Martingalas en tiempo discreto y aplicaciones

Marcos Gracia Arrondo
Trabajo de fin de Grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: José Antonio Adell Pascual
23 de septiembre de 2022

Summary

This project consists of three chapters: conditional expectations, martingales and applications of martingales in financial mathematics. We are going to summarize here the most important ideas. The project is mostly based on the book: *A Probability Path* by *Sidney I. Resnick* [1].

Martingales were first used as betting strategies, in the 18th-century. In 1934, *Paul Lévy* (1886-1971) introduced the concept of martingales in probability theory, which was later improved by *Jean Ville* (1910-1989). In the 1940s and 1950s these results were neglected with the arrival of modernization in classical probability. Finally, in the 1980s and 1990s martingale's theory became a very useful tool to study financial markets.

The first chapter is going to be used as an introduction to conditional expectation. We will define the main tool of this project: the conditional expected value with respect to a σ-algebra, and its most useful properties, which will remind us of the expected value ones: linearity, monototicity, monotone and dominated convergence, product rule, etc. This chapter is instrumental for the next one: martingales.

In the second chapter, we will first start by defining martingales, which are a sequence of random variables $(X_n)_{n\geq 0}$ such that, for a time n, the conditional expected value of the next value in the sequence, X_{n+1}, is the present value X_n. The main goal of this chapter is to study the almost sure convergence of martingales. For that, we will first study stopping times, to later study convergence of martingales and supermartingales and extend it to submartingales by using Krickerberg's decomposition, which consists on writing a submartingale as a sum of a martingale and a supermartingale. Finally, we will define regular martingales (convergent in L_1) and give characterization theorems.

The third chapter is about modeling financial mathematics. We will study the existence of martingale measures in different scenarios and later state and prove the fundamental theorem of asset pricing, which states that the absence of arbitrage is equivalent to the existence of a probability P equivalent to a probability P^* and under which the price process S is a martingale. We will start by introducing the simple market model, where an investor has $d+1$ assets with a certain price and risk each, which change over time. This leads us to the concept of arbitrage trading strategies, that represent riskless stategies which produce positive expected profit. Finally we will study complete markets and option pricing, mainly focusing on european call and put options.

Índice general

Capítulo 1

Esperanza condicional

Este primer capítulo servirá de preludio para las martingalas. Veremos la herramienta fundamental de estas, la esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra. Usaremos el teorema de Radon-Nikodym para dar la definición formal de esperanza condicional y comentaremos algunas de sus propiedades.

1.1. Introduccion a la esperanza condicional

Definición 1.1. Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$, se dice que una medida μ es $\mathcal{A}$-*finita* si existe una partición $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ de conjuntos medibles tal que $\mu(A_n) < \infty,\ n \geq 1$.

Definición 1.2. Sean μ y ν dos medidas $\mathcal{A}$-finitas en $(\Omega, \mathcal{A})$. Se dice que ν es absolutamente continua con respecto a μ si para todo $A \in \mathcal{A}$ tal que $\mu(A) = 0$, se tiene que $\nu(A) = 0$. Se denota $\nu \ll \mu$.

Notación.

1. Por comodidad, en lugar de escribir variable aleatoria, escribiremos v.a. Y en lugar de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas, v.a.i.i.d.

2. Cuando tengamos una propiedad de forma casi segura, escribiremos c.s.

1.2. Definición de esperanza condicional

En esta sección introduciremos el concepto de esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra. A partir de ahora, entenderemos que todas v.a. $X,\ Y, ...$ están definidas en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y son reales e integrables. Mediante $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, ...$ denotamos sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$.

Denotamos asimismo mediante

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}\},\ \mathcal{B} \text{ tribu boreliana en } \mathbb{R},$$

la mínima σ-álgebra respecto a la cual X es una v.a.

Teorema 1.1. Sean $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ y X una v.a. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ una sub-σ-álgebra. Entonces existe una variable aleatoria $E(X \mid \mathcal{B})$ tal que

1. $E(X \mid \mathcal{B})$ es $\mathcal{B}$-medible e integrable.

2. Para todo $G \in \mathcal{B}$ tenemos que

$$\int_G X dP \ = \ \int_G E(X \mid \mathcal{B}) dP.$$

Si existe otra función Z que satisface 1 y 2, entonces $Z = E(X \mid \mathcal{B})$ c.s. A esta función $E(X \mid \mathcal{B})$ la llamaremos *esperanza condicional de X respecto a $\mathcal{B}$*.

Demostración. Sea ν la función de conjunto tal que

$$\nu(G) = \int_G X dP, \quad G \in \mathcal{B}.$$

Sea $X^+ = \max(0, X), X^- = -\min(0, X)$. Tenemos que

$$\nu(G) = \int_G X^+ dP - \int_G X^- dP = \nu^+(G) - \nu^-(G), \quad G \in \mathcal{B}.$$

Como $\nu^+ \ll P$, $\nu^- \ll P$, basta aplicar el teorema de Radon-Nikodym. ■

Entenderemos $E(X \mid \mathcal{B})$ como la media de X condicionada a la información que contiene la sub-σ-álgebra, $\mathcal{B}$.

Ejemplo 1.1. Sea $\mathcal{B}$ una σ-álgebra engendrada por una partición $(A_n)_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{A}$ y X una v.a. integrable. Entonces

$$E(X \mid \mathcal{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} E(X \mid A_n)\mathbb{1}_{A_n}, \quad E(Y \mid A_n) = \begin{cases} \dfrac{E(X\mathbb{1}_{A_n})}{P(A_n)} & \text{si } P(A_n) > 0 \\ 0 & \text{si } P(A_n) = 0 \end{cases}$$

Demostremos la primera igualdad. Sea $A \in \mathcal{B}$, entonces $A = \sum_{i\in J} A_i$ para algún $J \subset \{1, 2, ...\}$. Luego

$$\begin{aligned} \int_A \sum_{n=1}^{\infty} E(X \mid A_n)\mathbb{1}_{A_n} dP &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in J} \int_{A_i} E(X \mid A_n)\mathbb{1}_{A_n} dP = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i\in J} E(X \mid A_n)P(A_i \cap A_n) \\ &= \sum_{i\in J} E(X \mid A_i)P(A_i) = \sum_{i\in J} \frac{\int_{A_i} XdP}{P(A_i)} P(A_i) \\ &= \sum_{i\in J} \int_{A_i} XdP = \int_{\cup_{i\in J} A_i} XdP = \int_A XdP. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.2. Este ejemplo resulta del anterior y es para entender el significado de esperanza condicional respecto a una σ-álgebra desde la intuición.

Suponer que Ω es el espacio muestral de lanzar dos monedas. Denotamos por $A = \{CX, CC\}$ el suceso de que el primer lanzamiento sea cara. Sea $\mathcal{B} = \{\emptyset, A, A^c, \Omega\}$. Entendemos $\mathcal{B}$ como información obtenida tras el primer lanzamiento. Si sale cara estaremos en el suceso A, si sale cruz, en A^c. Suponer que N es el número de caras tras los dos lanzamientos. Si estamos en A, tenemos que $E(N \mid A) = 1.5$, si estamos en A^c, $E(N \mid A^c) = 0.5$.

Nuestro objetivo es encontrar el mejor estimador de N tras una información, en nuestro caso, lo que salga en el primer lanzamiento. Definimos la variable aleatoria

$$E(N \mid \mathcal{B})(\omega) = \begin{cases} 1.5 & \text{si } \omega \in A \\ 0.5 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Definimos esta función porque es un mejor estimador que $E(N) = 1$ ya que $E((N - E(N \mid \mathcal{B}))^2) \leq E((N-1)^2)$. Esta $E(N \mid \mathcal{B})$ es la función que ahora conocemos como esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra.

1.3. Propiedades de la esperanza condicional

En esta sección veremos las propiedades de la esperanza condicional, cabe destacar que muchas de ellas son similares a las de la esperanza.Todos los límites, igualdades, desigualdades, etc. se entenderán de forma casi segura a partir de ahora.

Teorema 1.2.

1. *Linealidad.* Sean X, Y v.a. y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $E((\alpha X + \beta Y) \mid \mathcal{B}) = \alpha E(X \mid \mathcal{B}) + \beta E(Y \mid \mathcal{B})$.
2. *Monotonicidad.* Si $X \geq 0$, entonces $E(X \mid \mathcal{B}) \geq 0$. En particular, si $X \leq Y$, entonces $E(X \mid \mathcal{B}) \leq E(Y \mid \mathcal{B})$.
3. Si X es v.a. y X es $\mathcal{B}$-medible, entonces $E(X \mid \mathcal{B}) = X$.
4. Si $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ $E(X \mid \mathcal{B}) = E(X)$.
5. Si X es v.a., entonces $\big|E(X \mid \mathcal{B})\big| \leq E(\,|X| \mid \mathcal{B})$.

Demostración. Veamos algunas de las demostraciones de las propiedades anteriores.

2. Sea $G := \{\omega : E(X \mid \mathcal{B})(\omega) < 0\} \in \mathcal{B}$. Tenemos que $\mathcal{G}$

$$0 \geq \int_G E(X \mid \mathcal{B}) dP = \int_G X dP \geq 0.$$

Luego $P(E(X \mid \mathcal{B}) < 0) = 0$.

5. Usaremos linealidad

$$\begin{aligned} \big|E(X \mid \mathcal{B})\big| &= \Big|E(X^+ \mid \mathcal{B}) - E(X^- \mid \mathcal{B})\Big| \leq E(X^+ \mid \mathcal{B}) + E(X^- \mid \mathcal{B}) \\ &= E(X^+ + X^- \mid \mathcal{B}) = E(\,|X| \mid \mathcal{B}). \end{aligned}$$

■

Teorema 1.3. Sean $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset \mathcal{B}$ y X v.a. Entonces:

1. *Smoothing*
$$E(E(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1) = E(E(X \mid \mathcal{B}_1) \mid \mathcal{B}_2) = E(X \mid \mathcal{B}_1).$$
2. *Independencia.* Sea X v.a. Si $\sigma(X)$ y $\mathcal{B}$ son independientes, entonces $E(X \mid \mathcal{B}) = E(X)$.

Demostración.

1. Veamos primero que $E(E(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1) = E(X \mid \mathcal{B}_1)$. Sea $G \in \mathcal{B}_1$. Entonces $E(X \mid \mathcal{B}_1)$ es $\mathcal{B}_1$-medible y
$$\int_G E(E(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \mathcal{B}_1) dP = \int_G E(X \mid \mathcal{B}_2) dP = \int_G X dP = \int_G E(X \mid \mathcal{B}_1) dP.$$
Como $E(X \mid \mathcal{B}_1)$ es $\mathcal{B}_1$-medible, también es $\mathcal{B}_2$-medible. La otra igualdad es clara usando 1.2-3.
2. $E(X)$ es $\mathcal{B}$-medible. Sea $G \in \mathcal{B}$. Tenemos que
$$\int_G E(X) dP = E(X)P(G)$$
y
$$\int_G X dP = E(X\mathbb{1}_G) = E(X)P(G)$$
por independencia.

■

Nota. Un caso particular y que es muy utilizado se da si $\mathcal{B}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$. Así,

$$E(E(X \mid \mathcal{B}_2)) = E(E(X \mid \mathcal{B}_2) \mid \{\emptyset, \Omega\}) = E(X).$$

Definición 1.3. Diremos que una v.a. X converge en L_p, y lo denotaremos como $X \in L_p$, si $E(\,|X|^p) < \infty$.

Diremos además que una sucesión de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en L_p a una v.a. X, y se denotará como $X_n \xrightarrow{L_p} X$, si $\lim\limits_{n\to\infty} E(\,|X_n - X|^p) = 0$.

Definición 1.4. Sea X una v.a. y $p \in \mathbb{N}$. Definimos $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$.

Teorema 1.4.

1. *Desigualdad de Jensen.* Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexa, $g(X)$ integrable. Entonces

$$g(E(X \mid \mathcal{B})) \leq E(g(X) \mid \mathcal{B}).$$

2. Sea X p-integrable y suponer $p \geq 1$. Entonces

$$\left\|E(X \mid \mathcal{B})\right\|_p \leq \|X\|_p\,, \tag{1.1}$$

y la esperanza condicional es L_p-continua: Si $X_n \xrightarrow{L_p} X_\infty$, entonces

$$E(X_n \mid \mathcal{B}) \xrightarrow{L_p} E(X_\infty \mid \mathcal{B}). \tag{1.2}$$

Demostración.

1. Podemos escribir g como $g(x) = \sup\limits_n\,(a_n x + b_n)$, $x \in \mathbb{R}$ para un par de sucesiones $(a_n), (b_n) \in \mathbb{R}$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos que

$$\sup_n\,(a_n X + b_n) \geq a_k X + b_k,$$

luego por monotonicidad

$$E(\sup_n\,(a_n X + b_n)) \geq E(a_k X + b_k),$$

es decir, $E(\sup\limits_n\,(a_n X + b_n))$ es una cota superior de $\{E(a_k X + b_k) : k \in \mathbb{N}\}$, de lo que se sigue que $E\,(\sup\limits_n\,(a_n X + b_n) \mid \mathcal{B}) \geq \sup\limits_n\, E(a_n X + b_n \mid \mathcal{B})$. Entonces aplicando linealidad

$$E(g(X) \mid \mathcal{B}) = E\,(\sup_n\,(a_n X + b_n) \mid \mathcal{B}) \geq \sup_n E(a_n X + b_n \mid \mathcal{B}) = \sup_n\,(a_n E(X \mid \mathcal{B}) + b_n) = g(E(X \mid \mathcal{B}))$$

2. Notar que (1.1) se da si y solo si

$$E(\,\left|E(X \mid \mathcal{A})\right|^p) \leq E(\,|X|^p).$$

y por tanto, el resultado se sigue de la desigualdad de Jensen, escogiendo $g(x) = |x|^p$. Para ver que la esperanza es L_p-contínua (1.2), aplicando linealidad y (1.1)

$$\left\|E(X_n \mid \mathcal{A}) - E(X_\infty \mid \mathcal{A})\right\|_p = \left\|E((X_n - X_\infty) \mid \mathcal{A})\right\|_p \leq \|X_n - X_\infty\|_p \to 0.$$

■

Teorema 1.5. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ una sucesión de v.a. integrables y $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces

1. *Teorema de convergencia monótona condicional.* Si X v.a., $0 \leq X_n \uparrow X$, entonces
$$E(X_n \mid \mathcal{B}) \uparrow E(X \mid \mathcal{B})$$

2. *Lema de Fatou condicional.* Si $X_n \geq Y,\ n \geq 1$ con Y integrable, entonces
$$E(\underline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{B}) \leq \underline{\lim}_n E(X_n \mid \mathcal{B}).$$
Si $X_n \leq Y,\ n \geq 1$ con Y integrable, entonces
$$E\ (\overline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{B}) \geq \overline{\lim}_n E(X_n \mid \mathcal{B}).$$

3. *Teorema de la convergencia dominada condicional.* Si $|X_n| \leq Y,\ n \geq 1$ con Y integrable, entonces $X_n \to X$ implica $E(X_n \mid \mathcal{B}) \to E(X \mid \mathcal{B})$.

Demostración.

1. Por monoticidad, $\{E(X_n \mid \mathcal{B})\}$ es monótona creciente y si $Z \coloneqq \lim_{n\to+\infty} \uparrow E(X_n \mid \mathcal{B})$.
Entonces Z es $\mathcal{B}$-medible y para todo $G \in \mathcal{B}$, aplicando el teorema clásico de convergencia monótona
$$\int_G Z dP = \int_G \lim_{n\to+\infty} \uparrow E(X_n \mid \mathcal{B}) = \lim_{n\to+\infty} \int_G E(X_n \mid \mathcal{B}) = \lim_{n\to+\infty} \int_G X_n dP.$$

2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos $Z_n \coloneqq \inf_{k\geq n} X_k$, que es integrable y $Z_n \uparrow \underline{\lim}_n X_n$. Aplicando 1.2-2, tenemos
$$E(\underline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{B}) = \lim_n \uparrow\ E(Z_n \mid \mathcal{B}) \leq \underline{\lim}_n E(X_n \mid \mathcal{B})$$

3. Usamos 1 y tenemos:
$$E(X \mid \mathcal{B}) = E(\underline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{B}) \leq \underline{\lim}_n E(X_n \mid \mathcal{B})$$
$$E(X \mid \mathcal{B}) = E\ (\overline{\lim}_n X_n \mid \mathcal{B}) \geq \overline{\lim}_n E(X_n \mid \mathcal{B}).$$

■

Teorema 1.6 (Regla del producto)**.** Sean X, Y variables aleatorias tal que XY es integrable. Si X es $\mathcal{B}$-medible, entonces
$$E(XY \mid \mathcal{B}) = XE(Y \mid \mathcal{B}).$$

Demostración. Suponer $X = \mathbb{1}_J,\ J \in \mathcal{B}$. Entonces para todo $G \in \mathcal{B}$,
$$\int_G E(\mathbb{1}_J Y \mid \mathcal{B}) dP = \int_G \mathbb{1}_J Y dP = \int_{G\cap J} Y dP = \int_{G\cap J} E(Y \mid \mathcal{B}) dP = \int_G \mathbb{1}_J E(Y \mid \mathcal{B}) dP.$$

Luego $E(\mathbb{1}_J Y \mid \mathcal{B}) = \mathbb{1}_J E(Y \mid \mathcal{B})$. Como lo anterior se cumple para $X = \mathbb{1}_J$, también se cumple, por linealidad, para
$$X = \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{G_i},\ c_i \geq 0,\ G_i \in \mathcal{B}.$$

Suponer que $X,\ Y$ son no negativas. Existe una sucesión de v.a. no negativas $(X_n)_{n\geq 0}$ tal que $X_n \uparrow X$. Aplicamos que X es $\mathcal{B}$-medible y el teorema de la convergencia monótona y tenemos que
$$E(XY \mid \mathcal{B}) = E(Y \lim_n \uparrow X_n \mid \mathcal{B}) = \lim_n \uparrow E(X_n Y \mid \mathcal{B}) = XE(Y \mid \mathcal{B}).$$

Si $X,\ Y$ no son no-negativas, podemos escribir $X = X^+ - X^-,\ Y = Y^+ - Y^-$. ■

Capítulo 2

Martingalas

Definición 2.1. A una sucesión $(\mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ de sub-σ-álgebras la llamamos *filtración* cuando

$$\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2 \subset ... \subset \mathcal{B}.$$

Podemos entender una filtración en el sentido de que la información se acumula con el tiempo.

Definición 2.2. Supongamos que tenemos $\{X_n, n \geq 0\}$ variables aleatorias reales y $\{\mathcal{B}_n, n \geq 0\}$ una filtración. Entonces diremos que $\{(X_n, \mathcal{B}_n),\ n \geq 0\}$ es una *martingala* y la denotaremos como $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ si

1. X_n es $\mathcal{B}_n$-medible para todo $n \geq 0$.
2. $E|X_n| < \infty,\ n \geq 0$.
3. Para todo $n \geq 0$.

   $$E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = X_n.$$

   Se llamará *submartingala* o *supermartingala* si cambiamos el signo igual por $\geq$ ó $\leq$, respectivamente.

Nota.

1. La propiedad 3 es equivalente a $E(X_{n+k} \mid \mathcal{B}_n) = X_n,\ k \geq 1$.
2. Si $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es martingala, también lo es $(X_n, \mathcal{B}_n^0)_{n\geq 0}$, donde $\mathcal{B}_n^0 = \sigma(X_0, ..., X_n),\ n \geq 0$.
3. Definimos $A_0 = X_0$ y $A_n = X_n - X_{n-1},\ n \geq 1$. Notar que 3 se escribe como $E(A_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = 0,\ n \geq 0$. Notar $\sigma(A_0, ..., A_n) = \sigma(X_0, ..., X_n)$.

Ejemplo 2.1.

1. *Juego de apuestas.* Estamos ante el juego de la ruleta del casino. En nuestro caso jugaremos a apostar rojo/negro. En la primera tirada apostaremos 1 unidad, si fallamos duplicamos la apuesta; si acertamos volvemos a apostar 1 unidad. Así sucesivamente por un número limitado de tiradas. Recordemos que la ruleta consta de 37 números: 18 rojos, 18 negros y el 0, verde.

   Sea $(Z_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de v.a. independientes con distribución $P(Z_i = 1) = 18/37,\ P(Z_i = -1) = 19/37$, notar que $E(Z_i) \leq 0$. Sea la v.a.

   $$a_n = a_n(Z_1, ..., Z_n) = 2^n \mathbb{1}_{\{Z_1 = ... = Z_n = -1\}},$$

   que se corresponde con la apuesta que haremos en la tirada $n+1$. Definimos la sucesión de v.a. $(S_n)_{n\geq 0}$ que se corresponde con las ganancias:

   $$S_n = \begin{cases} S_{n-1} + a_{n-1}Z_n & \text{si } n \geq 1 \\ 0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Para la tirada $n+1$ tenemos la información de las n tiradas anteriores. Tomamos $\mathcal{B}_n = \sigma(Z_1, ..., Z_n)$. Usando linealidad tenemos que

$$E(S_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = E(S_n + a_n Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = S_n + a_n E(Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) \leq S_n.$$

Así, $(S_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es una supermartingala,

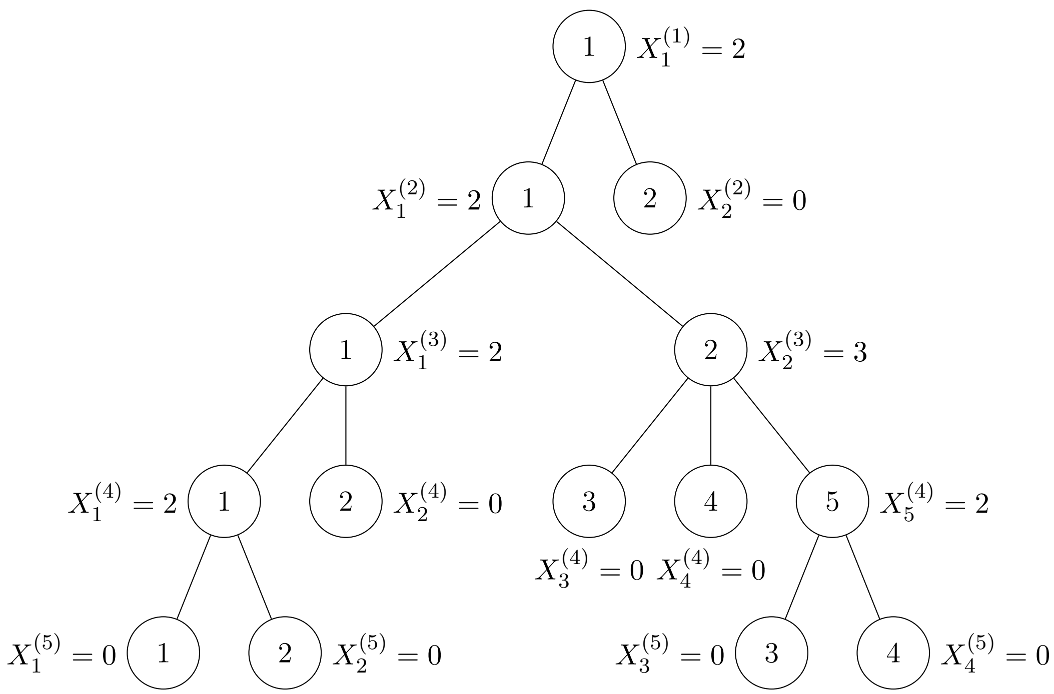
$$E(S_n) \leq E(S_{n-1}) \leq ... \leq E(S_0).$$

En definitiva, estamos jugando a un juego perdedor.

2. *Proceso de ramificación de Galton-Watson.* Sea $(X_i^{(n)})_{i,n\geq 1}$ una sucesión de v.a.i.i.d. que toman valores en $\mathbb{N}$ donde

$$P(X = k) = p_k, \quad k = 0, 1, 2, ...$$

y media μ. Vemos $X_i^{(n)}$ como el número de descendientes que tiene el individuo i en la generación $n-1$. Por ejemplo:



Definimos ahora la sucesión $(Z_n)_{n\geq 0}$ dada por

a) $Z_0 = 1$,

b) $Z_{n+1} = X_1^{(n+1)} + ... + X_{Z_n}^{(n+1)}$.

Sea $\mathcal{B}_n^0 = \sigma(Z_0, ..., Z_n)$, $n \geq 0$. Entonces usando linealidad y que para todo $i \geq 1$, $E(X_i^{(n+1)} \mid Z_n) = \mu$, tenemos que

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n^0) &= E(Z_{n+1} \mid \sigma(Z_0, ..., Z_n)) \\ &= E(Z_{n+1} \mid Z_0, ..., Z_n) = E(Z_{n+1} \mid Z_n) \\ &= E(X_1^{(n+1)} + ... + X_{Z_n}^{(n+1)} \mid Z_n) = \sum_{i=1}^{Z_n} E(X_i^{(n+1)} \mid Z_n) = \mu Z_n. \end{aligned}$$

Y se sigue de lo anterior que $(\frac{Z_n}{\mu^n},\ \mathcal{B}_n^0)_{n\geq 0}$ es una martingala y su esperanza es 1.

3. Sea $(X_n)_{n\geq 0}$ una sucesión de v.a.i.i.d., entonces $(S_n, \mathcal{B}_n^0)_{n\geq 0}$ con $S_n = X_0 + ... + X_n$ es una martingala si $E(X_n) = 0,\ n \geq 0$. Se tiene una submartingala o una supermartingala si $E(X_n) \geq 0,\ n \geq 0$ ó $E(X_n) \leq 0,\ n \geq 0$, respectivamente.

   Por linealidad:

   $$E(S_{n+1} \mid \mathcal{B}_n^0) = E(X_0 + ... + X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n^0) = X_0 + ... + X_n + E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n^0) = X_0 + ... + X_n = S_n.$$

   En el caso de submartingala o supermartingala basta con cambiar la penúltima igualdad por $\geq$ o $\leq$, respectivamente.

2.1. Tiempos de parada

Definición 2.3. Una aplicación $T : \Omega \to \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \infty$ se llama *tiempo de parada* si

$$\{T = n\} \in \mathcal{B}_n,\ n = 1, 2, ...$$

Podemos entender la función T como la regla que nos indica cuando parar y $\mathcal{B}_n$ es la información acumulada para el tiempo n. Definimos

$$\mathcal{B}_\infty = \sigma(\mathcal{B}_n, n \in \mathbb{N}),$$

luego $\mathcal{B}_\infty$ es la menor σ-álgebra conteniendo todos $\mathcal{B}_n$, n $\in \mathbb{N}$.

Daremos un ejemplo para entender de forma intuitiva este concepto:

Ejemplo 2.2. De nuevo podemos poner como ejemplo las ganancias en un juego al que dejaremos de jugar cuando en una de las tiradas consigamos más de a unidades. Sea $(X_n)_{n\geq 1}$ la sucesión de v.a.i.i.d. de las ganancias. Sea

$$T = \begin{cases} \inf\{n \geq 1 \mid X_n > a\} & \text{en } \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n > a\} \\ \infty & \text{en } \bigcap_{n=1}^{\infty} \{X_n \leq a\} \end{cases}$$

Tomando la filtración $\mathcal{B}_n = \sigma(X_1, ..., X_n)$ tenemos que T es un tiempo de parada ya que

$$\{T = n\} = \{X_1 \leq a, ..., X_{n-1} \leq a, X_n > a\} \in \mathcal{B}_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

Definición 2.4. Si T es un tiempo de parada, definimos la *σ-álgebra de eventos anteriores a T* como

$$\mathcal{B}_T = \{B \in \mathcal{B}_\infty :\ \text{para todo } n \in \mathbb{N}, \{T = n\} \cap B \in \mathcal{B}_n\}.$$

Nota. $\mathcal{B}_T$ son los eventos que tienen la propiedad de que al añadir información cuando ocurre T, coloca la intersección en la σ-álgebra adecuada.

Nota. Sean T y S tiempos de parada

1. Si $T \equiv S$, entonces $\mathcal{B}_T = \mathcal{B}_S$.

2. Si $A \in \mathcal{B}_T$, entonces $A \cap \{T = \infty\} \in \mathcal{B}_\infty$.

3. Si $S \leq T$, entonces $\mathcal{B}_S \subseteq \mathcal{B}_T$.

Definición 2.5. Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ un proceso estocástico y T un tiempo de parada. Definimos la v.a. *parada en T* como

$$X_T = \sum_{n\in\mathbb{N}} X_n \mathbb{1}_{\{T=n\}}.$$

2.2. Supermartingalas positivas

En esta sección trabajaremos con supermartingalas $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ tal que $X_n \geq 0, X_n \in \mathcal{B}_n$ y $E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) \leq X_n$.

Proposición 2.1. Sean $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ y $(Y_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ dos supermartingalas positivas y T un tiempo de parada tal que en $\{T < \infty\}$, tenemos $X_T \geq Y_T$, Definimos

$$Z_n = \begin{cases} X_n, & \text{si } n < T \\ Y_n, & \text{si } n \geq T \end{cases}.$$

Entonces $(Z_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es una supermartingala positiva.

Demostración. Lo primero notar que $Z_n \in \mathcal{B}_n$. Si $n < T$ entonces

$$\begin{aligned} E(Z_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) &= E(X_{n+1}\mathbb{1}_{\{n+1<T\}} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{n+1\geq T\}} \mid \mathcal{B}_n) \\ &\leq E(X_{n+1}\mathbb{1}_{\{n+1<T\}} + X_{n+1}\mathbb{1}_{\{n+1=T\}} + Y_{n+1}\mathbb{1}_{\{n\geq T\}} \mid \mathcal{B}_n) \\ &\leq X_n\mathbb{1}_{\{n<T\}} + Y_n\mathbb{1}_{\{n\geq T\}} = Z_n. \end{aligned}$$

■

Definición 2.6. Dado $\{X_n\}$. Sean $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$ definimos

$$\begin{aligned} T_0 &= 0 \\ T_1 &= \operatorname{ínf}\{n \geq 0 : X_n \leq a\} \\ T_2 &= \operatorname{ínf}\{n \geq T_1 : X_n \geq b\} \\ T_3 &= \operatorname{ínf}\{n \geq T_2 : X_n \leq a\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Definimos el *número de pasos crecientes a través de la franja* $[a, b]$ como

$$\mathcal{N}_{a,b}(\omega) = \sup\{p : T_{2p}(\omega) < \infty\}.$$

Luego,

$$\{\omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \text{ existe}\} = \bigcap_{a<b}\{\mathcal{N}_{a,b}(\omega) < \infty\}$$

Es decir, $\lim_{n\to\infty} X_n$ existe si $\mathcal{N}_{a,b} < \infty$. Nos interesa saber cuándo $\mathcal{N}_{a,b} < \infty$, así que veamos la desigualdad de Dubins.

Proposición 2.2 (Desigualdad de Dubins)**.** Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una supermartingala positiva. Suponer $0 < a < b$. Entonces

1. $P(\mathcal{N}_{a,b} \geq k \mid \mathcal{B}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \operatorname{mín}\left(\frac{X_0}{a}, 1\right),\ k = 1, 2, ...$
2. $\mathcal{N}_{a,b} < \infty$.

Demostración. Definimos las supermartingalas $Y_n^{(1)} \equiv 1,\ Y_n^{(2)} = \dfrac{X_n}{a}$.

Notar que en $\{T_1 < \infty\}$,

$$Y_{T_1}^{(1)} \equiv 1 \geq Y_{T_1}^{(2)}.$$

Luego

$$Z_n^{(1)} = \begin{cases} 1, & \text{si } n < T_1 \\ \dfrac{X_n}{a}, & \text{si } n \geq T_1 \end{cases}$$

es una supermartingala.

Definimos

$$Z_n^{(2)} = \begin{cases} Z_n^{(1)}, & \text{si } n < T_2 \\ \dfrac{b}{a}, & \text{si } n \geq T_2 \end{cases}$$

que es supermartingala ya que $Z_n^{(1)}$ y $\dfrac{b}{a}$ lo son, y en T_2

$$Z_n^{(1)} = \frac{X_{T_2}}{a} \geq \frac{b}{a}.$$

De igual manera,

$$Z_n^{(3)} = \begin{cases} Z_n^{(2)}, & \text{si } n < T_3 \\ \left(\frac{b}{a}\right) \frac{X_n}{a}, & \text{si } n \geq T_3 \end{cases}$$

es una supermartingala. Continuando así sucesivamente vemos que

$$Z_n = \begin{cases} 1, & n < T_1 \\ X_n/a, & T_1 \leq n < T_2 \\ b/a, & T_2 \leq n < T_3 \\ \frac{b}{a}\frac{X_n}{a}, & T_3 \leq n < T_4 \\ \vdots & \vdots \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k-1} \frac{X_n}{a}, & T_{2k-1} \leq n < T_{2k} \\ \left(\frac{b}{a}\right)^{k}, & T_{2k} \leq n \end{cases}$$

también es una supermartingala.

Notar que

$$Z_0 = \begin{cases} 1, & T_1 > 0 \\ \dfrac{X_0}{a}, & T_1 = 0 \end{cases} = \text{mín}\{1, \frac{X_0}{a}\} \tag{2.1}$$

y por definición de supermartingalas

$$Y_0 \geq E(Y_n \mid \mathcal{B}_0). \tag{2.2}$$

Además

$$Y_n \geq \left(\frac{b}{a}\right)^k \mathbb{1}_{[n \geq T_{2k}]}. \tag{2.3}$$

Por (2.1), (2.2) y (2.3)

$$\text{mín}\{1, \frac{X_0}{a}\} \geq E(\left(\frac{b}{a}\right)^k \mathbb{1}_{[n \geq T_{2k}]}) = \left(\frac{b}{a}\right)^k P(n \geq T_{2k} \mid \mathcal{B}_0).$$

Es decir,

$$P(T_{2k} \leq n \mid \mathcal{B}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \text{mín}\{1, \frac{X_0}{a}\}.$$

Cuando $n \to \infty$,

$$P(\mathcal{N}_{a,b} \geq k \mid \mathcal{B}_0) = P(T_{2k} \leq \infty \mid \mathcal{B}_0) \leq \left(\frac{a}{b}\right)^k \text{mín}\{1, \frac{X_0}{a}\}.$$

De aquí concluimos que

$$P(\mathcal{N}_{a,b} = \infty \mid \mathcal{B}_0) \leq \lim_{k\to\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k \text{mín}\{1, \frac{X_0}{a}\} = 0,$$

luego $\mathcal{N}_{a,b} < \infty$ c.s. ■

Teorema 2.1 (Teorema de convergencia)**.** Si $\{(X_n, \mathcal{B}_n), n \in \mathbb{N}\}$ es una supermartingala positiva, entonces

$$\lim_{n\to\infty} X_n =: X_\infty \text{ existe casi seguro}$$

y

$$E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n) \leq X_n,\ n \in \mathbb{N}$$

luego $\{(X_n, \mathcal{B}_n), n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ es una supermartingala positiva.

Demostración. La convergencia se sigue de la proposición anterior. Y aplicando el lema de Fatou condicional tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ fijo:

$$E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n) = E(\varliminf_m X_{n+m} \mid \mathcal{B}_n) \leq \varliminf_m E(X_{n+m} \mid \mathcal{B}_n) \leq X_n.$$

■

Teorema 2.2. Sea $p \geq 1$ y $X \in L_p$ no negativa. Entonces $(E(X \mid \mathcal{B}_n))_{n\geq 1}$ es una martingala positiva que converge c.s. y en L_p a la v.a. $E(X \mid \mathcal{B}_\infty) =: X_\infty$. Recíprocamente, si $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 1}$ es una martingala positiva en L_p que converge en L_p a X_∞, entonces $X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n),\ n \geq 1$.

Demostración. El Teorema 2.1 asegura la existencia de un límite casi seguro de $E(X \mid \mathcal{B}_n)$, denotado X_∞, que es una v.a. $\mathcal{B}_\infty$-medible. Distingamos dos casos:

- Si $X \leq a$ c.s., $a < \infty$. Entonces $E(X \mid \mathcal{B}_n) \leq a$ y se tiene de acuerdo con el teorema de la convergencia dominada condicional que si $A \in \mathcal{B}_m$ y $n \geq m$,

$$\int_A E(X \mid \mathcal{B}_n) = \int_A X dP \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_A X_\infty dP.$$

Por tanto:

$$\int_A X dP = \int_A X_\infty dP, \text{ para todo } A \in \bigcup_m \mathcal{B}_m.$$

Sea $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}_\infty : \int_A X dP = \int_A X_\infty dP\}$. Entonces $\mathcal{A}$ es una λ-clase que contiene a la π-clase $\bigcup_m \mathcal{B}_m$, por lo que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\infty$, según el teorema π-λ de Dynkin (*Anexo*). Se sigue que: $E(X \mid \mathcal{B}_\infty) = X_\infty$.

Además, la convergencia en L_p de $E(X \mid \mathcal{B}_n)$ a $E(X \mid \mathcal{B}_\infty)$ se sigue por convergencia dominada.

- Sea $X \geq 0$ cualquiera. Veamos que $E(X \mid \mathcal{B}_n)$ converge a $E(X \mid \mathcal{B}_\infty)$ en L_p. Por la desigualdad de Jensen:

$$\left\|E(Z \mid \mathcal{B})\right\|_p = (E(\left|E(Z \mid \mathcal{B})\right|^p))^{1/p} \leq (E(E(|X|^p \mid \mathcal{B}))^{1/p} = \|Z\|_p .$$

Por facilitar la lectura escribamos $\min\{a, b\} = a \wedge b$. Con la descomposición

$$X = X \wedge a + (X - a)_+,\ a > 0,$$

podemos escribir, tras aplicar desigualdad triangular,

$$\left\|E(X \mid \mathcal{B}_n) - E(X \mid \mathcal{B}_\infty)\right\|_p \leq \left\|E(X \wedge a \mid \mathcal{B}_n) - E(X \wedge a \mid \mathcal{B}_\infty)\right\|_p + 2\left\|(X - a)_+\right\|_p .$$

Hacemos tender $n \to \infty$ y aplicando lo precedente y luego $a \uparrow \infty$ se sigue el resultado.

Recíprocamente, si $(X_n)_{n\geq 1}$ es una martingala positiva en L_p que converge en L_p a X_∞, entonces para $A \in \mathcal{B}_n$:

$$\int_A X_n dP = \int_A X_{n+p} dP \xrightarrow{p\to\infty} \int_A X_\infty dP,$$

lo que prueba que $X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n)$. ■

Lema 2.1. Si T es un tiempo de parada y X integrable, entonces

$$E(X \mid \mathcal{B}_T) = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(X \mid \mathcal{B}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}}.$$

Demostración. El lado derecho de la igualdad es B_T-medible y para todo $A \in B_T$, como $A\cap\{T = n\} \in \mathcal{B}_n$

$$\int_A \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(X \mid \mathcal{B}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}}dP = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \int_A E(X \mid \mathcal{B}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}}dP = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \int_{A\cap\{T=n\}} X = \int_A X = \int_A E(X \mid \mathcal{B}_T).$$

∎

Teorema 2.3. Suponer $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es una supermartingala positiva y que $X_n \to X_\infty$ c.s. Sean $T,\ S$ dos tiempos de parada con $T \leq S$. Entonces

$$X_T \geq E(X_S \mid \mathcal{B}_T)$$

Nota. En el caso de $T = 0$, tenemos $S \geq 0$ y $X_0 \geq E(X_S \mid \mathcal{B}_0),\ E(X_0) \geq E(X_S)$.

Demostración. Sea la supermartingala $(X_{S\wedge n})_{n\geq 1}$. Por el teorema de convergencia (2.1) tenemos que $X_{S\wedge n}$ converge c.s. a X_S, que es L_1, y $E(X_S \mid \mathcal{B}_n) \leq X_{S\wedge n},\ n \geq 1$.

Por el lema anterior,

$$E(X_S \mid \mathcal{B}_T) = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(X_S \mid \mathcal{B}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}},$$

luego

$$E(X_S \mid \mathcal{B}_T) = \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} E(X_S \mid \mathcal{B}_n)\mathbb{1}_{\{T=n\}} \leq \sum_{n\in\overline{\mathbb{N}}} X_{S\wedge n}\mathbb{1}_{\{T=n\}} = X_{S\wedge T} = X_T.$$

∎

Si $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es una martingala positiva, sabemos que es casi seguro convergente. Para que $\{(X_n, \mathcal{B}_n), n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ sea una martingala positiva necesitamos que

$$1.\ X_n \xrightarrow{L_1} X_\infty \ \text{ y } \ 2.\ E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n) = X_n.$$

Es cierto que $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$ y que para todo $m \geq n$, $E(X_m \mid \mathcal{B}_n) = X_n$, pero con esto no es suficiente para decir que $E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n) = X_n$. Necesitamos más condiciones. Veamos un ejemplo en el que no se cumple 2.

Consideramos el ejemplo de ramificación de Galton-Watson (2.1-2). Tenemos el proceso $\{Z_n, n \geq 0\}$ (recordemos que Z_n representa el número de descendientes en la generación $n - 1$) con $Z_0 = 1$, $E(Z_1) = \mu$, que es la media de descendientes de cada individuo. Vimos que $(Z_n/\mu^n,\ \mathcal{B}^0_n)_{n\geq 0}$ es una martingala no negativa, luego el límite c.s. existe: $Z_n/\mu^n \xrightarrow{c.s.} Z$. Sin embargo si $\mu \leq 1$, tenemos que el proceso de ramificación va a acabar (extinción), luego $Z \equiv 0$ y no se cumple que $E(Z \mid \mathcal{B}_n) = Z_n/\mu^n$. Esto nos lleva a un nuevo concepto: martingalas cerradas.

Definición 2.7 (Martingala cerrada)**.** Una martingala $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ se dice cerrada si existe una v.a. X_∞ B_∞-medible e integrable tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n).$$

Así, $\{(X_n, \mathcal{B}_n), n \in \overline{\mathbb{N}}\}$ es una martingala. X_∞ se llama *cierre*.

Nota. El cierre de una martingala, si existe, es único. Sin embargo el cierre de una sub(super) martingala no es necesariamente único. En efecto, si $X,\ Y$ son v.a. $\mathcal{B}_\infty$-medibles e integrables tal que $E(X \mid \mathcal{B}_n) = E(Y \mid \mathcal{B}_n),\ n \geq 1$. Entonces $E(X \mid \mathcal{B}_\infty) = E(Y \mid \mathcal{B}_\infty)$, igual que en la demostración del Teorema 2.2, luego $X = Y$ c.s.

2.3. Convergencia de martingalas y submartingalas.

En esta sección veremos la descomposición de Krickeberg, que se usa para extender propiedades de la convergencia de supermartingalas a martingalas y submartingalas.

La descomposición de Krickeberg consiste en escribir una submartingala como la diferencia entre una martingala y una supermartingala positivas.

Proposición 2.3. Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una martingala (submartingala) y suponer que ϕ es una función convexa (y no decreciente) tal que $\phi(X_n)$ es integrable para todo $n \geq 0$. Entonces $(\phi(X_n),\ \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es una submartingala.

Demostración. Sea $n < m$ y ϕ convexa. Entonces por la definición de martingala y la desigualdad de Jensen:

$$\phi(X_n) = \phi(E(X_m \mid \mathcal{B}_n) \leq E(\phi(X_m) \mid \mathcal{B}_n).$$

El caso de submartingala es análogo. ∎

Teorema 2.4 (Descomposición de Krickeberg)**.** Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una submartingala tal que

$$\sup_n E(X_n^+) < \infty,$$

entonces existe una martingala positiva $\{(M_n, \mathcal{B}_n), n \geq 0\}$ y una supermartingala positiva $\{(Y_n, \mathcal{B}_n), n \geq 0\}$ tal que

$$X_n = M_n - Y_n.$$

Demostración. Si X_n es una martingala, por la Proposición 2.3 X_n^+ también es una submartingala. Además, si $p \geq n$, por smoothing

$$E(X_{p+1}^+ \mid \mathcal{B}_n) = E(E(X_{p+1}^+ \mid \mathcal{B}_p) \mid \mathcal{B}_n) \geq E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n),$$

luego $\{E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n), p \geq n\}$ es monótona no decreciente en p. La monotonicidad implica que el siguiente límite existe:

$$\lim_{p\to\infty} \uparrow E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n) =: M_n.$$

Veamos que $\{(M_n, \mathcal{B}_n), n \geq 0\}$ es una martingala positiva.

1. $M_n \in \mathcal{B}_n$, y $M_n \geq 0$.
2. Como $\sup_{p\geq 0} E(X_p^+) < \infty$, tenemos que $E(M_n) < \infty$.
3. Por último, aplicando el T.C.M. condicional y smoothing tenemos que

$$\begin{aligned} E(M_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) &= E(\lim_{p\to\infty} \uparrow E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_{n+1}) \mid \mathcal{B}_n) = \lim_{p\to\infty} \uparrow E(E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_{n+1}) \mid \mathcal{B}_n) \\ &= \lim_{p\to\infty} \uparrow E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n) = M_n. \end{aligned}$$

Definimos $Y_n = M_n - X_n$. Veamos que $\{Y_n\}$ es una supermartingala positiva.

1. $Y_n \in \mathcal{B}_n$.
2. $Y_n \geq 0$ ya que $M_n = \lim_{p\to\infty} \uparrow E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n) \geq E(X_n^+ \mid \mathcal{B}_n) = X_n^+ \geq X_n$.
3. Como $E(M_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = M_n$ y $E(X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) \geq X_n$,

$$E(Y_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = E(M_{n+1} - X_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) \leq M_n - X_n = Y_n.$$

∎

Este teorema nos conduce al teorema de convergencia de submartingalas de Doob.

Teorema 2.5 (Convergencia de submartingalas)**.** Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una (sub)martingala satisfaciendo $\sup_{n\in\mathbb{N}} E(X_n^+) < \infty$, entonces existe una v.a. integrable X_∞ tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$.

Demostración. Por la descomposición de Krickeberg tenemos que $X_n = M_n - Y_n$, donde M_n e Y_n son son una martingala positiva y una supermartingala positiva respectivamente. Aplicando el teorema de convergencia (2.1) tenemos que

$$M_n \xrightarrow{c.s.} M_\infty, \quad Y_n \xrightarrow{c.s.} Y_\infty$$

$$E(M_\infty \mid \mathcal{B}_n) \leq M_n, \quad E(Y_\infty \mid \mathcal{B}_n) \leq Y_n.$$

Luego

$$E(M_\infty) \leq E(M_n), \quad E(Y_\infty) \leq E(Y_n)$$

y $M_n,\ Y_n$ son integrables. Luego $M_n,\ Y_n < \infty$ c.s.

Así, si denotamos $X_\infty := M_\infty - Y_\infty$, que existe casi seguro por lo anterior, tenemos que $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$. ∎

2.4. Regularidad de martingalas y submartingalas

Definición 2.8. Una martingala $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ es *regular* si converge en L_1, es decir, si existe una v.a. X tal que $\lim_{n\to\infty} E(\,|X_n - X|) = 0$.

Definición 2.9. Una martingala $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ está *acotada en L_p* si $\sup_n E(\,|X_n|^p) < \infty$.

Antes de caracterizar las martingalas regulares veremos un lema que nos ayuda a estudiar la convergencia en L_1.

Definición 2.10. Una sucesión de v.a. $(X_n)_{n\geq 0}$ se dice *uniformemente integrable* si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_n E(\,|X_n|\,\mathbb{1}_{\{|X_n|>a\}}) = 0.$$

Lema 2.2. Sea $X \in L_1$ una v.a. definida en $(\Omega, \mathcal{B}, P)$. Entonces la familia de v.a. $(E(X \mid \mathcal{B}))_{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}}$ es uniformemente integrable.

Demostración. Veamos que

$$\sup_{\mathcal{B}\subseteq\mathcal{B}} \int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}} \big|E(X \mid \mathcal{B})\big|\, dP \downarrow 0, \text{ cuando } a\uparrow\infty.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}} \big|E(X \mid \mathcal{B})\big|\, dP &\leq \int_{\{E(|X||\mathcal{B})\geq a\}} E(\,|X| \mid \mathcal{B}) dP = \int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}} |X|\, dP \\ &= \int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}\cap\{|X|\geq b\}} |X|\, dP + \int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}\cap\{|X|<b\}} |X|\, dP \\ &\leq bP(E(\,|X| \mid \mathcal{B}) \geq a) + \int_{\{|X|>b\}} |X|\, dP,\ b>0.\end{aligned}$$

Como $P(E(\,|X| \mid \mathcal{B}) \geq a) \leq \frac{1}{a}E|X|$ (desigualdad de Markov) (*Anexo*), tenemos que

$$\int_{\{|E(X|\mathcal{B})|\geq a\}} \big|E(X \mid \mathcal{B})\big|\, dP \leq \frac{b}{a}E|X| + \int_{\{|X|>b\}} |X|\, dP.$$

Tomamos $b = \sqrt{a}$ y hacemos $a\uparrow\infty$. ∎

Teorema 2.6. Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una martingala. Entonces son equivalentes:

1. (X_n) es regular.

2. $\sup_n E(|X_n|) < \infty$ y existe una v.a. X_∞ tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$ que verifica
$$X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

3. (X_n) es una martingala cerrada.

4. (X_n) es uniformemente integrable.

Demostración.
$1 \implies 2$. Si (X_n) converge en L_1, $\lim_{n\to\infty} E(|X_n|)$ existe, luego $\{E(|X_n|)\}$ está acotada en L_1, es decir, $\sup_n E(|X_n|) < \infty$. De acuerdo con el teorema de convergencia de submartingalas 2.5, existe una v.a. $X_\infty = \lim_n X_n$ c.s. Además $X_n \xrightarrow{L_1} X_\infty$. Puesto que la esperanza condicional mantiene la convergencia en L_1, tenemos que si $p \to \infty$
$$X_n = E(X_p \mid \mathcal{B}_n) \xrightarrow{L_1} E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n).$$
Luego $X_n = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
$2 \implies 3$. Basta con tomar la v.a. X_∞ como cierre.
$3 \implies 4$. Usamos el lema anterior 2.2.
$4 \implies 1$. Tenemos integrabilidad uniforme, luego (X_n) está acotada en L_1 y, por el teorema de convergencia de martingalas 2.5, converge casi seguro a una v.a. X. Así, por tener convergencia casi segura e integrabilidad uniforme, (X_n) converge en L_p.

■

Veamos una caracterización de regularidad.

Corolario 2.1. Una martingala (X_n) es regular si y solo si

1. $X_T \in L_1$, para todo tiempo de parada T.

2. $E(X_T \mid \mathcal{B}_S) = X_S$, para todo tiempo de parada $S \leq T$.

Demostración.
$\Longleftarrow$) 1 y 2 implican que la martingala es cerrada (tomando $T \equiv \infty$ y $S \leq n$).
$\Longrightarrow$) Puesto que la martingala es cerrada, se tiene que $E(X_\infty \mid \mathcal{B}_T) = X_T$, T tiempo de parada. Ello implica que $X_T \in L_1$. Por otra parte, aplicando smoothing:
$$E(X_T \mid \mathcal{B}_S) = E(E(X_\infty \mid \mathcal{B}_T) \mid \mathcal{B}_S) = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_S) = X_S.$$

■

Teorema 2.7. Sea $p > 1$. Toda martingala X_n acotada en L_p es regular. Además converge en L_p a su límite c.s. X_∞.

Demostración. Veamos que es uniformemente integrable para poder aplicar el Teorema 2.6.
$$a^{p-1}\int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \leq E(|X_n|^p), \; a > 0, \; p > 1$$
implica que
$$\sup_n \int_{\{|X_n|>a\}} |X_n| \leq \frac{C^p}{a^{p-1}}, \text{ donde } C = \sup_n \|X_n\|_p < \infty$$

y por tanto X_n es uniformemente integrable.

Por el Teorema 2.6, podemos escribir $E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n) = X_n$, $X_\infty = \lim_n X_n$ c.s.

$|X_n|^p \to |X_\infty|^p$ c.s. Por el lema de Fatou, $|X_\infty|^p \in L_1$. Gracias a la desigualdad de Jensen

$$E(\,|X_\infty|^p \mid \mathcal{B}_n) \geq \left|E(X_\infty^p \mid \mathcal{B}_n)\right|^p = |X_n|^p\,.$$

Aplicando el Lema 2.2, $(\,|X_n|^p)$ es uniformemente integrable. Por ello y por ser L_1, tenemos que $X_n \xrightarrow{L_p} X_\infty$. ■

Teorema 2.8. Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ una submartingala. Entonces son equivalentes:

1. (X_n^+) es regular.
2. $\sup\limits_n E(X_n^+) < \infty$ y existe una v.a. X_∞ tal que $X_n \xrightarrow{c.s.} X_\infty$ que verifica
$$X_n \leq E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n), \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$
3. (X_n) es una submartingala cerrada.
4. (X_n^+) es uniformemente integrable.

Demostración.

$1 \Longrightarrow 2$. La condición implica que $\sup_n E(X_n^+) < \infty$ y por tanto existe $\lim_n X_n = X_\infty \in L_1$. Asimismo: $\lim_n X_n^+ = X_\infty^+ \in L_1$.

Consideramos la descomposición de Krickeberg $X_n = M_n - Y_n$. Recordemos que $M_n = \lim_p \uparrow E(X_p^+ \mid \mathcal{B}_n)$. Por tanto $M_n = E(X_\infty^+ \mid \mathcal{B}_n)$.

Por otra parte: sean X_∞, Y_∞ y M_∞ son los límites de X_n, Y_n y M_n, respectivamente. $E(M_n) = \sup_{p\geq n} E(X_p^+)$, luego

$$E(M_n - X_n^+) = E(M_n) - E(X_n^+) \downarrow 0.$$

Aplicando el lema de Fatou, $E(M_\infty - X_\infty^+) = 0$, entonces $M_\infty = X_\infty^+$. Así

$$Y_\infty = M_\infty - X_\infty = X_\infty^+ - X_\infty = X_\infty^-.$$

Además $E(Y_\infty \mid \mathcal{B}_n) \leq Y_n$. Por tanto:

$$X_n = M_n - Y_n \leq E(X_\infty^+ \mid \mathcal{B}_n) - E(X_\infty^- \mid \mathcal{B}_n) = E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n).$$

$2 \Longrightarrow 3$. Basta con tomar X_∞ como cierre.

$3 \Longrightarrow 4$. Si $X_n \geq E(X_\infty \mid \mathcal{B}_n)$, entonces $X_n^+ \leq E(X_\infty^+ \mid \mathcal{B}_n),\ n \geq 1$. Así, $E(\sup_n X_n^+) < \infty$.

$4 \Longrightarrow 1$. Igual que en el Teorema 2.6 ■

Corolario 2.2. Una submartingala (X_n) es regular si y solo si

1. $X_T \in L_1$, para todo tiempo de parada T.
2. $E(X_T \mid \mathcal{B}_S) = X_S$, para todo tiempo de parada $S \leq T$.

Demostración.

$\Longleftarrow$) Trivial.

$\Longrightarrow$) Sean S, T tiempos de parada con $S \leq T$. Sea $X_n = M_n - Y_n,\ n \geq 1$ la descomposición de Krickeberg. Entonces M_n es regular (en la demostración del Teorema 2.8 escribimos $M_n = E(X_\infty^+ \mid \mathcal{B}_n),\ n \geq 1$). Por tanto:

$$E|X_T| \leq E|M_T| + E|Y_T| < \infty.$$

$$E(X_T \mid \mathcal{B}_S) = E(M_T \mid \mathcal{B}_S) - E(Y_T \mid \mathcal{B}_S) \geq M_S - Y_S = X_S.$$

■

Capítulo 3

Aplicaciones en matemática financiera

3.1. Modelo simple de mercado

Veamos a continuación qué ingredientes requiere el modelo de mercado. Tenemos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ donde Ω es finito y $\mathcal{B}$ el conjunto de partes de Ω, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(\Omega)$. Asumimos que $P(\{\omega\}) > 0$, para todo $\omega \in \Omega$. Esto se corresponde con la idea de que los inversores coinciden en los posibles estados ω pero no en la probabilidad que tienen.

Hay un tiempo finito $0, 1, ..., N$, donde N es el tiempo terminal para la actividad económica; y una familia de σ-álgebras $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}_1 \subset ...\mathcal{B}_N = \mathcal{B}$. $\mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Entendemos una σ-álgebra $\mathcal{B}_n$ como la información que tenemos para el tiempo n.

Los inversores comercian en $d + 1$ *activos* ($d \geq 1$) y el precio del activo i en el tiempo n es $S_n^{(i)}$ para $n = 0, 1, ..., N$. Los activos $1, ..., d$ tienen un riesgo ya que cambian su precio. El activo 0 lo consideramos como una cuenta de ahorros o como un bono cuyo precio aumenta determiníticamente, donde el valor no varía a lo largo del tiempo. Lo llamaremos activo *libre de riesgo*. Asumimos como normalización $S_0^{(0)} = 1$. Por ejemplo un modelo de mercado de $\{S_n^{(0)}, 0 \leq n \leq N\}$, si tenemos un interés r constante, es $S_n^{(0)} = (1 + r)^n$. Asumimos que $\{S_n^{(i)}, 0 \leq n \leq N\}$ es no negativo y tal que $0 \leq S_n^{(i)} \in \mathcal{B}_n$ para $i = 0, ..., d$. Asumir $S_n^{(0)} > 0,\ n = 0, ..., N$. Escribimos

$$\{\boldsymbol{S}_n = (S_n^{(0)}, S_n^{(1)}, ..., S_n^{(i)}),\ 0 \leq n \leq N\}$$

para el valor del proceso de precios de mercado en $\mathbb{R}^{d+1}$.

Como la principal motivación es obtener beneficios, nos interesa saber la comparación de nuestras inversiones con el activo libre de riesgo. Podemos aplicar el factor de descuento $\beta_n = 1/S_n^{(0)}$ y obtener el *proceso de precios con factor de descuento*

$$\{\overline{\boldsymbol{S}}_n = \boldsymbol{S}_n/S_n^{(0)},\ 0 \leq n\ N\},$$

que puede ser visto como el precio original del proceso en unidades del precio actual del activo libre de riesgo.

El cambio de precios de un periodo a otro viene dado por

$$\boldsymbol{d}_0 = \boldsymbol{S}_0,\ \boldsymbol{d}_n = \boldsymbol{S}_n - \boldsymbol{S}_{n-1},\ n = 1, ..., N$$

y el cambio en el proceso de precios con factor de descuento es

$$\overline{\boldsymbol{d}}_0 = \overline{\boldsymbol{S}}_0,\ \overline{\boldsymbol{d}}_n = \overline{\boldsymbol{S}}_n - \overline{\boldsymbol{S}}_{n-1},\ n = 1, ..., N$$

Definición 3.1. Se llama *estrategia de compraventa* a un proceso

$$\{\boldsymbol{\phi}_n = (\phi_n^{(0)}, \phi_n^{(1)}, ..., \phi_n^{(d)}),\ 0 \leq n \leq N\},$$

que es previsible, esto es que $\phi_n^{(i)}$ es $\mathcal{B}_{n-1}$-medible para cada $i = 0, ..., d,\ n = 1, ..., N$.

Por ser Ω finito, tenemos que cada v.a. $\mid \phi_n^{(i)} \mid$, $0 \leq n \leq N,\ 0 \leq i \leq d$ está acotada. Podemos entender ϕ_n como el número de acciones de cada activo en la cartera del inversor entre los tiempos $n-1$ y n con información disponible hasta el tiempo $n-1$. En el tiempo n, cuando los nuevos precios $\boldsymbol{S}_n$ son anunciados, el inversor cambia la cartera de acciones por el vector $\boldsymbol{\phi}_{n+1}$. Cuando esos precios $\boldsymbol{S}_n$ se anuncian, el *valor* de la cartera es

$$V_n(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}_n, \boldsymbol{S}_n) = \phi_n^T \boldsymbol{S}_n = \sum_{i=0}^{d} \phi_n^{(i)} S_n^{(i)}.$$

Asímismo, el valor de la cartera con el factor de descuento es

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = \beta_n V_n(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}_n, \overline{\boldsymbol{S}}_n).$$

Resumiendo, empezamos con el valor $V_0(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{S}_0)$. Como ahora $\boldsymbol{S}_0$ es conocido podemos reequilibrar la cartera con $\boldsymbol{\phi}_1$. El valor actual $(\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{S}_0)$ permanece hasta que los precios $\boldsymbol{S}_1$ se anuncian. Cundo se anuncian, el valor de la cartera será $V_1(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{S}_1)$. Así sucesivamente.

Definición 3.2. Una estrategia de compraventa $\boldsymbol{\phi}$ se dice que es autofinanciadora si

$$(\boldsymbol{\phi}_n, \boldsymbol{S}_n) = (\boldsymbol{\phi}_{n+1}, \boldsymbol{S}_n),\ 0 \leq n \leq N-1.$$

Esta igualdad indica que los cambios en la cartera del inversor se hacen sin introducir capital ni retirar de los fondos que hay en la cartera.

Lema 3.1. Si $\boldsymbol{\phi}$ es una estrategia de compraventa, son equivalentes:

1. $\boldsymbol{\phi}$ es autofinanciadora,
2. Para $1 \leq n \leq N$
$$V_n(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{d}_j).$$
3. Para $i \leq n \leq N$
$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j).$$

Demostración. $\boldsymbol{\phi}$ es autofinanciadora si y solo si para todo $j = 0, ..., N-1$

$$(\boldsymbol{\phi}_{j+1}, \boldsymbol{d}_{j+1}) = (\boldsymbol{\phi}_{j+1}, \boldsymbol{S}_{j+1}) - (\boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{S}_j) = V_{j+1}(\boldsymbol{\phi}) - V_j(\boldsymbol{\phi}),$$

si y solo si

$$V_n(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (V_j(\boldsymbol{\phi}) - V_{j-1}(\boldsymbol{\phi})) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \boldsymbol{d}_j).$$

Análogamente, multiplicando por el factor de descuento $\beta_n > 0$: $\boldsymbol{\phi}$ es autofinanciadora si y solo si

$$(\boldsymbol{\phi}_n, \overline{\boldsymbol{S}}_n) = (\boldsymbol{\phi}_{n+1}, \overline{\boldsymbol{S}}_n),\ n = 0, ..., N-1.$$

si y solo si

$$(\boldsymbol{\phi}_{n+1}, \overline{\boldsymbol{d}}_{n+1}) = \overline{V}_{n+1} - \overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}),\ n = 0, ..., N-1$$

si y solo si

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = \overline{V}_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\overline{V}_j(\boldsymbol{\phi}) - \overline{V}_{j-1}(\boldsymbol{\phi})) = \overline{V}_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j).$$

Observemos finalmente que $\overline{V}_0(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi})$, ya que $\beta_0 = 1$. ■

Nota. 1. El Lema 3.1-2 muestra que para estrategias autofinanciadoras, los cambios de valor de la cartera se deben únicamente a los cambios de precios.

2. Puesto que $\overline{d}_j^0 = 0,\ j = 1, ..., N$, podemos escribir el Lema 3.1-3 como:

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{d} \phi_j^{(i)}\overline{d}_j^i, \tag{3.1}$$

probando que el valor de la cartera, teniendo en cuenta el factor de descuento, solo depende de $V_0(\boldsymbol{\phi})$ y de $\{\phi_j^{(i)},\ i = 1, ..., d,\ j = 1, ..., n\}$, siempre que $\boldsymbol{\phi}$ sea autofinanciadora.

Lema 3.2. Sea $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d),\ 1 \leq n \leq N\}$ un proceso previsible y V_0 una v.a. no negativa y $\mathcal{B}_0$-medible (una constante). Entonces existe un único proceso previsible $\{\phi_n^0,\ 0 \leq n \leq N\}$ tal que $\boldsymbol{\phi}$=$\{\boldsymbol{\phi}_n = (\phi_n^0, \phi_n^1, ..., \phi_n^d),\ 0 \leq n \leq N\}$ es una estrategia autofinanciadora con valor inicial V_0.

Demostración. Supongamos que $(\boldsymbol{\phi}_n, \leq n \leq N)$ es una estrategia autofinanciadora con valor inicial V_0. Entonces es válida (3.1) con $V_0(\boldsymbol{\phi})$ reemplazado por V_0. Por otra parte

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = (\boldsymbol{\phi}_n, \overline{\boldsymbol{S}}_n) = \phi_n^0 + \sum_{i=1}^{d} \phi_n^{(i)}\overline{S}_n^{(i)},\ n = 0, ..., N.$$

Igualando esta expresión con (3.1) y despejando ϕ_n^0 se tiene para $n = 1, ..., N$ que

$$\phi_n^0 = V_0 + \sum_{j=1}^{n}(\sum_{i=1}^{d} \phi_j^{(i)}\overline{d}_j^i - \sum_{i=1}^{d} \phi_n^{(i)}\overline{S}_n^i) = V_0 + \sum_{j=1}^{n-1}(\sum_{i=1}^{d} \phi_j^{(i)}\overline{d}_j^i - \sum_{i=1}^{d} \phi_n^{(i)}\overline{S}_{n-1}^i),$$

que es $\mathcal{B}_{n-1}$-medible.

Esto prueba:

1. Que ϕ_n^0, está determinada si la estrategia es autofinanciadora.
2. Como elegir ϕ_n^0 a partir de V_0 y de $\{(\phi_n^1, ..., \phi_n^d),\ 1 \leq n \leq N\}$ para que la estrategia sea autofinanciadora.

■

3.2. Estrategias admisibles y arbitraje

Notar que con las definiciones anteriores nada requiere que $\boldsymbol{\phi} > \mathbf{0}$. Si $\phi_n^{(i)} < 0$ para algún $i = 0, 1, ..., d$, entonces estamos *en corto* $|\phi_n^{(i)}|$ acciones del activo. Esto se puede entender como retirar $|\phi_n^{(i)}|$ acciones para producir capital invirtiendo en otros activos.

Definición 3.3. Una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ se llama *admisible* si es autofinanciadora y además $V_n(\boldsymbol{\phi}) \geq 0,\ n = 0, ..., N$.

Una estrategia admisible se llama *estrategia de arbitraje* si $V_0(\boldsymbol{\phi}) = 0$ y $V_N(\boldsymbol{\phi})(\omega_0) > 0$ para algún $\omega_0 \in \Omega$ (así, $E(V_N(\omega_0)) > 0$).

Nota. Estas estrategias de arbitraje, si existen, permiten al inversor un margen para pagar préstamos de acciones. Se pide que el inversor no esté nunca endeudado. Los mercados que contienen estrategias de arbitraje no son compatibles con el equilibrio económico.

Definición 3.4. Un mercado se dice viable si no contiene estrategias de arbitraje.

Ahora veremos la relación entre lo visto en la sección anterior y las martingalas.

Dadas dos probabilidades P^*, P, escribiremos $P \equiv P^*$ si $P \ll P^*$ y $P^* \ll P$, lo que implica que P y P^* tienen los mismos conjuntos nulos.

Teorema 3.1. Un mercado es viable si y solo si existe $P^* \equiv P$ tal que $(\overline{\boldsymbol{S}}_n, \mathcal{B}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una P^*-martingala, esto es, $(\overline{S}_n^{(i)}, \mathcal{B}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una P^*-martingala para cada i=0,...,d.

Una tal P^*-martingala se llama "equivalent martingale measure" o "risk neutral measure".

Demostración.

$\Longleftarrow$) Supongamos que $(\overline{\boldsymbol{S}}_n, \mathcal{B}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una P^*-martingala para alguna probabilidad $P^* \equiv P$. Entonces

$$E^*(\overline{\boldsymbol{d}}_{j+1} \mid \mathcal{B}_j) = 0,\ j = 0, ..., N-1$$

y en virtud del Lema 3.1-3, $(\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}),\ 0 \leq n \leq N)$ es una P^*-martingala. Por tanto

$$E^*(\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi})) = E^*(\overline{V}_0(\boldsymbol{\phi})),\ 0 \leq n \leq N, \text{para todo } \boldsymbol{\phi} \text{ autofinanciadora.}$$

Si $\boldsymbol{\phi}$ es una estrategia de arbitraje se sigue de lo anterior que $\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) = V_N(\boldsymbol{\phi}) = 0$ P^*-c.s. y por tanto P-c.s. Puesto que $P(\{\omega\}) > 0$, para todo $\omega \in \Omega$, ello implica que $V_N(\boldsymbol{\phi}) \equiv 0$, en continuación con que $\boldsymbol{\phi}$ sea estrategia de arbitraje.

Para la afirmación recíproca, necesitamos el siguiente lema.

Lema 3.3. Suponer que existe una estrategia autofinanciadora $\boldsymbol{\phi}$ tal que $V_0(\boldsymbol{\phi}) = 0$, $V_N(\boldsymbol{\phi}) \geq 0$ y $E(V_N(\boldsymbol{\phi})) > 0$. Entonces existe una estrategia de arbitraje y el mercado no es viable.

Demostración. Si $V_n(\boldsymbol{\phi}) \geq 0$, $n = 0, ..., N$, entonces $\boldsymbol{\phi}$ es admisible y por tanto una estrategia de arbitraje. En caso contrario, existe

$$n_0 = \sup\{k : P(V_k(\boldsymbol{\phi}) < 0\} \text{ con } 1 \leq n_0 \leq N-1.$$

Es decir:

$$\text{(a) } P(V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})) < 0 \quad \text{y} \quad \text{(b) } V_n(\boldsymbol{\phi}) \geq 0,\ n_0 < n \leq N.$$

Denotamos mediante $\mathbb{e}_0 = (1, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^{d+1}$ y construimos $\boldsymbol{\Psi} = (\boldsymbol{\Psi}_n,\ 0 \leq n \leq N)$ mediante:

$$\boldsymbol{\Psi}_k = \begin{cases} \boldsymbol{0}, & \text{si } k \leq n_0 \\ \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}}(\boldsymbol{\phi}_k - \dfrac{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})}{S^0_{n_0}}\mathbb{e}_0), & \text{si } k > n_0 \end{cases}$$

Por construcción, $\boldsymbol{\Psi}$ es un proceso previsible. Por otra parte:
(i) $\boldsymbol{\Psi}$ es autofinanciadora: $(\boldsymbol{\Psi}_k, \boldsymbol{S}_k) = (\boldsymbol{\Psi}_{k+1}, \boldsymbol{S}_k)$, $k = 0, ..., N-1$.
Si $k+1 \leq n_0$, la conclusión es obvia. Si $k > n_0$, entonces:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Psi}_k, \boldsymbol{S}_k) &= \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}}\left((\boldsymbol{\phi}_k, \boldsymbol{S}_k) - \frac{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi}}{S^0_{n_0}}(\mathbb{e}_0, \boldsymbol{S}_k)\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}}\left((\boldsymbol{\phi}_{k+1}, \boldsymbol{S}_k) - \frac{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi}}{S^0_{n_0}}(\mathbb{e}_0, \boldsymbol{S}_k)\right) = (\boldsymbol{\Psi}_{k+1}, \boldsymbol{S}_k).\end{aligned}$$

Finalmente, si $k = n_0$:

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{\Psi}_{n_0+1}, \boldsymbol{S}_{n_0}) &= \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}}\left((\boldsymbol{\phi}_{n_0+1}, \boldsymbol{S}_{n_0}) - \frac{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi}}{S^0_{n_0}}(\mathbb{e}_0, \boldsymbol{S}_k)\right) \\ &= \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}}(V_{n_0}(\boldsymbol{\phi}) - V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})) = 0 = (\boldsymbol{\Psi}_{n_0}, \boldsymbol{S}_{n_0}).\end{aligned}$$

(ii) $\boldsymbol{\Psi}$ es admisible. Por construcción $V_k(\boldsymbol{\Psi}) = 0,\ k \leq n_0$. Si $k > n_0$:

$$V_k(\boldsymbol{\Psi}) = \mathbb{1}_{\{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi})<0\}} \left(V_k(\boldsymbol{\phi}) - \frac{V_{n_0}(\boldsymbol{\phi}}{S^0_{n_0}}(\text{e}_0, \boldsymbol{S}_k) \right) \geq 0$$

debido a (b). ■

Continuación demostración Teorema 3.1.

$\Longrightarrow$) Supongamos que el mercado es viable. Definimos los conjuntos de v.a.:

$$\Gamma = \{X : \Omega \to \mathbb{R} :\ X \geq 0,\ EX > 0\},\ \mathcal{V} = \{V_N(\boldsymbol{\phi}) :\ V_0(\boldsymbol{\phi}) = 0,\ \boldsymbol{\phi} \text{ autofinanciadora}\}.$$

Por el Lema 3.3, $\Gamma \cap \mathcal{V} = \emptyset$.

Consideramos Γ y $\mathcal{V}$ como subconjuntos del espacio euclídeo $\mathbb{R}^\Omega (= \{f :\ f : \mathbb{R} \to \Omega\})$.

Es fácil ver que $\mathcal{V}$ es un espacio vectorial. Definimos

$$\mathcal{K} = \{X \in \Gamma :\ \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega) = 1\}$$

Observamos que $\mathcal{K}$ es cerrado en $\mathbb{R}^\Omega$, compacto y convexo. Además $\mathcal{V} \cap \mathcal{K} = \emptyset$.

Utilizando el teorema del hiperplano separador: Existe una función lineal $\boldsymbol{\lambda} : \mathbb{R}^\Omega \to \mathbb{R}$ tal que

$$(i)\ \boldsymbol{\lambda}(X) > 0,\ X \in \mathcal{K},\quad (ii)\ \boldsymbol{\lambda}(X) = 0,\ X \in \mathcal{V}$$

Representemos $\boldsymbol{\lambda}$ como el vector $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda(X),\ \omega \in \Omega)$ y reescribimos (i) y (ii) como

$$(i')\ \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) X(\omega) > 0,\ X \in \mathcal{K}$$

$$(i'')\ \sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) V_N(\boldsymbol{\phi})(\omega) = 0,\ \text{para todo } \boldsymbol{\phi} \text{ autofinanciadora con } V_0(\boldsymbol{\phi}) = 0.$$

Veamos que $\omega > 0,$ para todo $\omega \in \Omega$. En efecto, si $(\omega_0) = 0$ para algún $\omega_0 \in \Omega$, entonces, puesto que $X = \mathbb{1}_{\{\omega_0\}} \in \mathcal{K}$ se tendría

$$\sum_{\omega\in\Omega} \lambda(\omega) X(\omega) = \lambda(\omega_0) = 0,$$

lo que contradice (i').

Definimos

$$P^*(\omega) = \frac{\lambda(\omega)}{\sum_{\omega'\in\Omega} \lambda(\omega')}.$$

Puesto que $P^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \in \Omega$, entonces $P^* \equiv P$. Sea $\boldsymbol{\phi}$ autofinanciadora con $V_0(\boldsymbol{\phi}) = 0$. En virtud de (ii'), $E^*(V_N(\boldsymbol{\phi})) = 0$, luego $E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})) = 0$. De donde, por el Lema 3.1-3:

$$E^*(\sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j)) = 0 \tag{3.2}$$

Fijemos $1 \leq i \leq d$ y supongamos que $(\phi^{(i)}_n, \leq n \leq N)$ es un proceso previsible arbitrario. Utilizando el Lema 3.2 con $V_0 = 0$, existe un proceso previsible $(\phi^0_n,\ 0 \leq n \leq N)$ tal que

$$\widetilde{\boldsymbol{\phi}}^* = \{\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_n = (\Phi^0_n, 0, ..., 0, \Phi^{(i)}_n, 0, ..., 0), \leq n \leq N\}$$

es una estrategia autofinanciadora con valor inicial $V_0 = 0$. Y por (3.2) se tiene:

$$0 = E^* \left(\sum_{j=1}^{N} (\widetilde{\boldsymbol{\phi}}_j^*, \overline{\boldsymbol{d}}_j) \right) = E^* \left(\sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\phi}_j^{(i)} \overline{d}_j^{(i)} \right).$$

Esto garantiza que $(\overline{S}_n^{(i)}, \mathcal{B}_n)_{0 \leq n \leq N}$ es una P^*-martingala. ∎

Nota. Las "equivalent martingale measures" dan a los inversores una interpretación matemática del riesgo financiero de un activo, que ha de ser tomado en cuenta para estimar el precio del mismo.

Definición 3.5. Un proceso adaptado $(D_n, \mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ se dice que es un proceso de diferencias de martingala si:

1. $D_n \in L_1,\ n \geq 0$.
2. $E(D_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = 0,\ n = 0, 1, ...$

Nota.

1. Notar que si $(D_n, \mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ es un proceso de diferencias de martingala entonces $(X_n, \mathcal{B}_n) n \geq 0$ con $X_n = \sum_{j=0}^{n} D_j$ es una martingala. Recíprocamente, si $(X_n, \mathcal{B}_n) n \geq 0$ es una martingala, entonces el proceso $(D_n, \mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ con $D_0 = X_0 - EX_0,\ D_n = X_n - X_{n-1},\ n \geq 1$ es un proceso de diferencias de martingala.

2. Si $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n \geq 0}$ con $X_n = \sum_{j=0}^{n} D_j$ y $ED_j^2 < \infty,\ j \geq 0$, entonces $(D_j)_{j \geq 0}$ son ortogonales, esto es, $E(D_i D_j) = 0,\ i \neq j$. En efecto, si $j > i$, se tiene:

$$E(D_i D_j) = E(E(D_i D_j \mid \mathcal{B}_i)) = E(D_i E(D_j \mid \mathcal{B}_i)) = 0.$$

En consecuencia: $E(X_n^2) = \sum_{j=0}^{n} E(D_j^2)$.

Proposición 3.1. Sea $(D_n)_{n \geq 0}$ un proceso de diferencias de martingala y $(U_n)_{n \geq 0}$ con U_0 constante un proceso previsible y acotado. Entonces $(U_n D_n)_{n \geq 0}$ es un proceso de diferencias de martingala y en consecuencia $X_n = \sum_{j=0}^{n} U_j D_j$ es un martingala. A esta martingala se le llama *martingala transformada.*

Demostración.

$$E(U_{n+1} D_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = U_{n+1} E(D_{n+1} \mid \mathcal{B}_n) = 0,\ n = 0, 1, ...$$

∎

Veamos un par de ejemplos en los que usamos las martingalas transformadas.

Ejemplo 3.1 (Modelo de juego)**.** Entendamos D_n como la ganancia en la partida n en un juego equitativo. U_n es la apuesta en la partida n basada en la información hasta el instante $n - 1$, $\mathcal{B}_{n-1} = \sigma(D_0, ..., D_{n-1})$. Entonces $X_n = \sum_{j=0}^{n} U_j D_j$ representa la ganancia acumulada en el tiempo n.

Un ejemplo es

$$P(D_n = 1) = P(D_n = -1) = 1/2$$

$$U_n = b_{n-1}(D_1, ..., D_{n-1}) = 2^{n-1} \mathbb{1}_{\{D_1 = ... = D_{n-1} = -1\}}$$

$$X_n = X_{n-1} + U_n D_n = X_{n-1} + D_n 2^{n-1} \mathbb{1}_{\{D_1 = ... = D_{n-1} = -1\}}.$$

Ejemplo 3.2 (Finanzas)**.** Sean D_n el cambio de precios de una acción en el periodo $n-1,\ n$ y U_n el número de acciones del inversor compradas en el tiempo $n-1$ basado en la información hasta el tiempo $n-1$. $X_n = \sum_{j=0}^{n} U_j D_j$, el valor de la cartera del inversor en el tiempo n.

Proposición 3.2. Sea $(X_n, \mathcal{B}_n)_{n\geq 0}$ un proceso adaptado e integrable. Pongamos $D_0 = X_0 - E(X_0),\ D_n = X_n - X_{n-1},\ n \geq 1$. Entonces $(X_n)_{n\geq 0}$ es una martingala si y solo si para todo proceso acotado y previsible $(U_n)_{n\geq 0}$ se tiene:

$$E(\sum_{n=0}^{N} U_n D_n) = 0,\ N \geq 0.$$

Demostración.

$\Longrightarrow$) Es una consecuencia inmediata de la proposición anterior.

$\Longleftarrow$) Para cada $j \geq 0$, sea $A \in \mathcal{B}_j$ y definamos $U_n = 0$ si $n \neq j+1$ y $U_{j+1} = \mathbb{1}_{A_j}$. Claramente $(U_n)_{n\geq 0}$ es acotado y previsible. Por tanto

$$0 = E(\sum_{n=0}^{N} U_n D_n) = E(U_{j+1} D_{j+1}) = E(D_{j+1} \mathbb{1}_{A_j}),\ N \geq j+1.$$

lo que implica que $E(D_{j+1} \mid \mathcal{B}_j) = 0$ y por tanto $(D_n)_{n\geq 0}$ es un proceso de diferencias de martingala y en consecuencia $X_n = \sum_{j=0} D_j + E(X_0)$ es una martingala. ■

Corolario 3.1. Supongamos que el mercado es viable y que P^* es una "equivalent martingale measure" para $\{(\overline{\boldsymbol{S}}_n, \mathcal{B}_n),\ 0 \leq n \leq N\}$. Entonces el proceso $(\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}), \mathcal{B}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una P^*-martingala para cada estrategia autofinanciadora $\boldsymbol{\phi}$.

Demostración. En virtud del Lema 3.1, si $\boldsymbol{\phi}$ es autofinanciadora, entonces

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j).$$

Como $(\overline{\boldsymbol{d}}_n)_{0\leq n\leq N}$ es una sucesión de diferencias de P^*-martingalas (por el Teorema 3.1) se tiene que $(\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}))_{0\leq n\leq N}$ es una P^*-martingala transformada. ■

3.3. Mercados completos y opciones

En esta sección veremos la definición de mercados completos y las opciones de compra y venta europeas.

Definición 3.6. Una *opción europea* es una v.a. X no negativa $\mathcal{B}_N \equiv \mathcal{B}$-medible.

Entendemos una opción europea X como un derecho que se hace efectivo en el tiempo N. Un inversor puede elegir comprar o vender estas opciones. El vendedor tiene que pagar al comprador de la opción, $X(\omega)$ unidades (usualmente dólares) en el tiempo N. En esta sección veremos que un inversor que vende una opción se puede proteger vendiendo la opción en el precio adecuado. Veamos dos ejemplos de opciones: una de compra y otra de venta.

Ejemplo 3.3 (Opción de compra a precio K ("*european call*"))**.** Esta opción es del tipo $X = (S_N^{(1)} - K)^+$. El poseedor (comprador a tiempo 0) tiene el derecho de comprar la acción en el tiempo N al precio K, que puede ser vendido obteniendo un beneficio de $(S_N^{(1)} - K)^+$ dólares.

Ejemplo 3.4 (Opción de venta a precio K ("*european put*"))**.** Esta opción es del tipo $X = (K - S_N^{(1)})^+$. El poseedor (comprador a tiempo 0) tiene el derecho de vender la acción en el tiempo N al precio K obteniendo un beneficio de $(K - S_N^{(1)})^+$ dólares.

Definición 3.7. Diremos que una opción europea X es *alcanzable* si existe una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ tal que $X = V_N(\boldsymbol{\phi})$.

Un mercado se dice *completo* si toda opción europea es alcanzable.

Sea X una opción europea alcanzable usando una estrategia $\boldsymbol{\phi}$ admisible tal que $X = V_N(\boldsymbol{\phi})$. Llamamos $V_0(\boldsymbol{\phi})$ al precio inicial de la opción.

Si un inversor vende una opción X en el tiempo 0 y gana $V_0(\boldsymbol{\phi})$ dólares, el inversor puede invertir esos $V_0(\boldsymbol{\phi})$ dólares usando la estrategia $\boldsymbol{\phi}$ para que en el tiempo N tenga $V_N(\boldsymbol{\phi}) = X$ dólares. Así, aunque el inversor tenga que pagar al comprador X dólares en el tiempo N, el inversor está cubierto. Veamos si podemos determinar $V_0(\boldsymbol{\phi})$ sin conocer el valor de $\boldsymbol{\phi}$. Suponer que P^* es una "equivalent martingale measure". Sabemos que $\{(\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}), \mathcal{B}_n),\ 0 \leq n \leq N$ es una P^*-martingale, luego

$$E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})) = E^*(\overline{V}_0(\boldsymbol{\phi})) = \overline{V}_0(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) \text{ y } E^*(X/S_N^{(0)}) = V_0(\boldsymbol{\phi}).$$

Así, el precio a pagar es $E^*(X/S_N^{(0)})$. Notar que es necesario conocer $\boldsymbol{\phi}$, pero sí conocer la opción europea, el activo libre de riesgo y la "equivalent martingale measure". Por la propiedad de martingala:

$$E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) \mid \mathcal{B}_n) = \overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}),\ 0 \leq n \leq N.$$

esto es,

$$V_n(\boldsymbol{\phi}) = S_n^{(0)} E^*(V_N(\boldsymbol{\phi})/S_N^{(0)} \mid \mathcal{B}_n) = S_n^{(0)} E^*(X/S_N^{(0)} \mid \mathcal{B}_n)$$

Esto se puede interpretar como que si un inversor vende la opción en el tiempo n, el precio apropiado de venta es $V_n(\boldsymbol{\phi})$ dólares y este precio puede ser determinado como $S_n^{(0)} E^*(X/S_N^{(0)} \mid \mathcal{B}_n)$, por lo que para el precio en el tiempo n no es necesario conocer $\boldsymbol{\phi}$, sino solo P^*, X y el activo libre de riesgo.

Por último enunciamos el teorema

Teorema 3.2. Suponer que el mercado es viable. Entonces es completo si y solo si existe una única "equivalent martingale measure".

Demostración.

$\Longrightarrow$) Sea X una opción europea y $\boldsymbol{\phi}$ admisible con $X = V_N(\boldsymbol{\phi})$. Por el Lema 3.1, se tiene que

$$\frac{X}{S_N^0} = \overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) = V_0(\boldsymbol{\phi}) + \sum_{j=1}^{N} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j).$$

Suponer que P_1 y P_2 son dos "equivalent martingale measures". Por el corolario **??**, se tiene que

$$E_i(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})) = E_i(V_0(\boldsymbol{\phi})) = V_0(\boldsymbol{\phi}),\ i = 1, 2 \text{ puesto que } \mathcal{B}_0 = \{\emptyset, \Omega\}.$$

Concluimos pues que:

$$E_1\left(\frac{X}{S_N^0}\right) = E_2\left(\frac{X}{S_N^0}\right), \text{ para todo } X \geq 0,\ X : \mathcal{B}_N\text{-medible}.$$

Poniendo $X = \mathbb{1}_A S_N^0$, $A \in \mathcal{B}_N = \mathcal{B}$, se tiene que $P_1(A) = P_2(A)$ para todo $A \in \mathcal{B}$.

$\Longleftarrow$) Suponer por reducción al absurdo que el mercado no es completo. Definimos

$$\mathcal{H} = \{U_0 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{d} \phi_n^{(i)} \overline{d}_n^{(i)},\ U_0 \in \mathcal{B}_0,\ \phi_n^{(i)}, ..., \phi_n^{(d)} \text{ previsibles}\}.$$

En virtud del Lema 3.2, existe $(\phi_n^0, \leq\leq N)$, previsible tal que $\boldsymbol{\phi} = \{(\phi_n^{(0)}, ..., \phi_n^{(d)}),\ 0 \leq n \leq N\}$ es autofinanciadora. Puesto que $\overline{d}_n^0,\ 1 \leq n \leq N$, se tiene

$$U_0 + \sum_{n=1}^{N} \sum_{i=1}^{d} \phi_n^{(i)} \overline{d}_n^{(i)} = U_0 + \sum_{n=1}^{N} (\boldsymbol{\phi}_n, \overline{\boldsymbol{d}}_n)$$

y por el Lema 3.1 podemos escribir:

$$\mathcal{H} = \{\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) :\ V_0(\boldsymbol{\phi}) = U_0,\ \boldsymbol{\phi} :\ \text{autofinanciadora}\}.$$

Puesto que el mercado no es completo, existe una opción europea $X \geq 0$ tal que $V_N(\boldsymbol{\phi}) \neq X$ para todo $\boldsymbol{\phi}$ admisible. En tal caso $X/S_N^0 \notin \mathcal{H}$. De lo contrario existiría una $\boldsymbol{\phi}$ autofinanciadora tal que $X/S_N^0 = V_N(\boldsymbol{\phi})/S_N^0$, que nos lleva a una contradicción.

Como el mercado es viable, existe P^* "equivalent martingale measure". Consideramos el espacio $L_2(P^*)$ con producto interior $< X, Y >= E^*(XY)$. Entonces $\mathcal{H}$ es un subespacio vectorial cerrado, por ser Ω finito, de $L_2(P^*)$ con $\mathcal{H} \neq L_2(P^*)$ según acabamos de ver. Por tanto, existe $\mathcal{Y} \neq 0$, $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}^{\perp}$ (complemento ortogonal de $\mathcal{H}$).

Pongamos $\|\mathcal{Y}\| = \sup_{\omega\in\Omega} \big|\mathcal{Y}(\omega)\big| < \infty$ y definamos la probabilidad

$$P^{**}(\{\omega\}) = \left(1 + \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{2\|\mathcal{Y}\|}\right) P^*(\{\omega\}),\ \omega \in \Omega.$$

Notemos que:

1.
$$E^*(\mathcal{Y}) = 0\ (1 \in \mathcal{H} \text{ y } < 1, \mathcal{Y} >= 0 \text{ si y solo si } E^*(\mathcal{Y} \cdot 1) = E^*(\mathcal{Y}) = 0)$$

2.
$$1 + \frac{\mathcal{Y}(\omega)}{2\|\mathcal{Y}\|} > 0,\ \omega \in \Omega \text{ (de hecho: } \frac{\big|\mathcal{Y}(\omega)\big|}{2\|\mathcal{Y}\|} \leq \frac{1}{2},\ \omega \in \Omega).$$

3.
$$\sum_{\omega\in\Omega} P^{**}(\{\omega\}) = 1 + \frac{1}{2\|\mathcal{Y}\|} \sum_{\omega\in\Omega} \mathcal{Y}(\omega) P^*(\{\omega\}) = 1 + \frac{1}{2\|\mathcal{Y}\|} E^*\mathcal{Y} = 1.$$

Concluimos pues que P^{**} es una probabilidad con $P^{**} \equiv P^* \equiv P$.

Veamos que el proceso $(\overline{\boldsymbol{S}}_n, \leq n \leq N)$ es una P^{**}-martingala, en contradicción con la unicidad de P^*.

Para ello haremos uso de la Proposición 3.2 mostrando que:

Sea $\{(\phi_n^{(1)}, ..., \phi_n^{(d)}),\ 0 \leq n \leq N\}$ un proceso previsible arbitrario. Gracias al Lema 3.2, podemos adicionar la componente previsible $(\phi_n^{(0)},\ 0 \leq n \leq N)$ haciendo que $\boldsymbol{\phi} = (\phi_n^{(0)}, \phi_n^{(1)}, ..., \phi_n^{(d)})$ sea autofinanciadora con valor inicial $V_0 = 0$. Por tanto:

$$\overline{V}_n(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{j=1}^{n} (\boldsymbol{\phi}_j, \overline{\boldsymbol{d}}_j) \text{ y } \overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) \in \mathcal{H}.$$

Puesto que $\mathcal{Y} \in \mathcal{H}^{\perp}$, se tiene:

$$0 =< \overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}), \mathcal{Y} >= E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})\mathcal{Y}).$$

Usando la propiedad de martingala y la ortogonalidad, se tiene:

$$E^{**}(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi}) = E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})) + \frac{1}{2\|\mathcal{Y}\|} E^*(\overline{V}_N(\boldsymbol{\phi})\mathcal{Y}) = 0 + 0 = 0.$$

Como el proceso previsible es arbitrario, ello prueba que $(\overline{\boldsymbol{S}}_n,\ 0 \leq n \leq N)$ es una P^{**}-martingala. ■

Anexo

Teorema (Teorema de la Convergencia Monótona). Sean $(X_n)_{n\geq 1}, X, Y$ v.a. tales que $X_n \leq X_{n+1}, n \geq 1, \lim_n \uparrow X_n = X$ c.s. y $E(X_k) > -\infty$ para algún $k \geq 1$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow E(X_n) = E(X).$$

Teorema (Teorema de la Convergencia Dominada). Sean $(X_n)_{n\geq 1}, X, Y$ v.a. tales que $X_n \xrightarrow{c.s.} X$ y $|X_n| \leq Y$, $n \geq 1$, donde Y es integrable, entonces

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n) = E(X).$$

Teorema (Teorema de Radon-Nikodym). Sea $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ un espacio de probabilidad. Sean ν, P dos medidas tal que $\nu \ll P$. Entonces existe una única (casi seguramente) función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medible tal que

$$\nu(E) = \int_E f dP, \qquad \text{para todo } E \in \mathcal{B}.$$

A esta función f se le llama *función de densidad* y escribiremos $f = \dfrac{d\nu}{dP}$.

Definición. Sean dos espacios medibles $(E, \mathcal{E})$, $(F, \mathcal{F})$. Si una función $P(x, B) = P_1(B),\ x \in E,\ B \in \mathcal{F}$, donde P_1 es una probabilidad en $(F, \mathcal{F})$, entonces a la función $P(x, \cdot)$ se le llama *núcleo estocástico.*

Teorema (Teorema de desintegración de probabilidades). Sea Q una probabilidad en $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}^2)$. Denotamos $P_1(A) = Q(A \times \mathbb{R}), A \in \mathcal{B}$. Entonces existe un núcleo estocástico $P(x, \cdot)$ de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$Q(A \times B) = \int_A P(x, B) dP_1(x), \quad A,\ B \in \mathcal{B}. \tag{3.3}$$

Sean $P^1(x, \cdot),\ P^2(x, \cdot)$ dos núcleos estocásticos satisfaciendo (3.3), entonces

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid P^1(x, B) = P^2(x, B),\ B \in \mathcal{B}\}$$

cumple $\mathrm{P}_1(A) = 1$.

Definición. Sea $\emptyset \neq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Se dice que $\mathcal{B}$ es una π-*clase* si

$$A \cap B \in \mathcal{B}, \text{ si } A, B \in \Omega$$

Se dice que $\mathcal{B}$ es una λ-*clase* si:

1. $\Omega \in \mathcal{B}$.
2. $A \backslash B := A \cap \overline{B} \in \mathcal{B}$ si $A, B \in \mathcal{B}$ con $B \subseteq A$.
3. $\underset{n=1}{\overset{\infty}{}} \uparrow A_n \in \mathcal{B}$, si $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}$ es una colección creciente de conjuntos.

Teorema (π-λ de Dynkin.). Sea $\mathcal{D}$ una π-clase y $\mathcal{A}$ una λ-clase con $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{A}$. Entonces $\sigma(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{A}$.

Teorema (Desigualdad de Markov). Si X es una variable aleatoria no negativa tal que existe $E(X)$, se tiene

$$P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{E(X)}{\varepsilon}, \qquad \text{para todo } \varepsilon > 0$$

Bibliografía

[1] Sidney I. Resnick, *A Probability Path*, Cornell University, Ithaca. Editora Birkhäuser, Boston, 1999.

[2] Kai Lai Chung, *A Course in Probability Theory*, Academic press. 3ª edición. New York-London, 1974.

[3] Adams, M., Guillemin, V., *Measure Theory and Probability*. Editora Birkhäuser, Boston, 1996.

[4] John Billingsley, *Probability and Measure*, disponible en `https://www.colorado.edu/amath/sites/default/files/attached-files/billingsley.pdf`.

[5] Achim Klenke, *Probability Theory: A Comprehensive Course*, 2ª edición, 2006.

[6] Anna Downarowicz, *The First Fundamental Theorem of Asset Pricing*, 2010, disponible en `https://aefin.es/wp-content/uploads/2019/02/A21-2_953713.pdf`

[7] Fulvio Ortu, Abdus Salam, *Martingales in Finance*, disponible en `https://indico.ictp.it/event/8947/session/9/contribution/36/material/slides/0.pdf`.