



**Universidad  
Zaragoza**

# Trabajo Fin de Grado

## SOLUCIONES DE COLAPSO EN RELATIVIDAD GENERAL

Autor:

Juan Arnaudas Navalpotro

Director:

Eduardo Follana Adín

Facultad de Ciencias

Junio 2022

# Índice

Introducción	1
Parte I: Métrica de Schwarzschild	2
Parte II: Coordenadas de Eddington-Finkelstein	10
Conclusiones	21

# Introducción

El objetivo de este trabajo es estudiar trayectorias de partículas bajo la influencia de un objeto masivo. En concreto, nos centraremos en trayectorias de partículas bajo la influencia gravitatoria de un agujero negro. Estudiaremos cuáles son dichas trayectorias tanto en el interior, como en el exterior del agujero. Para ello emplearemos la métrica de Schwarzschild, que nos permitirá estudiar tanto el campo exterior de un objeto masivo, como el generado por un agujero negro. El trabajo se divide en dos partes, y en cada una utilizaremos un sistema de coordenadas distinto. A su vez cada una de las partes se divide en dos secciones, la primera en la que nos centraremos en obtener resultados analíticos, y la segunda en la que resolveremos numéricamente las trayectorias descritas por las ecuaciones geodésicas con un algoritmo de Runge-Kutta de orden 4.

En la primera parte del trabajo estudiaremos algunas soluciones a las ecuaciones geodésicas de dicha métrica. Esta métrica nos permitirá estudiar, entre otras cosas, trayectorias en el exterior de un agujero negro. Serán de gran interés las geodésicas radiales al tratarse del caso más simple obtenible analíticamente. En esta parte estudiaremos también el cierre de los conos de luz a medida que disminuye la distancia al horizonte de sucesos.

En la segunda parte nos centraremos en explorar soluciones en el interior de un agujero negro, introduciendo para ello las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Este sistema de coordenadas nos permitirá explorar trayectorias de partículas en el interior del agujero. Será interesante comparar el comportamiento de la coordenada temporal en este sistema con respecto al anterior para obtener información de cómo varían los tiempos de colapso en función del observador. Retomaremos, en este caso, el cierre de los conos de luz para poder extraer alguna conclusión más.

## Parte I: Métrica de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild es una de las soluciones más simples de las ecuaciones de Einstein. Su elección viene motivada por la simetría esférica del espacio tiempo que vamos a considerar pues, según el teorema de Birkhoff, cualquier solución con simetría esférica de las ecuaciones de campo de vacío debe ser asintóticamente plana y estática. Según este teorema la métrica de Schwarzschild describe el campo generado por un agujero negro, y también el campo exterior de una estrella. Por lo tanto su uso nos va a permitir explorar las ecuaciones del movimiento de objetos sometidos a la influencia gravitatoria de dichos cuerpos. De aquí en adelante vamos a considerar el convenio para la signatura de la métrica (+ - - -) y tomaremos unidades con  $c=1$ . Con todo esto el elemento de línea de la métrica de Schwarzschild toma la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (1)$$

En ella hemos introducido por conveniencia el radio gravitacional, definido a partir de la masa  $M$  del objeto que origina el campo y de la constante de gravitación universal  $G$ :

$$r_0 = 2MG . \quad (2)$$

En la forma de la métrica, se destaca la existencia de dos singularidades. Una se da en  $r = 0$  y la otra en  $r = r_0$ . Sin embargo solo la correspondiente a  $r = 0$  es una singularidad física, pues la que aparece en  $r = r_0$  se debe al sistema de coordenadas. Esta segunda singularidad denota un horizonte de eventos por lo que las señales emitidas en radios menores que el radio gravitacional no pueden escapar del agujero y acabarán colapsando inevitablemente en el origen. El estudio del interior del agujero no es conveniente en este sistema de coordenadas por lo que a partir de ahora nos centraremos en estudiar solo la zona exterior y posteriormente utilizaremos otras coordenadas para explorar el interior del agujero.

Para estudiar las distintas trayectorias que puede describir una partícula utilizaremos las ecuaciones geodésicas. Debido a la simetría esférica del problema podemos fijar el ángulo  $\theta$  a  $\pi/2$  sin perder generalidad y de esta forma nos centramos en un plano espacial formado solo por la dimensión radial y una angular. Las ecuaciones geodésicas que manejaremos de ahora en adelante son, por lo tanto, las siguientes:

$$\frac{dT}{d\tau} + \frac{r_0}{r(r-r_0)} T R = 0 , \quad (3)$$

$$\frac{dR}{d\tau} + \frac{r_0(r-r_0)}{2r^3} T^2 - \frac{r_0}{2r(r-r_0)} R^2 - (r-r_0)\Psi^2 = 0 , \quad (4)$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} + \frac{2}{r} R \Psi = 0 . \quad (5)$$

Se ha introducido  $\tau$  como un parámetro afín cualquiera y las variables  $T$ ,  $R$  y  $\Psi$  como las derivadas de  $t$ ,  $r$  y  $\phi$  con respecto a  $\tau$ , que representan las celeridades en las direcciones temporal, radial y angular respectivamente.

A estas ecuaciones hay que sumarle otra ecuación de ligadura para la cuatriveicidad

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) T^2 - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} R^2 - r^2 \Psi^2 = m , \quad (6)$$

donde denotamos como  $m$  a un parámetro que vale 0 si la partícula tiene masa nula y 1 en caso contrario.

## Cálculos analíticos

Lo primero que vamos a hacer es resolver analíticamente algunas trayectorias sencillas. El caso más simple es el de un fotón, que verifica que  $ds^2 = 0$ .

Lo más sencillo que podemos plantearnos es el caso de un fotón que se mueve en dirección radial, obteniendo la siguiente ecuación diferencial en  $r$  y  $t$ :

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr^2. \quad (7)$$

Tomando la raíz y agrupando se obtiene lo siguiente:

$$dt = \pm \left(1 - \frac{r_0}{r}\right)^{-1} dr. \quad (8)$$

Vemos que tenemos dos posibles trayectorias. Puesto que en el exterior del agujero,  $r > r_0$ , el término  $\left(1 - \frac{r_0}{r}\right)$  es positivo, de forma que si elegimos en la ecuación (8) el signo positivo tendremos que  $dr/dt$  es positiva, lo que indica que el radio aumenta conforme aumenta el tiempo. Esto se corresponde con el caso de lanzar un fotón desde fuera del agujero hacia el infinito en dirección radial. Sin embargo, si tomamos el signo negativo la cantidad  $dr/dt$  es negativa, por lo que en este caso el radio disminuye al aumentar el tiempo, correspondiéndose así con una situación en la que el fotón se lanza desde fuera del agujero hacia dentro radialmente.

Integrando la ecuación diferencial anterior y manteniendo la posibilidad de elegir el signo positivo o negativo, en función de si el fotón va hacia el infinito o hacia el origen, se obtienen estas dos geodésicas:

$$t = \pm(r + r_0 \log |r - r_0|) + \text{constante}. \quad (9)$$

Como se puede ver en la figura 1, las trayectorias de los fotones salientes lejos del horizonte de sucesos, tienden a una línea  $t = r$  correspondiente a la trayectoria de una partícula sin masa en el espacio de Minkowski. También observamos que para los fotones que se dirigen desde el exterior a la singularidad, un observador situado en el infinito ve que ese tiempo diverge, debido a que  $t$  tiende a infinito conforme  $r$  tiende a  $r_0$ . Esta divergencia es debida al sistema de coordenadas como ya hemos indicado antes, y veremos más adelante que se pueden tomar otras coordenadas donde el tiempo para ese observador no será asintótico y desaparecerá esta singularidad.

Utilizando la ecuación (9) podemos obtener un nuevo resultado. Imaginemos ahora el caso de una estrella que está colapsando hacia su radio gravitacional y un observador situado en su superficie (observador 1) que emite señales separadas por un cierto tiempo. Este tiempo será distinto medido por un observador en el infinito (observador 2). El observador 1 emite el primer fotón cuando se encuentra en un radio  $r_1$  y el segundo fotón, cuando la estrella se ha contraído a un radio  $r_2 < r_1$ . La trayectoria de los dos fotones desde  $r_1$  hasta infinito es la misma, por lo que el redshift viene dado por el tiempo que le cuesta al fotón ir de  $r_1$  a  $r_2$  medido por un observador en el infinito. Así, el redshift es:

$$\Delta t = t(r_1) - t(r_2) = r_1 - r_2 + r_0 \log \left( \frac{r_1 - r_0}{r_2 - r_0} \right). \quad (10)$$

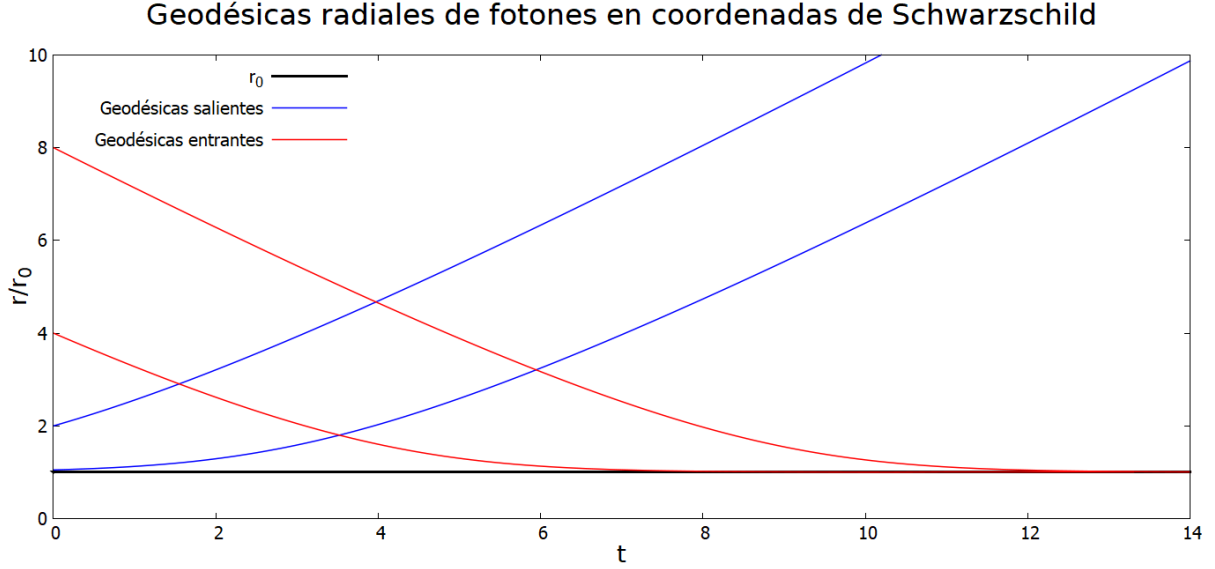


Figura 1: *Trayectorias radiales de fotones en la métrica de Schwarzschild.*

Como podemos ver si  $r_1 = r_2$  el redshift es nulo, puesto que la estrella no se ha contraído. Por el contrario si  $r_2 \rightarrow r_0$ , tiende a infinito. Esto quiere decir que el observador 2 no verá nunca contraerse por completo a la estrella. Esto es similar a lo discutido en la figura 1, donde se veía que el tiempo divergía al tender  $r$  a  $r_0$ .

Otro caso analítico que se puede calcular es el de la esfera de fotones, correspondiente a la única órbita circular al agujero que puede realizar un fotón. Para ello partimos de nuevo del elemento de línea de la ecuación (1) y al considerar fotones volvemos a considerar  $ds^2 = 0$ . La ecuación diferencial que se obtiene es la siguiente:

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dt^2 = r^2 d\phi^2 \rightarrow \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{r} \sqrt{1 - \frac{r_0}{r}}. \quad (11)$$

Utilizando ahora la ecuación geodésica (4) e imponiendo  $dr = 0$ , se obtiene que

$$\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 = \frac{r_0}{2r^3}, \quad (12)$$

y sustituyendo esto en la ecuación anterior se llega a que el radio que tiene la órbita es

$$r = \frac{3}{2} r_0. \quad (13)$$

Por lo tanto, los fotones lanzados desde esa posición con celeridad radial nula y celeridad angular no nula describirán una órbita circular alrededor del agujero.

## Resolución numérica

Debido a la dificultad para obtener resultados analíticos en el caso de fotones en dirección no radial, optamos por utilizar el método de Runge-Kutta a 4º orden para resolver numéricamente las ecuaciones geodésicas completas.

Las condiciones iniciales de la resolución numérica vienen dadas al elegir adecuadamente los valores de  $r$ ,  $R$ ,  $t$ ,  $\phi$  y  $\Psi$  y fijar  $T$  con la ligadura, que toma la forma siguiente:

$$T = \pm \sqrt{\frac{r^2}{(r - r_0)^2} R^2 + \frac{r^3}{r - r_0} \Psi^2 + \frac{r}{r - r_0} m} \quad (14)$$

Tenemos dos elecciones posibles del signo de  $T$  pero vamos a tomar la positiva. Tomar  $T$  con signo negativo haría que el tiempo disminuyera conforme avanza el tiempo del programa teniendo esta elección de signo el significado físico de ir hacia atrás en el tiempo. Por elección tomaremos siempre  $t=0$  como origen de tiempos y el ángulo inicial lo igualaremos también a 0.

El signo de  $R$  dará la dirección de la velocidad de la partícula, pudiendo dirigirse esta hacia el origen si  $R$  es negativo o hacia el infinito si es positivo. Asimismo, la velocidad angular viene dada por  $\Psi$ , siendo nula si  $\Psi$  lo es.

La primera comprobación que vamos a hacer es sobre las trayectorias de fotones cuando son lanzados hacia fuera del agujero, o hacia dentro en dirección radial, debido a que tenemos las expresiones analíticas. También calcularemos numéricamente estas trayectorias con partículas con masa obteniendo lo mostrado en las figuras 2 y 3.

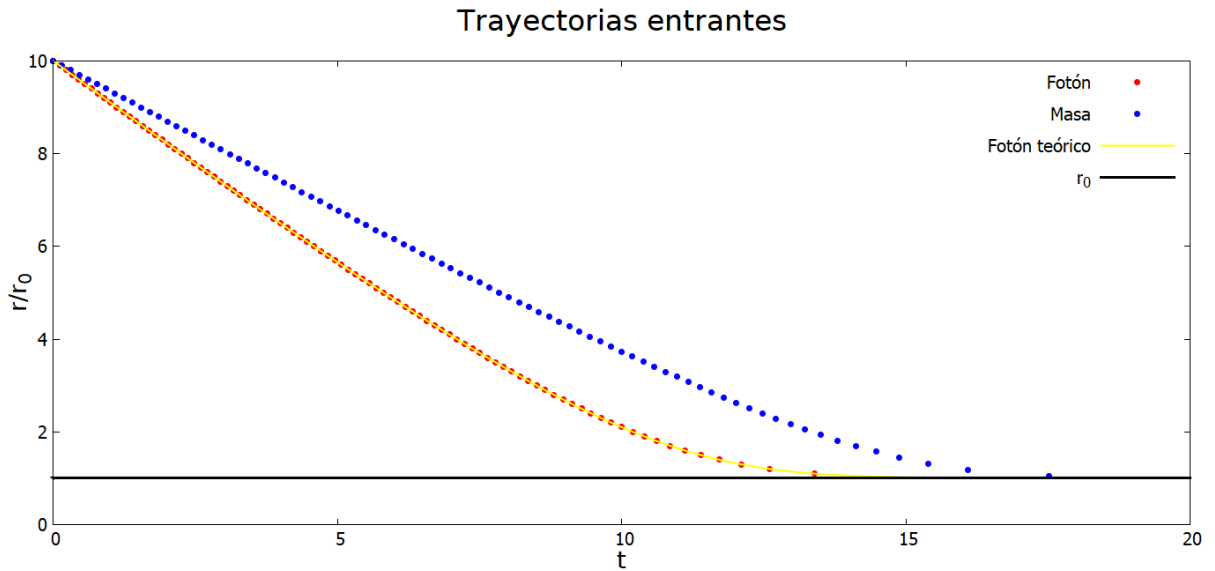


Figura 2: *Trayectorias en dirección radial hacia el origen.*

Se observa que las trayectorias de los fotones coinciden con las calculadas analíticamente. Las de las masas también son coherentes, pues tardan más tiempo que los fotones en recorrer las mismas distancias radiales. Vemos que para el caso de los fotones cuanto más nos alejamos del radio gravitacional más se asemejan las trayectorias a la línea  $r = t$ , que es la forma que presentarían

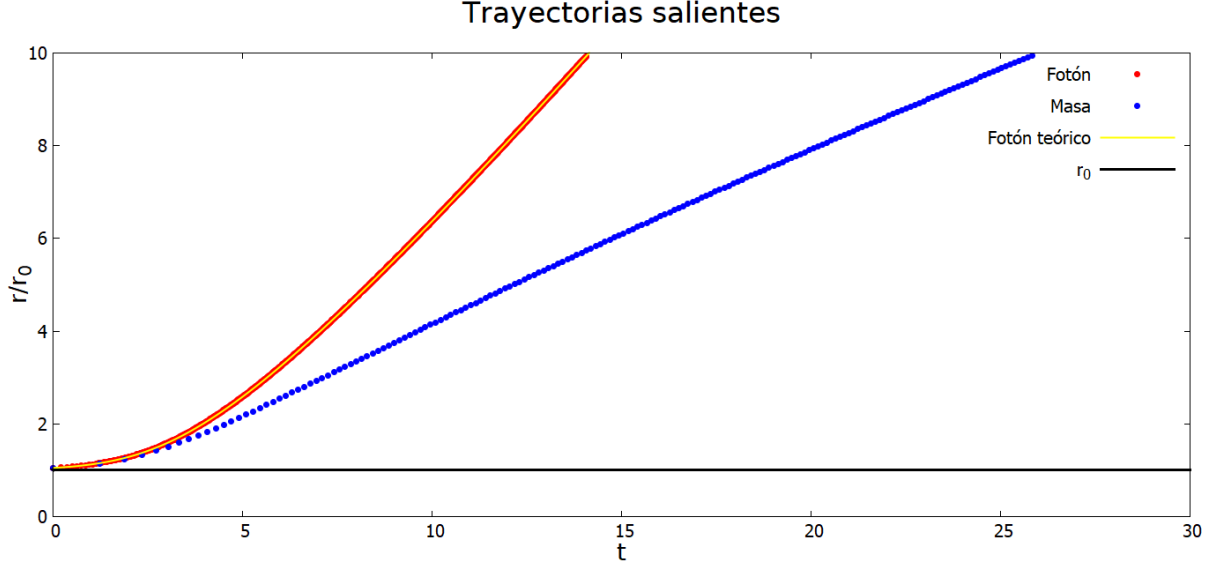


Figura 3: *Trayectorias en dirección radial hacia el infinito.*

en un espacio plano.

A modo de comprobación del programa vamos a estudiar algunas órbitas elípticas y las precesiones de los perihelios de estas. En [1], podemos encontrar un cálculo de las precesiones de los perihelios de órbitas que tiene validez para campos gravitatorios débiles y partículas con velocidades pequeñas. El ángulo de precesión es el siguiente:

$$\Delta\varphi = \frac{3\pi r_0}{L} \text{ rad/rev} . \quad (15)$$

Se define  $L$  como una función que depende del perihelio ( $r_-$ ) y del afelio ( $r_+$ ) y que tiene unidades de longitud:

$$L = \frac{2r_+r_-}{r_+ + r_-} . \quad (16)$$

Sin embargo, para generar órbitas en el programa y comprobar que preceden como dice la ecuación (15), hay que inicializar adecuadamente la trayectoria.

Para ello lo que hacemos es elegir tanto el perihelio como el afelio, fijando así el valor de  $L$ . Inicialmente colocaremos una partícula con masa en una de estas dos posiciones, puesto que sabemos que en esos puntos la celeridad radial  $R$  es nula y solo nos falta elegir un valor de  $\Psi$  para que la órbita presente el perihelio y afelio deseados. Utilizamos la siguiente expresión presentada en [1]:

$$J^2 = \frac{\frac{1}{(1-\frac{r_0}{r_+})} - \frac{1}{(1-\frac{r_0}{r_-})}}{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}} . \quad (17)$$

$J$  es el momento angular que a su vez, hallando cantidades conservadas en las ecuaciones geodésicas bajo la aproximación de campos débiles, se puede relacionar con  $\Psi$  de la siguiente forma:

$$J = r^2\Psi . \quad (18)$$



Así, fijado  $r_+$  y  $r_-$ , calculamos  $J$  con la ecuación (17) y luego inicializamos la partícula en, por ejemplo, el perihelio, de forma que el valor inicial de  $\Psi$  viene dado por la ecuación (18) y es  $J/r_-^2$ .

Queremos ver que las precesiones que obtenemos se acercan a la expresión de la ecuación mostrada anteriormente conforme aumentan las distancias al radio gravitacional, es decir, que el campo es más débil. En la gráfica siguiente se muestra la discrepancia entre los valores obtenidos con la resolución numérica y los valores dados por la expresión (15), en forma de error relativo, para varios valores de  $L$ :

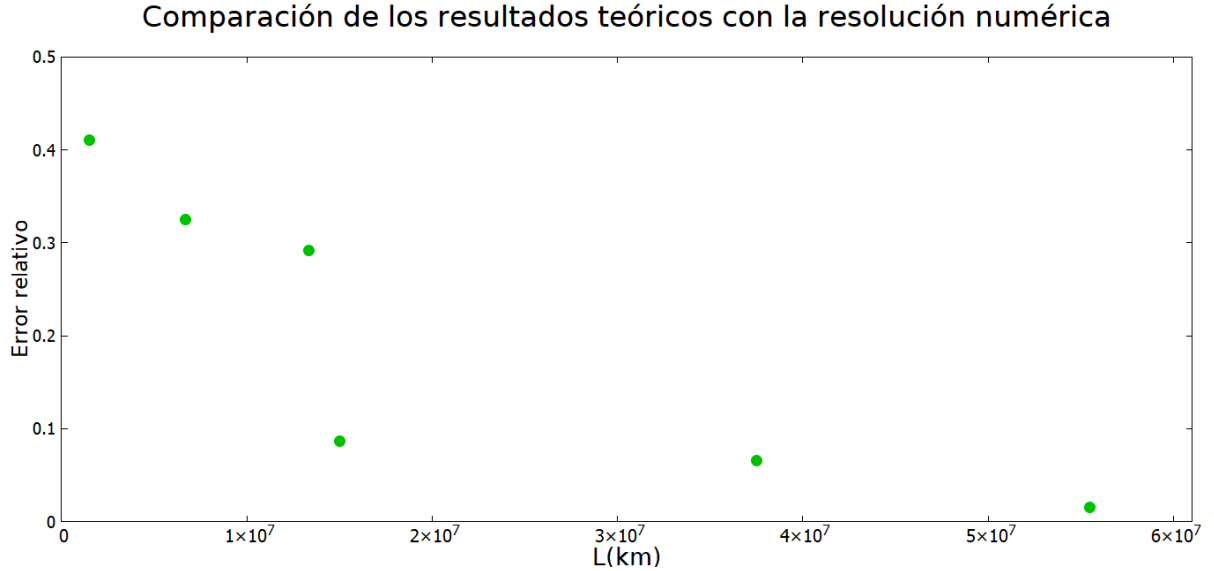


Figura 4: Comparación entre la resolución numérica y el valor teórico de las precesiones para distintas distancias.

Efectivamente, la concordancia entre la resolución numérica y el resultado analítico es mayor conforme aumentan las distancias ya que la aproximación de campos débiles en esos casos es mejor. El error relativo mostrado se ha calculado de la siguiente forma:

$$\text{Error relativo} = \frac{|\Delta\varphi_{Sim} - \Delta\varphi_{Teo}|}{\Delta\varphi_{Teo}}$$

Con este resultado damos por finalizada la comprobación del programa.

Seguidamente estudiaremos el cierre de los conos de luz al disminuir la distancia al radio gravitacional. Esto quiere decir que cuanto más cerca estamos de  $r_0$ , menor es el ángulo con el que podemos lanzar fotones con respecto a la dirección radial para que no acaben en el origen. Definimos el ángulo  $\alpha$  con el que lanzamos los fotones de la forma que muestra la figura 5.

Para cada radio hay un ángulo máximo  $\alpha_{Max}$ , para el cual los fotones que se lanzan con ángulo igual o inferior a este escaparán hacia el infinito, mientras que los fotones lanzados con un ángulo mayor acabarán en el origen. El objetivo es hallar cuál es el ángulo  $\alpha_{Max}$  para distintos radios.

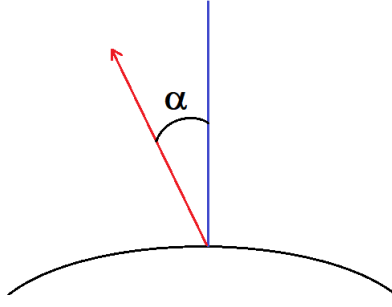


Figura 5: *Ángulo de lanzamiento de una partícula.*

A priori conocemos  $\alpha_{Max}$  para dos casos límites. Sabemos que si  $r \rightarrow r_0$  el ángulo máximo tenderá a 0 puesto que los conos de luz se cierran, y una vez dentro del agujero es imposible escapar. El otro caso es cuando  $r \rightarrow \infty$ , donde el ángulo máximo tiende a  $180^\circ$ , debido a que al estar infinitamente lejos del agujero se pueden lanzar fotones en todas las direcciones sin que estos acaben en el origen. Además conocemos un caso más de forma analítica que es el de la esfera de fotones. Como se ha visto antes en la ecuación (13) los fotones describen una órbita circular si se lanzan en dirección angular, es decir, con un ángulo de  $90^\circ$ . Esto queda ilustrado en esta figura:

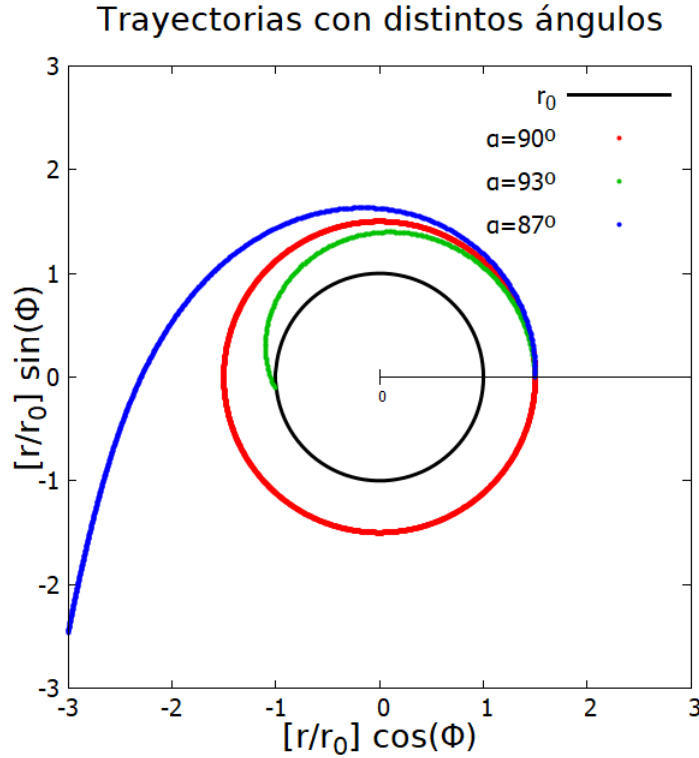


Figura 6: *Ejemplo de ángulo límite con el caso de la esfera de fotones.*

En ella se puede ver como para un ángulo de  $90^\circ$  el fotón no acaba en el origen y se mantiene en una órbita circular. Se ve además que este ángulo es el ángulo máximo, debido a que si lo aumentamos el fotón cae al origen. También se puede ver que si el ángulo es menor el fotón escapa.

A continuación hacemos lo mismo para distintos radios. En este caso, al no tener solución analítica de los ángulos máximos, para cada uno tenemos que ir probando hasta encontrarlo. Para ello fijamos el radio para el cual queremos encontrar el ángulo máximo y, una vez hecho esto, lo lanzamos con ángulo de  $90^\circ$ . Si el fotón cae al origen disminuimos un poco el ángulo y probamos de nuevo hasta que encontremos el primer ángulo para el cual no cae. Guardaremos este valor y repetiremos el mismo proceso para otros radios. Para inicializar el fotón con un ángulo determinado lo haremos de la siguiente forma:

$$\tan(\alpha) = \frac{\Psi}{R} . \quad (19)$$

Este método lo hemos empleado para radios menores a  $\frac{3}{2}r_0$  puesto que sabemos que en estos casos el ángulo máximo no va a superar los  $90^\circ$ . Para radios mayores el procedimiento es esencialmente el mismo pero empezando a probar con ángulos de  $180^\circ$  en vez de  $90^\circ$ . En este caso la inicialización del fotón viene dada por esta expresión:

$$\tan(\alpha - \pi/2) = \frac{-R}{\Psi} . \quad (20)$$

La gráfica que obtenemos es la siguiente:

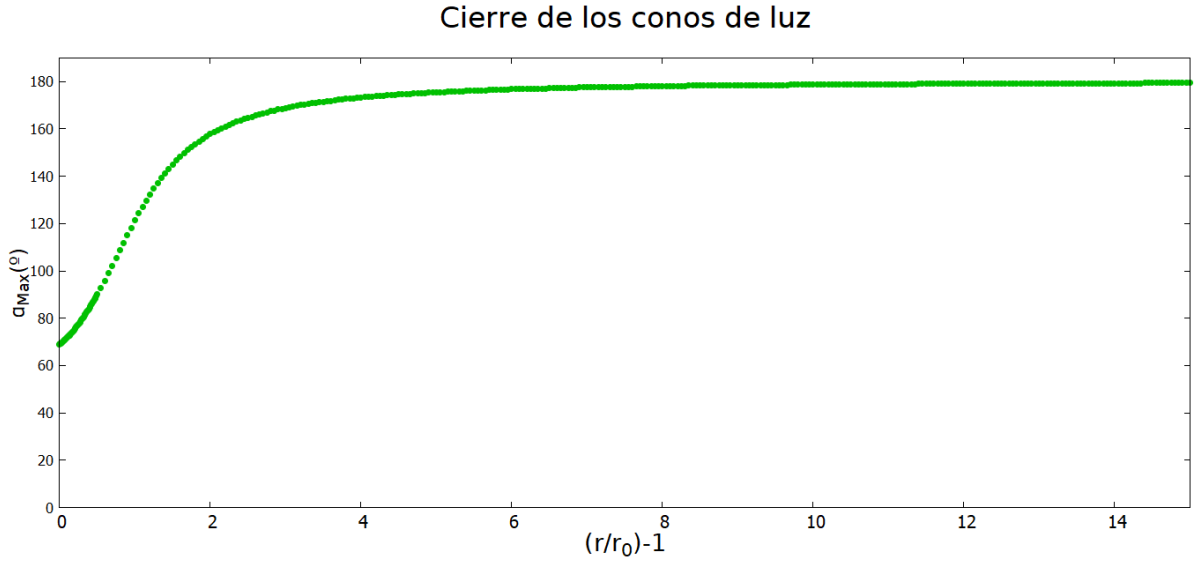


Figura 7: *Ángulo máximo para distintas distancias.*

Como vemos, si  $r \rightarrow \infty$ , el ángulo máximo tiende a  $180^\circ$  como esperábamos. Por otro lado, habíamos dicho que dicho ángulo debería tender a 0 conforme  $r \rightarrow r_0$  y se ve claramente que la tendencia es decreciente, pero para valores del orden de 0.001, el ángulo sigue siendo superior a  $60^\circ$ . Se pueden seguir explorando radios más pequeños y se espera que el ángulo tienda a 0; parece que la gráfica obtenida puede indicar que en algún valor de  $r$  muy próximo a  $r_0$  se producirá una disminución del ángulo máximo. Vamos a optar por realizar esta gráfica en otras coordenadas distintas en las que la tendencia del ángulo máximo hacia  $0^\circ$  sea más suave.

## Parte II: Coordenadas de Eddington-Finkelstein

La métrica de Schwarzschild nos ha permitido explorar trayectorias en el exterior del agujero negro pero el hecho de que presente una singularidad en el horizonte de sucesos dificulta el estudio de trayectorias cerca de este. Además la coordenada temporal utilizada anteriormente no es conveniente para el interior del agujero.

Para eliminar la divergencia en el horizonte de sucesos que aparece en Schwarzschild, se introduce un cambio de coordenadas con el objetivo de que las geodésicas radiales correspondientes a fotones en dirección al origen sean líneas de  $-45^\circ$ , es decir, como en el espacio plano. Así se introduce una nueva coordenada temporal dada por el siguiente cambio:

$$\bar{t} = t + r_0 \log \left| \frac{r}{r_0} - 1 \right| , \quad (21)$$

que para el caso de una geodésica radial de un fotón en dirección al origen cumple

$$\bar{t} = -r + \text{constante} , \quad (22)$$

obtenida de sustituir en (21) la ecuación (9) con el signo negativo.

Introduciendo esta nueva coordenada podemos reescribir el elemento de línea de Schwarzschild de la siguiente forma:

$$ds^2 = - \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) d\bar{t}^2 + \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right) dr^2 + 2 \frac{r_0}{r} d\bar{t} dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (23)$$

Este es el elemento de línea de Schwarzschild en coordenadas de Eddington-Finkelstein. Como podemos ver la singularidad que antes existía en  $r = r_0$  ha desaparecido, aunque seguimos manteniendo la correspondiente a  $r = 0$ . Esta última, como ya hemos mencionado, es imposible de eliminar al tratarse de una singularidad física.

En este sistema de coordenadas las ecuaciones geodésicas son las siguientes:

$$\frac{d\bar{T}}{d\tau} + \frac{r_0^2}{2r^3} \bar{T}^2 + \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right) \frac{r_0}{r^2} \bar{T} R + \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{r_0}{r} \right) \frac{r_0}{r^2} R^2 - r_0^2 \Psi^2 = 0 , \quad (24)$$

$$\frac{dR}{d\tau} + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) \frac{r_0}{r^2} \bar{T}^2 - \frac{r_0^2}{r^3} \bar{T} R - \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right) \frac{r_0}{r^2} R^2 + (r_0 - r) \Psi^2 = 0 , \quad (25)$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} + \frac{2}{r} \Psi R = 0 . \quad (26)$$

La notación utilizada es similar a la introducida en las coordenadas de Schwarzschild siendo  $R$ ,  $\bar{T}$  y  $\Psi$  las derivadas con respecto a  $\tau$  (un parámetro afín cualquiera) de  $r$ ,  $\bar{t}$  y  $\phi$  respectivamente. Como hemos mencionado anteriormente siempre podemos elegir  $\theta = \pi/2$ .

La ecuación de la ligadura de la cuadrivelocidad, en este caso es la siguiente:

$$\left( 1 - \frac{r_0}{r} \right) \bar{T}^2 - \frac{2r_0}{r} R \bar{T} - \left( 1 + \frac{r_0}{r} \right) R^2 - r^2 \Psi^2 = m . \quad (27)$$

## Cálculos Analíticos

Por conveniencia vamos a introducir  $v$ , conocida como coordenada nula avanzada, que se define implícitamente como:

$$dv = d\bar{t} + dr . \quad (28)$$

De esta forma el elemento de línea queda así:

$$ds^2 = 2dvdr - \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dv^2 + r^2 d\phi^2 . \quad (29)$$

Al igual que antes, el caso más sencillo es considerar un fotón. Restringiéndonos a trayectorias radiales se obtienen las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$dv = 0 , \quad (30)$$

$$2dr = \left(1 - \frac{r_0}{r}\right) dv . \quad (31)$$

Deshaciendo el cambio de  $v$  para recuperar  $\bar{t}$  se tiene:

$$d\bar{t} = -dr , \quad (32)$$

$$\left(1 - \frac{r_0}{r}\right) d\bar{t} = \left(1 + \frac{r_0}{r}\right) dr . \quad (33)$$

La primera ecuación cumple que  $dr/d\bar{t} < 0$  con lo cual se corresponde con la trayectoria de un fotón en dirección radial hacia el origen. La otra ecuación, por lo tanto, debe corresponderse con la trayectoria de un fotón en dirección radial hacia el infinito pero analizándola más en detalle se puede llegar a una conclusión interesante: fuera del agujero ( $r > r_0$ ) ambos paréntesis son positivos y se tiene que  $dr/d\bar{t} > 0$  lo cual es esperable pues el fotón se aleja de la singularidad, pero dentro del agujero ( $r < r_0$ ) el paréntesis que acompaña a  $\bar{t}$  es negativo y el que acompaña a  $r$  es positivo por lo que  $dr/d\bar{t} < 0$ . Esto indica que dentro del agujero no existe la posibilidad de que un fotón se aleje de la singularidad, sino que siempre va a ir disminuyendo su radio hasta llegar al origen.

Integrando las ecuaciones (32) y (33) obtenemos las trayectorias radiales de un fotón. La primera de ellas da:

$$\bar{t} = -r + \text{constante} . \quad (34)$$

Como vemos recuperamos la ecuación (22) introducida anteriormente. Con la segunda se obtiene lo siguiente:

$$\bar{t} = r + 2r_0 \log |r - r_0| + \text{constante} . \quad (35)$$

Si deshacemos el cambio de coordenadas dado por la ecuación (21) para recuperar la dependencia con  $t$  obtenemos las ecuaciones (9) ya estudiadas en la parte anterior, pero ahora con las ecuaciones (34) y (35) no hará falta que nos restrinjamos al exterior del agujero.

En la figura 8 vemos que, efectivamente, ahora las geodésicas radiales en dirección al origen son líneas de  $45^\circ$ . El aspecto de las trayectorias en el exterior del agujero es similar a las del caso de Schwarzschild asemejándose lejos de  $r_0$  a las de un espacio plano. El hecho de que la nueva coordenada temporal no diverja al aproximarse  $r$  a  $r_0$  facilitará la exploración en la zona próxima al radio gravitacional. Observamos que si  $r < r_0$  se cumple que toda partícula que se

### Geodésicas radiales de fotones en coordenadas de Eddington-Finkelstein

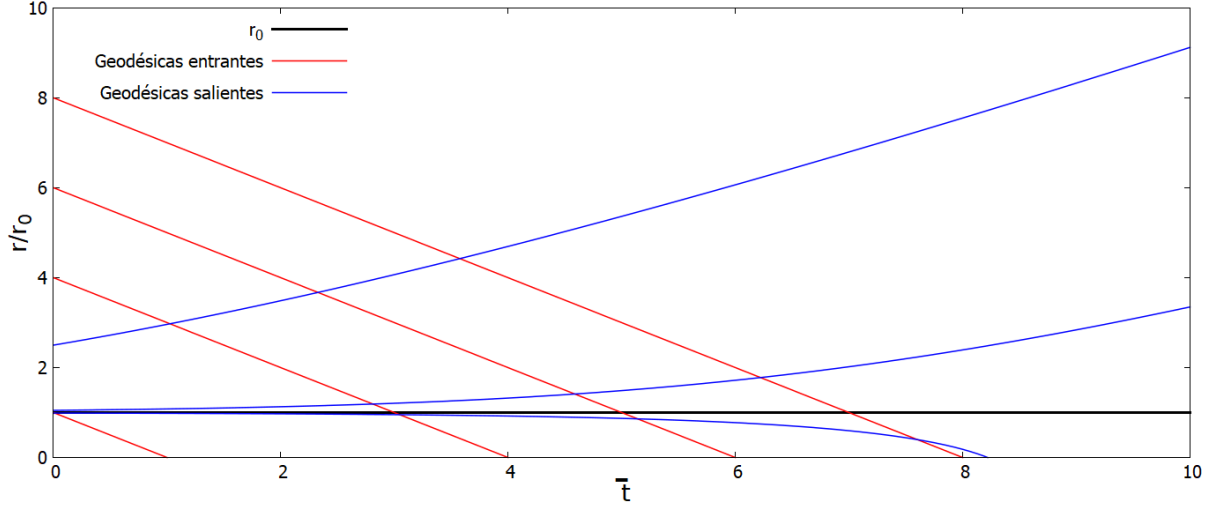


Figura 8: *Trayectorias radiales en las coordenadas de Eddington-Finkelstein.*

encuentre en el interior acabará llegando al origen. Una aclaración que conviene hacer es que en el interior del agujero las geodésicas que hemos denotado como geodésicas salientes realmente no lo son porque no se puede escapar del interior del agujero y, por lo tanto, dentro de este todas las geodésicas serían entrantes. Sin embargo para distinguirlas de las geodésicas que sí que son entrantes tanto en el exterior como en el interior las seguiremos denominando como geodésicas salientes.

Con las ecuaciones obtenidas hasta ahora podemos obtener algunos tiempos de colapso. Imaginemos que lanzamos un fotón desde una posición  $r_1 < r_0$  y queremos ver cuanto tiempo tarda en llegar a la singularidad. Para ello calculamos  $\Delta\bar{t} = \bar{t}(0) - \bar{t}(r_1)$  y bastará con sustituir  $r = 0$  y  $r = r_1$  en las geodésicas (34) y (35). Tenemos dos soluciones posibles, una para cada ecuación. La ecuación (34) da:

$$\Delta\bar{t} = r_1 . \quad (36)$$

Mientras que la ecuación (35) da:

$$\Delta\bar{t} = 2r_0 \log \left( \frac{r_0}{r_0 - r_1} \right) - r_1 . \quad (37)$$

Como podemos ver, obtenemos que el fotón tarda tiempos distintos en recorrer la misma distancia radial. La resolución numérica nos permitirá explorar esto en detalle y darle una interpretación.

## Resolución numérica

Al igual que hemos procedido en el caso de Schwarzschild, fijamos  $\bar{T}$  con la ligadura de la cuadrivelocidad a partir de las demás variables:

$$\bar{T} = \frac{\frac{r_0}{r}R \pm \sqrt{\frac{r_0^2}{r^2}R^2 + (1 - \frac{r_0}{r})[(1 + \frac{r_0}{r})R^2 + r^2\Psi^2 + m]}}{1 - \frac{r_0}{r}}. \quad (38)$$

Como antes, tenemos dos posibles soluciones. Fuera del agujero se puede ver que la correspondiente al signo positivo da un valor de  $\bar{T}$  positivo, mientras que la correspondiente al negativo da un valor de  $\bar{T}$  negativo. Por lo tanto, como queremos siempre que la evolución de la coordenada temporal sea creciente, fuera del agujero tomaremos la solución con el signo positivo al igual que en el caso de Schwarzschild. Sin embargo, dentro del agujero ambos signos dan soluciones de  $\bar{T}$  positivo por lo que a priori no podemos descartar ninguna de las dos. Veremos que esto está relacionado con las dos soluciones que hemos obtenido analíticamente en las ecuaciones (34) y (35) y con los dos tiempos de colapso de las ecuaciones (36) y (37) para fotones que se mueven en dirección radial hacia el origen. Al igual que hemos hecho en la parte anterior, inicializamos arbitrariamente  $\phi$  y  $\bar{t}$  a 0.

Para probar que el programa funciona correctamente vamos a reproducir un par de trayectorias ya obtenidas en el caso de Schwarzschild. Para ello nos colocamos fuera del agujero y calcularemos numéricamente una trayectoria cualquiera tanto para un fotón como para una masa. Obtenemos la siguiente gráfica:

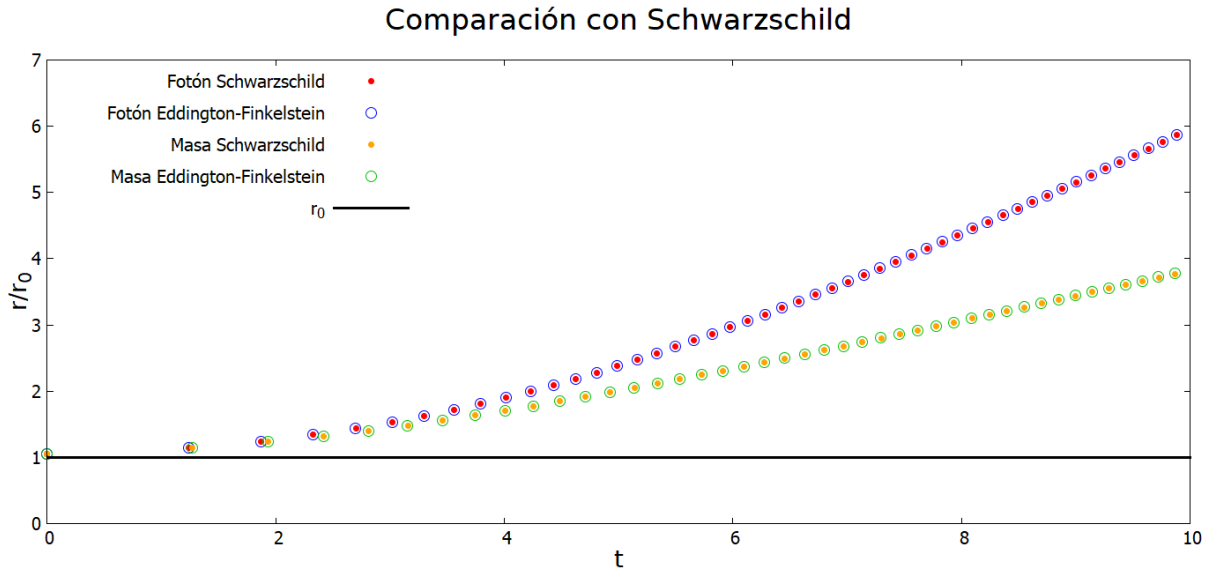


Figura 9: Comparación de trayectorias en ambos casos.

Se ve claramente que ambas trayectorias coinciden. Sin embargo, hay que destacar que la resolución numérica en las coordenadas de Eddington-Finkelstein es más cómoda a la hora de acercarse al radio gravitacional debido a la existencia de la singularidad en dicho punto en la métrica de Schwarzschild.

Para continuar vamos a obtener trayectorias radiales de fotones, al igual que hicimos en el caso de Schwarzschild, para comprobar los resultados del programa con resultados analíticos obtenidos en las ecuaciones (34) y (35). En primer lugar vamos a tratar el exterior del agujero. En la ecuación (38) desestimamos la solución negativa para la inicialización de  $\bar{T}$  y por lo tanto solo tenemos una posibilidad. Un fotón lanzado en dirección radial hacia el origen debería seguir una trayectoria dada por la ecuación (34), mientras que un fotón lanzado desde fuera del agujero en dirección radial hacia el infinito debería cumplir la ecuación (35). Las trayectorias radiales fuera del agujero negro tienen la forma indicada en las figuras 10 y 11.

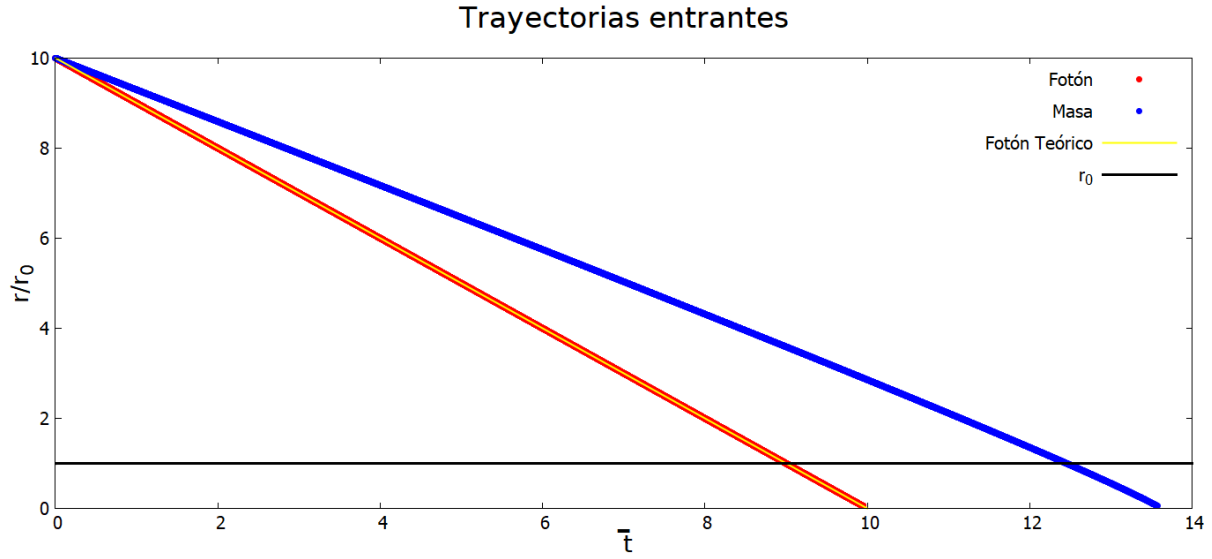


Figura 10: *Trayectorias en dirección radial hacia el origen en coordenadas de Eddington-Finkelstein.*

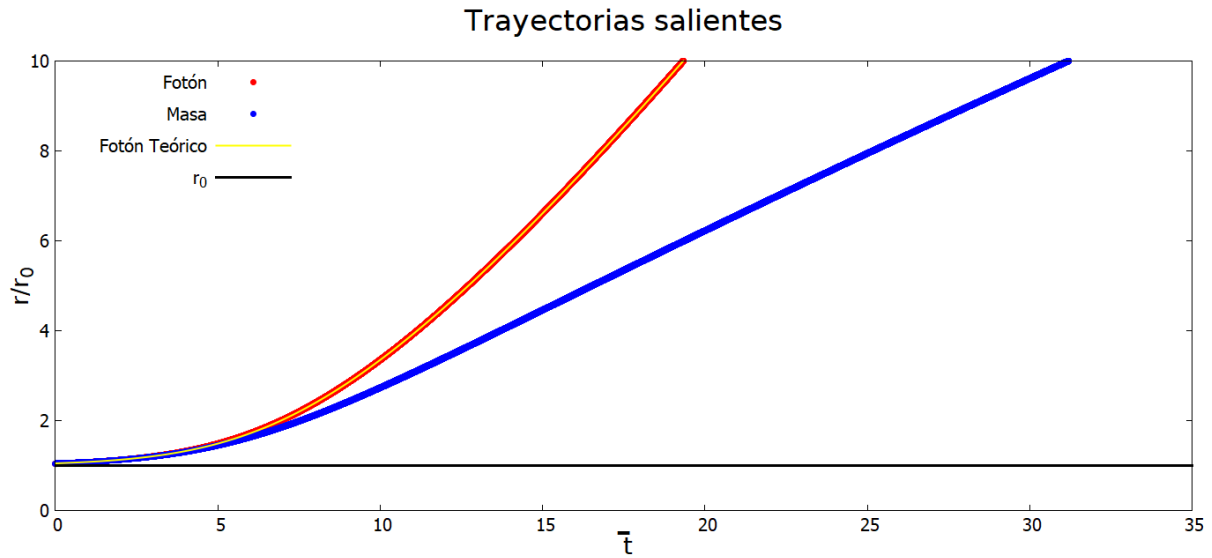


Figura 11: *Trayectorias en dirección radial hacia el infinito en coordenadas de Eddington-Finkelstein.*



Las trayectorias de los fotones se ajustan perfectamente a las ecuaciones de las geodésicas radiales (35) y (34) como esperábamos. Por otro lado, las trayectorias de las partículas con masa son también esperables, puesto que al moverse más lento que los fotones tardan más tiempo en recorrer las mismas distancias radiales. Con todo esto damos por finalizada la comprobación del programa.

Así mismo un resultado interesante que se puede obtener fácilmente es una comparación de los tiempos  $\bar{t}$  y  $t$  utilizados en las coordenadas de Eddington-Finkelstein y Schwarzschild respectivamente cuando lanzamos un fotón en dirección radial hacia el origen. El resultado puede verse en la figura 12.

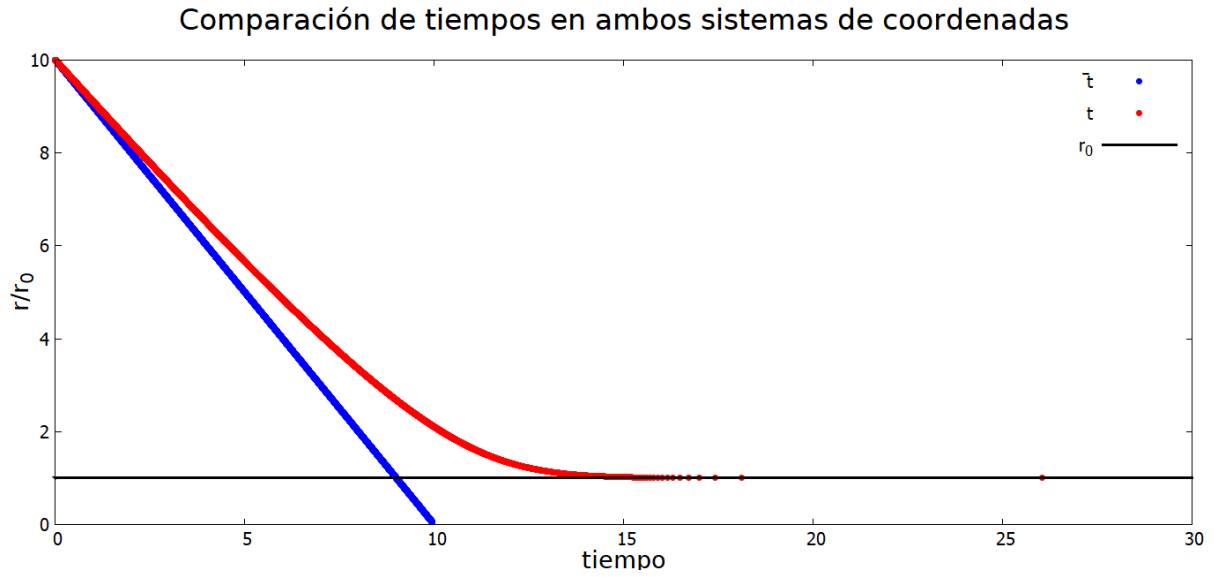


Figura 12: *Comparación del tiempo de Schwarzschild con el de Eddington-Finkelstein.*

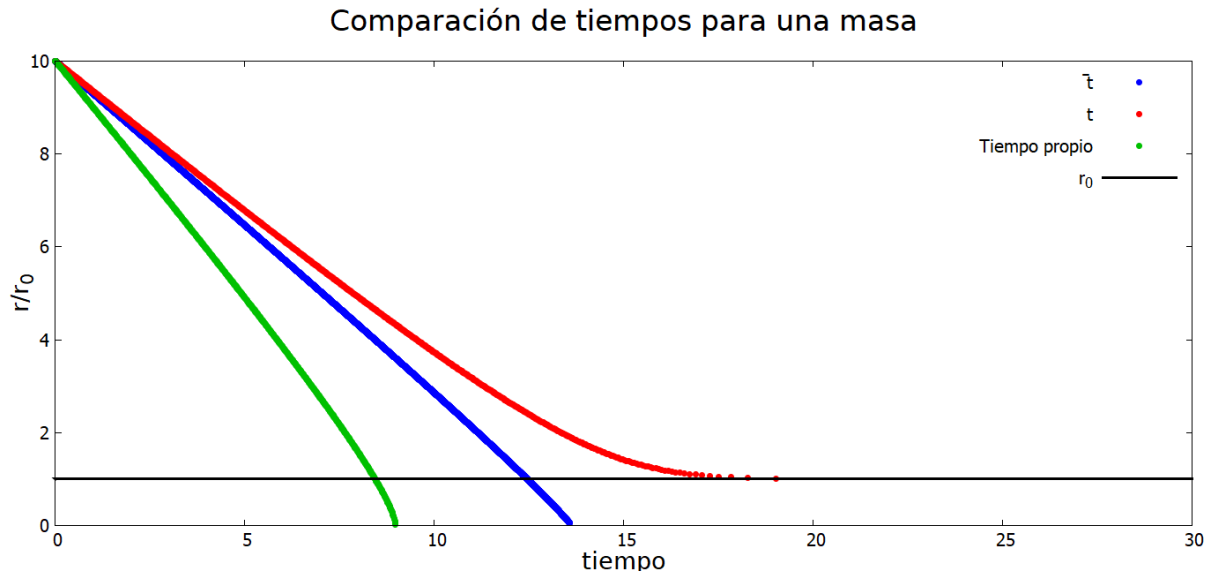


Figura 13: *Comparación del tiempo propio con los de Schwarzschild y Eddington-Finkelstein para una partícula con masa.*

Se ve que el tiempo de Schwarzschild diverge en el horizonte de sucesos, mientras que el tiempo de Eddington-Finkelstein no presenta ninguna divergencia y llega al origen.

Análogamente podemos ver que sucede con una partícula con masa. Para una masa, podemos ver una comparativa del tiempo propio con los tiempos de los dos sistemas de coordenadas. Además, el tiempo propio es particularmente interesante puesto que sabemos que es el que mediría un observador comóvil con la masa. Se obtiene lo mostrado en la figura 13.

Los tiempos de Schwarzschild y Eddington-Finkelstein se comportan como ya hemos visto en el caso del fotón. Lo interesante ahora es ver que el tiempo propio no diverge y, por lo tanto, un observador comóvil con la masa vería que llega al origen en tiempo finito. Podemos hacer una analogía con una estrella que colapsa. Mientras el observador en el infinito no ve el colapso puesto que tarda un tiempo infinito, el observador situado en la superficie de la estrella ve que este es finito, al igual que un observador que mide  $\bar{t}$ .

Ahora vamos a explorar el interior del agujero. Las geodésicas radiales vuelven a estar dadas por las ecuaciones (35) y (34). En el exterior del agujero la elección de una partícula que se va a mover en dirección radial se hacía tomando  $R > 0$  si queremos que vaya hacia el infinito, o tomando  $R < 0$  si queremos que se dirija a la singularidad. Sin embargo, ahora  $R$  no puede tomar valores positivos. Esto se debe a que en la ecuación (38) si  $R > 0$ , en el agujero negro los dos valores de  $\bar{T}$  son negativos. Sin embargo, si  $R < 0$ , ambos valores son positivos. Esto indica que, en este caso, las geodésicas radiales entrantes y salientes vienen definidas por el valor de  $\bar{T}$  que elijamos. A partir de ahora, nos referiremos a  $\bar{T}$  como  $\bar{T}_+$  si elegimos el signo positivo o como  $\bar{T}_-$  si elegimos el negativo. Las trayectorias radiales son de la forma que refleja la figura 14.

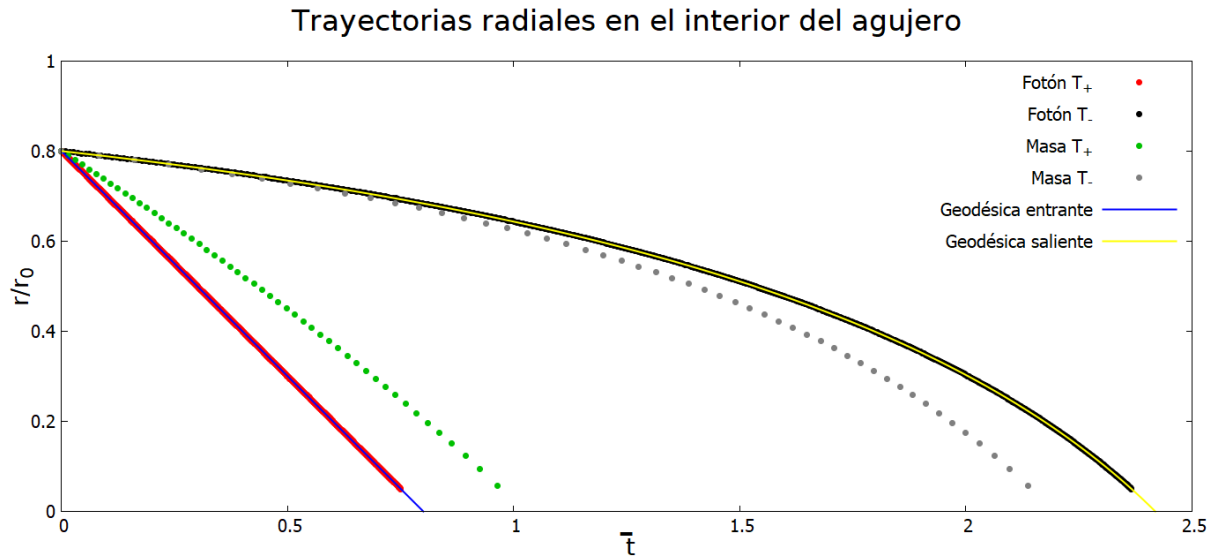


Figura 14: *Trayectorias en dirección radial dentro del agujero.*

Como vemos en la gráfica el hecho de elegir  $\bar{T}_+$  para el fotón radial da como resultado la geodésica (34), mientras que elegir  $\bar{T}_-$  proporciona la geodésica (35). En el caso de  $\bar{T}_-$  las masas tardan menos en llegar que los fotones y los resultados obtenidos parecen indicar que las trayec-

torias permitidas para una partícula deben estar contenidas entre las geodésicas de los fotones que se ven en la figura anterior. Vamos a explorar un poco más en detalle estos dos casos puesto que se obtienen resultados interesantes.

En primer lugar para ambas posibilidades de  $\bar{T}$  estamos lanzando el fotón hacia el interior del agujero en dirección radial por lo que es de esperar que recorran el mismo camino. A modo de aclaración, de ahora en adelante, cuando hablemos de camino nos referimos a la trayectoria descrita por las coordenadas radial y angular, excluyendo la dependencia temporal. Con la resolución numérica se comprueba que recorriendo caminos idénticos los tiempos de colapso son distintos en función de cómo se elige la celeridad temporal. Para investigar este resultado, estudiamos trayectorias angulares para ver qué resultados obtenemos con cada una de las inicializaciones de la celeridad temporal.

Lo primero que conviene aclarar es que el ángulo de lanzamiento de los fotones en el interior del agujero no puede ser cualquiera. Como ya hemos dicho antes un fotón no lo podemos inicializar en el interior del agujero con  $R = 1$  y  $\Psi = 0$ , pues analíticamente vimos que este caso es imposible. El ángulo máximo con el que podemos lanzar el fotón, vendrá dado por la ecuación (38). La raíz debe ser positiva, siempre por lo que se tiene que para el caso del fotón con  $m = 0$ :

$$R = \sqrt{r(r_0 - r)}\Psi . \quad (39)$$

Definimos el ángulo de la siguiente forma:

$$\tan(\beta) = \frac{\Psi}{R} . \quad (40)$$

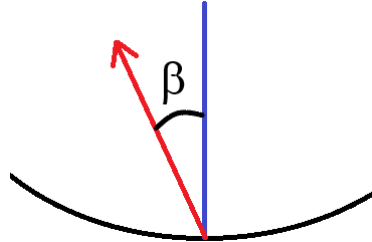


Figura 15: *Ángulo de lanzamiento en el interior del agujero.*

Introduciendo la ecuación (39) en la (40) se tiene que el ángulo máximo con el que se puede lanzar un fotón en el interior del agujero es:

$$\tan(\beta_{Max}) = \frac{1}{\sqrt{r(r_0 - r)}} . \quad (41)$$

Para probar esto, elegimos un radio fijo y lanzamos varios fotones, cada uno de ellos con un ángulo distinto comprendido entre 0 y el dado por la ecuación (41). Realizamos cada lanzamiento dos veces, una inicializando  $\bar{T}$  a  $\bar{T}_+$  y otra inicializándolo a  $\bar{T}_-$ .

En la figura 16 se ve que cambiar la inicialización de  $\bar{T}_+$  a  $\bar{T}_-$  no afecta al camino de la partícula. Vamos a ver que, al igual que antes, es el tiempo de colapso lo que varía.

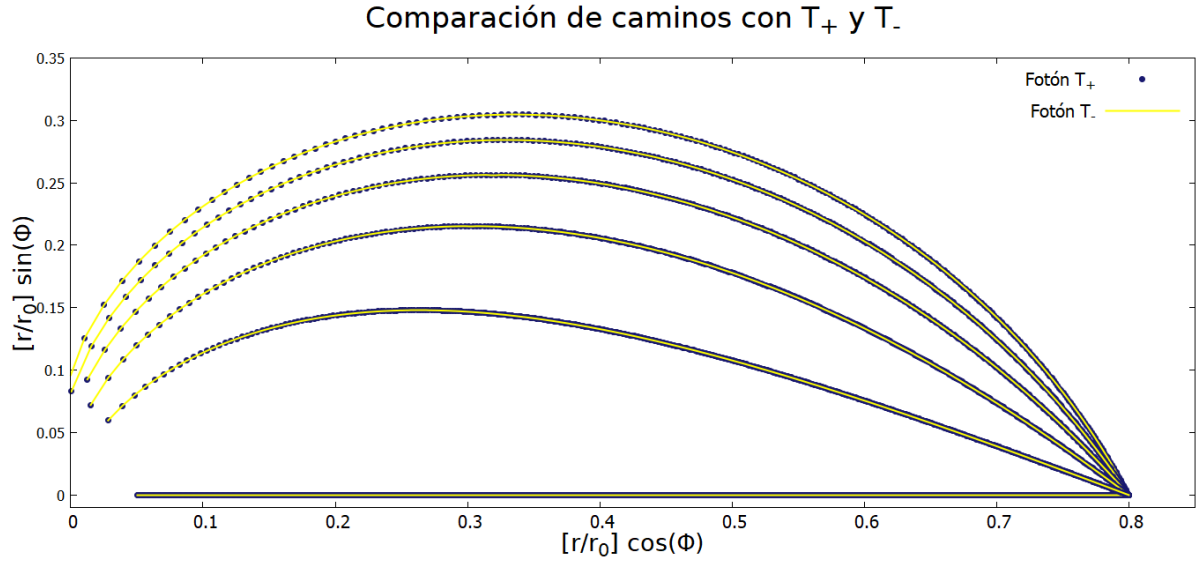


Figura 16: Comparación de caminos de  $\bar{T}_+$  y  $\bar{T}_-$  en el interior del agujero.

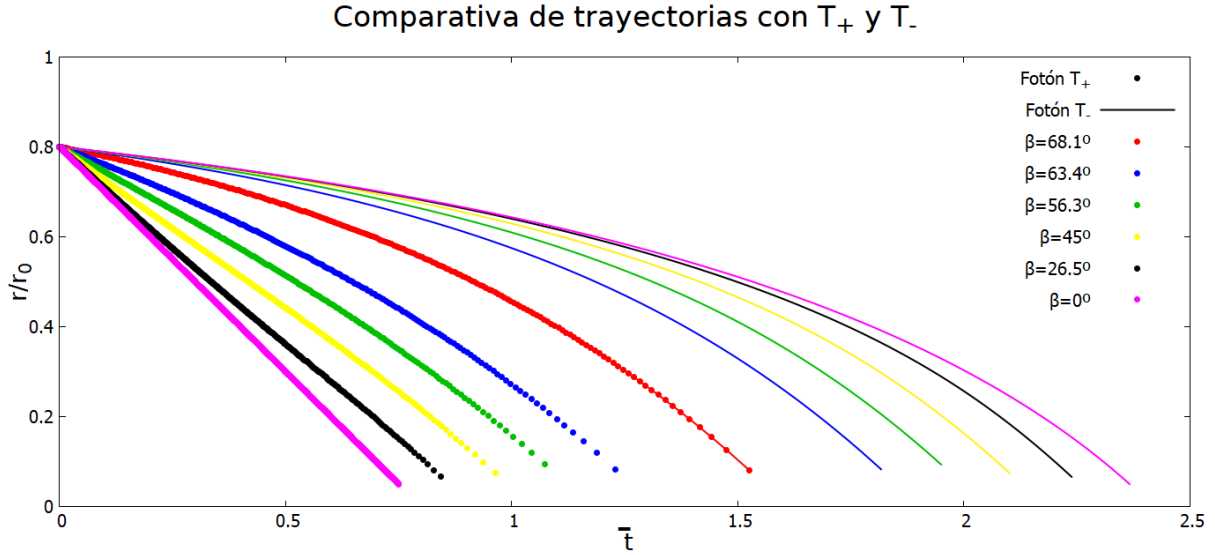


Figura 17: Distintas trayectorias con  $\bar{T}_+$  y  $\bar{T}_-$  en el interior del agujero.

El resultado que se obtiene en la figura 17 es que para  $\bar{T}_+$  el tiempo de colapso es mayor al aumentar el ángulo como es de esperar. Sin embargo, al hacer lo mismo con  $\bar{T}_-$  se obtiene lo contrario; a mayor ángulo, menor tiempo de colapso. También se observa que en el caso del ángulo máximo con el que se puede lanzar el fotón, para la distancia a la que nos encontramos ( $r = 0,8$ ), los tiempos de colapso coinciden tanto si elegimos  $\bar{T}_+$  como  $\bar{T}_-$ . Esto es algo que se puede ver analíticamente pues el caso del ángulo máximo se corresponde al caso para el que la raíz vale 0 en la ecuación (38) y por lo tanto elegir un signo u otro es irrelevante.

Dicho esto, y habiendo explorado ambas soluciones, la explicación que le damos a la existencia de dos posibilidades para la elección de  $\bar{T}$  es la siguiente: del caso radial queda claro que cada una de las soluciones se corresponde con una de las geodésicas en el interior del agujero.

La solución  $\bar{T}_+$  proporciona los tiempos de colapso dados por la geodésica (34) y que tienen continuidad con los obtenidos fuera del agujero, dados por esa misma geodésica. Sin embargo el tiempo  $\bar{T}_-$  proporciona los resultados de la geodésica (35), que en el exterior del agujero se corresponde con la de fotones que se dirigen al infinito. Esto es imposible en este caso por estar en el interior del agujero, y por lo tanto acaban cayendo al origen igualmente, siguiendo los mismos caminos correspondientes a las de la elección de  $\bar{T}_+$ . Fuera del agujero, escogiendo el signo de  $R$ , podemos elegir entre partículas que se lanzan hacia el origen o hacia el infinito, pero dentro del agujero  $R$  debe ser negativa necesariamente por lo que la elección de lanzar la partícula hacia afuera (aunque es imposible que salga del agujero) o hacia adentro, depende de escoger  $\bar{T}_-$  o  $\bar{T}_+$ .

Por último vamos a retomar el problema del cierre de los conos de luz en el exterior del agujero conforme el radio se acerca al radio gravitacional. En el caso de las geodésicas de Schwarzschild obtuvimos la figura 7, pero ahora buscamos obtener una dependencia más suave del ángulo con el radio conforme nos acercamos a  $r_0$ . Sin embargo el caso de las geodésicas de Eddington-Finkelstein da el mismo resultado puesto que las coordenadas radial y angular son las mismas en ambos sistemas.

No obstante, se puede introducir una nueva coordenada radial para la cual la dependencia será mucho más suave:

$$r_* = r + r_0 \log \left| \frac{r}{r_0} - 1 \right|. \quad (42)$$

A esta coordenada radial se la conoce como "tortoise coordinate". Al redefinir la coordenada radial también hay que redefinir la celeridad radial, que en este caso es simplemente derivar la expresión anterior con respecto a un parámetro afín. Como hemos hecho hasta ahora, denotamos como  $R_*$  a  $dr_*/d\tau$ :

$$R_* = \frac{r}{r - r_0} R. \quad (43)$$

Así el ángulo lo redefinimos de forma análoga a la ecuación (19):

$$\tan(\alpha_*) = \frac{\Psi}{R_*}. \quad (44)$$

Para introducir los nuevos parámetros, lo único que tenemos que hacer es reemplazar en los datos obtenidos anteriormente:  $r$  por  $r_*$ ,  $R$  por  $R_*$  y  $\alpha$  por  $\alpha_*$ . De esta forma se obtiene lo mostrado en la figura 18.

Ahora la dependencia es mucho más suave y vemos cómo los ángulos van de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  por lo que pasamos a analizar los resultados. Lo primero de todo es corroborar que los extremos de la función son correctos. Comenzamos con  $r_*$ . Si en la ecuación (42)  $r \rightarrow r_0$ , obtenemos que  $r_*$  diverge a  $-\infty$ . Por otro lado, si  $r \rightarrow \infty$ , en la ecuación (42)  $r_*$  diverge a  $+\infty$ . Para analizar los casos extremos de  $\alpha_*$  utilizamos las ecuaciones (44), (43) y (19). Combinando estas expresiones se llega a la siguiente relación entre ángulos:

$$\frac{\tan(\alpha)}{\tan(\alpha_*)} = \frac{r}{r - r_0}. \quad (45)$$

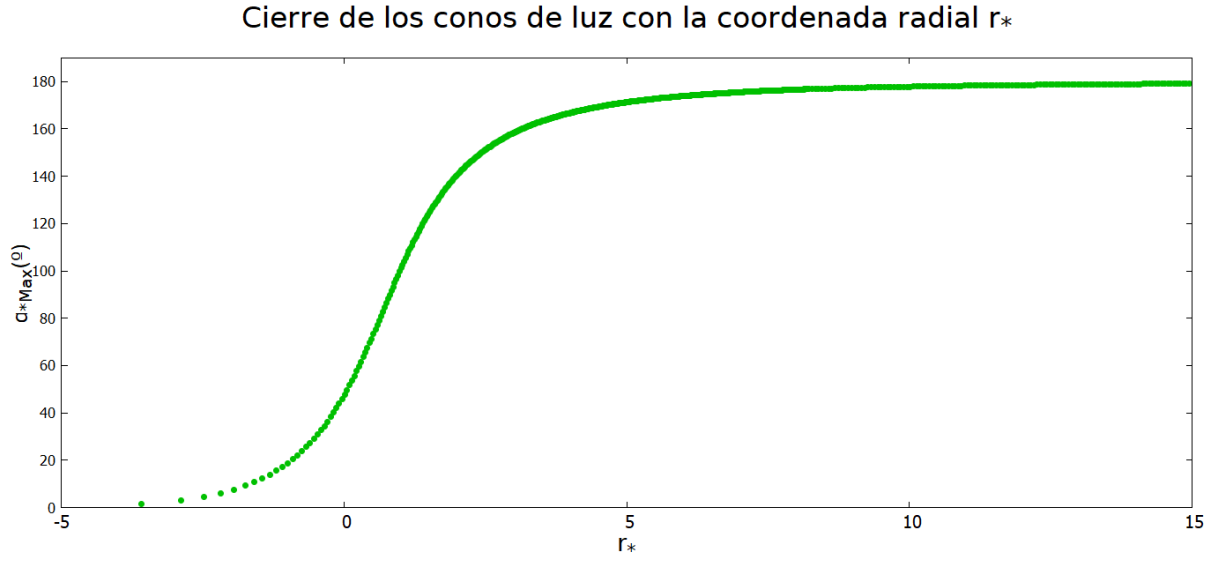


Figura 18: *Cierre de los conos de luz en coordenadas de  $r_*$ .*

Con la ecuación (45) podemos averiguar los valores extremos de  $\alpha_*$ . Si  $r \rightarrow r_0$  sabemos que  $\alpha$  tiende a 0 por el cierre de los conos de luz, y, por lo tanto,  $\alpha_*$  tiende a 0 también por la ecuación anterior. En el caso de que  $r \rightarrow \infty$ ,  $\alpha$  diverge a  $\infty$  implicando que  $\alpha_*$  lo haga igualmente.

Por lo tanto podemos comprobar que los casos límites se reproducen correctamente en la gráfica mostrada. Si  $r \rightarrow r_0$ ,  $r_*$  tiende a  $-\infty$  y  $\alpha_*$  tiende a 0, mientras que si  $r \rightarrow \infty$ ,  $r_*$  tiende a  $\infty$  y  $\alpha_*$  tiende a  $180^{\circ}$  como ocurre en la figura 18.

## Conclusiones

A modo de cierre, vamos a recapitular los resultados más relevantes obtenidos a lo largo del trabajo.

La métrica de Schwarzschild describe el campo generado por un agujero negro y presenta una singularidad física en  $r = 0$  y una debida al sistema de coordenadas en  $r = r_0$  que se puede eliminar utilizando las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Las trayectorias radiales de los fotones se pueden obtener analíticamente en ambos sistemas y vienen dadas por las ecuaciones (9) en Schwarzschild y por (34) y (35) en Eddington-Finkelstein.

La principal diferencia de ambos sistemas es la coordenada temporal que utilizan. En el caso de Schwarzschild es el tiempo que mediría un observador en el infinito y presenta una divergencia conforme las partículas se acercan al horizonte de sucesos. En el caso de Eddington-Finkelstein esta divergencia no existe y se observan tiempos de colapso finitos. Además para partículas con masa también es relevante el tiempo propio, el cual mide un observador comóvil con las partículas y que tampoco diverge en el horizonte de sucesos.

Ambos sistemas de coordenadas permiten estudiar el exterior del agujero y en ambos se observa el cierre de los conos de luz conforme la distancia al horizonte de sucesos disminuye. En los dos sistemas de coordenadas el cierre de los conos de luz es idéntico y se puede definir una coordenada radial nueva que provoca que el cierre para distancias cercanas al horizonte de sucesos sea mucho más suave.

Por último, el interior del agujero no es adecuado estudiarlo en el sistema de coordenadas de Schwarzschild. Dentro de este toda partícula acaba llegando a la singularidad y no puede escapar del agujero. No obstante el tiempo de colapso varía en función de que las partículas se intenten lanzar hacia afuera o hacia dentro, aunque los caminos realizadas por estas son iguales.

## Referencias

- [1] Steven Weinberg. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley, 1972.
- [2] Ta-Pei Cheng. *Relativity, gravitation and cosmology: a basic introduction*. Vol. 11. Oxford University Press, 2009.
- [3] Jerry B Griffiths y Jiří Podolsk. *Exact space-times in Einstein's general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] J Robert Oppenheimer y Hartland Snyder. “On continued gravitational contraction”. En: *Physical Review* 56.5 (1939), pág. 455.
- [5] Herbert Goldstein. *Mecánica clásica*. Reverté, 1987.
- [6] Uroš Kostić. “Analytical time-like geodesics in Schwarzschild space-time”. En: *General Relativity and Gravitation* 44.4 (2012), págs. 1057-1072.
- [7] Sharmanthie Fernando. “Schwarzschild black hole surrounded by quintessence: null geodesics”. En: *General Relativity and Gravitation* 44.7 (2012), págs. 1857-1879.
- [8] David Griffiths y Desmond Higham. *Numerical methods for ordinary differential equations. Initial value problems*. Springer, 2010.



## Apéndice A. Método de Runge-Kutta de cuarto orden

El método de Runge-Kutta permite resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de primer orden. Las ecuaciones geodésicas son de segundo orden y se pueden escribir introduciendo las funciones  $f_R$ ,  $f_T$  y  $f_\Psi$  y las celeridades  $T$ ,  $R$  y  $\Psi$  definidas anteriormente:

$$\frac{d^2 t}{d\tau^2} = f_T(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (46)$$

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = f_R(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (47)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\tau^2} = f_\Psi(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) . \quad (48)$$

La discretización se hace reduciendo el sistema de 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden a uno de 6 de primer orden de la siguiente forma:

$$\frac{dt}{d\tau} = T , \quad (49)$$

$$\frac{dr}{d\tau} = R , \quad (50)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \Psi , \quad (51)$$

$$\frac{dT}{d\tau} = f_T(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (52)$$

$$\frac{dR}{d\tau} = f_R(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (53)$$

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = f_\Psi(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) . \quad (54)$$

Con las ecuaciones de primer orden, introduciendo de ahora en adelante  $h$  como el paso temporal, se definen unas variables de evolución que son de la siguiente forma:

$$n_1 = h T , \quad (55)$$

$$m_1 = h R , \quad (56)$$

$$d_1 = h \Psi , \quad (57)$$

$$l_1 = h f_T(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (58)$$

$$j_1 = h f_R(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) , \quad (59)$$

$$b_1 = h f_\Psi(r, R, t, T, \phi, \Psi, \tau) ; \quad (60)$$

$$n_2 = h (T + \frac{1}{2} l_1) , \quad (61)$$

$$m_2 = h (R + \frac{1}{2} j_1) , \quad (62)$$

$$d_2 = h (\Psi + \frac{1}{2} b_1) , \quad (63)$$

$$l_2 = h f_T(r + \frac{1}{2} m_1, R + \frac{1}{2} j_1, t + \frac{1}{2} n_1, T + \frac{1}{2} l_1, \phi + \frac{1}{2} d_1, \Psi + \frac{1}{2} b_1, \tau + \frac{1}{2} h) , \quad (64)$$

$$j_2 = h f_R(r + \frac{1}{2}m_1, R + \frac{1}{2}j_1, t + \frac{1}{2}n_1, T + \frac{1}{2}l_1, \phi + \frac{1}{2}d_1, \Psi + \frac{1}{2}b_1, \tau + \frac{1}{2}h) , \quad (65)$$

$$b_2 = h f_\Psi(r + \frac{1}{2}m_1, R + \frac{1}{2}j_1, t + \frac{1}{2}n_1, T + \frac{1}{2}l_1, \phi + \frac{1}{2}d_1, \Psi + \frac{1}{2}b_1, \tau + \frac{1}{2}h) ; \quad (66)$$

$$n_3 = h (T + \frac{1}{2}l_2) , \quad (67)$$

$$m_3 = h (R + \frac{1}{2}j_2) , \quad (68)$$

$$d_3 = h (\Psi + \frac{1}{2}b_2) , \quad (69)$$

$$l_3 = h f_T(r + \frac{1}{2}m_2, R + \frac{1}{2}j_2, t + \frac{1}{2}n_2, T + \frac{1}{2}l_2, \phi + \frac{1}{2}d_2, \Psi + \frac{1}{2}b_2, \tau + \frac{1}{2}h) , \quad (70)$$

$$j_3 = h f_R(r + \frac{1}{2}m_2, R + \frac{1}{2}j_2, t + \frac{1}{2}n_2, T + \frac{1}{2}l_2, \phi + \frac{1}{2}d_2, \Psi + \frac{1}{2}b_2, \tau + \frac{1}{2}h) , \quad (71)$$

$$b_3 = h f_\Psi(r + \frac{1}{2}m_2, R + \frac{1}{2}j_2, t + \frac{1}{2}n_2, T + \frac{1}{2}l_2, \phi + \frac{1}{2}d_2, \Psi + \frac{1}{2}b_2, \tau + \frac{1}{2}h) ; \quad (72)$$

$$n_4 = h (T + l_3) , \quad (73)$$

$$m_4 = h (R + j_3) , \quad (74)$$

$$d_4 = h (\Psi + b_3) , \quad (75)$$

$$l_4 = h f_T(r + m_3, R + j_3, t + n_3, T + l_3, \phi + d_3, \Psi + b_3, \tau + h) , \quad (76)$$

$$j_4 = h f_R(r + m_3, R + j_3, t + n_3, T + l_3, \phi + d_3, \Psi + b_3, \tau + h) , \quad (77)$$

$$b_4 = h f_\Psi(r + m_3, R + j_3, t + n_3, T + l_3, \phi + d_3, \Psi + b_3, \tau + h) . \quad (78)$$

Utilizando estas variables de evolución se actualizan  $t$ ,  $T$ ,  $r$ ,  $R$ ,  $\phi$ ,  $\Psi$  y  $\tau$  de la siguiente forma:

$$t = t + \frac{1}{6}(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4) , \quad (79)$$

$$T = T + \frac{1}{6}(l_1 + 2l_2 + 2l_3 + l_4) , \quad (80)$$

$$r = r + \frac{1}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) , \quad (81)$$

$$R = R + \frac{1}{6}(j_1 + 2j_2 + 2j_3 + j_4) , \quad (82)$$

$$\phi = \phi + \frac{1}{6}(d_1 + 2d_2 + 2d_3 + d_4) , \quad (83)$$

$$\Psi = \Psi + \frac{1}{6}(b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4) , \quad (84)$$

$$\tau = \tau + h . \quad (85)$$

De esta forma este proceso puede iterarse las veces que se desee.