

# Cuando el comportamiento corrupto condiciona los contactos sociales.



**Universidad**  
Zaragoza



**Facultad de Ciencias**  
**Universidad Zaragoza**

**Directores:**

Luis Mario Floría Peralta

Hugo Pérez Martínez

**Autor:**

José Antonio Cavero Causín

**Fecha:**

26 de junio de 2022

**Asignatura:**

Trabajo de fin de grado.

# Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>2</b>
<b>2. Modelo HCO.</b>	<b>2</b>
<b>3. Aproximación de campo medio.</b>	<b>4</b>
3.1. Dinámicas del campo medio. . . . .	5
3.2. Validación de resultados. . . . .	7
<b>4. Dinámica de la red.</b>	<b>8</b>
4.1. Número de enlaces totales conservado. . . . .	9
4.2. Número de enlaces totales no conservado . . . . .	15
<b>5. Conclusiones.</b>	<b>21</b>

# 1. Introducción.

Todas las sociedades desde la antigüedad tienen normas cuya infracción está condenada por la sociedad. Una de las infracciones sociales más relevantes a lo largo de la historia humana es la corrupción, que se observa en diferentes ámbitos (social, económico, político, etc) y a diferentes escalas.

En la literatura se tiende a utilizar la teoría de juegos para estudiar el fenómeno de la corrupción [1], este enfoque parece el más adecuado ya que permite enmarcar la corrupción en una estrategia de un juego en la que existen ganancias y tomas de decisiones. A la hora de generalizar a una sociedad con un número grande de agentes, este enfoque presenta una gran complejidad, debido a la gran cantidad de parámetros y variables que dificultan un estudio exhaustivo del comportamiento del sistema. Debido a esto pretendemos capturar la dinámica de la difusión de la corrupción mediante un modelo sencillo. Se propone un modelo compartimental de tres estados, honesto, corrupto y ostracismo en el que los agentes pueden pasar de un estado a otro. De esta forma el comportamiento corrupto no es una estrategia de un juego, sino que se identifica como un comportamiento transmisible. En la literatura se identifica el fenómeno de la corrupción como comportamiento merecedor de castigo, es este aspecto el que da lugar a los tres estados del modelo [2, 3].

Se han realizado estudios previos sobre este modelo [4, 5] en los que la estructura de contactos de los agentes del sistema permanecía constante. En este trabajo vamos a dar un paso más para acercarnos a una sociedad real, en la que la estructura de contactos de un agente cambia en función del comportamiento ante la norma social de sus vecinos. En concreto vamos a estudiar dos sociedades, por una lado una sociedad temerosa en la que los agentes honestos tienen miedo de los agentes corruptos por lo que rompen su relación, por otro lado una sociedad punitiva en la que los agentes honestos castigan a los agentes en ostracismo rompiendo su relación. Dividimos el estudio de estas sociedades según dos hipótesis principales, una en la que asumimos que el número total de contactos sociales se mantiene constante a lo largo del tiempo y otra en la que no.

La estructura que sigue el trabajo es la siguiente: en la sección 2 presentamos el modelo. En la sección 3 realizamos la aproximación de campo medio. En la sección 4 estudiamos por un lado mecanismos que conservan el grado del sistema y por otro lado mecanismos que no. Estudiamos también las sociedades temerosa y punitiva de la corrupción. Por último, en la sección 5 presentamos las principales conclusiones del trabajo.

## 2. Modelo HCO.

Este modelo estudia una sociedad en la que existe una norma que se puede infringir, separando así la población en honestos y corruptos. Si el castigo que se impone a los individuos corruptos es el ostracismo (expulsión de la sociedad o prisión) obtenemos los tres posibles estados para un individuo, H (honesto), C (corrupto) y O(ostracismo) que

dan nombre al modelo. Estos estados se pueden ver como compartimentos que encierran a la cantidad de agentes de la población en cada estado. Este modelo ya ha sido caracterizado en la literatura [5].

Para llevar a cabo este estudio se realizan las siguientes hipótesis: caracterizamos el comportamiento corrupto como un estado infeccioso, es decir un agente (o nodo en la red de contactos) honesto pasa a corrupto por la interacción con sus vecinos corruptos. El paso de corrupto a ostracismo se debe únicamente a delación de los agentes corruptos por sus vecinos honestos. Es importante notar que la delación no se produce por acción de un agente externo al sistema que persiga la corrupción, sino que solo se produce por agentes honestos, y de esta forma se evita la necesidad de introducir subtipos de agentes. Por último los agentes en ostracismo se reinsertan a la sociedad como agentes honestos a un ritmo constante  $r$ . De esta forma estamos definiendo tres flujos entre los diferentes compartimentos, el flujo de corrupción, el flujo de delación y el flujo de reinsertación.

Hay que recalcar que mientras que el flujo de reinsertación es el único que se produce a un ritmo constante, los otros dos son mediados por interacción entre agentes. Los nodos en estado O son socialmente inactivos, es decir, no afectan a la conversión de sus vecinos corruptos a honestos.

Como se ha expuesto, el paso de honesto a corrupto y de corrupto a ostracismo está mediado por interacción con un vecino. Por lo tanto, la probabilidad de corrupción, es decir, la probabilidad que tiene un agente honesto de pasar a corrupto, y la probabilidad de delación, es decir, la probabilidad de que un agente corrupto pase a ostracismo, dependerán del entorno de dichos nodos. Llamamos a estas probabilidades  $f_\alpha$  y  $f_\beta$  respectivamente. Pasando a un punto de vista microscópico, asumimos que al interactuar, un agente honesto delata a un vecino corrupto con una probabilidad  $\beta$  y un agente corrupto corrompe a un vecino honesto con una probabilidad  $\alpha$ . De esta forma la probabilidad de que ninguno de sus vecinos corruptos corrompa a un agente honesto es  $(1 - \alpha)^{n_C}$  dónde  $n_C$  sería el número de vecinos corruptos. La probabilidad de pasar a corrupto de un agente honesto será uno menos esta probabilidad. El razonamiento es análogo para la delación. Así, podemos construir las probabilidades de corrupción,  $f_\alpha$  y delación,  $f_\beta$  como:

$$f_\alpha(i, \{\sigma_j\}_{j=1}^{k_i}) = 1 - \prod_{j=1}^{k_i} (1 - \alpha \delta_{\sigma_j, C}), \quad (1)$$

$$f_\beta(i, \{\sigma_j\}_{j=1}^{k_i}) = 1 - \prod_{j=1}^{k_i} (1 - \beta \delta_{\sigma_j, H}), \quad (2)$$

donde  $i$  representa un agente de la sociedad,  $k_i$  representa el número de vecinos del agente  $i$ ,  $\{\sigma_j\}_{j=1}^{k_i}$  representa los estados de los vecinos  $j$  del entorno de  $i$ , es decir el estado que puede ser honesto, corrupto u ostracismo, de cada uno de los vecinos de  $i$ ,  $\delta_{x,y}$  es la delta de Kronecker.

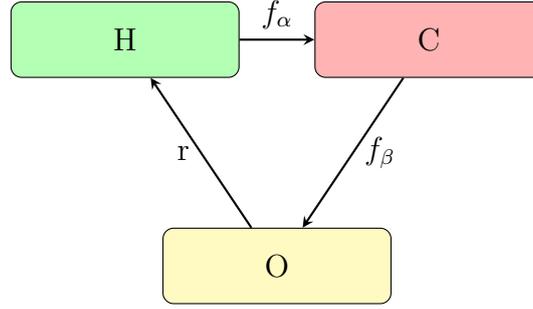


Figura 1: Representación del diagrama de flujo y del modelo compartimental. Existen 3 flujos entre los tres compartimentos del modelo, el flujo de reinserción se produce a ritmo constante  $r$ , mientras que los otros dos son debidos a interacciones C-H.

Con las hipótesis que hemos supuesto y las funciones de las probabilidades de corrupción y delación definidas, podemos construir un esquema para una simulación estocástica de Monte Carlo:

1. Si  $\sigma_i(t) = H$  entonces  $\sigma_i(t+1) = C$  con probabilidad  $f_\alpha$  y por tanto permanece en estado H con probabilidad  $1 - f_\alpha$ .
2. Si  $\sigma_i(t) = C$  entonces  $\sigma_i(t+1) = O$  con una probabilidad  $f_\beta$ , de nuevo permanecerá en el estado C con probabilidad  $1 - f_\beta$ .
3. Por último si  $\sigma_i(t) = O$  entonces  $\sigma_i(t+1) = H$  con probabilidad  $r$  y permanecerá en O con probabilidad  $1 - r$ .

En la figura 1 presentamos un diagrama de flujo, donde se pueden observar de una forma gráfica todas las asunciones expuestas, así como las fracciones de población. En otros trabajos previos se han contemplado flujos adicionales como la conversión espontánea de agentes corruptos a honestos [4] pero en nuestro estudio no los vamos a tener en cuenta por sencillez.

Podemos ver en la figura 1 que el diagrama de flujo de nuestro modelo es equivalente al modelo epidémico Susceptible-Infectado-Recuperado-Susceptible (SIRS), en el que un agente susceptible pasa a infectado por interacción con un vecino infectado, un agente infectado pasa a recuperado con una determinada probabilidad y un agente recuperado pasa a susceptible con otra probabilidad. Podemos identificar  $S \equiv H$ ,  $I \equiv C$ ,  $R \equiv O$ , con la única diferencia de que el paso de  $I \equiv C$  a  $R \equiv O$  va mediado por la interacción con un agente  $S \equiv H$ . Podría representar una enfermedad en la que los agentes infectados requieren de la ayuda de uno sano para recuperarse.

### 3. Aproximación de campo medio.

Lo primero que hacemos para estudiar el modelo es una aproximación de campo medio, ya que es una práctica simple y bien conocida dentro del ámbito de la física estadística.

Aunque no siempre, la aproximación de campo medio suele dar una descripción cualitativa del comportamiento macroscópico del sistema.

### 3.1. Dinámicas del campo medio.

Para estudiar la dinámica suponemos homogeneidad en entorno y estructura de contactos, es decir cada agente se comporta como el agente medio y todos los agentes tendrán el mismo grado (número de vecinos), que será el grado medio del sistema. Asumimos que el entorno de los agentes es igual a la composición global del sistema, lo que implica que la probabilidad de interactuar con una especie en un contacto es igual a la probabilidad de encontrar dicha especie en el sistema. Con estas hipótesis podemos identificar las fracciones de población  $\langle H \rangle$ ,  $\langle C \rangle$ ,  $\langle O \rangle$ , con la probabilidad de estar en un estado,  $\rho_H, \rho_C, \rho_O$ .

Utilizando estas hipótesis, y definiendo el vector  $\vec{\rho}(t) = (\rho_H(t), \rho_C(t), \rho_O(t))$  cuyas componentes representan la probabilidad de cada posible estado, podemos reformular las expresiones (1) y (2) para las probabilidades de corrupción y delación en la aproximación de campo medio como

$$f_\alpha(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \alpha\rho_C)^k, \quad (3)$$

$$f_\beta(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \beta\rho_H)^k, \quad (4)$$

Podemos construir las probabilidades de que un agente pertenezca a cada estado en un tiempo  $t + 1$  a partir de las probabilidades en el tiempo  $t$  utilizando el diagrama de flujo de la figura 1. La probabilidad de ser honesto en  $t + 1$  es la probabilidad de ser honesto en  $t$ ,  $\rho_H(t)$ , menos la probabilidad de pasar a corrupto,  $f_\alpha\rho_H$ , más la probabilidad de reinserción desde ostracismo,  $r\rho_O$ , así obtenemos la expresión (5). El razonamiento es análogo para las expresiones (6) y (7).

$$\rho_H(t + 1) = (1 - f_\alpha)\rho_H(t) + r\rho_O(t), \quad (5)$$

$$\rho_C(t + 1) = f_\alpha\rho_H(t) + (1 - f_\beta)\rho_C(t), \quad (6)$$

$$\rho_O = f_\beta\rho_C(t) + (1 - r)\rho_O(t). \quad (7)$$

Podemos codificar este proceso en ecuación vectorial:

$$\vec{\rho}(t + 1) = \begin{bmatrix} 1 - f_\alpha & 0 & r \\ f_\alpha & 1 - f_\beta & 0 \\ 0 & f_\beta & 1 - r \end{bmatrix} \vec{\rho}(t).$$

A continuación vamos a estudiar la variación temporal de estas probabilidades para poder estudiar los puntos fijos del sistema, que son los puntos del espacio de fases en los que las fracciones de población no cambian en el tiempo, y realizar un análisis de estabilidad lineal [6] sobre ellos. Como  $\rho_H + \rho_C + \rho_O = 1$  tenemos una ligadura entre estas

tres variables, por lo que podemos centrarnos únicamente en  $\rho_H$  y  $\rho_C$  ya que conociendo ambos conocemos  $\rho_O$ . Así nos quedamos con las ecuaciones (5) y (6). Si en la ecuación (5) restamos  $\rho_H(t)$  a ambos lados, y en la (6),  $\rho_C(t)$ , obtenemos:

$$\begin{aligned}\rho_H(t+1) - \rho_H(t) &= (1 - f_\alpha)\rho_H(t) + r\rho_O(t) - \rho_H(t), \\ \rho_C(t+1) - \rho_C(t) &= f_\alpha\rho_H(t) + (1 - f_\beta)\rho_C(t) - \rho_C(t),\end{aligned}$$

ahora, utilizando tomando el límite de tiempo continuo y sustituyendo  $\rho_O = 1 - \rho_H - \rho_C$  obtenemos:

$$\dot{\rho}_H = -(f_\alpha + r)\rho_H + r(1 - \rho_C), \quad (8)$$

$$\dot{\rho}_C = f_\alpha\rho_H - f_\beta\rho_C. \quad (9)$$

Podemos ver que los puntos  $(\rho_H = 1, \rho_C = 0)$  y  $(\rho_H = 0, \rho_C = 1)$  son puntos fijos ya que satisfacen  $\dot{\rho}_H = 0$  y  $\dot{\rho}_C = 0$ . Estos puntos se corresponden con los estados en los que todos los agentes son honestos y todos los agentes son corruptos respectivamente.

Para realizar un análisis de estabilidad lineal de dichos puntos construimos el jacobiano del sistema, evaluamos en los puntos que queremos estudiar, y para asegurar la estabilidad de estos, ambos autovalores han de ser negativos.

$$J(\rho_H, \rho_C) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{\rho}_H}{\partial \rho_H} & \frac{\partial \dot{\rho}_H}{\partial \rho_C} \\ \frac{\partial \dot{\rho}_C}{\partial \rho_H} & \frac{\partial \dot{\rho}_C}{\partial \rho_C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(f_\alpha + r) & -f'_\alpha\rho_H - r \\ f_\alpha - \rho_C f'_\beta & f'_\alpha\rho_H - f_\beta \end{bmatrix},$$

ahora sustituimos los puntos  $(\rho_H = 1, \rho_C = 0)$  y  $(\rho_H = 0, \rho_C = 1)$

$$J_H = \begin{bmatrix} -r & -f'_\alpha - r \\ 0 & f'_\alpha - f_\beta \end{bmatrix}, \quad J_C = \begin{bmatrix} -(f_\alpha + r) & -r \\ f_\alpha - f'_\beta & 0 \end{bmatrix}.$$

Para  $J_H$ , que es el jacobiano evaluado en  $(\rho_H = 1, \rho_C = 0)$  vemos que  $\lambda_1 = -r$  y  $\lambda_2 = f'_\alpha(0) - f_\beta(1)$ , por lo que obtenemos que para que el punto  $(\rho_H = 1, \rho_C = 0)$  sea estable se ha de cumplir

$$f'_\alpha(0) < f_\beta(1). \quad (10)$$

Para  $J_C$ , que es el jacobiano evaluado en  $(\rho_H = 0, \rho_C = 1)$ , tenemos que  $\lambda^2 - \lambda T + D$  con  $T = Tr(J_C) = -(f_\alpha(1) + r) < 0$  y  $D = Det(J_C) = r(f_\alpha(1) - f'_\beta(0))$ , por lo que vemos que para que sea estable se necesita  $D > 0$ . Obtenemos así

$$f'_\beta(0) < f_\alpha(1). \quad (11)$$

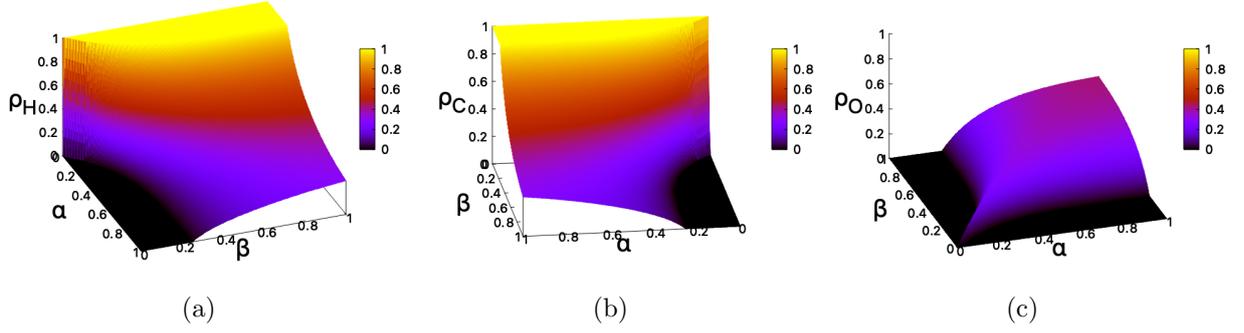


Figura 2: Representación de los diagramas de fase, fracción de honestos (a), fracción de corruptos (b), fracción de ostracismo (b), para un valor fijo de la tasa de reinserción,  $r = 0.5$

Ahora sustituimos las expresiones (3) y (4) en las (10) y (11) para obtener los valores críticos de  $\alpha$  y  $\beta$ , que son los valores a partir de los cuales los puntos fijos de sociedad honesta y corrupta dejan de ser estables respectivamente.

$$\alpha_c(\beta) = \frac{1 - (1 - \beta)^k}{k}, \quad (12)$$

$$\beta_c(\alpha) = \frac{1 - (1 - \alpha)^k}{k}. \quad (13)$$

Podemos observar en la figura 2 que tenemos tres estados de equilibrio, el estado en el que todo son honestos, el estado en el que todos son corruptos y estado de coexistencia en el que tenemos agentes en los tres estados posibles. En la figura 2 podemos observar las transiciones entre dichos estados. Si partimos de un valor de  $\alpha \approx 0$  y fijamos  $\beta$ , al ir aumentando  $\alpha$  tendremos una transición de un estado en el que todos los agentes son honestos a un estado de coexistencia. Si fijamos  $\alpha$  y partimos de  $\beta \approx 0$ , al aumentar beta pasaremos de un estado en el que todos los agentes son corruptos a un estado de coexistencia. Los valores de  $\alpha$  y de  $\beta$  dónde se produce la transición los obtenidos para las expresiones (12) y (13).

### 3.2. Validación de resultados.

Para validar los resultados obtenidos con la aproximación de campo medio vamos a comparar con simulaciones de Monte Carlo en una red aleatoria regular. Utilizamos esta red ya que al tener el mismo grado todos los agentes, y los enlaces repartidos de forma aleatoria, es la que más se asemeja a las hipótesis realizadas en la aproximación de grado de medio.

También vamos a presentar los resultados de simulaciones de Monte Carlo de una red Erdős-Rényi y una red Barabási-Albert ya que este tipo de redes [7] van a aparecer cuando apliquemos más adelante los mecanismos de reenlazado.

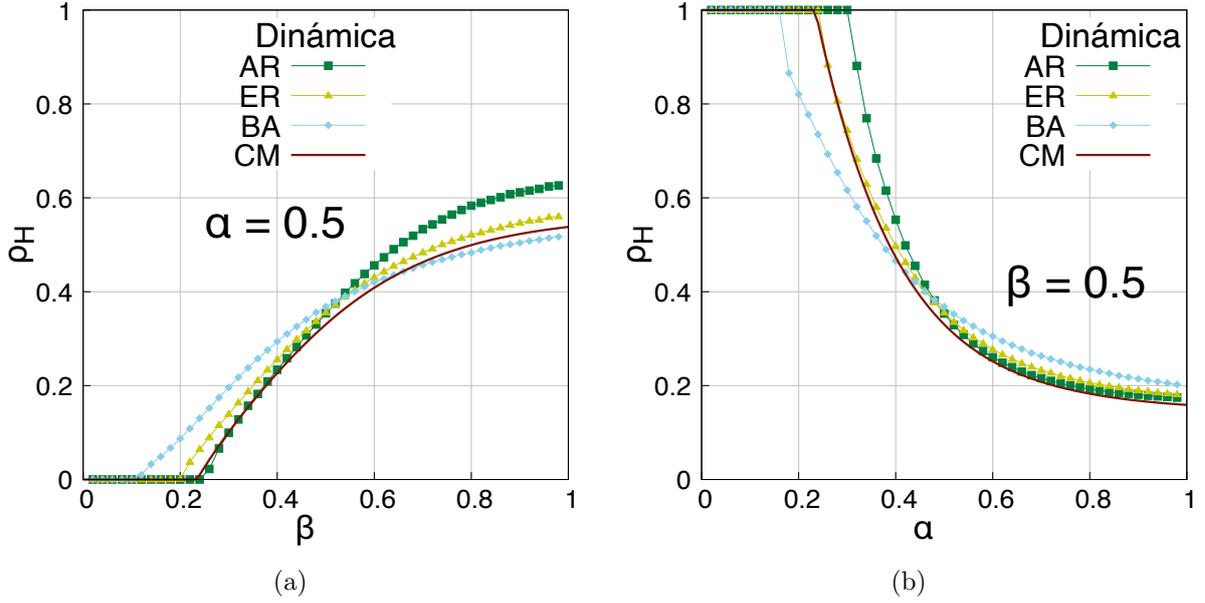


Figura 3: Representación de la fracción de agentes honestos para un valor de  $\alpha$  (a) y  $\beta$  fijo (b), para el campo medio, red aleatoria regular, Erdős-Rényi y Barabási-Albert.

En la figura 3 podemos ver la comparación entre los resultados teóricos de la aproximación de campo medio con las simulaciones de Monte Carlo. Vemos que los resultados de la simulación de Monte Carlo para la red aleatoria regular coinciden cualitativamente con los de la aproximación de campo medio.

Podemos ver en la figura 3b que el umbral de corrupción se adelanta para la red de Barabási-Albert con respecto a la red Erdős-Rényi, esto se debe a la estructura de grado de dichas redes. La red Erdős-Rényi presenta una distribución de grado poissoniana, mientras que la red de Barabási-Albert presenta una distribución de grado potencial, en la que existen agentes de grado muy alto, hubs. Estos hubs son muy susceptibles de ser corrompidos ya que el tener un grado muy alto tendrán muchos vecinos corruptos, así aunque  $\alpha$  sea pequeña la probabilidad de corrupción  $f_\alpha$  será alta.

## 4. Dinámica de la red.

En la sección anterior hemos realizado una primera aproximación al estudiar, mediante el modelo HCO, una sociedad en la que existe una norma que se puede infringir y cuya infracción conlleva un castigo. Hemos obtenido resultados interesantes mediante una aproximación de campo medio y simulaciones de Monte Carlo. Para este estudio hemos utilizado diferentes tipos de redes, pero un aspecto de gran relevancia es que la red de partida permanecía invariante durante la simulación. En esta sección vamos a proponer diferentes mecanismos que modifican los enlaces entre los diferentes agentes del sistema, que denominamos como mecanismos de reenlazado.

El objetivo de esta parte es complementar al modelo HCO proporcionando un nuevo grado de libertad a los agentes: además de la corrupción y delación, ahora tienen la posibilidad de romper y crear enlaces. Queremos estudiar este tipo de dinámicas de red ya que desde el punto de vista de la sociología es más realista pensar que la estructura de contactos evoluciona. Con los diferentes mecanismos de reenlazado que vamos a proponer pretendemos modelizar diferentes tipos de comportamientos de modificación de interacciones por parte de los individuos de la sociedad, según el estado de sus vecinos.

Queremos capturar dinámicas de distintos tipos de sociedades. En concreto vamos a trabajar con dos, una sociedad temerosa de la corrupción y una sociedad punitiva. Para la sociedad temerosa tenemos dos efectos principales: por un lado los agentes honestos tienen miedo de los agentes corruptos, por lo que pueden romper enlaces con ellos, y por otro lado los agentes corruptos se sienten más seguros debido al temor de los agentes honestos, así que rompen enlaces entre ellos para generarlos con otros agentes. Para la sociedad punitiva nos centramos también en dos efectos: primero, los agentes honestos tienen la posibilidad de castigar de forma más severa a los agentes en ostracismo rompiendo su enlace con ellos. Por otro lado, tenemos el efecto de la formación de nuevos contactos de los agentes en ostracismo (cárcel o apartados de la sociedad), donde formarán enlaces con agentes que también están en estado de ostracismo.

En resumen, en la sociedad temerosa de la corrupción se rompen enlaces HC y CC y las agentes honestos y corruptos pueden generar enlaces con agentes en cualquiera de los tres estados, en la sociedad punitiva se rompen enlaces HO y se crean enlaces OO.

#### 4.1. Número de enlaces totales conservado.

Como primera aproximación a estos mecanismos de reenlazado vamos a estudiar dinámicas en las que al romper un enlace se crea otro de forma que el número total de enlaces y por tanto el grado medio se conserva.

En primer lugar vamos a estudiar la sociedad temerosa de la corrupción. Las reglas de reenlazado de esta dinámica son las siguientes:

1.  $HC \rightarrow HX$ , es decir, un nodo H rompe un enlace con un vecino C con cierta probabilidad  $b_{HC}$ , y genera un enlace al azar con otro nodo de la red.
2.  $CC \rightarrow CX$ , es decir, un nodo C rompe un enlace con un vecino en estado C con la misma probabilidad  $b_{HC}$  y genera uno nuevo con nodo aleatorio de la red.

Debido a estas reglas denominamos a esta dinámica HC-CC.

Notar que tal como hemos definido este modelo se pueden producir diferentes interacciones entre un agente honesto y su vecino corrupto: puede ser que el agente honesto, al descubrir que su vecino es corrupto, lo delate y rompa la relación con él, puede ser que lo delate pero decida mantener la relación con él, que decida dejar su relación con él pero no quiera expulsarlo de la sociedad, o por último que mantenga la relación y no quiera

delatarlo. Entre dos agentes corruptos vecinos, la única interacción posible es que rompan o no la relación.

A continuación queremos ver el efecto de los comportamientos que hemos definido para esta sociedad sobre la difusión de la corrupción. Para ello vamos a compararla con un modelo nulo en el que la rotura y creación de enlaces se hace de forma independiente al estado del vecino. Para que esta comparación tenga sentido tenemos que ajustar la probabilidad de romper un enlace en el modelo nulo de forma que para cada valor de  $\alpha$  y de  $\beta$  la cantidad de reenlazamiento que se realiza por paso temporal sea la misma, excepto por fluctuaciones estadísticas, en el modelo nulo y en la sociedad temerosa.

Dicho modelo nulo tiene las siguientes reglas.

1. Un nodo H rompe un enlace con un vecino con una probabilidad  $b_{HX}(\alpha, \beta)$  y genera otro enlace con un nodo al azar.
2. Un nodo C rompe un enlace con un vecino con la misma probabilidad  $b_{Cx}(\alpha, \beta)$  y genera un enlace con un nodo al azar.

La diferencia clave entre esta dinámica de ruptura aleatoria y la HC-CC es que los nodos honestos y corruptos rompen un enlace con un vecino independientemente del estado del vecino, mientras que en la dinámica HC-CC solo se rompen enlaces HC y CC.

Como hemos comentado previamente, en este estudio nos centramos en la difusión de la corrupción. En esta sección queremos ver como afectan las reglas de reenlazado a esta difusión y para ello nos centramos en la fracción de agentes corruptos en el umbral de corrupción, ya que ahí la fracción de agentes corruptos es pequeña por lo que se ajusta mejor a la realidad.

En la figura 4 vemos que, en el umbral de corrupción, el valor de la fracción de agentes corruptos es mayor para la dinámica HC-CC que para la dinámica aleatoria, por lo que podemos decir que la dinámica aleatoria es más robusta frente a la difusión de la corrupción que la dinámica HC-CC.

Para justificar este resultado tenemos que recurrir al grado medio por estado cuyo comportamiento podemos ver en la figura 5. El hecho de que en el umbral, la fracción de agentes corruptos sea mayor en la sociedad temerosa que en el modelo nulo, se debe a que en el umbral el grado medio de los agentes honestos es mayor para la sociedad temerosa que para el modelo nulo y el grado medio de los agentes corruptos es mayor en el modelo nulo que en la sociedad temerosa.

Este efecto lo podemos ver mediante el siguiente desarrollo: si para las expresiones (3) y (4) tomamos el grado medio por especie en lugar del grado medio total, ya que en la dinámica el grado de los agentes tiene importancia en la probabilidad de corrupción y delación, por tanto en el equilibrio las diferentes especies tienen diferentes grados medios. Obtenemos:

$$f_\alpha(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \alpha\rho_C)^{k_H}, \quad (14)$$

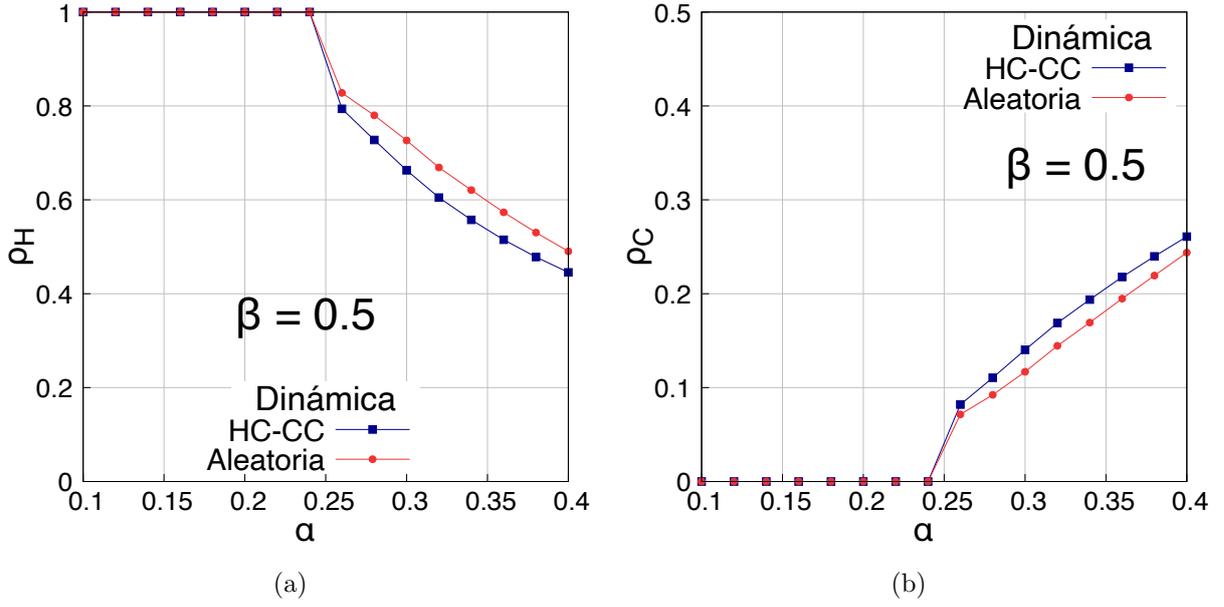


Figura 4: Representación de las fracciones de agentes honestos (a) y corruptos (b), para un valor fijo de  $\beta = 0,5$ , para la dinámica HC-CC y su modelo nulo. El valor de la probabilidad de romper un enlace es  $b_{HC} = 0,5$  para HC-CC y para el modelo nulo se va ajustando, en cada valor de  $\alpha$ , para obtener el mismo número de eventos de reenlazado.

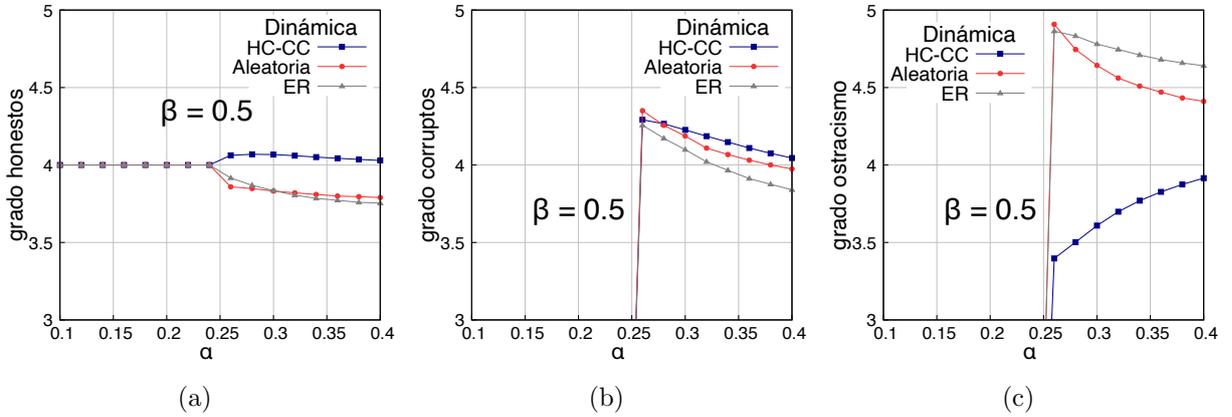


Figura 5: Representación del grado medio por estado: honestos (a), corruptos (b) y ostracismo (c), para un valor fijo de  $\beta = 0,5$  variando  $\alpha$ .

$$f_{\beta}(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \beta\rho_H)^{k_C}, \quad (15)$$

si sustituimos estas expresiones en la ecuación 10, la expresión 12 queda:

$$\alpha_c(\beta) = \frac{1 - (1 - \beta)^{k_C}}{k_H}, \quad (16)$$

de esta expresión vemos que disminuir  $k_C$  y aumentar  $k_H$  disminuye el valor de  $\alpha_c$ , lo que implica que se favorece la aparición de corrupción en el sistema.

Para explicar la distinta distribución de grado de las especies entre el caso HC-CC y el modelo nulo, tenemos en cuenta que el efecto principal de la dinámica HC-CC sobre el grado de los agentes es la disminución del grado de los agentes corruptos. Esto se debe a que, al romper un enlace HC, es el nodo honesto el que genera un enlace nuevo al azar, de forma que el nodo corrupto pierde grado. De la misma manera, al romper un enlace CC, uno de los corruptos genera un enlace al azar y el otro no, por lo que uno de los nodos corruptos pierde grado.

Como vemos en la figura 5b, el grado medio de los agentes corruptos en el umbral es mayor que en el caso estático, es decir, no se ve el efecto del perjuicio del grado de los agentes corruptos por la dinámica HC-CC. Esto se debe a que al tener una fracción de agentes honestos alta, tenemos una probabilidad de delación  $f_\beta$  alta, lo que implica que los agentes corruptos pasan a ostracismo de forma prácticamente instantánea, en la mayoría de los casos en un solo paso temporal. De esta manera, el perjuicio de grado por la dinámica HC-CC se observa en los agentes en el ostracismo, figura 5c, y no en los corruptos. Además, el grado de los agentes corruptos es mayor que el grado medio en el umbral, ya que al ser  $\alpha$  bajo, el valor de la probabilidad de corrupción  $f_\alpha$  es pequeño para la mayoría de agentes honestos, excepto para aquellos agentes cuyo grado sea considerablemente alto. Así, en el umbral solo pasan de honesto a corrupto los agentes honestos de mayor grado. Este fenómeno es común para todas las redes no regulares; de hecho, podemos ver que para la red Erdős-Rényi estática también se produce.

Por otro lado, el hecho de que el grado de los agentes honestos sea mayor en el umbral para la dinámica HC-CC que para el modelo nulo y la red estática, se debe a que la dinámica HC-CC no provoca pérdida de grado en los agentes honestos y además, debido a que la fracción de agentes honestos es la dominante del sistema, lo más probable es que el nuevo enlace generado tras romper un HC o CC caiga a un agente honesto, por lo que el grado medio de los agentes honestos solo puede aumentar. Este efecto va desapareciendo conforme aumenta  $\alpha$ , ya que la fracción de agentes honestos disminuye. El grado medio de los agentes honestos para el modelo nulo está por debajo de cuatro, pero vemos que es muy similar al de la red estática por lo que esto no se debe al mecanismo de reenlazado.

Por último, el hecho de que en el umbral el grado medio de los agentes en el ostracismo sea menor en la dinámica HC-CC se debe a que, como hemos expuesto previamente, el perjuicio en el grado medio de la dinámica HC-CC se ve reflejado en la fracción de ostracismo.

Una vez caracterizado y entendido el comportamiento de la corrupción en la sociedad temerosa, pasamos a estudiar la sociedad punitiva de la corrupción, que tiene las siguientes reglas:

1.  $HO \rightarrow OO$  , un enlace HO se rompe con cierta probabilidad  $b_{HO}$ , y el nodo O genera un enlace al azar dentro de la fracción de población en estado O.

A esta dinámica la denominamos como HO-OO. Notar que para este nombre el término

OO significa que se crean enlaces OO. Una de las limitaciones de la simulación de esta dinámica es que tiende a dejar agentes aislados, bien como agentes sin vecinos, o bien como grupos de agentes honestos que se desconectan de la componente principal de la red, porque van perdiendo enlaces con sus vecinos corruptos. Si uno o más agentes honestos quedan aislados sin agentes corruptos, nunca llegarán al ostracismo y por tanto no podrán recuperar grado, siendo eliminados de la dinámica de manera efectiva. Para evitar esto tenemos que incorporar una regla adicional de reenlazado que, por un lado, no permite que existan nodos de grado cero, y por otro, reconecta las grupos aislados de honestos que puedan originarse a la componente gigante del sistema. Es importante destacar que esto no ocurría en el caso anterior (HC-CC), porque el reenlazado se producía de manera aleatoria, y por tanto cualquier agente desconectado tenía cierta probabilidad de reincorporarse al sistema.

Como modelo nulo con el que comparar la dinámica de la sociedad punitiva, proponemos las siguientes reglas:

1. Un nodo O rompe un enlace con un vecino con una probabilidad  $b_{OX}(\alpha, \beta)$  y genera otro enlace con un nodo aleatorio de la red.

En la figura 6 podemos observar que en el umbral epidémico la fracción de corruptos es mayor para la dinámica HO-OO que para la aleatoria, por lo que podemos concluir que la evolución aleatoria es más robusta frente a la difusión de la corrupción. Vamos a justificar este resultado recurriendo de nuevo a las distribuciones de grado.

En la figura 7 vemos las distribuciones de grado totales para un valor cercano al umbral,  $\alpha = 0,3$ . Podemos observar que el modelo nulo convierte una red de partida aleatoria regular en una distribución semejante a una poissoniana mientras que para la dinámica HO-OO se obtiene una distribución potencial o libre de escala. Es esta diferencia en la estructura de red la que hace que el umbral se adelante. Como hemos comentado en la sección 3, el umbral es menor para una distribución de grado tipo potencial que para una poissoniana.

Para estudiar las distribuciones de grado es importante notar que la dinámica HO-OO tiende a reducir el grado de los agentes honestos, ya que al romper un enlace HO es el agente en ostracismo el que genera uno nuevo. La distribución potencial se genera ya que al tener un valor de  $\alpha$  bajo solo se corrompen los agentes honestos de mayor grado generando así un grupo de muchos agentes de bajo grado (por el perjuicio de la dinámica HO-OO) que permanecen en estado honesto durante muchos pasos temporales y un grupo de pocos agentes de grado alto que recorren todos los estados.

Esto no ocurre en la dinámica aleatoria ya que en esta dinámica el enlace que genera el agente en ostracismo cae al azar en cualquier nodo de la red, por lo que no se produce un perjuicio sobre el grado medio de los agentes honestos.

Al aumentar el valor de  $\alpha$ , los agentes honestos de menor grado tienen una probabilidad mayor de corromperse, por lo que pasan menos tiempo en estado honesto y más

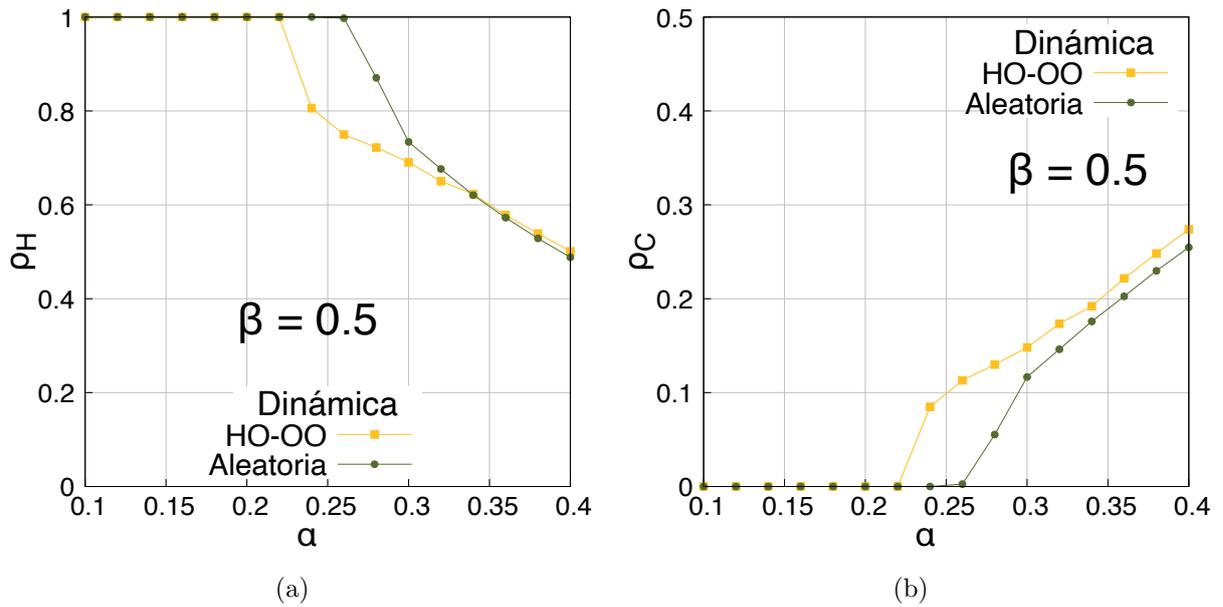


Figura 6: Representación de las fracciones de agentes honestos (a) y corruptos (b) para un valor fijo de  $\beta = 0,5$ , para HO-OO y su modelo nulo. El valor de la probabilidad de romper un enlace es  $b_{HO} = 0,5$  para HO-OO, para el modelo nulo se ajusta para cada valor de  $\alpha$  para mantener la cantidad de reenlazado.

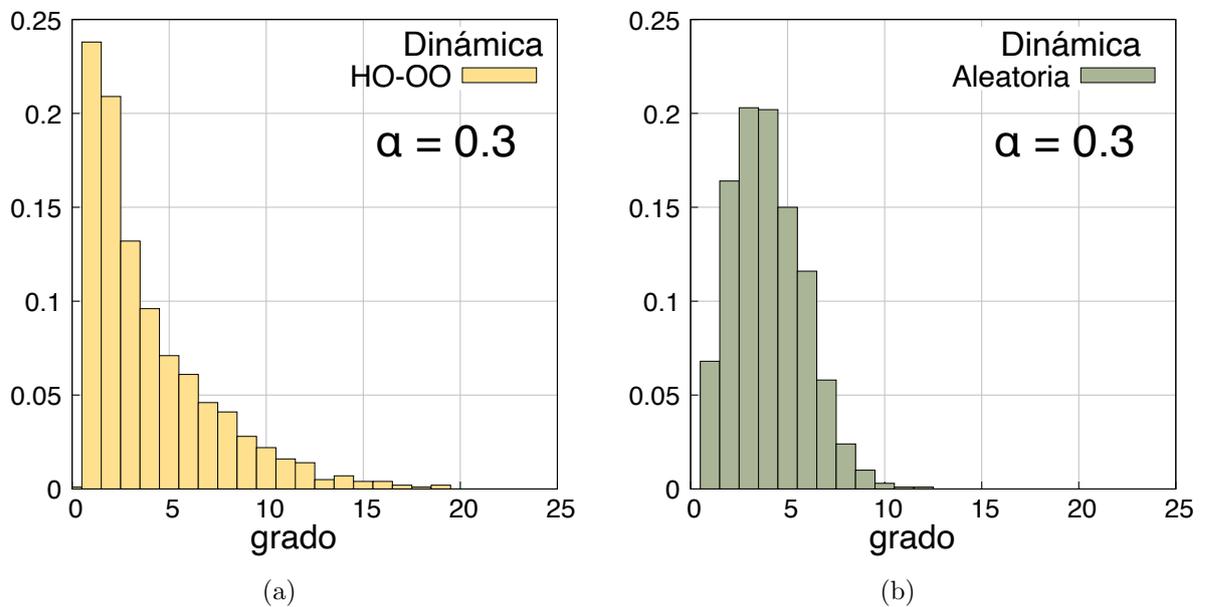


Figura 7: Distribuciones de grado total para  $\alpha = 0,3$  para la dinámica HO-OO, figura (a), y su modelo nulo, figura (b).

en ostracismo, así el efecto que genera la distribución libre de escala va desapareciendo, como podemos ver en la figura 8a. La distribución de grado para el modelo nulo no varía

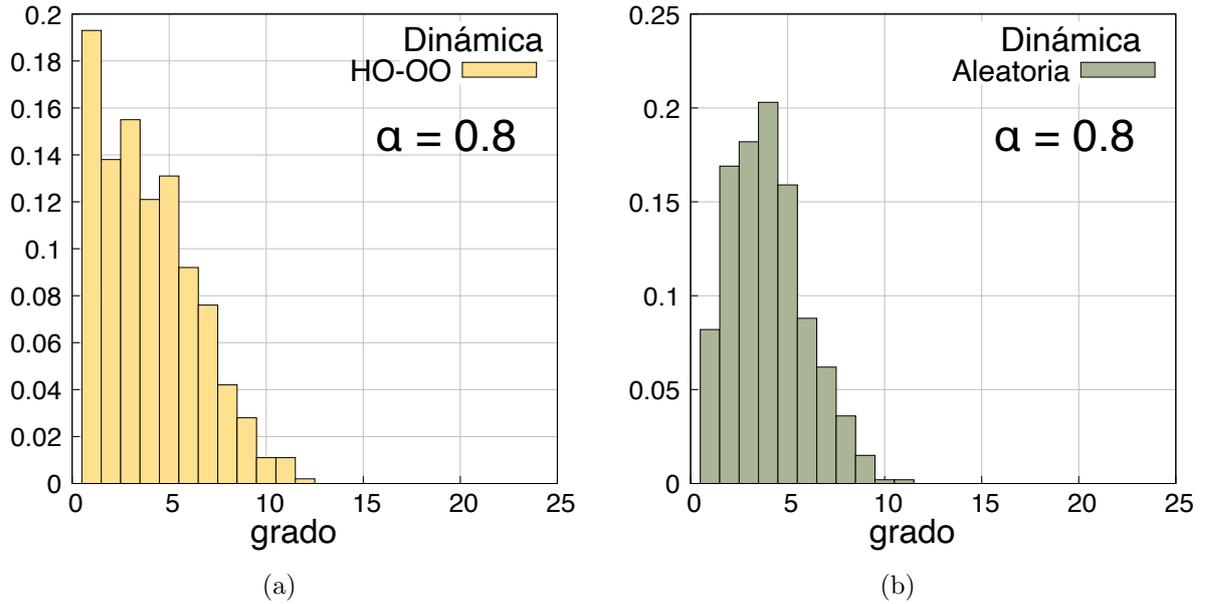


Figura 8: Distribuciones de grado total para  $\alpha = 0,8$  para la dinámica HO-OO (a), y su modelo nulo (b).

al aumentar  $\alpha$ .

Por último vamos a comparar las sociedades temerosa y punitiva. Para ello tenemos que ajustar la probabilidad de romper un enlace de forma que la cantidad de reenlazado que se realiza en cada una sea el mismo. En concreto, realizamos la simulación de la sociedad temerosa con una probabilidad  $b_{HC} = 0,5$  y ajustamos la probabilidad  $b_{HO}$  de la sociedad punitiva para cada valor de  $\alpha$ , pero sería equivalente hacerlo al revés fijar  $b_{HO}$  y ajustar  $b_{HC}$  para cada valor de  $\alpha$ .

Vemos en la figura 9b que en el umbral tenemos una fracción de agentes corruptos mayor para la dinámica punitiva de la corrupción. Esto se debe a que, como hemos visto previamente, en el umbral la sociedad punitiva presenta una distribución de grado potencial mientras que la sociedad temerosa presenta una distribución de Poisson. Este efecto desaparece rápidamente al aumentar  $\alpha$ , de ahí el cambio en el comportamiento al sobrepasar el umbral.

## 4.2. Número de enlaces totales no conservado

Una vez hemos estudiado las sociedades punitiva y temerosa de la corrupción conservando el número total de enlaces de la red, el siguiente paso natural es levantar la condición de generar un enlace cada vez que otro se rompe. Al estudiar una población es más realista pensar que los agentes van rompiendo y creando enlaces de forma independiente a lo largo del tiempo.

En esta parte vamos a estudiar la sociedad punitiva de la corrupción, en la que cómo

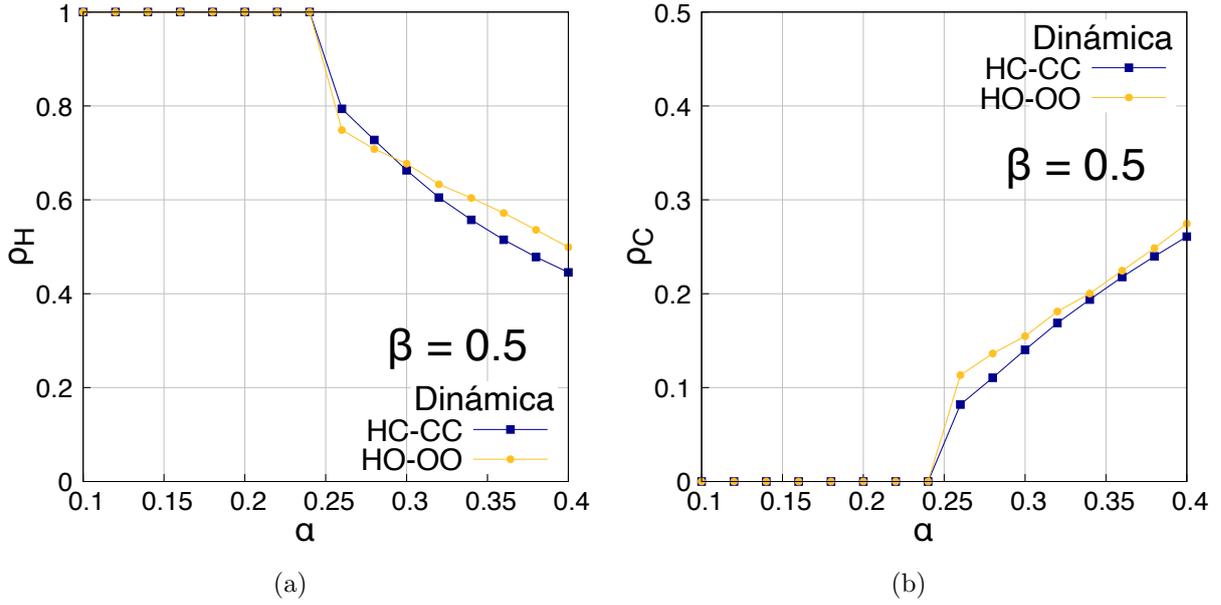


Figura 9: Fracciones de agentes honestos (a), y corruptos (b), para la sociedad temerosa y punitiva de la corrupción. Tenemos una probabilidad de rotura de enlace HC y CC  $b_{HC} = 0,5$  y la probabilidad de rotura de enlace HO  $b_{HO}$  se ajusta para mantener el reenlazado.

hemos expuesto previamente, los agentes honestos tienen la posibilidad de castigar más severamente a los agentes en ostracismo una vez han sido delatados rompiendo enlaces con ellos y los agentes en ostracismo crean nuevos enlaces con otros agentes también en ostracismo.

Las reglas para esta dinámica sin conservar el número de enlaces son las siguientes:

1. Un enlace H-O que exista en la red, se rompe con una probabilidad  $b_{HO}$
2. Un enlace O-O que no exista en la red, se crea con una probabilidad  $c_{OO}$ .

Como hemos expuesto, la diferencia clave entre esta sociedad punitiva y la de la sección anterior es que no se conserva el número de enlaces y por tanto el grado medio de la red.

En la sección anterior en la que el número total de enlaces se conservaba no podíamos realizar una aproximación de campo medio, ya que esa dinámica de red no afectaba directamente a las fracciones de población ni al grado medio del sistema. Al levantar esta condición tenemos que el número de enlaces varía en cada paso temporal por lo que cambia el grado medio del sistema y esta variable podemos incluirla en nuestra aproximación de campo medio.

Al igual que en la sección 3 tenemos el vector  $\vec{\rho}(t) = (\rho_H(t), \rho_C(t), \rho_O(t))$ , cuyas componentes representan la probabilidad de un agente de estar en cada estado a un

tiempo  $t$ , y para cada  $t$  tendremos un grado medio diferente  $k = k(t)$ . En cada paso temporal asumimos que cada agente se comporta como el agente medio, con grado medio  $k(t)$ . Asumimos también que el entorno de los agentes es igual a la composición global del sistema, lo que implica que la probabilidad formar un enlace con cada una de las especies es igual a la fracción de población de cada especie en el sistema global. Así podemos reescribir las expresiones 3 y 4 como:

$$f_\alpha(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \alpha\rho_C)^{k(t)}, \quad (17)$$

$$f_\beta(k, \vec{\rho}) = 1 - (1 - \beta\rho_H)^{k(t)}, \quad (18)$$

una vez tenemos las probabilidades de corrupción y delación definidas podemos calcular  $\vec{\rho}(t+1)$  y aplicando la definición de derivada obtenemos las expresiones análogas a 8 y 9.

Ahora vamos a calcular la variación del número de enlaces totales, para obtener  $k(t+1)$  dado  $k(t)$ . Para ello tenemos en cuenta las reglas de la dinámica expuestas previamente, por un lado los enlaces OO que se forman aumentan el número de enlaces totales y por otro lado los enlaces HO que se rompen lo disminuyen. Obtenemos:

$$\frac{N\Delta k}{2} = c_{OO} \left( \frac{(N\rho_O - 1) \cdot (N\rho_O - 1)}{2} - \frac{N\rho_O k \cdot \rho_O}{2} \right) - b_{HO}(N\rho_H k \cdot \rho_O), \quad (19)$$

donde  $N$  es el número total de agentes y  $\Delta k$  es la variación en el grado. Para calcular el número de enlaces OO que se forman multiplicamos el número de enlaces OO que no están formados en el sistema por la probabilidad de crearlos  $c_{OO}$ . Tenemos que el número de enlaces OO totales que pueden existir a tiempo  $t$  es  $\frac{(N\rho_O - 1) \cdot (N\rho_O - 1)}{2}$ ; a estos tenemos que restar los que ya están formados, que son los enlaces que salen de agentes en ostracismo  $N\rho_O(t)k(t)$  multiplicados por la probabilidad de que esos enlaces caigan en agentes en ostracismo  $\rho_O(t)$  y dividido entre 2 para no contar los enlaces dos veces,  $\frac{N\rho_O k \cdot \rho_O}{2}$ . Para calcular el número de enlaces HO que se rompen multiplicamos la probabilidad de romper un enlace HO,  $b_{HO}$  por el número total de enlaces HO del sistema en un tiempo  $t$ , que calculamos como el número de enlaces que salen de nodos honestos  $N\rho_H(t)k(t)$  por la probabilidad de que estos enlaces caigan en agentes en ostracismo  $\rho_O(t)$ . Notar que al ser estados diferentes no hay que dividir entre dos para contar una sola vez el enlace.

Así, despejando de la expresión (19) obtenemos la expresión para la variación, en el grado medio del sistema:

$$\dot{k} = k(t+1) - k(t) = -2k(t)b_{HO}\rho_H(t)\rho_O(t) + \rho_O^2(t)c_{OO}[N - k(t)]. \quad (20)$$

Una vez tenemos las expresiones análogas (8), (9) y la expresión (20) las podemos iterar para obtener resultados y compararlos con simulaciones del método Monte Carlo. Podemos ver estos resultados en la figura 10.

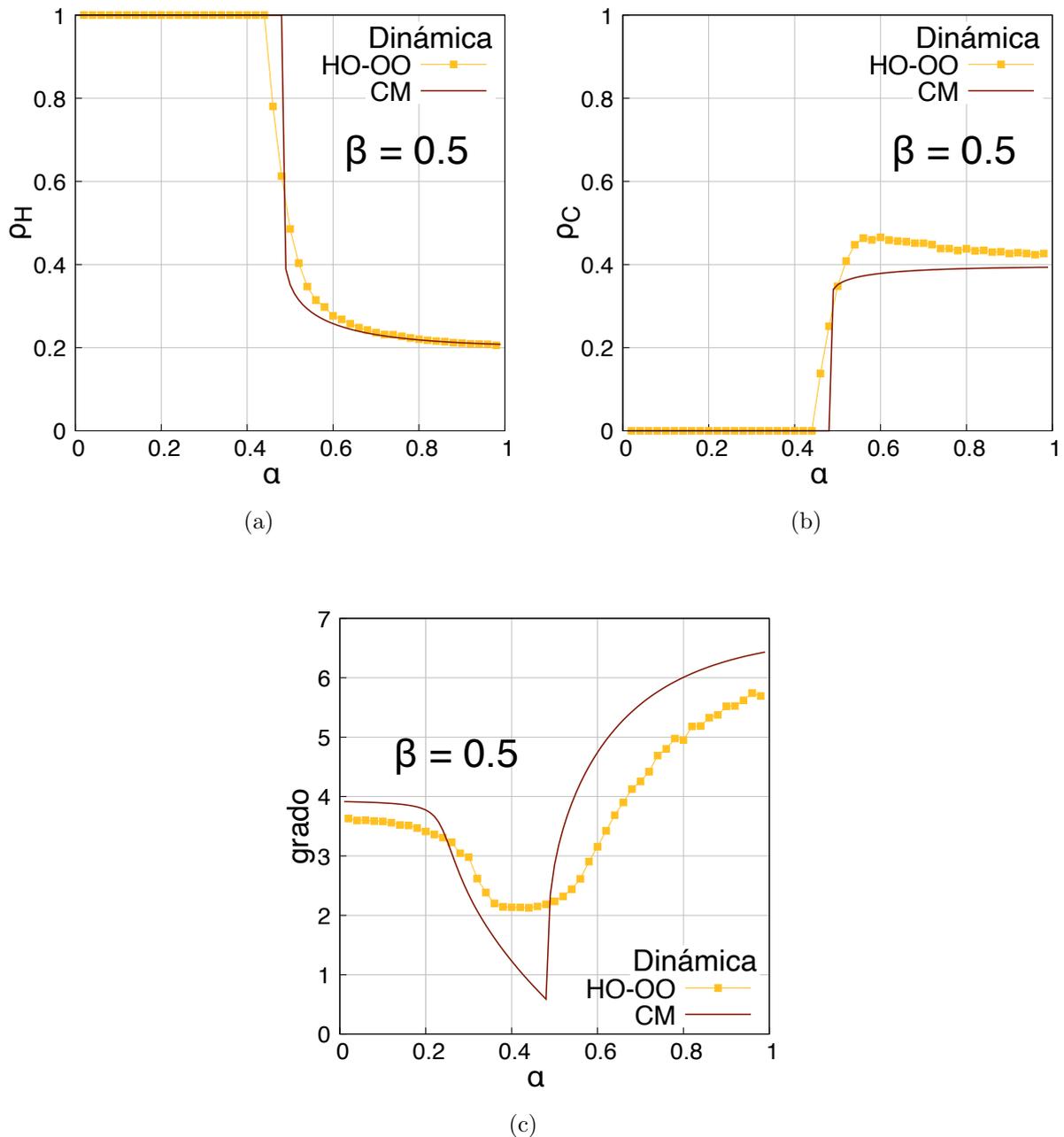


Figura 10: Fracción de agentes honestos (a), corruptos (b) y grado medio (c) para la dinámica HO-OO y la aproximación de campo medio. La probabilidad de romper un enlace HO y la de crear un enlace OO utilizadas en la simulación de agentes son,  $b_{HO} = 0,111$   $c_{OO} = 0,00075$ . La simulación ha sido realizada en una red aleatoria regular de 1000 agentes con un 90% de agentes honestos y un 10% de agentes corruptos inicialmente. Dejamos evolucionar el sistema hasta que se alcanza un estado de equilibrio. Como el proceso es estocástico realizamos un promedio sobre 10 iteraciones

Respecto al grado medio del sistema vemos que la aproximación de campo medio mantiene la tendencia de la simulación. Observamos la mayor diferencia en el mínimo del

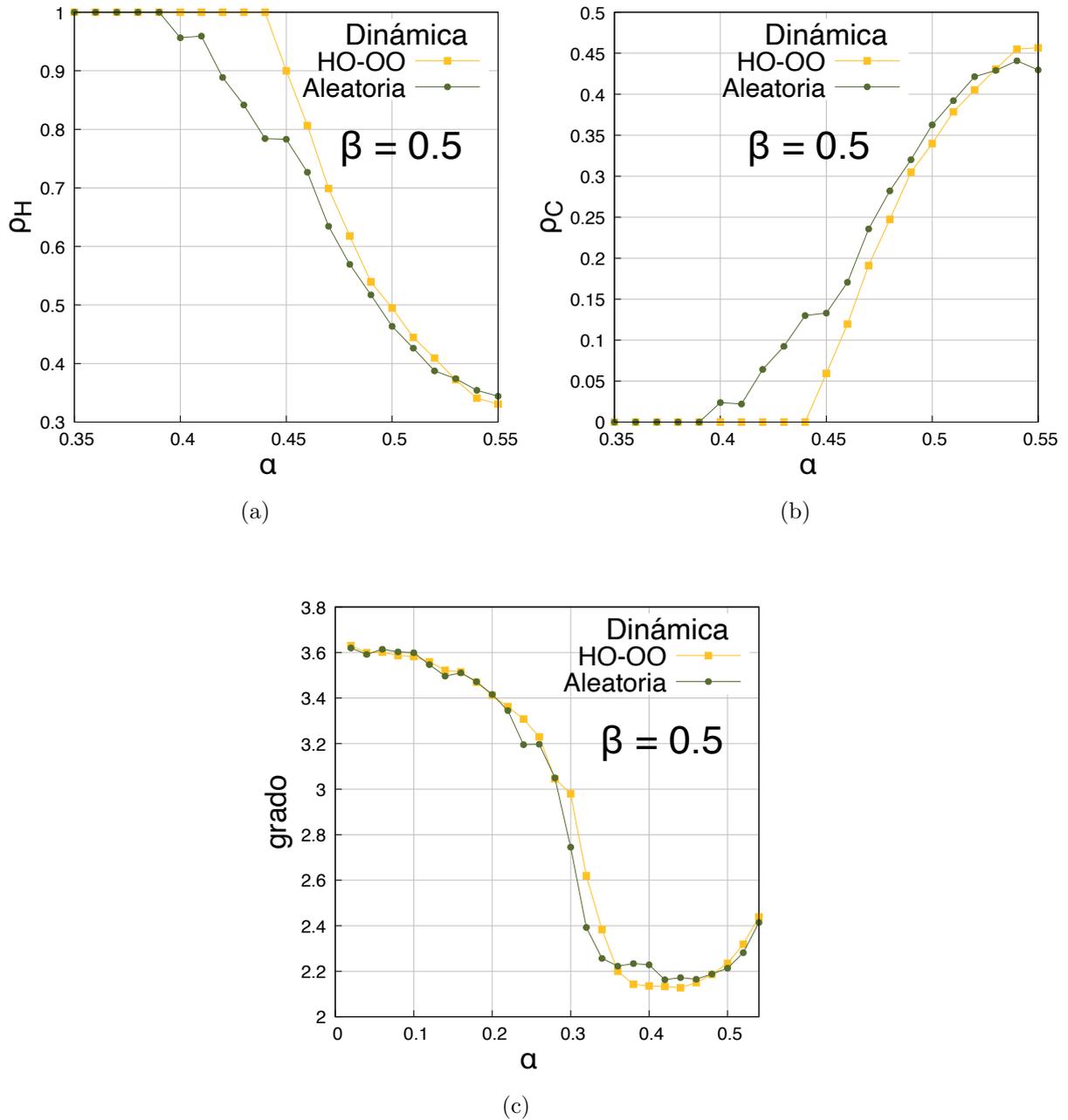


Figura 11: Fracción de agentes honestos (a), corruptos (b) y grado medio total (c) para la sociedad punitiva y el modelo nulo, la simulación de la sociedad punitiva se ha realizado con  $b_{HO} = 0,111$  y  $c_{OO} = 0,00075$ . Las probabilidades  $b_{XO}$  y  $c_{OX}$  se ajustan para mantener la cantidad de reenlazado constante.

grado medio, la simulación nunca baja por debajo de 2. Esto se debe al mecanismo de reenlazado que introducimos para evitar que queden agentes aislados. Para la fracción de agentes honestos y corruptos vemos que los resultados coinciden cualitativamente.

Una vez hemos estudiado la aproximación de campo medio, queremos estudiar la importancia de las reglas de reenlazado sobre el sistema. Para ello vamos a comparar la

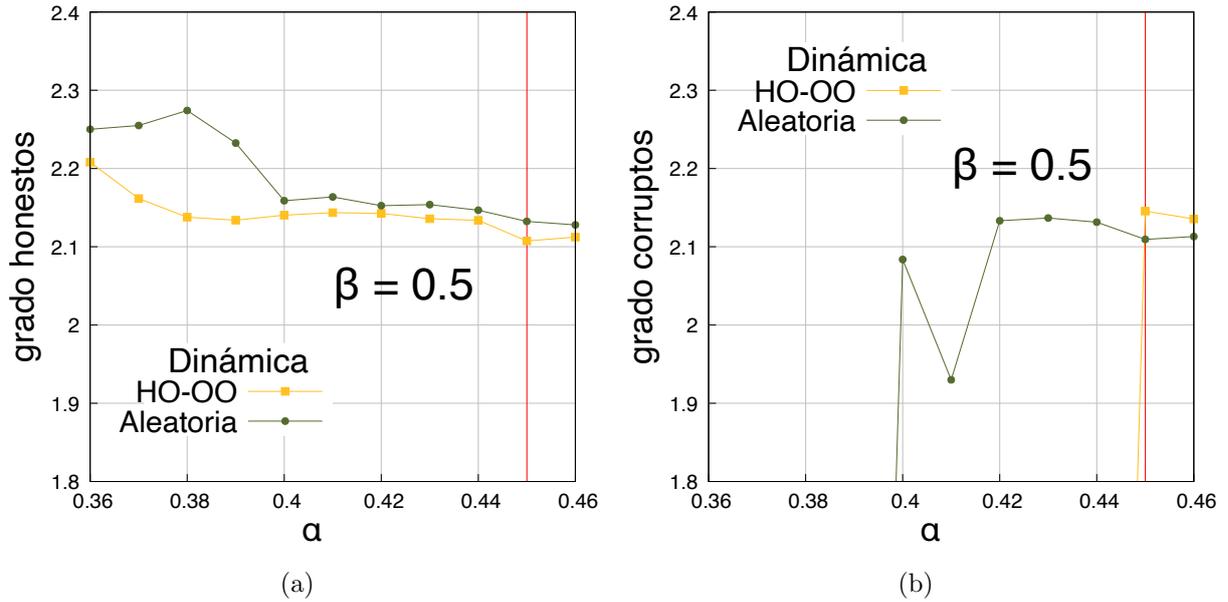


Figura 12: Grado medio por estado, honesto (a), corrupto (b), para la sociedad punitiva y el modelo nulo, la simulación de la sociedad punitiva se ha realizado con  $b_{HO} = 0,111$  y  $c_{Oo} = 0,00075$ . La línea roja representa la posición del umbral de corrupción.

simulación de agentes realizada para la sociedad punitiva con un modelo nulo en el que los agentes en ostracismo rompen y crean enlaces con otros agentes independientemente del estado. Las reglas para esta dinámica son:

1. Un agente en ostracismo rompe un enlace con un vecino con una probabilidad  $b_{XO}$ .
2. Un agente en ostracismo genera un enlace con un nodo con el que no está enlazado con una probabilidad  $c_{OX}$ .

Hay que ajustar probabilidades de romper y crear enlaces  $b_{XO}$  y  $c_{OX}$  para cada valor de  $\alpha$  de forma que se produzca la misma cantidad de reenlazado en la sociedad punitiva y en el modelo nulo y así la comparación tenga sentido.

Podemos observar en las figuras 11a y 11b que la fracción de corrupción en el umbral es mayor para el modelo nulo que para la sociedad punitiva, así que podemos concluir que la sociedad punitiva es más robusta.

Respecto al grado medio total del sistema, podemos ver en la figura 11c que prácticamente coinciden. Esto tiene sentido ya que aunque las reglas de reenlazado son distintas hemos ajustado las probabilidades de rotura y creación de enlaces de forma que la cantidad de reenlazado que realizamos sea la misma salvo fluctuaciones estadísticas.

Para justificar los resultados que observamos en la figura 11 recurrimos al grado medio por estado, figura 12. El efecto de la sociedad punitiva sobre el grado del sistema es disminuir el grado medio de los agentes honestos, ya que se rompen enlaces HO y se

generan enlaces OO, por lo que los agentes honestos pierden grado. Por otro lado, el descenso de grado que se produce en el caso aleatorio se encuentra repartido entre todas las especies, lo que explica que los honestos tengan un grado mayor, y los corruptos menor.

El hecho de que el umbral se adelante para el modelo nulo se debe a dos efectos: por un lado, el grado medio de los agentes honestos es mayor para el modelo nulo, como hemos explicado. Su efecto es el mismo que hemos explicado para la dinámica HC-CC: podemos ver en la ecuación (16) que aumentar  $k_H$  disminuye el valor de  $\alpha_c$ , lo que se traduce en un aumento en la fracción de población de agentes corruptos. Por otro lado, en el periodo transitorio entre el inicio de la simulación y la extinción o fijación de la corrupción en ambos casos, al disminuir la dinámica HO-OO el grado de los honestos, dificulta en gran medida la propagación de la corrupción. En el caso aleatorio, la disminución de grado está más repartida y permite que se llegue a producir coexistencia en el equilibrio para valores de  $\alpha$  más pequeños.

## 5. Conclusiones.

En este trabajo hemos realizado un estudio sobre propagación del fenómeno de la corrupción en una sociedad a través de un modelo compartimental que separa a los agentes que pertenecen a la sociedad en tres estados, honesto, corrupto y ostracismo.

En primer lugar hemos realizado una aproximación de campo medio ya que es una técnica simple y bien conocida dentro de la física de sistemas complejos. Con esta aproximación logramos capturar las tres situaciones de equilibrio posibles del modelo, todos los agentes están en estado honesto, todos en estado corrupto y coexistencia de agentes corruptos, honestos y ostracismo. Hemos estudiado la estabilidad de los puntos fijos que se corresponden con las situaciones de equilibrio en los que todos los agentes son honestos y todos los agentes son corruptos. También hemos obtenido las condiciones para que estos puntos fijos dejen de ser estables y se produzcan las transiciones de sociedad honesta a un punto fijo de coexistencia y de sociedad corrupta a un punto fijo de coexistencia. Por último hemos comparado los resultados obtenidos mediante la aproximación de campo medio con una simulación de Monte Carlo de agentes.

A continuación pasamos a estudiar sociedades en las que la estructura de contactos varía con el estado de los agentes. Hemos estudiado dos sociedades: en primer lugar, una sociedad temerosa de la corrupción, en la que los agentes honestos tienen miedo de los corruptos y rompen enlaces con ellos, y los agentes corruptos se sienten impunes y rompen enlaces entre ellos para generarlos con otros agentes de la red. En segundo lugar, una sociedad punitiva en la que los agentes honestos pueden castigar de forma más severa a los agentes en ostracismo rompiendo enlaces con ellos y los agentes en ostracismo generan una nueva estructura de contactos entre ellos, como suele ocurrir en la cárcel o entre individuos marginados de una sociedad. El objetivo del estudio es ver la importancia de que la estructura de contactos dependa del estado de los agentes en la difusión de la

corrupción. Debido a esto comparamos la fracción de agentes corruptos en el umbral para ambas sociedades con sendos modelos nulos en los que los agentes rompen enlaces con sus vecinos independientemente del estado de estos.

En primer lugar hemos estudiado las sociedades con la condición de que siempre que se rompe un enlace se crea otro, conservando así el grado medio del sistema. Hemos obtenido que la sociedad temerosa es menos robusta frente a la difusión de la corrupción que su modelo nulo. Esto se debe a que el grado medio de los agentes honestos es mayor para la sociedad temerosa que para el modelo nulo mientras que para el grado medio de los agentes corruptos ocurre lo contrario. Para la sociedad punitiva hemos observado que también es menos robusta frente a la difusión de la corrupción que su modelo nulo. Esto se debe a que en el umbral, las reglas de reenlazado de la sociedad punitiva generan una distribución de grado potencial debido al perjuicio del grado medio de los agentes honestos, mientras que el modelo nulo genera una distribución de grado de Poisson.

Para terminar con el estudio para grado medio constante hemos comparado las sociedades temerosa y punitiva entre sí. El resultado que hemos obtenido es que la sociedad temerosa es más robusta que la punitiva. De nuevo esto se debe a que en el umbral la sociedad punitiva presenta una distribución de grado potencial mientras que la sociedad temerosa presenta una distribución de Poisson. Con este resultado podemos ver que una sociedad en la que se castiga de forma excesiva la corrupción, por ejemplo una sociedad en la que no se introducen políticas de reinserción para los agentes en la cárcel, favorece la difusión de esta.

En la última parte del trabajo hemos levantado la condición de conservación del grado medio total del sistema para estudiar la sociedad punitiva de la corrupción. Al levantar esta condición hemos obtenido una dinámica que podemos capturar con aproximación de campo medio. También hemos comparado los resultados obtenidos con una simulación de Monte Carlo de agentes.

Por último hemos comparado la sociedad punitiva con un modelo nulo en el que los enlaces se rompen y se generan independiente del estado del vecino para capturar la importancia de las reglas de reenlazado de la sociedad punitiva. Hemos observado que la sociedad punitiva es más robusta frente a la difusión de la corrupción que el modelo nulo. Esto se debe a que en el umbral el grado medio de los agentes honestos es mayor para el modelo nulo, por lo que el umbral se adelanta.

En este trabajo hemos visto que no podemos ignorar la variación de la estructura de contactos de una sociedad, ya que es un aspecto clave en la evolución del sistema. También hemos resaltado la importancia de la motivación de los agentes a la hora de crear y destruir relaciones con sus vecinos en la difusión de la corrupción. Como futuros trabajos en este ámbito proponemos desarrollar un modelo nulo para la sociedad temerosa de la corrupción sin conservar el grado medio del sistema o proponer dinámicas para capturar efectos como el miedo de los agentes corruptos a sus vecinos en ostracismo ya que eventualmente les podrían delatar.

## Referencias

- [1] Joung-Hun Lee y col. “Social evolution leads to persistent corruption”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences* 116.27 (2019), págs. 13276-13281.
- [2] Robert Axelrod. “An evolutionary approach to norms”. En: *American political science review* 80.4 (1986), págs. 1095-1111.
- [3] Jules L Coleman. “The rational choice approach to legal rules”. En: *Chi.-Kent L. Rev.* 65 (1989), pág. 177.
- [4] F Bauzá y col. “Fear induced explosive transitions in the dynamics of corruption”. En: *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science* 30.6 (2020), pág. 063107.
- [5] Dan Lu y col. “Norm violation versus punishment risk in a social model of corruption”. En: *Physical Review E* 101.2 (2020), pág. 022306.
- [6] Steven H Strogatz. *Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. CRC press, 2018.
- [7] MEJ Newman. *Networks: An Introduction Oxford Univ.* 2010.