 4.1. Descripción del montaje

Para realizar las medidas de nuestro experimento vamos a necesitar una cuerda tensa fija por ambos extremos, de la cual se pueda conocer la tensión aplicada, su longitud y su densidad lineal, y un micrófono que se pueda conectar al osciloscopio para ver la onda que se genera.

El micrófono que vamos a utilizar se trata de un micrófono de marca Sennheiser del que disponía la universidad. La elección de este se debe principalmente a evitar un gasto añadido y prescindible y a su buena calidad. Su función original era medir el ruido que producían ciertas máquinas, para lo que cuenta con un tubo adicional del que hablaremos más adelante. Al tratarse de un micrófono antiguo (década 70 u 80) no se encontraron sus especificaciones, por lo que fue necesario calibrarlo como se verá en la sección 4.2.

Colocaremos este micrófono con el tubo apuntando al centro de la cuerda en dirección perpendicular a esta como se muestra en la *Figura 5*.



*Figura 5. Montaje experimental visto de frente: cuerda anclada en el extremo derecho y con las pesas colgadas en el izquierdo. Micrófono en el centro.*

La cuerda empleada es de guitarra clásica, de la Carta Roja de tensión fuerte de la marca Savarez 523 R (3<sup>a</sup> cuerda de nylon de 1,02 mm de diámetro).

Atamos de forma fija uno de los extremos y en el otro colgamos distintas pesas (*Figura 6.b.* y *6.a.* respectivamente) para conseguir una tensión tal que pudiera vibrar con suficiente intensidad.

La longitud entre ambos extremos de la cuerda es de 65 cm (tiro de una guitarra estándar) y las masas que utilizaremos serán de 1,3 y 2 kg, para ver el efecto de distintas tensiones.

En cuanto al osciloscopio, una vez calibrado el micrófono (Sección 4.2), se realizan varias pulsaciones en la cuerda para comprobar el rango de frecuencias que se pueden distinguir sin excesivo ruido en el cálculo de la transformada de Fourier. De esta forma, se elige la escala temporal apropiada para las frecuencias que esperamos medir, que van desde los 90 Hz (frecuencia fundamental de la cuerda con 1,3 kg) hasta los 5000 Hz.



*Figura 6. Extremo izquierdo (a) y derecho del montaje (b).*

Así, se elige un tiempo de 50 ms por división, en el cual se distinguen bien los picos de los distintos armónicos y se ve un rango de frecuencias suficientemente amplio como para apreciar si varía la intensidad de los armónicos superiores. Se ha tenido en cuenta que cuanto más amplio es el rango temporal de muestreo menor es el del espectro frecuencial que se muestra en su transformada de Fourier, pero con bandas de frecuencias más estrechas y con mayor resolución.

#### 4.2. Calibración del micrófono

El primer paso a realizar, previo a la toma de medidas con la cuerda, va a ser comparar una señal conocida tomada tanto con el micrófono como con el sonómetro para comprobar si la respuesta del micrófono es lineal a todas las frecuencias.

Para ello generamos con un programa en Matlab una señal armónica definida como:

$$\psi(t) = A \sin(2\pi ft) , \quad (13)$$

que enviamos a un amplificador y la medimos con el micrófono conectado al osciloscopio y este al ordenador, mediante el cual se pueden controlar el número de medidas y la duración de las mismas.

Utilizamos varias intensidades en distintas frecuencias reproducidas por el amplificador (a partir de 4000 Hz utilizamos el altavoz del portátil porque el amplificador falla a frecuencias tan altas) y se mide tanto con el sonómetro como con el micrófono.

La relación de amplitud entre el micrófono y el sonómetro variando el volumen es lineal para todas las frecuencias comprobadas (400 Hz, 700 Hz, 1000 Hz, 2000 Hz, 4000 Hz y 8000 Hz). Aunque es cierto que no se comprobaron la frecuencias fundamentales experimentales (90 y 110 Hz), sí se recoge un rango suficientemente amplio como para ver la linealidad en intensidad a frecuencias medias y altas. En la *Figura 7* se observa que el micrófono no satura en un rango de volumen concreto para las frecuencias indicadas.

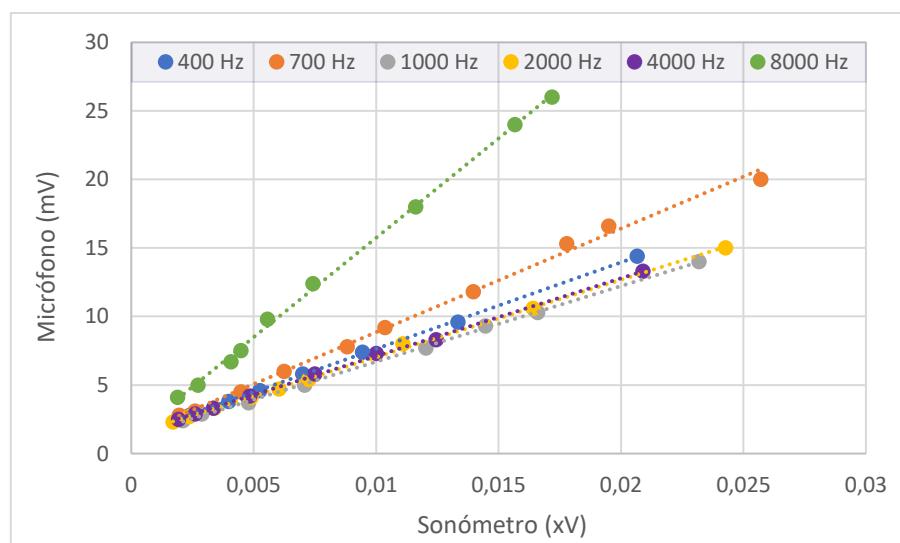


Figura 7. Linealidad de las medidas respecto a la intensidad

Una vez comprobado esto, vamos a ver el comportamiento del micrófono a volumen constante para distintas frecuencias.

El rango de frecuencias que nos va a interesar medir es aquel que nos proporciona el sonómetro (de 63 a 16000 Hz) para poder tener unas medidas de referencia con el micrófono.

En un primer momento, probamos a modificar la señal que generábamos en Matlab haciendo que fuera una composición de senos de distintas frecuencias y a emitirla por el altavoz.

El objetivo era comprobar con el sonómetro que todas las frecuencias de la transformada de Fourier tenían el mismo peso y comparar estos con los que se

obtenían con el micrófono. De esta forma se podrían ir ajustando los pesos en la señal que enviábamos desde el ordenador hasta dar con los correspondientes a la calibración del micrófono.

Esta primera opción fue descartada porque el ordenador no era capaz de emitir sonidos de frecuencias fundamentales puras inferiores a unos 300 Hz y tampoco emitía con los pesos que se le indicaban en el código para frecuencias más altas.

La opción que se tomó entonces fue utilizar un generador de funciones conectado a un altavoz [VISATON, FR 10 HMP] para comparar la amplitud de la señal recibida por el micrófono y el sonómetro.

La respuesta del sonómetro a las distintas frecuencias debería ser constante, por lo tanto, las variaciones observadas en las medidas de este aparato se deberán a la fuente. Nos va a interesar la relación entre la respuesta frecuencial del micrófono y el sonómetro, así como las diferencias al utilizar el micrófono con y sin tubo.

Aplicamos el factor correspondiente a cada rango de frecuencias medido con el sonómetro y lo comparamos con el del micrófono. En la *Figura 8* vemos la diferencia entre el micrófono y el sonómetro para cada frecuencia, con y sin tubo:

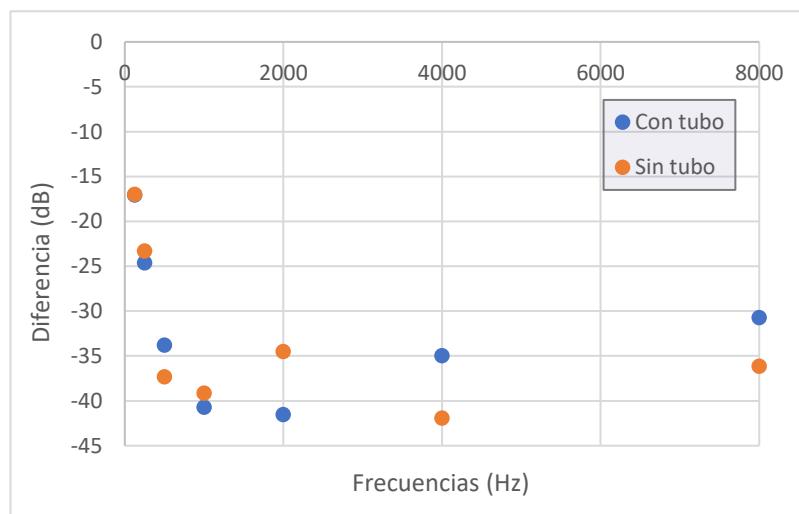


Figura 8. Calibración del micrófono en frecuencia con tubo y sin tubo

Cuando analizamos la medida sin el tubo vemos que presenta un pequeño pico respecto al sonómetro en torno a los 2000 Hz, lo que podría indicar que el tubo evita que se eleven en exceso estas frecuencias.

En ambos casos vemos que el micrófono es menos sensible que el sonómetro en todo el rango de frecuencias medido. Podemos destacar que en las medidas con tubo el mínimo se encuentra en torno a los 2000 Hz, presentando mayor

sensibilidad en las frecuencias superiores que al medirlas sin tubo, que como ya se ha dicho presentan un máximo sobre esta frecuencia.

Como la medición de la señal producida por la cuerda se realizará con tubo, la diferencia en la intensidad medida en cada rango de frecuencias de la Figura 8 tendremos que corregirla en las medidas experimentales y así el micrófono estará calibrado.

Esta corrección se realiza mediante el ajuste a un polinomio de tercer grado como el que se observa en la *Figura 9*, cuyo valor para cada frecuencia representa el factor por el que hay que dividir cada medida experimental para aplicarle la calibración. Vemos que con este factor van a ganar peso las frecuencias alrededor de 1000 Hz, con respecto a las más elevadas.

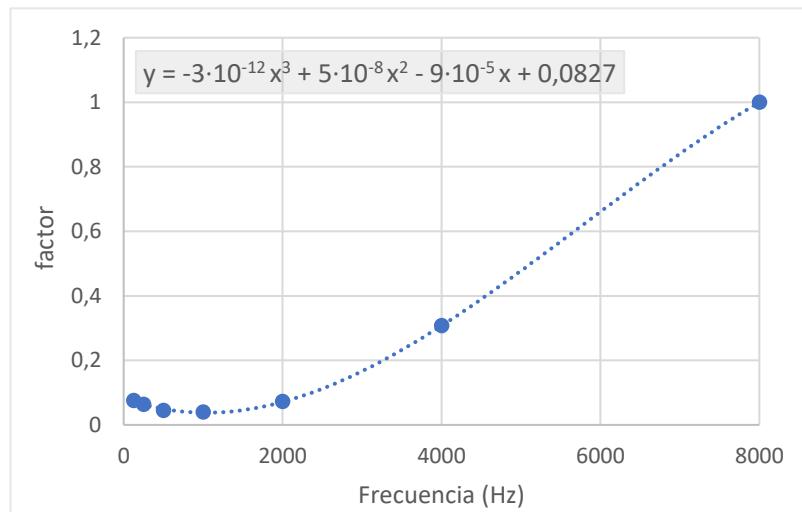


Figura 9. Ajuste correspondiente al factor de calibración del micrófono.

Una vez se tiene calibrado el micrófono y se ha preparado todo el montaje, nos disponemos a tomar las medidas con la cuerda.

## 5. Resultados experimentales

Se realizan 30 mediciones pulsando en el centro de la cuerda y otras 30 pulsando próximos a un extremo (extremo derecho de la cuerda, mostrado en la *Figura 6.b.*). Ambas tandas de medidas se guardan en el ordenador y se dibujan tanto temporal como frecuencialmente. Para poderlas comparar mejor visualmente, se han representado las 30 medidas en una sola imagen superponiendo las gráficas con diferentes colores (*Figuras 10 y 11*).

Como el tiempo que transcurría entre la pulsación de la cuerda hasta el comienzo de la medición no siempre era el mismo, las medidas no coincidían temporalmente y fue necesario tomar de referencia los primeros picos para ajustarlas. Se repite el mismo procedimiento para los dos pesos distintos.

A continuación haremos un análisis detallado de estas medidas.

### 5.1. Análisis temporal

Primero compararemos los pulsos temporales que aparecen en la *Figura 10* para las cuatro condiciones mencionadas.

Observando la distancia de separación entre los picos más elevados se puede hallar la frecuencia fundamental como la inversa del periodo. Comparando entre las *Figura 10.a.* y *10.b.* se puede apreciar que, al aumentar el peso, aumentamos la tensión, que es proporcional a la frecuencia y por lo tanto la distancia entre picos disminuye, es decir, en la *Figura 10.a.* observamos mayor separación entre los picos porque la cuerda presenta menos tensión y viceversa.

Si ahora miramos las diferencias entre las envolventes al pulsar en el centro de la cuerda (*Figura 10.a.* y *10.b.*) o en un extremo (*Figura 10.c.* y *10.d.*), se ve que el decaimiento es más rápido pulsando en el extremo para ambas tensiones. Esto se puede escuchar como un sonido “duro” cuya intensidad disminuye rápidamente tras la pulsación en comparación a cuando pulsamos en el centro, que la caída es más suave.

Al comparar las dos envolventes pulsando en el extremo, vemos que con 1,3 kg (*Figura 10.c.*) se genera más ruido y los picos están peor definidos que con 2 kg (*Figura 10.d.*), ya que es más fácil modificar la tensión de la cuerda al pulsar.

Se observa también que la amplitud de la señal con menor tensión es ligeramente superior que cuando la tensión de la cuerda es mayor debido a que en el primer caso era más sencillo desplazarla de su posición de equilibrio.

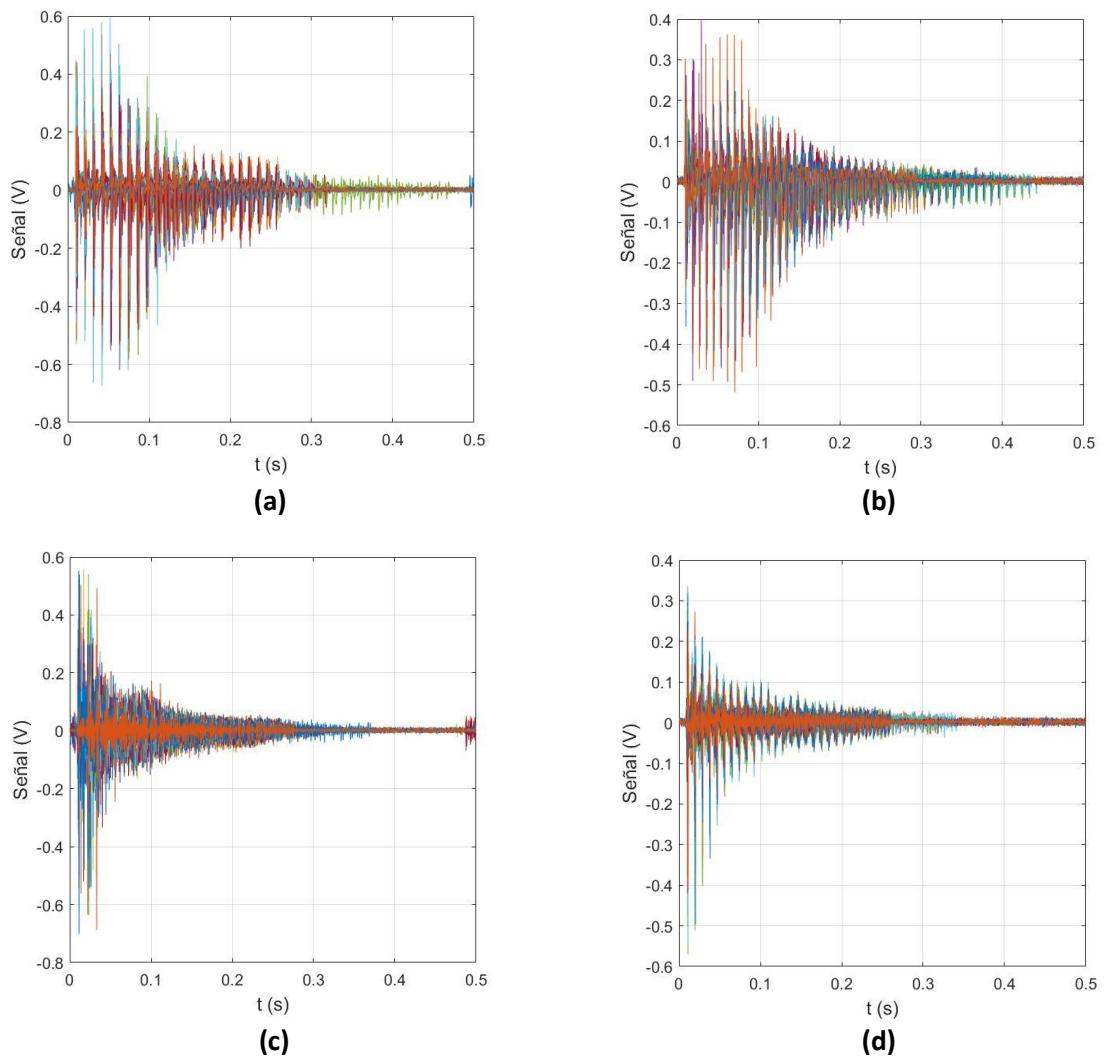


Figura 10. Dominio temporal para pulsación en el centro con 1,3 kg (a) y 2 kg (b) y pulsación en un extremo con 1,3 kg (c) y 2 kg (d). Cada gráfica contiene 30 mediciones con las mismas características.

## 5.2. Análisis frecuencial

Una vez observada la señal temporal, pasamos a comparar las transformadas de Fourier de las medidas, que se presentan en la Figura 11.

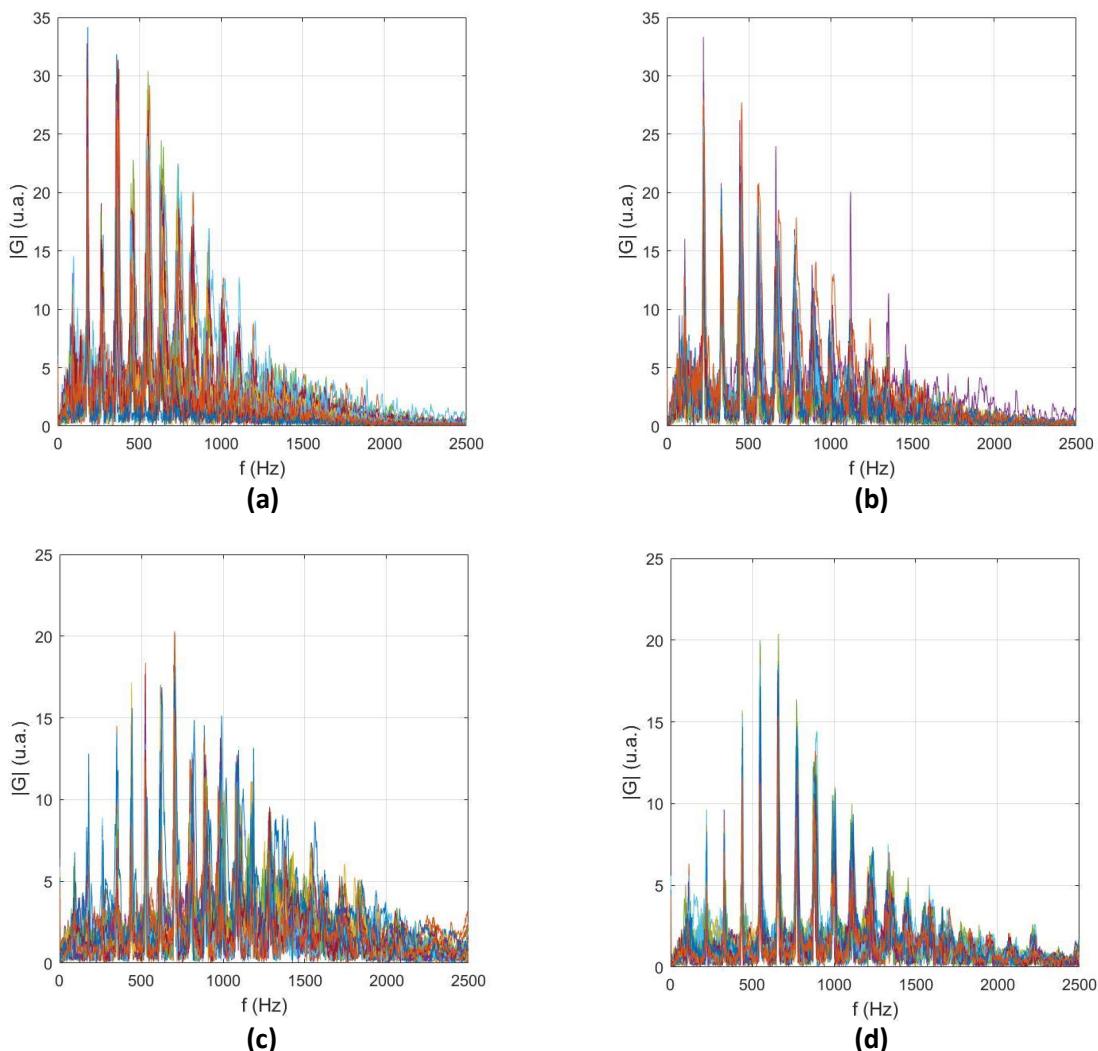
Al igual que en el dominio temporal, se puede comprobar que la frecuencia aumenta con la tensión, como se deduce fácilmente a partir de las Ecuaciones (2) y (6):

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nc}{2L} = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}} , \quad (14)$$

obteniendo una frecuencia fundamental de 110 Hz en el caso de 2 kg y de 90 Hz en el caso de 1,3 kg.

Se observa que los picos están más próximos entre sí cuando tenemos una tensión menor en la cuerda (*Figuras 11.a. y c.*), ya que también es menor la frecuencia fundamental, en este caso 90 Hz, y por lo tanto la distancia entre sus armónicos sucesivos.

La mayor tensión que presenta la cuerda con 2 kg hace que la fuerza ejercida con la pulsación altere en menor medida la tensión inicial, lo que se observa en las *Figuras 11.b* y *11.d.* con unos picos mejor definidos y de menor anchura que en las *Figuras 11.a.* y *11.c.*, donde se podría ver alterada ligeramente la fundamental por la variación en la tensión.



*Figura 11. Dominio frecuencial para pulsación en el centro con 1,3 kg (a) y 2 kg (b) y pulsación en un extremo con 1,3 kg (c) y 2 kg (d). Cada gráfica contiene 30 mediciones con las mismas características.*

Este efecto es especialmente notable en la *Figura 11.c.*, donde se aprecia una menor diferenciación entre el peso de los armónicos y peor definición de los picos, lo que se asocia con una señal más ruidosa.

Pulsando en el extremo se aprecia una disminución general del peso de los armónicos, en especial de los cuatro primeros; lo que radica en un aumento del peso relativo de los armónicos superiores, a partir del 5º (comparación de las *Figuras 11.a. y 11.b.* con sus respectivas *11.c. y 11.d.*).

Si nos fijamos en las transformadas de Fourier de las pulsaciones en el centro de la cuerda (*Figuras 11.a. y 11.b.*), se puede comprobar cómo los armónicos pares hasta el 6º destacan sobre los impares. Este resultado se contemplará con más profundidad en el apartado siguiente al hablar de la comparación con las simulaciones.

Respecto a la percepción auditiva del timbre asociada a este espectro, podemos decir que un mayor peso de los armónicos superiores se traduce en un sonido más “nasal” y “metálico”, mientras que una mayor presencia del modo fundamental da un sonido más “cálido”. Esto está directamente relacionado con que una señal con pocos armónicos se acerca más a una señal armónica que una que presenta muchos armónicos, que producirá una señal más abrupta.

### 5.3. Comparación con las simulaciones

A partir de los resultados obtenidos experimentalmente vamos a tratar de realizar una comparación con los pesos teóricos de la *Figura 4*. Cabe mencionar, que para comprobar que las simulaciones eran correctas, también se grabó la cuerda vibrando a cámara lenta.

Para una pulsación en el centro de la cuerda ( $d = 0,5$ ) veíamos que los armónicos pares se anulaban, de acuerdo con la Ec. (11). Sin embargo, cuando miramos los pesos experimentales de las *Figuras 11.a. y 11.b.* vemos que los armónicos que más destacan son justamente los pares hasta el 6º.

La deducción a la que se llegó ante esta contradicción fue que la asociación de los modos de vibración de la cuerda con los cambios de presión que produce en el micrófono y que generan el voltaje de la señal no es trivial.

Se podría justificar el mayor peso del segundo armónico si pensamos en el movimiento de la cuerda con relación al micrófono: en el modo fundamental de vibración pulsando en el centro, la cuerda pasa dos veces en un solo periodo con velocidad máxima por delante del micrófono, generando un cambio de presión al doble de frecuencia que la fundamental. Además, el frente de onda de presión generado por el desplazamiento transversal real de la cuerda dista de ser armónico

puro, lo que explicaría variaciones impulsivas en la presión que darían lugar a las componentes armónicas pares que se observan.

Tampoco se aprecia un peso mayor del armónico fundamental como ocurre en la simulación teórica ni una relación directa entre los modos teóricos y los experimentales, pero sí un decrecimiento del peso de los armónicos superiores.

Pese a estas discrepancias, puede verse que tanto teórica como experimentalmente se produce un aumento del peso relativo de los armónicos superiores respecto al fundamental cuando pulsamos en un extremo (*Figura 4* con  $d = 0,01$  y *Figura 11.c. y 11.d.*).

Este incremento del peso de los armónicos superiores se debería a que excitando la cuerda en el centro favorecemos una mayor amplitud en esta posición, lo que se corresponde con el modo fundamental o 1<sup>er</sup> armónico; mientras que excitándola en el extremo se están favoreciendo modos de vibración superiores con amplitud relativamente mayor en esa zona (equivalencia en la *Figura 2* con  $d = L/2$  en el primer caso y  $d \sim L/10$  en el segundo).

## 6. Conclusiones

A lo largo de este trabajo se ha abarcado desde la construcción del montaje experimental y calibración del micrófono necesarios para tomar las medidas que se requerían, hasta el análisis teórico y las simulaciones para poder hacer la interpretación de estas.

En el desarrollo de estos objetivos secundarios han ido surgiendo problemas y planteándose diversas opciones para llegar a los objetivos principales: elección de micrófono y montaje o formas de pulsar la cuerda y de recoger un promedio de las pulsaciones. Al final se han tomado las decisiones en base al material y al tiempo del que se disponía, ya que era la primera vez que, tanto mis tutores como yo, realizábamos medidas de este tipo y se partía de cero.

Respecto a los objetivos principales que se pretendían alcanzar, hemos podido ver cómo cambia el espectro de armónicos variando la tensión y la posición de la pulsación en la cuerda con las medidas temporales tomadas y su posterior procesamiento para pasarlas al espectro frecuencial.

La comparación con las simulaciones numéricas; sin embargo, no ha resultado tan sencilla, debido al comportamiento no ideal del desplazamiento de la cuerda y su relación no trivial con los cambios de presión en el micrófono. Aún así, se ha podido observar un rasgo característico a la hora de diferenciar el timbre como es el peso mayor de los armónicos superiores respecto al fundamental cuando se pulsa en un extremo de la cuerda. Este cambio en el espectro en función de donde pulsamos tiene gran relevancia para buscar cambios tímbricos en un instrumento musical. También se ha podido ver con las simulaciones y las grabaciones a cámara lenta de cómo se propagan las perturbaciones en la cuerda tensa; que difiere considerablemente de la simplificación que suele aparecer en los libros.

Por otra parte, el hacer una asociación más rigurosa entre el espectro frecuencial y el timbre que escuchamos conllevaría un estudio más profundo e interdisciplinar tanto de las partes de la envolvente de los pulsos temporales (ataque y decaimiento) como de la percepción humana del sonido (psicoacústica).

Una vez terminado el trabajo y analizado el resultado se aprecian posibles mejoras en su realización como utilizar pesos mayores atados a la cuerda para conseguir mayor tensión y que así la pulsación en el extremo tuviera menos ruido, a la vez que una mejor sujeción en los extremos que evitara posibles desplazamientos de la cuerda en estos puntos; emplear un único altavoz para la calibración que respondiera adecuadamente a todo el rango de frecuencias o tomar las medidas

con un micrófono de mayor fidelidad y en el que no fuera necesario la adición de un tubo por el cual se pueden ver alteradas estas medidas.

Este proyecto deja diversas vías abiertas para su ampliación como podrían ser la simulación de distintos ángulos y formas de pulsación en la cuerda (púa, dedo, percusión) que podrían ser modelizados fácilmente con nuestro modelo teórico, la utilización de diferentes montajes considerando las cajas de resonancia de los instrumentos o los materiales utilizados para estas, o el estudio del espectro en función del tiempo (espectrograma) para poder analizar las sucesivas etapas del sonido. Estas pueden ser de interés tanto para la mejora de instrumentos musicales y sintetizadores como para la comprensión del propio músico de cómo genera su sonido al tocar.

Una última reflexión a la que me ha llevado este trabajo es que el estudio en mayor profundidad de problemas aparentemente sencillos de cualquier disciplina, y de la Física en particular, pueden ser bastante más complejos de lo que en un primer momento podrían parecer.

## 7. Referencias

- [1] Kibble, T.W.B. y Berkshire, F.H. (2004). *Classical Mechanics*. (5<sup>a</sup> ed., p. 271). Imperial College Press.
- [2] Berg, R.E. y Stork D.G. (2005). *The Physics of Sound*. (3<sup>a</sup> ed.). Pearson Education.
- [3] Traube, C. (2004). *An Interdisciplinary Study of the Timbre of the Classical Guitar*. [Tesis de doctorado, McGill University]. [https://www.academia.edu/914878/An\\_interdisciplinary\\_study\\_of\\_the\\_timbre\\_of\\_the\\_classical\\_guitar](https://www.academia.edu/914878/An_interdisciplinary_study_of_the_timbre_of_the_classical_guitar)
- [4] Franco, Á. (2016). *Vibraciones libres de una cuerda sujetada por ambos extremos*. Curso Interactivo de Física en Internet. Recuperado el 10 de julio de 2022 de [http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/cuerda/cuerda\\_1.html](http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica3/ondas/cuerda/cuerda_1.html)
- [5] Russell, D. (7 de Agosto de 2020). *The Plucked Fixed-Fixed String*. Acoustics and Vibration Animations. Recuperado el 10 de julio de 2022 de <https://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/Pluck-Fourier/Pluck-Fourier.html>
- [6] OpenStax College. (20 de mayo de 2021). *Interference of Waves*. Recuperado el 10 de julio de 2022 de <https://legacy.cnx.org/content/m58372/1.15/>