Prolongación analítica de funciones de variable compleja

Carla Sáenz Castán

Trabajo de fin de grado de Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: David Alonso Gutiérrez

26 de junio de 2022

Resumen

La prolongación analítica es una cuestión que aparece de manera natural en el análisis complejo acerca de la posibilidad de ampliar el dominio sobre el que está definida una función analítica. Más concretamente, si $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$ es una región y f_0 es una función analítica en Ω_0, ¿existe otra región Ω_1 y una función f_1 analítica en Ω_1 tal que $\Omega_0 \subset \Omega_1$ y $f_1(z) = f_0(z) \; \forall \, z \in \Omega_0$?

Este tipo de cuestión ya ha aparecido en la asignatura Variable Compleja del grado, dada la importancia del dominio en el que es válido el desarrollo en serie de potencias o en serie de Laurent de una función, puesto que la función que se desarrolla en serie es una prolongación analítica de la función que define la serie de potencias o de Laurent en su dominio de convergencia.

Dada una función analítica en una región no siempre tiene que existir una prolongación analítica suya a un abierto mayor conteniendo a la región. Sin embargo, en caso de existir, por el Principio de prolongación analítica, dicha extensión es única.

El Principio de prolongación analítica es un resultado relevante en la teoría de funciones de variable compleja. Establece que una función analítica en una región queda determinada por sus valores en un conjunto con puntos de acumulación en dicha región, y como consecuencia, si dos funciones analíticas en una región coinciden en un conjunto con puntos de acumulación en la región, entonces las funciones son iguales. Este principio nos permite extender funciones definidas en $\mathbb{R}$ al plano complejo como, por ejemplo, la exponencial, el seno o el coseno, siendo estas extensiones las únicas que verifican propiedades deseables.

El objetivo de este trabajo es, dada una función f analítica en una región Ω del plano complejo, estudiar teoremas de existencia, no existencia y unicidad de funciones analíticas definidas en un abierto mayor conteniendo a Ω.

En el primer capítulo presentamos una serie de conceptos y resultados estudiados en la asignatura Variable Compleja necesarios para el desarrollo del trabajo. En particular, será fundamental el Principio de prolongación analítica.

En el segundo capítulo estudiamos resultados de existencia y no existencia de prolongación analítica. La primera sección está dedicada al Principio de reflexión de Schwarz que permite extender funciones analíticas en un abierto contenido en el semiplano superior, y que pueden extenderse de manera continua a un trozo del eje real contenido en la frontera tomando valores reales, a una región simétrica respecto al eje real. En la segunda sección nos centramos en resultados de no existencia demostrando el teorema de Ostrowski y, como consecuencia, el teorema de Hadamard que asegura la existencia de series de potencias que no pueden prolongarse analíticamente a un abierto mayor conteniendo a su disco de convergencia. Para ambos teoremas mostramos ejemplos de series de potencias que verifican las correspondientes hipótesis.

Finalmente, en el último capítulo, suponiendo la existencia de prolongación analítica a lo largo de caminos, estudiamos cuestiones relativas a su unicidad. En la primera sección introducimos el concepto de prolongación analítica a lo largo de un camino. En la segunda sección enunciamos y demostramos el Teorema de monodromía que nos da un criterio de unicidad de prolongación analítica a lo largo de dos caminos uniendo los mismos puntos, y como consecuencia, establece que en una región simplemente conexa, si hay prolongación analítica a lo largo de cualquier camino, entonces puede definirse una extensión analítica de la función en toda la región.

Abstract

Analytic continuation is an issue, which appears in a natural way in Complex Analysis, relating to extend the domain of definition of a given analytic function. In particular, let f_0 be an analytic function on a region $\Omega_0 \subseteq \mathbb{C}$, is there an analytic function f_1 on a region Ω_1 such that $\Omega_0 \subset \Omega_1$ and $f_1(z) = f_0(z)$ $\forall\, z \in \Omega_0$? This question has already appeared, in the course called Complex Variable, due to the importance of the domain in which power series or Laurent series representation is valid, because the power series or the Laurent series representation of a given function has it as an analytic continuation on its domain of convergence.

Given an analytic function on a region, not always there exists an analytic continuation of it to an open set containing its region, but if one does, then it is unique by the Analytic continuation principle.

The Analytic continuation principle is a relevant result in complex analysis. It tells us that an analytic function on a region is determined by its values on a set with accumulation points in the domain and, as a consequence, if two analytic functions on a region coincide on a set with accumulation points in that region, then they are the same function. It allows us to extend functions defined on $\mathbb{R}$ into the complex plane as the cosine, the sine or the exponential function, these extensions being the only ones that verify some desirable properties.

The aim of this project is to study existence, non-existence and uniqueness theorems of the analytic continuation of a given analytic function on a region $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.

In the first chapter, some concepts and results about Complex Analysis, which are needed in the development of this work, will be presented. In particular, the Analytic continuation principle will be a very useful theorem in this project.

In the second chapter, we study existence and non-existence results of analytic continuation. The first section is dedicated to the Schwarz Reflection Principle which allows us to extend analytic functions on an open set contained in the superior semiplane, and that can be extended in a continuous way into an open interval of the real line contained in the boundary in which the function takes real values, to a region which is symmetric with respect to the real axis. The second section is focused on non-existence results by proving Ostrowski's theorem and therefore Hadamard's theorem which ensures the existence of power series that cannot be extended by analytic continuation to an open set containing its disk of convergence. Besides, for both theorems, we show power series verifying the corresponding hypothesis.

Finally, in the last chapter, and assuming the existence of analytic continuation along a path, we expose questions relating to the uniqueness of it. In the first section we introduce the concept of analytic continuation along a path. In the second section we state and prove Monodromy theorem which gives us an uniqueness criterion of analytic continuation along two paths joining the same points and, as a consequence, it establishes that if there exists an analytic continuation along any path which is contained in a simply connected region, then the analytic continuation of the funtion to the region can be defined.

Índice general

Capítulo 1

Resultados previos

En este capítulo exponemos conceptos y resultados conocidos sobre variable compleja que serán necesarios para el desarrollo del trabajo, cuyas demostraciones se vieron en la asignatura Variable Compleja del grado en Matemáticas y pueden encontrarse en [3] y las referencias allí indicadas a excepción de la del Teorema de representación conforme de Riemann que aparece en el capítulo 14 de [2].

Notación. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$, denotamos por $D(z_0, \varepsilon)$ al disco abierto de centro z_0 y radio ε:

$$D(z_0, \varepsilon) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}.$$

Denotaremos al disco unidad por $\mathbb{D} = D(0,1)$, y a su frontera por $\partial\mathbb{D}$.

Definición 1. Sea Ω abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diremos que f es *holomorfa* en Ω si es derivable en cada $z_0 \in \Omega$. Denotamos por $\mathscr{H}(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω.
Diremos que f es una *función entera* si $f \in \mathscr{H}(\mathbb{C})$.

Definición 2. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Diremos que f es *analítica* en Ω si f es analítica en cada $c \in \Omega$, es decir, si para todo $c \in \Omega$ existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,c}(z-c)^n$ con radio de convergencia $R_c > 0$ y $0 < \delta_c \leq R_c$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,c}(z-c)^n \ \ \forall\, z \in D(c, \delta_c)$.

Proposición 1.1. *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica en Ω, entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$. Además, f es indefinidamente derivable en Ω.*

Teorema 1.2 (Analiticidad de las funciones holomorfas)**.** *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathscr{H}(\Omega)$, entonces f es analítica en Ω. Además, para cada $c \in \Omega$ existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n$ con radio de convergencia $R \geq d(c, \Omega^c)$ (donde $d(c, \Omega^c)$ es la distancia de c al complementario de Ω, considerada $+\infty$ si $\Omega^c = \emptyset$, es decir, $\Omega = \mathbb{C}$) tal que*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n \qquad \forall\, z \in D(c, d(c, \Omega^c)).$$

Observación. f es analítica en $\Omega \Leftrightarrow f \in \mathscr{H}(\Omega)$ siendo Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$.

Teorema 1.3 (Teorema de Cauchy-Riemann)**.** *Sea $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ un abierto no vacío y $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ con $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ con $u(x,y), v(x,y) \in \mathbb{R} \ \ \forall\, x+iy \in \Omega$. Entonces f es derivable en z_0 si y solo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- *$u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ son diferenciables en (x_0, y_0),*

- *Se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann:*

$$\begin{cases} u_x(x_0,y_0) = v_y(x_0,y_0), \\ u_y(x_0,y_0) = -v_x(x_0,y_0). \end{cases}$$

Como consecuencia del teorema de Cauchy-Riemann tenemos el siguiente corolario, del cual incluimos la demostración por su relevancia en los resultados de la sección 2.1.

Corolario 1.4. *Sea $G \subseteq \mathbb{C}$ una región y $G^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G\}$. Sean $f : G \to \mathbb{C}$ y $f^* : G^* \to \mathbb{C}$ dada por $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ $\forall\, z \in G^*$. Entonces $f \in \mathscr{H}(G) \Leftrightarrow f^* \in \mathscr{H}(G^*)$.*

Demostración. Sean $u, v : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones tales que $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ $\forall\, (x,y) \in G$.
Sea $z = x+iy$, $(x,y) \in G^*$, entonces:
$f^*(z) = \overline{f(\bar{z})} = \overline{f(x-iy)} = u(x,-y) - iv(x,-y) = u_1(x,y) + iv_1(x,y)$ siendo $u_1, v_1 : G^* \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ las funciones dadas por $u_1(x,y) = u(x,-y)$, $v_1(x,y) = -v(x,-y)$.
Por tanto, tenemos:

- u_1 es diferenciable en $G^* \Leftrightarrow u$ es diferenciable en G,
- v_1 es diferenciable en $G^* \Leftrightarrow v$ es diferenciable en G.

En el caso en el que u_1 y v_1 sean diferenciables en G^* y u, v lo sean en G, tenemos que $\forall\, (x,y) \in G^*$:

- $(u_1)_x(x,y) = u_x(x,-y)$,
- $(u_1)_y(x,y) = -u_y(x,-y)$,
- $(v_1)_x(x,y) = -v_x(x,-y)$,
- $(v_1)_y(x,y) = v_y(x,-y)$.

Así pues, u_1, v_1 cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en $(x,y) \in G^* \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (u_1)_x(x,y) = (v_1)_y(x,y), \\ (u_1)_y(x,y) = -(v_1)_x(x,y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u_x(x,-y) = v_y(x,-y), \\ u_y(x,-y) = -v_x(x,-y) \end{cases} \Leftrightarrow$$

u, v cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann en $(x,-y) \in G$.
Por tanto, por el teorema de Cauchy Riemann (Teorema 1.3), concluimos que $f(z)$ es holomorfa en $G \Leftrightarrow$ $f^*(z)$ es holomorfa en G^*. □

Teorema 1.5 (Principio de prolongación analítica (PPA))**.** *Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analítica en Ω. Son equivalentes:*

1. *$f \equiv 0$ en Ω,*
2. *$\exists\, c \in \Omega$ con $f^{(n)}(c) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,*
3. *$f = 0$ en un subconjunto de Ω con punto de acumulación en Ω.*

Definición 3. Sea $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un camino y sea $f : \mathrm{sop}\gamma \to \mathbb{C}$ una función continua. Se llama *integral de f sobre γ* a

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Notación. Dado $\triangle$ un triángulo cerrado de vértices a, b y c, denotaremos por $\partial\triangle = [a,b,c,a]$ a su frontera, es decir, $\partial\triangle = [a,b] \cup [b,c] \cup [c,a]$.

Teorema 1.6 (Teorema de Morera)**.** *Sea f una función continua en un abierto no vacío Ω de $\mathbb{C}$ tal que para todo triángulo cerrado $\triangle \subseteq \Omega$ se tiene:*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Entonces $f \in \mathscr{H}(\Omega)$.

Teorema 1.7 (Teorema de Cauchy-Goursat)**.** *Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$, p un punto de Ω, y $f \in \mathscr{C}(\Omega)$, es decir, f continua en Ω, tal que $f \in \mathscr{H}(\Omega \setminus \{p\})$. Entonces, para cualquier triángulo cerrado $\triangle$ contenido en Ω,*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0.$$

Observación. Como consecuencia del teorema de Morera (Teorema 1.6) tenemos:

$$f \in \mathscr{C}(\Omega) \cap \mathscr{H}(\Omega \setminus \{p\}) \Rightarrow f \in \mathscr{H}(\Omega).$$

Definición 4. Sea $\gamma : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ un camino tal que $\gamma(t) \neq 0 \ \ \forall\, t \in [a,b]$.
Diremos que $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ es un *logaritmo continuo a lo largo de* γ si:

a) f es continua en $[a,b]$,

b) $e^{f(t)} = \gamma(t) \ \ \forall\, t \in [a,b]$.

Definición 5. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ y Γ un ciclo contenido en Ω. Diremos que Γ es *homólogo a 0 respecto de* Ω, y lo denotaremos por $\Gamma \sim 0\ (\Omega)$, si $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$ para todo $a \in \Omega^c$.
Cuando Γ consta de un solo camino γ, suele escribirse directamente $\gamma \sim 0\ (\Omega)$.

Definición 6. Sea Ω una región de $\mathbb{C}$. Diremos que Ω es *simplemente conexo* si verifica cualquiera de las siguientes propiedades equivalentes entre sí:

1) Para todo ciclo Γ contenido en Ω y para toda $f \in \mathscr{H}(\Omega)$ se verifica $\displaystyle\int_\Gamma f(z)dz = 0$.

2) Todo camino cerrado γ contenido en Ω es homólogo a 0 respecto de Ω, es decir, $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0$ para todo $a \in \Omega^c$ siendo $\operatorname{Ind}_\gamma(a) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$.

Nota. En Conway [1] se define una región simplemente conexa en términos de homotopía. En la sección 6 del capítulo IV se establece la relación entre homotopía y homología en $\mathbb{C}$, y la equivalencia entre la definición homotópica y homológica de la conexión simple se encuentra en la sección 2 del capítulo VIII.

Definición 7. Sean U, V dos conjuntos abiertos de $\mathbb{C}$. Diremos que U y V son *conformemente equivalentes* si existe $f : U \to V$ una biyección holomorfa.

Teorema 1.8 (Teorema de representación conforme de Riemann)**.** *Sea un abierto conexo $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ (distinto de $\mathbb{C}$ y $\emptyset$), entonces Ω es conformemente equivalente al disco unidad $\mathbb{D}$ si y solo si es simplemente conexo.*

Capítulo 2

Resultados de existencia y no existencia de extensión analítica

Recordemos que el objetivo de este trabajo es estudiar el siguiente problema:
Dada f una función analítica en una región G, es decir, un abierto y conexo, ¿cuándo y cómo f puede extenderse a una función analítica f_1 en un abierto G_1 tal que $G \subset G_1$?
Si G_1 se obtiene añadiendo a G un abierto disjunto, siendo G una componente de G_1, f puede extenderse a G_1 definiéndola como se desee en $G_1 \cap G^c$ siempre y cuando la función resultante sea analítica.
Para eliminar este caso trivial, se debería imponer que G_1 fuese también una región.

En este capítulo nos centraremos en cuestiones de existencia de prolongaciones analíticas. Como teorema de existencia se encuentra el *Principio de reflexión de Schwarz*, el que nos permite extender funciones analíticas en un abierto del semiplano superior, que se pueden extender de manera continua a un trozo del eje real contenido en la frontera con valores reales, a una región simétrica respecto del eje real. Como teorema de no existencia aparece el *Teorema de series lagunares de Hadamard*, que establece que un cierto tipo de series de potencias no pueden extenderse de manera analítica mas allá de su disco de convergencia.

2.1. Principio de reflexión de Schwarz

Sea G una región y $G^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in G\}$. Ya hemos probado en el Corolario 1.4 que si f es una función analítica en G, entonces $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$ es analítica en G^*.
Ahora, supongamos que $G = G^*$, es decir, G es simétrico respecto al eje real, entonces $g(z) = f(z) - \overline{f(\bar{z})}$ es analítica en G por ser operación de funciones analíticas.
Como $G = G^*$ es una región, contiene un intervalo abierto de la recta real.
Supongamos que $f(x) \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in G \cap \mathbb{R}$, entonces $g(x) = 0 \;\; \forall\, x \in G \cap \mathbb{R}$. Además $G \cap \mathbb{R}$ tiene punto de acumulación en G, luego, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f(z) = \overline{f(\bar{z})} \;\; \forall\, z \in G$.

El hecho de que f deba cumplir esta ecuación, es utilizado para extender una función definida en $G \cap \{z \in \mathbb{C} : Imz \geq 0\}$ a todo G.

Sea G una región tal que $G = G^*$. Definimos:

- $G_+ = \{z \in G : Imz > 0\}$,

- $G_- = \{z \in G : Imz < 0\}$,

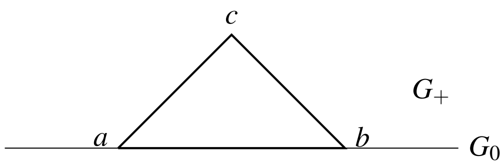
- $G_0 = \{z \in G : Imz = 0\}$.

Teorema 2.1 (Principio de reflexión de Schwarz)**.** *Sea G una región tal que $G = G^*$.*
Si $f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ es una función continua en $G_+ \cup G_0$ y analítica en G_+ tal que $f(x) \in \mathbb{R} \;\; \forall\, x \in G_0$, entonces existe una función $g : G \to \mathbb{C}$ analítica tal que $g(z) = f(z) \;\; \forall\, z \in G_+ \cup G_0$.

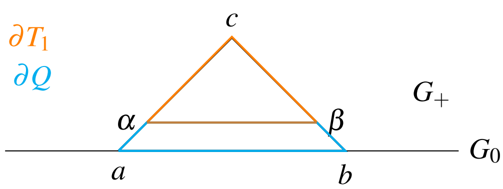
Demostración. Definimos $g : G \to \mathbb{C}$ dada por

$$g(z) = \begin{cases} \overline{f(\bar{z})} & \text{si } z \in G_-, \\ f(z) & \text{si } z \in G_+ \cup G_0. \end{cases}$$

Notar que g es continua por serlo f y tomar f valores reales en G_0. Veamos que g es analítica.
Es claro que, por el Corolario 1.4, g es analítica en $G_+ \cup G_-$. Luego, falta ver que g es analítica en G_0.
Sea $x_0 \in G_0$ fijo, y $R > 0$ tal que $D(x_0, R) \subset G$. Es suficiente probar que g es analítica en $D(x_0, R)$ y para ello, haremos uso del teorema de Morera (Teorema 1.6).
Sea $\triangle$ un triángulo contenido en $D(x_0, R)$ y $\partial\triangle = [a, b, c, a]$. Veamos que $\displaystyle\int_{\partial\triangle} g(z)dz = 0$.
Comenzamos con el caso en el que $\triangle \subset G_+ \cup G_0$ y $[a, b] \subset G_0$.



Tenemos que $g(z) = f(z) \;\; \forall\, z \in \triangle$.
Por hipótesis, f es continua en $G_+ \cup G_0$, en particular lo es en $\triangle$ que es compacto. Luego, f es uniformemente continua en $\triangle$, es decir, dado $\varepsilon > 0 \;\; \exists\; \delta > 0$ tal que si $|z - z'| < \delta$ con $z, z' \in \triangle$, entonces $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.
Tomamos $\alpha \in [c, a]$ y $\beta \in [b, c]$ de manera que $|\alpha - a| < \delta, |\beta - b| < \delta$.
Sean $\partial T_1 = [\alpha, \beta, c, \alpha]$ y $\partial Q = [a, b, \beta, \alpha, a]$.



Entonces,

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz + \int_{\partial Q} f(z)dz.$$

Como ∂T_1 junto a su interior está contenido en G_+ y por hipótesis f es analítica en G_+, por el teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 1.7), tenemos que $\displaystyle\int_{\partial T_1} f(z)dz = 0$.
Así pues,

$$\int_{\partial\triangle} f(z)dz = \int_{\partial Q} f(z)dz. \tag{2.1}$$

Si $0 \le t \le 1$, tenemos $|[t\beta + (1-t)\alpha] - [tb + (1-t)a]| \le |t(\beta - b)| + |(1-t)(\alpha - a)| < t\delta + (1-t)\delta = \delta$, entonces $|f(t\beta + (1-t)\alpha) - f(tb + (1-t)a)| < \varepsilon$.
Sea M=máx$\{|f(z)| : z \in \triangle\}$ y l el perímetro de $\triangle$.
Aplicando la definición de la integral de una función a lo largo de un camino (Definición 3), tenemos:

$$\begin{gathered} \left| \int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[\beta,\alpha]} f(z)dz \right| = \left| \int_{[a,b]} f(z)dz - \int_{[\alpha,\beta]} f(z)dz \right| = \\ \left| (b-a)\int_0^1 f(tb + (1-t)a)dt - (\beta - \alpha)\int_0^1 f(t\beta + (1-t)\alpha)dt \right| \le \end{gathered} \tag{2.2}$$

Ahora, sumando y restando $(b-a)\int_0^1 f(t\beta+(1-t)\alpha)dt$, por la desigualdad triangular obtenemos:

$$\le |b-a|\left|\int_0^1 [f(tb+(1-t)a)-f(t\beta+(1-t)\alpha)]dt\right| + |(b-a)-(\beta-\alpha)|\left|\int_0^1 f(t\beta+(1-t)\alpha)dt\right| \le$$

$$\le |b-a|\int_0^1 \underbrace{|f(t\beta+(1-t)\alpha)-f(tb+(1-t)a)|}_{<\varepsilon}dt + |(b-\beta)+(\alpha-a)|\int_0^1 \underbrace{|f(t\beta+(1-t)\alpha)|}_{\le M}dt \le$$

$$\le \underbrace{|b-a|}_{\le l}\varepsilon + \underbrace{|(b-\beta)+(\alpha-a)|}_{\le 2\delta}M \le l\varepsilon+2\delta M.$$

Por otro lado,

- $\left|\int_{[\alpha,a]} f(z)dz\right| \le \max_{z\in[\alpha,a]}|f(z)||a-\alpha| \le M\delta,$
- $\left|\int_{[b,\beta]} f(z)dz\right| \le \max_{z\in[b,\beta]}|f(z)||\beta-b| \le M\delta.$

Combinando estas dos últimas desigualdades con (2.1) y (2.2) obtenemos:

$$0 \le \left|\int_{\partial\triangle} f(z)dz\right| \le \left|\int_{[a,b]} f(z)dz + \int_{[\beta,\alpha]} f(z)dz\right| + \left|\int_{[\alpha,a]} f(z)dz\right| + \left|\int_{[b,\beta]} f(z)dz\right| \le l\varepsilon+4\delta M.$$

Finalmente, tomando $\delta<\varepsilon$ y dado que ε es arbitrario, se sigue que $\int_{\partial\triangle} g(z)dz = \int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$ como queríamos probar.

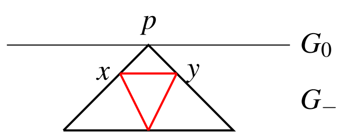
Para probar el caso en el que $\triangle \subset G_- \cup G_0$ con $\partial\triangle = [a,b,c,a]$ y $[a,b]\subset G_0$, podemos partir del caso anterior.
Denotamos por T_1 al triángulo contenido en $G_+\cup G_0$ con $\partial T_1 = [a,b,\bar{c},a]$.
Sabemos que $\int_{\partial T_1} g(z)dz = \int_{\partial T_1} f(z)dz = 0$. Veamos que $\int_{\partial\triangle} g(z)dz = 0$.
Parametrizamos ∂T_1 como sigue: Si $\gamma:[A,B]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ es una parametrización de $\partial\triangle$, entonces $\gamma_1:[A,B]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(t)=\overline{\gamma(t)}$ es una parametrización de ∂T_1.
Dado que $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ si $z\in G_-$ y $\overline{f(\bar{z})}=\overline{f(z)}=f(z)=g(z)$ si $z\in G_0$, tenemos:

$$\int_{\partial\triangle} g(z)dz = \int_{\partial\triangle}\overline{f(\bar{z})}dz = \int_A^B \overline{f(\overline{\gamma(t)})}\gamma'(t)dt = \int_A^B \overline{f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)}dt = \overline{\int_{\partial T_1} f(z)dz} = 0$$

como queríamos probar.

En el caso en el que $\triangle\subset G_+$ o $\triangle\subset G_-$, el resultado se sigue del teorema de Cauchy-Goursat (Teorema 1.7).

También pudiera ocurrir que tuviésemos un triángulo $\triangle$ con uno de sus vértices $p\in G_0$ y con los otros dos vértices restantes en G_+ o en G_-. En este caso tomamos x e y en los lados del triángulo cuyo vértice común es p, dividiendo el triángulo en cuatro triángulos considerando x,y y el punto medio del lado opuesto a p.



Llamando $\triangle_{p,x,y}$ al triángulo con vértices p, x e y y teniendo en cuenta los casos anteriores, tenemos que:

$$\int_{\partial\triangle} g(z)dz = 0+0+0+\int_{\partial\triangle_{p,x,y}} g(z)dz = \int_{\partial\triangle_{p,x,y}} g(z)dz.$$

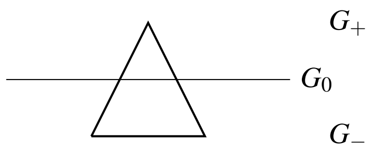
Como g es continua en G y $\triangle$ es compacto, existe $N = \max\limits_{z\in\triangle} |g(z)|$.
Luego,

$$0 \leq \left|\int_{\partial\triangle} g(z)dz\right| = \left|\int_{\partial\triangle_{p,x,y}} g(z)dz\right| \leq N \cdot \mathrm{long}(\partial\triangle_{p,x,y}) \xrightarrow[x,y\to p]{} 0$$

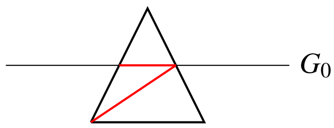
de donde se sigue que

$$\int_{\partial\triangle} g(z)dz = 0.$$

Como último caso aparece el siguiente



Procedemos dividiendo el triángulo en tres triángulos cuyos casos ya hemos estudiado, siguiéndose así el resultado.



□

2.2. Teorema de series lagunares de Hadamard

En esta sección vamos a demostrar que existen series de potencias que no pueden prolongarse analíticamente a un abierto mayor que su disco de convergencia. Obtendremos así un resultado de no existencia de prolongación analítica.
Comenzaremos definiendo los *puntos regulares* y *puntos singulares* de una función analítica en un disco.

Definición 8. Sea D un disco abierto de $\mathbb{C}$, $f \in \mathscr{H}(D)$ y $\beta \in \partial D$.
Se dice que β es un *punto regular de* f si existe un disco D_1 con centro β y una función $g \in \mathscr{H}(D_1)$ tal que $f(z) = g(z)\ \ \forall\, z \in D \cap D_1$.
A cualquier punto de la frontera de D que no sea regular se le denomina *punto singular de* f.

De la definición se sigue que el conjunto de los puntos regulares de f es un subconjunto abierto de la frontera de D, ya que si β es un punto regular de f y D_1 es el disco de la definición 8, entonces $\partial D \cap D_1$ es un conjunto de puntos regulares de f. Además, en tal caso, f admite prolongación analítica a $D \cup D_1$.

En lo que sigue de ahora en adelante, en los teoremas tomaremos D como el disco unidad $\mathbb{D}$ sin pérdida de generalidad.
Comenzaremos demostrando que si una función viene definida por una serie de potencias, entonces la frontera de su disco de convergencia tiene al menos un punto singular.

Teorema 2.2. *Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ dada por la serie de potencias $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ $(z \in \mathbb{D})$ con radio de convergencia 1. Entonces f tiene al menos un punto singular en $\partial\mathbb{D}$.*

Demostración. Procederemos por reducción al absurdo: Supongamos que todo punto de $\partial\mathbb{D}$ es punto regular de f.
Por un lado, por ser $\partial\mathbb{D}$ compacto, de todo recubrimiento abierto se puede extraer un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists\, D_1,\ldots,D_n$ discos abiertos tales que $\partial\mathbb{D} \subset D_1 \cup \ldots \cup D_n$.
Por otro lado, como todo punto de $\partial\mathbb{D}$ es regular, por definición, existen funciones $g_j \in \mathscr{H}(D_j)$ con D_j discos tales que el centro de cada D_j está en $\partial\mathbb{D}$ y $f(z) = g_j(z)\ \ \forall\, z \in \mathbb{D} \cap D_j$, $j = 1,\ldots,n$.
Si $D_i \cap D_j \neq \emptyset$, $i, j \in \{1,\ldots,n\}$, denotamos $V_{i,j} = D_i \cap D_j \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$ ya que los centros de los discos están en $\partial\mathbb{D}$, y tenemos que $g_i(z) = f(z) = g_j(z)\ \ \forall\, z \in V_{i,j}$. Por tanto, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), siendo $D_i \cap D_j$ abierto conexo, se tiene que $g_i(z) = g_j(z)\ \ \forall\, z \in D_i \cap D_j$.
Así pues, está bien definida en $\Omega = \mathbb{D} \cup D_1 \cup \ldots \cup D_n$ la aplicación $h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \in \mathbb{D}, \\ g_i(z) & \text{si } z \in D_i \quad i \in \{1,\ldots,n\}. \end{cases}$
Notar que $h \in \mathscr{H}(\Omega)$ ya que $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ y $g_i \in \mathscr{H}(D_i)$ para cada $i \in \{1,\ldots,n\}$.
Como Ω es abierto y contiene a $\overline{\mathbb{D}}$, existe $\varepsilon > 0$, concretamente podemos tomar
$\varepsilon = \min\limits_{i,j}\{\sup\{|z| : z \in D_i \cap D_j\} - 1\}$, tal que $D(0, 1+\varepsilon) \subset \Omega$ y $h \in \mathscr{H}(D(0, 1+\varepsilon))$.

Luego, por el Teorema 1.2, existe una serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ con radio de convergencia mayor o igual que $1+\varepsilon$ tal que $h(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\ \ \forall\, z \in D(0, 1+\varepsilon)$, pero $h(z) = f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\ \ \forall\, z \in \mathbb{D}$.

Entonces, $a_n = b_n\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, teniéndose así que $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia al menos $1+\varepsilon$, lo que contradice la hipótesis.
Existe pues, al menos un punto singular en $\partial\mathbb{D}$ como queríamos demostrar. □

Definición 9. Sea $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$. Si todo punto de $\partial\mathbb{D}$ es punto singular de f diremos que $\partial\mathbb{D}$ es la *frontera natural de* f. En este caso, f no tiene extensión holomorfa a ninguna región que contenga propiamente a $\mathbb{D}$.

Veamos mediante un ejemplo, que existe $f \in \mathscr{H}(\mathbb{D})$ tal que $\partial\mathbb{D}$ es la frontera natural de f.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.
Comprobemos en primer lugar que f está bien definida, es decir, que el radio de convergencia es 1.

- Si $z = 0$, entonces la serie converge a 0.

- Si $z \neq 0$, como $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{|z_{n+1}|}{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} |z|^{2^n}$, tenemos por el criterio del cociente que:
  Si $0 < |z| < 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z|^{2^n} = 0$ y la serie converge absolutamente.
  Si $|z| > 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z|^{2^n} = \infty$ y la serie no converge ya que el término general no tiende a 0.

Por tanto, el radio de convergencia de esta serie es 1. Además, si $|z| = 1$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} |z|^{2^n} = 1$ y la serie no converge.
Observar que f verifica la ecuación $f(z^2) = f(z) - z\ \ \forall\, z \in \mathbb{D}$.
Haciendo uso de la ecuación anterior, veamos que f no está acotada en cada conjunto $[0, e^{\frac{2\pi ik}{2^n}})$, $k, n \in \mathbb{N}$.
Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(z^{2^n}) &= f((z^{2^{n-1}})^2) = f(z^{2^{n-1}}) - z^{2^{n-1}} = f((z^{2^{n-2}})^2) - z^{2^{n-1}} = f(z^{2^{n-2}}) - z^{2^{n-2}} - z^{2^{n-1}} = \\ &= f((z^{2^{n-3}})^2) - z^{2^{n-2}} - z^{2^{n-1}} = f(z^{2^{n-3}}) - z^{2^{n-3}} - z^{2^{n-2}} - z^{2^{n-1}} = \ldots = \\ &= f(z) - z - z^2 - z^4 - \ldots - z^{2^{n-2}} - z^{2^{n-1}}. \end{aligned}$$

Sea $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$, $\lambda \in [0,1)$ y $z_\lambda = \lambda e^{\frac{2\pi i k_0}{2^{n_0}}}$.
Por lo anterior tenemos $f(z_\lambda^{2^{n_0}}) = f(z_\lambda) - z_\lambda - z_\lambda^2 - \ldots - z_\lambda^{2^{n_0-1}}$, de donde:

$$\begin{aligned} f(z_\lambda) &= f(z_\lambda^{2^{n_0}}) + z_\lambda + z_\lambda^2 + \ldots + z_\lambda^{2^{n_0-1}} = f(\lambda^{2^{n_0}} e^{2\pi i k_0}) + z_\lambda + z_\lambda^2 + \ldots + z_\lambda^{2^{n_0-1}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda^{2^{n_0}})^{2^n} + z_\lambda + \ldots + z_\lambda^{2^{n_0-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} + z_\lambda + \ldots + z_\lambda^{2^{n_0-1}}. \end{aligned}$$

Luego, $\lim\limits_{\lambda \to 1^-} f(z_\lambda) = \lim\limits_{\lambda \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} + \underbrace{\lim_{\lambda \to 1^-} (z_\lambda + \ldots + z_\lambda^{2^{n_0-1}})}_{\in \mathbb{C}}$.

Probemos pues, que $\lim\limits_{\lambda \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} = \infty$. Para ello, sea $M > 0$, buscamos $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que si $\lambda \in (\lambda_0, 1)$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} > M$.

Para cualquier $N_0 \in \mathbb{N}$ tenemos que si $0 < \lambda < 1$ entonces $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} \geq \sum_{n=0}^{N_0} \lambda^{2^{n_0+n}} \geq \sum_{n=0}^{N_0} \lambda^{2^{n_0+N_0}} =$ $= (N_0+1)\lambda^{2^{n_0+N_0}}$.
Por tanto, tomando $N_0 > 2M$ se tiene $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} \geq (N_0+1)\lambda^{2^{n_0+N_0}} > (2M+1)\lambda^{2^{n_0+N_0}}$.
Ahora, si tomamos λ_0 tal que $\frac{1}{2} < {\lambda_0}^{2^{n_0+N_0}} < 1$ entonces, si $\lambda \in (\lambda_0, 1)$, $\lambda^{2^{n_0+N_0}} > {\lambda_0}^{2^{n_0+N_0}} > \frac{1}{2}$ y para estos $\lambda's$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{2^{n_0+n}} > (2M+1)\lambda^{2^{n_0+N_0}} > (2M+1)\frac{1}{2} > M$ probando así, que f no está acotada en cada conjunto $[0, e^{\frac{2\pi i k}{2^n}})$, $k, n \in \mathbb{N}$.
El conjunto $\{e^{\frac{2\pi i k}{2^n}} : k, n \in \mathbb{N}\}$ forma un subconjunto denso de $\partial\mathbb{D}$, y como el conjunto de los puntos singulares de f es cerrado (su complementario es abierto), se sigue que $\partial\mathbb{D}$ es la frontera natural de f.

Este ejemplo, en el que aparece una serie de potencias con muchos coeficientes nulos, es un caso especial del teorema 2.4 debido a Hadamard, derivado del siguiente teorema de Ostrowski.

Teorema 2.3. *Sean λ, p_k y $q_k \in \mathbb{N}$ tales que*

$$p_1 < p_2 < p_3 < \ldots$$

y

$$\lambda q_k > (\lambda+1) p_k \qquad (k = 1, 2, 3\ldots). \tag{2.3}$$

Sea

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \tag{2.4}$$

con radio de convergencia 1 y $a_n = 0$ si $p_k < n < q_k$ para algún k.
Si $s_p(z)$ es la p-ésima suma parcial de (2.4) y β es un punto regular de f en $\partial\mathbb{D}$, entonces la sucesión $(s_{p_k}(z))_{k=1}^{\infty}$ converge en algún entorno de β.

Notar que la sucesión $(s_p(z))_{p=1}^{\infty}$ no puede converger en ningún punto fuera de $\overline{\mathbb{D}}$ ya que por hipótesis el radio de convergencia de (2.4) es 1. Por otro lado, según asegura el enunciado de este teorema, (2.3) junto con la condición que cumplen los coeficientes a_n, proporciona la existencia de una subsucesión que converge en un entorno de β. A este fenómeno se le denomina *sobreconvergencia*.

Demostración. Si consideramos $g(z) = f(\beta z)$, entonces g también cumple la condición de los a_n. Por tanto, podemos asumir sin pérdida de generalidad que $\beta = 1$. Por ser este un punto regular de f, f tiene

una extensión holomorfa, que denotamos por f_1, a una región Ω tal que $\mathbb{D}\cup\{1\}\subset\Omega$.
Sea $\varphi(w)=\frac{1}{2}(w^{\lambda}+w^{\lambda+1})=\frac{1}{2}w^{\lambda}(1+w)\ \forall\, w\in\mathbb{C}$ y definimos $F(w)=f_1(\varphi(w))\ \forall\, w$ tal que $\varphi(w)\in\Omega$.
Si $|w|\leq 1$ y $w\neq 1$, entonces $|\varphi(w)|\leq\frac{1}{2}|1+w|<\frac{1}{2}(|1|+|w|)\leq 1$, luego, $|\varphi(w)|<1$. Además $\varphi(1)=1$.
Ahora, por continuidad de φ y compacidad de $\overline{\mathbb{D}}$, existe $\varepsilon>0$ tal que $\varphi(D(0,1+\varepsilon))\subset\Omega$.
Notar que $\varphi(D(0,1+\varepsilon))$ contiene al 1 en su interior.
Como $F\in\mathscr{H}(D(0,1+\varepsilon))$, por el Teorema 1.2, existe una serie de potencias $\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_m w^m$ con radio de convergencia mayor o igual que $1+\varepsilon$ tal que $F(w)=\sum\limits_{m=0}^{\infty}b_m w^m\ \ \forall\, w\in D(0,1+\varepsilon)$.
Tenemos:

$$F(w)=f(\varphi(w))=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\varphi(w))^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}\left(\sum_{m=0}^{n}\binom{n}{m}w^{\lambda(n-m)}w^{(\lambda+1)m}\right)\qquad |w|<1.$$

Observamos que la mayor y la menor potencia de w en $(\varphi(w))^n$ tienen exponentes $(\lambda+1)n$ y λn respectivamente.
Así pues, por (2.3), el mayor exponente en $(\varphi(w))^{p_k}$, que es $(\lambda+1)p_k$, es menor que el menor exponente en $(\varphi(w))^{q_k}$, que es λq_k. Juntando este hecho con la condición que verifican los a_n obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{p_k}a_n(\varphi(w))^n=\sum_{m=0}^{(\lambda+1)p_k}b_m w^m\qquad (k=1,2\ldots).\tag{2.5}$$

La parte derecha de (2.5) converge cuando $k\to\infty$ si $|w|<1+\varepsilon$, luego $(s_{p_k}(z))_{k=1}^{\infty}$ converge $\forall\, z\in\varphi(D(0,1+\varepsilon))$, es decir, converge en algún entorno de $\beta=1$ como queríamos probar. □

Como consecuencia obtenemos el siguiente teorema de Hadamard:

Teorema 2.4. *Sean $\lambda\in\mathbb{N}$, $(p_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de enteros positivos tales que*

$$p_{k+1}>\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)p_k\qquad (k=1,2,3,\ldots).$$

Sea

$$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{p_k},\tag{2.6}$$

con radio de convergencia 1*. Entonces $\partial\mathbb{D}$ es la frontera natural de f.*

Demostración. Tomando $q_k=p_{k+1}$ en el teorema 2.3, la subsucesión $(s_{p_k})_{k=1}^{\infty}$ es la misma, salvo por repeticiones, que la sucesión de sumas parciales de (2.6). Esta última no converge para ningún punto fuera de $\overline{\mathbb{D}}$ ya que por hipótesis el radio de convergencia de (2.6) es 1. Por tanto, por el teorema 2.3, como el radio de convergencia de la serie es 1, ningún punto de $\partial\mathbb{D}$ puede ser punto regular de f, concluyéndose así que $\partial\mathbb{D}$ es la frontera natural de f. □

Observación. Si tomamos $p_k=2^{k-1}$, $c_k=1$ y $\lambda\in\mathbb{N}$ tal que $\lambda>1$ recuperamos lo observado en el ejemplo 1.

Notar que usamos el Teorema 2.3 para concluir que la frontera natural de una serie de potencias cumpliendo las condiciones del Teorema 2.4 es $\partial\mathbb{D}$. No obstante, resulta interesante plantearse encontrar una serie de potencias verificando todas las hipótesis del Teorema 2.3.

El ejemplo que presentamos a continuación se debe a Porter [5].

Ejemplo 2. En primer lugar consideramos la serie $g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^{3^n}$ cuyo radio de convergencia R_g es 1 ya que:

- Si $z=0$, entonces la serie converge a 0.
- Si $z\neq 0$, como $\lim_{n\to\infty}\frac{|z_{n+1}|}{|z_n|}=\lim_{n\to\infty}|z|^{2\cdot 3^n}$, tenemos por el criterio del cociente que:
  Si $0<|z|<1$, $\lim_{n\to\infty}|z|^{2\cdot 3^n}=0$ y la serie converge absolutamente.
  Si $|z|>1$, $\lim_{n\to\infty}|z|^{2\cdot 3^n}=\infty$ y la serie no converge ya que el término general no tiende a 0.

Además, si $|z|=1$, $\lim_{n\to\infty}|z|^{3^n}=1$ y la serie no converge.
Tomando $p_k=3^{k-1}$, $c_k=1$ y $\lambda\in\mathbb{N}$, por el Teorema 2.4, tenemos que $\partial\mathbb{D}$ es la frontera natural de g, es decir, g no puede converger en ningún entorno de z_0 con $|z_0|=1$ (todos los puntos de $\partial\mathbb{D}$ son singulares).
Ahora, consideramos $P(z)=\frac{1}{2}z(z-1)\ \ \forall\, z\in\mathbb{C}$ y definimos $\forall\, z\in\Omega$, siendo Ω el mayor abierto donde f está definida, es decir, $\Omega=P^{-1}(\mathbb{D})$,

$$f(z)=g(P(z))=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}z(z-1)\right)^{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^2-z}{2}\right)^{3^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{3^n}\frac{(-1)^{3^n-r}}{2^{3^n}}\binom{3^n}{r}z^{3^n+r}\right). \tag{2.7}$$

Notar que a partir de (2.7), dado que las potencias de un término no se solapan con las potencias de otro término, podemos construir la siguiente serie de potencias

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_m z^m, \tag{2.8}$$

cuyo coeficiente de z^m es el coeficiente de z^m que aparece en un único término de la serie (2.7). De esta manera, lo que tenemos es que la sucesión de sumas parciales de la serie (2.7) es una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de (2.8).
Nuestro objetivo ahora es ver que el radio de convergencia de la serie (2.8) es 1. Para ello, en primer lugar veremos que si $|z|<1$ entonces la serie (2.8) converge absolutamente.
Notar que para estudiar la convergencia absoluta de la serie (2.8) basta estudiar lo que le ocurre a cualquier subsucesión de la sucesión de sumas parciales de la serie con módulo.

Por un lado, si $|z|<1$ tenemos que $\frac{|z|^2+|z|}{2}=\frac{1}{2}|z|(|z|+1)<1$ y entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{3^n}\left|\frac{(-1)^{3^n-r}}{2^{3^n}}\binom{3^n}{r}z^{3^n+r}\right|\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{r=0}^{3^n}\frac{1}{2^{3^n}}\binom{3^n}{r}|z|^{3^n+r}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|^2+|z|}{2}\right)^{3^n}$$

donde $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{|z|^2+|z|}{2}\right)^{3^n}$ converge ya que $R_g=1$. Así, el radio de convergencia de la serie (2.8) es mayor o igual que 1.

Por otro lado, como $P(-1)=1$ y g no converge en 1, la serie (2.7) no converge en -1 y entonces la serie (2.8) no puede converger en -1 ya que la sucesión de sumas parciales de (2.7) es una subsucesión de la sucesión de sumas parciales de (2.8). Por lo tanto, el radio de convergencia de la serie (2.8) es menor o igual que 1.
En conclusión, el radio de convergencia de (2.8) es 1.

Como $P(1)=0$, P es un polinomio y $R_g=1$, existe $U=D(1,\delta)$, con $\delta>0$, tal que $P(U)\subseteq\mathbb{D}$ y entonces la serie (2.7) converge para todo $z\in U\subseteq\Omega$. Luego, tenemos que la serie (2.8) tiene una subsucesión de la sucesión de sumas parciales que converge en U, aunque no puede converger toda la sucesión de sumas parciales dado que el radio de convergencia de (2.8) es 1. Además, 1 es punto regular de la serie (2.8) en $\partial\mathbb{D}$ ya que $g \circ P \in \mathscr{H}(\Omega)$, $\mathbb{D} \cup U \subseteq \Omega$ y $g \circ P$ coincide con la serie (2.8) en $\mathbb{D}$.

Finalmente, tomando $p_k = 2 \cdot 3^k$, $q_k = 3^{k+1}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda > 2$ tenemos que la serie (2.8) cumple la condición de los coeficientes del Teorema 2.3.
Así pues, concluimos que la serie (2.8) verifica todas las hipótesis del Teorema 2.3 y por tanto, se da el fenómeno de sobreconvergencia en 1.

Capítulo 3

Resultados de unicidad de extensión analítica

En este capítulo vamos a estudiar cuestiones relativas a la unicidad de la extensión analítica de una función $f \in \mathscr{H}(G)$, siendo G una región, a una región G_1 que contenga a G. Es claro que, como consecuencia del Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), si existe una extensión analítica de f a una región G_1 conteniendo a G, dicha extensión es única. Por tanto, habría que matizar la cuestión de unicidad a la que nos estamos refiriendo.

En este capítulo presentaremos una manera especial en la que una función analítica puede extenderse a un abierto mayor. Esta manera especial será la prolongación a lo largo de un camino. Así pues, dada una función analítica en un entorno de a y dado un camino de a a b, definiremos un concepto de prolongación analítica de la función a lo largo del camino, que dará lugar a una función analítica en un entorno de b.

La cuestión de unicidad que se plantea ahora es la siguiente: Dados dos caminos de a a b y una función analítica en un entorno de a que pueda prolongarse a lo largo de los dos caminos, ¿la función analítica que se obtiene en un entorno de b es independiente del camino?

En la primera sección de este capítulo introduciremos formalmente el concepto de prolongación analítica a lo largo de un camino. En la segunda sección, sin estudiar la existencia de dicha prolongación y admitiéndola como hipótesis, estudiaremos el problema de unicidad anteriormente mencionado, culminando con el Teorema de monodromía (Teorema 3.5) que proporciona como consecuencia que si en una región simplemente conexa G una función $f \in \mathscr{H}(D)$, siendo D una región contenida en G, puede prolongarse analíticamente a lo largo de cualquier camino, entonces puede definirse una extensión analítica de f en toda la región G.

3.1. Prolongación analítica a lo largo de un camino

Comenzamos esta sección recordando la definición de una función: Una función es una terna (f, G, Ω) donde G y Ω son unos conjuntos dados denominados dominio y rango respectivamente, y f es una regla de correspondencia que permite asignar a cada elemento de G un único elemento de Ω. Dadas dos funciones, para que estas coincidan deben de tener los mismos dominios, rangos y la misma regla de correspondencia.
En esta sección enfatizaremos que un cambio en el dominio da como resultado una nueva función. De hecho, el propósito de la prolongación analítica es ampliar el dominio.

Consideremos las siguientes funciones:

a) $\operatorname{Log} z = \log|z| + i\operatorname{Arg} z \;\; \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$,

b) $\operatorname{Log}_{\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} z = \log|z| + i\operatorname{Arg}_{\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} z \;\; \forall\, z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, analítica en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]i$,

c) $h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n} \quad \forall\, z \in D(1,1)$, analítica en $D(1,1)$

donde log denota la función logaritmo en $\mathbb{R}$ y $\mathrm{Arg}_{(\alpha,\alpha+2\pi]} z$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, denota el argumento de z en $(\alpha, \alpha+2\pi]$ siendo Arg el argumento principal definido como $\mathrm{Arg} z = \mathrm{Arg}_{(-\pi,\pi]} z$.
Notar que son tres funciones distintas, $a)$ y $b)$ son dos prolongaciones analíticas de $c)$ pero $a)$ y $b)$ no son prolongaciones analíticas la una de la otra. Sin embargo, todas coinciden en un entorno del 1. Luego, no son radicalmente distintas sino que hay una cierta relación. Esto nos lleva al siguiente concepto para englobar en el mismo conjunto funciones distintas que coinciden en un entorno de un punto.

Definición 10. Un *elemento de función* es un par (f,G) donde G es una región de $\mathbb{C}$ y f una función analítica en G. Para un elemento de función (f,G) dado, definimos el *germen de f en $a \in G$*, y lo denotamos por $[f]_a$, como el conjunto de todos los elementos de función (g,D) tales que $a \in D$ y $f(z) = g(z)$ para cada z en un entorno de a.

Observación.

1. Notar que $[f]_a$ es una colección de elementos de función y no es un elemento de función en sí mismo.

2. De la definición de germen de una función se sigue que $(g,D) \in [f]_a \Leftrightarrow (f,G) \in [g]_a$.

3. Dados dos elementos de función (f,G_1) y (g,G_2), no tiene sentido hablar de la igualdad de dos gérmenes $[f]_a$ y $[g]_b$ a no ser que $a = b \in G_1 \cap G_2$.

4. Dado un elemento de función (f,G) y $a \in G$, f puede representarse como una serie de potencias en un entorno de a.

Definición 11. Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino y supongamos que para cada $t \in [0,1]$ existe un elemento de función (f_t, D_t) tal que:

a) $\gamma(t) \in D_t$.

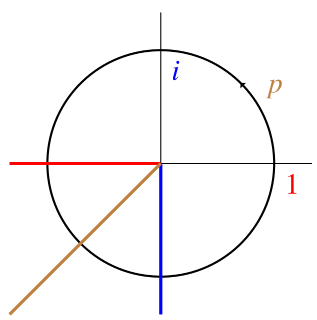
b) Para cada $t \in [0,1]$ existe $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ con $s \in [0,1]$ implica que $\gamma(s) \in D_t$ y

$$[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}. \tag{3.1}$$

Entonces diremos que (f_1, D_1) es una *prolongación analítica de (f_0, D_0) a lo largo de γ*, o que (f_1, D_1) se obtiene a partir de (f_0, D_0) mediante prolongación analítica a lo largo de γ.

Como γ es una función continua y $\gamma(t) \in D_t$ que es un conjunto abierto, existe $\delta > 0$ tal que $\gamma(s) \in D_t$ si $|s-t| < \delta$. Luego, el contenido importante del apartado $b)$ de la definición 11 es que (3.1) se cumple si $|s-t| < \delta$, es decir, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f_s(z) = f_t(z) \;\; \forall\, z \in D_s \cap D_t$ que esté en la misma componente conexa que $\gamma(s)$ si $|s-t| < \delta$.

Ejemplo 3. Consideramos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma(t) = e^{2\pi i t} \;\; \forall\, t \in [0,1]$ y los elementos de función $(f_t, D_t) = (\mathrm{Log}_{(2\pi t - \pi, 2\pi t + \pi]} z, \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] e^{2\pi i t})$ con $t \in [0,1]$.



Ilustramos el soporte del camino y para cada t el rayo eliminado del dominio.
Veamos que estos elementos de función cumplen las condiciones de la definición 11.

a) $\gamma(t) \in D_t$ se cumple por cómo están definidos $\gamma(t)$ y D_t.

b) La parte correspondiente a la existencia de $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ con $s \in [0,1]$ implica que $\gamma(s) \in D_t$ se sigue por ser γ continua y D_t abierto conteniendo a $\gamma(t)$.
Probemos la parte de igualdad entre gérmenes en $\gamma(s)$ demostrando que se verifica

$$\mathrm{Log}_{(2\pi t-\pi,2\pi t+\pi]}(\gamma(t)) = \mathrm{Log}_{(2\pi s-\pi,2\pi s+\pi]}(\gamma(t)).$$

Para ello, tenemos que ver que $2\pi t = \mathrm{Arg}_{(2\pi t-\pi,2\pi t+\pi]}(\gamma(t)) = \mathrm{Arg}_{(2\pi s-\pi,2\pi s+\pi]}(\gamma(t))$.
Sea $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ con $s \in [0,1]$, entonces $|2\pi t - \pi - (2\pi s - \pi)| < 2\pi\delta$ y $|2\pi t + \pi - (2\pi s + \pi)| < 2\pi\delta$. Tomando $\delta < \frac{1}{2}$ se sigue que $|2\pi t - \pi - (2\pi s - \pi)| < \pi$ de donde $2\pi t \in (2\pi s - \pi, 2\pi s + \pi]$ obteniéndose así la igualdad entre argumentos.

Luego, $(f_1, D_1) = (\mathrm{Log}_{(\pi,3\pi]} z, \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]) = (\mathrm{Log} z + 2\pi i, \mathbb{C} \setminus (-\infty,0])$ es una prolongación analítica de $(f_0, D_0) = (\mathrm{Log} z, \mathbb{C} \setminus (-\infty,0])$ a lo largo de γ.

Observación. Notar que $h : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $h(t) = f_t(\gamma(t)) = \mathrm{Log}_{(2\pi t-\pi,2\pi t+\pi]}(e^{2\pi i t}) = 2\pi i t$ para todo $t \in [0,1]$ es un logaritmo continuo a lo largo de γ ya que h es continua en $[0,1]$ y $e^{h(t)} = \gamma(t)$ para todo $t \in [0,1]$.

La proposición que veremos a continuación muestra que dado un camino y dos prolongaciones a lo largo del camino, estas dan como resultado el mismo germen, es decir, identificando en un germen las funciones que coinciden en un entorno de un punto, una prolongación a lo largo de un camino es esencialmente única.

Proposición 3.1. *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino de a a b y sean $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ y $\{(g_t, B_t) : t \in [0,1]\}$ dos prolongaciones analíticas a lo largo de γ tales que $[f_0]_a = [g_0]_a$. Entonces $[f_1]_b = [g_1]_b$.*

Demostración. Sea $T = \{t \in [0,1] : [f_t]_{\gamma(t)} = [g_t]_{\gamma(t)}\}$. Veamos que T es abierto y cerrado en $[0,1]$, con lo cual siendo $[0,1]$ conexo y dado que $T \neq \emptyset$ ya que $0 \in T$ por hipótesis, tendremos que $T = [0,1]$.
Comenzamos probando que T es abierto.
Sea $1 \neq t \in T$ (si $t = 1$ tenemos lo que queremos demostrar). Por la definición de prolongación analítica a lo largo de γ (Definición 11) tenemos:

a) $\gamma(t) \in D_t \cap B_t$.

b) Para cada $t \in [0,1]$ existe $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ con $s \in [0,1]$ implica que $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ y

$$\begin{cases} [f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}, \\ [g_s]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Como $t \in T$, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f_t(z) = g_t(z) \;\; \forall\, z \in D_t \cap B_t$ que esté en la misma componente conexa que $\gamma(t)$. Por tanto, como $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ (abierto) si $|s-t| < \delta$ y γ es continua, $[f_t]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)} \;\; \forall\, \gamma(s) \in D_t \cap B_t$. Luego, de (3.2) se sigue que $[f_s]_{\gamma(s)} = [g_s]_{\gamma(s)}$ si $|s-t| < \delta$, es decir, $(t-\delta, t+\delta) \subset T$ teniéndose así que T es abierto en $[0,1]$.
Ahora, probemos que T es cerrado. Para ello, tomamos $t \in T'$ (conjunto de los puntos de acumulación de T) y veamos que $t \in T$. Notar que $t \in [0,1]$ ya que $T \subseteq [0,1]$ cerrado.
Nuevamente, tomamos $\delta > 0$ tal que $\gamma(s) \in D_t \cap B_t$ y (3.2) se cumple si $|s-t| < \delta$.
Como $t \in T'$ existe $s \in T$ tal que $|s-t| < \delta$. Luego, $G = D_t \cap B_t \cap D_s \cap B_s$ es un abierto que contiene a $\gamma(s)$ por lo que es no vacío.
Como $s \in T$, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f_s(z) = g_s(z) \;\; \forall\, z \in G$ que esté en la misma componente conexa que $\gamma(s)$ y de (3.2) se sigue que $[f_t]_{\gamma(s)} = [g_t]_{\gamma(s)}$. Nuevamente, por el

Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), tenemos que $f_t(z) = g_t(z) \quad \forall\, z \in G$ que esté en la misma componente conexa que $\gamma(s)$ la cual, por ser γ continua y G abierto conteniendo a $\gamma(s)$, también contiene a $\gamma(t)$. Así pues, $[f_t]_{\gamma(t)} = [g_t]_{\gamma(t)}$, es decir, $t \in T$ concluyéndose así que T es cerrado.
En definitiva, hemos probado que $T = [0,1]$ por lo que $1 \in T$, es decir, $[f_1]_b = [g_1]_b$ como queríamos demostrar. □

Este resultado garantiza que pueda proporcionarse la siguiente definición:

Definición 12. Sea $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino de a a b y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Diremos entonces que el germen $[f_1]_b$ es *la prolongación analítica de* $[f_0]_a$ *a lo largo de* γ.

Observación. La definición 12 no depende de la prolongación analítica $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ escogida como hemos probado en la Proposición 3.1.

Definición 13. Sea (f, G) un elemento de función. Llamaremos *función analítica completa obtenida de* (f, G) al conjunto $\mathscr{F}$ de todos los gérmenes $[g]_b$ tales que existe $a \in G$ y un camino γ de a a b tal que $[g]_b$ es la prolongación analítica de $[f]_a$ a lo largo de γ.

Ejemplo 4. Sea $(f, G) = (\operatorname{Log} z, \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$. Por lo visto en el ejemplo 3 tenemos que $[\operatorname{Log} z + 2\pi i]_1 \in \mathscr{F}$.
Además, considerando $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_1(t) = e^{\frac{\pi i t}{2}}$ $\forall t \in [0,1]$, se tiene que $\left[\operatorname{Log}_{\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]} z\right]_i \in \mathscr{F}$ y con $\gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\gamma_2(t) = e^{4\pi i t}$ $\forall t \in [0,1]$, $[\operatorname{Log} z + 4\pi i]_1 \in \mathscr{F}$.

Definición 14. Una colección de gérmenes $\mathscr{F}$ se denomina *función analítica completa* si existe un elemento de función (f, G) tal que $\mathscr{F}$ es la función analítica completa obtenida de (f, G).

Observación. Notar que la función analítica completa $\mathscr{F}$ es una colección de gérmenes en lugar de una función en sí misma. El Teorema de monodromía, que demostraremos en la siguiente sección, nos proporcionará una condición bajo la cual $\mathscr{F}$ permitirá definir una función en sí misma (Corolario 3.7).

3.2. Teorema de monodromía

En esta sección veremos el *Teorema de monodromía*, el cual da un criterio con el que se puede saber cuándo una prolongación a lo largo de dos caminos diferentes uniendo los mismos puntos da como resultado el mismo elemento de función.

Sean $a, b \in \mathbb{C}$; γ y σ dos caminos de a a b. Sean $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ y $\{(g_t, B_t) : t \in [0,1]\}$ prolongaciones analíticas a lo largo de γ y σ, respectivamente, tales que $[f_0]_a = [g_0]_a$, ¿podemos afirmar que $[f_1]_b = [g_1]_b$?. En el caso en el que γ y σ sean el mismo camino sabemos por la Proposición 3.1 que sí se tiene la igualdad. Sin embargo, si los caminos son distintos la respuesta puede ser negativa.

Ejemplo 5. Partimos del ejemplo 3 considerando también $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\sigma(t) = e^{4\pi i t}$ $\forall\, t \in [0,1]$. Tenemos que $\gamma(0) = 1 = \sigma(0)$, $\gamma(1) = 1 = \sigma(1)$, $[f_0]_1 = [g_0]_1 = [\operatorname{Log} z]_1$, $[f_1]_1 = [\operatorname{Log} z + 2\pi i]_1$ y $[g_1]_1 = [\operatorname{Log} z + 4\pi i]_1$. Luego, $[f_1]_1 \neq [g_1]_1$.

A continuación introducimos un lema que nos permitirá tomar las regiones de los elementos de función como discos, simplificándose así demostraciones de lemas posteriores.

Lema 3.2. *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Entonces, para todo $t \in [0,1]$ existe $r(t)$ tal que $A_t = D(\gamma(t), r(t)) \subseteq D_t$, $\{(f_{t|A_t}, A_t) : t \in [0,1]\}$ es una prolongación analítica a lo largo de γ y, por tanto, $R(t)$, el radio de convergencia de la serie de potencias de f_t en el punto $\gamma(t)$, coincide con el radio de convergencia de la serie de potencias de $f_{t|A_t}$ en el punto $\gamma(t)$.*

Demostración. La parte correspondiente a para todo $t \in [0,1]$ existe $r(t)$ tal que $A_t = D(\gamma(t), r(t)) \subseteq D_t$ se tiene por ser D_t región conteniendo a $\gamma(t)$ (Definición 11).
Para probar que $\{(f_{t|A_t}, A_t) : t \in [0,1]\}$ es una prolongación analítica a lo largo de γ tenemos que ver que cumple la Definición 11.

a) $\gamma(t) \in A_t$ por cómo está definido A_t.

b) Dado $t \in [0,1]$, consideramos $\delta_1 > 0$ el dado por la Definición 11 aplicada a la prolongación $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ y $\delta_2 = r(t) > 0$. Tomamos $\delta = \text{mín}(\delta_1, \delta_2)$. Si $|s-t| < \delta \leq \delta_2$, entonces $\gamma(s) \in A_t$ por ser A_t abierto conteniendo a $\gamma(t)$ y γ continua, y como $|s-t| < \delta \leq \delta_1$ tenemos que $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.

Finalmente, como $f_{t|A_t}(z) = f_t(z) \;\; \forall\, z \in A_t$ el radio de convergencia de la serie de potencias de f_t en el punto $\gamma(t)$ coincide con el radio de convergencia de la serie de potencias de $f_{t|A_t}$ en el punto $\gamma(t)$. □

El primer paso para probar el Teorema de monodromía es conocer el comportamiento del radio de convergencia de una prolongación analítica a lo largo de un camino.

Lema 3.3. *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Para cada $t \in [0,1]$ denotamos por $R(t)$ el radio de convergencia de la serie de potencias de f_t en el punto $\gamma(t)$. Entonces se verifica una de las siguientes condiciones:*

i) $R(t) = \infty \;\; \forall\, t \in [0,1]$.

ii) $R : [0,1] \to (0,\infty)$ *es una función continua.*

Demostración. Por el Lema 3.2 existe $\{(F_t, A_t) : t \in [0,1]\}$ con A_t discos, prolongación analítica a lo largo de γ tal que $[F_t]_a = [f_t]_a$ y $[F_t]_b = [f_t]_b$. Por tanto, podemos suponer que D_t son discos. Además, podemos tomar $D_t = D(\gamma(t), R(t))$.
En primer lugar, supongamos que existe $t_0 \in [0,1]$ tal que $R(t_0) = \infty$ y veamos que $R(t) = \infty$ para todo $t \in [0,1]$. Como $R(t_0) = \infty$, f_{t_0} es una función entera.
Consideramos $U = \{D(\gamma(t), \delta_t) : t \in [0,1]\}$ recubrimiento abierto de sopγ (compacto) siendo δ_t el dado por la Definición 11 y tomamos $U_0 = \bigcup_{i=1}^{n} D(\gamma(t_i), \delta_{t_i})$ subrecubrimiento finito de sopγ. Notar que por la Definición 11, $\gamma(t_0) \in D_{t_0} \cap D(\gamma(t_{i_0}), \delta_{t_{i_0}})$ para algún i_0. Luego, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5) y dado que por la Definición 11 f_{t_0} y $f_{t_{i_0}}$ coinciden en un entorno de $\gamma(t_0)$, $f_{t_0}(z) = f_{t_{i_0}}(z)$ $\forall\, z \in D_{t_0} \cap D(\gamma(t_{i_0}), \delta_{t_{i_0}})$ teniéndose así que $R(t_{i_0}) = \infty$. Aplicando sucesivamente este razonamiento, obtenemos que $R(t_i) = \infty \;\; \forall\, i = 1 \ldots n$. Si $t \neq t_i \;\; \forall\, i = 1 \ldots n$, como $\gamma(t) \in D_t \cap D(\gamma(t_{i_1}), \delta_{t_{i_1}})$ para algún i_1, f_t coincide con una función entera en $D_t \cap D(\gamma(t_{i_1}), \delta_{t_{i_1}})$, luego $R(t) = \infty$. Así pues, hemos probado que $R(t) = \infty \;\; \forall\, t \in [0,1]$.
Ahora, supongamos que $R(t) < \infty \;\; \forall\, t \in [0,1]$ y veamos que $R : [0,1] \to (0,\infty)$ es una función continua.
Sea $t \in [0,1]$ y $\tau = \gamma(t)$. Sabemos que f_t puede representarse como una serie de potencias en el punto τ cuyo radio de convergencia es $R(t)$, es decir, $f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_n (z-\tau)^n \;\; \forall\, z \in D_t$.
Por la Definición 11 existe $\delta_1 > 0$ tal que $|s-t| < \delta_1$ con $s \in [0,1]$ implica que $\gamma(s) \in D_t$ y $[f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}$.
Sea $s \in [0,1]$ tal que $|s-t| < \delta_1$ y $\sigma = \gamma(s)$. Tenemos que $f_t \in \mathscr{H}(D_t)$ y coincide con f_s en un entorno de σ. Luego, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5) y la Definición 11 ($\sigma \in D_s$), f_t y f_s coinciden en $D_s \cap D_t$. Así pues, f_s puede extenderse a una función $\widetilde{f_s}$ analítica en $D_s \cup D_t$.
Sabemos que $\widetilde{f_s}$ puede representarse como una serie de potencias en el punto σ cuyo radio de convergencia es $R(s)$, es decir, $\widetilde{f_s}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n (z-\sigma)^n \;\; \forall\, z \in D_s$. Entonces, como $\widetilde{f_s} \in \mathscr{H}(D_t)$, por el Teorema de analiticidad de funciones holomorfas (Teorema 1.2), $R(s)$ debe ser al menos tan grande como la distancia de σ a $\partial D_t = \{z \in \mathbb{C} : |z-\tau| = R(t)\}$, esto es,

$$R(s) \geq d(\sigma, \{z \in \mathbb{C} : |z-\tau| = R(t)\}) = R(t) - |\tau - \sigma|$$

de donde se tiene que $R(t) - R(s) \leq |\gamma(t) - \gamma(s)|$.
Con un razonamiento análogo (cambiando los papeles de s y t una vez fijados) obtenemos que $R(s) - R(t) \leq |\gamma(t) - \gamma(s)|$. Luego, $|R(t) - R(s)| \leq |\gamma(t) - \gamma(s)|$ si $|s-t| < \delta_1$.
Finalmente, la continuidad de R se sigue de la continuidad de γ. $\square$

El siguiente lema nos dice que si dos caminos van de a a b y están suficientemente cerca, entonces la prolongación analítica que se obtiene a lo largo de ellos es la misma en caso de existir.

Lema 3.4. *Sea $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ un camino de a a b y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ una prolongación analítica a lo largo de γ. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ es un camino de a a b cumpliendo que $|\gamma(t) - \sigma(t)| < \varepsilon \ \ \forall t \in [0,1]$ y $\{(g_t, B_t) : t \in [0,1]\}$ es una prolongación analítica a lo largo de σ tal que $[f_0]_a = [g_0]_a$, entonces $[f_1]_b = [g_1]_b$.*

Demostración. Por el Lema 3.2 existen $\{(F_t, A_t) : t \in [0,1]\}$ y $\{(G_t, C_t) : t \in [0,1]\}$ con A_t, C_t discos, prolongaciones analíticas a lo largo de γ y σ respectivamente tales que $[F_t]_a = [f_t]_a$, $[F_t]_b = [f_t]_b$, $[G_t]_a = [g_t]_a$ y $[G_t]_b = [g_t]_b$. Así pues, podemos suponer que D_t y B_t son discos. Además, podemos tomar $D_t = D(\gamma(t), R(t))$ y $B_t = D(\sigma(t), R_1(t))$ siendo, para cada $t \in [0,1]$, $R(t)$ el radio de convergencia de la serie de potencias de f_t en $\gamma(t)$ y $R_1(t)$ el radio de convergencia de la serie de potencias de g_t en $\sigma(t)$.
Si $R(t) = \infty \ \ \forall\, t \in [0,1]$, entonces f_t es función entera $\forall\, t \in [0,1]$, y por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5) junto con la Definición 11 se sigue que $f_t = f_0 \ \ \forall\, t \in [0,1]$.
Sean σ y $\{(g_t, B_t) : t \in [0,1]\}$ las del enunciado. Como $[f_0]_a = [g_0]_a$, g_0 es una función entera teniéndose así, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), que $g_0 = f_0$. Con esto tenemos que $R_1(0) = \infty$ para la función g_0, luego, por el Lema 3.3, $R_1(t) = \infty$ para todo $t \in [0,1]$. Por tanto, razonando de la misma manera que para las funciones f_t, $g_t = g_0 \ \ \forall\, t \in [0,1]$. Así pues, las dos prolongaciones analíticas coinciden, en particular, $[f_1]_b = [g_1]_b$. Notar que esto es cierto para cualquier $\varepsilon > 0$ tal que $|\gamma(t) - \sigma(t)| < \varepsilon \ \forall\, t \in [0,1]$.
Supongamos ahora que $R(t) < \infty \ \ \forall\, t \in [0,1]$. Por el Lema 3.3 R es una función continua en $[0,1]$ y $R(t) > 0 \ \ \forall\, t \in [0,1]$, por lo que alcanza un valor mínimo positivo. Tomamos pues

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{2} \min_{t \in [0,1]} R(t). \tag{3.3}$$

Sean σ y $\{(g_t, B_t) : t \in [0,1]\}$ las del enunciado. Dado que $|\sigma(t) - \gamma(t)| < \varepsilon < R(t) \ \ \forall\, t \in [0,1]$ junto con la Definición 11, tenemos que $\sigma(t) \in B_t \cap D_t \ \ \forall\, t \in [0,1]$.
Definimos $T = \{t \in [0,1] : f_t(z) = g_t(z) \forall z \in B_t \cap D_t\}$. Tenemos que probar que $1 \in T$. Para ello, veamos que T es abierto y cerrado en $[0,1]$, con lo cual siendo $[0,1]$ conexo y dado que $T \neq \emptyset$ ya que $0 \in T$ por hipótesis, tendremos que $T = [0,1]$.
Comenzamos probando que T es abierto.
Sea $t \in T$. Por la Definición 11 y por continuidad de γ y σ, existe $\delta > 0$ tal que $|s-t| < \delta$ con $s \in [0,1]$ implica que

$$\begin{cases} |\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon,\ [f_s]_{\gamma(s)} = [f_t]_{\gamma(s)}, \\ |\sigma(s) - \sigma(t)| < \varepsilon,\ [g_s]_{\sigma(s)} = [g_t]_{\sigma(s)}, \\ \sigma(s) \in B_t,\ \gamma(s) \in D_t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Sea $G = B_s \cap B_t \cap D_s \cap D_t$ y $s \in [0,1]$ con $|s-t| < \delta$. Ya hemos visto que $\sigma(s) \in B_s \cap D_s$. Por (3.4) $\sigma(s) \in B_t$. También tenemos que, sumando y restando $\gamma(s)$, por la desigualdad triangular junto con (3.3), (3.4) e hipótesis:

$$|\sigma(s) - \gamma(t)| \leq |\sigma(s) - \gamma(s)| + |\gamma(s) - \gamma(t)| < 2\varepsilon < R(t)$$

por lo que $\sigma(s) \in D_t$. Luego, $\sigma(s) \in G$ siendo así G un abierto no vacío.
Como $t \in T$ y $G \subset B_t \cap D_t$, $f_t(z) = g_t(z) \ \ \forall\, z \in G$. Por (3.4) junto con el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5) tenemos que $g_s(z) = g_t(z) \ \ \forall\, z \in G$. Además, por hipótesis y por ser G abierto conteniendo a $\sigma(s)$, $f_s(z) = f_t(z) \ \ \forall\, z \in G$, obteniéndose que $f_s(z) = g_s(z) \ \ \forall\, z \in G$ y como G tiene punto de acumulación en $B_s \cap D_s$, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f_s(z) = g_s(z)$

$\forall\, z \in B_s \cap D_s$. Así pues, $s \in T$ con $|s-t| < \delta$, es decir, $(t-\delta, t+\delta) \subset T$ teniéndose así que T es abierto en $[0,1]$.
Ahora, probemos que T es cerrado. Para ello, tomamos $t \in T'$ y veamos que $t \in T$. Notar que $t \in [0,1]$ ya que $T \subseteq [0,1]$ cerrado.
Nuevamente tomamos $\delta > 0$ el de antes. Como $t \in T'$ existe $s \in T$ tal que $|s-t| < \delta$.
Por lo visto anteriormente, G es un abierto no vacío que contiene a $\sigma(s)$, $g_s(z) = g_t(z) \ \ \forall\, z \in G$ y $f_s(z) = f_t(z) \ \forall\, z \in G$.
Como $s \in T$ y $G \subset B_s \cap D_s$, $f_s(z) = g_s(z) \ \forall\, z \in G$. Luego, $f_t(z) = g_t(z) \ \forall\, z \in G$ y como G tiene punto de acumulación en $B_t \cap D_t$, por el Principio de prolongación analítica (Teorema 1.5), $f_t(z) = g_t(z)$ para todo $z \in B_t \cap D_t$. Así pues, $t \in T$ concluyéndose que T es cerrado.
En definitiva, hemos probado que $T = [0,1]$ por lo que $1 \in T$, es decir, $[f_1]_b = [g_1]_b$ como queríamos demostrar. □

Definición 15. Sea (f,D) un elemento de función y G una región que contiene a D. Entonces diremos que (f,D) *admite prolongación analítica sin restricción en* G si para cualquier camino γ en G con origen en D, existe una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de γ.

Dado que no vamos a probar ningún teorema de existencia de prolongación analítica, si (f,D) es un elemento de función y G es una región que contiene a D, con el teorema de monodromía supondremos que (f,D) admite prolongación analítica sin restricción en G y estableceremos un criterio de unicidad.

Definición 16. Sean $\gamma_0, \gamma_1 \colon [0,1] \to G$ dos caminos contenidos en una región G tales que $\gamma_0(0) = \gamma_1(0) = a$ y $\gamma_0(1) = \gamma_1(1) = b$, entonces diremos que γ_0 y γ_1 son *homótopos de extremos fijos* si existe una función continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(s,0) = \gamma_0(s), \quad \Gamma(s,1) = \gamma_1(s), \\ \Gamma(0,t) = a, \quad \Gamma(1,t) = b, \end{cases}$$

con $s,t \in [0,1]$.

Teorema 3.5 (Teorema de monodromía)**.** *Sea (f,D) un elemento de función y G una región que contiene a D tal que (f,D) admite prolongación analítica sin restricción en G. Sean $a \in D$, $b \in G$, γ_0 y γ_1 caminos de a a b contenidos en G. Sean $\{(f_t,D_t) : t \in [0,1]\}$ y $\{(g_t,D_t) : t \in [0,1]\}$ dos prolongaciones analíticas de (f,D) a lo largo de γ_0 y γ_1 respectivamente. Si γ_0 y γ_1 son homótopos de extremos fijos en G entonces $[f_1]_b = [g_1]_b$.*

Demostración. Por ser γ_0 y γ_1 homótopos de extremos fijos en G existe una función continua $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ tal que

$$\begin{cases} \Gamma(t,0) = \gamma_0(t), \quad \Gamma(t,1) = \gamma_1(t), \\ \Gamma(0,u) = a, \quad \Gamma(1,u) = b, \end{cases}$$

con $t,u \in [0,1]$. Fijamos $u \in [0,1]$ y consideramos el camino $\gamma_u : [0,1] \to G$ dado por $\gamma_u(t) = \Gamma(t,u)$, para todo $t \in [0,1]$, de a a b.
Por hipótesis, dado que (f,D) admite prolongación analítica sin restricción en G y γ_u es un camino en G con origen en D, existe para cada $u \in [0,1]$ una prolongación analítica $\{(h_{t,u}, D_{t,u}) : t \in [0,1]\}$ de (f,D) a lo largo de γ_u. Por la Proposición 3.1, dado que para $u = 0$ tenemos dos prolongaciones analíticas a lo largo de γ_0 del mismo elemento de función (f,D), $[f_1]_b = [h_{1,0}]_b$. Análogamente, tenemos que $[g_1]_b = [h_{1,1}]_b$. Así pues, vamos a probar que $[h_{1,0}]_b = [h_{1,1}]_b$.
Definimos $U = \{u \in [0,1] : [h_{1,u}]_b = [h_{1,0}]_b\}$. Tenemos que probar que $1 \in U$. Para ello, veamos que U es abierto y cerrado en $[0,1]$, con lo cual siendo $[0,1]$ conexo y dado que $U \neq \emptyset$ ya que $0 \in U$, tendremos que $U = [0,1]$.
Para ver que U es abierto y cerrado, usaremos el siguiente resultado que probamos a continuación:

Resultado 3.6. Sea $u \in [0,1]$, existe $\delta > 0$ tal que si $|u-v| < \delta$, con $v \in [0,1]$, entonces $[h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b$.

Demostración. Por el Lema 3.4, partiendo del camino γ_u y la prolongación $\{(h_{t,u}, D_{t,u}) : t \in [0,1]\}$, existe $\varepsilon > 0$ tal que si σ es un camino de a a b cumpliendo que $|\gamma_u(t) - \sigma(t)| < \varepsilon \ \ \forall\, t \in [0,1]$ y $\{(k_t, E_t) : t \in [0,1]\}$ es una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de σ , entonces

$$[h_{1,u}]_b = [k_1]_b. \tag{3.5}$$

Como Γ es continua en el compacto $[0,1] \times [0,1]$, es uniformemente continua. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|u-v| < \delta$, con $v \in [0,1]$, entonces $|\gamma_u(t) - \gamma_v(t)| = |\Gamma(t,u) - \Gamma(t,v)| < \varepsilon\ \forall\, t \in [0,1]$. Por tanto, $[h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b$ se tiene por (3.5) considerando el camino γ_v y la prolongación analítica $\{(h_{t,v}, D_{t,v}) : t \in [0,1]\}$. □

Veamos que U es abierto. Sea $u \in U$ y $\delta > 0$ el dado por el Resultado 3.6. Si $v \in [0,1]$ y $|u-v| < \delta$ entonces $[h_{1,v}]_b = [h_{1,u}]_b = [h_{1,0}]_b$, por lo que $v \in U$. Luego, $(u-\delta, u+\delta) \subset U$ teniéndose así que U es abierto en $[0,1]$.
Ahora, probemos que U es cerrado. Para ello, tomamos $u \in U'$ y veamos que $u \in U$. Notar que $u \in [0,1]$ ya que $U \subseteq [0,1]$ cerrado.
Nuevamente tomamos δ el de antes. Como $u \in U'$ existe $v \in U$ tal que $|u-v| < \delta$. Luego, $[h_{1,u}]_b = [h_{1,v}]_b = [h_{1,0}]_b$ de donde $u \in U$ concluyéndose que U es cerrado.
En definitiva, hemos probado que $U = [0,1]$ por lo que $1 \in U$, es decir, $[g_1]_b = [h_{1,1}]_b = [h_{1,0}]_b = [f_1]_b$ como queríamos demostrar. □

Como consecuencia del teorema de monodromía tenemos el siguiente corolario:

Corolario 3.7. *Sea G una región simplemente conexa y (f,D) un elemento de función que admite prolongación analítica sin restricción en G. Entonces existe una función analítica $F : G \to \mathbb{C}$ tal que $F(z) = f(z)\ \forall\, z \in D$.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que $G \neq \mathbb{C}$.
Sea $a \in D$ y $z \in G$. Sea γ un camino en G de a a z y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ una prolongación analítica de (f,D) a lo largo de γ, que existe por hipótesis.
Definimos $F_\gamma(z) = f_1(z)$ y veamos que está bien definida, es decir, que no depende del camino γ elegido. Sea σ otro camino en G de a a z. Como G es simplemente conexo y distinto de $\mathbb{C}$, por el Teorema de representación conforme de Riemann (Teorema 1.8), existe $\phi : G \to \mathbb{D}$ homeomorfismo.
Consideramos la aplicación $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{D}$ dada por $\Gamma(t,u) = u[\phi(\sigma(t))] + (1-u)[\phi(\gamma(t))]$.
Notar que $\phi \circ \sigma$ y $\phi \circ \gamma$ son homótopos de extremos fijos en $\mathbb{D}$ ya que Γ es una función continua tal que

$$\begin{cases} \Gamma(t,0) = \phi(\gamma(t)), \quad \Gamma(t,1) = \phi(\sigma(t)), \\ \Gamma(0,u) = \phi(a), \quad \Gamma(1,u) = \phi(z). \end{cases}$$

Luego, considerando la función continua $\phi^{-1} \circ \Gamma : [0,1] \times [0,1] \to G$ tenemos que γ y σ son homótopos de extremos fijos en G. Así pues, por el teorema de monodromía (Teorema 3.5), $F_\gamma(z) = F_\sigma(z)$ por lo que $F(z) = F_\gamma(z)$ está bien definida en G.
Veamos ahora que F es analítica en G.
Sea $z \in G$, γ y $\{(f_t, D_t) : t \in [0,1]\}$ como antes. Consideramos $D(z,r) \subseteq D_1$, con $r > 0$, $w \in D(z,r)$ y tomamos $(f_1, D(z,r))$ como elemento de función en la prolongación analítica de (f,D) a lo largo de $\gamma \cup [z,w]$ correspondiente al segmento $[z,w]$. Así pues, tal y como hemos definido F, $F(w) = f_1(w)$ para todo $w \in D(z,r)$. Por tanto, $F \in \mathscr{H}(D(z,r))$ y como esto es cierto para todo $z \in G$ se sigue que $F \in \mathscr{H}(G)$.
Finalmente, considerando $w_1 \in D$ y tomando (f,D) como elemento de función en la prolongación analítica de (f,D) a lo largo de $[a, w_1]$, tenemos que $F(w_1) = f(w_1)\ \forall\, w_1 \in D$.
En el caso en el que $G = \mathbb{C}$, dado que $\mathbb{C}$ es convexo, basta considerar la aplicación $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ dada por $\Gamma(t,u) = u(\sigma(t)) + (1-u)(\gamma(t))$ para obtener la misma conclusión.

□

Bibliografía

[1] J.B. CONWAY, *Functions of One Complex Variable (Second Edition)*. Springer, New York, 1978.

[2] W. RUDIN, *Real and Complex Analysis (Third Edition)*. International Edition 1987.

[3] B. CUARTERO Y F.J. RUIZ, *Teoría de funciones de variable compleja*, Colección Textos Docentes.

[4] A. GARCÍA NOGALES, `http://matematicas.unex.es/~nogales/manuscritosmat/VC29.pdf`.

[5] M.B. PORTER, *On the Polynomial Convergence of a Power Series*, Ann. of Math., 8, 189-192 (1906-07).