

TRABAJO FIN DE GRADO

Grado en Física

MODELOS DE SINCRONIZACIÓN EN REDES COMPLEJAS

Autor:

Pablo Gallarta Sáenz

Director:

Jesús Gómez Garduñas

Departamento de Física de la Materia Condensada

Facultad de Ciencias

Universidad de Zaragoza

AÑO ACADÉMICO 2021/2022

«El todo es mayor que la suma de sus partes». Aristóteles

*A Jesús por su tiempo y dedicación para sacar adelante este trabajo.
A mis padres y a mi hermano por el apoyo recibido en todo momento.*

Índice

Índice de figuras

1. Introducción	1
2. Conceptos generales sobre redes complejas	4
2.1. Red Erdős-Rényi (ER)	5
2.2. Red Barabási-Albert (BA)	6
2.3. Random Geometric Graph (RGG)	8
3. Modelos de sincronización	14
3.1. Fundamentos teóricos	14
3.1.1. Modelo de Kuramoto	14
3.1.2. Modelo tipo Kuramoto de segundo orden	16
3.2. Simulaciones	17
3.2.1. Dinámica de los osciladores	17
3.2.2. Obtención del valor crítico de la constante de acoplo λ_c	19
3.2.3. Sincronización local: r_{link}	20
3.2.4. Diagramas de sincronización	20
4. Conclusiones	23
5. Referencias	24
ANEXOS	26
I. Implementación computacional de las condiciones de contorno periódicas	26
II. Deducción física del modelo de Kuramoto de segundo orden	26
III. Método de Runge-Kutta de orden 4 para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales	28
IV. Interpretación física del parámetro r_{link}	29

Índice de figuras

1.	Representación de una red ER.	5
2.	Distribución de grado $P(k)$ de la red ER.	6
3.	Representación de una red BA.	7
4.	Distribuciones de grado simuladas junto con la recta de ajuste y la recta en el límite termodinámico de la red BA.	8
5.	Representación gráfica de dos redes RGG.	9
6.	Grado promedio en función de d para varios tamaños de red RGG.	10
7.	Distribución de grado de la red RGG para cuatro valores de d	11
8.	Grado promedio en función de d para varios tamaños de red RGG con PBC.	11
9.	Distribución de grado de la red RGG con PBC para cuatro valores de d	12
10.	GC en función de d para varios tamaños de red RGG.	13
11.	Diagrama de sincronización teórico.	15
12.	Representación de las fases de los osciladores para distintos valores de λ	18
13.	Evolución temporal del parámetro de orden $r(t)$	18
14.	Obtención de λ_c en la red ER (escala logarítmica).	19
15.	Diagramas de sincronización.	21
16.	Comparación de los modelos de Kuramoto de primer orden y segundo orden.	21
17.	Comparación entre la sincronización local y la global.	22
18.	Condiciones de contorno periódicas para una red RGG.	26
19.	Sistema eléctrico básico (figura obtenida del artículo de Filatrella et al. [1]).	26
20.	Definición visual del parámetro r_{link}	29

1. Introducción

La manera clásica de abordar los problemas en la Física se basa en la tesis reduccionista, es decir, simplificar el problema estudiando sus partes más básicas de forma que el análisis sea sencillo y, una vez se describen, aumentar el grado de complejidad bajo unas determinadas condiciones que garanticen su validez. Sin embargo, llega un punto en el que la aproximación por reduccionismo no permite comprender las propiedades del sistema y se debe dar paso a un análisis a la inversa, es decir, ir de lo simple a lo complejo, puesto que son las interacciones entre las partes las que dan lugar a estos comportamientos y no las partes en sí. La rama de la Física que estudia este tipo de interacciones es la Física Estadística, desarrollada a mediados del siglo XIX y que trata de explicar cómo surgen las propiedades macroscópicas a partir de las interacciones microscópicas de los componentes del sistema.

Hoy en día, esta idea sigue presente y sienta las bases de lo que hoy se denomina Ciencia de los Sistemas Complejos, que trata de arrojar luz sobre la aparición de propiedades que son inherentes al estado agregado de las partes y, por tanto, indescriptibles desde un punto de vista reduccionista. Tal y como mencionó P. W. Anderson en su artículo *More is different* [2], el comportamiento de un conjunto de partículas elementales no debe ser entendido en términos de una simple extrapolación de las propiedades de unas pocas partículas. En cambio, en cada nivel de complejidad aparecen nuevas propiedades y entender estos comportamientos requiere una investigación tan fundamental como cualquier otra. Es en este punto donde reside la importancia del desarrollo de una nueva teoría que trate de comprender los fenómenos emergentes de los diferentes sistemas dentro de la biología, de la ecología o incluso de la sociología, impulsando el desarrollo del campo de los sistemas complejos desde un punto de vista interdisciplinar.

Uno de los comportamientos que más ha desconcertado a los científicos es la emergencia del orden espontáneo, ya que da la sensación de que tanto la Física Estadística como las leyes de la Termodinámica evidencian justo lo contrario, pues la propia naturaleza tiende a avanzar hacia un estado de desorden.

Sin embargo, hay ejemplos concretos en los que los componentes de un sistema tienden a organizarse sin ningún tipo de mecanismo que fuerce dicha situación, como es el ejemplo del parpadeo sincronizado de las luciérnagas o la formación de bandadas de estorninos que vuelan al unísono. Aquí surge una pregunta: ¿qué lleva a estos organismos a agruparse y mostrar un comportamiento en conjunto? Está claro que no hay comunicación posible entre todas las luciérnagas o los estorninos y aún así son capaces de mostrar una coordinación casi perfecta. S. H. Strogatz, en su libro *Sync: How order Emerges from Chaos in the Universe, Nature and Daily Life* [3], generaliza el concepto de «oscilador» y lo aplica al estudio de sistemas físicos. Para Strogatz, este oscilador está presente dentro de cada insecto y le permitiría emitir un pulso con una frecuencia determinada, similar al latido del corazón, así como también menciona el concepto de «sincronización», tema que se abordará con mayor profundidad en este trabajo.

La primera aproximación físico-matemática de sistemas autoorganizados llegó de la mano del trabajo del biólogo teórico A. Winfree [4], que describió el conjunto de osciladores mediante un sistema de ecuaciones diferenciales. Entre sus resultados, hay que poner especial atención en la conexión que encontró entre las transiciones de fase clásicas de termodinámica y la sincronización de los osciladores, conectando dos mundos hasta ese momento excluyentes: la dinámica no lineal y la mecánica estadística. Esta conexión es fundamental, ya que cada disciplina complementa a la

otra con herramientas para describir el problema: la dinámica no lineal permite estudiar sistemas complicados con unas pocas variables, mientras que la mecánica estadística gana importancia a la hora de trabajar con sistemas grandes que habían llegado al equilibrio. A pesar de ello, este primer intento por llegar a una solución del problema fue insuficiente, ya que Winfree únicamente dio las pautas generales que deben tener las ecuaciones que describen el sistema.

En este punto, aparece en la historia uno de los referentes del mundo de la sincronización: Yoshiki Kuramoto. Sus estudios [5], basados en el trabajo previo de Winfree, son la piedra angular de la sincronización y una buena primera aproximación para sistemas como el de las luciérnagas comentado previamente o para explicar las uniones de Josephson en superconductores [6]. Posteriormente, se profundizará en el modelo de osciladores propuesto por Kuramoto y se hará un estudio de las propiedades más generales del mismo.

Una vez explicados los orígenes de la sincronización, se procede a comentar el segundo punto relevante de este trabajo: las «redes complejas». Pero, ¿por qué emplear redes complejas? La respuesta es sencilla: las redes están presentes en todas las ciencias, desde la biología hasta la física estadística, pasando por las relaciones sociales. Por tanto, surge la necesidad de comprender los principios que rigen la topología de una red, que en primera instancia se considera como un objeto sintético o definido en un espacio abstracto. Este entendimiento permite dar el salto a la realidad donde las redes pueden representar algo tangible, como es el caso de las redes eléctricas o las redes de neuronas en el sistema nervioso. Ser capaces de entender la estructura de la red de conexiones entre los componentes de un sistema puede desvelar ciertas funciones del sistema que de otra manera permanecen ocultas.

Los trabajos pioneros en dinámica de redes fueron los artículos de Watts y Strogatz [7] y de Barabási y Albert [8], en los que se analizaron diversas propiedades de redes complejas tanto sintéticas como reales, como por ejemplo una red eléctrica, la red de colaboración de actores de películas o la *World Wide Web*, entre otras. De esta forma, las redes complejas se convirtieron en una nueva disciplina que tenía por delante un futuro prometedor y que, unida al campo de los sistemas complejos, ha permitido comprender cualitativa y cuantitativamente ciertos fenómenos colectivos presentes en la naturaleza y la sociedad, una tarea que hace 20 años podría haberse considerado ciencia-ficción.

Sin embargo, tal y como menciona Strogatz [9], pueden surgir ciertas dificultades a la hora de estudiar las redes que afectan al desarrollo del problema:

- Estructura compleja: el grafo puede tener formas inverosímiles y difíciles de representar.
- Evolución de la red: la estructura de la red puede evolucionar en el tiempo.
- Diversidad de conexiones: los enlaces entre los diferentes nodos pueden ser pesados, dirigidos, tener signo ...
- Complejidad dinámica: los nodos pueden representar un sistema dinámico no lineal.
- Diversidad de nodos: cada nodo puede ser de un tipo distinto, representando por ejemplo un generador en el caso de una red eléctrica o también un sustrato o una enzima en las redes metabólicas.
- Meta-complejidad: cada dificultad comentada puede influir en el resto, como se observa en las neuronas donde la dinámica nodal afecta a los pesos de las conexiones.

Para abordar estos problemas, la tendencia general es la de simplificar la red, analizando el problema con estructuras de redes conocidas y no permitiendo la evolución temporal de la misma. Más adelante se estudiarán tres tipos de redes en particular y se mostrarán las propiedades más relevantes de cada una.

A partir de ahora la estructura de la memoria es la siguiente:

- En la sección 2. *Conceptos generales sobre redes complejas* se hace una introducción a las redes complejas, comentando los aspectos teóricos de tres modelos y se muestran los resultados obtenidos en la simulación de cada uno de ellos.
- En la sección 3. *Modelos de sincronización* se exponen los aspectos teóricos de dos modelos de sincronización y se analizan los resultados de las simulaciones realizadas.

El hecho de presentar las secciones en este orden se debe a la importancia que tiene el estudio de los modelos de redes complejas para entender los fenómenos que se muestran en el apartado de la sincronización.

Objetivos

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Grado es estudiar el concepto de sincronización en redes complejas y analizar algunos tipos de redes y sus propiedades. Dicho objetivo puede desglosarse en otros intermedios:

- Entender los fundamentos teóricos de los modelos de tres tipos de redes: el modelo Erdős-Rényi, el modelo Barabási-Albert y el modelo Random Geometric Graph.
- Implementar mediante simulación los tres modelos anteriores y reproducir los resultados teóricos esperados.
- Estudiar dos modelos de sincronización: (a) el modelo de Kuramoto y (b) un modelo tipo Kuramoto de segundo orden.
- Simular la dinámica temporal de los modelos de sincronización.
- Introducir el concepto de sincronización local en redes.
- Interpretar los diagramas de sincronización de los dos modelos, utilizando para ello los tres tipos de redes comentados.

2. Conceptos generales sobre redes complejas

Existen muchos artículos y trabajos que ofrecen una definición formal de qué es una red, pero una manera general e intuitiva de definirla es la siguiente:

«Una **red** es un grafo \mathcal{G} que está formado por un conjunto de nodos (N) y conectados mediante enlaces o *links* (L), siendo el grado del nodo i k_i .»

Existen dos categorías principales que caracterizan a una red:

- Red «dirigida»: si $A_{ij} \neq A_{ji}$ se dice que la red es dirigida. En caso de que $A_{ij} = A_{ji}$, se denomina red no dirigida.
- Red «pesada»: si los elementos A_{ij} pueden tomar distintos valores entre sí se dice que la red es pesada, adquiriendo importancia el *link* más allá de conectar dos nodos. En cambio, si todos los elementos no nulos de la matriz toman el mismo valor, p.ej. 1, se dice que la red es no pesada.

En este Trabajo Fin de Grado se trabaja con redes no dirigidas y no pesadas. Para definir una red a nivel computacional, hay dos formas principales de hacerlo: (a) representar la red mediante su matriz de adyacencia A , en la que el elemento $A_{ij} = 1$ si existe un *link* entre el nodo i y el nodo j y $A_{ij} = 0$ en cualquier otro caso; (b) trabajar con la lista de vecinos w_i , que contiene todos los nodos que están conectados con el nodo i .

Si bien es cierto que trabajar con la lista de vecinos puede ser más complejo inicialmente, hay un ahorro importante de memoria y de velocidad computacional, motivo por el que se escoge como representación en las simulaciones. Esta ventaja se pone de manifiesto sobre todo cuando la red es muy grande y la matriz de adyacencia tiene poca conectividad, lo cual se traduce en un gran número de elementos nulos en la misma.

Otra propiedad que resulta interesante a la hora de analizar las redes es la «distribución de grado» $P(k)$, que define la probabilidad de que un nodo tenga grado k , permitiendo así establecer una clasificación en función de cómo se comporta esta distribución de probabilidades.

Se dice que una red es homogénea si la $P(k)$ de dicha red decae de manera exponencial con el grado, mientras que si la cola de la función es «pesada», es decir, no tiene un comportamiento exponencial, se considera que la red es heterogénea. Es posible medir este grado de heterogeneidad κ de una red a partir de la expresión (1), de manera que si $\kappa \simeq 1$ ($\langle k^2 \rangle \simeq \langle k \rangle^2$) la red es homogénea y si $\kappa \gg 1$ la red es heterogénea, debido a que $\langle k^2 \rangle \gg \langle k \rangle^2$ lo que indica que la varianza de la $P(k)$ respecto a $\langle k \rangle$ es muy grande.

$$\kappa = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle^2} \quad (1)$$

De hecho, en muchas redes heterogéneas estudiadas como aproximación de redes reales el segundo momento de la distribución diverge en el límite termodinámico (TD) $N \rightarrow \infty$, lo que produce que $\kappa \gg 1$.

A continuación, se presentan los tres modelos utilizados en el trabajo para estudiar la sincronización en redes complejas.

2.1. Red Erdős-Rényi (ER)

El modelo Erdős-Rényi [10] entra en la categoría de redes aleatorias y es el modelo de red básico (por su sencillez y características) sobre el cual se analizan inicialmente las propiedades del sistema que se quiere estudiar. Es importante mencionar que este tipo de redes no está definido sobre un espacio euclídeo por lo que una misma red ER puede tener varios grafos distintos en función del algoritmo de representación que se utilice. En la Figura 1 se muestra una representación del grafo de una red ER.

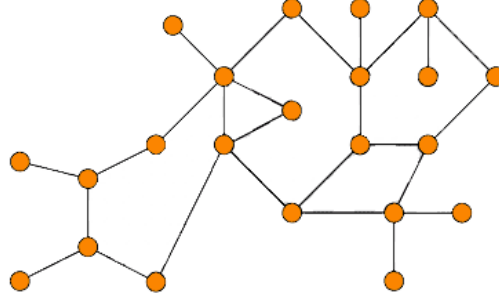


Figura 1: Representación de una red ER.

La manera de implementar computacionalmente este modelo es muy sencilla ya que únicamente hay dos parámetros que lo definen:

1. Se comienza con N nodos aislados.
2. Se define una probabilidad p de enlace y cada par de nodos se conecta de acuerdo a esta probabilidad, hasta que se han recorrido todos los nodos de la red.

Hay varias magnitudes que se pueden obtener de manera teórica y que sirven de guía para comprobar si la implementación de la red es correcta. Estas magnitudes son el número de *links* $E(L)$ y el grado medio $\langle k \rangle$, ambas en función de los parámetros del modelo, N y p . Las expresiones para el valor esperado del número de *links* y del grado medio se muestran en las ecuaciones (2) y (3), respectivamente.

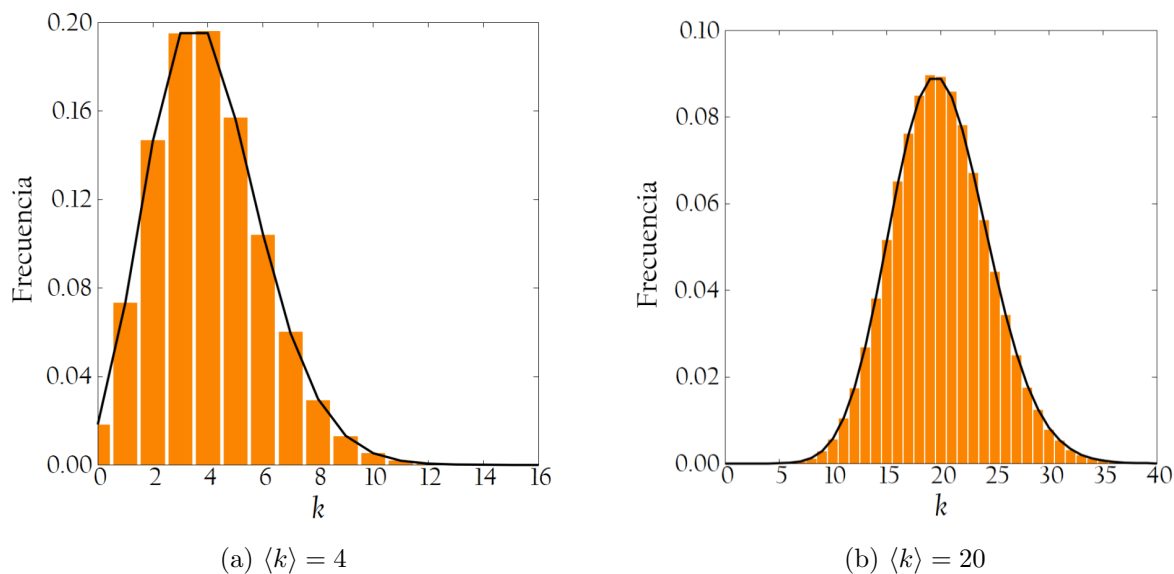
$$E(L) = p \frac{N(N-1)}{2} \quad (2)$$

$$\langle k \rangle = p(N-1) \quad (3)$$

La distribución de grado $P(k)$ de una red ER sigue una distribución de Poisson (ecuación (4)) y, por tanto, entra dentro de la categoría de redes homogéneas.

$$P(k) = \frac{e^{-\langle k \rangle} \langle k \rangle^k}{k!} \quad (4)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4), la Figura 2 muestra los histogramas de la distribución de grado simulados para las redes ER y la función teórica para dos valores de $\langle k \rangle$ distintos: $\langle k \rangle = 4$ (Figura 2a) y $\langle k \rangle = 20$ (Figura 2b).


 Figura 2: Distribución de grado $P(k)$ de la red ER.

En ellas se puede observar que la distribución de grado se ajusta correctamente con la línea teórica según la distribución de Poisson, mostrando el comportamiento exponencial que caracteriza las redes homogéneas.

2.2. Red Barabási-Albert (BA)

En el año 1999, Albert-László Barabási et al. [11] analizaron cuatro redes reales y midieron su distribución de grado. Para cada una de las cuatro redes obtuvieron la misma dependencia potencial, $P(k) \sim k^{-\gamma}$. Esta forma funcional implica que haya muy pocos nodos con un gran número de *links*, los denominados *hubs*, mientras que hay muchos nodos con pocos *links*. Sin embargo, este comportamiento no se reproducía con los modelos propuestos hasta ese momento (como el modelo ER), ya que todos mostraban una caída exponencial con el grado y un grado promedio que venía dado por la probabilidad de enlace. De hecho, la heterogeneidad presente en la forma potencial de $P(k)$ en redes reales hace que también se denominen libres de escala.

Estos autores mostraron dos discrepancias entre estos modelos y las redes reales: por un lado, las redes reales son dinámicas, es decir, no hay un número fijo de nodos a diferencia de los modelos tipo ER; por otro, la conexión entre el nuevo nodo y los que ya pertenecían a la red no se hace de manera aleatoria, si no que se produce lo que denominaron un *preferential attachment*. Es decir, un nodo con mayor conectividad tendrá más probabilidad de recibir el nodo nuevo que otro con menor conectividad. De esta manera, sentaron las bases de las redes libres de escala y definieron un modelo de *preferential attachment* que les permitiera reproducir la $P(k) \sim k^{-\gamma}$ observada en redes reales y estudiar las características topológicas de este tipo de redes [12].

El algoritmo de implementación del modelo BA es el siguiente:

1. Se comienza con $N(t = 0) = N_0$ nodos conectados entre sí.
2. Se define un número de enlaces m que lanzará cada uno de los nodos que se vayan incorporando en el tiempo ($N_0 \geq m$).

3. En cada instante de tiempo t se incorpora un nuevo nodo a la red que podrá conectarse con m nodos que ya estaban en ella. La probabilidad de enlace con un nodo i ($\Pi_i(t)$) viene dada por la ecuación (5).

$$\Pi_i(t) = \frac{k_i(t)}{\sum_{j=1}^{t+m-1} k_j(t)} \quad (5)$$

Es importante mencionar que cada uno de los m *links* debe ir a nodos distintos, por lo que al lanzar el primer *link* a uno de los nodos de la red, por ejemplo, al nodo j , ese nodo está descartado para los $m - 1$ *links* que faltan y hay que actualizar la probabilidad sin incluir $k_j(t)$ en el sumatorio e imponiendo $k_j(t) = 0$ hasta que se pase a $t + 1$.

4. Se repite el paso 3 hasta que se enlazan los N nodos que tendrá la red en el tiempo final.

En la Figura 3 se representa el grafo de una red BA, donde los puntos negros son los *hubs* de la red, que tienen mayor conectividad que el resto de nodos, aunque, a pesar de que tampoco está definida en un espacio métrico como las redes ER .

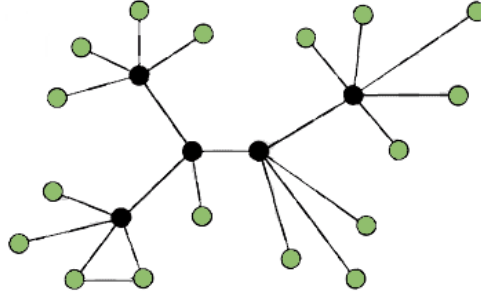


Figura 3: Representación de una red BA.

Las características principales de este modelo son la distribución de grado que se obtiene, que es $P(k) \sim k^{-\gamma}$ con $\gamma \leq 3$, cumpliéndose la igualdad únicamente en el límite termodinámico, y la opción de escoger un grado promedio, ya que $\langle k \rangle \simeq 2m$ para t grande. Además, este tipo de redes pertenecen a la categoría de redes heterogéneas, ya que calculando el segundo momento de la distribución $\langle k^2 \rangle$ (desarrollo (6)) se ve que este diverge.

$$\langle k^2 \rangle = \sum_{k_{min}}^{k_{max}} k^2 P(k) \simeq \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^2 P(k) dk \sim \int_{k_{min}}^{k_{max}} k^{2-\gamma} dk = \frac{k^{3-\gamma}}{3-\gamma} \Big|_{k_{min}}^{k_{max}} \quad (6)$$

Si $\gamma < 3$ como en el modelo BA, $\langle k^2 \rangle \sim k_{max}^{3-\gamma}$ y cuando $k_{max} \rightarrow \infty$ (límite TD), el segundo momento divergerá y, por tanto, $\kappa \rightarrow \infty$.

A pesar de la importancia que tiene el modelo de BA para obtener redes libres de escala, la imposibilidad de modificar γ llevó a Dorogovtsev et al. [13] a proponer una generalización de este modelo para que γ dependiera de un parámetro libre α , donde la probabilidad de enlace de cada nodo entrante se muestra en la expresión (7).

$$\Pi_i(t) = \frac{k_i(t) + \alpha}{\sum_{j=1}^{t+m-1} (k_j(t) + \alpha)} \quad (7)$$

Esta nueva expresión para la probabilidad de enlace $\Pi_i(t)$ permite generar redes libres de escala con $P(k) \sim k^{-\gamma}$ y $\gamma = 3 + \frac{\alpha}{m} \in (2, \infty)$.

A partir de la simulación del algoritmo, se obtuvo la Figura 4. En ella se muestran las distribuciones de grado en escala logarítmica de dos redes BA con $N = 10000$ y parámetros $m = 2$ (Figura 4a) y $m = 4$ (Figura 4b). También se representa el ajuste de la distribución para obtener el γ_{exp} y la recta k^{-3} , correspondiente al límite termodinámico.

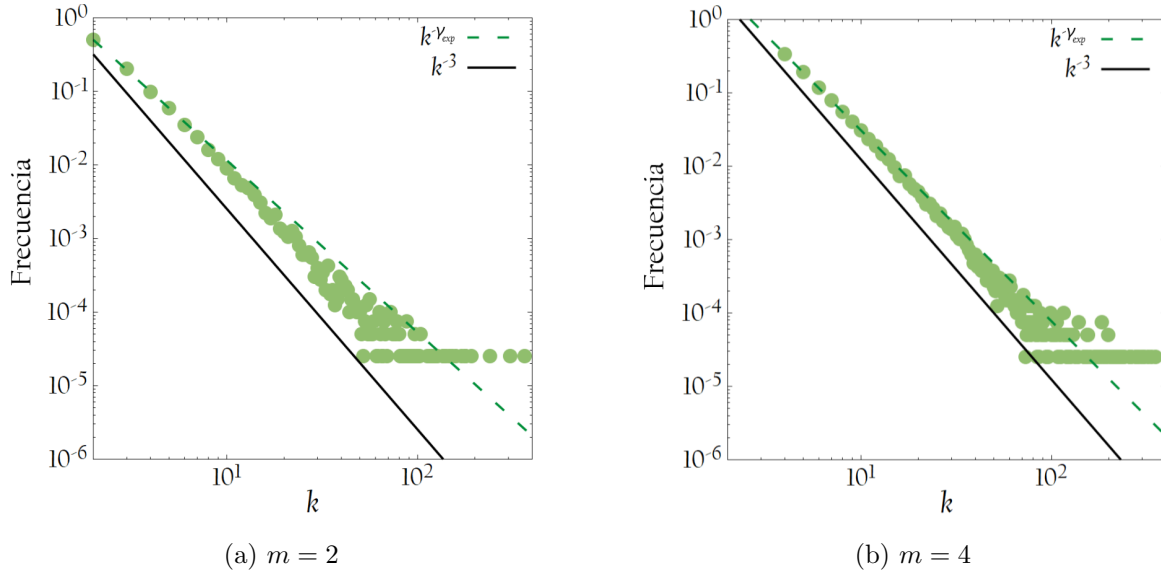


Figura 4: Distribuciones de grado simuladas junto con la recta de ajuste y la recta en el límite termodinámico de la red BA.

En ellas se observa la característica de las redes libres de escala en las que un gran número de nodos tienen grado bajo, mientras que una pequeña fracción de los mismos tiene un grado muy elevado. Es justo en esta zona donde el ajuste a la recta es peor, ya que al haber un número bajo de nodos que cumplan estas condiciones no hay suficiente estadística como para que la distribución sea uniforme para valores altos de k . Los valores de γ_{exp} obtenidos para tres valores de m son $\gamma_{m=2} = 2.34$, $\gamma_{m=3} = 2.49$ y $\gamma_{m=4} = 2.60$, estando los tres por debajo de $\gamma_{TD} = 3$, tal y como era de esperar.

2.3. Random Geometric Graph (RGG)

El último modelo de red que se estudia en esta memoria es el modelo de Random Geometric Graph, que pertenece a las redes espaciales y cuyas propiedades fueron estudiadas por Mathew Penrose [14]. A diferencia de las redes de ER y BA, la red RGG está definida dentro de un espacio métrico, por ejemplo \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 , pudiendo representar redes físicas donde la localización de los nodos es importante, como redes de proximidad en sistemas sociales [15] o en poblaciones de plantas [16].

El algoritmo de implementación depende únicamente de dos parámetros: el número de nodos N y la distancia de enlace d . En este caso, el espacio métrico utilizado es \mathbb{R}^2 de dimensiones $L_x \times L_y = 1 \times 1$ y la manera de construir una RGG es la siguiente:

1. Se generan las posiciones $\vec{r}_i(x, y)$ de cada uno de los N nodos siguiendo una distribución arbitraria. En este trabajo se hace de manera aleatoria.
2. Utilizando la distancia entre dos puntos del espacio euclídeo definida según la ecuación (8), se escoge uno de los nodos de la red que se denomina «central» y se traza un círculo de radio d tomando $\vec{r}_{central}$ como el centro del círculo, de manera que todos los nodos que cumplan que $d(\vec{r}_{central}, \vec{r}_j) \leq d$ se enlazan con el nodo central.

$$d(\vec{r}_i, \vec{r}_j) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (8)$$

3. Se repite el paso 2 escogiendo cada uno de los nodos de la red como el nodo central.

Mediante la simulación del algoritmo se obtuvo la Figura 5, donde se muestra la misma red pero con distintos valores de d : $d=0.1$ (Figura 5a) y $d=0.2$ (Figura 5b). Es importante mencionar que las redes pueden ser no conexas (Figura 5a), donde no hay una única componente, o conexas (Figura 5b), donde todos los nodos de la red forman parte de la misma componente, es decir, es posible encontrar un camino entre dos puntos cualquiera de la red.

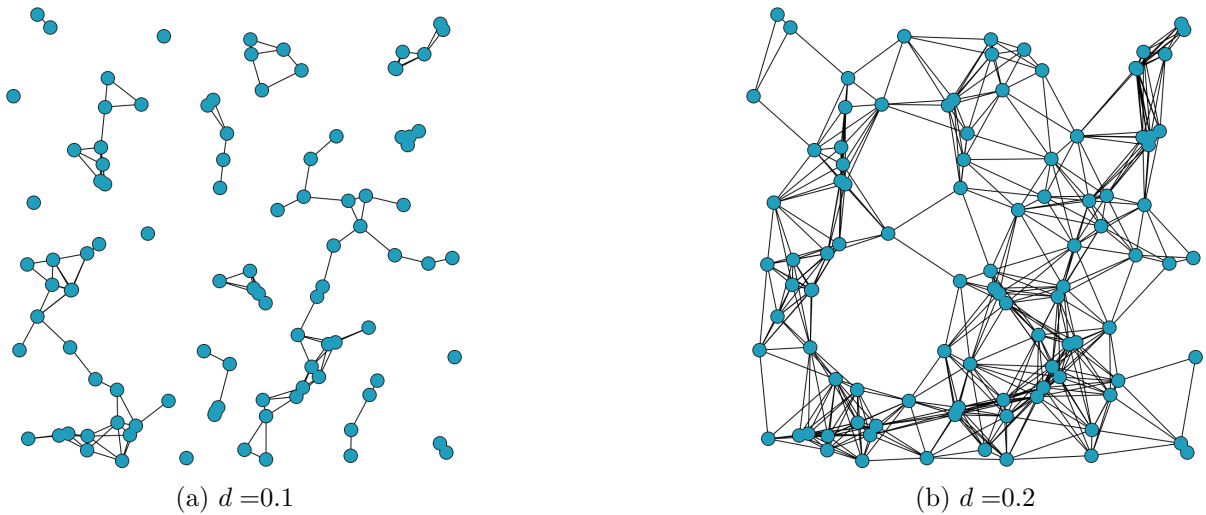


Figura 5: Representación gráfica de dos redes RGG.

Las redes RGG tienen una distribución de grado equivalente a la de las redes aleatorias, es decir, su $P(k)$ sigue la ecuación (4). Sin embargo, dado que la ecuación depende de $\langle k \rangle$ y este parámetro no se puede elegir a la hora de construir la red, es necesario encontrar una expresión que relacione $\langle k \rangle$ y d . Así, usando la definición de grado promedio, el número de nodos que se enlazan con otro vendrá dado por el producto de la densidad de nodos ρ que hay en la red y el área del círculo de radio d , tal y como se muestra en la ecuación (9).

$$\langle k(d) \rangle = \rho \times \pi \times d^2 = \frac{N}{L_x \cdot L_y} \times \pi \times d^2 \quad (9)$$

Para comprobar que el grado promedio sigue esta dependencia, se realizan diferentes simulaciones para redes de distintos tamaños ($N = 25, 30, 50, 70, 100$ y 250) y se hace un ajuste utilizando un parámetro libre A_N . Si $A_N \rightarrow 1$ indica que el ajuste es muy bueno y, por tanto, se cumple esta dependencia. Los resultados de la simulación se muestran en la Figura 6.

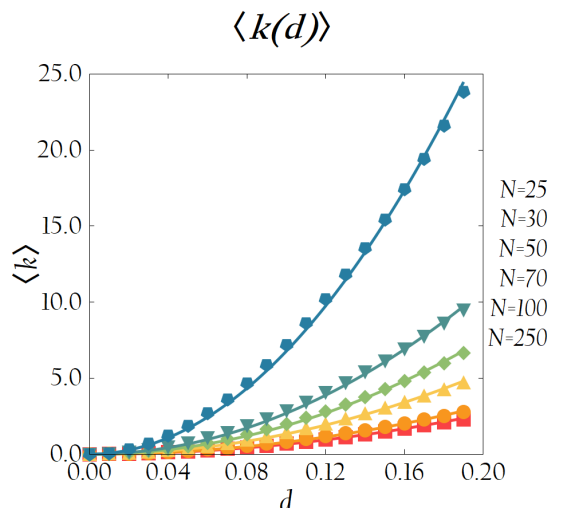


Figura 6: Grado promedio en función de d para varios tamaños de red RGG.

En la Tabla 1 se muestran los valores de A_N obtenidos para los seis tamaños de red.

N	25	30	50	70	100	250
A_N	0.834	0.836	0.847	0.855	0.857	0.863

Tabla 1: Parámetros obtenidos del ajuste sobre $\langle k(d) \rangle$.

A partir de la Figura 6 y de los valores de A_N se puede llegar a la conclusión de que el ajuste no es del todo preciso, ya que hay un factor ~ 0.9 de normalización entre la dependencia esperada y la obtenida.

Para ver la dependencia de la distribución de grado con d , se realizaron simulaciones con un tamaño de red $N = 100$ y cuatro valores diferentes de distancia de enlace. El hecho de elegir $N = 100$ se debe a que es un tamaño de red adecuado para tener buena estadística y un tiempo de simulación asumible.

Los resultados se muestran en la Figura 7. En ella se incluye la dependencia teórica esperada de acuerdo a la distribución de Poisson (según la ecuación (4)) y se obtiene $\langle k(d) \rangle$ a partir de la ecuación (9). Cualitativamente, los histogramas de la Figura 7 siguen una distribución de tipo Poisson. Sin embargo, para los valores altos de d (Figuras 7c y 7d), el ajuste a la distribución teórica no es muy bueno, sobre todo en la zona central, debido a que la conectividad es menor que la esperada.

Tanto en la Figura 6 como en la Figura 7 los resultados obtenidos con las simulaciones no han sido los esperados, ya que hay diferencias respecto a las distribuciones teóricas. El motivo de estas discrepancias puede ser la manera de construir la red, ya que las condiciones de contorno no son periódicas, perdiendo muchos enlaces en los bordes de la red.

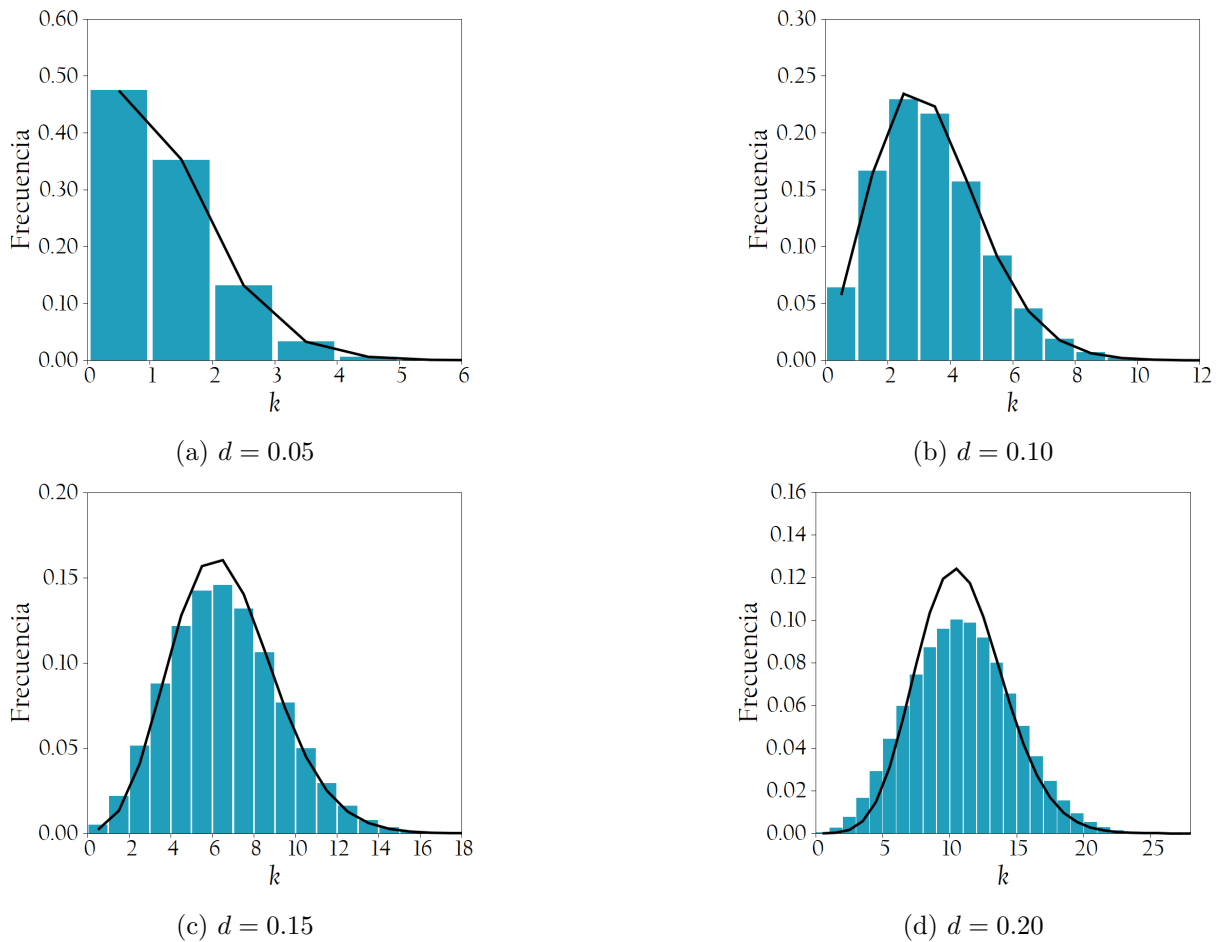


Figura 7: Distribución de grado de la red RGG para cuatro valores de d .

Para resolver este problema se imponen condiciones de contorno periódicas (*Periodic Boundary Conditions*, PBC) de tipo toroidales (veáse ANEXO I), de tal forma que se vuelven a realizar las simulaciones para obtener las gráficas de $\langle k(d) \rangle$ y las distribuciones de grado $P(k)$ (Figuras 8 y 9, respectivamente) con el fin de compararlas con los resultados originales (Figuras 6 y 7).

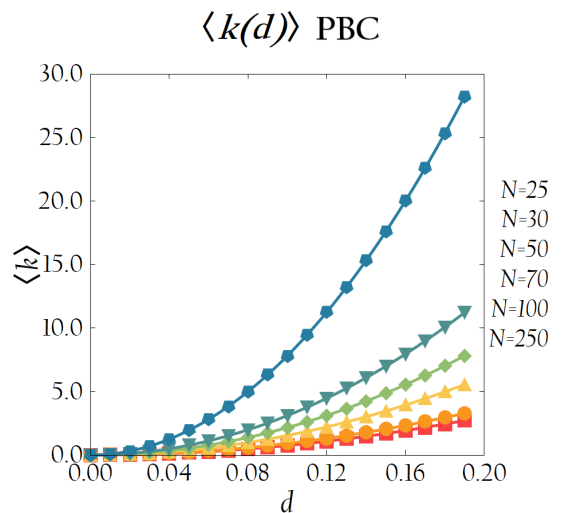


Figura 8: Grado promedio en función de d para varios tamaños de red RGG con PBC.

Los nuevos valores del parámetro libre (A'_N) obtenidos del ajuste a partir de la Figura 8 se recogen en la Tabla 2.

N	25	30	50	70	100	250
A'_N	0.959	0.966	0.980	0.985	0.989	0.996

Tabla 2: Parámetros obtenidos del ajuste sobre $\langle k(d) \rangle$ imponiendo PBC.

Estos resultados son muy cercanos a 1, lo que se traduce en un buen ajuste a la dependencia esperada, frente al valor 0.9 que se obtenía sin incluir PBC.

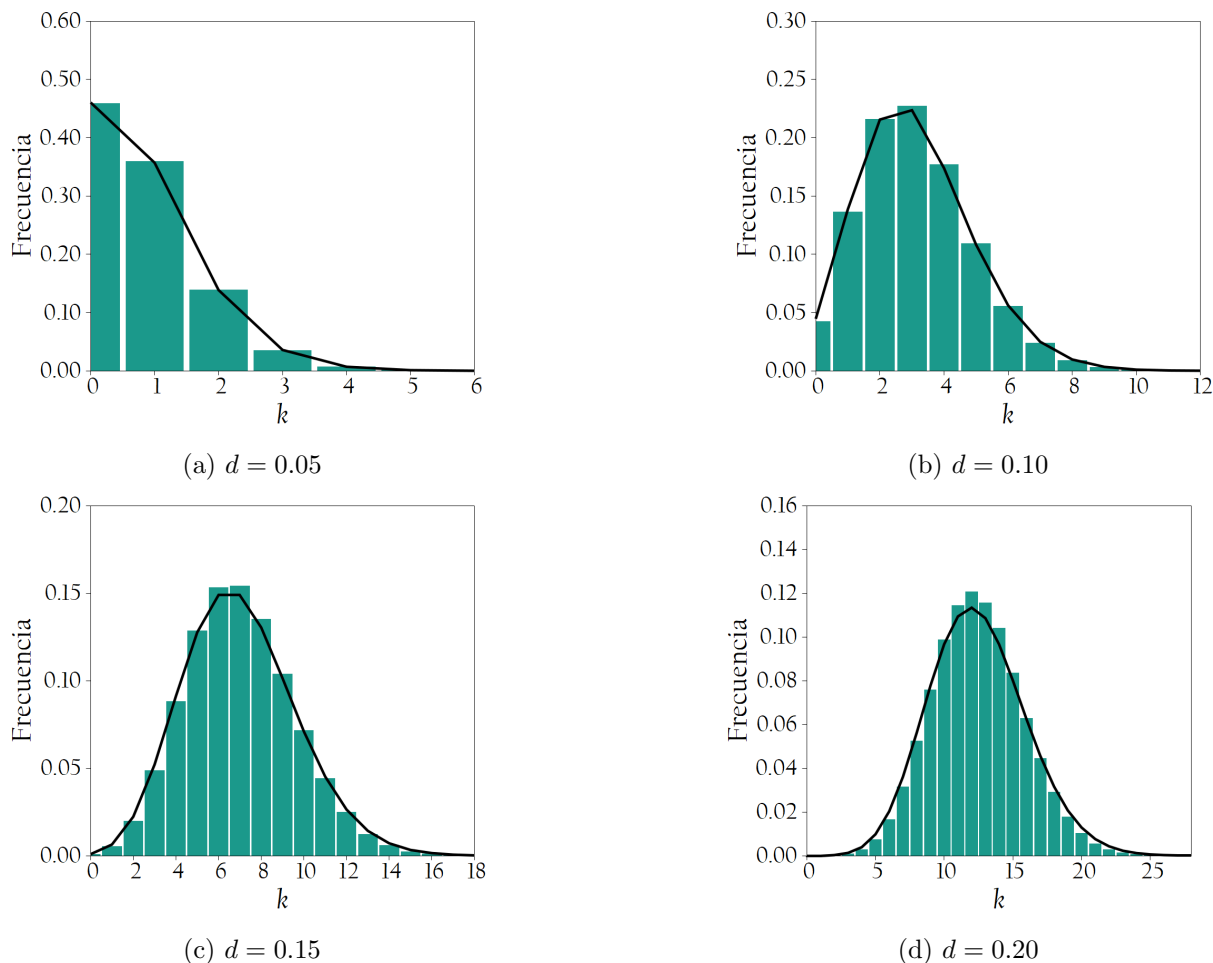


Figura 9: Distribución de grado de la red RGG con PBC para cuatro valores de d .

Como se observa en las Figuras 9a y 9b, al imponer las PBC no hay cambios en el ajuste de los histogramas. Sin embargo, en las Figuras 9c y 9d las distribuciones de grado simuladas son mejores que en las Figuras 7c y 7d, pudiendo concluir que al incluir las PBC se reproducen las tendencias teóricas. No obstante, el hecho de implementar condiciones periódicas plantea un problema dado que las redes espaciales reales no presentan esta característica. Por tanto, una vez comprobados los resultados teóricos con PBC se decide continuar sin la implementación de estas a la hora de estudiar la sincronización en redes, de forma que el comportamiento sea lo más fiel posible a una red espacial real.

Se ha comentado previamente que las redes RGG pueden no ser conexas dependiendo de la distancia de enlace, lo que permite estudiar la evolución de la componente gigante (GC) en

función de d . Por definición, la GC es la fracción más grande de los nodos que pertenecen a una misma componente y que, por tanto, están conectados a través de un camino entre sí.

Cabe pensar que para valores pequeños de d la GC será mucho menor que uno, ya que inicialmente se forman clústeres de pocos nodos. Sin embargo, conforme d aumenta, estos clústeres se van uniendo entre sí y creando pequeñas componentes que solo se observan a nivel microscópico. Al llegar a un valor crítico d_c , se produce un salto y muchos de estos clústeres se conectan entre sí formando una componente macroscópica. Además, d_c depende de la densidad de nodos ρ de la red, puesto que para valores más grandes de ρ los nodos están más cerca entre sí y la distancia necesaria para formar una GC=1 es menor, dando lugar también a una transición entre GC=0 y GC=1 más brusca.

En la Figura 10 se muestran los resultados de la GC en función de d para cuatro valores distintos de N , siendo el tamaño de la red $L_x \cdot L_y$ el mismo para los cuatro. Se observa que el comportamiento de la GC concuerda con el esperado, ya que disminuye d_c con N y se produce una transición de GC ~ 0 a GC=1, que es más pronunciada a medida que aumenta N .

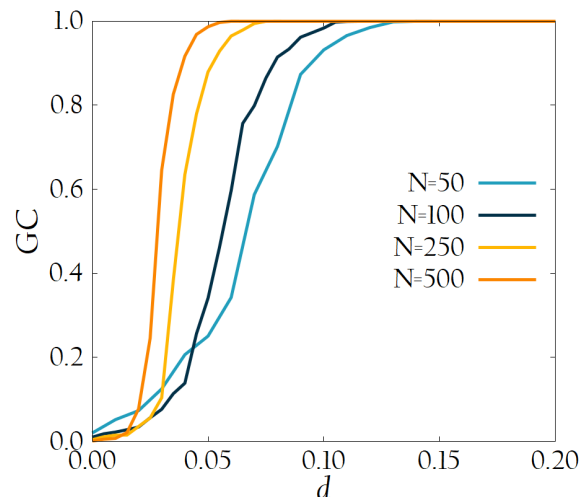


Figura 10: GC en función de d para varios tamaños de red RGG.

3. Modelos de sincronización

3.1. Fundamentos teóricos

Antes de profundizar en la teoría, se definen los conceptos de sincronización y oscilador recogidos en el libro de S. H. Strogatz, en su libro *Sync: How order Emerges from Chaos in the Universe, Nature and Daily Life* [3]:

«La **sincronización** es el orden que aparece en determinados sistemas cuando ciertos fenómenos ocurren al mismo tiempo.»

«Un **oscilador** es una entidad que se repite en el tiempo a intervalos más o menos regulares.»

Tomando estos dos conceptos como referencia, se puede decir que la sincronización es el comportamiento que se da en un conjunto grande de osciladores con distintas frecuencias cuando pasan a tener un ritmo común diferentes al que tienen de manera natural.

3.1.1. Modelo de Kuramoto

Como ya se ha comentado en la introducción, el modelo de Kuramoto sentó las bases teóricas de lo que hoy se conoce como la transición a la sincronización.

Tras los trabajos de Winfree, Kuramoto desarrolla un modelo de osciladores de fase, es decir, un conjunto de variables dinámicas $\theta_i(t) \in (0, 2\pi)$ y cuya amplitud es constante en el tiempo. Además, da forma a la ecuación dinámica de primer orden de cada oscilador de fase $\dot{\theta}_i(t)$ concretando el término de acoplo [5] que, en este caso, viene dado por la diferencia de fases entre dos osciladores (ecuación (10)).

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (10)$$

En la ecuación se observa que los dos parámetros que van a regir la dinámica de $\theta_i(t)$ son ω_i y K . Por una parte, el parámetro ω_i es la frecuencia natural de cada oscilador y se escoge de tal manera que siga una distribución unimodal y centrada en una frecuencia ω_0 . Por tanto, uno de los requisitos que debe tener la función de distribución $g(\omega)$ de las frecuencias naturales es que sea simétrica respecto a $\omega_0 = \langle \omega \rangle$. En este caso, $g(\omega)$ es la función de distribución de Cauchy (expresión (11)) con frecuencia central ω_0 y dispersión Γ .

$$g(\omega, \omega_0, \Gamma) = \frac{1}{\pi \cdot \Gamma \cdot \left[1 + \left(\frac{\omega - \omega_0}{\Gamma} \right)^2 \right]} \quad (11)$$

Por otra parte, el parámetro K caracteriza la fuerza del acoplo e interviene dando más peso al término de diferencia de fases. De hecho, este acoplo K es el parámetro de control que gobierna la transición a la sincronización, presentando un valor crítico, K_c a partir del cual se considera que los osciladores están sincronizados.

Haciendo un análisis cualitativo de la dinámica de los osciladores, se pueden describir tres regímenes distintos en función del valor de K (ver Figura 11):

- $K \rightarrow 0$: al tener una distribución de frecuencias naturales heterogénea, los osciladores son incapaces de sincronizarse ya que el término de acoplamiento es bajo y, por tanto, el sistema se comporta de manera incoherente (zona roja de la Figura 11).
- $K \sim K_c$: en el punto cercano a la transición, se observa como poco a poco se van formando clústeres de osciladores que tienden a sincronizarse, marcando el comienzo de la sincronización, más conocido como *onset* de sincronización (zona naranja de la Figura 11).
- $K > K_c$: una vez se llega al *onset*, existen dos comportamientos bien diferenciados en el sistema, uno en el que los osciladores tienen una frecuencia similar y se encuentran en el clúster de sincronización y otro en el que la frecuencia natural de los osciladores es tan dispar del resto que no les permite estar en dicho clúster.

A medida que aumenta el acoplo, estos últimos se van uniendo al conjunto de osciladores cuyas fases son coherentes, hasta que se llega a la situación de que todo el sistema se encuentra sincronizado (zona verde de la Figura 11).

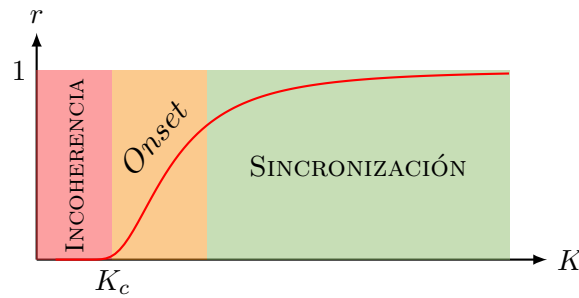


Figura 11: Diagrama de sincronización teórico.

Como se ha mencionado, existe similitud entre la sincronización de los osciladores y una transición de fase. Aquí es donde se pone de manifiesto la importancia de la Física Estadística, puesto que interesa definir un parámetro de orden que pueda describir cómo de sincronizado está nuestro sistema. Para ello, cada oscilador representa un fasor y el parámetro de orden se obtiene como el promedio de todos los fasores de la red, lo que da una idea de cómo de relacionadas están las fases entre sí.

$$r(t) \cdot e^{i\Psi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \in \mathbb{C} \quad (12)$$

En particular, Kuramoto introduce el módulo del fasor promedio $r(t)$ como parámetro de orden a la hora de estudiar el diagrama de sincronización obtenido en las simulaciones ya que, además de tender a un valor estacionario cuando $t \rightarrow \infty$ ($r(t \rightarrow \infty) \equiv r(K)$), contiene la información acerca de cómo de sincronizado se encuentra el sistema de osciladores. Si los osciladores están poco sincronizados, este promedio será prácticamente nulo al no haber ningún tipo de coherencia y $r(K) \rightarrow 0$, mientras que si los osciladores se encuentran sincronizados, todas las fases tendrán el mismo valor en un instante determinado y entonces $r(K) \rightarrow 1$ (nótese en la Figura 11). La fase $\Psi(t)$ no describe ninguna propiedad interesante para el análisis de la transición de fase y no tiene un valor estacionario, por lo que no se calcula en las simulaciones.

El modelo de Kuramoto tiene la posibilidad de hacer cálculos teóricos, como por ejemplo del punto crítico del parámetro de control K , que tiene un valor $K_c = \frac{2}{\pi \cdot g(\omega_0)}$. Este valor tiene un sentido físico, ya que $g(\omega_0)$ es el número de nodos que ya se encuentran en la frecuencia promedio y cuantos más nodos tengan como frecuencia natural la frecuencia promedio ω_0 , más sencillo será llegar al estado sincronizado y, por tanto, menor será el acoplo K_c necesario para lograrlo. Se puede encontrar más información del análisis teórico en el trabajo del propio Kuramoto [5].

Aunque inicialmente el modelo surge para caracterizar un sistema con interacciones «todos con todos», se pueden filtrar los osciladores con una estructura determinada que venga caracterizada por una red compleja. Para ello, se introduce la matriz de adyacencia en el término de acoplo, tal y como se muestra en la ecuación (13).

$$\dot{\theta}_i(t) = \omega_i + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (13)$$

Además, se ha cambiado K/N por λ al ser el número de nodos de la red finito y no necesitar normalizar el término. Este nuevo parámetro de control λ describe los mismos tres regímenes del sistema que se han comentado previamente. De esta forma, se puede representar un sistema físico mediante diferentes topologías de la red y así hacer una comparación tanto cualitativa como cuantitativa entre diferentes modelos de redes.

Para profundizar más en las cuestiones teóricas del modelo en redes complejas, se pueden consultar los trabajos de Arenas et al. [17] o de D'Souza et al. [18], donde se obtienen estimaciones teóricas para λ_c con distintas topologías de redes, entre otros resultados.

3.1.2. Modelo tipo Kuramoto de segundo orden

Pese al potencial que tiene el modelo de Kuramoto para describir muchos de los fenómenos de sincronización observados en el mundo real, hay dos trabajos (Ermentrout [19], Spigler y Acebrón [20]) que muestran discordancia entre la velocidad a la que se llega a la sincronización en el modelo de Kuramoto y los datos experimentales. Además, este modelo requiere una constante de acoplo infinita para lograr la perfecta coherencia de los osciladores, comportamiento que tampoco se observa en la realidad. Si bien es cierto que esta última característica del modelo es inherente a la forma en la que se define el mismo, el hecho de que la sincronización ocurra más rápidamente que en los casos reales llevó a Spigler y Acebrón a introducir un término de inercia en el sistema para ralentizar dicha sincronización.

Por otra parte, Filatrella et al. [1] derivaron el término inercial estudiando la ecuación clásica de oscilación de redes eléctricas, cuyo resultado final muestra la ecuación dinámica de la aceleración angular $\ddot{\theta}_i(t)$ (ecuación (14)). En el ANEXO II se muestra la deducción física del modelo recogida en el artículo de Filatrella.

$$\ddot{\theta}_i(t) = \omega_i - \alpha \dot{\theta}_i(t) + \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t)) \quad (14)$$

En este caso, la ecuación diferencial es de segundo orden, siendo α el término de disipación del sistema tomando $\alpha = 1$ en las simulaciones. Para profundizar más en los aspectos teóricos de la sincronización del modelo tipo Kuramoto de segundo orden se puede examinar el trabajo de Peng Ji [21], donde se lleva a cabo un análisis teórico de la transición de fase del modelo.

3.2. Simulaciones

Tal y como se ha comentado en la introducción (apartado 1), en este trabajo Fin de Grado se estudian los fenómenos de sincronización en redes complejas junto con los tres tipos de redes vistos.

A la hora de presentar los resultados en las gráficas, las que corresponden con los resultados del modelo de Kuramoto se referencian como modelo de Kuramoto de primer orden (O1) y las del modelo tipo Kuramoto de segundo orden como modelo de Kuramoto de segundo orden (O2).

En esta sección se hace un estudio de la dinámica temporal del parámetro de orden para distintos valores de λ y se visualizan los diferentes regímenes del modelo. También se muestra una manera de obtener computacionalmente el valor crítico λ_c y se define un nuevo parámetro de orden que está relacionado con la sincronización local de la red. Por último, se analizan los diagramas de sincronización del modelo para los tres modelos de redes.

En la Tabla 3 se muestran los valores de los parámetros utilizados en las simulaciones. Es importante mencionar que en el caso de las redes RGG es necesario que la GC sea 1, por lo que hay más restricción en la elección de d y, por tanto, el grado promedio es más alto que en los otros casos.

ER	$N=100$	$p=0.0404$	$\langle k \rangle=4$
BA	$N=100$ ($N_0=3$)	$m=2$	$\langle k \rangle=4$
RGG	$N=100$	$L_x, L_y=1, d=0.20$	$\langle k \rangle=12$
$g(\omega)$	$\omega_0=0$	$\Gamma=0.5$	

Tabla 3: Parámetros escogidos para realizar las simulaciones.

El algoritmo de integración de ecuaciones diferenciales (ANEXO III) escogido en este Trabajo Fin de Grado para resolver el sistema es el método de Runge-Kutta de orden 4, cuyo origen se remonta hasta el año 1900 cuando fue desarrollado por los matemáticos C. Runge y M. W. Kutta [22]. Las principales razones por las que se ha escogido este método de resolución de ecuaciones diferenciales es su fácil implementación computacional y la estabilidad de las soluciones, aunque requiere de un mayor tiempo de computación que otros métodos de integración.

3.2.1. Dinámica de los osciladores

Previamente se han descrito los distintos regímenes que se pueden encontrar en el sistema de osciladores en función del valor de la constante de acoplo. Para poder visualizar este comportamiento, en la Figura 12 se representan las fases ($\theta_i(t)$) de cada uno de los osciladores en un círculo de radio unidad para cuatro valores distintos de λ , mostrando las zonas de interés: la región de bajo acoplo, la región cerca al punto de transición y dos regiones para acoplo muy grande. La red escogida para la visualización es una red ER y los valores de $\theta_i(t)$ se escogen en el régimen estacionario.

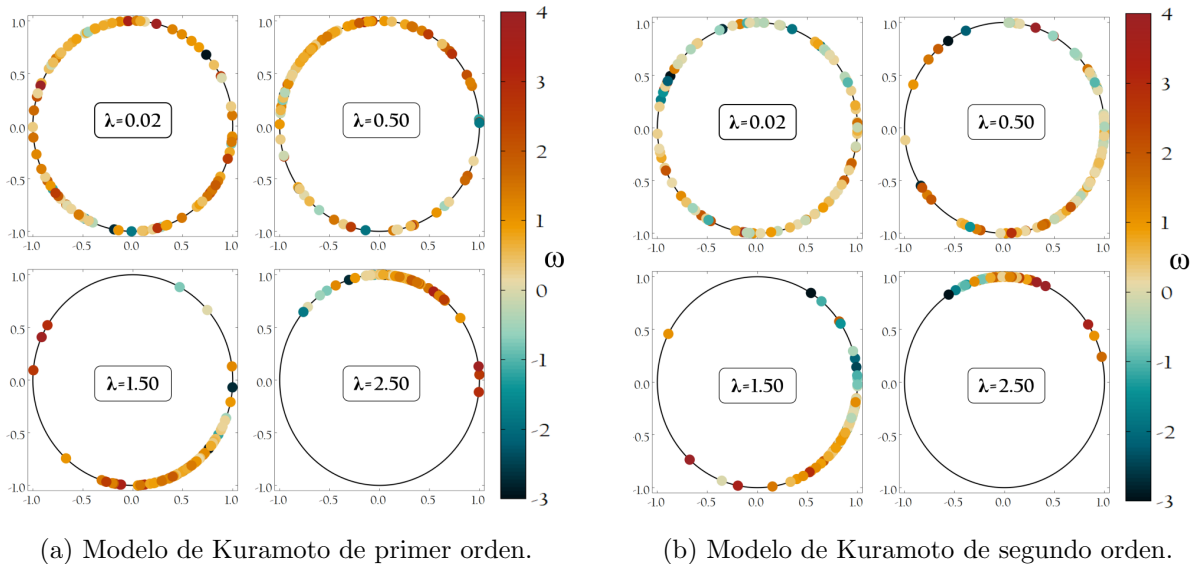


Figura 12: Representación de las fases de los osciladores para distintos valores de λ .

En ambos modelos la dinámica es muy similar, ya que para un valor de $\lambda \sim 0,02$ la nube de osciladores está dispersa por todo el círculo, mientras que para $\lambda \sim 0,5$ comienzan a agruparse aquellos osciladores que tienen frecuencias naturales más similares. En los valores altos de λ la única diferencia está en que los osciladores se encuentran más o menos agrupados, pero casi todos forman parte de la nube. Además, es importante remarcar que los propios osciladores se colocan en el grupo de manera que aquellos con ω mayor (tonos más cálidos) se colocan delante de los que tienen ω menor (tonos más fríos).

A continuación, en la Figura 13 se muestra la evolución temporal del parámetro de orden $r(t)$ para distintos valores de λ , de nuevo en una red de tipo ER.

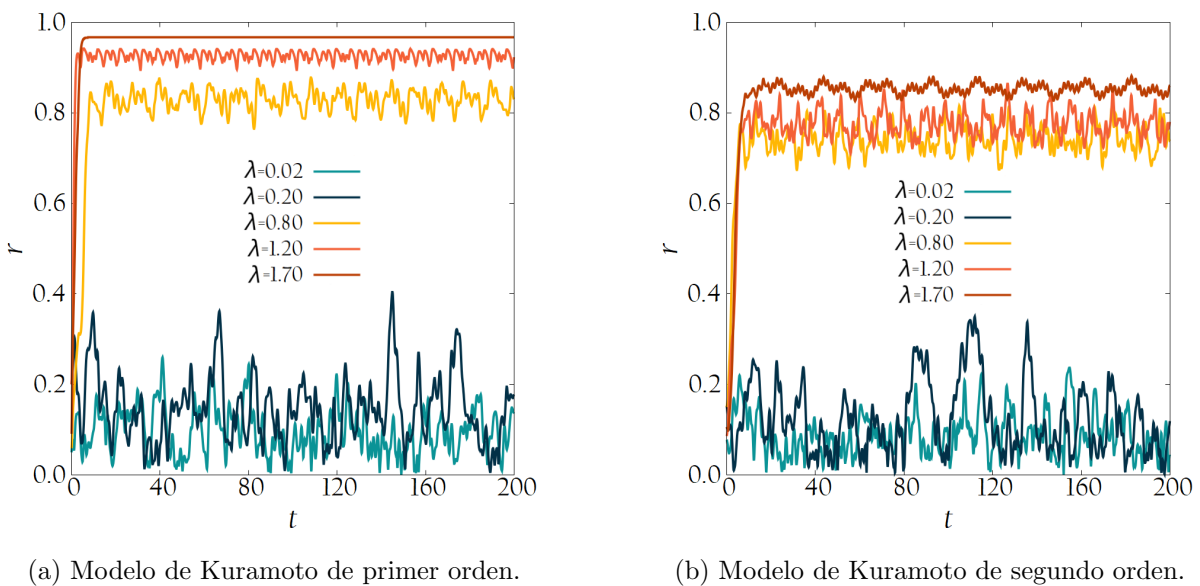


Figura 13: Evolución temporal del parámetro de orden $r(t)$.

Como se puede ver, hay dos comportamientos bien diferenciados: para valores bajos de λ , $r(t)$ oscila mucho en el tiempo, ya que la fase de los osciladores no tiene ningún tipo de coherencia y hay muchas fluctuaciones en la sincronización, sin llegar a tener un clúster grande en el que se agrupen los osciladores. Sin embargo, para valores más altos de λ , aunque el valor de $r(t)$ sigue oscilando, se observa que el valor medio es constante y las variaciones tienen una amplitud más baja. La manera de obtener el valor de $r(\lambda)$ es realizando un promedio temporal para valores altos de t , es decir, cuando se está ya en la zona estacionaria.

Las condiciones iniciales $(\theta_i(0), \dot{\theta}_i(0))$ utilizadas para obtener los resultados de cada valor de λ son aleatorias y por eso el valor de $r(t)$ comienza siempre desde valores muy bajos, debido a que la red parte sin sincronización. Sin embargo, a la hora de obtener los diagramas de sincronización se utiliza el método de continuación adiabática, es decir, las condiciones iniciales de un valor dado λ son las condiciones finales del valor anterior del parámetro de control. De esta manera, el régimen estacionario se alcanza antes y no hace falta tanto tiempo de simulación, ya que generalmente la situación varía poco de un valor a otro.

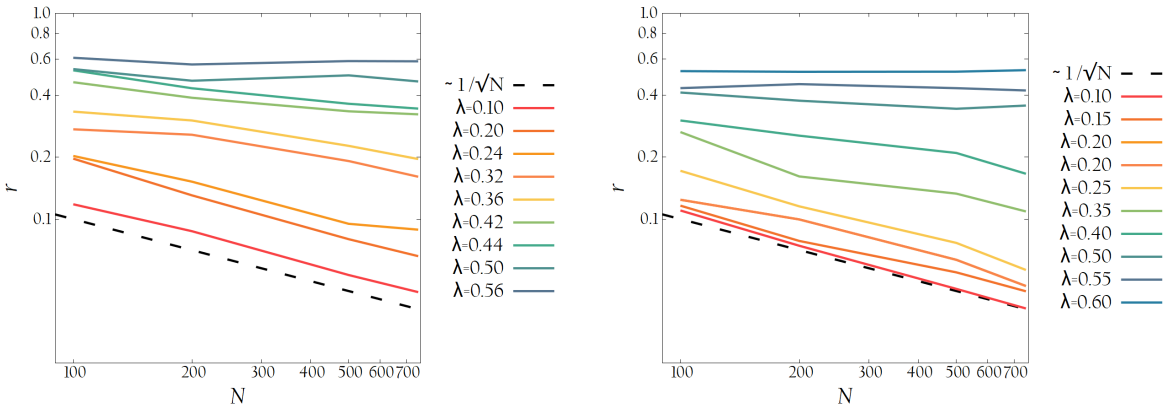
3.2.2. Obtención del valor crítico de la constante de acoplo λ_c

A pesar de que el valor crítico de la constante de acoplo puede obtenerse teóricamente, los resultados son muy aproximados ya que se hacen asunciones que posteriormente no se cumplen. Por tanto, se muestra una forma de calcularlo computacionalmente mediante el método de escalado de tamaño finito [23] (*finite-size scaling* FSS).

Teóricamente, para valores bajos de λ , el parámetro $r(\lambda)$ sigue una dependencia $1/\sqrt{N}$ con el tamaño de red y a medida que aumenta la constante de acoplo se pierde esta dependencia, hasta que el valor de $r(\lambda)$ es el mismo para cualquier tamaño de N . Por tanto, se puede calcular $r(N)$ para varios valores de λ y el valor en el que $r(N) \sim \text{constante}$ se toma como λ_c .

En la Figura 14 se muestran dos gráficas con los resultados de la simulación realizada para obtener el valor crítico de la constante de acoplo en una red ER. También se incluye la línea teórica $1/\sqrt{N}$ para observar esta dependencia en valores bajos de λ .

A partir de esta figura, se demuestra la dependencia de $r(N)$ teórica. Además, el valor de λ_c para el modelo de Kuramoto de primer orden en una red ER es $\lambda_c \simeq 0.56$ (Figura 14a) y para el modelo de Kuramoto de segundo orden $\lambda_c \simeq 0.60$ (Figura 14b).



(a) Modelo de Kuramoto de primer orden.

(b) Modelo de Kuramoto de segundo orden.

Figura 14: Obtención de λ_c en la red ER (escala logarítmica).

3.2.3. Sincronización local: r_{link}

El estudio del comportamiento del parámetro de orden $r(\lambda)$ se centra en la sincronización global de la red y no ofrece información de cómo se sincronizan los nodos entre sí. Muchas veces la topología de la red provoca que se formen clústeres de nodos que están sincronizados entre sí aunque la constante de acoplo sea baja. Sin embargo, este comportamiento solo se da a escalas microscópicas y, por tanto, no se refleja en el valor de $r(\lambda)$, el cual muestra la sincronización de la red en conjunto.

Una forma de analizar la sincronización local es mediante la definición de un nuevo parámetro de orden propuesto por Gómez-Gardeñes et al. [24, 25]. Por una parte, se define $r_{ij}(\lambda)$ según la ecuación (15), que mide la sincronización entre dos nodos para un determinado valor de λ , mientras que el parámetro $r_{link}(\lambda)$ (ecuación (16)) mide el grado de sincronización local de la red y es el que interesa estudiar.

$$r_{ij}(\lambda) = \frac{1}{\Delta t} \left| \int_{t_{trans}}^{t_{fin}} e^{i(\theta_j - \theta_i)} dt \right| \quad (15)$$

$$r_{link}(\lambda) = \frac{1}{2L} \sum_i \sum_{j \in w_i} A_{ij} r_{ij}(\lambda) \quad (16)$$

En el ANEXO IV se muestra una interpretación física del parámetro de orden r_{link} .

3.2.4. Diagramas de sincronización

En este apartado se analizan los diagramas de sincronización de los distintos tipos de redes, tanto para el modelo de Kuramoto de primer orden como para el de segundo orden. En ellos se estudia la evolución de los parámetros $r(\lambda)$ y $r_{link}(\lambda)$, desde valores bajos de acoplo ($\lambda \sim 0$) hasta valores altos ($\lambda \sim 2$).

Dado que la propia construcción de las redes lleva consigo la generación de números aleatorios y, además las frecuencias naturales también se asignan de manera aleatoria a cada nodo, es necesario reducir la influencia que tiene en los resultados trabajar con condiciones estocásticas. Para ello, cada diagrama conlleva un promedio de los valores obtenidos para diez simulaciones diferentes, generando cada vez una red con distintas listas de vecinos y distribución de frecuencias naturales. De esta forma, se obtienen curvas más suaves al reducir las fluctuaciones de los parámetros y se disminuye la dependencia de los resultados obtenidos con la aleatoriedad inherente a las simulaciones.

En la Figura 15 se observan los seis diagramas de sincronización: tres modelos de redes por los dos modelos de Kuramoto (O1 y O2). Con el fin de obtener una mejor visualización del comportamiento para valores bajos de λ , el eje X (constante de acoplo) está en escala logarítmica.

En los diagramas de sincronización de la Figura 15 se pueden analizar diversos aspectos. El primero es la comparación entre la sincronización local (r_{link}) y la sincronización global (r). Despreciando los valores inferiores a $1/\sqrt{N}$ para r_{link} , en los seis diagramas la sincronización local es mayor que la global, lo cual tiene sentido puesto que se van formando clústeres de sincronización antes de que se forme una componente lo suficientemente grande como para que tenga efecto sobre la sincronización global y, por tanto, sobre r .

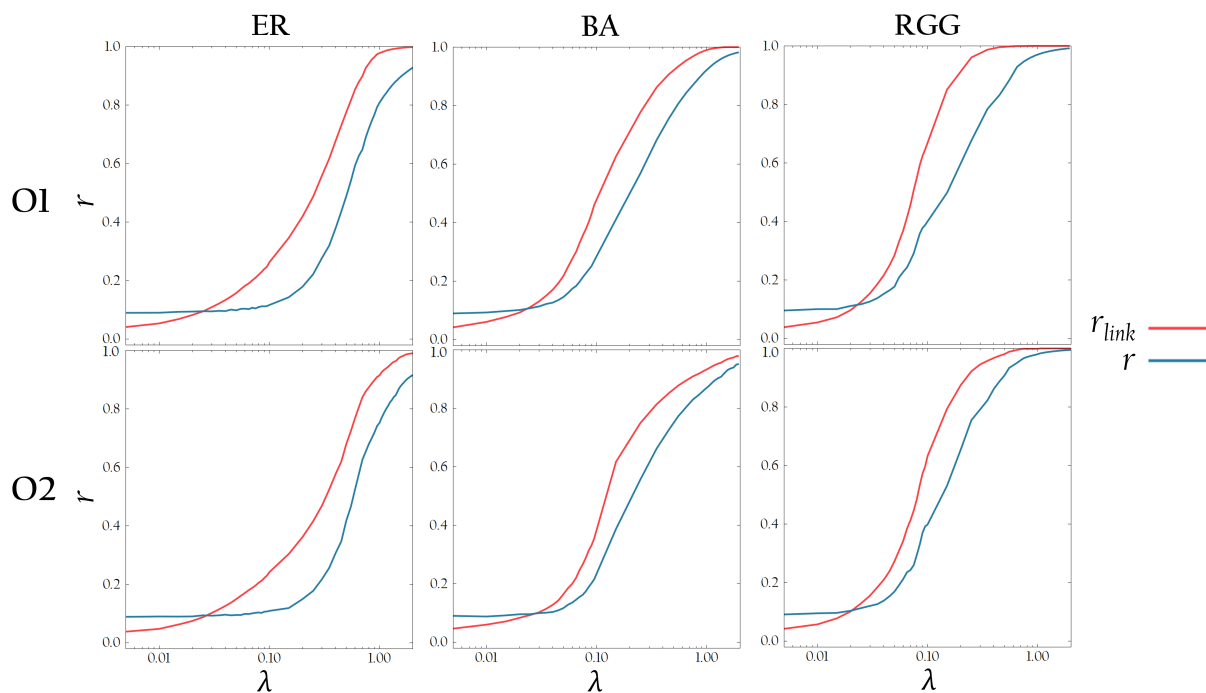


Figura 15: Diagramas de sincronización.

Además, puesto que el último valor de λ analizado es el mismo en las tres redes, se puede observar que, en esta región, la red ER no está tan sincronizada globalmente como sí lo están las redes BA y RGG. En definitiva, una primera conclusión que se extrae de estas gráficas es que, cualitativamente, las redes RGG y BA se comportan de manera similar mientras que la red ER tiene un diagrama de sincronización distinto.

Esta figura establece una primera relación entre la sincronización global y la sincronización local, pero no ofrece una buena comparativa entre los diagramas de sincronización del modelo de Kuramoto de primer orden y de segundo orden. Por este motivo, en la Figura 16 se representa la evolución de $r(\lambda)$ en cada uno de los dos modelos con el fin de poder comparar los resultados de cada red.

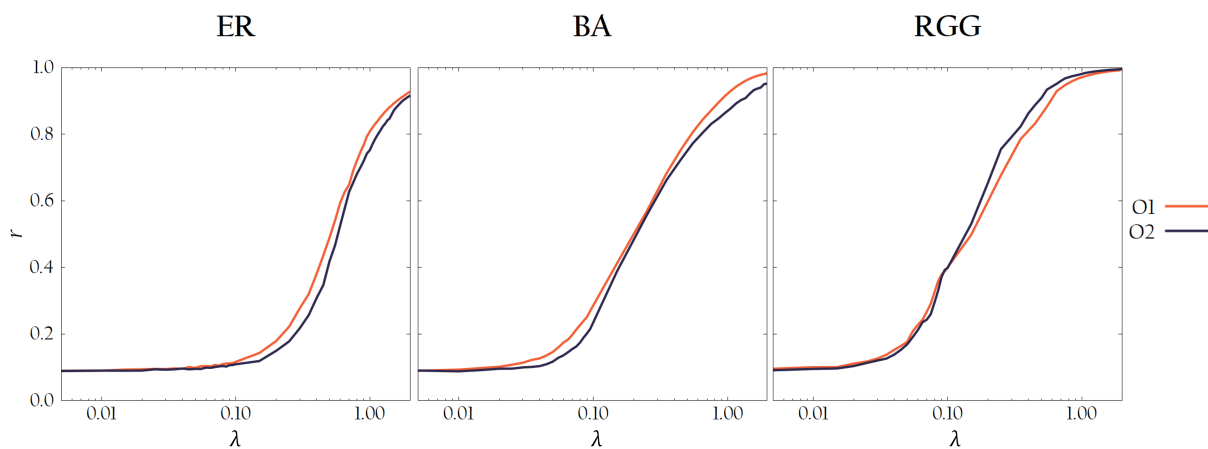


Figura 16: Comparación de los modelos de Kuramoto de primer orden y segundo orden.

En este caso, apenas se aprecian diferencias entre un modelo y otro, puesto que ambas curvas están prácticamente superpuestas, si bien es cierto que tanto en ER como en BA el modelo de segundo orden tarda un poco más en sincronizar (resultado obtenido en la Figura 14), mientras que en RGG sincronizan casi simultáneamente, pero el modelo de segundo orden llega antes al estado de sincronización global.

Por último, se analizan las diferencias entre la sincronización local y global de otra manera distinta a la ya vista. Para ello, en la Figura 17 se representa r vs. r_{link} en las tres redes, dibujando también la línea $r = r_{link}$ para indicar la hipotética situación en que la sincronización global es igual a la local. Además, se colocan unas franjas grises que representan las regiones donde los parámetros no tienen sentido, es decir, cuando $r, r_{link} < 1/\sqrt{N} = 0.1$.

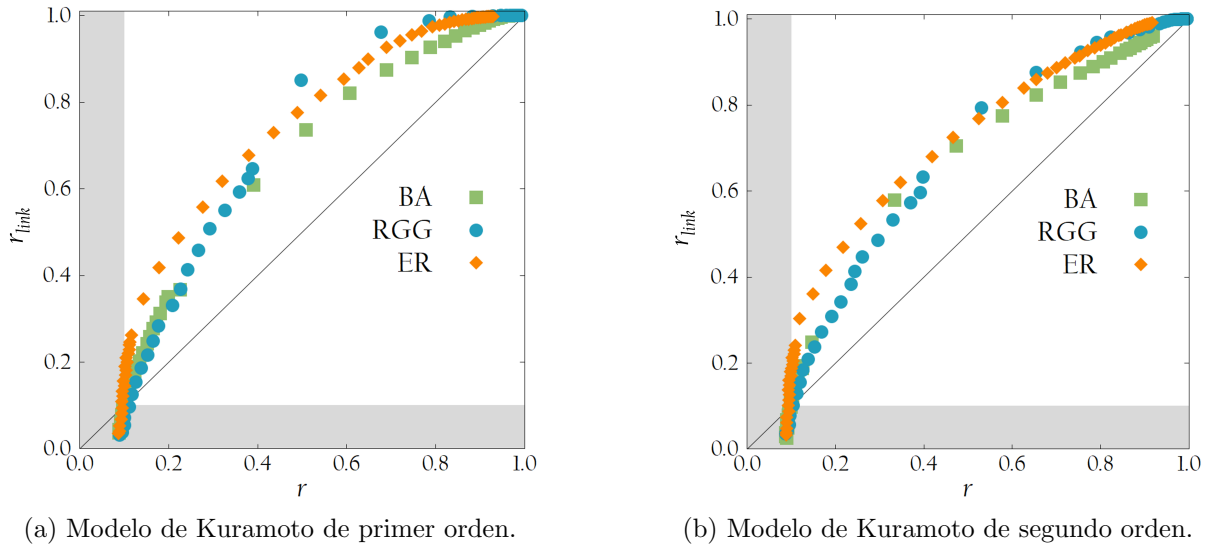


Figura 17: Comparación entre la sincronización local y la global.

En la Figura 17a se observa que todos los puntos se encuentran por encima de la línea $r = r_{link}$, como era de esperar. Sin embargo, para valores bajos de sincronización, en las redes ER gana más peso la sincronización local que en las redes BA y RGG, en las que se observa un diagrama muy parecido, tal y como se ha deducido de la Figura 15.

No obstante, cuando $r \simeq 0.5$, la red RGG se separa de la BA e incluso muestra una sincronización local más alta que la red ER. Esto puede deberse a que en las redes RGG hay agrupaciones de nodos muy conectados entre sí y al llegar a un valor concreto de λ puede producirse un aumento grande de la sincronización local sin llegar a aumentar la global. Para valores cercanos a $r \simeq 1$ el comportamiento en las tres redes es prácticamente idéntico puesto que casi toda la red está sincronizada.

El análisis de la Figura 17b es similar al anterior, si bien es cierto que sobre todo para valores altos de sincronización no hay tanta diferencia entre la local y la global como en el modelo de Kuramoto de primer orden. Además, en este caso, el salto de las redes RGG en $r \simeq 0.5$ no se separa tanto de las redes ER.

4. Conclusiones

En este trabajo se ha estudiado el fenómeno de la sincronización en redes complejas, obteniendo los diagramas de sincronización de tres modelos de redes distintos, cumpliendo el objetivo principal planteado.

Respecto al análisis de las propiedades de las redes complejas (ER, BA y RGG), en los tres casos se ha comprobado que las distribuciones de grado siguen la dependencia esperada y en el modelo RGG se ha estudiado también la evolución del grado promedio y de la componente gigante en función de la distancia de enlace d , obteniendo los resultados.

Además, se ha justificado la necesidad de implementar condiciones de contorno periódicas en este tipo de redes para reproducir las dependencias teóricas, a pesar de que las redes reales no las presentan.

En cuanto a los resultados obtenidos relativos a la sincronización, los modelos con los que se ha trabajado han sido el modelo de Kuramoto y un modelo tipo Kuramoto de segundo orden. A partir de ellos, se han estudiado, mediante simulación, los distintos regímenes de la dinámica de los osciladores, los cuales concuerdan con los inferidos del análisis de las ecuaciones teóricas. Además, se ha utilizado un parámetro de orden ($r(t)$) que permite estudiar la transición de fase de la sincronización, mostrando su evolución temporal.

Finalmente, se han comparado los diagramas de sincronización local (r_{link}) y global (r) en función del valor de la constante de acoplo, mostrando las diferencias entre los tres tipos de redes y los dos modelos de sincronización utilizados. La conclusión que se puede extraer de este análisis es que la red ER es la que presenta una sincronización más tardía en comparación con la BA y la RGG. En cuanto a la comparación entre los dos modelos de sincronización, los resultados son prácticamente idénticos aunque el modelo de segundo orden sincroniza, por lo general, un poco más tarde en las redes estudiadas.

Por último, comentar que el propósito de este Trabajo Fin de Grado ha sido el de explorar los dos modelos básicos de sincronización y familiarizarme con la implementación de simulaciones en redes. Por tanto, me ha servido como una primera toma de contacto con este tema, abriendo la puerta a estudios de sincronización en topologías más complejas, como pueden ser:

1. Redes multicapas: existen diferentes vínculos y acoplos entre los elementos de la red, que conforman las distintas capas que se presentan en estos modelos [26].
2. Redes variantes en el tiempo: los vínculos entre los nodos cambian en el tiempo y la red deja de ser una entidad estática [27].
3. Redes con interacciones de alto orden: los *links* van más allá de unir dos nodos y pueden formarse hiperaristas o *hyperlinks* que conectan grupos de varios nodos [28].

5. Referencias

- [1] G. Filatrella, A. H. Nielsen, and N. F. Pedersen. Analysis of a power grid using a kuramoto-like model. *European Physical Journal B*, 61:485–491, 2 2008.
- [2] Philip W. Anderson. More is different. *Science*, 177:393–396, 1972.
- [3] Steven H. Strogatz. *SYNC How Order Emerges from Chaos in the Universe, Nature, and Daily Life*. Hyperion, 1st edition, 2003.
- [4] Arthur T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *Journal of Theoretical Biology*, 16(1):15–42, 1967.
- [5] Yoshiki Kuramoto. Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators. In Huzihiro Araki, editor, *International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics*, pages 420–422, Berlin, Heidelberg, 1975. Springer Berlin Heidelberg.
- [6] Kurt Wiesenfeld, Pere Colet, and Steven H. Strogatz. Synchronization transitions in a disordered josephson series array. *Phys. Rev. Lett.*, 76:404–407, Jan 1996.
- [7] Duncan J. Watts and Steven H. Strogatz. Collective dynamics of 'small-world' networks. *Nature*, 393:440–442, 1998.
- [8] Albert-László Barabási and Réka Albert. Emergence of scaling in random networks. *Science*, 286:509–512, 1999.
- [9] Steven H. Strogatz. Exploring complex networks. *Nature*, 410:268–276, 2001.
- [10] Paul Erdős and Alfréd Rényi. On random graphs i. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [11] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Mean-field theory for scale-free random networks. *Physica A*, 272:173–187, 1999.
- [12] Albert-László Barabási, Réka Albert, and Hawoong Jeong. Scale-free characteristics of random networks: the topology of the world-wide web, 2000.
- [13] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes, and A. N. Samukhin. Structure of growing networks with preferential linking. *Physical Review Letters*, 85:4633–4636, 11 2000.
- [14] Mathew Penrose. *Random Geometric Graphs*. Oxford University Press, 5 2003.
- [15] A. B. Migliano, A. E. Page, J. Gómez-Gardeñes, G. D. Salali, S. Viguier, M. Dyble, J. Thompson, Nikhill Chaudhary, D. Smith, J. Strods, R. Mace, M. G. Thomas, V. Latora, and L. Vinicius. Characterization of hunter-gatherer networks and implications for cumulative culture. *Nature Human Behaviour*, 1:0043, 2 2017.
- [16] Juddy H. Arias, Jesus Gómez-Gardeñes, Sandro Meloni, and Ernesto Estrada. Epidemics on plants: Modeling long-range dispersal on spatially embedded networks. *Journal of Theoretical Biology*, 453:1–13, 9 2018.
- [17] Alex Arenas, Albert Diaz-Guilera, Jurgen Kurths, Yamir Moreno, and Changsong Zhou. Synchronization in complex networks. *Physics Reports*, 5 2008.

- [18] Raissa M. D'Souza, Jesus Gómez-Gardeñes, Jan Nagler, and Alex Arenas. Explosive phenomena in complex networks. *Advances in Physics*, pages 34–39, 7 2019.
- [19] B. Ermentrout. An adaptive model for synchrony in the firefly *pteropyx malaccae*. *Journal of Mathematical Biology*, 29:571–585, 6 1991.
- [20] Renato Spigler and Juan A. Acebrón. Adaptive frequency model for phase-frequency synchronization in large populations of globally coupled nonlinear oscillators. *Physical Review Letters*, 81:2229–2232, 9 1998.
- [21] Peng Ji. Synchronization in the second-order kuramoto model, 2015.
- [22] Carl Runge. Ueber die numerische auflösung von differentialgleichungen. *Mathematische Annalen*, 46:167–178, 6 1895.
- [23] Joaquin Marro and Ronald Dickman. *Nonequilibrium Phase Transitions in Lattice Models*. Cambridge University Press, 5 1999.
- [24] Jesús Gómez-Gardeñes, Yamir Moreno, and Alex Arenas. Paths to synchronization on complex networks. volume 98, 2007.
- [25] Jesús Gómez-Gardeñes, Yamir Moreno, and Alex Arenas. Synchronizability determined by coupling strengths and topology on complex networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 75, 6 2007.
- [26] S. Boccaletti, G. Bianconi, R. Criado, C.I. del Genio, J. Gómez-Gardeñes, M. Romance, I. Sendiña-Nadal, Z. Wang, and M. Zanin. The structure and dynamics of multilayer networks. *Physics Reports*, 544:1–122, 11 2014.
- [27] Dibakar Ghosh, Mattia Frasca, Alessandro Rizzo, Soumen Majhi, Sarbendu Rakshit, Karin Alfaro-Bittner, and Stefano Boccaletti. The synchronized dynamics of time-varying networks. *Physics Reports*, 949:1–63, 2 2022.
- [28] Federico Battiston, Giulia Cencetti, Iacopo Iacopini, Vito Latora, Maxime Lucas, Alice Patania, Jean-Gabriel Young, and Giovanni Petri. Networks beyond pairwise interactions: Structure and dynamics. *Physics Reports*, 874:1–92, 8 2020.

ANEXOS

I. Implementación computacional de las condiciones de contorno periódicas

La manera de implementar computacionalmente las PBC tipo toroidales para una red RGG consiste en la creación de ocho redes virtuales además de la real. La red central se corresponde con la red real mientras que el resto tienen la misma topología que la principal. A la hora de ejecutar el algoritmo para generar la red RGG, en el paso 2 se calcula la distancia del nodo central a todos los nodos de las nueve redes. Si se cumple la condición con un nodo que no pertenece a la red principal, se crea un enlace virtual y se añade la etiqueta de ese nodo a la lista de vecinos del nodo central.

En la Figura 18 se muestra un ejemplo sencillo de cuatro puntos que sin PBC no deberían estar enlazados, pero al incluirlas sí que se crean los enlaces (zonas coloreadas).

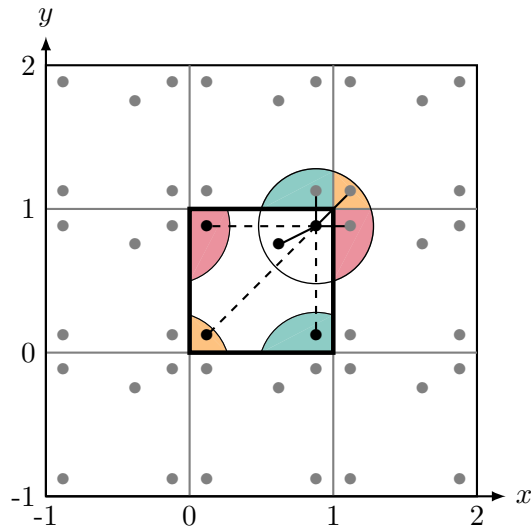


Figura 18: Condiciones de contorno periódicas para una red RGG.

II. Deducción física del modelo de Kuramoto de segundo orden

Filatrella et al. [1] proponen en su artículo una manera de obtener una ecuación tipo Kuramoto a partir de un sistema eléctrico. A continuación, se muestran los pasos deducidos por estos autores y se presenta el resultado final.

Una red eléctrica (Figura 19) se compone de dos elementos básicos: un generador activo (G) que convierte una fuente de energía en potencia eléctrica y una máquina pasiva (M) que aprovecha la electricidad y la transforma en otro tipo de energía. Además, en el generador hay un elemento disipador (en este caso es una turbina D).

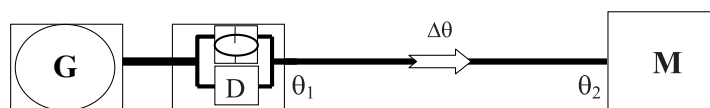


Figura 19: Sistema eléctrico básico (figura obtenida del artículo de Filatrella et al. [1]).

Se denota P_{source} a la potencia de la fuente que alimenta a G. La turbina D produce la potencia eléctrica con una frecuencia cercana a la estándar del sistema eléctrico (Ω). Por tanto, la fase θ_1 a la salida del generador con una perturbación $\tilde{\theta}_1$ viene dada por

$$\theta_i = \Omega t + \tilde{\theta}_1 .$$

Durante la rotación, D puede disipar potencia a un ritmo proporcional al cuadrado de la velocidad angular,

$$P_{diss} = K_D \left(\dot{\theta}_1 \right)^2 ,$$

o bien acumular energía cinética con un momento de inercia I ,

$$P_{acc} = \frac{1}{2} I \frac{d}{dt} \left(\dot{\theta}_1 \right)^2 .$$

La condición para que exista transmisión de potencia entre G y M es que los dos dispositivos no operen en fase, denotando esta diferencia como $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \tilde{\theta}_2 - \tilde{\theta}_1$ (Ω es la misma para todos los elementos del sistema). La potencia transmitida puede expresarse como función de esta diferencia de fases

$$P_{transmitted} = -P^{MAX} \sin(\Delta\theta) .$$

Por tanto, el balance de potencias del sistema G-M es

$$P_{source} = P_{diss} + P_{acc} + P_{transmitted} = I\ddot{\theta}_1\dot{\theta}_1 + K_D \left(\dot{\theta}_1 \right)^2 - P^{MAX} \sin(\Delta\theta) .$$

Bajo la condición de pequeñas perturbaciones ($\tilde{\theta}_1 \ll \Omega t$) y asumiendo que el ratio al que se almacena la energía cinética ($\approx I\Omega\ddot{\theta}_1$) es mucho más bajo que al que se disipa la energía por fricción ($\approx K_D\dot{\theta}_1^2 \approx K_D\Omega^2$), puede hacerse un desarrollo en serie de potencias de la expresión de P_{source} , quedando

$$I\Omega\ddot{\theta}_1 = P_{source} - K_D\Omega^2 - 2K_D\Omega\dot{\theta}_1 + P^{MAX} \sin(\Delta\theta) ,$$

y reescribiéndola en unidades normalizadas

$$\ddot{\theta}_1 = P - \alpha\dot{\theta}_1 + P^{MAX} \sin(\Delta\theta) ,$$

que es formalmente idéntica a la expresión de Kuramoto.

A continuación, se modifica el problema en uno con N osciladores que cumplen la expresión anterior. Se asume que la velocidad promedio de cada oscilador tendrá una pequeña desviación ω_i frente a la frecuencia común Ω , de tal forma que $\langle \dot{\theta}_i \rangle = \Omega + \omega_i$. La ecuación $I\Omega\ddot{\theta}_1$ puede reescribirse a partir de esta consideración como

$$\ddot{\theta}_i = \left[\frac{P_{source}^i}{I\Omega} - \frac{K_D\Omega}{I} \right] - \frac{2K_D}{I} \dot{\theta}_i + \frac{P^{MAX}}{I\Omega} \sin(\Delta\theta) .$$

Asumiendo que la disipación es la misma en todas las fuentes e introduciendo una estructura de osciladores con la matriz a_{ji} , la expresión se reduce a una tipo Kuramoto de segundo orden:

$$\ddot{\theta}_i = \omega_i - \alpha\dot{\theta}_i + K \sum_{j \neq i} a_{ji} \sin(\tilde{\theta}_j - \tilde{\theta}_i) .$$

III. Método de Runge-Kutta de orden 4 para la resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales

Los sistemas de ecuaciones diferenciales que se integran son los siguientes:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_i(t) &= \omega_i + f(\{\theta_i(t)\}_{i=1}^N) \\ \ddot{\theta}_i(t) &= \omega_i - \dot{\theta}_i(t) + f(\{\theta_i(t)\}_{i=1}^N) \end{aligned}$$

El primero se corresponde con un sistema de primer orden y, por tanto, hay que resolver N ecuaciones, mientras que el segundo se corresponde con un sistema de segundo orden teniendo que resolver $2N$ ecuaciones diferenciales de primer orden.

En ambos casos, la función $f(\{\theta_i\}_{i=1}^N)$ se corresponde con el término de acoplo del sistema de osciladores y tiene la siguiente forma

$$f(\{\theta_i(t)\}_{i=1}^N) = \lambda \sum_{j=1}^N A_{ij} \sin(\theta_j(t) - \theta_i(t))$$

El método de integración de Runge-Kutta depende de un parámetro h que se corresponde con el paso de tiempo de integración. Cuanto más pequeño sea, el método ofrecerá una solución más precisa pero aumenta mucho el tiempo que tarda en ejecutarse la simulación, por lo que hay que buscar un valor intermedio entre precisión y coste computacional. El valor escogido es $h=0.01$.

Método Runge-Kutta de orden 4: sistema de ecuaciones de primer orden

Para cada una de las variables $\theta_i(t)$, se definen cuatro parámetros en cada paso de tiempo:

$$\begin{aligned} k_1^i &= h \cdot f(\{\theta_i(t)\}) & k_2^i &= h \cdot f\left(\{\theta_i(t) + \frac{1}{2}k_1^i\}\right) \\ k_3^i &= h \cdot f\left(\{\theta_i(t) + \frac{1}{2}k_2^i\}\right) & k_4^i &= h \cdot f(\{\theta_i(t) + k_3^i\}) \end{aligned}$$

Una vez se han calculado los $4N$ parámetros, el valor de cada fase en el tiempo $t+h$ es

$$\theta_i(t+h) = \theta_i(t) + \frac{1}{6} [k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i]$$

Método Runge-Kutta de orden 4: sistema de ecuaciones de segundo orden

En este caso, se define una nueva variable $v_i(t) \equiv \dot{\theta}_i(t)$ que representa la velocidad. Por tanto, se pasa de un sistema de N ecuaciones diferenciales de segundo orden a dos sistemas de N ecuaciones diferenciales de primer orden. Ahora se definen cuatro parámetros para cada una de las dos variables en cada paso de tiempo:

$$\begin{aligned}
 k_1^i &= h \cdot v_i & l_1^i &= h \cdot [f(\{\theta_i(t)\}) - v_i] \\
 k_2^i &= h \cdot \left(v_i + \frac{1}{2} l_1^i \right) & l_2^i &= h \cdot \left[f\left(\left\{ \theta_i(t) + \frac{1}{2} k_1^i \right\} \right) - \left(v_i + \frac{1}{2} l_1^i \right) \right] \\
 k_3^i &= h \cdot \left(v_i + \frac{1}{2} l_2^i \right) & l_3^i &= h \cdot \left[f\left(\left\{ \theta_i(t) + \frac{1}{2} k_2^i \right\} \right) - \left(v_i + \frac{1}{2} l_2^i \right) \right] \\
 k_4^i &= h \cdot (v_i + l_3^i) & l_4^i &= h \cdot [f(\{\theta_i(t) + k_3^i\}) - (v_i + l_3^i)]
 \end{aligned}$$

Cuando se han calculado los $8N$ parámetros, las variables en el tiempo $t + h$ son

$$\begin{aligned}
 \theta_i(t + h) &= \theta_i(t) + \frac{1}{6} [k_1^i + 2k_2^i + 2k_3^i + k_4^i] \\
 v_i(t + h) &= v_i(t) + \frac{1}{6} [l_1^i + 2l_2^i + 2l_3^i + l_4^i]
 \end{aligned}$$

IV. Interpretación física del parámetro r_{link}

Idealmente, si los nodos (i, j) están sincronizados entre sí, $r_{ij}(\lambda) \rightarrow 1$ y si no lo están $r_{ij}(\lambda) \rightarrow 0$. Por tanto, si se representan las parejas de osciladores por orden de sincronización, una posible interpretación física de r_{link} es que representa la fracción de parejas de nodos que están sincronizadas entre sí respecto al número total de parejas. En la Figura 20 se observa una representación visual de la definición de estos dos parámetros. La curva ideal muestra la separación entre los nodos que están sincronizados y los que no.

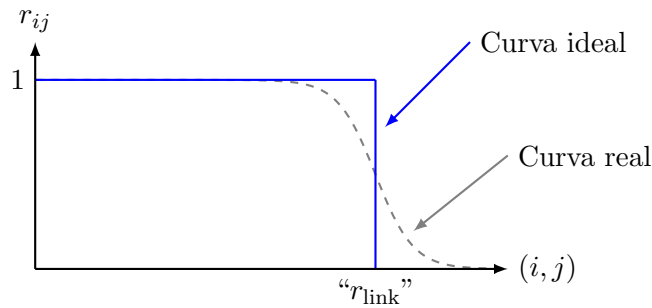


Figura 20: Definición visual del parámetro r_{link} .