

Trabajo de Fin de Grado

# Análisis de sensibilidad de modelos de simulación numérica de flujos geofísicos

*Grado en Física*

**Autor:** Jorge Luis Arcega Royo

**Directores:** Pilar García Navarro y Javier Fernández Pato  
Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos

# Índice

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelos de flujo</b>	<b>2</b>
2.1. Ecuaciones de aguas poco profundas . . . . .	2
2.2. Modelos de fricción . . . . .	3
2.3. Modelos de infiltración . . . . .	4
2.4. Modelos de erosión . . . . .	5
2.5. Discretización en volúmenes finitos . . . . .	5
<b>3. Caso test: lluvia sobre un plano inclinado</b>	<b>6</b>
3.1. Sensibilidad a la fricción en ausencia de infiltración . . . . .	7
3.1.1. Análisis del modelo turbulento ante la variación del número de Manning . . . . .	7
3.1.2. Análisis del modelo turbulento ante variaciones de la pendiente . . . . .	7
3.1.3. Análisis del modelo de fricción viscoso . . . . .	8
3.2. Sensibilidad a las leyes de infiltración . . . . .	9
3.2.1. Análisis del modelo de infiltración de Horton . . . . .	9
3.2.2. Análisis del modelo de infiltración de Green-Ampt . . . . .	10
3.3. Sensibilidad a los parámetros de erosión . . . . .	11
<b>4. Validación con datos experimentales</b>	<b>12</b>
4.1. Caso 1: Cuenca a escala de laboratorio . . . . .	12
4.1.1. Análisis de sensibilidad al modelo de fricción y sus parámetros . . . . .	12
4.1.2. Estudio de errores . . . . .	14
4.2. Caso 2: Cuenca de Arnás . . . . .	15
4.2.1. Influencia de la topografía y su discretización . . . . .	15
4.2.2. Análisis de la sensibilidad al modelo de fricción y sus parámetros . . . . .	16
4.2.3. Análisis de la sensibilidad al modelo de infiltración y sus parámetros . . . . .	17
4.2.4. Análisis de la sensibilidad a los parámetros del modelo de transporte de sedimentos. . . . .	18
4.2.5. Análisis de la sensibilidad a valores distribuidos de infiltración. . . . .	19
4.2.6. Estudio de errores . . . . .	22
<b>5. Conclusiones</b>	<b>23</b>
<b>6. Referencias</b>	<b>25</b>
<b>A. Anexo I: Evolución temporal del calado para los casos 1 y 2</b>	<b>26</b>
<b>B. Anexo II: Sistema de ecuaciones vectoriales del modelo de aguas poco profundas</b>	<b>28</b>

# 1. Introducción y objetivos

Hoy en día, la potencia de los ordenadores personales permite a la comunidad científica desarrollar modelos computacionales para realizar simulaciones numéricas complejas. En el contexto de la Mecánica de Fluidos, esto ha permitido aumentar la complejidad de los modelos, la resolución de las discretizaciones espaciales de los problemas hidráulicos a considerar y la eficiencia computacional, reduciendo enormemente los tiempos de cálculo [9]. Un modelo hidráulico/hidrológico eficiente y correctamente calibrado representa una herramienta extremadamente útil para la predicción y mitigación de los efectos causados por eventos hidráulicos (tormentas, desbordamientos, roturas de presa, etc.) y permite la mejora de los planes de evaluación de riesgos desarrollados por las administraciones [9, 4].

Debido a la complejidad de este tipo de flujos es necesario realizar aproximaciones que faciliten la resolución de las ecuaciones. Es común estudiar estos flujos promediando las ecuaciones en la vertical, para ello se usa el modelo de aguas poco profundas que, además, desprecia las aceleraciones verticales y por lo tanto adopta una distribución hidrostática de presión en cada punto. En este tipo de modelos las aplicaciones prácticas requieren un compromiso entre precisión espacial y eficacia computacional. Para obtener la resolución espacial adecuada, en muchos casos se requieren mallas de cálculo bastante finas, es decir, más almacenamiento de datos, aumentando el número de operaciones.

En este trabajo se muestra la aplicación de un modelo hidráulico distribuido y bidimensional (2D) basado en las ecuaciones de aguas poco profundas o *Shallow Water Equations* (SWE). El modelo cuenta con la posibilidad de incluir términos de lluvia e infiltración para representar más adecuadamente los fenómenos hidrológicos que tienen lugar en cuencas de montaña como se esquematiza en la Figura 1. También se puede incorporar un modelo de erosión/sedimentación, que complementa el sistema de ecuaciones hidráulicas y que permite calcular de forma distribuida la evolución geomorfológica del terreno por efecto del flujo superficial. La discretización espacial del dominio, conformando una malla de cálculo, permite que cada celda trabaje como un volumen de control donde se tienen en cuenta el flujo de agua, el transporte de sedimentos, el flujo de infiltración y los cambios en el nivel del lecho en los procesos de erosión/sedimentación.

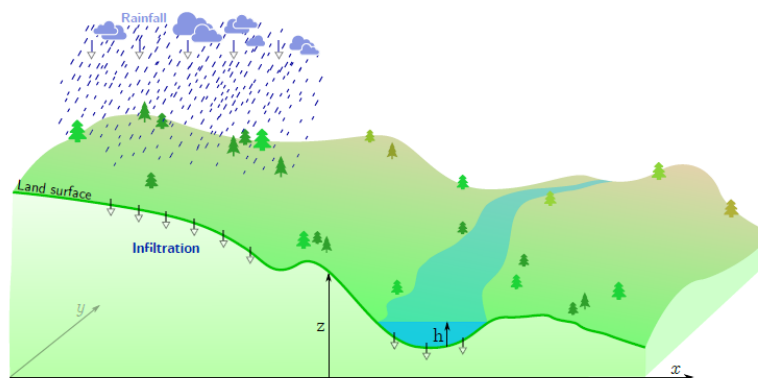


Figura 1: Esquema de un dominio genérico en el que se representan los fenómenos de lluvia y escorrentía.

El modelo se aplicará a varios casos sintéticos cuya topografía se basa en la de un plano inclinado con una pendiente constante. En este tipo de casos, la evolución temporal del caudal de salida (hidrograma) es una función con una forma muy característica, que permite validar el modelo y evaluar de forma sencilla la sensibilidad a distintos parámetros de entrada. Posteriormente, se mostrarán los resultados correspondientes a dos casos con medidas experimentales de laboratorio o de campo, con el objetivo de conseguir una validación en casos realistas y complejos. Los casos experimentales que se usarán consisten en una cuenca a escala de laboratorio, cuyos

parámetros están muy controlados, y una cuenca con una gran disponibilidad de datos de campo de diferentes eventos pasados. En dichas cuencas se han medido los hidrogramas y sedigramas de salida consecuencia de diversas lluvias que representan una buena manera de calibrar los modelos numéricos. Los resultados de todos estos modelos son especialmente sensibles a los parámetros de los modelos y a la malla de cálculo.

Los objetivos principales de este trabajo se pueden resumir en:

- Evaluar la sensibilidad de los resultados a algunos modelos de fricción y variaciones de parámetros como la rugosidad, densidad o viscosidad.
- Analizar la sensibilidad de los resultados a modelos de infiltración y alteraciones de las variables específicas de dichos modelos que se corresponden con diferentes tipos de suelo.
- Estudiar la sensibilidad de los resultados ante la variación de parámetros del submodelo de transporte en suspensión mediante variación de la densidad y el diametro de las partículas suspendidas.
- Comparar los resultados numéricos con los experimentales en un caso a escala de laboratorio y en una cuenca de montaña.

Para las simulaciones se utilizan los programas QGIS y RIVERFLOW2D, cuyo núcleo de cálculo está desarrollado por el Grupo de Hidráulica Computacional (<http://www.ghc.unizar.es>) del Departamento de Ciencia y Tecnología de Materiales y Fluidos de la Universidad de Zaragoza.

## 2. Modelos de flujo

### 2.1. Ecuaciones de aguas poco profundas

Los flujos de superficie libre que se pretenden estudiar son de considerable complejidad. Debido a ello se suelen realizar aproximaciones que faciliten su resolución. La más común es promediar en la vertical, usando el modelo de aguas poco profundas que se muestra en [5]. Las hipótesis sobre las que se apoya este modelo son: la velocidad vertical del fluido es despreciable, el gradiente de presión vertical se puede considerar hidrostático, el gradiente de presión horizontal es debido al desplazamiento de la superficie de la lámina libre del fluido.

Partiendo de las ecuaciones de conservación de masa y de cantidad de movimiento en las direcciones  $x$  y  $y$ , aplicando las hipótesis de aguas poco profundas, obtenemos las expresiones:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = R - f \quad (1)$$

$$\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q_x q_y}{h} \right) = gh(S_{0x} - S_{fx}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{q_x q_y}{h} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right) = gh(S_{0y} - S_{fy}) \quad (3)$$

donde  $h$  representa el calado,  $q_x = hu$  y  $q_y = hv$  son los caudales unitarios con  $u$  y  $v$  las velocidades promediadas en la vertical en las direcciones  $x$  y  $y$  respectivamente. La aceleración de la gravedad se representa como  $g$ . Los términos fuente en el lado derecho de la ecuación son la intensidad de lluvia  $R$ , la velocidad de infiltración  $f$ , las pendientes en el lecho  $S_{0x}$  y  $S_{0y}$  que vienen dadas por las expresiones

$$S_{0x} = -\frac{\partial z_b}{\partial x} \quad S_{0y} = -\frac{\partial z_b}{\partial y} \quad (4)$$

siendo  $z_b$  la cota del terreno. Por último, las pendientes de fricción  $S_{fx}$  y  $S_{fy}$  en las direcciones del plano representan los esfuerzos de fricción del flujo con el suelo

$$S_{fx} = \frac{\tau_{bx}}{\rho gh} \quad S_{fy} = \frac{\tau_{by}}{\rho gh} \quad (5)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $\tau_b$  es el esfuerzo en el fondo y se puede formular con diversos modelos de fricción.

Las ecuaciones 1, 2 y 3 se pueden expresar vectorialmente de la forma

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} = \vec{S} \quad (6)$$

donde

$$\vec{U} = (h, q_x, q_y)^T \quad (7)$$

$$\vec{F} = \left( q_x, \frac{q_x^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2, \frac{q_x q_y}{h} \right)^T \quad (8)$$

$$\vec{G} = \left( q_y, \frac{q_x q_y}{h}, \frac{q_y^2}{h} + \frac{1}{2}gh^2 \right)^T \quad (9)$$

$$\vec{S} = (R - f, gh(S_{0x} - S_{fx}), gh(S_{0y} - S_{fy}))^T \quad (10)$$

## 2.2. Modelos de fricción

Para formular la fricción se han empleado dos modelos, uno de flujo turbulento y otro de flujo laminar.

El modelo de flujo turbulento sostiene que las partículas se mueven en trayectorias irregulares y va asociado a un valor alto del número de Reynolds  $Re = \rho V h / \mu$ , con  $V = \sqrt{u^2 + v^2}$ . En este tipo de flujos la rugosidad de las superficies tiene especial relevancia como se muestra en [3].

En este caso, la formulación del esfuerzo en el fondo es la mostrada en [1] y [8]

$$\tau_{b,x} = \tau_{t,x} = \rho gh \frac{n^2 u \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (11)$$

$$\tau_{b,y} = \tau_{t,y} = \rho gh \frac{n^2 v \sqrt{u^2 + v^2}}{h^{4/3}} \quad (12)$$

siendo  $n$  el número de Manning, un coeficiente para medir la rugosidad del suelo.

En el flujo laminar el movimiento de las partículas es ordenado y dominado por la viscosidad. Se asocia a valores reducidos de  $Re$ . Se pretende simularlo con un modelo viscoso de fricción, similar al que se muestra en [13], donde

$$\tau_{b,x} = \tau_{\mu,x} = 3\mu \frac{u}{h} \quad (13)$$

$$\tau_{b,y} = \tau_{\mu,y} = 3\mu \frac{v}{h} \quad (14)$$

con  $\mu$  la viscosidad del fluido.

### 2.3. Modelos de infiltración

Para la infiltración se ha hecho uso de dos modelos, Green-Ampt y Horton. Ambos formulan la capacidad de infiltración del sólido  $f_p$  y el volumen de infiltración acumulado  $F$ . Cabe destacar la diferencia entre la capacidad de infiltración ( $f_p$ ) y la velocidad de infiltración actual ( $f$ ). Pues siendo  $R$  la intensidad de lluvia,

$$f_p(t) = \begin{cases} R(t) & \text{si } R(t) \leq f_p(t) \\ f_p(t) & \text{si } R(t) > f_p(t) \end{cases} \quad (15)$$

mientras que el volumen de infiltración acumulado se expresa de la forma:

$$F(t) = \int_0^t f_p(t) dt \quad (16)$$

El modelo de Green-Ampt, mostrado en [5], asume la existencia de un calado mínimo ( $h_0$ ) sobre el fondo, un contenido inicial de humedad ( $\theta$ ) uniforme en profundidad y un frente mojado vertical de avance plano ( $s$ ) determinado por una transición brusca cuya región superior se encuentra saturada con una cantidad de humedad igual a la porosidad. En este modelo  $F$  viene dado por la expresión

$$F(t) = \Delta\theta s(t) \quad (17)$$

ya que

$$f_p(t) = \Delta\theta \frac{ds(t)}{dt} \quad (18)$$

donde  $\Delta\theta = \eta - \theta_i$ , siendo  $\eta$  la porosidad y  $\theta_i$  el contenido inicial de agua. Sabemos por la ley de Darcy, que aparece en [5], que

$$q_{sat} = k \frac{\partial H}{\partial z} \quad (19)$$

donde  $q_{sat}$  es el caudal saturado,  $k$  es la conductividad hidráulica y  $H$  la altura hidráulica que viene representada por la expresión

$$H = \frac{s + \phi - h_0}{s} z + h_0 \quad (20)$$

siendo  $\phi$  la altura de succión del frente húmedo.

Asumiendo que  $q_{sat} = f_p$

$$\Delta\theta \frac{ds(t)}{dt} = k \frac{s + \phi - h_0}{s} \quad (21)$$

El modelo de Horton, mostrado en [5], resulta más sencillo, pues propone una ecuación de ajuste exponencial para la capacidad de infiltración.

$$f_p = f_c + (f_0 + f_c) e^{-kt} \quad (22)$$

con  $f_0$  la capacidad inicial de infiltración,  $f_c$  la capacidad final y  $k$  una constante que se estima experimentalmente.

## 2.4. Modelos de erosión

Al formular la erosión/sedimentación se incluye la posibilidad de que el lecho se modifique, por lo tanto se deben utilizar unas ecuaciones que muestren la influencia mutua entre el caudal sólido y el caudal líquido [4]. Para este trabajo la conservación de la fase sólida suspendida se modela mediante una ecuación de conservación del volumen sólido en suspensión

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(q_x\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(q_y\phi) = -\omega_s(\phi - \phi^*) \quad (23)$$

donde  $h\phi$  es el volumen de sedimento en suspensión en una columna de flujo.  $\omega_s$  es la velocidad de deposición y  $\phi^*$  la capacidad de concentración volumétrica de la fase sólida suspendida. El término  $\phi$  contiene la información sobre la cantidad de sedimento que se transporta.

La variación temporal del fondo, vista en [10], viene dada por la ecuación

$$\frac{\partial z_b}{\partial t} = \alpha\xi\omega_s(\Phi - \Phi^*) \quad (24)$$

con  $z_b$  siendo el nivel de fondo,  $\alpha$  una constante que se estima experimentalmente,  $\xi = 1/(1 - \eta)$ , con  $\eta$  la porosidad.  $\Phi$  y  $\Phi^*$  son la concentración de sedimentos total y la concentración sólida total en el equilibrio respectivamente,  $\Phi = \phi - \phi_b$  y  $\Phi^* = \phi^* + \phi_b^*$ , donde  $\phi_b$  es la concentración de sedimentos en el fondo y  $\phi^*$  la concentración en el equilibrio de la fase sólida en el fondo.

Para estimar la velocidad de deposición se ha hecho uso de la formula de Zhang

$$\omega_s = \sqrt{\left(13,95\frac{\nu}{d_s}\right)^2 + 1,09\left(\frac{\rho_s}{\rho_w} - 1\right)gd_s} - 13,95\frac{\nu}{d_s} \quad (25)$$

donde  $\nu$  es la viscosidad de la fase líquida,  $\rho_s$  es la densidad de sólido,  $\rho_w$  es la densidad de la fase líquida y  $d_s$  el diámetro de las partículas.

Por otro lado, la concentración en el equilibrio de la fase sólida suspendida ( $\phi^*$ ) se expresa de la forma

$$\phi^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } \theta < \theta_c \\ \frac{q_s}{h|u|} & \text{si } \theta \geq \theta_c \end{cases} \quad (26)$$

donde  $\theta$  es el número de Shields, un número adimensional que viene dado por la expresión

$$\theta = \frac{\tau_b}{(\rho_s - \rho_w)gd_s} \quad (27)$$

$\theta_c$  es el Shields crítico que indica cuando se inicia el movimiento de erosión. En todos los casos del trabajo tiene un valor  $\theta_c = 0,047$ . Para simular el caudal sólido en suspensión ( $q_s$ ) se ha usado la formula de Bagnold

$$q_s = 0,01 \frac{(\rho_s - \rho_w)}{\rho_s} \frac{\tau_b|u|^2}{g\omega_s} \quad (28)$$

## 2.5. Discretización en volúmenes finitos

Para resolver las ecuaciones que modelan el problema se ha usado el método de volúmenes finitos visto en [5] y [8]. Se divide el problema en celdas computacionales y cada celda tiene superficie  $A_i$ , número de paredes  $N_\omega$  de lado  $l_\omega$  y un vector normal asociado a cada pared  $\vec{n}_\omega = (n_x, n_y)$ . Considerando un volumen de control  $\Omega$ :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \vec{U} d\Omega + \int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{S} d\Omega \quad (29)$$

con:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) d\Omega = \oint (\vec{F}n_x + \vec{G}n_y) dl_{\omega} \quad (30)$$

Integrando y aproximando a primer orden en el espacio y en el tiempo se obtiene el siguiente sistema numérico explícito:

$$\vec{U}_i^{n+1} = \vec{U}_i^n - \frac{\Delta t}{A_i} l_{\omega} \left[ \sum_{\omega=1}^{N_{\omega}} \left( \delta \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right) - \vec{S}_{PF} \right)_{\omega} \right] + \Delta t \vec{S}_{M_{\omega}} \quad (31)$$

$$\delta \left( \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} \right)_{\omega} = \sum_{m=1}^3 (\lambda_{\alpha} \vec{e}_{\omega}^m) \quad (32)$$

$$\vec{S}_{PF_{\omega}} = \sum_{m=1}^3 (\beta \vec{e}_{\omega}^m) \quad (33)$$

siendo  $\lambda_{\omega}$  los valores propios,  $\vec{e}_{\omega}$  los vectores propios del jacobiano del sistema, obtenidos en los anexos, y  $\alpha$  y  $\beta$  coordenadas de los flujos y fuentes en la base de vectores propios. Combinando la ecuación 31 con las condiciones iniciales y las condiciones de contorno correctas se puede resolver cualquier problema de flujo transitorio en dos dimensiones.

De esta manera, se puede calcular el valor de las variables conservadas en el instante de tiempo posterior, mediante las variables conservadas en el instante de tiempo anterior, haciendo uso de las contribuciones a través de las paredes de la celda por parte de los flujos y términos fuente.

Si el paso de tiempo es demasiado grande, el sistema se puede volver inestable. Para asegurar un sistema numérico estable se emplea el número adimensional de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), que expresa el cociente entre el paso de tiempo utilizado y el máximo posible y que debe ser inferior a 1. El paso de tiempo se calcula de manera dinámica multiplicando el CFL por el  $\min_{Mesh}(\Delta t_{i,\omega})$ , que se calcula para todas las celdas de la malla.

$$\Delta t = CFL \min_{Mesh} (\Delta t_{i,\omega}) \quad (34)$$

$$\Delta t_{i,\omega} = \frac{\min(\Delta x'_i, \Delta x'_j)}{\max_{m=1,2,3} (|\lambda_{\omega}^m|)} \quad (35)$$

$$\Delta x'_i = \frac{S_i}{\max_{1, N_{\omega}} (l_{\omega})} \quad (36)$$

A veces esta condición hace que el tiempo de cálculo sea muy elevado, sobre todo en simulaciones con muchas celdas. Existen estrategias de paralelización del código o la implementación en GPU que recientemente han resultado exitosas como en [8].

### 3. Caso test: lluvia sobre un plano inclinado

El objetivo del caso test presentado en esta sección es el de validar el comportamiento del simulador sobre una geometría sencilla, así como evaluar la sensibilidad del caudal de salida a las variaciones de ciertos parámetros del modelo, como la ley de fricción, los parámetros de infiltración o la viscosidad del fluido, entre otros. El caso consiste en un plano inclinado, inicialmente seco, de 2000 m de longitud y 20 m de anchura con una pendiente constante igual a 0,01 (Figura 2). Sobre esta topografía se considera una lluvia de intensidad 450 mm/h uniformemente distribuida en el espacio y de 50 min de duración.



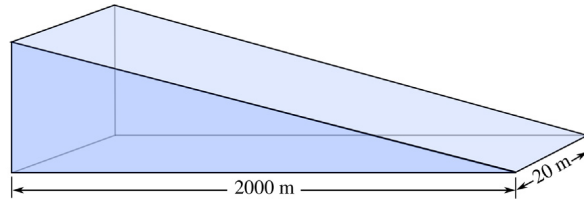


Figura 2: Topografía del plano inclinado.

### 3.1. Sensibilidad a la fricción en ausencia de infiltración

En este apartado se muestran los resultados correspondientes a un estudio de sensibilidad del caudal a la salida del plano inclinado al modelo de fricción.

#### 3.1.1. Análisis del modelo turbulento ante la variación del número de Manning

Empezando por el modelo turbulento, se han probado varios valores del número de Manning (todos ellos en  $sm^{-1/3}$ ) para un plano de pendiente 0,01 sin infiltración. Los hidrogramas obtenidos en la sección de salida se muestran en la Figura 3

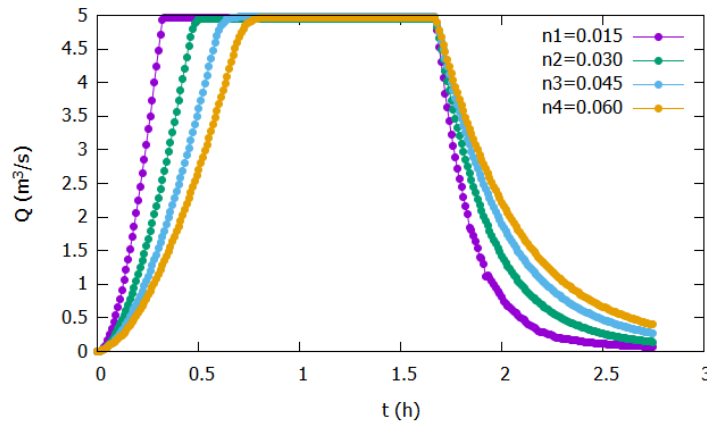


Figura 3: Sensibilidad del hidrograma de salida al coeficiente de Manning con fricción turbulenta en el plano inclinado.

Se puede ver que al aumentar la rugosidad, es decir, aumentando el coeficiente de Manning, el tiempo de concentración también aumenta. De la misma forma la curva de descenso también crece con el valor del coeficiente de Manning.

#### 3.1.2. Análisis del modelo turbulento ante variaciones de la pendiente

Para comprobar como afecta variar la pendiente del plano se ha usado un valor fijo del número de Manning ( $n = 0,03sm^{-1/3}$ ) en un plano sin infiltración. En la tabla 1 aparecen los valores de pendiente que se han estudiado. Con esos datos se han obtenido los hidrogramas que se muestran en la Figura 4.

	Pendiente	Ángulo (grados)
A1	0.005	0.30
A2	0.010	0.58
A3	0.017	1.00
A4	0.052	3.00

Tabla 1: Valores de la pendiente y su equivalente en grados para el caso de fricción turbulenta sin infiltración.

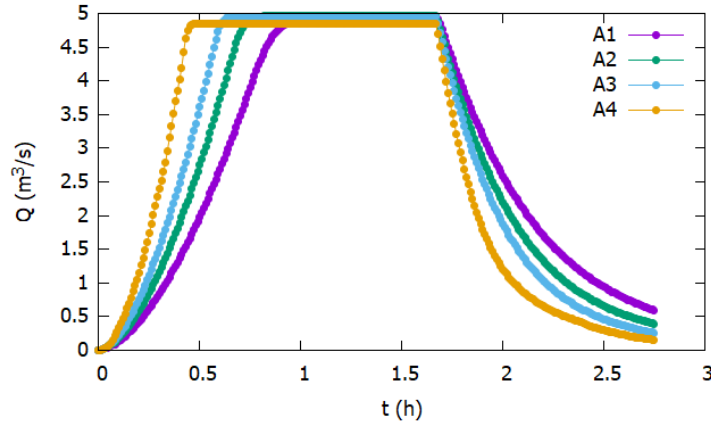


Figura 4: Hidrogramas del plano inclinado para varios valores de la pendiente con fricción turbulenta y sin infiltración.

Como se puede apreciar, a mayor pendiente menor es el tiempo de concentración. Esto era de esperar pues la velocidad también se vuelve mayor. Por la misma razón, la curva de vaciado disminuye al aumentar la pendiente.

Para estos casos de variaciones de la pendiente, Figura 4, y los de variación del coeficiente de Manning, Figura 3, se ha calculado el valor del número de Reynolds, obteniendo  $Re = 2,5 \cdot 10^5$ . Este resultado muestra que en los hidrogramas de las Figuras 3 y 4, se han realizado bajo fricción turbulenta.

### 3.1.3. Análisis del modelo de fricción viscoso

Se ha analizado el comportamiento del hidrograma de salida cuando se utiliza el modelo viscoso y la sensibilidad a la variación de la viscosidad. Los resultados de la Figura 5 corresponden al caso de la pendiente inicial y de nuevo sin infiltración.

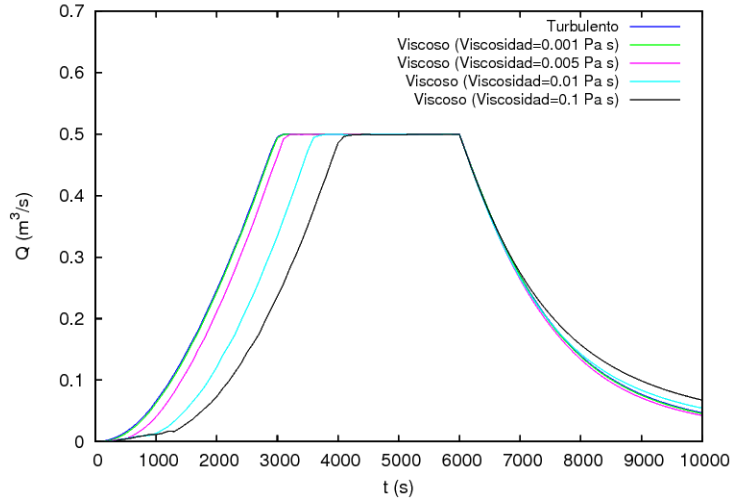


Figura 5: Hidrogramas del plano inclinado usando el modelo viscoso para varios valores de la viscosidad. Sin infiltración.

Como se aprecia, al aumentar la viscosidad aumenta el tiempo de concentración. Al ser el fluido más viscoso, la velocidad del mismo es menor y al hidrograma le cuesta más tiempo llegar a un rango estable.

Calculando el valor del número de Reynolds para los casos de la Figura 5, se observa un laminamiento del flujo al aumentar la viscosidad. Los valores del Reynolds se muestran en la tabla 2.

Viscosidad ( $Pa s$ )	0,001	0,005	0,01	0,1
Reinolds	25000	5000	2500	250

Tabla 2: Valores del número de Reinolds para los eventos de viscosidad.

obteniendo flujo laminar a partir de  $0,01 Pa s$ . Esto es coherente con la formulación del modelo viscoso.

### 3.2. Sensibilidad a las leyes de infiltración

Supondremos ahora que el plano inclinado es permeable y le añadimos infiltración al modelo.

#### 3.2.1. Análisis del modelo de infiltración de Horton

Empezamos estudiando los resultados que proporciona el modelo de Horton. Este modelo solo tiene en cuenta las capacidades iniciales y finales de infiltración del suelo. En la tabla 3 se muestran los valores de los parámetros considerados.

	$K$ (1/s)	$f_c$ (m/s)	$f_0$ (m/s)
H01	$10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$
H02	$10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-4}$
H03	$10^{-4}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$

Tabla 3: Valores de las variables del modelo de Horton en el plano inclinado.

Los hidrogramas que se obtuvieron con la ley de fricción viscosa, para un valor del coeficiente de Manning  $n=0.03sm^{-1/3}$ , se muestran en la Figura 6

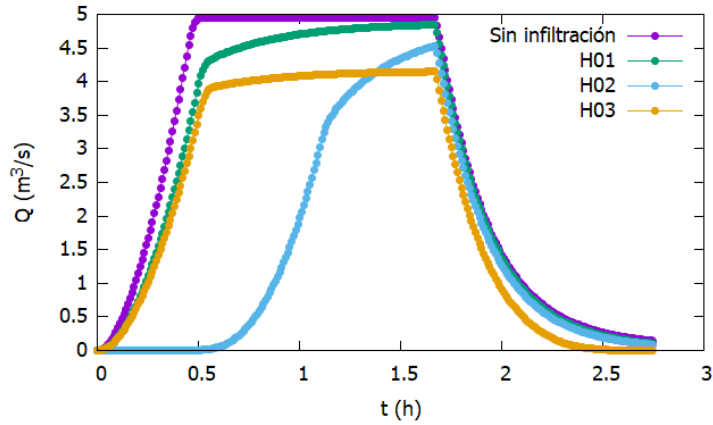


Figura 6: Hidrogramas del plano inclinado para varios valores de las variables de infiltración en el modelo de Horton.

Puede apreciarse que en H01 el hecho de que la capacidad de infiltración inicial sea 10 veces mayor que la final provoca más infiltración al principio del hidrograma. Aumentandola considerablemente en H02 permite ver este incremento de la infiltración más claramente. Acercar el valor de la capacidad de infiltración final en H03 provoca una disminución del caudal al final de la meseta del hidrograma.

### 3.2.2. Análisis del modelo de infiltración de Green-Ampt

El modelo de Green-Ampt resulta más complejo que el de Horton. En la tabla 4 se muestran los valores de las variables que se estudiaron.

	$K$ (m/s)	$\phi$ (m)	$\Delta\theta$
GA01	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,01	3,5
GA02	$1,8 \cdot 10^{-5}$	0,01	3,5
GA03	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,1	3,5

Tabla 4: Valores de las variables del modelo de Green-Ampt. Caso test del plano inclinado.

Con estos valores se obtuvieron los hidrogramas que se muestran en la Figura 7, donde se aprecia que la variable  $k$  tiene una influencia mayor que  $\phi$ .

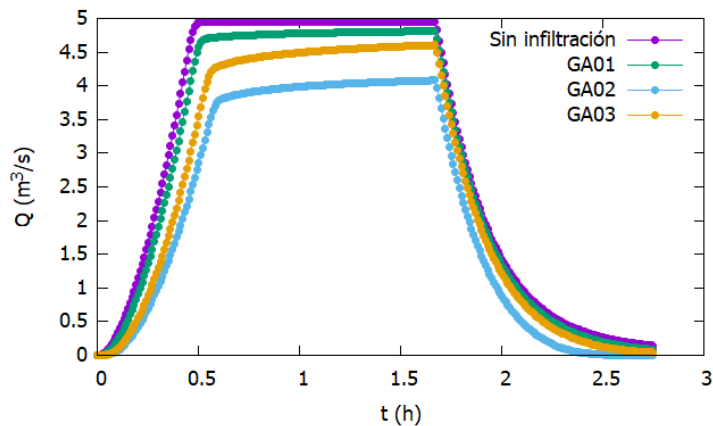


Figura 7: Hidrogramas del plano inclinado para varios valores de las variables de infiltración en el modelo de Green-Ampt.

### 3.3. Sensibilidad a los parámetros de erosión

Se considera ahora que el plano inclinado es de material erosionable. Incluimos por lo tanto en el modelo la ecuación de transporte de sedimentos en suspensión y estamos interesados en evaluar la sensibilidad del hidrograma de salida a los parámetros de dicho modelo. Se han variado la densidad de las partículas, el diámetro de las partículas y la porosidad. Todos ellos se han realizado en un plano inclinado de pendiente 0,01 y fricción turbulenta con coeficiente de Manning  $n=0,03sm^{-1/3}$ .

Los valores que se han estudiado son los que se incluyen en la tabla 5

	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Porosidad	diámetro (m)
D1	2900	0,52	$5 \cdot 10^{-5}$
D2	2650	0,52	$5 \cdot 10^{-5}$
D3	2300	0,52	$5 \cdot 10^{-5}$
D4	2000	0,52	$5 \cdot 10^{-5}$
d1	2650	0,52	$5 \cdot 10^{-5}$
d2	2650	0,40	$3 \cdot 10^{-4}$
d3	2650	0,33	$10^{-3}$

Tabla 5: Valores de la porosidad, densidad y diámetro de las partículas. Caso del plano inclinado sin infiltración y con fricción turbulenta.

Para otorgar sentido físico, puesto que la porosidad está relacionada con el diámetro de las partículas, se han modificado esas variables simultáneamente según la formula

$$P = 0,13 + \frac{0,21}{(d + 0,002)^{0,21}} \quad (37)$$

Los hidrogramas del caudal líquido y del caudal sólido obtenidos se muestran en las Figuras 8 a 9.

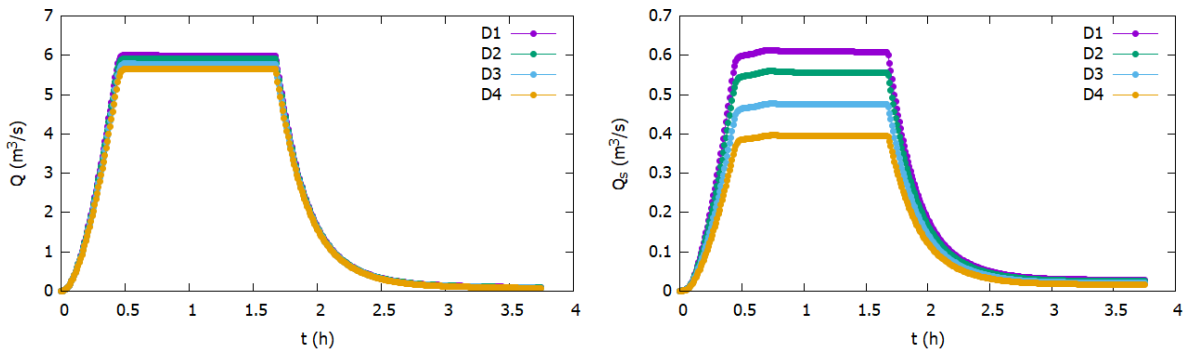


Figura 8: Caudal líquido (izquierda) y caudal sólido (derecha) para variaciones de densidad para el caso del plano inclinado sin infiltración y con fricción turbulenta.

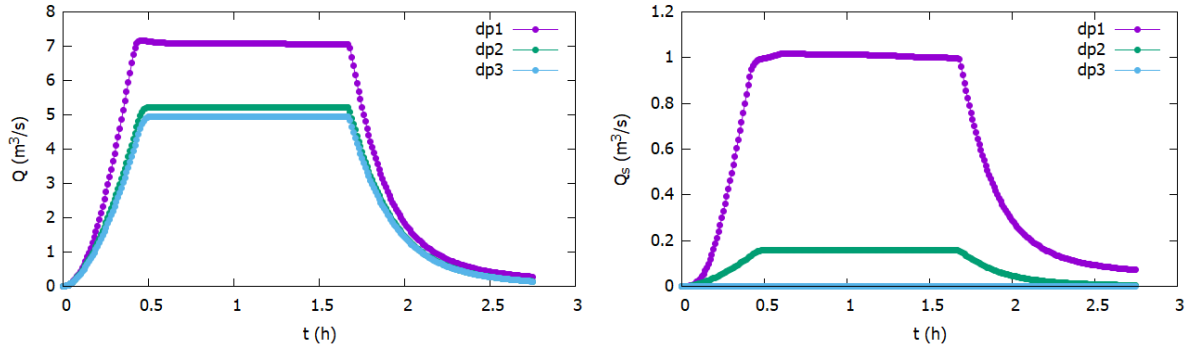


Figura 9: Caudal líquido (izquierda) y caudal sólido (derecha) para variaciones de diámetro para el caso del plano inclinado sin infiltración y con fricción turbulenta.

De esto se puede deducir que la variación de la densidad de las partículas no afecta prácticamente al caudal líquido, aunque esto sí se aprecia más en el caudal sólido. Sin embargo, la variación del diámetro de las partículas tiene un efecto mucho más apreciable, tanto en el caudal líquido como en el caudal sólido. El hecho de tener partículas más ligeras permite un mejor avance de ambos tipos de flujo.

## 4. Validación con datos experimentales

### 4.1. Caso 1: Cuenca a escala de laboratorio

En esta sección se presenta la aplicación del modelo a un caso test de lluvia-escorrentía sobre fondo rígido e impermeable con resultados experimentales [2] con el objetivo de poder validar el simulador, así como estudiar la sensibilidad al modelo de fricción y sus parámetros. De entre los diversos casos medidos en [2] consideramos aquí una lluvia constante de  $300\text{mm}/h$  durante  $20s$  sobre el dominio impermeable e inicialmente seco representado en la Figura 10. Se trata de un modelo de una cuenca urbana a escala de laboratorio ( $2,5m \times 2m$ ) dotada de varios obstáculos que representan edificaciones. Los edificios se han modelizado como agujeros en la malla de cálculo para reducir el número de celdas efectivas.

#### 4.1.1. Análisis de sensibilidad al modelo de fricción y sus parámetros

Para las simulaciones con el modelo turbulento, se ha considerado un coeficiente de rugosidad de Manning igual a  $0,016sm^{-1/3}$ , mientras que la densidad y viscosidad de referencia para el modelo de fricción viscoso son  $\rho = 1000kg/m^3$  y  $\mu = 0,001Pa \cdot s$ .

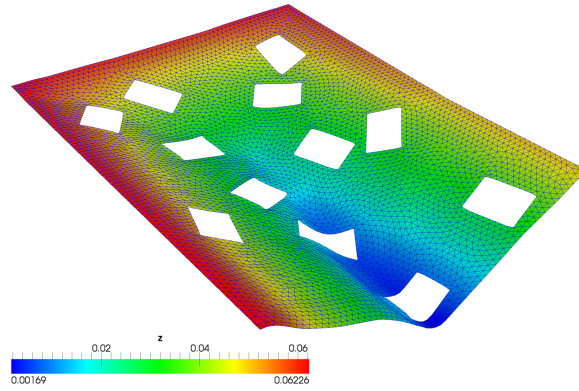


Figura 10: Representación tridimensional del mapa de elevaciones del terreno y de la malla de cálculo para el Caso 1 (la altura en el eje vertical se ha exagerado 10 veces).

En los anexos se muestra una evolución temporal del calado de agua para varios tiempos donde se aprecian resultados coherentes incluso en situaciones comprometidas, como calados pequeños o los frentes seco-mojado.

En las Figuras 11 y 12 se muestran los hidrogramas obtenidos mediante variaciones de la densidad y viscosidad que aparecen en la tabla 6 y su comparación con el hidrograma experimental y el obtenido mediante el modelo de fricción turbulenta con un coeficiente de Manning  $n = 0,016sm^{-1/3}$ . Se puede observar como tanto el modelo de fricción turbulenta como el modelo viscoso reproducen bien el hidrograma experimental con un error máximo de un 10% en el valor de pico y un 7,8% en el volumen de salida. Con respecto a las variaciones de densidad y viscosidad, se observa que los hidrogramas se laminan conforme disminuye la densidad o aumenta la viscosidad del fluido, lo cual es coherente con la formulación del término de rozamiento mediante el modelo viscoso.

Casos densidad	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Casos viscosidad	Viscosidad (Pa s)
VD01	1000	Vvisc01	0,001
VD02	1500	Vvisc02	0,005
VD03	2000	Vvisc03	0,01
VD04	3000	Vvisc04	0,1

Tabla 6: Caso 1: Valores de densidad y viscosidad para el modelo de fricción viscosa.

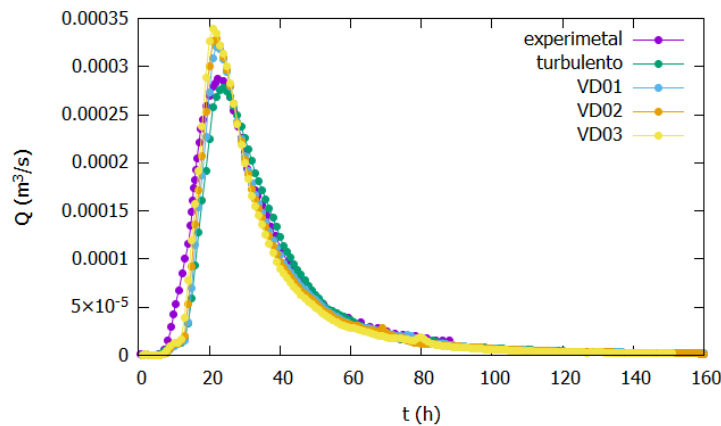


Figura 11: Hidrogramas obtenidos para el Caso 1 mediante variaciones de la densidad y comparación con el hidrograma turbulento y el experimental.

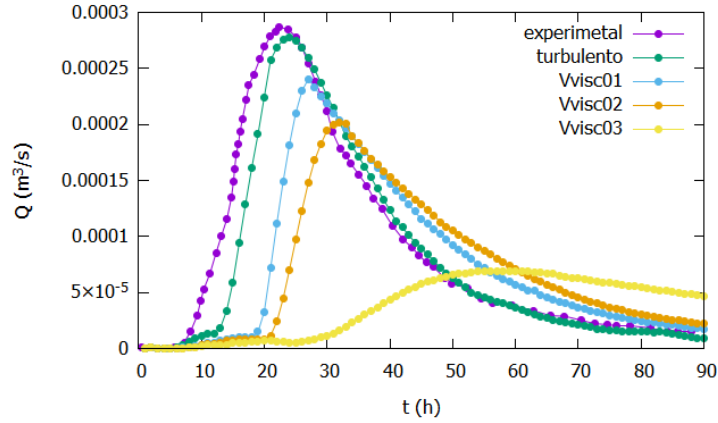


Figura 12: Hidrogramas obtenidos para el Caso 1 mediante variaciones de la viscosidad y comparación con el hidrograma turbulento y el experimental.

#### 4.1.2. Estudio de errores

Para cuantificar la sensibilidad de los casos se ha recurrido al metodo de desviación cuadrática media que aparece en [4]

$$\text{error} = \sqrt{\frac{\sum_i (Q_i - Q_{i,obs})^2}{N_{obs}}} \quad (38)$$

siendo  $Q_i$  los valores de caudal estimados por la simulación a la salida y  $Q_{i,obs}$  los valores de los  $N_{obs}$  valores de capacidad medidos.

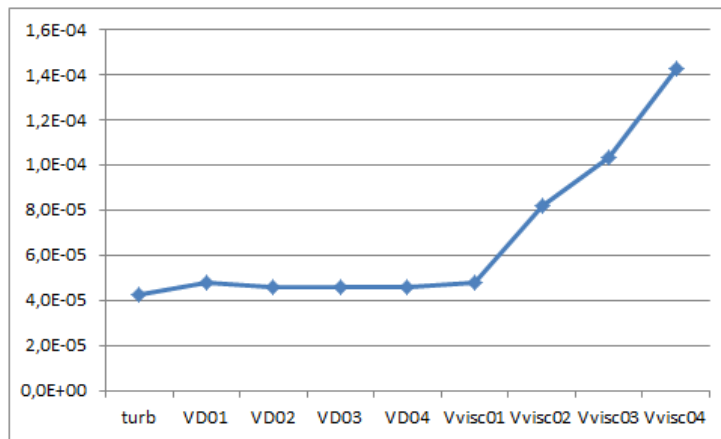


Figura 13: Caso 1: Errores de los resultados mostrados.

En la Figura 13 se aprecia que los errores obtenidos del modelo turbulento y del modelo viscoso con las diferentes variaciones de densidad, son muy inferiores a los datos experimentales, es decir las curvas se aproximan bastante a la curva experimental. Esto era algo esperable únicamente observando los hidrogramas.

Al aumentar el valor de la viscosidad en el modelo de fricción viscosa los hidrogramas van perdiendo similitud respecto al experimental hasta llegar a una curva que difiere en gran medida de este. Se ve reflejado en la Figura 13 en el incremento progresivo de los errores a la vez que aumenta la viscosidad.



## 4.2. Caso 2: Cuenca de Arnás

La cuenca de Arnás ( $2,84 \text{ Km}^2$ ,  $900 - 1340 \text{ m.s.n.m.}$ ) está localizada en el valle de Borau, dentro del Pirineo Aragonés (ver Figura 14). Se trata de una cuenca ampliamente estudiada desde el punto de vista experimental (como se muestra en [5] o [4]) y monitorizada en continuo para las mediciones tanto de caudal de agua como de sedimentos. También es especialmente relevante la influencia de los cambios en el uso del suelo sobre la respuesta hidráulica de la cuenca frente a eventos de lluvia [5]. En los anexos se muestra una evolución del calado para varios tiempos. La Figura 15 muestra la intensidad de lluvia para el evento considerado y caudal líquido a la salida de la cuenca (izquierda) y caudal sólido de sedimentos (derecha). En este trabajo, para la discretización espacial de la topografía se ha empleado una malla de cálculo de 94013 celdas triangulares, localmente refinada en las zonas de mayor interés, como el cauce principal o los barrancos. En este caso, además de una calibración de los parámetros del modelo de infiltración para ajustar los hidrogramas y sedigramas numéricos a los observados, se realizará un análisis de sensibilidad del modelo de fricción y de distintos parámetros del modelo de erosión/sedimentación para determinar su influencia sobre los resultados.

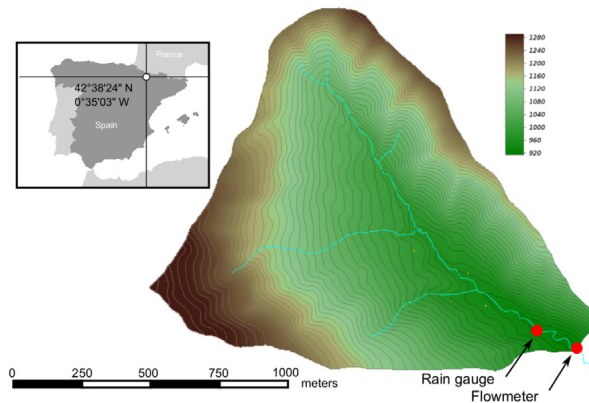


Figura 14: Caso 2: Topografía de la cuenca y localización de las estaciones de medida de lluvia y caudal.

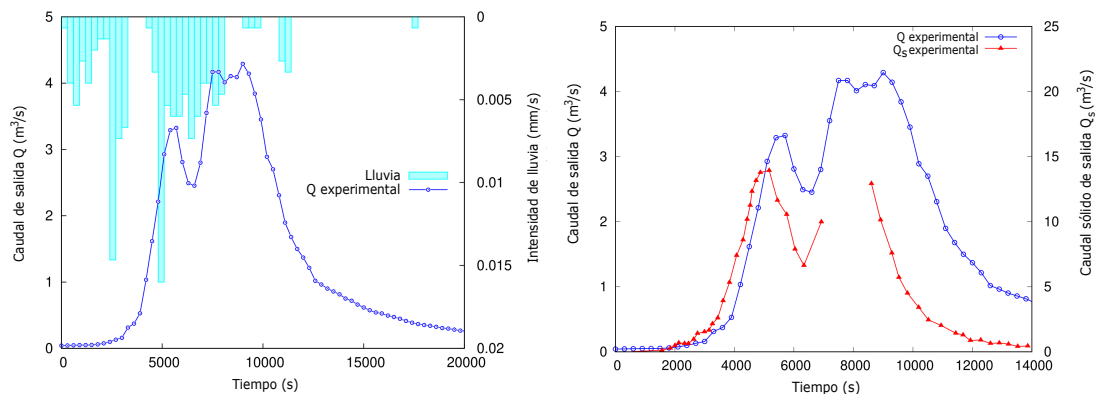


Figura 15: Caso 2: Intensidad de lluvia para el evento considerado y caudal líquido a la salida de la cuenca (izquierda) y caudal sólido de sedimentos (derecha).

### 4.2.1. Influencia de la topografía y su discretización

La cuenca es irregular pero, en particular, posee un pozo natural que hay que tener en cuenta para obtener los resultados que se quieren, pues si se parte de una situación con toda la cuenca seca, a la hora de simular una lluvia, parte del agua desaparecerá en el pozo obteniendo un

hidrograma no deseado. Esto se ha solucionado añadiendo una pequeña y corta lluvia previa a la que se usa en los casos, con el volumen justo para llenar el pozo. En la Figura 16 se muestra un ejemplo de la influencia de este detalle de la topografía en los resultados para un caso de fricción turbulenta de coeficiente de Manning  $0,06sm^{-1/3}$ .

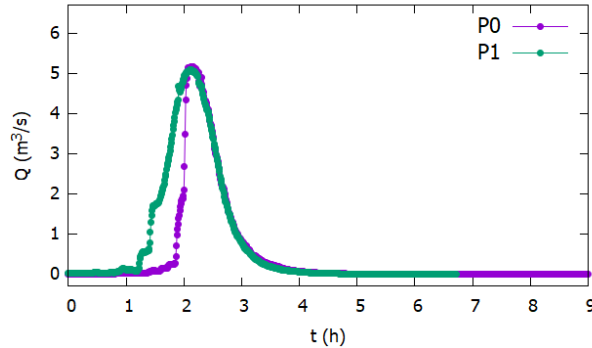


Figura 16: Caso: Hidrogramas obtenidos para el caso del pozo vacío (P0) y el caso del pozo lleno (P1).

Para realizar los hidrogramas mostrados se ha empleado una malla muy precisa (94013 celdas), que ha permitido tener en cuenta micropozos distribuidos por la cuenca, además de poder detectar un mayor volumen de agua, permitiendo que la lluvia inicial para llenar el pozo fuera menor. Para mostrar la diferencia con otras mallas se ha procedido a realizar un cálculo de errores a través del método de la Desviación Cuadrática Media, ecuación 38.

En la tabla se muestran la cantidad de celdas de cada malla y los errores para los casos 3RTGA2 y 3RE3 que se estudiarán en secciones posteriores. Para el evento 3RE3 se muestran los errores tanto del caudal líquido ( $Q_l$ ) como del caudal sólido ( $Q_s$ ). Los errores obtenidos en los tres tipos de malla no son muy importantes para el evento 3RE3 para el caudal líquido, tampoco empeoran demasiado para el caudal sólido. Los errores aumentan significativamente para el evento 3RTGA2 cuando el número de celdas disminuye. Debido a esto y las razones antes mencionadas es por lo que se ha usado una malla de dicha precisión.

Malla	número de celdas	error 3RTGA2	error $Q_l$ 3RE3	error $Q_s$ 3RE3
M1	94013	0,35	0,37	0,66
M2	29278	0,73	0,41	0,70
M3	12411	0,77	0,43	0,73

Tabla 7: Caso 2: Número de celdas y error de las medidas para varios refinamientos de la malla de cálculo para los eventos 3RTGA2 y 3RE3.

#### 4.2.2. Análisis de la sensibilidad al modelo de fricción y sus parámetros

Una vez resuelto el problema del pozo, se han analizado los modelos de fricción. Para ello se ha tenido en cuenta una región de infiltración, con el modelo de Horton, con las características que se muestran en la tabla 8.

$K$ (1/s)	$f_c$ (m/s)	$f_0$ (m/s)
0,0001	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$

Tabla 8: Caso 2: Valores de la infiltración para el estudio de modelos de fricción.

Para estudiar los resultados que proporciona el modelo turbulento se ha variado el coeficiente de Manning entre los valores de la tabla 9, basándose en los datos conocidos de rugosidad del suelo

que aparecen en [4]. Para el modelo viscoso se han variado los valores de densidad y viscosidad como se muestra en la tabla 10.

	$n (sm^{-1/3})$
T1	0,05
T2	0,06
T3	0,07

Tabla 9: Caso 2: Valores del coeficiente de Manning para el modelo de fricción turbulenta.

	Densidad ( $kg/m^3$ )	Viscosidad ( $Pa s$ )
V1	1000	0,001
V2	1000	0,01
V3	1000	0,1
D1	920	0,001
D2	1250	0,001

Tabla 10: Caso 2: Valores de las variables de densidad y viscosidad para el modelo de fricción viscosa.

Los hidrogramas obtenidos con ambos modelos de fricción, turbulenta y viscosa, se muestran en la Figura 17.

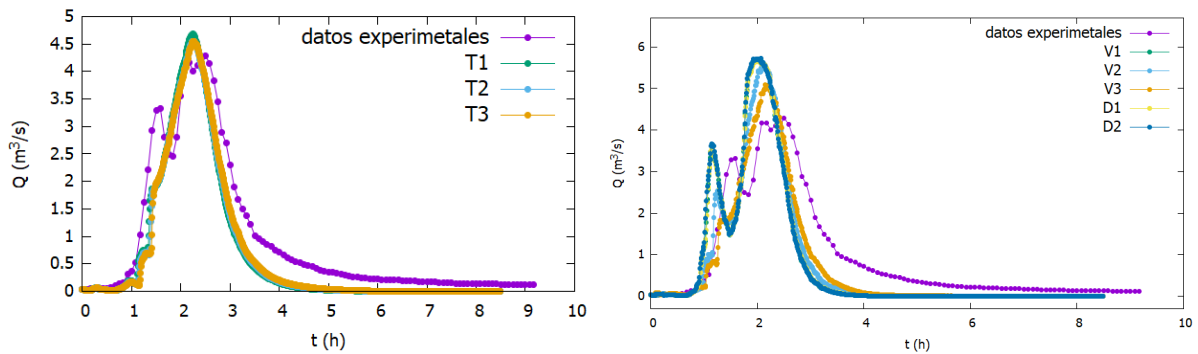


Figura 17: Caso 2: Variaciones de la rugosidad en modelo de fricción turbulenta (izquierda). Variaciones de viscosidad y densidad en modelo de fricción viscosa (derecha).

En los casos del modelo turbulento, el primer pico del hidrograma experimental, no aparece. El modelo no es capaz de representarlo. En el caso del modelo viscoso se consigue representar la forma adecuada, pero desplazada hacia la izquierda. Variar la densidad resulta despreciable en los resultados, pero aumentar la viscosidad genera un leve desplazamiento a la derecha, al mismo tiempo que se pierde el primer pico.

#### 4.2.3. Análisis de la sensibilidad al modelo de infiltración y sus parámetros

Para analizar la sensibilidad de los resultados de los modelos de infiltración se han tenido en cuenta tanto el modelo de fricción turbulenta como el de fricción viscosa usando, respectivamente, un coeficiente de Manning  $n = 0,06sm^{-1/3}$  y una densidad y viscosidad correspondiente al caso V1.

Los valores de los parámetros de infiltración que se han empleado son los recogidos en la tabla 11. Los hidrogramas a la salida de la cuenca con todas estas combinaciones se muestran en las Figuras 18 y 19.

H	$K$ (1/s)	$f_c$ (m/s)	$f_0$ (m/s)
H1	0,0001	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$
H2	0,0001	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$2,9 \cdot 10^{-5}$
H3	0,001	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$5,2 \cdot 10^{-5}$
GA	$K$ (m/s)	$\phi$ (m)	$\Delta\theta$
GA0	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,01	3,5
GA1	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,001	3,5
GA2	$8,0 \cdot 10^{-7}$	0,01	2,5
GA3	$1,8 \cdot 10^{-6}$	0,001	1,5

Tabla 11: Caso 2: Valores de las variables de infiltración para los modelos de Horton y Green-Ampt.

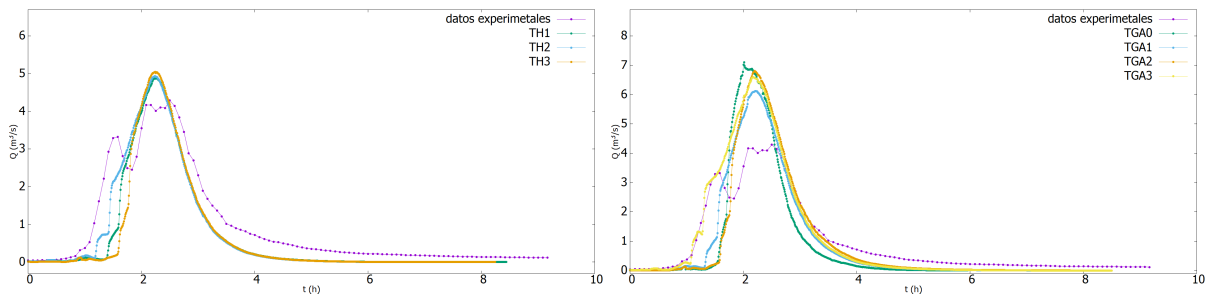


Figura 18: Caso 2: Variaciones de la infiltración Horton (izquierda) y Green-Ampt (derecha) con modelo de fricción turbulenta.

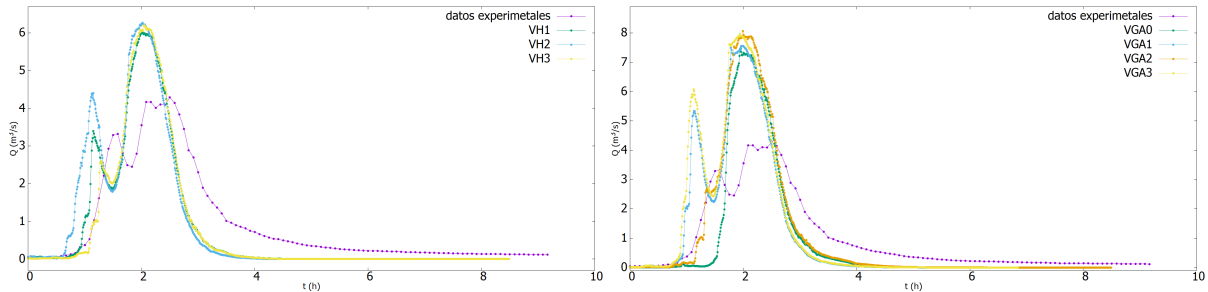


Figura 19: Caso 2: Variaciones de la infiltración Horton (izquierda) y Green-Ampt (derecha) con modelo de fricción viscosa.

Se vuelve a apreciar que los resultados del modelo de fricción turbulenta se asemejan más a los valores experimentales que los del de fricción viscosa en términos de pico máximo. Sin embargo, este último consigue recrear la forma de la curva experimental mas fielmente a pesar de estar desplazada. Los tamaños de los picos se pueden controlar más independientemente en el modelo de Horton, modificando la altura de uno sin provocar grandes cambios en el otro pico.

#### 4.2.4. Análisis de la sensibilidad a los parámetros del modelo de transporte de sedimentos.

Complementando los resultados anteriores con el modelo erosivo de transporte en suspensión se consigue obtener una situación aun más parecida a la real. Se ha escogido el modelo de fricción turbulenta y el modelo de Horton con parámetros de infiltración H2 por tener un error bajo, como se verá en secciones posteriores.

Los valores de los parámetros del modelo erosivo que se han probado se muestran en la tabla 12. Los hidrogramas generados a la salida se muestran en la Figura 20.

	Densidad ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )	Porosidad	diámetro (m)
E1	2000	0,26	$1 \cdot 10^{-2}$
E2	2000	0,28	$5 \cdot 10^{-3}$
E3	2000	0,34	$1 \cdot 10^{-3}$
E4	2500	0,28	$5 \cdot 10^{-3}$

Tabla 12: Caso 2: Valores de la densidad, porosidad y viscosidad.

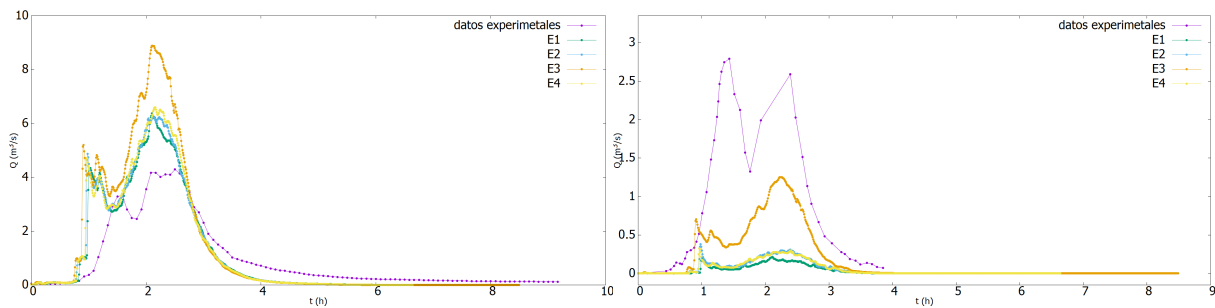


Figura 20: Hidrogramas del caso 2 (cuenca de Arnas) con modelo erosivo para caudal líquido (izquierda) caudal sólido (derecha).

Los hidrogramas obtenidos para el caudal líquido se alejan del experimental a pesar de que el modelo de infiltración proporcionaba buenos resultados. Los valores del diámetro de las partículas en los eventos E1, E2 y E4 son demasiado altos para que se produzca caudal sólido, por lo que no consiguen recrear el sedigráfico experimental.

#### 4.2.5. Análisis de la sensibilidad a valores distribuidos de infiltración.

Como la infiltración del terreno en la realidad no es homogénea, para obtener una situación más acorde con la realidad, y siguiendo [5] se ha dividido la topografía en tres regiones de infiltración. Estas zonas (ver Figura 21) tienen suelos de características diferenciadas.

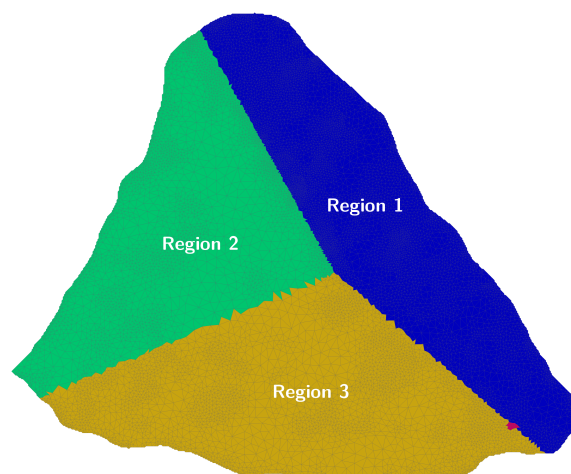


Figura 21: Caso 2: Mapa de las regiones de infiltración

Siguiendo el mismo esquema anterior, primero se han estudiado los modelos de infiltración (Horton y Green-Ampt) tanto en el caso turbulento como en el viscoso. Los valores de las variables de infiltración que se han usado se recogen en la tabla 13.

	$K$ (1/s)	$f_c$ (m/s)	$f_0$ (m/s)	región
H1	$10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	región 1
	$10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-9}$	$0,03 \cdot 10^{-6}$	región 2
	$10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	región 3
H2	$10^{-4}$	$4,6 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	región 1
	$10^{-4}$	$6,0 \cdot 10^{-7}$	$0,7 \cdot 10^{-6}$	región 2
	$10^{-4}$	$2,6 \cdot 10^{-6}$	$5,3 \cdot 10^{-6}$	región 3
	$K$ (m/s)	$\phi$ (m)	$\Delta\theta$	región
GA1	$3,0 \cdot 10^{-7}$	0,01	3,5	región 1
	$1,0 \cdot 10^{-6}$	0,1	3,5	región 2
	$7,0 \cdot 10^{-7}$	0,01	3,5	región 3
GA2	$3,0 \cdot 10^{-7}$	0,1	3,5	región 1
	$10^{-9}$	0,1	3,5	región 2
	$7,0 \cdot 10^{-7}$	0,1	3,5	región 3

Tabla 13: Caso 2: Valores de las variables de infiltración para los modelos de Horton y Green-Ampt para tres regiones de infiltración.

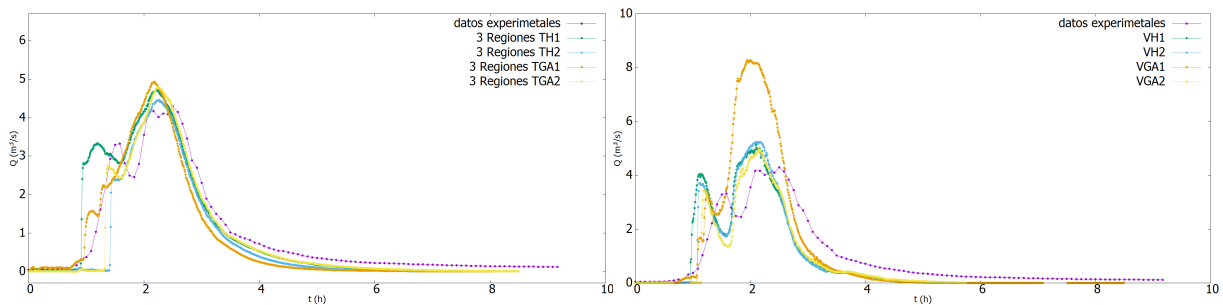


Figura 22: Caso 2: Hidrogramas para el modelo turbulento (izquierda) y viscoso (derecha) para tres regiones de infiltración con los modelos de infiltración de Horton y Green-Ampt.

Como se puede ver en la Figura 22, gracias a la diferenciación en regiones de infiltración, se pueden controlar más los resultados y obtenemos unos hidrogramas más parecidos que los anteriores. Incluso algunos hidrogramas de los modelos turbulentos consiguen recrear ligeramente el primer pico que antes no se conseguía obtener en los de este tipo.

Para realizar las simulaciones del modelo erosivo con tres regiones de infiltración se ha empleado el modelo de Green-Ampt con los valores del caso GA2, que generaba el menor error. Los casos que se han estudiado son los mostrados en la tabla 14. Los resultados obtenidos aparecen en la Figura 23.

	Densidad (kg/m <sup>3</sup> )	Porosidad	diámetro (m)
3RE1	2000	0,26	1 10 <sup>-2</sup>
3RE2	2000	0,28	5 10 <sup>-3</sup>
3RE3	2000	0,52	5 10 <sup>-5</sup>

Tabla 14: Caso 2: Valores de la densidad, porosidad y diámetro de las partículas con infiltración diferenciada por regiones.

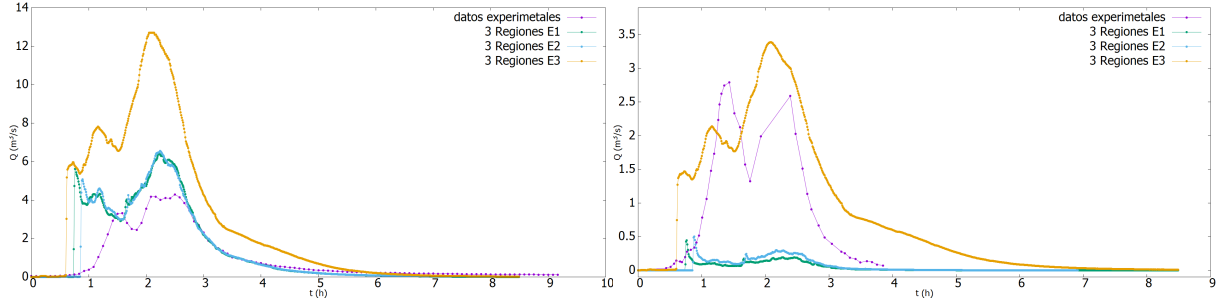


Figura 23: Caudal líquido (izquierda) y caudal sólido (derecha) para el modelo erosivo con tres regiones de infiltración con los valores del caso GA2.

Como se ve en la Figura 23, los modelos no son capaces de replicar adecuadamente el caso experimental a pesar de que al evaluar el modelo de infiltración en la Figura 22 (izquierda) este si se adaptaba a los datos experimentales. La interacción entre la infiltración y la erosión es relevante en estos casos. Debido a ello, se ha decidido emplear unos valores de infiltración concretos para cada caso de la tabla 14. Dichos valores de infiltración aparecen en la tabla 15 y los resultados en la Figura 24.

	$K$ (m/s)	$\phi$ (m)	$\Delta\theta$	región
3RE1	1,0 10 <sup>-6</sup>	0,1	3,5	región 1
	7,0 10 <sup>-9</sup>	0,1	3,5	región 2
	5,0 10 <sup>-6</sup>	0,1	3,5	región 3
3RE2	3,0 10 <sup>-6</sup>	0,1	3,5	región 1
	1,0 10 <sup>-8</sup>	0,1	3,5	región 2
	7,0 10 <sup>-6</sup>	0,1	3,5	región 3
3RE3	1,0 10 <sup>-5</sup>	0,1	3,5	región 1
	7,0 10 <sup>-8</sup>	0,1	3,5	región 2
	5,0 10 <sup>-5</sup>	0,1	3,5	región 3

Tabla 15: Caso 2: Valores de las variables de infiltración para los modelos de erosion para tres regiones de infiltración.

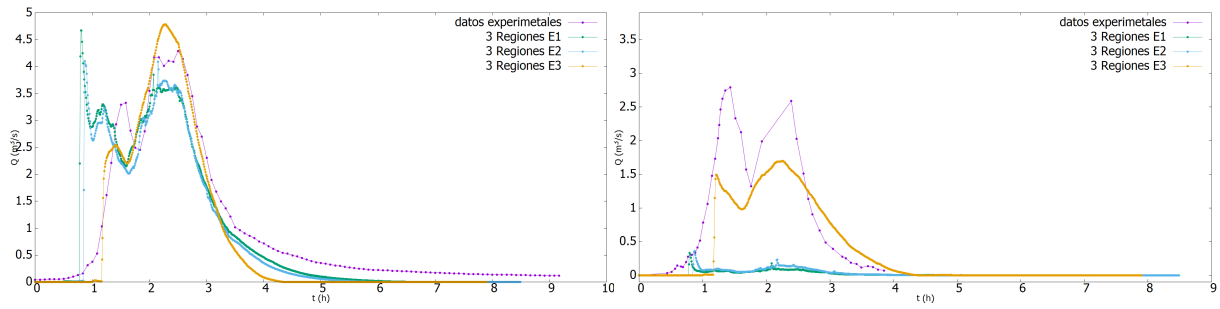


Figura 24: Caso 2: Caudal líquido (izquierda) y caudal sólido (derecha) para el modelo erosivo con tres regiones de infiltración usando los valores de la tabla 15

Los resultados han mejorado bastante empleando una infiltración concreta para cada caso. En las Figuras 23(derecha) y 24(derecha) solo aparece caudal sólido para valores muy pequeños del diámetro de las partículas. Cuando el diámetro es mayor, el caudal sólido que se obtiene resulta escaso o nulo y el modelo no consigue replicar los procesos de erosión/deposición para diámetros de partículas tan grandes.

#### 4.2.6. Estudio de errores

Para cuantificar la sensibilidad de los resultados obtenidos de las simulaciones se ha realizado un análisis de errores por el método de la Desviación Cuadrática Media, ecuación 38. La gráfica que se muestra en 25 comprende los errores de todos los resultados mostrados de este caso.

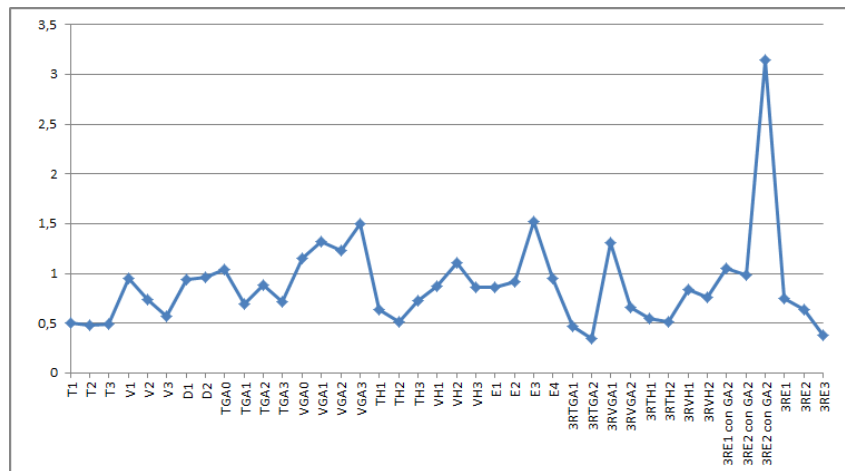


Figura 25: Caso 2: Errores de los resultados mostrados para el caudal líquido.



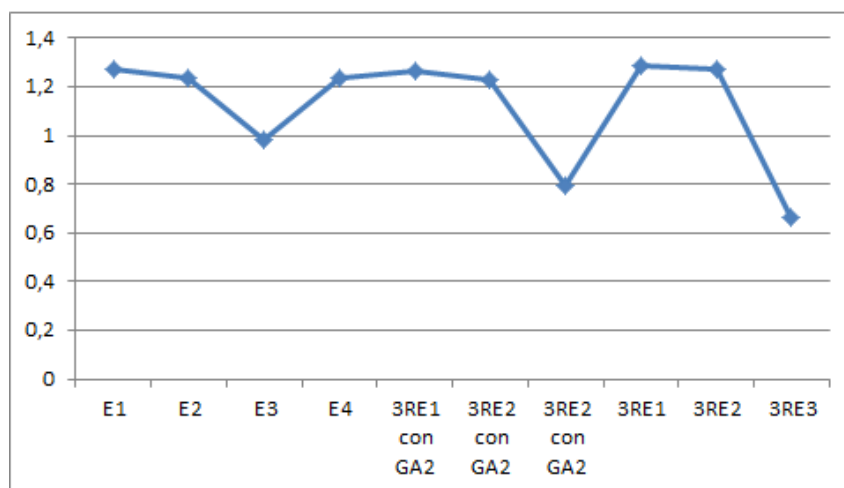


Figura 26: Caso 2: Errores de los resultados mostrados para el caudal sólido.

Como muestra la Figura 25, los resultados obtenidos tienen un nivel de error bajo. Debido a esto, se puede afirmar que estos modelos son capaces de recrear adecuadamente los casos experimentales.

El hecho de que el modelo turbulento se adapte mejor a la curva experimental que el viscoso da lugar a unos errores menores, como ya se ha comentado previamente. Esto muestra cuanto afecta el desplazamiento de los hidrogramas viscosos respecto al experimental, pues, a pesar de que consiguen recrear más fielmente la curva, la disparidad temporal termina teniendo un efecto demasiado importante. La Figura 25 muestra que aumentar la viscosidad disminuye el error, pero nos aleja de los valores reales pues los hidrogramas experimentales se han medido con agua y por tanto para ser fieles al caso real debemos imponer la viscosidad del agua.

Los parámetros que rigen el modelo de Green-Ampt tienen efectos más globales en el hidrograma que los del modelo de Horton por lo que, intentar adaptar una sección de este a la curva experimental termina afectando al hidrograma completo. El modelo de Horton proporcionan un error ligeramente menor, pues el modelo permite controlar directamente las capacidades de infiltración de forma que resulta más sencillo recrear la curva experimental.

El hecho de dividir la superficie en tres zonas de infiltración, aproximando más el problema a la situación real, tiene un efecto muy positivo en el resultado de los hidrogramas, pues en la mayoría de casos el error se ve reducido en tal medida que entre ellos se encuentran algunos de los resultados con menor error que se han conseguido.

El modelo erosivo es muy sensible y conduce a errores considerables, en comparación con el resto. Al modificarse el nivel de lecho por los procesos de erosión/deposición, la interacción entre caudal líquido y caudal sólido es fuerte y los hidrogramas se ven alterados generando valores mayores de los que se esperarían. Este efecto se ve ampliado cuando se consigue generar un caudal sólido considerable, produciendo mayores errores. Generando un hidrograma concreto para cada caso del modelo erosivo, tal como se ha hecho en los casos 3RE1, 3RE2 y 3RE3, se obtienen resultados más cercanos al caso experimental.

## 5. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la aplicación de un modelo hidráulico distribuido y bidimensional basado en las ecuaciones de aguas poco profundas. Gracias a los términos adicionales de lluvia e infiltración se han podido representar más adecuadamente los fenómenos hidrológicos que tienen lugar en cuencas de montaña. También se ha mostrado la aplicación de un modelo adicional de erosión/sedimentación, que complementa el sistema de ecuaciones hidráulicas y que permite calcular la evolución geomorfológica del suelo por efecto del flujo superficial.

Los resultados obtenidos en los casos test basados en la geometría de un plano inclinado han permitido realizar un estudio de sensibilidad de la forma del hidrograma de salida a distintos parámetros de los modelos, tanto de fricción como de infiltración. En cuando a los casos con resultados experimentales, se concluye que los resultados que más se han asemejado a los casos experimentales han sido los que se han simulado con el modelo de fricción turbulenta, con ellos se obtenían los menores errores. La variación de la rugosidad o de la densidad no ha provocado cambios significativos en los resultados. La variación de la viscosidad en las simulaciones del modelo viscoso sí genera alteraciones notables, para el Caso 1 aumentar la viscosidad aleja los resultados de la curva experimental, sin embargo para el Caso 2 los errores disminuyen al aumentar la viscosidad. En el Caso 2 el modelo turbulento es incapaz de recrear con exactitud la curva experimental, el modelo viscoso sí consigue recrearla pero desplazada dando lugar a mayores errores.

La alteración de los parámetros del modelo de Green-Ampt tiene consecuencias globales en el hidrograma que generan mayor dificultad a la hora de replicar el caso experimental. Por otro lado, los parámetros del modelo de Horton ofrecen la posibilidad de modificar más selectivamente el hidrograma, lo que permite generar menores errores en el Caso 2. Distribuir la topografía en zonas de infiltración mejora considerablemente los resultados, aproximando el modelo, además, a un caso más realista.

El modelo erosivo con infiltración es el más cercano al caso real que se ha simulado. La variación de los valores de densidad de partículas no han provocado cambios importantes en los hidrogramas. El caudal sólido en el Caso 2 solo se puede recrear para valores pequeños del diámetro de las partículas, pero estos modifican notablemente el caudal líquido. Existe una fuerte interacción entre la infiltración y la erosión, los procesos erosivos modifican el suelo de manera que es necesario generar un caso de infiltración concreto que depende de los valores de los parámetros de erosión.

Los errores obtenidos son significativamente pequeños para el Caso 2, destacando los eventos realizados con fricción turbulenta, los simulados con la topografía dividida en regiones de infiltración y los generados con el modelo erosivo con infiltración adaptada a las variables de erosión.

No resulta común encontrar estudios donde se apliquen varias leyes de fricción junto con métodos de infiltración y procesos de erosión/sedimentación. Haberlos aplicado en este trabajo ha dado lugar a unos modelos con una precisión más realista que en trabajos previos.

## 6. Referencias

- [1] L. CEA, C. Legout, F. Darboux, M. Esteves, G. Nord, *Experimental validation of a 2D overland flow model using high resolution water depth and velocity data*, Journal of Hydrology 513 (2014) 142–153.
- [2] L. CEA, M. Garrido, J. Puertas, *Experimental validation of two-dimensional depth-averaged models for forecasting rainfall–runoff from precipitation data in urban areas*, Journal of Hydrology 382 (2010) 88–102.
- [3] H. CHANSON, *Hidráulica del flujo en canales abiertos*, Macgraw-Hill (2003) 551.
- [4] J. FERNÁNDEZ-PATO, S. Martínez-Aranda, P. García-Navarro, *A 2D finite volume simulation tool to enable the assessment of combined hydrological and morphodynamical processes in mountain catchments*, Advances in Water Resources (2020) 71.
- [5] J. FERNÁNDEZ-PATO, *Performance assessment of Finite Volume methods in transient simulations of hydraulic processes*, Universidad de Zaragoza (2019) 317.
- [6] J. FERNÁNDEZ PATO, D. Caviedes-Voullième, P. García-Navarro, *Rainfall/runoff simulation with 2D full shallow water equations: Sensitivity analysis and calibration of infiltration parameters*, Journal of Hydrology 536 (2016) 496–513.
- [7] J. FERNÁNDEZ PATO, P. García-Navarro, *2D Zero-Inertia Model for Solution of Overland Flow Problems in Flexible Meshes*, American Society of Civil Engineers (2016) 18.
- [8] D. GALINDO-USÓN, *Validación de una herramienta de simulación de flujo viscoso transitorio en lámina libre*, Universidad de Zaragoza (2018) 47.
- [9] P. GARCÍA-NAVARRO, J. Murillo, J. Fernández-Pato, I. Echeverribar, M. Morales-Hernández, J. Puertas, *The shallow water equations and their application to realistic cases*, Environmental fluid mechanics 19 (2019) 1235–1252.
- [10] D. LOPEZ-GARCÍA DE LA BARRERA, *Desarrollo de un modelo hidrológico/hidrodinámico de simulación de procesos con erosión y sedimentación*, Universidad de Zaragoza (2010) 305.
- [11] S. MARTÍNEZ-ARANDA, J. Murillo, M. Morales-Hernández, P. García-Navarro, *Novel discretization strategies for the 2D non-Newtonian resistance term in geophysical shallow flows*, Engineering Geology 302 (2022) 27.
- [12] C. MÜGLER, O. Planchon, J. Patin, S. Weill, N. Silvera, P. Richard, E. Mouche, *Comparison of roughness models to simulate overland flow and tracer transport experiments under simulated rainfall at plot scale*, Journal of Hydrology 402 (2011) 25–40.
- [13] J. MURILLO P. García-Navarro, *Wave Riemann description of friction terms in unsteady shallow flows: Application to water and mud/debris floods*, Journal of Computational Physics 231 (2012) 39.
- [14] J. POZUELO-MUÑOZ, *Un modelo computacional de simulación de la dispersión de contaminantes en agua*, Universidad de Zaragoza (2016) 68.

## A. Anexo I: Evolución temporal del calado para los casos 1 y 2

La Figura 27 muestra la evolución temporal del calado de agua para los tiempos  $t = 10s$ ,  $t = 20s$ ,  $t = 50s$ ,  $t = 75s$ ,  $t = 100s$  y  $t = 200s$ . Se puede ver que el modelo genera resultados coherentes incluso en situaciones especialmente comprometidas para los modelos numéricos, como pueden ser los calados pequeños o los frentes seco-mojado, muy característicos en este tipo de problemas hidrológicos.

La Figura 28 se muestra a modo de ejemplo para ilustrar la evolución del calado para los tiempos  $t = 100s$ ,  $t = 600s$ ,  $t = 1000s$ ,  $t = 1500s$ ,  $t = 2500s$  y  $t = 3600s$ . Se aprecia que resulta aconsejable refinar la malla de cálculo en zonas como el cauce principal y los barrancos. Además se muestra que el modelo genera resultados adecuados incluso para valores pequeños del calado.

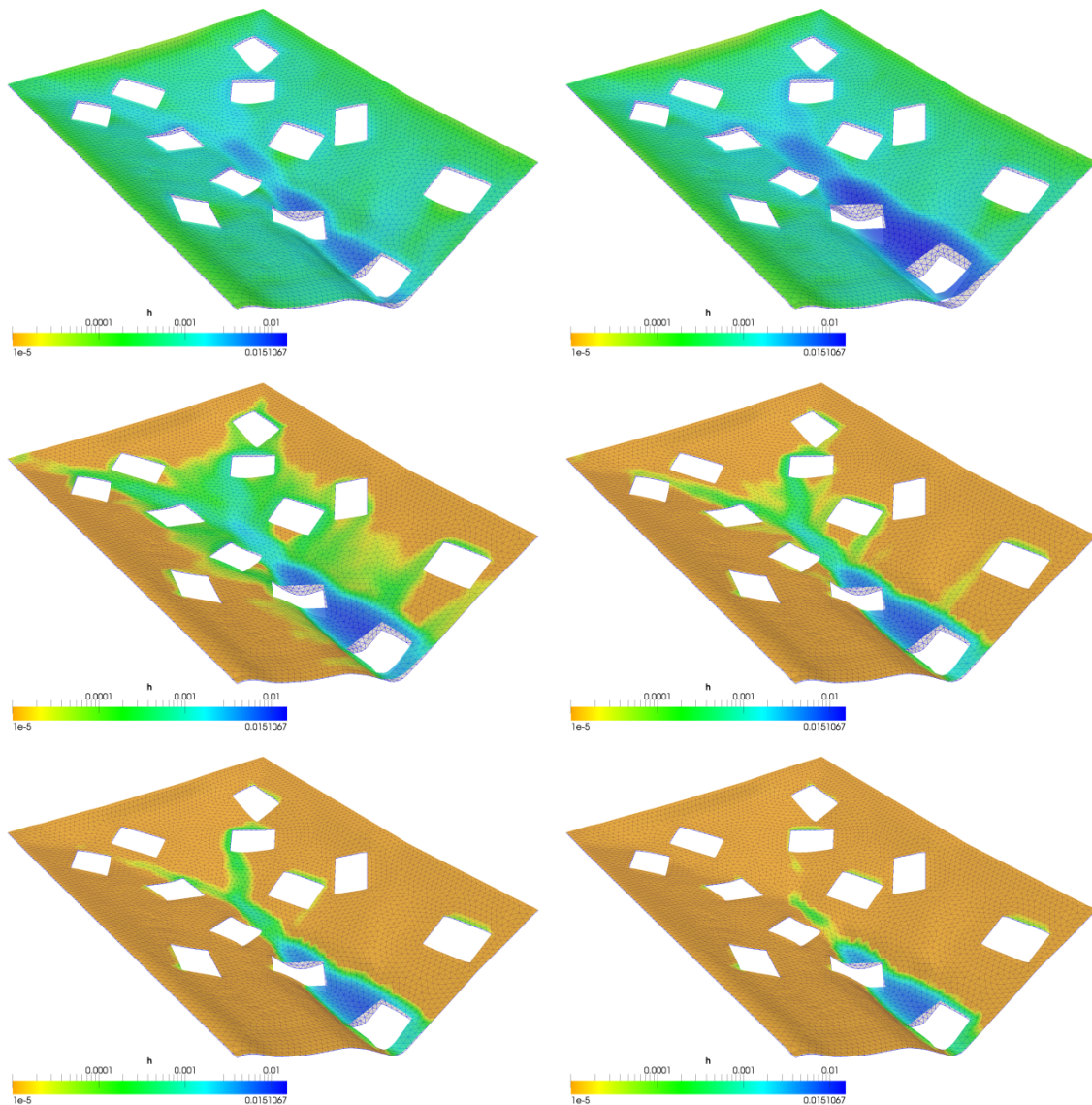


Figura 27: Caso 1: Evolución temporal del calado de agua para los tiempos  $t = 10s$ ,  $t = 20s$ ,  $t = 50s$ ,  $t = 75s$ ,  $t = 100s$  y  $t = 200s$ .

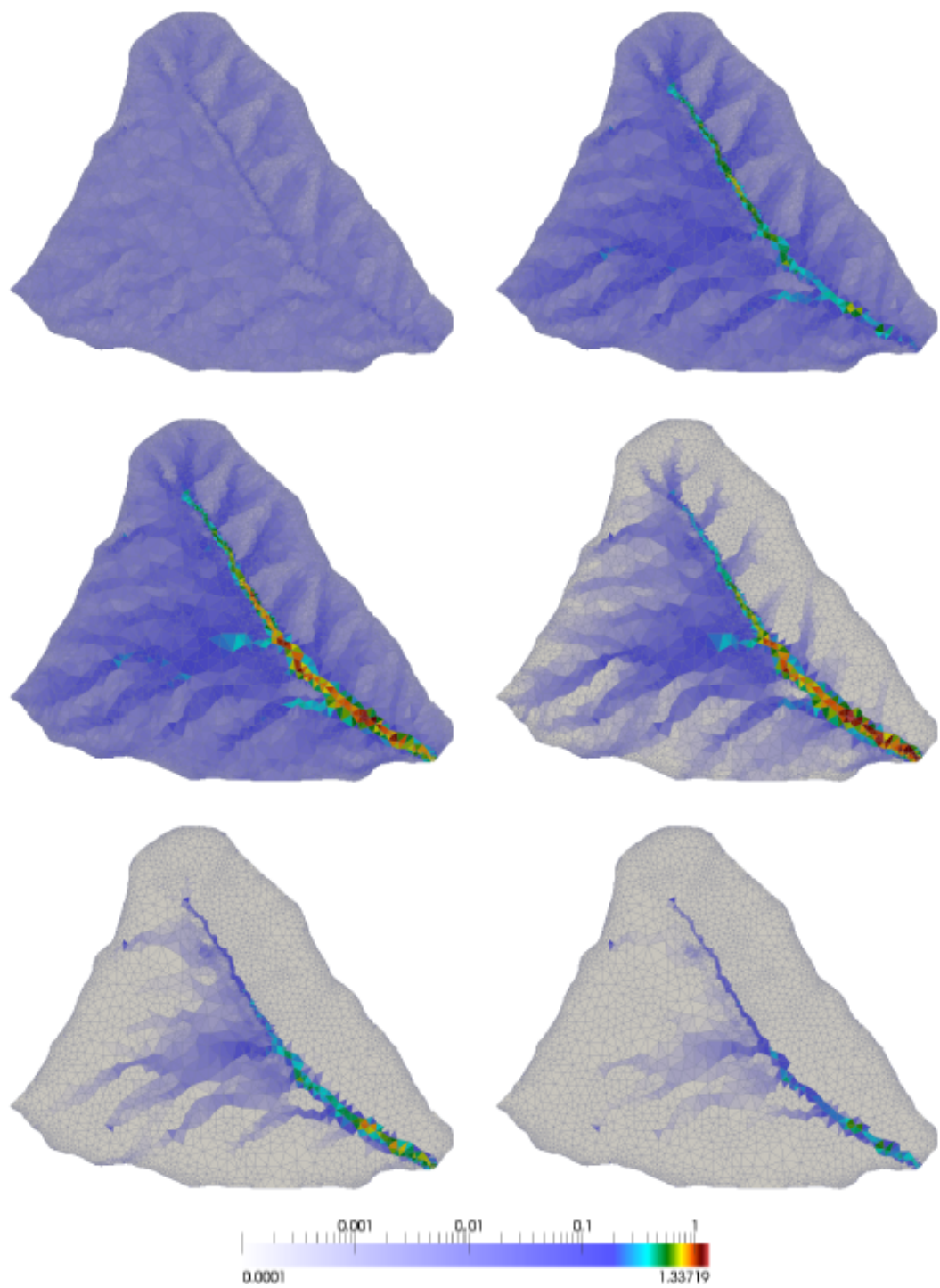


Figura 28: Caso:2 Evolución temporal del calado de agua para los tiempos  $t = 100s$ ,  $t = 600s$ ,  $t = 1000s$ ,  $t = 1500s$ ,  $t = 2500s$  y  $t = 3600s$ .

## B. Anexo II: Sistema de ecuaciones vectoriales del modelo de aguas poco profundas

Partiendo de las ecuaciones vectoriales del modelo de aguas poco profundas (sistema 6), se puede obtener la matriz Jacobiana del flujo en la dirección normal.

$$\vec{J}_n = \frac{\partial \vec{E}n}{\partial \vec{U}} = \vec{A}n_x + \vec{B}n_y \quad (39)$$

donde

$$\vec{E} = (\vec{F}, \vec{G}) \quad (40)$$

$$\vec{A} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ c^2 - u^2 & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix} \quad (41)$$

$$\vec{B} = \frac{\partial \vec{G}}{\partial \vec{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ c^2 - v^2 & 0 & 2v \end{pmatrix} \quad (42)$$

expresados en terminos de las velocidades y de la velocidad de onda superficial

$$c = \sqrt{gh}$$

Reescribiendo la matriz Jacobiana en estos términos

$$\vec{J}_n = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ -u(\vec{u}\vec{n}) + c^2n_x & \vec{u}\vec{n} + un_x & un_y \\ -v(\vec{u}\vec{n}) + c^2n_y & vn_x & \vec{u}\vec{n} + vn_y \end{pmatrix} \quad (43)$$

Los autovalores y los autovectores son los que aparecen en las ecuaciones 44 y 45

$$\lambda^1 = \vec{u}\vec{n} - c, \lambda^2 = \vec{u}\vec{n}, \lambda^3 = \vec{u}\vec{n} + c \quad (44)$$

$$e^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ u - cn_x \\ v - cn_y \end{pmatrix}, e^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -cn_y \\ cn_x \end{pmatrix}, e^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ u + cn_x \\ v + cn_y \end{pmatrix} \quad (45)$$

A partir de 45 se pueden obtener las matrices que diagonalizan el Jacobiano.

$$\vec{P} = (e^1, e^2, e^3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ u - cn_x & -cn_y & u + cn_x \\ v - cn_y & cn_x & v + cn_y \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$\vec{P}^{-1} = -\frac{1}{2c} \begin{pmatrix} -\vec{u}\vec{n} - c & n_x & n_y \\ 2(vn_x - un_y) & 2n_y & -2n_x \\ -\vec{u}\vec{n} - c & -n_x & v - n_y \end{pmatrix} \quad (47)$$

Se puede diagonalizar el Jacobiano usando 46 y 50

$$\vec{J}_n = \vec{P}\vec{\Lambda}\vec{P}^{-1} \quad (48)$$

$$\vec{P}^{-1}\vec{J}_n\vec{P} = \vec{\Lambda} \quad (49)$$

$$\vec{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda^1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^1 \end{pmatrix} \quad (50)$$