



Universidad
Zaragoza

Anexos: Estructura de los agujeros negros en teorías de gravedad superrenormalizables

Trabajo fin de Grado

Grado en Física

Autora:

Laura Bravo Casado

Director:

Manuel Asorey Carballeira

Subdirector:

Fernando Ezquerro Sastre

Índice

1. Anexo A: Código Schwarzschild	1
2. Anexo B: Invariantes y ecuaciones de campo	2
3. Anexo C: Fórmulas recursivas	5

1. Anexo A: Código Schwarzschild

A continuación se incluye el código utilizado en el programa *Mathematica* para confirmar los resultados obtenidos en el cálculo del tensor de Riemann, Ricci, escalar de curvatura y símbolos de Christoffel; así como del tensor dado por (82).

```
coordenadasU = {t, r, theta, phi}
n = Length[coordenadasU]
gDD = {{-B[r], 0, 0, 0}, {0, 1/B[r], 0, 0}, {0, 0, r*r, 0}, {0, 0, 0,
r*r*Sin[theta]*Sin[theta]}}
gUU = Inverse[gDD]
# Establece coordenadas, métrica e inversa de la métrica
# U representa índice superior, D índice inferior

GammaUDD = 1/2*Table[Sum[gUU[[mu,, rho]]*(D[gDD[[rho, lambda]],coordenadasU[[nu]]]
+ D[gDD[[rho, nu]],coordenadasU[[lambda]]] - D[gDD[[nu, lambda]],
coordenadasU[[rho]]]), {rho, n}], {mu, n}, {nu, n}, {lambda, 4}]
# Ecuación (5)

RiemannUDDD = Table[D[GammaUDD[[mu, nu, rho]], coordenadasU[[lambda]]]
- D[GammaUDD[[mu, nu, lambda]], coordenadasU[[rho]]]
+ Sum[GammaUDD[[mu, sigma, lambda]]* GammaUDD[[sigma, nu, rho]], {sigma, n}]
- Sum[GammaUDD[[mu, sigma, rho]]* GammaUDD[[sigma, nu, lambda]], {sigma, n}], {mu,
n}, {nu, n}, {lambda, n}, {rho, n}]
# Ecuación (6)

RiemannDDDD = Table[Sum[ gDD[[mu, sigma]]*RiemannUDDD[[sigma, nu, lambda, rho]],
{sigma, n}], {mu, n}, {nu, n}, {lambda, n}, {rho, n}]
# Bajar primer índice tensor Riemann

RicciDD = Table[Sum[ gUU[[lambda, sigma]]*RiemannDDDD[[lambda, mu, sigma, nu]],
{lambda, n}, {sigma, n}], {mu, n}, {nu, n}]
# Ecuación (7)

RicciUU = Table[Sum[ gUU[[beta, nu]]*gUU[[mu, alpha]]*RicciDD[[alpha, beta]],
{alpha, n}, {beta, n}], {mu, n}, {nu, n}]
# Subir dos índices tensor Ricci

PUU = Table[Sum[ RiemannDDDD[[rho, nu, mu, sigma]]*RicciUU[[sigma, rho]], {rho, n},
{sigma, n}], {nu, n}, {mu, n} ]
# Ecuación (81)
```

2. Anexo B: Invariantes y ecuaciones de campo

En primer lugar mediante [Mathematica](#) se han obtenido los valores de los tensores de Bach y Weyl para la métrica de Kundt :

```
coordenadasU = {x, y, u, r}
n = Length[coordenadasU]
gDD = {{1/((1 + 1/4*(x*x + y*y))*(1 + 1/4*(x*x + y*y))), 0, 0, 0},
{0, 1/((1 + 1/4*(x*x + y*y))*(1 + 1/4*(x*x + y*y))), 0, 0}, {0, 0, H[r], -1}, {0,
0, -1, 0}}
gUU = Inverse[gDD]
# Establece coordenadas, métrica (110) con coordenadas x,y para la representación
de la esfera, e inversa de la métrica
# U representa índice superior, D índice inferior

WeylDDDD = Table[RiemannDDDD[[mu, nu, rho, sigma]] + 1/2*(gDD[[mu, sigma]]
*RicciDD[[rho, nu]] + gDD[[nu, rho]]*RicciDD[[sigma, mu]] - gDD[[mu, rho]]
*RicciDD[[sigma, nu]] - gDD[[nu, sigma]]*RicciDD[[rho, mu]]))
+ 1/6*R*(gDD[[mu, rho]]*gDD[[sigma, nu]] - gDD[[mu, sigma]]*gDD[[rho, nu]]), {mu,
n}, {nu, n}, {rho, n}, {sigma, n}]
# Tensor de Weyl

WeylUUUU = Table[Sum[ gUU[[a, mu]]*gUU[[b, nu]]*gUU[[c, rho]]*gUU[[d, sigma]]*
WeylDDDD[[mu, nu, rho, sigma]], {mu, n}, {nu, n}, {rho, n}, {sigma, n}], {a, n},
{b, n}, {c, n}, {d, n}]
# Subimos índices al tensor de Weyl

InvWeyl = Sum[WeylDDDD[[a, b, c, d]]*WeylUUUU[[a, b, c, d]], {a, n}, {b, n}, {c,
n}, {d, n}]
# Invariante tensor de Weyl

Para calcular el tensor de Bach primero calculamos las derivadas covariantes del
tensor de Weyl
CovWeyl = Table[D[WeylDDDD[[a, c, b, d]], coordenadasU[[alpha]]]
- Sum[GammaUDD[[epsilon, a, alpha]]* WeylDDDD[[epsilon, c, b, d]], epsilon, n] -
Sum[GammaUDD[[xi, c, alpha]]*
WeylDDDD[[a, xi, b, d]], {xi, n}] - Sum[GammaUDD[[phi, b, alpha]]*WeylDDDD[[a, c,
phi, d]], {phi, n}] - Sum[GammaUDD[[gamma, d, alpha]]*WeylDDDD[[a, c, b, gamma]],
{gamma, n}], {alpha, n}, {a, n}, {b, n}, {c, n}, {d, n}]
# Derivada covariante tensor Weyl

PCovWeyl = Table[Sum[ gUU[[mu, d]]*CovWeyl[[a, c, b, d, mu]], {d, n}, {mu, n}], {a,
n}, {b, n}, {c, n}]
# Subimos índice del tensor obtenido de la derivada covariante
```

```

CovPCovWeyl=Table[D[PCovWeyl[[a, c, b]], coordenadasU[[beta]]]
- Sum[GammaUDD[[epsilon, a, beta]]* PCovWeyl[[epsilon, c, b]], epsilon, n]
- Sum[GammaUDD[[xi, c, beta]]*
PCovWeyl[[a, xi, b]], {xi, n}] - Sum[GammaUDD[[phi, b, beta]]
*PCovWeyl[[a, c, phi]], {phi, n}], {beta, n}, {a, n}, {b, n}, {c, n}]
# Segunda derivada covariante

PCovPCovWeyl = Table[Sum[ gUU[[beta, c]]*CovWeyl[[a, c, b, beta]], {c, n}, {beta,
n}], {a, n}, {b, n}]
# Subir índice

BachDD = Table[Sum[ 1/2*RicciUU[[c, d]]*WeylDDDD[[a, c, b, d]], {c, n}, {d, n}] +
PCovPCovWeyl[[a, b]], {a, n}, {b, n}]
# Tensor de Bach

BachUU = Table[Sum[ gUU[[a, mu]]*gUU[[b, nu]]
BachDD[[mu, nu]], {mu, n}, {nu, n}, {a, n}, {b, n}, {c, n}, {d, n}]
# Tensor de Bach con índices contravariantes

InvBach = Sum[BachDD[[a, b]]*BachUU[[a, b]], {a, n}, {b, n}]
# Invariante tensor de Bach

```

Tenemos las componentes del tensor de Ricci, Bach y Weyl para la métrica de Kundt. Para obtenerlos en la forma que necesitamos correspondiente a realizar una transformación conforme, puesto que se cumple que $ds^2 = \Omega^2 ds_{Kundt}^2$, entonces para el tensor métrico:

$$g_{ab} = \Omega^2 g_{ab}^{Kundt} \quad (1)$$

Para el tensor de Bach, las componentes se obtienen directamente reescalando el resultado anterior, luego:

$$B_{ab} = \Omega^{-2} B_{ab}^{Kundt} \quad (2)$$

En el caso del tensor de Ricci y escalar de curvatura, necesitamos obtener las derivadas siguientes de la función $\Omega(\bar{r})$:

$$\frac{\partial \Omega(\bar{r})}{\partial \bar{r}} \equiv \Omega' \quad (3)$$

$$\nabla_{\bar{r}} \nabla_{\bar{r}} \Omega(\bar{r}) = \Omega'' \quad (4)$$

$$\nabla_{\bar{r}} \nabla_{\bar{u}} \Omega(\bar{r}) = \nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{r}} \Omega(\bar{r}) = \frac{1}{2} \mathcal{H}' \Omega' \quad (5)$$

$$\nabla_{\bar{u}} \nabla_{\bar{u}} \Omega(\bar{r}) = -\frac{1}{2} \mathcal{H} \mathcal{H}' \Omega' \quad (6)$$

$$\square \Omega(\bar{r}) = \nabla^{\bar{r}} \nabla_{\bar{r}} \Omega(\bar{r}) = -(\mathcal{H} \Omega'' + \mathcal{H}' \Omega') \quad (7)$$

donde se han tenido en cuenta para el cálculo las expresiones de la derivada covariante. Para obtener el escalar de curvatura y tensor de Ricci tras la transformación conforme recurrimos a las siguientes expresiones:

$$R_{ab} = R_{ab}^{Kundt} - 2\Omega^{-1} \nabla_a \nabla_b \Omega - \Omega^{-1} g_{ab}^{Kundt} \square \Omega + \Omega^{-2} \left(4 \frac{\partial \Omega}{\partial a} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial b} - g_{ab}^{Kundt} g_{Kundt}^{cd} \frac{\partial \Omega}{\partial c} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial d} \right) \quad (8)$$

$$R = \Omega^{-2} R^{Kundt} - 6\Omega^{-3} \square \Omega \quad (9)$$

Por tanto, puesto que tenemos el tensor de Ricci y tensor de Bach podemos sustituir sus componentes obtenidas en las ecuaciones de campo obteniendo:

$$\Omega\Omega'' - 2\Omega'^2 = \frac{1}{3}k\mathcal{H}'''' \quad (10)$$

$$(\Omega^2\mathcal{H})'' - 2\Lambda\Omega^4 = -\frac{2}{3}k(2\mathcal{H}\mathcal{H}'''' + \mathcal{H}'\mathcal{H}''' - \frac{1}{2}\mathcal{H}''^2 + 2) \quad (11)$$

$$(\mathcal{H}\Omega\Omega')' + \Omega^2 - \Lambda\Omega^4 = \frac{1}{3}k(\mathcal{H}\mathcal{H}'''' + \mathcal{H}'\mathcal{H}''' - \frac{1}{2}\mathcal{H}''^2 + 2) \quad (12)$$

Estas ecuaciones se pueden reducir a dos [19]:

$$\Omega\Omega'' - 2\Omega'^2 = \frac{1}{3}k\mathcal{H}'''' \quad (13)$$

$$\mathcal{H}'\Omega\Omega' + 3\Omega'^2\mathcal{H} + \Omega^2 - \Lambda\Omega^4 = \frac{1}{3}k(\mathcal{H}'\mathcal{H}''' - \frac{1}{2}\mathcal{H}''^2 + 2) \quad (14)$$

3. Anexo C: Fórmulas recursivas

Añadimos la expresión explícita de las relaciones de recurrencia que definen los coeficientes α_l y γ_{l+1} para $l \geq 2$ que definen las expansiones de las funciones métricas $\Omega(\bar{r})$ y $\mathcal{H}(\bar{r})$ [15]:

$$\begin{aligned} \alpha_l = \frac{1}{l^2} & \left[-\frac{2\Lambda}{3\bar{r}_h^2} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{i=0}^j \left[\alpha_{l-1-j} \rho^j + \left(\rho^{l-1-j} + b\alpha_{l-1-j} \right) \left(\alpha_i \rho^{j-i} + \alpha_{j-i} \left(\rho^i + b\alpha_i \right) \right) \right] \right. \\ & - \frac{1}{3} \alpha_{l-2} (2 + \rho) \rho (l-1)^2 + \alpha_{l-1} \cdot \frac{1}{l^2} \left[\frac{1}{3} + (1 + \rho) \left(l(l+1) + \frac{1}{3} \right) \right] \\ & \left. - \frac{3}{l^2} \sum_{i=0}^l (-1)^i \gamma_i \left(\rho^{l-i} + b\alpha_{l-i} \right) \left(l(l-i) + \frac{1}{6} i(i+1) \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\gamma_{l+1} = \frac{(-1)^l}{k\bar{r}_h^2(l+2)(l+1)l(l-1)} \sum_{i=0}^{l-1} \left[\alpha_i \rho^{l-i} + \alpha_{l-i} \left(\rho^i + b\alpha_i \right) \right] (l-i)(l-1-3i) \quad (16)$$

Los coeficientes ya determinados vienen dados por:

$$\alpha_0 = 0 \quad (17)$$

$$\alpha_1 = 1 \quad (18)$$

$$\gamma_1 = 1 \quad (19)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{3} \left[4 - \frac{1}{\bar{r}_h^2} \left(2\Lambda + \frac{1}{2k} \right) + 3b \right] \quad (20)$$