

Categorías y teoría de nudos



Belén Cruces Mateo
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Enrique Artal Bartolo
27 de junio de 2022

Resumen

La teoría de nudos es una rama de la topología que estudia los nudos tal y como los conocemos coloquialmente pero de una forma matemática. Este campo tiene un gran interés debido a sus aplicaciones en las distintas ramas de la ciencia y su estudio mediante varios campos. Hoy en día se conocen muchas aplicaciones de esta teoría a ramas científicas como la química, la biología molecular, la física cuántica, la criptología, etc. Una de las aplicaciones más conocidas de la teoría de nudos es el estudio de la estructura del ADN.

La teoría de nudos tiene muchas aplicaciones, pero también muchos problemas abiertos. Su investigación se hace más complicada conforme aumentamos la complejidad de los nudos y enlaces con los que trabajemos, es por eso por lo que mi idea principal de este trabajo es hacer este estudio un poco más sencillo.

Para ello vamos a trabajar con dos ramas de las matemáticas a priori muy distintas, la topología, que utilizaremos para el estudio de los nudos y del conjunto de nudos construidos dentro de un espacio topológico con diferentes propiedades, y la segunda, la algebraica, que utilizaremos para estudiar unas estructuras específicas denominadas Λ -módulos lagrangianos.

Para relacionar estas dos ramas utilizaremos las categorías. La teoría de las categorías es una rama de las matemáticas que trata de axiomatizar diversas estructuras matemáticas en una sola. Es por eso que nos permitirá a partir de una estructura muy geométrica como son los nudos introducidos dentro de un espacio topológico complejo en el que es difícil trabajar, relacionarlos con unas diversas estructuras algebraicas que en principio más fáciles de manipular.

Esto último de forma técnica lo vamos a realizar en el trabajo construyendo una categoría de las marañas o *tangles* a la cual llamaremos TAN y otra categoría que contendrá a los Λ -módulos lagrangianos y que denominaremos como **Lagr**. Ambas categorías las relacionaremos mediante un funtor de manera que un elemento de TAN que en principio es más difícil de estudiar corresponderá con un elemento de **Lagr**, el cual tiene propiedades más sencillas. La descomposición de los tangles en tangles elementales nos permite construir este funtor de forma efectiva.

Por ejemplo uno de los útiles de nuestro trabajo va a ser saber si dos tangles son iguales, en principio comprender esto es complicado ya que puede existir una “maraña” de nudos que sea enrevesado diferenciar, es por eso por lo que mediante nuestro funtor vamos a tener dos objetos algebraicos en los que se va a hacer más sencillo chequear si estos conjuntos de nudos son iguales o no.

Abstract

Knot theory is a branch of topology that studies knots as we know them but in a mathematical way. This field is of great interest due to its applications in different branches of science and its study through various fields. Today there are many applications of this theory to scientific branches such as chemistry, molecular biology, quantum physics, cryptology, etc. One of the best known applications of knot theory is the study of the structure of DNA.

We already know that knot theory has many applications, but we do not know how to study it. Its investigation becomes more complicated as we increase the number of knots we work with, that is why the main idea of this work is to make this study a little simpler.

In order to achieve this we are going to work with two branches of mathematics very different in principle, the topology, which we will use for the study of knots and the set of knots constructed inside a topological space with different properties, and the second, the algebraic, which we will use to study some specific structures called Λ -modules lagrangian

To relate these two branches we will use the categories, the theory of categories is a mathematical study that tries to axiomatize several mathematical structures in a single one. That is why it will allow us, starting from a very geometric structure such as the knots introduced into a complex topological space in which it is difficult to work, to relate them to various algebraic structures that are in principle easier to manipulate.

This last objective in a technical way we are going to realize it constructing a category of the tangles to which we will call TAN and another category that will contain the Λ -modules lagrangian and that we will denominate as **Lagr**. Both categories will be related by means of a functor so that an element of TAN, which in principle is more difficult to study, will correspond to an element of **Lagr**, which has simpler properties.

For example one of the useful of our work is going to be to know if two tangles are equal, in principle understand this is complicated since it can exist a set of a lot of knots that is difficult to differentiate, that is why by means of our functor we are going to have two algebraic objects in which it is going to be simpler to check if these two tangles are equal or not.

Índice general

Resumen	iii
Abstract	v
Índice general	vii
1. Introducción	1
1.1. Categorías	1
1.2. Ejemplos de categorías y funtores	2
2. Categoría de tangles	5
2.1. Definición. Objetos y morfismos	5
2.2. Ejemplos fundamentales	6
3. Categoría de los Lagrangianos	7
3.1. Definición; objetos y morfismos	7
3.2. Ejemplos	9
4. Funtor entre Tangles y Lagrangianos:	11
4.1. Objetos	11
4.2. Morfismos	18
5. Bibliografía	25

Capítulo 1

Introducción

1.1. Categorías

La idea principal de este trabajo es crear una categoría de *tangles* (generalizaciones de nudos) la cual relacionemos mediante un funtor con una categoría más algebraica y en la que podamos obtener invariantes fáciles de calcular, como la categoría de los lagrangianos. Es por eso que tenemos que empezar el trabajo introduciendo lo que es una categoría y lo que es un funtor, basándonos en [1].

Definición 1.1. Una *categoría* \mathcal{A} consiste en un par $(\mathcal{O}, \text{Hom})$ donde:

- \mathcal{O} es una clase cuyos elementos los llamaremos *objetos*: A, B, C, \dots . Si \mathcal{O} es un conjunto diremos que la categoría es *pequeña*.
- $\text{Hom}(A, B)$ es un conjunto cuyos elementos se denominan *morfismos* de A a B (normalmente se representan como $f : A \rightarrow B$). A cada par (A, B) de objetos de \mathcal{O} se le asocia un morfismo f .

Se debe verificar:

- Para cada objeto $A \in \mathcal{O}$ existe un morfismo denominado *identidad*⁰ $\mathbf{1}_A : A \rightarrow A$.
- Para cada par de morfismos $f \in \text{Hom}(A, B)$ y $g \in \text{Hom}(B, C)$ existe la *composición* de morfismos, que es un morfismo que se denota $g \circ f \in \text{Hom}(A, C)$.
- La composición es asociativa, es decir, dados $f \in \text{Hom}(A, B)$, $g \in \text{Hom}(B, C)$ y $h \in \text{Hom}(C, D)$ se cumple, $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
- Dado $f \in \text{Hom}(A, B)$, se cumple $\mathbf{1}_B \circ f = f = f \circ \mathbf{1}_A$.
- Los conjuntos $\text{Hom}(A, B)$ son disjuntos dos a dos.

Definición 1.2. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} dos categorías, se define un funtor F de \mathcal{A} a \mathcal{B} como una función que asigna a cada objeto $A \in \mathcal{A}$ un objeto $F(A) \in \mathcal{B}$ y que asigna a cada morfismo $f : A \rightarrow B$ un morfismo $F(f) : F(A) \rightarrow F(B)$, de forma que:

- F preserva la composición: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$
- F preserva la identidad de los morfismos: $F(\mathbf{1}_A) = \mathbf{1}_{F(A)}$

1.2. Ejemplos de categorías y funtores

Los ejemplos principales de categorías sobre los que vamos a trabajar los introduciremos en los capítulos 2 y 3. Pero de momento vamos a introducir unos ejemplos más sencillos, los cuales nos ayudaran en el desarrollo del trabajo. Para la introducción de estos ejemplos primero daremos unas nociones básicas sin profundizar demasiado sobre grupos fundamentales:

Definición 1.3. Sea X un espacio topológico y $a, b \in X$. Un *camino* de punto inicial a y de punto final b es una aplicación continua $\gamma' : [0, 1] \rightarrow X$ que verifica $\gamma'(0) = a$ y $\gamma'(1) = b$. Llamaremos $\mathcal{B}_{a,b}$ al conjunto de caminos de X entre a y b . Un *lazo* con base en $a \in X$ es una aplicación continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ que verifica $\gamma(0) = \gamma(1) = a$. Llamaremos \mathcal{A}_a al conjunto de lazos de X con base a .

Definición 1.4. Dos caminos $\alpha, \beta : [0, 1] \rightarrow X$ con punto inicial a y punto final b son *homotópicos* si existe una aplicación continua $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ tal que $H(s, 0) = \alpha(s)$, $H(s, 1) = \beta(s)$ y además $H(0, t) = a$, $H(1, t) = b$. Se escribe $\alpha \sim \beta$. Si $a = b$, se dice que son *lazos homotópicos*.

Definición 1.5. Las *clases de homotopía* de caminos (o lazos) son las clases de equivalencia debido a la relación de ser homotópico. La clase de homotopía del camino o lazo γ se denota como $[\gamma]$.

Definición 1.6. Sean γ y β dos caminos tal que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b = \beta(0)$ y $\beta(1) = c$ defino la *yuxtaposición* de caminos como el camino $\gamma * \beta$ que viene dado por:

$$\gamma * \beta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t - 1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

El *camino inverso* de γ es γ^- definido como $\gamma^-(t) = \gamma(1 - t)$.

Definición 1.7. El *grupo fundamental* de X con base en a viene dado por $\pi_1(X, a) = (\mathcal{A}/ \sim, *)$, es el conjunto de clases de homotopía de lazos y la operación consiste en tomar la clase de homotopía de la juxtaposición de representantes.

Los detalles sobre la correcta definición de este grupo se pueden encontrar en [5]. Los grupos sobre los que trabajaremos serán principalmente grupos libres. Son grupos cuyos elementos son *palabras* en un conjunto de letras x_1, \dots, x_n (a veces un conjunto infinito de letras) y sus *inversos*, por ejemplo $x_1x_3x_2^{-1}, x_4^{-1}, x_2x_1^{-1}x_2^{-1}$. La operación es la concatenación de palabras, permitiendo solamente la cancelación sucesiva de parejas $x_i x_i^{-1}$ o $x_i^{-1} x_i$, $i = 1, \dots, n$. El elemento neutro es la *palabra vacía* \emptyset . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} x_1x_2x_1^{-1}x_3x_2x_2^{-1}x_4 &\sim x_1x_2x_1^{-1}x_3x_4 \\ x_1^{-1}x_2x_2^{-1}x_1 &\sim x_1^{-1}x_1 \sim \emptyset \end{aligned}$$

Este grupo que acabamos de definir lo denotaremos por $\mathbb{F}_n = \langle x_1, \dots, x_n : - \rangle$.

Ejemplo 1.8. Sea X un espacio topológico (localmente conexo por caminos). Definimos la categoría \mathcal{X} donde $\mathcal{O} = X$. Dados $x, y \in X$, definimos $\text{Hom}(x, y)$ como el conjunto de clases de homotopía en $\mathcal{B}_{a,b}$, y la composición de dos morfismos es la clase de homotopía de la juxtaposición de dos representantes. La identidad es la clase del lazo constante.

Ejemplo 1.9. Se denota como GRP la categoría que tiene como objetos todos los grupos y como morfismos todos los homomorfismos entre grupos.

Definimos un funtor F entre la categoría \mathcal{X} y la categoría GRP que asigna a cada $a \in X$ el grupo fundamental $\pi_1(X, a)$. Este funtor también relaciona a cada clase de homotopía de los caminos que empiezan en el punto a y terminan en el punto b con el homomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, a) &\longrightarrow \pi_1(X, b) \\ \gamma_a &\longmapsto \gamma^- * \gamma_a * \gamma \end{aligned}$$

donde $\gamma \in [\gamma]$ representa un camino de a hasta b y $\gamma_a \in \pi_1(X, a)$ de forma que $\gamma^- * \gamma_a * \gamma \in \pi_1(X, b)$.

Ejemplo 1.10. Se denota por TOP1 la categoría compuesta por los objetos de la forma (X, x) donde X es un espacio topológico y $x \in X$, y por los morfismos entre (X, x) y (Y, y) que son todas las funciones continuas $f : X \rightarrow Y$ tales que $f(x) = y$.

Otro ejemplo de funtor podría ser el funtor G que relaciona las categorías TOP1 y GRP. Este funtor lleva a cada objeto de la forma (X, x) al grupo fundamental $\pi_1(X, x)$. Por otra parte este funtor también relaciona cada morfismo de la categoría TOP1, es decir cada función continua $f : X \rightarrow Y$, con el homomorfismo siguiente:

$$\begin{aligned} \pi_1(X, x) &\longrightarrow \pi_1(Y, y) \\ \gamma_a &\longmapsto f(\gamma_a) \end{aligned}$$

En este trabajo vamos a trabajar también con el primer grupo de homología con coeficientes enteros de superficies conexas, que identificamos con el abelianizado del grupo fundamental.

Capítulo 2

Categoría de tangles

Los morfismos de la categoría de los tangles (TAN) son una generalización de los nudos y enlaces de los que [4] es una referencia clásica.

2.1. Definición. Objetos y morfismos

Sea D^2 un disco cerrado en \mathbb{R}^2 , a partir de ahora vamos a trabajar en el cilindro $D^2 \times [0, 1]$. Dentro de este cilindro podemos definir un camino (o caminos), el conjunto de estos caminos será una subvariedad orientada compacta de dimensión 1, que denotaremos por τ (homeomorfa a una unión disjunta de intervalos cerrados y circunferencias). Para una componente conexa homeomorfa a un intervalo, si p es su punto inicial y q su punto final, la frontera orientada del camino sera $q - p$.

Denotaremos por x_1, x_2, \dots, x_n puntos distribuidos uniformemente en la tapa inferior del cilindro $D^2 \times \{0\}$ y por $x'_1, x'_2, \dots, x'_{n'}$ puntos distribuidos uniformemente en la tapa superior $D^2 \times \{1\}$. Denotaremos también por $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ y $\varepsilon' = (\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots, \varepsilon'_{n'})$ a dos sucesiones donde $\varepsilon_i, \varepsilon_j \in \{-1, +1\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, n'\}$ con $n, n' \in \mathbb{N}$.

Si τ es una subvariedad orientada con extremos en los puntos anteriores, diremos que es compatibles con los signos si su frontera orientada es

$$\partial\tau = \sum_{j=1}^{n'} \varepsilon'_j \cdot (x'_j, 1) - \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \cdot (x_i, 0)$$

Ahora ya podemos definir lo que es un $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle:

Definición 2.1. Un $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle es el par $(D^2 \times [0, 1], \tau)$. Como siempre trabajaremos en el cilindro $D^2 \times [0, 1]$ denotaremos este $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle simplemente por τ la mayoría de las veces.

Para que este tangle exista se tiene que cumplir que que

$$\sum_{j=1}^{n'} \varepsilon'_j = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i.$$

Dos tangles τ_1 y τ_2 se dice que son *isótopos* si existe un auto-homomorfismo h entre los dos el cual deja $D^2 \times \{0, 1\}$ fijo y preserva su orientación. Se define como $T(\varepsilon, \varepsilon')$ el conjunto de las clases de isotopía de los $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangles, que por abuso de notación llamaremos tangles.

Una vez que tenemos claro lo que es un tangle podemos construir la categoría de los tangles de la siguiente forma:

La denotaremos como TAN y esta compuesta por:

- una clase de objetos que en nuestro caso será el grupo de secuencias finitas de ± 1 , es decir, $\mathcal{O} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{\pm 1\}^n$.

- un grupo de morfismos que relacionan dos objetos, en nuestro caso estos morfismos se tratan de $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangles es decir, $\text{Hom}(\varepsilon, \varepsilon') = T(\varepsilon, \varepsilon')$.

Para que cumpla la definición de categoría necesitamos un morfismo que actué como la identidad y definir la composición de morfismos:

- (T1) El morfismo identidad como el $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle trivial $(D^2 \times [0, 1], \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \times [0, 1])$ (no anudado).
- (T2) Sean τ_1 un $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle y τ_2 un $(\varepsilon', \varepsilon'')$ -tangle; la composición $\tau_1 \circ \tau_2$ es un $(\varepsilon, \varepsilon'')$ -tangle que obtenemos al yuxtaponer los dos cilindros y cambiando la escala hasta que esté dentro de $D^2 \times [0, 1]$, tal y como se puede ver en la figura 2.1.

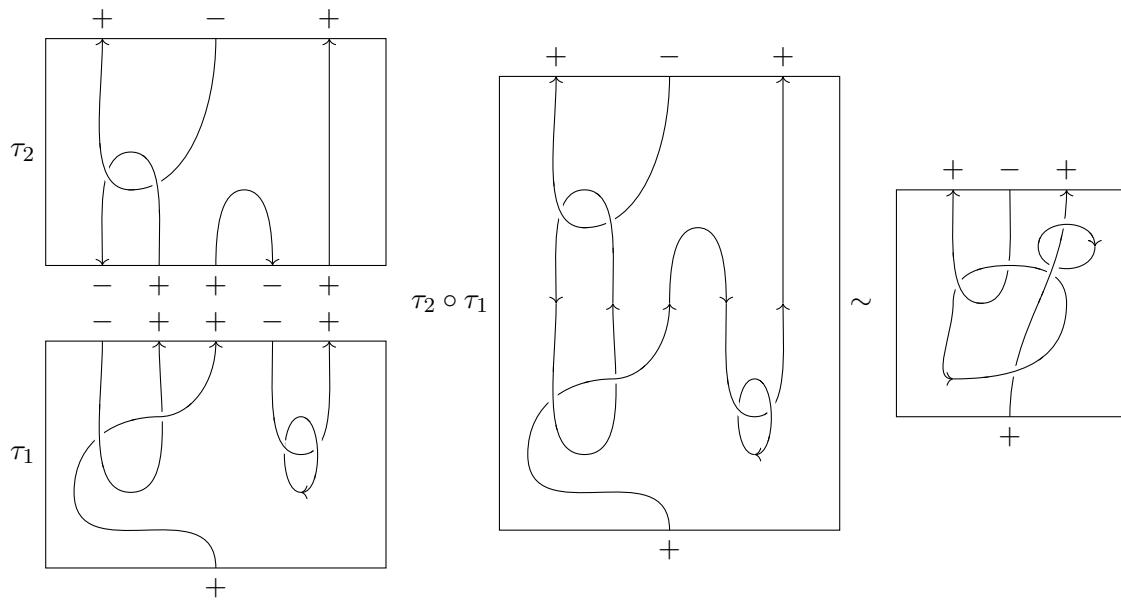


Figura 2.1: Composición de los tangles τ_1 y τ_2 , ejemplo de [3]

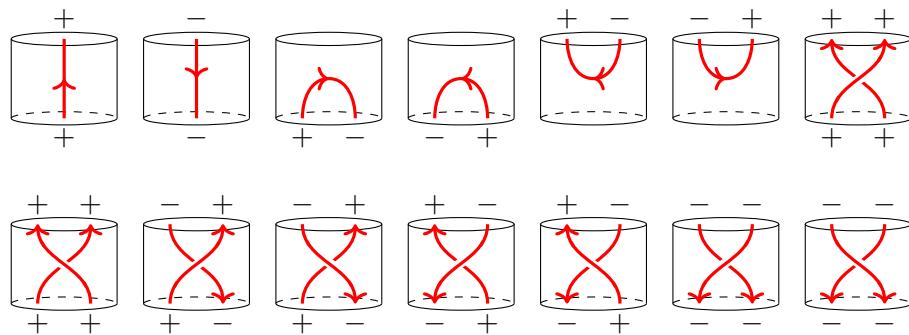


Figura 2.2: Tangles fundamentales

2.2. Ejemplos fundamentales

Existen unos determinados tangles denominados tangles fundamentales, a partir de los cuales mediante la composición y la yuxtaposición, podemos obtener todos los tangles , ver Figura 2.2.

Capítulo 3

Categoría de los Lagrangianos

3.1. Definición; objetos y morfismos

Para definir esta categoría primero vamos a necesitar unas definiciones previas:

Definición 3.1. Sea Λ un conjunto no vacío y $(+, \cdot)$ dos operaciones binarias internas en Λ . Se dice que Λ es un *anillo* si las operaciones cumplen las siguientes propiedades:

- 1) La operación $+$ es asociativa, tiene elemento neutro n y existe elemento simétrico con respecto a n .
- 2) La operación \cdot es asociativa y tiene elemento neutro m .
- 3) La operación \cdot es distributiva con respecto de $+$.

Por último se dice que el anillo es *comutativo* si la operación \cdot es comutativa y si tiene elemento neutro para \cdot diremos que *tiene unidad*.

Definición 3.2. Una *involución* es una función f cuya función inversa es ella misma, es decir $f(f(x)) = x$ para todo x en el dominio de f .

Algunos ejemplos de anillos con involuciones asociadas podrían ser:

- (a) $(\mathbb{K}, 1_{\mathbb{K}})$ donde \mathbb{K} es un cuerpo y $1_{\mathbb{K}}$ la aplicación identidad.
- (b) (\mathbb{C}, σ) donde \mathbb{C} es el anillo de los complejos y σ es la conjugación de los números complejos.

Observación 3.3. De ahora en adelante trabajaremos sobre el anillo comutativo $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, con la involución $\sigma : \Lambda \rightarrow \Lambda$ dada por $\sigma(t) = t^{-1}$.

Definición 3.4. Sea Λ un anillo definimos un Λ -módulo $(H, +, \cdot)$ donde $(H, +)$ es un grupo abeliano y la operación $\cdot : \Lambda \times H \rightarrow H$ cumple las mismas propiedades que el producto por un escalar en un espacio vectorial.

A diferencia de lo que ocurre con los espacios vectoriales, en un módulo, $\lambda \cdot h = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ ó $h = 0$ con $\lambda \in \Lambda$ y $h \in H$.

Definición 3.5. Una *forma anti-hermitiana* asociada a un Λ -módulo H es una función $\omega : H \times H \rightarrow \Lambda$ tal que, para todo $x, x', y \in H$ y para todo $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, se cumple que:

$$\begin{aligned}\omega(\lambda x + \lambda' x', y) &= \lambda \omega(x, y) + \lambda' \omega(x', y) \\ \omega(x, y) &= -\sigma(\omega(y, x))\end{aligned}$$

Esta forma se dice *no degenerada* si:

$$\omega(x, y) = 0 \text{ para todo } y \in H \Rightarrow x = 0$$

Definición 3.6. Se llama *Λ-módulo hermitiano* a un par $H := (H, \omega)$ con H un Λ -módulo finitamente generado y ω una forma anti-hermitiana no degenerada asociada a este Λ -módulo. Si al mismo Λ -módulo H le asociamos la forma opuesta $-\omega$ lo denotamos como $-H = (H, -\omega)$.

Definición 3.7. Sea A un submódulo de H , definimos el *anulador de A* con respecto a la forma anti-hermitiana w como:

$$\text{Ann}(A) = \{x \in H \mid w(x, a) = 0, \forall a \in A\}$$

También definimos el conjunto \overline{A} como:

$$\overline{A} = \{x \in H \mid \lambda x \in A, \text{ para un } 0 \neq \lambda \in \Lambda\}$$

Definición 3.8. Decimos que un submódulo A de H es *isótropo* si $A \subset \text{Ann}(A)$, en particular $A \subset \overline{A} \subset \text{Ann}(A)$.

Definición 3.9. Decimos que un submódulo A de H es *Lagrangiano* si $\overline{A} = \text{Ann}(A)$.

Supongamos que tenemos dos Λ -módulos hermitianos $H_1 = (H_1, w_1)$ y $H_2 = (H_2, w_2)$.

Definición 3.10. La suma directa de dos Λ -módulos hermitianos esta definida como:

$$H_1 \oplus H_2 = (H_1 \oplus H_2, w)$$

donde $w = w_1 \oplus w_2$ es la suma ortogonal que está definida como:

$$\begin{aligned} (H_1 \oplus H_2) \times (H_1 \oplus H_2) &\longrightarrow \Lambda \\ ((h_1, h_2), (k_1, k_2)) &\longmapsto w_1(h_1, k_1) + w_2(h_2, k_2) \end{aligned}$$

con $h_1, k_1 \in H_1$ y $h_2, k_2 \in H_2$.

Definición 3.11. Definimos una *relación lagrangiana* N entre H_1 y H_2 como un submódulo Lagrangiano de $(-H_1) \oplus H_2$, es decir $N \subset (-H_1) \oplus H_2$. Utilizamos la notación: $N : H_1 \Rightarrow H_2$.

Con las definiciones anteriores y con los conceptos que ya tenemos podemos crear la categoría de los Λ -módulos hermitianos a la cual denominaremos **Lagr**:

- La clase de objetos es la de los Λ -módulos hermitianos.
- Los morfismos són las relaciones lagrangianas entre dos Λ -módulos hermitianos.

Para que esto se trate de una categoría, como en el punto anterior, tenemos que definir un morfismo que actué como la identidad y también definir la composición de morfismos:

(L1) El morfismo que funciona que actúa como identidad es la diagonal de H ,

$$\text{diag}_H = \{h \oplus h \in (-H) \oplus H \mid h \in H\},$$

que es claramente un submódulo lagrangiano.

(L2) La composición de relaciones lagrangianas se define de la siguiente forma. Sean $N_1 : H_1 \Rightarrow H_2$ y $N_2 : H_2 \Rightarrow H_3$ dos relaciones lagrangianas, la composición será un submódulo de $(-H_1) \oplus H_3$ de la forma:

$$N_2 N_1 = \{h_1 \oplus h_3 \mid h_1 \oplus h_2 \in N_1 \wedge h_2 \oplus h_3 \in N_2 \text{ para algún } h_2 \in H_2\}$$

Para que se trate de categoría esta composición también tiene que ser una relación lagrangiana.

Lema 3.12. La composición de dos relaciones Lagrangianas es una relación Lagrangiana.

Para ver la demostración de este lema primero tenemos que introducir una definición y un lema.

Definición 3.13. Sea (H, ω) un Λ -módulo hermitiano y sea A un submódulo isotrópico de H tal que $A = \overline{A}$. Denotamos por $H|A$ el *módulo cociente* dados por $(\text{Ann}(A)/A, \omega_A)$ donde

$$\omega_A(x \bmod A, y \bmod A) = \omega(x, y)$$

El siguiente lema es sencillo y se omite la demostración.

Lema 3.14. $H|A$ es un Λ -modulo hermitiano. Si L es un submódulo lagrangiano de H , entonces $L|A$ es un submódulo lagrangiano de $H|A$.

Demostración del Lema 3.12. Dadas dos relaciones lagrangianas $N_1 : H_1 \Rightarrow H_2$ y $N_2 : H_2 \Rightarrow H_3$, consideramos el Λ -modulo hermitiano dado por $H = (-H_1) \oplus H_2 \oplus (-H_2) \oplus H_3$ y un submódulo isotrópico A de la siguiente manera:

$$A = 0 \oplus \text{diag}_{H_2} \oplus 0 = \{0 \oplus h \oplus h \oplus 0 \mid h \in H_2\}$$

Notar que $A = \overline{A}$. Como H_2 es un Λ -módulo lagrangiano por definición es no degenerado y tenemos que $\text{Ann}(A) = (-H_1) \oplus \text{diag}_{H_2} \oplus H_3$, por lo tanto $H|A = (-H_1) \oplus H_3$. Observar que, por definición de relación lagrangiana $N_2 N_1 = (N_1 \oplus N_2)|A$. Por último como $N_1 \oplus N_2$ es submódulo lagrangiano de H , por el lema 3.14 tenemos que $N_2 N_1$ es submódulo lagrangiano de $(-H_1) \oplus H_3$. \square

3.2. Ejemplos

Hasta ahora el único ejemplo que teníamos de relación lagrangiana era la diagonal de H definida anteriormente, en este apartado vamos a ver como podemos construir una relación lagrangiana entre dos Λ -módulos hermitianos cualesquiera. .

Definición 3.15. El *producto tensorial* entre dos Λ -módulos U y V sobre se define como sigue. Consideremos

- E es un Λ -módulo libre de base (u, v) con $u \in U$ y $v \in V$.
- F es un Λ -módulo libre de base
 - $(u_1 + u_2, v) - (u_1, v) - (u_2, v)$
 - $(u, v_1 + v_2) - (u, v_1) - (u, v_2)$
 - $(tu, v) - t(u, v)$
 - $(u, tv) - t(u, v)$

El *producto tensorial* $U \otimes V$ viene definido por el conjunto cociente E/F

De esta manera, si Q es el cuerpo de fracciones de λ , podemos considerar el producto tensorial entre un Λ -módulo hermitiano H_1 y un cuerpo Q , que será un $\mathbb{Q}(t)$ -espacio vectorial.

Antes de continuar necesitamos introducir las definiciones de *grafo de un homomorfismo* y *grafo restrictivo*

Definición 3.16. Se dice *grafo* de un homomorfismo $f : A \rightarrow B$ al conjunto:

$$\Gamma_f = \{a \oplus f(a) \in A\} \subset A \oplus B$$

Si $\varphi : H_1 \otimes Q \rightarrow H_2 \otimes Q$ es una aplicación Q -lineal, el *grafo restrictivo* es:

$$\Gamma_f^0 = \Gamma_f \cap (H_1 \oplus H_2) = \{h \oplus \varphi(h) \mid h \in H_1, \varphi(h) \in H_2\} \subset H_1 \oplus H_2$$

Ya podemos pues construir una relación lagrangiana diferente a la diagonal con el siguiente lema:

Lema 3.17. Dado un isomorfismo unitario $\varphi : H_1 \otimes Q \longrightarrow H_2 \otimes Q$, el grafo restrictivo Γ_f^0 define una relación lagrangiana entre H_1 y H_2 .

Demostración. Denotamos por $\omega_1, \omega_2, \omega$ las formas anti hermitianas asociadas a los Λ -módulos lagrangianos $H_1, H_2, (-H_1) \oplus H_2$ respectivamente. Elegimos $h, h' \in H_1$ tales que $\varphi(h), \varphi(h') \in H_2$. Entonces:

$$\omega(h \oplus \varphi(h), h' \oplus \varphi(h')) = -\omega_1(h, h') + \omega_2(\varphi(h), \varphi(h')) = 0$$

Ya que φ es un isomorfismo unitario. Por lo tanto Γ_f^0 es isótropo según la definición 3.8, y como consecuencia $\overline{\Gamma_f^0} \subset \text{Ann}(\Gamma_f^0)$ para demostrar que es lagrangiano necesitamos el otro contenido. Para ello tomamos $x = x_1 \oplus x_2 \in \text{Ann}(\Gamma_f^0) \subset (-H_1) \oplus H_2$. Para todo $h \in H_1$ tal que $\varphi(h) \in H_2$ tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = \omega(x, h \oplus \varphi(h)) &= -\omega_1(x_1, h) + \omega_2(x_2, \varphi(h)) = \\ &\quad -\omega_2(\varphi(x_1), \varphi(h)) + \omega_2(x_2, \varphi(h)) = \omega_2(x_2 - \varphi(x_1), \varphi(h)) \end{aligned}$$

Por lo tanto si el elemento $x_2 - \varphi(x_1)$ anula a los elementos del tipo $\varphi(h)$, también anula a su clausura y como sabemos que $H_2 \subset \{\varphi(h) \mid h \in H_1, \varphi(h) \in H_2\}$, entonces $\omega_2(x_2 - \varphi(x_1), h_2) = 0$ para todo $h_2 \in H_2$. Como ω_2 es no-degenerada tenemos que $x_2 = \varphi(x_1)$, lo que implica que $x = x_1 \oplus \varphi(x_1) \in \Gamma_f^0$. Así tenemos el contenido que buscábamos y por lo tanto la igualdad: $\overline{\Gamma_f^0} = \text{Ann}(\Gamma_f^0)$, que por la definición 3.9 sabemos que Γ_f^0 es submódulo lagrangiano. \square

Capítulo 4

Funtor entre Tangles y Lagrangianos:

En este capítulo vamos a describir un funtor entre la categoría de los tangles y la categoría de los lagrangianos, creado por Cimasoni y Turaev en [2, 3]. Primero explicamos cómo actúa este funtor en los objetos de cada una de las categorías y después en los morfismos.

4.1. Objetos

Antes de comenzar vamos a recordar que en la sección 2 habíamos definido un $(\varepsilon, \varepsilon')$ -tangle como el par $(D^2 \times [0, 1], \tau)$, durante esta sección vamos a trabajar en cierta manera dentro de una de las tapas del cilindro (mejor dicho dentro de D_ε) con los puntos x_1, x_2, \dots, x_n definidos en este conjunto.

Definición 4.1. Un *entorno tubular* en una curva \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 es un *tubo* que se construye alrededor de esta y que es homeomorfo a $S^1 \times \mathcal{C}$; un *entorno tubular* de un punto en \mathbb{R}^2 es un disco cerrado alrededor de dicho punto.

Definición 4.2. La superficie D_ε es

$$D_\varepsilon = \begin{cases} D^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, \dots, x_n\}) & \text{si } l_\varepsilon \neq 0; \\ S^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, \dots, x_n\}) & \text{si } l_\varepsilon = 0, \end{cases}$$

donde $\mathcal{N}(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})$ es un entorno tubular de los puntos x_1, x_2, \dots, x_n , S^2 la 2-esfera en $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ y l_ε es la suma de todos los elementos de la secuencia ε .

A partir de ahora llamaremos x_i (a parte de al punto) al lazo que rodea x_i y que tiene como punto base a , siendo a un punto cualquiera de la superficie D_ε . Es por eso por lo que en esta sección relacionaremos cada uno de los signos de la secuencia ε con la orientación de este lazo. Si el elemento i de la secuencia es $+1$ el lazo x_i tiene sentido positivo (antihorario) y si, en cambio, es -1 , el lazo x_i tiene sentido negativo (horario). También tener en cuenta que durante esta sección x_i^{-1} denotara al lazo recorrido en sentido contrario a x_i .

Como la superficie D_ε es arcoconexa tenemos que para cualesquiera dos puntos a, b los grupos fundamentales $\pi(D_\varepsilon, a)$ y $\pi(D_\varepsilon, b)$ van a ser isomorfos, es decir no importa que punto tomemos como bases. Tenemos $\pi(D_\varepsilon) = \langle x_1, \dots, x_n : - \rangle$ si $l_\varepsilon \neq 0$ y $\pi(D_\varepsilon) = \langle x_1, \dots, x_{n-1} : - \rangle$ si $l_\varepsilon = 0$.

Para continuar nuestro estudio necesitamos construir una nueva superficie a partir de D_ε , denotada por \hat{D}_ε . Se trata de la cubierta asociada al morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \pi(D_\varepsilon) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x_1^{a_1} x_2^{a_2} \cdots x_n^{a_n} &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i \end{aligned}$$

con $a_i \in \mathbb{Z}$ para todo $i \in \mathbb{N}$, es decir, el morfismo que envía cada x_i a 1. Vamos a describir geométricamente como en la Figura 4.1. Este espacio \hat{D}_ε se construye como una unión de *pisos de nivel* $m \in \mathbb{Z}$.

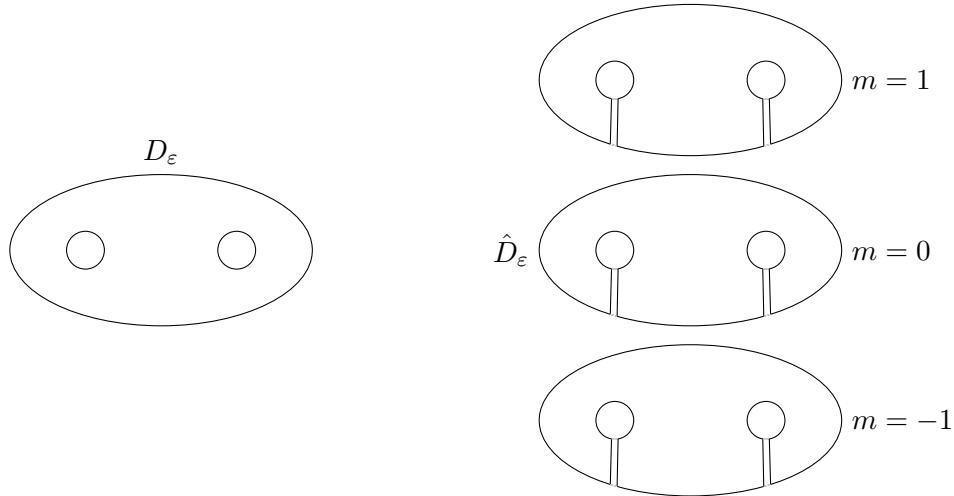


Figura 4.1: Construcción de \hat{D}_ε

Cada piso se pega con sus adyacentes de la siguiente forma:

- Si $\varepsilon_i = +1$ entonces $i_m \simeq i'_{m+1}$ y $i'_m \simeq i_{m-1}$ donde i_m es el corte izquierdo que se encuentra en el punto x_i y en el piso m y donde i'_m es el corte derecho que se encuentra en el punto x_i y en el piso m .
- Si $\varepsilon_i = -1$ entonces $i_m \simeq i'_{m-1}$ y $i'_m \simeq i_{m+1}$ donde i_m es el corte izquierdo que se encuentra en el punto x_i y en el piso m y donde i'_m es el corte derecho que se encuentra en el punto x_i y en el piso m .

El núcleo $K := \ker \varphi$ es el grupo fundamental $\pi(\hat{D}_\varepsilon)$; nos podemos hacer una idea con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.3. Sea $n = 2$ y $\varepsilon = (+1, +1)$ cogemos el camino $y = x_1 x_2^{-1} \in K$ y lo *dibujamos* en la nueva superficie \hat{D}_ε :

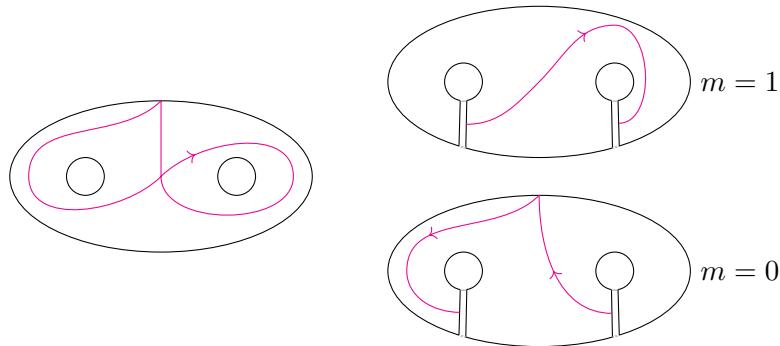


Figura 4.2

Podemos ver que el camino que hemos dibujado también pertenece al grupo fundamental de $\pi(\hat{D}_\varepsilon)$ (empieza y acaba en el mismo punto fijo y el mismo nivel) De hecho este elemento engendra este grupo junto con todos los elementos $x_1^k \cdot y \cdot x_1^{-k}$ (grupo libre con infinitos generadores parametrizados por $k \in \mathbb{Z}$).

Observación 4.4. Se puede escribir de una forma más general el grupo $\pi(\hat{D}_\varepsilon)$ libremente generado por $x_1^k y_i x_1^{-k}$ con $y_i = x_i x_{i+1}^{-1}$, $i \in \{1, \dots, n-1\}$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Definición 4.5. Sea G un grupo, su *subgrupo conmutador* $[G, G]$ es el grupo engendrado por los elementos de la forma $[g, h] := g^{-1}h^{-1}gh$ con $g, h \in G$. Para un grupo G se define su grupo *abelianizado* como $G^{ab} := G/[G, G]$ donde $[G, G]$ es el subgrupo conmutador de G .

Una vez que hemos construido el grupo $\pi(\hat{D}_\varepsilon)$ vamos a abelianizarlo y los denominaremos como $\pi(\hat{D}_\varepsilon)^{ab} := H_1(\hat{D}_\varepsilon)$. Dados y_i, k como en la Observación 4.4, si y sea $\Lambda := \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, definimos la aplicación:

$$\begin{aligned} \Lambda \times H_1(\hat{D}_\varepsilon) &\longrightarrow H_1(\hat{D}_\varepsilon) \\ (t^k, y_i) &\longmapsto t^k y_i = x_m^k y_i x_m^{-k} \end{aligned} \tag{4.1}$$

Es decir, lo que hace esta aplicación es desplazar el camino y_i k pisos. La aplicación es la misma para cualquier elección de $m \in \{1, \dots, n\}$.

Es fácil comprobar que $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$ es un Λ -módulo libre de base y_1, \dots, y_{n-1} , es decir $H_1(\hat{D}_\varepsilon; \mathbb{Z}) = \Lambda \langle [y_1], \dots, [y_{n-1}] \rangle$ donde $t^k [y_i] = [x_a^k y_i x_a^{-k}]$ e $[y_i]$ representa la clase de y_i en el abelianizado.

En una superficie orientada S podemos definir el número de intersección en homología que resulta ser una aplicación bilineal antisimétrica en \mathbb{Z} ; dados $x, y \in H_1(S; \mathbb{Z})$, representados como ciclos que se cortan transversalmente, $\langle x, y \rangle$ es la suma del número de puntos de intersección de x e y con signo. El signo de un punto de intersección es positivo si el giro *corto* de x a y es antihorario (negativo en caso contrario). La definición se extiende por bilinealidad. Es inmediato ver que $\langle y, x \rangle = -\langle x, y \rangle$, por lo que $\langle x, x \rangle = 0$. Además $\langle t^k x, t^k y \rangle = \langle x, y \rangle$.

Una vez hemos definido todos estos conjuntos definimos la aplicación w_ε de la forma:

$$\begin{aligned} \omega_\varepsilon : H_1(\hat{D}_\varepsilon) \times H_1(\hat{D}_\varepsilon) &\longrightarrow \Lambda \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k x, y \rangle t^{-k} \end{aligned} \tag{4.2}$$

La aplicación está bien definida ya que al ser los ciclos compactos, las sumas de la definición son siempre finitas. Esta aplicación sera la forma anti-hermitiana asociada al Λ -módulo $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$. Para comprobar esto necesitamos comprobar las condiciones de la definición 3.5:

- $\omega_\varepsilon(\lambda x + \lambda x', y) = \lambda \omega_\varepsilon(x, y) + \lambda' \omega_\varepsilon(x', y)$, se puede demostrar fácilmente por las propiedades de intersección de caminos.
- La segunda condición que tenemos que comprobar es $\omega_\varepsilon(x, y) = -\sigma(\omega_\varepsilon(y, x))$:

$$\omega_\varepsilon(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k x, y \rangle t^{-k} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle y, t^k x \rangle t^{-k} = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^{-k} y, x \rangle t^{-k}$$

Renombrando $l = -k$ y utilizando la aplicación σ definida en 3.3, tenemos:

$$\omega_\varepsilon(x, y) = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^l y, x \rangle t^l = - \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^l y, x \rangle \sigma(t^{-l}) = -\sigma \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^l y, x \rangle t^{-l} \right) = -\sigma(\omega_\varepsilon(y, x))$$

- Por ultimo también tenemos que comprobar que esta forma es no degenerada:

$$\omega_\varepsilon(x, y) = 0 \quad \forall y \in H_1(\hat{D}_\varepsilon) \Rightarrow \langle t^k x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in H_1(\hat{D}_\varepsilon) \Rightarrow t^k x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Para saber cuanto vale la aplicación ω_ε para cualquier par (x, y) , tendremos que hallar cuanto vale esta aplicación para los elementos de la base, es por ello por lo que queremos saber cuanto vale $\omega_\varepsilon(t^u y_i, t^v y_j)$. Para ello lo vamos a analizar los casos en los que $n = 2$ y $n = 3$:

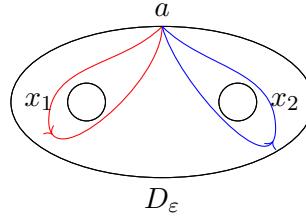


Figura 4.3

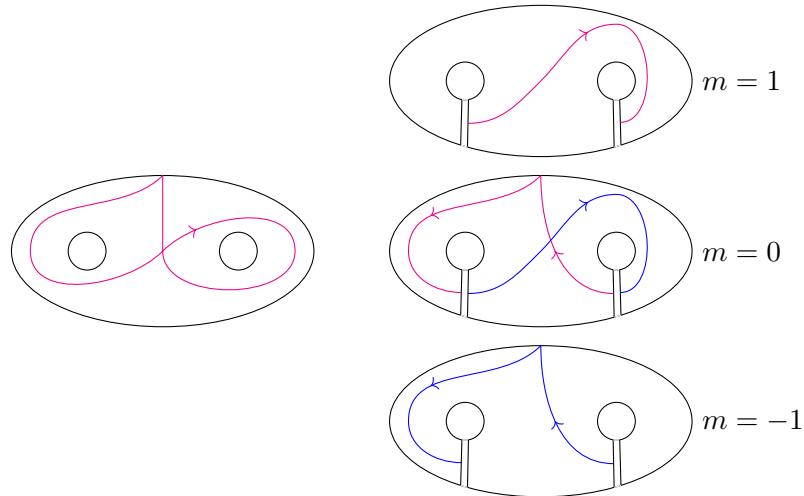
Caso $n = 2$ y $\varepsilon = (+1, +1)$

Es el caso más sencillo de todos, tenemos en D_ε dos lazos x_1 y x_2 que rodean a cada uno de los puntos y pasan por el punto fijo a como en la Figura 4.3.

En este caso y tal y como hemos construido el grupo $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$ de forma general, tenemos que $H_1(\hat{D}_\varepsilon) = \Lambda\langle y \rangle$ siendo $y = x_1x_2^{-1}$. Recordemos que queremos saber cuánto vale la aplicación 4.2. Como también sabemos que $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$ está generado por y , la forma ω_ε viene definida por la matriz 1×1 :

$$A_{\omega_\varepsilon} = (\omega_\varepsilon(y, y)) \quad (4.3)$$

que será de la forma $\omega_\varepsilon(y, y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle t^k y, y \rangle t^{-k}$. Para saber cuánto es este valor y el número de intersecciones entre $t^k y$ e y dibujamos en \hat{D}_ε los caminos y e $t^{-1}y$ tal y como muestra la Figura 4.4

Figura 4.4: Caminos y e $t^{-1}y$ en los espacios D_ε y \hat{D}_ε

Así, de aquí deducimos que:

$$\langle t^{-1}y, y \rangle = 1$$

Por tanto

$$\begin{aligned} 1 &= \langle t^{-1}y, y \rangle = \langle t^{-1}y, t^0y \rangle = \langle t^{-1+1}y, t^{0+1}y \rangle = \langle y, ty \rangle \\ -1 &= \langle ty, y \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle t^n y, y \rangle = 0 \ \forall n \text{ con } |n| \geq 2$,

$$\omega_\varepsilon(y, y) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle t^k y, y \rangle t^{-k} = \langle t^{-1}y, y \rangle t^1 + \langle y, y \rangle t^0 + \langle ty, y \rangle t^{-1} = t - t^{-1}$$

Caso $n = 3$ y $\varepsilon = (+1, +1, +1)$

En este caso $H_1(\hat{D}_\varepsilon) = \Lambda\langle y_1, y_2 \rangle$, ya que como $n=3$ tenemos que $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$ tiene rango dos y por lo tanto los generadores los cuales serán $y_1 = x_1 x_2^{-1}$ y $y_2 = x_2 x_3^{-1}$. La matriz correspondiente a ω_ε será de la forma:

$$A_{\omega_\varepsilon} = \begin{pmatrix} \omega_\varepsilon(y_1, y_1) & \omega_\varepsilon(y_1, y_2) \\ \omega_\varepsilon(y_2, y_1) & \omega_\varepsilon(y_2, y_2) \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Para calcular cada uno de los elementos de la matriz vamos a dibujar los caminos y_1 , $t^{-1}y_1$, y_2 y $t^{-1}y_2$ en \hat{D}_ε y vemos de que manera intersecan:

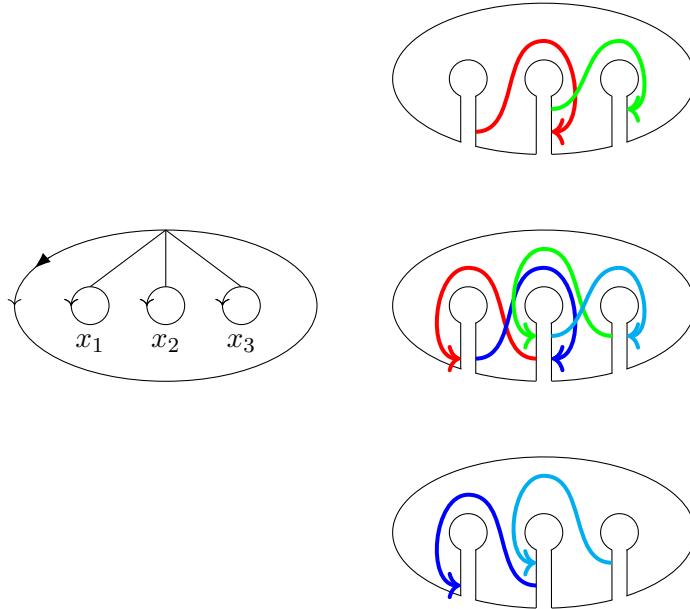


Figura 4.5: Caminos y_1 , $t^{-1} \cdot y_1$, y_2 y $t^{-1} \cdot y_2$ en los espacios D_ε y \hat{D}_ε

De la Figura 4.5 podemos deducir lo siguiente:

$$\begin{aligned} \langle y_1, t^{-1} \cdot y_1 \rangle &= -1 \\ \langle y_1, y_2 \rangle &= 1 \\ \langle y_1, t^{-1} \cdot y_2 \rangle &= 0 \\ \langle t^{-1} \cdot y_1, y_2 \rangle &= -1 \\ \langle y_2, t^{-1} \cdot y_2 \rangle &= -1 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} -1 &= \langle y_1, t^{-1} y_1 \rangle = \langle t^{0+1} y_1, t^{-1+1} y_1 \rangle = \langle t y_1, y_1 \rangle ; 1 = \langle y_1, t y_1 \rangle. \\ 1 &= \langle y_1, y_2 \rangle ; -1 = \langle y_2, y_1 \rangle. \\ 0 &= \langle y_1, t^{-1} y_2 \rangle = \langle t^{0+1} y_1, t^{-1+1} y_0 \rangle = \langle t y_1, y_2 \rangle ; 0 = \langle y_2, t y_1 \rangle. \\ -1 &= \langle t^{-1} y_1, y_2 \rangle = \langle t^{-1+1} y_1, t^{0+1} y_2 \rangle = \langle y_1, t y_2 \rangle ; 1 = \langle t y_2, y_1 \rangle. \\ -1 &= \langle y_2, t^{-1} y_2 \rangle = \langle t^{0+1} y_2, t^{-1+1} y_2 \rangle = \langle t y_2, y_2 \rangle ; 1 = \langle y_2, t y_2 \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto sabiendo que $\langle t^n y_i, y_i \rangle = 0 \ \forall n \text{ con } |n| \geq 2$ aplicando la fórmula podemos obtener

cada uno de los elementos de la matriz (4.4).

$$\begin{aligned}\omega_\varepsilon(y_1, y_1) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k \cdot y_1, y_1 \rangle t^{-k} = t - t^{-1} \\ \omega_\varepsilon(y_1, y_2) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k \cdot y_1, y_2 \rangle t^{-k} = 1 - t \\ \omega_\varepsilon(y_2, y_1) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k \cdot y_2, y_1 \rangle t^{-k} = t^{-1} - 1 \\ \omega_\varepsilon(y_2, y_2) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle t^k \cdot y_2, y_2 \rangle t^{-k} = t - t^{-1}\end{aligned}$$

Después de ver como funciona ω_ε para estos dos casos podemos hacerlo para todos los casos en los que $n=2$ y de $n=3$ (para cuando cambia ε). Aquí únicamente voy a poner los resultados de cada uno de los casos:

Caso $n = 2$ y $\varepsilon = (+1, -1)$

La matriz es de la misma forma que en (4.3) y en este caso

$$A_{\omega_\varepsilon} = \emptyset$$

En este caso como $l_\varepsilon = 0$ por definición consideramos D_ε como una esfera a la cual le quitamos el entorno tubular de dos puntos, es por eso por lo que de esta forma $D_\varepsilon \simeq D$ donde D es el disco en \mathbb{R}^2 . Por lo tanto esto se traduce en que $\pi(D_\varepsilon) = \mathbb{Z}$, esto se traduce en que $\pi(\hat{D}_\varepsilon) = 1$ y por tanto $H_1(\hat{D}_\varepsilon) = 0$, por lo que la aplicación es la nula.

Caso $n = 3$ y $\varepsilon = (+1, +1, -1)$

$$A_{\omega_\varepsilon} = \begin{pmatrix} t - t^{-1} & -t + 1 \\ -1 + t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Caso $n = 3$ y $\varepsilon = (+1, -1, +1)$

$$A_{\omega_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -t - 1 \\ 1 + t^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Caso $n = 3$ y $\varepsilon = (+1, -1, -1)$

$$A_{\omega_\varepsilon} = \begin{pmatrix} 0 & -t - 1 \\ 1 + t^{-1} & t - t^{-1} \end{pmatrix}$$

Fórmula general de A_{ω_ε}

La matriz A_{ω_ε} será de la forma:

$$A_{\omega_\varepsilon} = \begin{pmatrix} \omega_\varepsilon(y_1, y_1) & \omega_\varepsilon(y_1, y_2) & \cdots & \omega_\varepsilon(y_1, y_n) \\ \omega_\varepsilon(y_2, y_1) & \omega_\varepsilon(y_2, y_2) & \cdots & \omega_\varepsilon(y_2, y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_\varepsilon(y_n, y_1) & \omega_\varepsilon(y_n, y_2) & \cdots & \omega_\varepsilon(y_n, y_n) \end{pmatrix}$$

con $y_i = x_i x_{i+1}^{-1}$ y donde x_i corresponde al lazo que rodea el punto i y en el sentido que indica ε_i .

Primero vamos a hallar como serían los elementos de la diagonal, es decir los elementos de la forma $\omega_\varepsilon(y_i, y_i)$. Como y_i solo depende de x_i y de x_{i+1} nos fijamos en los casos que hemos hecho anteriormente de dos puntos y nos damos cuenta que:

- Si $\varepsilon_i = +1$ y $\varepsilon_{i+1} = +1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_i) = t - t^{-1}$
- Si $\varepsilon_i = +1$ y $\varepsilon_{i+1} = -1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_i) = 0$

También podemos ver fácilmente que si tenemos la sucesión ε con los signos opuestos a los anteriores el valor de ω_ε es exactamente el mismo ya que las intersecciones serán de la misma forma (AMBOS caminos cambian de sentido). Por lo tanto:

- Si $\varepsilon_i = -1$ y $\varepsilon_{i+1} = -1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_i) = t - t^{-1}$
- Si $\varepsilon_i = -1$ y $\varepsilon_{i+1} = +1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_i) = 0$

Podemos entonces sacar una formula general para los elementos de la diagonal de nuestra matriz:

$$\omega_\varepsilon(y_i, y_i) = \begin{cases} t - t^{-1} & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}; \\ 0 & \text{si } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}, \end{cases}$$

Una vez tenemos los elementos de la diagonal ahora vamos a hallar los elementos de la forma $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1})$ y de la forma $\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i)$, para ello vamos a fijarnos en los casos que hemos hecho de tres puntos:

- Si $\varepsilon_i = +1, \varepsilon_{i+1} = +1$ y $\varepsilon_{i+2} = +1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1}) = -t + 1$ y $\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i) = -1 + t^{-1}$
- Si $\varepsilon_i = +1, \varepsilon_{i+1} = -1$ y $\varepsilon_{i+2} = +1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1}) = -t - 1$ y $\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i) = 1 + t^{-1}$
- Si $\varepsilon_i = +1, \varepsilon_{i+1} = +1$ y $\varepsilon_{i+2} = -1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1}) = -t + 1$ y $\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i) = -1 + t^{-1}$
- Si $\varepsilon_i = +1, \varepsilon_{i+1} = -1$ y $\varepsilon_{i+2} = -1$ entonces $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1}) = -t - 1$ y $\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i) = 1 + t^{-1}$

Y también como pasaba en los elementos de la diagonal si en cada uno de los casos cambio cada uno de los ε 's por sus contrarios ω_ε quedaría de la misma forma.

Si nos fijamos en los casos, nos podemos dar cuenta que la expresión de ω_ε solo depende de ε_i y de ε_{i+1} , por lo tanto podemos sacar las siguientes formulas generales:

$$\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+1}) = \begin{cases} -t - 1 & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}; \\ -t + 1 & \text{si } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}, \end{cases}$$

$$\omega_\varepsilon(y_{i+1}, y_i) = \begin{cases} -1 + t^{-1} & \text{si } \varepsilon_i = \varepsilon_{i+1}; \\ 1 + t^{-1} & \text{si } \varepsilon_i = -\varepsilon_{i+1}, \end{cases}$$

Y por ultimo solo nos quedaría hallar los elementos fuera de la tridiagonal pero nos podemos dar cuenta fácilmente que todos estos elementos serán 0, ya que $y_i = x_i x_{i+1}^{-1}$ y $y_{i+n} = x_{i+n} x_{i+n+1}^{-1}$ con $n \geq 2$ son caminos disjuntos y por lo tanto $\omega_\varepsilon(y_{i+n}, y_i) = 0$ para $n \geq 2$ (también $\omega_\varepsilon(y_i, y_{i+n}) = 0$ para $n \geq 2$)

Conclusión de 4.1

En resumen con esta aplicación hemos hallado como es la forma anti hermitiana asociada a $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$. Así hemos relacionado cada objeto de la categoría de los tangles (una sucesión ε) con un objeto de la categoría de los lagrangianos (un Λ -módulo hermitiano) compuesto por un Λ -módulo que en nuestro caso será $H_1(\hat{D}_\varepsilon)$ y una forma anti hermitiana asociada que es la función que acabamos de crear ω_ε .

$$\varepsilon \longmapsto (H_1(\hat{D}_\varepsilon), \omega_\varepsilon)$$

4.2. Morfismos

Nuestro objetivo en este apartado es hallar cual sería la imagen mediante el funtor de un tangle τ , esta imagen tiene que ser un morfismo en la categoría de los lagrangianos y por tanto tiene que ser una relación lagrangiana entre dos Λ -módulos hermitianos.

Es decir buscamos como podemos obtener una relación lagrangiana entre $(H_1(D_\varepsilon), \omega_\varepsilon)$ y $(H_1(D'_\varepsilon), \omega_{\varepsilon'})$ donde D_ε corresponde a la tapa de abajo de nuestro cilindro y D'_ε a la tapa de arriba.

Para hallar esta relación lagrangiana vamos ir construyendo varios espacios, el primero de ellos va a ser X_τ , el cual será un espacio topológico que estará compuesto por el cilindro $D^2 \times [0, 1]$ menos el entorno tubular de nuestros caminos que van de D_ε a D'_ε y que componen el tangle τ . Por lo tanto mediante la inclusión podemos:

$$D_\varepsilon, D'_{\varepsilon'} \hookrightarrow X_\tau$$

Recordemos que en el apartado anterior a partir de D_ε habíamos construido los grupos $\pi_1(D_\varepsilon)$, $H_1(\hat{D}_\varepsilon; \mathbb{Z})$, $\pi_1(\hat{D}'_\varepsilon)$ y $H_1(\hat{D}'_\varepsilon; \mathbb{Z})$. Vamos entonces a construir unos espacios equivalentes para X_τ . El grupo fundamental $\pi_1(X_\tau)$ es difícil de calcular pero está generado por meridianos de los *tubos*; las condiciones de compatibilidad de las orientaciones implican que es posible definir una morfismo $\varphi_\tau : \pi_1(X_\tau) \rightarrow \mathbb{Z}$ que es compatible con los morfismos que definen las cubiertas $\hat{D}_\varepsilon, \hat{D}'_\varepsilon$.

Se construye de forma similar la cubierta \hat{X}_τ , con inclusiones $\hat{D}_\varepsilon, \hat{D}'_\varepsilon \hookrightarrow \hat{X}_\tau$. También de igual manera que se cumplía que $\ker \varphi = \pi_1(\hat{D}_\varepsilon)$ en el apartado anterior, en este apartado $\ker \varphi_\tau = \pi_1(\hat{X}_\tau)$, aunque la justificación de esta igualdad es más complicada y se escapa de los objetivos del trabajo. Por último abelianizamos el núcleo de esta aplicación y obtenemos el último de nuestros espacios: $\pi_1(\hat{X}_\tau)^{ab} := H_1(\hat{X}_\tau)$.

Una vez que hemos construido estos espacios volvemos al objetivo principal de este apartado que es encontrar una relación lagrangiana entre $(H_1(D_\varepsilon), \omega_\varepsilon)$ y $(H_1(D'_\varepsilon), \omega_{\varepsilon'})$.

Para ello construimos la siguiente aplicación:

$$\begin{aligned} j_\tau : H_1(\hat{D}_\varepsilon) \oplus H_1(\hat{D}'_\varepsilon) &\longrightarrow H_1(\hat{X}_\tau) \\ (x, x') &\longmapsto i_*(x') - i_*(x) \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde i_* es la inclusión. La relación lagrangiana que buscamos va a ser el núcleo de esta aplicación.

La construcción en general es complicada, pero es posible hacerla en detalle para los tangles fundamentales.

Ejemplo 4.6. En este ejemplo vamos a considerar como $D_\varepsilon = D^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, x_2\})$ y $\varepsilon = \{+1, +1\}$ y como $D'_\varepsilon = D^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, x_2\})$ y $\varepsilon' = \{+1, +1\}$.

Nuestro tangle τ va a ser el representado en séptima posición en la figura 2.2 como uno de los tangles fundamentales.

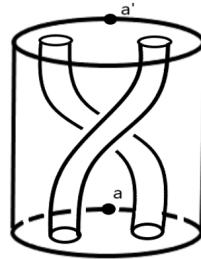
Es por eso que el espacio topológico X_τ nos queda como en la siguiente figura:

Empezaremos enumerando que tres grupos fundamentales nos encontramos en este ejemplo:

$$\begin{aligned} \pi_1(D_\varepsilon; a) &= \langle x_1, x_2 : - \rangle \\ \pi_1(D'_\varepsilon; a') &= \langle x'_1, x'_2 : - \rangle \\ \pi_1(X_\tau; a') &= \langle z_1, z_2 : - \rangle \end{aligned}$$

De forma que los caminos z_1, z_2 son los mismos que x'_1, x'_2 pero definidos en X_τ .

El primer paso es crear dos inclusiones, una de cada uno de los grupos fundamentales de D_ε , D'_ε en el grupo fundamental de X_τ .

Figura 4.6: Espacio X_τ del Ejemplo 4.6

En la primera inclusión no tenemos problema por como hemos definido los caminos z_i . Así nos queda:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_{\varepsilon'}; a') &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x'_i &\longmapsto z_i = x'_i\end{aligned}$$

En cambio para hacer la segunda inclusión vamos a tener más problemas, para ello definimos un camino γ en X_τ con punto inicial a' y punto final a de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_i &\longmapsto \gamma x_i \gamma^{-1}\end{aligned}\tag{4.6}$$

De manera que $\gamma x_i \gamma^{-1}$ sea un camino de $\pi_1(X_\tau; a')$. Con esta ayuda y fijándonos en el dibujo podemos deducir cual sera la imagen de cada uno de los x_i por esta inclusión:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_2 &\longmapsto z_1 \\ x_1 x_2 &\longmapsto z_1 z_2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_1 = x_1 x_2 x_2^{-1} &\longmapsto z_1 z_2 z_1^{-1}\end{aligned}$$

Construimos ahora los espacios en los que tenemos definida la aplicación j_τ de (4.5):

$$\begin{aligned}H_1(\hat{D}_\varepsilon) &= \Lambda\langle y \rangle \text{ donde } y = x_1 x_2^{-1} \\ H_1(\hat{D}_{\varepsilon'}) &= \Lambda\langle y' \rangle \text{ donde } y' = x'_1 x'_2^{-1} \\ H_1(\hat{X}_\tau) &= \Lambda\langle z \rangle \text{ donde } z = z_1 z_2^{-1}\end{aligned}$$

Es decir en este ejemplo j_τ nos queda de la forma:

$$\begin{aligned}\Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (x, x') &\longmapsto i_*(x') - i_*(x)\end{aligned}$$

Ahora queremos saber cual es la imagen por esta aplicación de $(y, 0)$ y de $(y', 0)$. Sabemos gracias a las inclusiones que hemos definido antes, a que caminos en X_τ corresponden cada uno de los caminos en D_ε y en $D_{\varepsilon'}$, por lo tanto sabemos que

$$\begin{aligned}y' = x'_1 x'_2^{-1} &\longmapsto z_1 z_2^{-1} = z \\ y = x_1 x_2^{-1} &\longmapsto z_1 z_2 z_1^{-1} z_2^{-1}\end{aligned}$$

El ultimo camino también lo podemos escribir como $z_1 z_2 z_1^{-1} z_1^{-1} = z_1(z_2 z_1^{-1}) z_1^{-1} = z_1 z^{-1} z_1^{-1}$ y como estamos trabajando en el abelianizado $z_1 z^{-1} z_1^{-1} = -tz$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} j_\tau : \Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (0, y') &\longmapsto z \\ (y, 0) &\longmapsto tz \end{aligned}$$

Recordemos que nuestro objetivo principal era construir una relación lagrangiana entre $(\Lambda\langle y \rangle, \omega_\varepsilon)$ y $(\Lambda\langle y' \rangle, \omega_{\varepsilon'})$. Esta relación lagrangiana va ser el núcleo de la aplicación que hemos construido. Sean:

$$\begin{aligned} \Lambda\langle y \rangle &= (\Lambda\langle y \rangle, \omega_\varepsilon) \\ \Lambda\langle y' \rangle &= (\Lambda\langle y' \rangle, \omega_{\varepsilon'}) \\ (-\Lambda\langle y \rangle) \oplus \Lambda\langle y' \rangle &= ((-\Lambda\langle y \rangle) \oplus \Lambda\langle y' \rangle, \omega) \text{ con } \omega = -\omega_\varepsilon \oplus \omega_{\varepsilon'} \end{aligned}$$

Λ -módulos lagrangianos, tenemos que se cumple que $\ker j_\tau$ es submódulo de $(-\Lambda\langle y \rangle) \oplus \Lambda\langle y' \rangle$, ya que $\ker j_\tau$ es de la forma:

$$\ker j_\tau = \{fy + gy' | f, g \in \Lambda, tf + g = 0\} = \{f(y - ty') | f \in \Lambda\} = \Lambda(y - ty')$$

Por último para demostrar que efectivamente $\ker j_\tau$ se trata de un submódulo lagrangiano primero vamos a demostrar que $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \ker j_\tau$:

$$\begin{aligned} \omega(y - ty', y - ty') &= -1\sigma(1)\omega_\varepsilon(y, y) + (-t)\sigma(-t)\omega_{\varepsilon'}(y', y') = \\ &= -\omega_\varepsilon(y, y) + (-t)(-t^{-1})\omega_{\varepsilon'}(y', y') = -\omega_\varepsilon(y, y) + \omega_{\varepsilon'}(y', y') = \\ &= -(t - t^{-1}) + ((t - t^{-1})) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \ker j_\tau$ y como sabemos por la Definición 3.8 $\text{Ann}(\ker j_\tau) \subset \overline{\ker j_\tau}$ y como el otro contenido se cumple siempre, tenemos la igualdad: $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \overline{\ker j_\tau}$, y por definición $\ker j_\tau$ es submódulo lagrangiano.

Es así como hemos conseguido la relación lagrangiana que estábamos buscando y que se asocia con el tangle τ mediante el funtor.

Ejemplo 4.7. En este nuevo ejemplo vamos a considerar D_ε , $D_{\varepsilon'}$, ε y ε' de la misma forma que en el ejemplo anterior pero en este caso nuestro tangle τ va a ser el tangle fundamental representado en la Figura 2.2 en octava posición. Es por eso que el espacio topológico X_τ nos queda como en la figura 4.7.

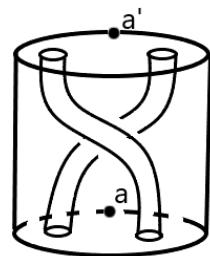


Figura 4.7: Espacio X_τ del Ejemplo 4.7

De la misma forma que en el ejemplo anterior empezamos enumerando que tres grupos fundamentales :

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &= \langle x_1, x_2 : - \rangle \\ \pi_1(D_{\varepsilon'}; a') &= \langle x'_1, x'_2 : - \rangle \\ \pi_1(X_\tau; a') &= \langle z_1, z_2 : - \rangle\end{aligned}$$

De forma que los caminos z_1, z_2 son los mismos que x'_1, x'_2 pero definidos en X_τ .

El primer paso, igual que antes, es también crear dos inclusiones, una de cada uno de los grupos fundamentales de D_ε , $D_{\varepsilon'}$ en el grupo fundamental de X_τ . De la misma forma que en el Ejemplo 4.6 en la primera inclusión no tenemos problema por como hemos definido los caminos z_i . Nos queda:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_{\varepsilon'}; a') &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x'_i &\longmapsto z_i = x'_i\end{aligned}$$

También sabemos que para hacer la segunda inclusión vamos a tener más problemas, para ello definimos un camino γ en X_τ como en (4.6). Por lo que en este caso la imagen de cada uno de los x_i por esta inclusión será de la forma:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_1 &\longmapsto z_2 \\ x_1 x_2 &\longmapsto z_1 z_2\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_2 = x_1^{-1} x_1 x_2 &\longmapsto z_2^{-1} z_1 z_2\end{aligned}$$

Así que, igual que antes escribiendo j_τ en los espacios en los que esta definida en (4.5) se nos queda:

$$\begin{aligned}\Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (x, x') &\longmapsto i_*(x') - i_*(x)\end{aligned}$$

donde $y = x_1 x_2^{-1}$, $y' = x'_1 x'_2^{-1}$

Queremos saber cual es la imagen por esta aplicación de $(y, 0)$ y de $(y', 0)$. Sabemos gracias a las inclusiones que hemos definido antes, a que caminos en X_τ corresponden cada uno de los caminos en D_ε y en $D_{\varepsilon'}$, por lo tanto sabemos que:

$$\begin{aligned}y' &= x'_1 x'_2^{-1} \longmapsto z_1 z_2^{-1} = z \\ y &= x_1 x_2^{-1} \longmapsto z_2 z_2^{-1} z_1^{-1} z_2 = z_1^{-1} z_2\end{aligned}$$

Como definimos $z = z_1 z_2^{-1}$, entonces $z_1^{-1} z_2 = z_2^{-1} z_2 z_1^{-1} z_2 = z_2^{-1} (z_2 z_1^{-1}) z_2 = z_2^{-1} z^{-1} z_2$ y como estamos trabajando en el abelianizado $z_2^{-1} z^{-1} z_2 = -t^{-1} z$, por lo tanto tenemos:

$$\begin{aligned}j_\tau : \Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (0, y') &\longmapsto z \\ (y, 0) &\longmapsto t^{-1} z\end{aligned}$$

Y así tenemos que $\ker(j_\tau)$ es de la siguiente manera:

$$\ker j_\tau = \{fy + gy' | f, g \in \Lambda, t^{-1}f + g = 0\} = \{f(y - t^{-1}y') | f \in \Lambda\} = \Lambda(y - t^{-1}y')$$

Y para demostrar que es un submódulo lagrangiano lo hacemos de la misma manera que en el ejemplo anterior, comprobando que $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \ker j_\tau$:

$$\begin{aligned}\omega(y - t^{-1}y', y - t^{-1}y') &= -1\sigma(1)\omega_\varepsilon(y, y) + (-t^{-1})\sigma(-t^{-1})\omega_{\varepsilon'}(y', y') = \\ &\quad -\omega_\varepsilon(y, y) + (-t)(-t^{-1})\omega_{\varepsilon'}(y', y') = -\omega_\varepsilon(y, y) + \omega_{\varepsilon'}(y', y') = \\ &\quad -(t - t^{-1}) + ((t - t^{-1}) = 0\end{aligned}$$

Ejemplo 4.8. En este ejemplo vamos a considerar el tangle trivial con dos segmentos verticales para $D_\varepsilon = D^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, x_2\})$ y $\varepsilon = \{+1, +1\}$ y con $D_{\varepsilon'} = D^2 \setminus \mathcal{N}(\{x_1, x_2\})$ y $\varepsilon' = \{+1, +1\}$.

Es decir el espacio topológico X_τ nos queda como en la siguiente figura:

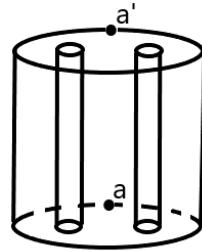


Figura 4.8: Espacio X_τ del Ejemplo 4.8

Empezaremos como siempre enumerando que tres grupos fundamentales nos encontramos en este ejemplo:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &= \langle x_1, x_2 : - \rangle \\ \pi_1(D_{\varepsilon'}; a') &= \langle x'_1, x'_2 : - \rangle \\ \pi_1(X_\tau; a') &= \langle z_1, z_2 : - \rangle\end{aligned}$$

De forma que los caminos z_1, z_2 son los mismos que x'_1, x'_2 pero definidos en X_τ .

El primer paso es crear dos inclusiones, una de cada uno de los grupos fundamentales de D_ε , $D_{\varepsilon'}$ en el grupo fundamental de X_τ .

En este caso no vamos a tener problema en ninguna de las dos inclusiones ya que los caminos no se cortan. Así estas inclusiones nos quedan de la forma:

$$\begin{aligned}\pi_1(D_{\varepsilon'}; a') &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x'_i &\longmapsto z_i = x'_i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\pi_1(D_\varepsilon; a) &\longrightarrow \pi_1(X_\tau; a') \\ x_i &\longmapsto z_i\end{aligned}$$

Por lo tanto en este ejemplo j_τ es:

$$\begin{aligned}\Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (x, x') &\longmapsto i_*(x') - i_*(x)\end{aligned}$$

donde $y = x_1 x_2^{-1}$, $y' = x'_1 x'_2^{-1}$

También como en los ejemplos anteriores queremos saber cual es la imagen por esta aplicación de $(y, 0)$ y de $(y', 0)$. Sabemos gracias a las inclusiones que hemos definido antes, a que caminos en X_τ corresponden cada uno de los caminos en D_ε y en $D_{\varepsilon'}$, por lo tanto sabemos que

$$\begin{aligned} y' &= x'_1 {x'_2}^{-1} \mapsto z_1 z_2^{-1} = z \\ y &= x_1 x_2^{-1} \mapsto z_1 z_2^{-1} = z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j_\tau : \Lambda\langle y \rangle \oplus \Lambda\langle y' \rangle &\longrightarrow \Lambda\langle z \rangle \\ (0, y') &\mapsto z \\ (y, 0) &\mapsto -z \end{aligned}$$

En este caso entonces el núcleo de esta aplicación viene dado por:

$$\ker j_\tau = \{fy + gy'|f, g \in \Lambda, -f + g = 0\} = \{f(y + y')|f \in \Lambda\} = \Lambda(y + y')$$

Por último para demostrar que efectivamente $\ker j_\tau$ se trata de un submódulo lagrangiano primero vamos a demostrar que $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \ker j_\tau$:

$$\begin{aligned} \omega(y + y', y + y') &= -(1\sigma(1)\omega_\varepsilon(y, y)) + 1\sigma(1)\omega_{\varepsilon'}(y', y') = \\ &= -\omega_\varepsilon(y, y) + \omega_{\varepsilon'}(y', y') = -(t - t^{-1}) + ((t - t^{-1}) = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto siguiendo el mismo razonamiento que en Ejemplo 4.6 sabemos que $\ker j_\tau$ es submódulo lagrangiano.

En estos ejemplos ha sido fácil aplicar ω a los elementos del $\ker j_\tau$ ya que $\ker j_\tau$ tiene rango uno, pero si en cambio estuviéramos trabajando con un n mayor, podríamos definir $\ker j_\tau$ en forma de matriz para trabajar más cómodamente. Llamamos K a la matriz correspondiente al $\ker j_\tau$ y que se construye de la siguiente manera: Supongamos que trabajamos en unos n y n' determinados, podemos ver que $\dim(\ker j_\tau) = \frac{\dim(H_1(\hat{D}_\varepsilon)) + \dim(H_1(\hat{D}_{\varepsilon'}))}{2}$

Demostración. La condición de que ω_ε es no degenerada se traduce en que $|A_{\omega_\varepsilon}| \neq 0$. Vamos a suponer que $\dim(H_1(\hat{D}_\varepsilon)) = h$ y $\dim(H_1(\hat{D}_{\varepsilon'})) = h'$, por lo tanto $\dim(H_1(\hat{D}_\varepsilon) \oplus H_1(\hat{D}_{\varepsilon'})) = h + h'$. Sea $\dim(\ker j_\tau) = a$ entonces $\dim(\text{Ann}(\ker j_\tau)) = (h + h') - a$. Como queremos que $\ker j_\tau$ sea Lagrangiano entonces se tiene que cumplir que $\text{Ann}(\ker j_\tau) = \ker j_\tau$ y por lo tanto tomando dimensiones $(h + h') - a = a$ lo que se traduce en que $a = \frac{h+h'}{a}$ \square

Por lo tanto volviendo a la matriz K , esta matriz sera de tamaño $(h + h') \times \frac{h+h'}{2}$ donde cada columna k_j de la matriz viene dada por las coordenadas de la base generadora de $\ker j_\tau$ en las bases de $H_1(\hat{D}_\varepsilon) \oplus H_1(\hat{D}_{\varepsilon'})$.

Por lo tanto si trabajamos en un caso más general la condición de que $\ker j_\tau$ sea lagrangiano se traduce en:

$$KA_{\omega_\varepsilon}K = 0_{\frac{h+h'}{2} \times \frac{h+h'}{2}}$$

donde $0_{\frac{h+h'}{2} \times \frac{h+h'}{2}}$ representa la matriz de 0's de tamaño $\frac{h+h'}{2} \times \frac{h+h'}{2}$

Conclusión de 4.2

En resumen con estos ejemplos hemos visto que cada tangle $\tau = (\varepsilon, \varepsilon')-tangle$ tiene asociado una relación lagrangiana de la forma:

$$\tau \mapsto (H_1(\hat{D}_\varepsilon), \omega_\varepsilon) \Rightarrow (H_1(\hat{D}'_\varepsilon), \omega_{\varepsilon'})$$

La cual en última instancia puede venir dada por un grupo generado por un polinomio o por una matriz, como hemos visto en los ejemplos.

Mediante el funtor que hemos construido sabemos que la composición de tangles corresponderá a la composición de relaciones lagrangianas. Es por eso por lo que si sabemos sacar la matriz de la composición de relaciones lagrangianas a partir de las matrices de cada relación lagrangiana seremos capaces de saber que matriz corresponde a cada tangle, por muy complicado que sea, ya que sabemos que tangles más complicados pueden ser dados por la composición de tangles más sencillos y de tangles elementales.

Tenemos tres Λ -módulos hermitianos H_1 , H_2 y H_3 con sus respectivas bases u_1, u_2, \dots, u_{n_1} , v_1, v_2, \dots, v_{n_2} y w_1, w_2, \dots, w_{n_3} . Sean L_{12} y L_{23} las matrices que corresponden a las relaciones lagrangianas $N_{12} : H_1 \rightarrow H_2$ y $N_{23} : H_2 \rightarrow H_3$ respectivamente, como ya hemos demostrado antes, L_{12} tendrá tamaño $(n_1 + n_2) \times \frac{n_1+n_2}{2}$ y L_{23} tendrá tamaño $(n_2 + n_3) \times \frac{n_2+n_3}{2}$, por lo que como sabemos como son cada una de las columnas de esta matriz, también se podrán escribir de la siguiente manera:

$$L_{12} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \quad L_{23} = \begin{pmatrix} B_2 \\ B_3 \end{pmatrix}$$

donde:

- A_i representa una matriz de tamaño $n_i \times \frac{n_1+n_2}{2}$ donde cada columna viene dada por las coordenadas de la base generadora de la relación lagrangiana N_{12} en la base de H_i para todo $i = 1, 2$.
- B_i representa una matriz de tamaño $n_i \times \frac{n_2+n_3}{2}$ donde cada columna viene dada por las coordenadas de la base generadora de la relación lagrangiana N_{23} en la base de H_i para todo $i = 2, 3$.

Por lo tanto la forma en la que será la matriz de la relación lagrangiana $N_{12}N_{23}$ viene dada por el siguiente lema:

Lema 4.9. Con las notaciones dadas anteriormente sea $N_{12}N_{23}$ una composición de relaciones lagrangianas (y por tanto una relación lagrangiana), su matriz viene dada por $\begin{pmatrix} A_1 W_1 \\ B_3 W_2 \end{pmatrix}$ donde $\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ representa la matriz del submódulo $K = \{x \in N_{12} \oplus N_{23} \mid (-A_2 \quad B_3) \cdot x = 0\}$ de $N_{12} \oplus N_{23}$.

La demostración de este lema viene detallada en [3]. Con este lema ya hemos hallado como sería la matriz de una composición de relaciones lagrangianas y por lo tanto, como ya he dicho anteriormente así vamos a conseguir saber a qué matriz corresponde cada tangle que queramos representar.

Por ejemplo podemos ver gráficamente que si componemos los tangles de los ejemplos 4.6 y 4.7 nos queda el tangle del ejemplo 4.8. Vamos a comprobar que efectivamente la matriz de la composición de los dos primeros da la matriz del último: Utilizando la notación de antes tenemos que:

$$L_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t \end{pmatrix} \quad L_{23} = \begin{pmatrix} 1 \\ -t^{-1} \end{pmatrix}$$

La matriz $\begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix}$ es la de una base de los vectores columna (a, b) tales que:

$$(-(-t) \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Es decir, obtenemos $W_1 = 1$, $W_2 = -t$, y el resultado es

$$L_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

es decir, $L_{13} = \Lambda(y + y'')$.

Capítulo 5

Bibliografía

- [1] J. Adámek, H. Herrlich, and G.E. Strecker, *Abstract and concrete categories: the joy of cats*, Repr. Theory Appl. Categ. (2006), no. 17, 1–507.
- [2] D. Cimasoni and V. Turaev, *A Lagrangian representation of tangles*, Topology **44** (2005), no. 4, 747–767.
- [3] ———, *A Lagrangian representation of tangles. II*, Fund. Math. **190** (2006), 11–27.
- [4] R.H. Crowell and R.H. Fox, *Introduction to knot theory*, Graduate Texts in Mathematics, No. 57, Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977.
- [5] William S. Massey, *Algebraic topology: An introduction*, Harcourt, Brace & World, Inc., New York, 1967.