

Número de particiones de un entero



Sergio Caballero Villanueva
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Alfredo García Olaverri
26 de junio de 2022

Prólogo

Las particiones de enteros forman parte una de las ramas más importantes de las matemáticas, en particular de la combinatoria. Han sido objeto de estudio desde los antiguos matemáticos griegos hasta la actualidad. Uno de los principales precursores, y sin duda debe ser nombrado en cualquier estudio de particiones, es el famoso matemático Leonhard Euler, el cual dedicó parte de su vida al estudio de éstas. Sin embargo, la teoría de particiones ha evolucionado a lo largo de los años, interesando a matemáticos de la talla de Srinivasa Ramanujan. El matemático de origen hindú, aportó importantes resultados sobre particiones, especialmente en cuanto a divisibilidad y crecimiento asintótico.

Este trabajo se centrará principalmente en el estudio del número de particiones de un entero n . A lo largo de los capítulos 1 y 2 se abordará de pleno ésta cuestión. En ellos, se tratará de exponer cómo manejar las particiones y se introducirán conceptos como los diagramas de Ferrer, una forma gráfica de ver una partición. La mayoría de resultados de estos dos primeros capítulos son la base de todo trabajo de particiones y están basados principalmente en las funciones generatrices. El último capítulo está destinado a una subrama de la teoría de particiones, las Young Tableaux, las cuales son estudiadas también en álgebra por su profunda relación con las representaciones del grupo simétrico.

En resumen, el objetivo principal del trabajo será el de establecer la base matemática de la teoría de particiones de enteros, para, de manera progresiva, adentrarse en resultados más específicos de recurrencia y crecimiento de la función de particiones.

Summary

The integer partitions are part of one of the most important branches of mathematics, particularly of combinatorics. They have been subject of study since the ancient greek mathematicians to nowadays. One of the main precursors, and no doubt must be named in every partitions studies, is the renowned mathematician Leonhard Euler, who dedicated part of his life to the study of this area. Nevertheless, the partitions theory has evolved over time, engaging mathematics such as Srinivasa Ramanujan. The indian mathematician brought in results about partitions, especially about divisibility and asymptotic growth.

The work will consist of an introduction to partition theory. It is divided into three chapters, which deal with the most important topics in the study of partitions.

- **Chapter 1:** The first chapter contains the most important part of this paper. It will define the concept of the partition of an integer n as a sequence (x_1, x_2, \dots, x_k) of positive integers such that,

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \text{ with } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \text{ for } 1 \leq k \leq n,$$

and $p(n)$ as the total number of partitions of n . Thus, the main objective will be to find the value of $p(n)$. To do this, the concepts of generating functions and Ferrers diagrams will be introduced. Both will help to demonstrate most of the results. One of the most important in this chapter will be Euler's Theorem, which proves that the generating function associated with the sequence $p(n)$ is,

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} p(n)z^n = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - z^i}.$$

Another important result of Euler is to calculate the generating function of the partitions in different parts,

$$\sum_{n \geq 0} d(n)z^n = \prod_{j \geq 1} (1 + z^j).$$

Thanks to all this results, and to the Pentagonal Numbers Theorem, we will be able to calculate a recursive formula for computing $p(n)$,

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} [p(n - w(m)) + p(n - w(-m))].$$

Finally, we will prove the Jacobi Triple Product Theorem, which is basically a generalization of the Pentagonal Theorem,

$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r.$$

- **Chapter 2:** This second chapter will deal with the asymptotic growth of $p(n)$. The asymptotic formula for his most famous calculation is that of Ramanujan,

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}, \quad \text{when } n \rightarrow \infty.$$

Although in this work it will not be demonstrated due to its complexity, we will be able to establish that the asymptotic growth of the sequence $p(n)$ is less than,

$$e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}},$$

that is, that the main term of Ramanujan's expression. At the end of the chapter, the asymptotic growth of $p_k(n)$ will be estimated like

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

- **Chapter 3:** The final chapter will study the standard Young Tableaux. The goal will be to count the number of Young Tableau of a given shape. For this, some results will be shown previously, which will help in the proof of the main theorem of the chapter, the hooklength formula. All of these results will use Vandermonde determinant,

$$\Delta(x_1, \dots, x_m) := \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j).$$

The hooklength formula counts the number of Young Tableau of a given shape and its expression is,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod h_{i,j}}.$$

Summing up, the paper aims to introduce the reader to the basic theory of partitions, showing how deal with them. Mainly, it will deal with the problem of counting the number of partitions of n . This question will be fully developed in the first two chapters. The last chapter will be focused on an important sub branch of partition theory, the Young Tableaux.

Índice general

Prólogo	III
Summary	IV
1. Nociones generales sobre particiones de enteros	1
1.1. Introducción	1
1.2. Diagramas de Ferrers	1
1.3. Funciones generatrices	3
1.3.1. Método simbólico	3
1.4. Teorema de Euler y fórmula de recurrencia para $p(n)$	6
1.5. Triple producto de Jacobi	11
2. Estimación asintótica del número de particiones	15
2.1. Introducción	15
2.2. Crecimiento asintótico de $p(n)$	15
2.3. Crecimiento asintótico de $p_k(n)$	19
3. Young tableaux	21
3.1. Introducción	21
3.2. Número de Young Tableaux para un tamaño dado	21
Bibliografía	25

Capítulo 1

Nociones generales sobre particiones de enteros

1.1. Introducción

Definición 1. Una partición de un entero positivo n es una forma de descomponer n como suma de enteros positivos. Dos sumas se considerarán iguales si solo difieren en el orden de los sumandos. Dicho de otra manera, una partición de n es una secuencia (x_1, x_2, \dots, x_k) de enteros positivos tal que,

$$n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \text{ con } x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_k \text{ para } 1 \leq k \leq n.$$

Se llama **parte** de la partición a cada x_i , con $i = 1, \dots, m$.

Se define $p_k(n)$ como el número de particiones de n en k partes y denotaremos por $p(n)$ al número total de particiones de n , es decir,

$$p(n) := p_1(n) + p_2(n) + \dots + p_n(n).$$

Donde por convenio $p(0) = 1$.

Ejemplo 1. Sea $n = 4$, entonces todas sus particiones son,

$$1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1, 2 + 2, 3 + 1, 4$$

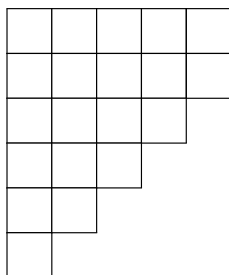
Es decir, $p(4) = 5$, $p_1(4) = 1$, $p_2(4) = 2$, $p_3(4) = 1$ y $p_4(4) = 1$.

Resulta fácil de calcular $p(n)$ para valores pequeños de n pero, ¿Qué ocurre cuando $n \rightarrow \infty$?. El objetivo de este capítulo es el de dar una fórmula de recurrencia para el cálculo de $p(n)$. Para ello, se han de comprender previamente, resultados y conceptos básicos sobre particiones de enteros, como lo son su representación gráfica, los diagramas de Ferrer.

1.2. Diagramas de Ferrers

Definición 2. Un diagrama de Ferrers consiste en una matriz de puntos o de cuadrados en su defecto, utilizado para representar una partición. Cada fila está asociada con una de las partes de la partición, conteniendo ésta tantos cuadrados como indica la parte. Se colocan en orden descendente según el tamaño de la fila.

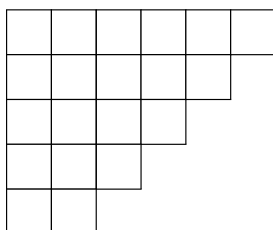
Ejemplo 2. Sea la partición $20 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, su diagrama de Ferrers asociado es,



Los diagramas de Ferrers serán de gran utilidad a la hora de demostrar la mayoría de resultados a lo largo de este capítulo.

Definición 3. Sea $n = x_1 + \dots + x_k$ una partición, entonces su conjugada se define como la partición que resulta de intercambiar las filas por las columnas del diagrama de Ferrers asociado a la partición original.

Ejemplo 3. Sea la partición $20 = 5 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$, su conjugada será $20 = 6 + 5 + 4 + 3 + 2$,



Proposición 1. El número de particiones de n , cuya parte más larga es k , es igual al número de particiones de n en k partes.

Demostración. Notar que para toda partición cuya parte más larga es k , su conjugado tiene k partes. Esta relación entre partición y conjugado es biyectiva, luego se tiene el resultado. \square

Proposición 2.

$$p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k).$$

Demostración. La relación anterior proviene de una disyunción de casos entre las siguientes particiones.

- Las particiones en k partes en las que, al menos, una de sus partes es 1, y hay exactamente $p_{k-1}(n - 1)$. Agregando la parte 1 a una partición de $n - 1$ en $k - 1$ partes, se llega a una partición de n en k partes, con la última parte 1. Este proceso viene reflejado en la Figura 1.1.
- Y las particiones en k partes donde todas sus partes son iguales o superiores a 2, donde hay exactamente $p_k(n - k)$. Aumentando cada parte en 1 en una partición de $n - k$ en k partes se llega a una partición de n en k partes. Este proceso viene reflejado en la Figura 1.2.

Notar que la suma de ambos tipos de particiones es igual al número de particiones de n en k partes. \square

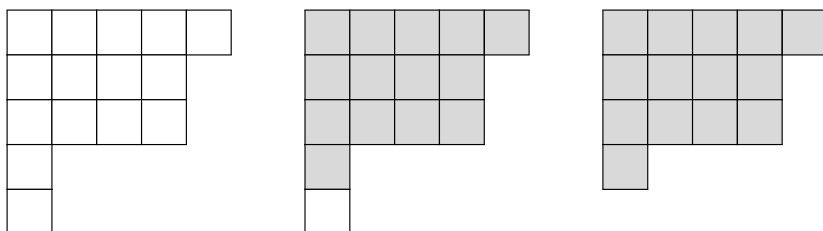


Figura 1.1: Particiones con al menos una de sus partes 1

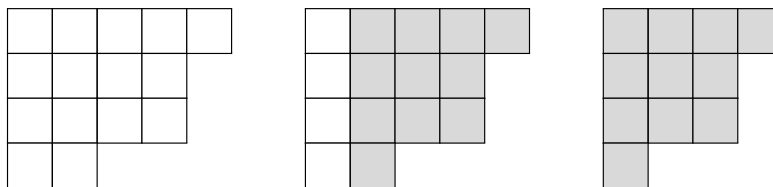


Figura 1.2: Particiones con todas sus partes igual o superiores a 2

Notar que esta última proposición muestra una fórmula de recurrencia para el cálculo de $p(n)$, ya que,

$$p(n) = p_1(n) + p_2(n) + \dots + p_n(n).$$

Luego se puede formar una tabla con los primeros valores de $p(n)$,

$p_k(n)$	k								$p(n)$
n	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1								1
2	1	1							2
3	1	1	1						3
4	1	2	1	1					5
5	1	2	2	1	1				7
6	1	3	3	2	1	1			11
7	1	3	4	3	2	1	1		15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	22

Sin embargo, este algoritmo es poco eficiente, pues tiene un crecimiento de orden cuadrático en función de n . Más adelante se dará otra forma de calcular $p(n)$ de forma más eficiente.

Veamos a continuación otra herramienta que será de utilidad para el estudio de particiones, las funciones generatrices. Ayudarán a determinar el número de particiones de un entero n y supondrán la base de los resultados más importantes de este capítulo.

1.3. Funciones generatrices

Definición 4. Dada una sucesión a_n se llama función generatriz ordinaria asociada a a_n , a la serie formal

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Notar que $F(z)$ no es un número salvo que la serie converja. Sin embargo, por lo general no se utilizarán valores numéricos, sino que la mayoría de resultados se centran en sus desarrollos formales.

El objetivo de esta sección es calcular la función generatriz de la sucesión $p(n)$.

1.3.1. Método simbólico

El **método simbólico** es un proceso el cual permite relacionar el número de particiones de n con las funciones generatrices, dando para éstas últimas una expresión formal en forma de producto.

Aunque es un proceso válido para contar todo tipo de particiones, el método se planteará para particiones con ciertas restricciones en sus partes. Una vez establecido para este tipo de particiones, resultará sencillo proceder con él para particiones a contar con menos restricciones.

El método simbólico establece una biyección entre,

$$\left(\begin{array}{l} \text{El número de soluciones de} \\ n = x_1 + x_2 + \dots + x_k, \quad x_i \in \mathbb{N} \cup 0 \\ \text{cuando } x_j \leq r_j \text{ con } r_j \geq 0 \end{array} \right) \longleftrightarrow \left(\begin{array}{l} \text{Los sumandos de grado } n \text{ que aparecen} \\ \text{en el desarrollo de } \prod_{j=1}^k (1 + z_j + \dots + z_j^{r_j}) \end{array} \right)$$

El paréntesis derecho muestra la expresión,

$$\prod_{j=1}^k (1 + z_j + \dots + z_j^{r_j}) = (1 + z_1 + z_1^2 + \dots + z_1^{r_1})(1 + z_2 + z_2^2 + \dots + z_2^{r_2}) \cdots (1 + z_k + z_k^2 + \dots + z_k^{r_k})$$

cuyo desarrollo está constituido por sumandos de la forma,

$$z_1^{x_1} z_2^{x_2} \cdots z_k^{x_k} \quad \text{para } 0 \leq x_j \leq r_j.$$

Haciendo que $z_j = z, \forall j$, todos los monomios de la forma $z_1^{x_1} z_2^{x_2} \cdots z_k^{x_k}$ para los que $x_1 + \dots + x_n = n$ serán del tipo

$$z^{x_1} z^{x_2} \cdots z^{x_k} = z^n$$

Es decir, a cada sumando descrito como antes, del desarrollo $\prod_{j=1}^k (1 + z_j + \dots + z_j^{r_j})$, le corresponde una solución de

$$\begin{cases} n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ 0 \leq x_j \leq r_j, \quad r_j \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 1. El número de soluciones de

$$\begin{cases} n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ 0 \leq x_j \leq r_j, \quad r_j \geq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

es igual al coeficiente de z^n en el desarrollo de

$$\prod_{j=1}^k (1 + z + \dots + z^{r_j}) \quad (1.2)$$

Demostración. Aplicando el método simbólico como antes, cada solución de 1.1 está asociada a un sumando del desarrollo de 1.2 del tipo

$$z^{x_1} z^{x_2} \cdots z^{x_k} = z^n,$$

luego cada solución de 1.1 aporta +1 al coeficiente de z^n en el desarrollo de 1.2. \square

Proposición 3. Sea $f(n)$ el número de soluciones de

$$\begin{cases} n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ x_i \geq 0, \quad \forall i \leq k \end{cases} \quad (1.3)$$

Entonces la función generatriz de $f(n)$ es

$$F(z) = \prod_{j=1}^k (1 + z + z^2 + \dots) = \left(\frac{1}{1-z} \right)^k$$

y por consiguiente

$$f(n) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Demostración. El método simbólico establece una biyección entre el número de soluciones de 1.3 y los sumandos de grado n que aparecen en el desarrollo de

$$\prod_{j=1}^k (1 + z_j + z_j^2 + \dots)$$

luego si $z_j = z$ se tiene que

$$F(z) = \prod_{j=1}^k (1 + z + z^2 + \dots) = (1 + z + z^2 + \dots)^k = \left(\frac{1}{1-z} \right)^k.$$

El número de soluciones de 1.3, $f(n)$, coincide con el coeficiente de z^n del desarrollo anterior, luego aplicando el Teorema del binomio generalizado de Newton,

$$\left(\frac{1}{1-z} \right)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{k-1} z^n.$$

Luego

$$f(n) = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

□

Proposición 4. Sea $f_2(n)$ el número de soluciones de

$$\begin{cases} n = x_1 + x_2 + \dots + x_k \\ x_i \geq 1, \quad \forall i \leq k \end{cases} \quad (1.4)$$

Entonces la función generatriz de $f_2(n)$ es

$$F_2(z) = \prod_{j=1}^k (z + z^2 + z^3 + \dots) = \frac{z^k}{(1-z)^k}$$

y por consiguiente

$$f_2(n) = \binom{n-1}{k-1}.$$

Demostración. Notar que, aplicando el método simbólico, cada solución de 1.4 está asociada a un sumando de la forma

$$z_1^{x_1} z_2^{x_2} \dots z_k^{x_k} \quad \text{para } 1 \leq x_j,$$

del desarrollo

$$\prod_{j=1}^k (z_j + z_j^2 + z_j^3 + \dots),$$

puesto que se exige que $x_j \geq 1, \forall j$.

Sea $z_j = z$, entonces se tiene que

$$F_2(z) = \prod_{j=1}^k (z + z^2 + z^3 + \dots) = \frac{z^k}{(1-z)^k}.$$

Por consiguiente, el número de soluciones de 1.4, $f_2(n)$, coincide con el coeficiente de z^n del desarrollo anterior. De nuevo por el Teorema binomial,

$$\frac{z^k}{(1-z)^k} = z^k \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} z^m = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k-1} z^{m+k}.$$

Tomando $n = m + k$ se llega a

$$\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n-1}{k-1} z^n.$$

Luego

$$f_2(n) = \binom{n-1}{k-1}.$$

□

El número de composiciones de n se define como el número de soluciones de 1.4, $\binom{n-1}{k-1}$. Luego la proposición anterior es otra demostración alternativa a la usual en combinatoria. Notar que no es lo mismo el número de composiciones de n en k partes, que el número de particiones de n en k partes. De hecho, como usaremos en el capítulo dos, las k permutaciones de $p_k(n)$ son más que las composiciones.

$$\binom{n-1}{k-1} \leq k! p_k(n).$$

1.4. Teorema de Euler y fórmula de recurrencia para $p(n)$

Dejando por ahora de lado las particiones en un número determinado de partes, centrémonos en la función de particiones $p(n)$. El objetivo de esta sección, será el de calcular la función generatriz del número de particiones $p(n)$ para, más adelante, obtener una fórmula de recurrencia de $p(n)$.

Teorema 2 (Euler). La función generatriz de $p(n)$

$$P(z) := \sum_{n \geq 0} p(n) z^n$$

es,

$$\prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - z^i}.$$

Demostración. Notar que $p(n)$ es también el número de soluciones de

$$\begin{cases} n = y_1 + 2y_2 + 3y_3 + \dots + ny_n \\ y_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq n \end{cases},$$

puesto que cada término iy_i representa las y_i veces que aparece la parte i en la partición.

Al no haber restricciones de partes, no hay más que aplicar el método simbólico al producto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + z_j + z_j^2 + z_j^3 + \dots) = (1 + z_1 + z_1^2 + z_1^3 + \dots)(1 + z_2 + z_2^2 + z_2^3 + \dots) \cdots$$

Cada sumando en el desarrollo es de la forma $z_1^{y_1} \cdot z_2^{y_2} \cdot z_3^{y_3} \cdots$, realizando el cambio de variable, $z_j = z^j$, se obtienen sumandos de la forma

$$z^{1 \cdot y_1} z^{2 \cdot y_2} z^{3 \cdot y_3} \cdots$$

Y por tanto, el coeficiente de z^n , coincide con el número de soluciones de, $1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + 3 \cdot y_3 \cdots = n$, que ya se ha visto que es una partición de n . De esta manera, es claro que $p(n)$ es el coeficiente de z^n en el desarrollo de

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + z^j + z^{2j} + z^{3j} + \dots) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^j},$$

es decir, la función generatriz de $p(n)$.

□

A continuación, se estudian una serie de ejemplos donde se modifica la sucesión a estudiar. Es decir, se introducirán ciertas restricciones a las particiones que se cuentan.

Ejemplo 4. Sea $c(n)$ el número de particiones de n sin la parte 2. El objetivo, como ya se ha visto, es encontrar el coeficiente de z^n , pero esta vez en la serie $\sum_{n \geq 0} c(n)z^n$. Recordar que,

$$P(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)(1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots) \dots$$

Como se quiere contar las particiones que no tienen la parte 2, solo hay que eliminar de $P(z)$ el factor que la codifica, es decir, $(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)$. Por consiguiente,

$$\sum_{n \geq 0} c(n)z^n = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^3} \dots = \frac{1}{1-z} \frac{1-z^2}{1-z^2} \frac{1}{1-z^3} \dots = (1-z^2)P(z).$$

Proposición 5. Sea $d(n)$ el número de particiones de n en partes diferentes. Entonces,

$$\sum_{n \geq 0} d(n)z^n = \prod_{j \geq 1} (1 + z^j).$$

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$P(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)(1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots) \dots,$$

para este caso se quiere que todas las partes sean distintas. Es decir, si cada sumando en el desarrollo del producto es de la forma $z^{1y_1} \cdot z^{2y_2} \dots$, o bien $y_j = 1$ o $y_j = 0$, así

$$\sum_{n \geq 0} d(n)z^n = \prod_{j \geq 1} \sum_{i=0}^1 z^{ij} = (1+z)(1+z^2)(1+z^3) \dots = \prod_{j \geq 1} (1+z^j).$$

□

Ejemplo 5. Sea $d_2(n)$ las particiones de n cuyas partes sean todas distintas y potencias de dos. Razonando análogamente a los casos anteriores, se tiene que,

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} d_2(n)z^n &= \prod_{j \geq 0} (1 + z^{2^j}) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4) \dots \\ &= \frac{1-z^2}{1-z} \frac{1-z^4}{1-z^2} \frac{1-z^8}{1-z^4} \dots = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 \dots \end{aligned}$$

Que, como ya se ha visto, representa las particiones de n cuando todas sus partes son 1, la cual es única.

Proposición 6. El número de particiones de n en partes diferentes es igual al número de particiones de n en partes impares.

Demostración. Como

$$P(z) = (1 + z + z^2 + z^3 + \dots)(1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots)(1 + z^3 + z^6 + z^9 + \dots) \dots,$$

y se quiere contar las particiones de n en partes impares, los factores de $P(z)$ cuyos monomios sean todos pares no aparecerán. Es decir, si $I(z)$ es la función generatriz asociada al número de particiones de esta forma entonces,

$$\begin{aligned} I(z) &= \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-z^{2i-1}} = \frac{1}{1-z} \frac{1}{1-z^3} \frac{1}{1-z^5} \dots \\ &= \frac{1-z^2}{1-z} \frac{1-z^4}{1-z^2} \frac{1-z^6}{1-z^3} \dots = (1+z)(1+z^2)(1+z^3) \dots = \prod_{i \geq 1} (1+z^i) \end{aligned}$$

que por la proposición 5, la última expresión cuenta las particiones de n cuando las partes son distintas.

□

Uno de los resultados más sorprendentes e interesantes sobre particiones, es el de encontrar una fórmula de recurrencia que permita calcular $p(n)$. Este hallazgo fue realizado por Euler en 1775. Para ello, se debe demostrar un resultado previo que involucra a $(P(z))^{-1}$, y también, sorprendentemente, a los números pentagonales.

Definición 5 (números pentagonales generalizados). Se llama número pentagonal generalizado a cualquier número de la forma

$$w(m) := \frac{3m^2 - m}{2} \text{ o } w(-m) = \frac{3m^2 + m}{2}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Los primeros números pentagonales son

m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
w(m)	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
w(-m)	2	7	15	26	40	57	77	100	126	155

Teorema 3 (Pentagonal).

$$(P(z))^{-1} = \prod_{k \geq 1} (1 - z^k) = 1 + \sum_{m \geq 1} (-1)^m (z^{w(m)} + z^{w(-m)}).$$

Demostración. Notar que la expresión de la izquierda es la inversa de la función generatriz que cuenta las particiones de n . Como se ha visto en la proposición 5, $\prod_{i \geq 1} (1 + z^i)$ cuenta las particiones de n cuando todas las partes son distintas. Falta ver pues qué codifica la función generatriz $\prod_{i \geq 1} (1 - z^i)$.

Como ya se ha repetido a lo largo del trabajo, se debe calcular el valor del coeficiente de z^n en el desarrollo del producto $\prod_{i \geq 1} (1 - z^i)$. Por la proposición 5, es claro que cada sumando de dicho desarrollo es de la forma,

$$(-1)^{y_1} z^{1y_1} (-1)^{y_2} z^{2y_2} (-1)^{y_3} z^{3y_3} \dots \text{ donde } y_j = 0, 1 \quad \forall j$$

Como $y_j = 0, 1$, es claro que cuenta particiones donde cada parte es única en la partición. Además, se tiene que

$$\begin{cases} \text{Si } \sum_j y_j \text{ es un número par } \implies \text{aporta } +1 \text{ al coeficiente de } z^n. \\ \text{Si } \sum_j y_j \text{ es un número impar } \implies \text{aporta } -1 \text{ al coeficiente de } z^n. \end{cases}$$

Luego el coeficiente de z^n en $\prod_{i \geq 1} (1 - z^i)$ cuenta el número de particiones de n en un número par de partes distintas menos el número de particiones de n en un número impar de partes distintas.

Considerar ahora un diagrama de Ferrers de una partición de n con partes distintas.

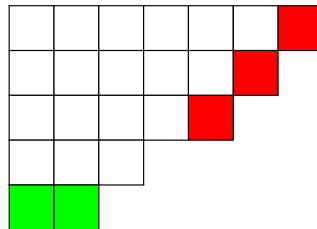


Figura 1.3: diagrama de Ferrers para $23 = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$

Se define base del diagrama, b , como el número de cuadrados de la última fila, o lo que es lo mismo, $b = x_k$, con x_k la menor parte de la partición $n = x_1 + \dots + x_k$, con $1 \leq k \leq n$ y $x_1 > x_2 > \dots > x_k$. En la Figura 1.3, la parte coloreada de verde es la base del diagrama, $b = 2$. Se define la pendiente del diagrama, s , como, empezando por la parte de mayor tamaño de la partición, el número de partes consecutivas que se diferencian de la anterior en exactamente 1.

En la Figura 1.3, la parte coloreada de rojo corresponde a la pendiente, luego para la partición $n = 7 + 6 + 5 + 3 + 2$, $s = 3$. Se definen ahora, dos operaciones sobre el diagrama con estos dos valores, las cuales se denotarán por α y β .

- Operación α : Si $b \leq s$, entonces, se eliminan los elementos pertenecientes a la base y se añaden como una nueva pendiente paralela a la inicial. Es decir, se añaden b cuadrados a las primeras b filas, uno por fila.

Notar que como $b \leq s$ el diagrama pasa a tener una fila menos, como puede observarse en la Figura 1.4. Esto implica que la paridad del número de filas cambia.

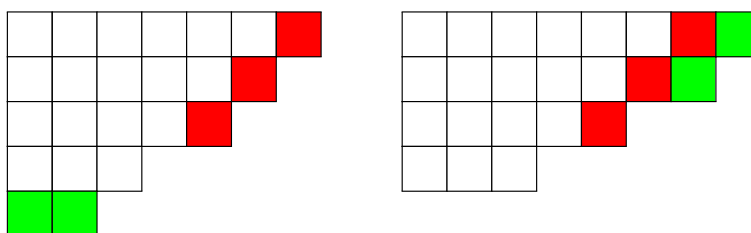


Figura 1.4: Operación α

Sin embargo, hay una excepción de uso a la hora de realizar la operación α , si $b = s$ y la base y la pendiente tienen un cuadrado en común. Esto se debe a que como muestra la Figura 1.5, la operación no puede realizarse por definición del diagrama de Ferrers.

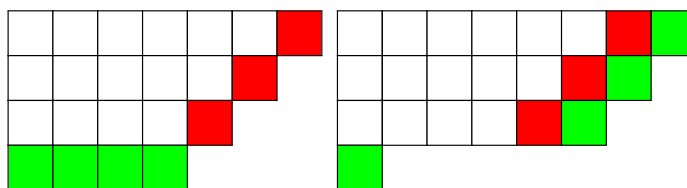


Figura 1.5: Excepción para la operación α

Notar que la excepción para realizar la operación α solo puede ocurrir si

$$n = (2b - 1) + (2b - 2) + \dots + (b + 1) + b$$

Es decir, si n es de la forma $n = (2b - 1) + (2b - 2) + \dots + (b + 1) + b = \frac{3b^2 - b}{2} = w(b)$

- Operación β : Si $b > s$, entonces, se eliminan los cuadrados pertenecientes a la pendiente y se colocan como nueva base del diagrama.

Claramente realizar esta operación añade al diagrama una fila más, como puede observarse en la Figura 1.6. Por este motivo es claro que realizar la operación β cambia la paridad del número de filas del diagrama.

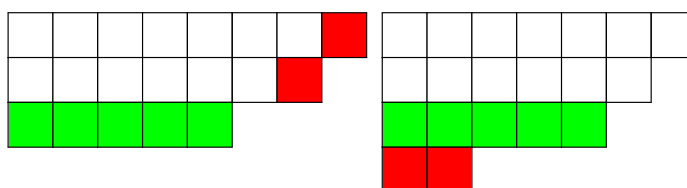


Figura 1.6: Operación β

Como antes, hay un caso particular para el que no se puede realizar la operación β . Si $b = s + 1$ y la base y la pendiente tienen un cuadrado en común. Esto se debe a que, como muestra la Figura 1.7, realizar esta operación para este caso en particular hace que el diagrama tenga dos filas con el mismo número de cuadrados, o lo que es lo mismo, la partición asociada al diagrama tiene dos partes iguales. Esto contradice el hecho de querer contar particiones cuyas partes sean todas distintas entre sí.

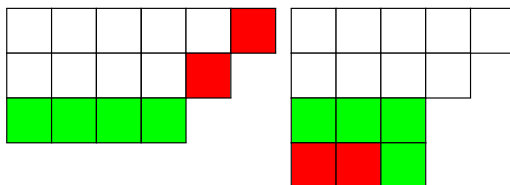


Figura 1.7: Excepción para la operación β

La excepción para realizar la operación β solo puede ocurrir si

$$n = 2s + (2s - 1) + \dots + (s + 2) + (s + 1)$$

Es decir, si $n = 2s + (2s - 1) + \dots + (s + 2) + (s + 1) = \frac{3s^2 + s}{2} = w(-s)$

Tras un poco de observación, realizar una operación sobre un diagrama que no cumpla ninguna de las excepciones, devuelve otro tal que al realizarle la operación contraria, se vuelve al diagrama original. Es decir, siempre que se pueda realizar alguna de las operaciones sobre un diagrama, se podrá aplicar la otra para volver al original. Además, cada operación cambia la paridad del número de filas, o lo que es lo mismo, la paridad en el número de partes en la partición.

Recapitulando, si $n \neq w(m) \neq w(-m)$, se tiene que para cada partición hay dos diagramas de Ferrers equivalentes de distinta paridad respecto al número de filas. Luego el número de particiones con un número par de partes distintas es igual al de las impares, es decir, el coeficiente de z^n en el desarrollo de la función generatriz $\prod_{i \geq 1} (1 - z^i)$ será 0. Sin embargo, si

$$n = w(m) \text{ o } n = w(-m) \text{ con } m \geq 1,$$

el coeficiente de z^n será $+1$ si m es par y -1 si m impar, que traducido a funciones generatrices,

$$(P(z))^{-1} = 1 + \sum_{m \geq 1} (-1)^m (z^{w(m)} + z^{w(-m)}).$$

□

Así, gracias a este resultado, es posible encontrar una fórmula recursiva para el cálculo de $p(n)$.

Teorema 4. Sea $p(n) = 0$ para $n < 0$. Entonces para $n \geq 1$,

$$p(n) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} [p(n - w(m)) + p(n - w(-m))].$$

Demostración. Del Teorema 2 y del Teorema 3, se tiene que

$$P(z) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - z^i} = \sum_{n \geq 0} p(n) z^n, \quad (P(z))^{-1} = \prod_{k \geq 1} (1 - z^k) = 1 + \sum_{m \geq 1} (-1)^m (z^{w(m)} + z^{w(-m)})$$

respectivamente.

Sabemos que si $G(z) = (F(z))^{-1}$ y,

$$\begin{cases} F(z) = f_0 + f_1z + \dots + f_nz^n + \dots \\ G(z) = g_0 + g_1z + \dots + g_nz^n + \dots \end{cases}$$

entonces,

$$f_n = \left(\frac{-1}{g_0}\right) \sum_{i=1}^n g_i f_{n-i}$$

Que traducido a nuestras funciones $F(z) = P(z)$ y $F^{-1} = (P(z))^{-1}$, se tiene que la suma anterior tiene sumandos nulos excepto cuando $i = w(m)$ o $i = w(-m)$, por lo explicado en el Teorema pentagonal. Además $g_0 = 1$ y $f_0 = 1$, luego

$$p(n) = (-1) \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m [p(n - w(m)) + p(n - w(-m))].$$

□

Aunque esta fórmula resulta ser de gran utilidad y permite realizar una tabla con los primeros valores de $p(n)$, es poco eficaz para valores grandes de n .

1.5. Triple producto de Jacobi

Para entender en cierta medida la demostración de este teorema, es necesario introducir las funciones generatrices en dos variables.

Llamaremos $B(n, m)$, al número de particiones del par de números (n, m) en números (r, s) con $r \geq 0$, $s \geq 0$ y $r + s > 0$ y tal que

$$n = \sum r \quad y \quad m = \sum s$$

Además $B(0, 0) = 1$. Es decir, el número de formas en que $x^n y^m$ puede ser expresado como producto de uno o más factores de la forma $x^r y^s$.

Por ejemplo, las particiones del par $(n, m) = (3, 1)$ son

$$\begin{aligned} &(3, 1), \\ &(3, 0) + (0, 1), \\ &(2, 1) + (1, 0), \\ &(2, 0) + (1, 1), \\ &(1, 0) + (1, 0) + (1, 1), \\ &(0, 1) + (1, 0) + (2, 0), \\ &(0, 1) + (1, 0) + (1, 0) + (1, 0), \end{aligned}$$

luego $B(3, 1) = 7$. Por el método simbólico se tiene que la función generatriz de $B(n, m)$ es,

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B(n, m) x^n y^m = \prod_{\substack{r, s \geq 0 \\ r+s > 0}} \frac{1}{(1 - x^r y^s)}.$$

Sea $D(n, m)$ el número de particiones del par (n, m) en partes distintas. Por la Proposición 5, la función generatriz asociada a $D(n, m)$ es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} D(n, m) x^n y^m = \prod_{\substack{r, s \geq 0 \\ r+s > 0}} (1 + x^r y^s).$$

Luego la función generatriz

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_2(n, m) x^n y^m = \prod_{l \geq 1} (1 + x^l y^{l-1})$$

cuenta el número de particiones en partes distintas de la forma

$$(a, a-1) \quad \text{para } a \geq 1,$$

la cual resultará de utilidad en el siguiente resultado.

Teorema 5 (Triple Producto de Jacobi).

$$\prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r.$$

Demostración. Reescribiendo la igualdad como,

$$\prod_{n \geq 1} (1 + q^{2n-1}t)(1 + q^{2n-1}t^{-1}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} q^{r^2} t^r \prod_{n \geq 1} (1 - q^{2n})^{-1}$$

y sustituyendo $x = qt$ e $y = qt^{-1}$, se tiene que

$$\prod_{n \geq 1} [(1 + x^n y^{n-1})(1 + x^{n-1} y^n)] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^{\frac{1}{2}r(r+1)} y^{\frac{1}{2}r(r-1)} \prod_{n \geq 1} (1 - x^n y^n)^{-1}. \quad (1.5)$$

La parte izquierda de 1.5 cuenta el número de particiones del par (n, m) , que por lo mencionado anteriormente, serán en partes distintas de la forma,

$$(a, a-1), \quad (b-1, b) \quad a, b \geq 1, \quad (1.6)$$

el cual denotamos por $\alpha(n, m)$. Es decir, la parte izquierda de 1.5 es la función generatriz

$$\sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \alpha(n, m) x^n y^m.$$

Por el otro lado, haciendo uso del Teorema 2, se llega a que,

$$\prod_{n \geq 1} (1 - x^n y^n)^{-1} = \sum_{k \geq 1} p(k) x^k y^k.$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 1} \alpha(n, m) x^n y^m &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^{\frac{1}{2}r(r+1)} y^{\frac{1}{2}r(r-1)} \sum_{k \geq 1} p(k) x^k y^k \\ &= \sum_{k \geq 1} p(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^{\frac{1}{2}r(r+1)} y^{\frac{1}{2}r(r-1)} x^k y^k \\ &= \sum_{k \geq 1} p(k) \sum_{r=-\infty}^{\infty} x^{\frac{1}{2}r(r+1)+k} y^{\frac{1}{2}r(r-1)+k}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Por consiguiente, para un n, m fijos, $x^n y^m = x^{\frac{1}{2}r(r+1)+k} y^{\frac{1}{2}r(r-1)+k}$, es decir, $n = k + \frac{1}{2}r(r+1)$ y $m = k + \frac{1}{2}r(r-1)$. Notar que si $r > 0$ entonces $n > m$, si $r < 0$, $m > n$ y si $r = 0$ entonces necesariamente $m = n$. Es claro que, despejando r , se tiene que $r = n - m$, y además $k = n - \frac{1}{2}r(r+1)$. Queremos demostrar 1.7, luego si mostramos una biyección entre los coeficientes de ambas partes de la igualdad quedaría probado el teorema. Igualando coeficientes se tiene que

$$\alpha(n, m) = p(k) = p(n - \frac{1}{2}r(r+1)) = p(n - \frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)) \quad (1.8)$$

con $p(k) = 0$ si $k < 0$. Para probar 1.8, como ya se ha explicado, mostraremos una correspondencia $(1, 1)$ entre las particiones que cuenta $\alpha(n, m)$ y las que cuenta la parte derecha de la igualdad.

Notar que por definición, si $\alpha(l, t)$ con l, t fijos tal que $l > t$, entonces $\alpha(l, t) = \alpha(t, l)$. Luego sin pérdida de generalidad por simetría, tomamos $n \geq m$. Demostremos que cada partición de $(n, n - r)$ en partes distintas de la forma de 1.6 tiene una correspondencia biyectiva con la expresión para n de la forma

$$n = \sum_{t=1}^{v+r} a_t + \sum_{t=1}^v (b_t - 1), \quad 1 \leq a_1 < a_2 < \dots, \quad 1 \leq b_1 < b_2 < \dots \quad (1.9)$$

para algún $v \geq 0$. Notar que si $k < 0$ entonces, $n < \frac{1}{2}r(r+1)$ y $p(k) = 0$, luego 1.9 no tendría solución, ya que

$$\sum_{t=1}^r a_t \geq \sum_{t=1}^r t = \frac{1}{2}r(r+1).$$

Si $k = 0$, se tiene que $p(k) = p(0) = 1$, luego hay una única solución para 1.9, correspondiente a cuando $v = 0$ y $a_t = t$. Así pues, sea $k > 0$. Tomemos un diagrama de Ferrers de k cuadrados.

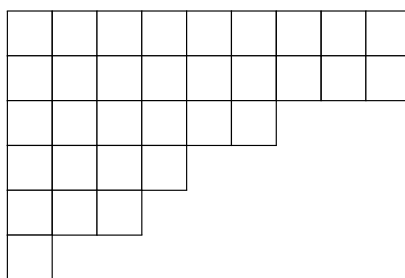


Figura 1.8: diagrama de la partición $32 = 9 + 9 + 6 + 4 + 3 + 1$

Se procede ahora a modificar el diagrama de tal manera que se añaden r filas en lo alto del mismo, de longitud $r, r - 1, \dots, 1$. En la Figura 1.9 se ha modificado el diagrama de la Figura 1.8 de esta manera para $r = 2$.

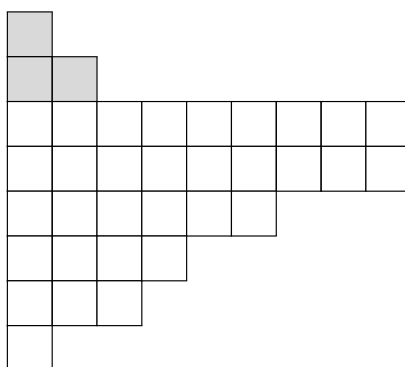


Figura 1.9:

Es claro que el diagrama resultante de esta operación pasará a tener $k + \frac{1}{2}r(r+1) = n$ cuadrados. Una vez añadidos los $\frac{1}{2}r(r+1)$ cuadrados, se procede dividiendo el diagrama en dos partes. En la Figura 1.10 queda reflejada esta división.

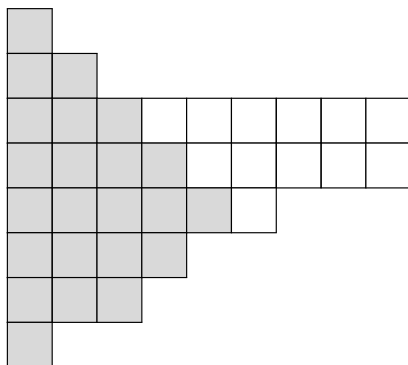


Figura 1.10:

Los cuadrados coloreados de gris corresponden a una escalera descendente desde la primera fila y los blancos al resto. La parte gris consta de $r + v$ columnas, que en este caso son $2 + 3 = 5$. Notar cada columna tiene un número de cuadrados diferente por construcción. Además el número de cuadrados por columna corresponden con los $a_{v+r}, a_{v+r-1}, \dots, a_1$ de 1.9. La parte blanca esta formada por v filas las cuales contienen un número distinto de cuadrados entre sí. Razonando análogamente, el número de cuadrados de cada fila corresponde con los $b_v - 1, b_{v-1} - 1, \dots, b_1 - 1$ de 1.9 (la última fila puede estar vacía). Notar que

$$a_{v+r} + a_{v+r-1} + \dots + a_1 + b_v - 1 + b_{v-1} - 1 + \dots + b_1 - 1 = k + \frac{1}{2}r(r + 1).$$

Este proceso se puede realizar de manera inversa partiendo de 1.9 y eliminando del diagrama los $\frac{1}{2}r(r + 1)$ cuadrados de la parte superior, llegando a una partición de k . Luego está probada la biyección entre los pares $(n, n - r)$ y la expresión 1.9, puesto que

$$n - r = \sum_{t=1}^{v+r} a_t + \sum_{t=1}^v (b_t - 1) - r,$$

que traducido al proceso anterior, consiste en añadir al diagrama $\frac{1}{2}r(r - 1)$ cuadrados, verificándose que $m = \sum(a_t - 1) + \sum b_t$. Puede verse en la Figura 1.11

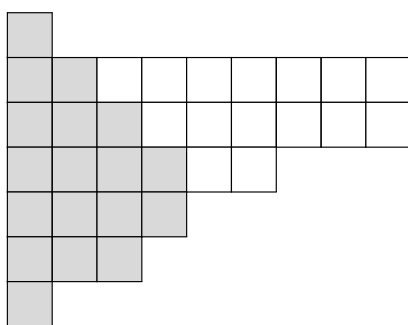


Figura 1.11:

Por consiguiente, $\alpha(n, m) = p(k)$ y queda probado 1.8. Es decir, hay una correspondencia biyectiva entre las funciones generatrices de 1.7.

□

Capítulo 2

Estimación asintótica del número de particiones

2.1. Introducción

El objetivo de este capítulo es el de obtener una estimación asintótica para $p(n)$. Previo a este estudio, puede resultar interesante comparar la sucesión $p(n)$ con otras conocidas y ver si su crecimiento asintótico es el mismo.

Si se habla de sucesiones conocidas, la sucesión de Fibonacci es sin duda una de las más famosas. Como ya se sabe, esta sucesión toma los valores correspondientes a la recurrencia,

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-1} + f_{n-2}.$$

Volviendo a la sucesión $p(n)$, notar que por el Teorema 4, como $w(1) = 1$ y $w(-1) = 2$, se tiene que $p(n) = p(n-1) + p(n-2)$ mas algunas correcciones, por ejemplo para $n = 7$,

$$p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(1).$$

Es decir, ambas sucesiones, a priori, parece que van a tomar valores similares para el mismo n . Podemos verlo con más detalle mediante una tabla para ambas sucesiones para los primeros valores de n .

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p(n)	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42	56	77	101
f_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

Notar que los primeros valores prácticamente coinciden. Sin embargo conforme n crece parecen alejarse entre sí.

Se sabe que la sucesión de Fibonacci crece como C^n , para C una cierta constante positiva. Entonces, ¿Es verdad que $p(n)$ también tendrá un crecimiento del tipo C^n ? La respuesta es que no, de hecho crece mucho más lentamente. Como se demostrará a continuación, $p(n)$ crece esencialmente como $C\sqrt{n}$ con C una constante positiva.

2.2. Crecimiento asintótico de p(n)

La fórmula asintótica más precisa y conocida para el cálculo asintótico de $p(n)$ fue obtenida por Hardy y Ramanujan en 1918. Su demostración resulta compleja e involucra el uso de análisis complejo, por lo que solo se dará su expresión.

Teorema 6 (Hardy-Ramanujan).

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

Para darse cuenta del nivel de precisión de la fórmula de Ramanujan, comparemos algunos valores estimados de $p(n)$ para algunos valores de n con la sucesión $p(n)$.

n	10	20	50	80
$p(n)$	42	627	204226	15796476
Estimación	48	692	217590	16606781
$p(n) / \text{Estimación}$	1.145	1.104	1.065	1.051

Aunque no resulte posible llegar a un resultado de tal precisión en este trabajo, sí que seremos capaces de calcular la tasa de crecimiento asintótica para el $\log p(n)$, y así acercarnos en la medida de lo posible al resultado de Ramanujan.

Para ello, cabe destacar el trabajo del gran matemático Paul Erdős, el cual logró demostrar este hecho mediante el uso de métodos elementales. Sin embargo, previo a la demostración del crecimiento del $\log p(n)$, necesitaremos tres lemas que facilitan los cálculos.

Lema 1.

$$np(n) = \sum_{v=1}^n \sum_{k=1}^{\lfloor n/v \rfloor} vp(n-kv) = \sum_{j=1}^n p(n-j)\sigma(j),$$

con $\sigma(j)$ la suma de los divisores de j .

Demostración. La expresión de la izquierda, $np(n)$, se puede interpretar como la suma de todas las partes de todas las particiones de n . Por otro lado, observar cuantas veces aparece la parte v con $1 \leq v \leq n$, en todas esas particiones. Para ello, sea n_1 el número de particiones de n con exactamente una parte con valor v , n_2 el número de particiones de n con exactamente dos partes con valor v ... Entonces,

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s &= p(n-v) \\ n_2 + n_3 + n_4 + \dots + n_s &= p(n-2v) \\ n_3 + n_4 + n_5 + \dots + n_s &= p(n-3v) \\ &\vdots \\ n_k + n_{k+1} + n_{k+2} + \dots + n_s &= p(n-kv) \\ &\vdots \end{aligned}$$

con $s = \frac{n}{v}$. Luego el número total de apariciones de v es

$$n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots = p(n-v) + p(n-2v) + p(n-3v) + \dots$$

Así, se tiene que

$$\begin{aligned} np(n) &= \sum_{v=1}^n v(p(n-v) + p(n-2v) + p(n-3v) + \dots) \\ &= \sum_{v=1}^n \sum_{1 \leq k \leq \frac{n}{v}} vp(n-kv) = \sum_{j=1}^n p(n-j) \sum_{v|j} v = \sum_{j=1}^n p(n-j)\sigma(j). \end{aligned}$$

□

Lema 2. Sea $0 \leq t \leq n$, entonces

$$\sqrt{n} - \frac{t}{2\sqrt{n}} - \frac{t^2}{2n^{3/2}} \leq \sqrt{n-t} < \sqrt{n} - \frac{t}{2\sqrt{n}}$$

Demostración. Sea $0 \leq x \leq 1$, entonces

$$1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2} \leq \sqrt{1-x} \leq 1 - \frac{x}{2},$$

y solo hace falta realizar el cambio de variable $x = \frac{t}{n}$.

□

Lema 3. Si $x > 0$, entonces

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Si $0 < x \leq 1$, entonces

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} > \frac{1}{x^2} - 2.$$

Demostración. Notar que,

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1} = x + x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-2}}{(2k+1)!2^{2k}}.$$

Si $x > 0$, entonces

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} > x,$$

por lo que

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2} < \frac{1}{x^2}.$$

Si $0 < x \leq 1$, entonces

$$e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}} < x + x^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} < x + x^3 < \frac{x}{1 - x^2},$$

por lo que

$$\frac{e^{-x}}{(1 - e^{-x})^2} = \frac{1}{(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}})^2} > \left(\frac{1}{x} - x\right)^2 > \frac{1}{x^2} - 2.$$

□

Teorema 7 (Erdős).

$$\log p(n) \sim \pi \sqrt{\frac{2n}{3}}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.1)$$

Demostración. Para facilitar la notación, sea $c = \pi \sqrt{\frac{2}{3}}$. En primer lugar, demostrar que

$$p(n) < e^{c\sqrt{n}} \quad (2.2)$$

por inducción. Claramente es cierto para $n = 1$. Por el Lema 1 y la hipótesis de inducción se tiene que,

$$np(n) < \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} ve^{c\sqrt{n-kv}}$$

aplicando el Lema 2 para $t = kv$ se llega a,

$$\sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} ve^{c\sqrt{n-kv}} < \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} ve^{c\sqrt{n} - \frac{ckv}{2\sqrt{n}}} = e^{c\sqrt{n}} \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} ve^{(-\frac{ck}{2\sqrt{n}})v}$$

Se sabe que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} ix^i = \frac{x}{(1-x)^2}$$

luego,

$$e^{c\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{kc}{2\sqrt{n}}}}{\left(1 - e^{-\frac{kc}{2\sqrt{n}}}\right)^2}.$$

Finalmente, aplicando el Lema 3,

$$np(n) < e^{c\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{kc}{2\sqrt{n}}\right)^2} = e^{c\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4n}{c^2 k^2} = ne^{c\sqrt{n}}$$

y se demuestra 2.2.

De manera similar pero con cálculos más largos, se prueba que $\forall \varepsilon > 0, \exists A > 0$ tal que

$$p(n) > \frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}}. \quad (2.3)$$

juntando 2.2 y 2.3,

$$\frac{1}{A} e^{(c-\varepsilon)\sqrt{n}} < p(n) < e^{c\sqrt{n}}$$

y claramente se llega a 2.1. □

Una vez demostrado el término principal de la fórmula de Ramanujan, probaremos un resultado que aporta una mayor precisión acerca del crecimiento de $p(n)$. Para ello, calcularemos una cota superior de esta sucesión, la cual revelará un crecimiento menor que, esencialmente,

$$e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

Teorema 8. Sea $n > 2$, entonces

$$p(n) < \frac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}} e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}}$$

Demostración. Sea $f(t) := \log P(t)$, con $P(t) = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1-t^i}$ como en el Teorema 2, entonces

$$f(t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \log(1-t^k) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{t^{kj}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} t^{kj}.$$

Luego si $|t^j| < 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \sum_{k=1}^{\infty} t^{kj} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{-1}t^j}{1-t^j}$$

Por otra parte, si $0 < t < 1$, tenemos que

$$(1-t)^{-1}(1-t^j) = 1+t+\dots+t^{j-1} > jt^{j-1} \implies \frac{t}{t-1} > \frac{jt^j}{1-t^j},$$

luego

$$f(t) < \frac{t}{1-t} \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2} = \frac{1}{6} \pi^2 \frac{t}{1-t}. \quad (2.4)$$

Como $p(n)$ es estrictamente creciente y $0 < t < 1$, se obtiene una cota una cota inferior para $P(z)$ si de

$$P(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p(k)t^k + \sum_{k=n}^{\infty} p(k)t^k$$

se toma en la primera suma $p(k) = 1, \forall k$ y de la segunda, por ser los $p(k)$ una sucesión creciente, $p(k) = p(n)$. Operando,

$$\begin{aligned} P(t) &> \sum_{k=0}^{n-1} t^k + p(n) \sum_{k=n}^{\infty} t^k = \sum_{k=0}^{n-1} t^k + p(n) \left(\sum_{k=0}^{\infty} t^k - \sum_{k=0}^{n-1} t^k \right) \\ &= (1 - (p(n)) \sum_{k=0}^{n-1} t^k + p(n) \sum_{k=0}^{\infty} t^k = (1 - (p(n)) \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{p(n)}{1-t} \\ &= \frac{1}{1-t} (1-t^n + p(n)t^n) > \frac{t^n}{1-t} p(n). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Comparando las desigualdades 2.4 y 2.5 y realizando el cambio de variable $t = (1 + u)^{-1}$, se llega a

$$\log p(n) < f(t) - n \log t + \log(1-t) < \frac{\pi^2}{6} \frac{t}{1-t} - n \log t + \log(1-t) = \frac{\pi^2}{6} u^{-1} + n \log(1+u) + \log \frac{u}{u+1}.$$

como $0 < u < \infty$, $\log(1+u) < u$ luego,

$$\log p(n) < \frac{\pi^2}{6} u^{-1} + (n-1) \log(1+u) + \log u < \frac{\pi^2}{6} u^{-1} + (n-1)u + \log u.$$

Y no hay mas que realizar una elección adecuada de u para llegar al resultado, concretamente

$$u = \frac{\pi}{\sqrt{6(n-1)}}.$$

□

Mejorar esta estimación con un n en el denominador y probar que es una fórmula asintótica, resultaría un resultado más completo, sin embargo, como ya se ha dicho, son resultados cuyas demostraciones se alejan de la intención de este trabajo. Sin embargo, las estimaciones vistas, son suficientes para entender el crecimiento de la sucesión $p(n)$ con un alto grado de precisión.

Como apartado final de este capítulo, se demostrará el crecimiento asintótico de $p_k(n)$.

2.3. Crecimiento asintótico de $p_k(n)$

Teorema 9. Sea k fijo, entonces

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}. \quad (2.6)$$

Demostración.

$$\frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \leq p_k(n) \leq \binom{n-1}{k-1}, \quad \text{ya que,} \quad (2.7)$$

- $p_k(n) \leq \binom{n-1}{k-1}$, pues hay menos particiones de n con k partes que composiciones de n con k partes.
- $k!p_k(n) \geq \binom{n-1}{k-1}$, pues hay más permutaciones de n en k partes que composiciones.

Por consiguiente,

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{(k-1)!} \sim \frac{n^{k-1}}{(k-1)!}, \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Recordar que $p_k(n)$ es el número de soluciones de,

$$\begin{cases} n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_k \\ x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_k \geq 1 \end{cases}$$

Realizando el cambio de variable $y_i = x_i + (k-i)$, $1 \leq i \leq k$, observar que todos los enteros y_i son distintos y que,

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + \dots + y_k = n + \frac{k(k-1)}{2} \\ y_1 > y_2 > y_3 > \dots > y_k \geq 1 \end{cases} \quad (2.9)$$

Notar que al ser todos los y_i distintos entre sí, cada permutación de una solución de 2.9, genera una composición distinta de $n + \frac{k(k-1)}{2}$ de tamaño k . Sin embargo, sea por ejemplo la partición $4 = 2 + 1 + 1$, que es la única partición de 4 con 3 partes. Realizando el cambio de variable $y_i = x_i + (k-i)$, llegamos

a la partición $7 = 4 + 2 + 1$. Con la cual se pueden formar $k! = 3! = 6$ composiciones. Sin embargo, las composiciones de 7 con 3 partes son $\binom{6}{2} = 15$. Es decir, razonando como en 2.7 se llega a

$$p_k(n) \leq \frac{1}{k!} \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}. \quad (2.10)$$

Juntando 2.7 y 2.10 se tiene que,

$$\frac{1}{k!} \binom{n-1}{k-1} \leq p_k(n) \leq \frac{1}{k!} \binom{n + \frac{k(k-1)}{2} - 1}{k-1}.$$

y por 2.8 se llega a que

$$p_k(n) \sim \frac{n^{k-1}}{k!(k-1)!}.$$

□

Capítulo 3

Young tableaux

3.1. Introducción

Las tablas de Young o Young Tableaux son una subrama de la teoría de particiones profundamente relacionada con la representación de grupos. Sin alejarse mucho del objetivo de los dos primeros capítulos, este último tratará el problema de contar el número de Young Tableaux estándar.

Definición 6. Se llama Young Tableau o estándar Tableau de tamaño $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_m)$ al diagrama de Ferrers asociado a la partición $n = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_m$ en el que cada cuadrado tiene insertado un entero diferente entre 1 y n en orden ascendente tanto en las filas como en las columnas.

Ejemplo 6. Algunas Young tableau de tamaño $(6, 4, 3, 1)$ son,

1	3	4	6	7	9
2	8	10	12		
5	11	13			
14					

1	3	4	5	7	8
2	9	10	13		
6	11	12			
14					

1	2	4	5	6	9
3	8	11	12		
7	10	14			
13					

Aunque existen otros tipos de Young Tableaux, en este capítulo nos centraremos en las más importantes, las estándar Tableaux. Como ya se ha mencionado anteriormente, se quiere contar el número de Young Tableaux de tamaño (x_1, x_2, \dots, x_m) dado. El resultado más importante será la famosa fórmula del *hooklength*, una simple pero potente expresión que cuenta el número de Young Tableaux. Sin embargo, previo a este teorema, es necesario introducir una serie de resultados que facilitarán su demostración.

3.2. Número de Young Tableaux para un tamaño dado

Definición 7.

$$\Delta(x_1, \dots, x_m) := \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j).$$

Donde Δ es el valor del determinante de Vandermonde.

Lema 4. Sea

$$g(x_1, \dots, x_m; y) := x_1 \Delta(x_1 + y, x_2, \dots, x_m) + x_2 \Delta(x_1, x_2 + y, \dots, x_m) + \dots + x_m \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m + y)$$

entonces

$$g(x_1, \dots, x_m; y) = \left(x_1 + \dots + x_m + \binom{m}{2} y \right) \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Demostración. Es claro que g es un polinomio homogéneo de grado $1 + \deg \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m)$ en las variables x_1, \dots, x_m, y . Además si se intercambian x_i y x_j , g cambia de signo. Como g es antisimétrico en las x 's, si $x_i = x_j$, g debe 0 y g es divisible por $x_i - x_j, \forall i < j$. Es decir, $g(x_1, \dots, x_m; y) = h(x_1, \dots, x_m; y) \Delta(x_1, x_2, \dots, x_m)$. Por necesidad, h debe ser homogéneo en x_1, \dots, x_m, y , de grado 1 y simétrico en x_1, \dots, x_m . Así, $h(x_1, \dots, x_m; y) = a(x_1, \dots, x_m) + by$ para algún a, b dependientes de n . Podemos evaluar a haciendo que $y = 0$. Para evaluar b , tomamos la derivada parcial con respecto a y sujeto a $y = 0$. Luego se tiene que

$$\frac{\partial}{\partial y} \Delta(x_1, \dots, x_i + y, \dots, x_m)|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Delta(x_1, \dots, x_m) = \Delta(x_1, \dots, x_m) \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_i - x_j}.$$

Finalmente, el coeficiente de y es

$$\sum_i \sum_{j \neq i} \frac{x_i}{x_i - x_j} = \sum_i \sum_{j < i} \left(\frac{x_i}{x_i - x_j} + \frac{x_j}{x_j - x_i} \right) = \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2} = \binom{m}{2}.$$

□

Definición 8. Sea f una función definida para toda m -tupla $(n_1, \dots, n_m), m \geq 1$ tal que,

- $$f(n_1, \dots, n_m) = 0 \tag{3.1}$$

A no ser que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq 0$.

- $$f(n_1, \dots, n_m, 0) = f(n_1, \dots, n_m). \tag{3.2}$$

- $$f(n_1, \dots, n_m) = f(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m) + f(n_1, n_2 - 1, \dots, n_m) + \dots + f(n_1, n_2, \dots, n_m - 1) \tag{3.3}$$

Si $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_m \geq 0$.

- $$f(n) = 1 \tag{3.4}$$

Si $n \geq 0$.

Proposición 7. El número de Young Tableaux de tamaño (n_1, \dots, n_m) cumple las condiciones de f .

Demostración. Claramente f está bien definida. Notar que la condición 3.1 se cumple claramente por como se ha definido las Young Tableaux. Un diagrama de Ferrers al que se le añade una fila de 0 cuadrados sigue siendo el mismo diagrama, con lo cual 3.2 también se verifica. 3.4 hace alusión a que solo hay una Young Tableau cuando la partición consta de una sola parte.

Finalmente queda probar que el número de Young Tableaux de tamaño (n_1, \dots, n_m) , verifica 3.3. Para ello, considerar la entrada n en una Young Tableau. Notar que ésta debe encontrarse en el cuadrado final de alguna de las filas del diagrama. Luego si se elimina dicho cuadrado, se obtiene una Young Tableau para $n - 1$.

1	3	4	6	7	9
2	8	10	12		
5	11	13			
14					

1	3	4	5	7	8
2	9	10	13		
6	11	12			

Si dos o más filas de la tableau tienen la misma longitud, entonces n solo puede ir colocado en la de más abajo. Sin embargo, 3.3 incluye todos los casos. Pero no hay más que hacer que si $n_i = n_j$ con $j > i$ entonces,

$$f(n_1, \dots, n_i - 1, \dots, n_m) = 0.$$

□

Teorema 10. El número de Young Tableaux de tamaño (n_1, \dots, n_m) verifica,

$$f(n_1, \dots, n_m) = \frac{\Delta(n_1 + m - 1, n_2 + m - 2, \dots, n_m)n!}{(n_1 + m - 1)!(n_2 + m - 2)! \cdots n_m!}.$$

Demostración. En primer lugar notar que si para algún i , se tiene $n_i + m - i = n_{i+1} + m - i - 1$, entonces la expresión de la derecha es 0, por la propia definición de Δ .

Así pues, se debe probar que dicha expresión cumple las propiedades de f , es decir, de 3.1 a 3.4. Todas son esencialmente triviales menos la 3.3.

$$\begin{aligned} f(n_1, \dots, n_m) &= f(n_1 - 1, n_2, \dots, n_m) + f(n_1, n_2 - 1, \dots, n_m) + \dots + f(n_1, n_2, \dots, n_m - 1) \\ &= \frac{\Delta(n_1 + m - 2, n_2 + m - 2, \dots, n_m)n!}{(n_1 + m - 2)!(n_2 + m - 2)! \cdots n_m!} + \dots + \frac{\Delta(n_1 + m - 1, n_2 + m - 2, \dots, n_m - 1)n!}{(n_1 + m - 1)!(n_2 + m - 2)! \cdots (n_m - 1)!} \end{aligned}$$

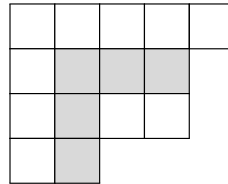
Sacando factor común

$$\frac{n!}{(n_1 + m - 1)!(n_2 + m - 2)! \cdots n_m!}$$

Solo falta realizar el cambio de variable $x_i = n_i + m - i$ e $y = -1$ en el Lema 4 y se cumple 3.3. □

Definición 9. Se llama *hook*, $H_{i,j}$, del cuadrado situado en la fila i , y columna j en una Young Tableau, a la unión del mismo cuadrado con los de su fila por la derecha y columna por debajo.

Ejemplo 7. El *hook* $H_{2,2}$ en el siguiente diagrama es,



Definición 10. Se le llama *hooklength*, $h_{i,j}$, o longitud del *hook*, al número de cuadrados que contiene el *hook* $H_{i,j}$.

Ejemplo 8. La *hooklength* correspondiente al *hook* de cada cuadrado en la siguiente Young Tableau es,

8	7	5	4	1
6	5	3	2	
5	4	2	1	
2	1			

Todos estos conceptos permiten una formulación diferente y, normalmente, más común para el Teorema 10. Este será el famoso teorema de la fórmula del *hooklength*.

Teorema 11 (Fórmula del *hooklength*). El número de Young Tableaux de un tamaño dado $(n_1, \dots, n_m) = \lambda$ con n cuadrados es,

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod h_{i,j}}. \quad (3.5)$$

Demostración. Sea una Young Tableau de tamaño (n_1, \dots, n_m) . Notar que para el cuadrado situado en la posición $(1, 1)$, $h_{1,1} = n_1 + m - 1$. Considerar los $h_{1,j}$ de dicha Young Tableau.

9	8	6	5	2	1
6	5	3	2	•	
5	4	2	1	•	
2	1	•	•		

Figura 3.1:

La segunda columna de la Young Tableau 3.1 tiene la misma longitud que la primera, luego el cuadrado $(1, 2)$ tiene una *hooklength*, $h_{1,2} = n_1 + m - 2$. Para el siguiente cuadrado de la fila 1, el tamaño disminuye en 2 unidades, causado por la falta del cuadrado $(m, 3)$, indicado con un punto. Similar al caso de $(1, 5)$ el cual baja 3 unidades, indicado por los dos puntos de su columna.

Es decir, en la fila 1 se tienen las *hooklength* con tamaño desde 1 a $n_1 + m - 1$, con excepción de los números de la forma

$$(n_1 + m - 1) - (n_j + m - j), \quad 2 \leq j \leq m.$$

De manera similar para la i -ésima fila, se tienen *hooklength* de tamaño desde 1 a $n_i + m - i$, con excepción de los números de la forma

$$(n_i + m - i) - (n_j + m - j), \quad i + 1 \leq j \leq m.$$

Se sigue de aquí que

$$\prod h_{i,j} = \frac{\prod_{i=1}^m (n_i + m - i)!}{\Delta(n_1 + m - 1, \dots, n_m)}.$$

Y por el Lema 4 se tiene 3.5. □

Bibliografía

- [1] J. H. VAN LINT Y R.M. WILSON, *A course in combinatorics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1992, 132-146.
- [2] HERBERT S. WILF, *Lectures on Integer Partitions*, University of Pennsylvania, 2000, disponible en <https://www2.math.upenn.edu/~wilf/PIMS/PIMSLectures.pdf>.
- [3] E. M. WRIGHT, *An enumerative proof of an identity of Jacobi*, J. London Math. Soc., 40, 1965, 55-57.
- [4] L. CARLITZ, *A note on the Jacobi theta formula*, Bull. American Math. Soc, 68, 1962, 591-592.
- [5] *Funciones generatrices y Combinatoria*, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2008, disponible en <https://verso.mat.uam.es/~pablo.fernandez/cap12-figs2.pdf>.
- [6] GEORGE E. ANDREWS Y KIMMO ERIKSSON, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004, 61-62.
- [7] MELVYN B. NATHANSON, *On Erdős's elementary method in the asymptotic theory of partitions*, Department of Mathematics, New York, 2000, disponible en <https://arxiv.org/pdf/math/0002171.pdf>.
- [8] P. ERDÖS, *On An Elementary Proof Of Some Asymptotic Formulas In The Theory Of Partitions*, Annals Of Mathematics, Pennsylvania, 43, 1942.
- [9] PABLO FERNÁNDEZ Y JOSE L. FERNÁNDEZ, *El discreto encanto de la matemática*, Universidad Autónoma de Madrid, Madrid, 2018, 147-149, disponible en <https://verso.mat.uam.es/~pablo.fernandez/cap5b-sep18.pdf>.
- [10] MOHINDER SINGH CHEEMA, *Tables of partitions of Gaussian integers*, National Institute of Sciences of India, 1, 1958, disponible en <https://oeis.org/A002755/a002755.pdf>.