

Una introducción a los modelos factoriales en la teoría moderna de carteras



Ester Longas Clemente
Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: José Tomás Alcalá Nalvaiz
27 de Junio de 2022

Prólogo

Harry Markowitz (1927) desarrolló el modelo que lleva su nombre durante los años 50, con el objetivo de encontrar una cartera de inversión óptima en términos de rendimiento y riesgo. Este modelo es un punto de partida de la teoría moderna de carteras, además su planteamiento y aportaciones posteriores son un gran avance de la teoría económica en el Siglo XX.

Su hipótesis se basa en diseñar una cartera óptima para minimizar el riesgo mediante la diversificación, o dicho de otro modo, diseñar una cartera óptima para maximizar las rentabilidades de los activos asumiendo un determinado riesgo. Con la intención de comparar diferentes carteras y valores. Las rentabilidades son medidas por la esperanza matemática y el riesgo es medido por la varianza.

También estudiaremos la geometría y el comportamiento de una cartera en el plano (σ, μ) , viendo así la relación que el modelo establece entre la media y la varianza.

Además, definiremos una cartera que coincide con la cartera tangente en un mercado en equilibrio para poder expresar el riesgo de un activo o de una cartera en dos partes bien diferenciadas. Esto será clave para poder definir uno de los modelos que intenta mejorar el modelo de Markowitz. A pesar de su importancia, veremos que su aplicación en la práctica se ha visto restringida por algunas limitaciones, lo que nos lleva a definir otros modelos con la ayuda del análisis factorial.

El análisis factorial es una técnica estadística de reducción de datos usada para explicar las correlaciones entre las variables observadas en términos de un número menor de variables latentes que son los factores. Estas variables latentes ayudan a reducir la dimensión de los datos. Los modelos factoriales son modelos financieros que incorporan factores (estadísticos, macroeconómicos y fundamentales) para determinar el equilibrio del mercado y calcular la tasa de rendimiento requerida. Estos modelos asocian el rendimiento de un valor a factores de riesgos únicos o múltiples en un modelo lineal y pueden usarse como alternativas a la teoría moderna de cartera. Esta representación del rendimiento de los activos en función de un número reducido de factores, asocia a cada activo un vector de betas.

De esta manera se definen dos posibles modelos que mejoran el de Markowitz. Serán el modelo CAPM que es un modelo unifactorial de valoración de activos financieros desarrollado por William Sharpe en 1964 y que permite expresar el rendimiento esperado de un activo en función del riesgo sistemático y del riesgo específico. Además este modelo sigue siendo hoy en día un modelo muy utilizado debido a su sencillez de cálculo, pero se conoce alguna limitación lo que nos ha hecho buscar un modelo que lo mejore, que es el modelo de tres factores de Fama - French.

El modelo de tres factores de Fama - French es un modelo que sigue la misma línea y sencillez que el modelo CAPM, añadiendo dos nuevos factores que hay que analizar cuando se calculan los rendimientos esperados de cualquier activo, que son además del coeficiente β usado en el CAPM, los factores SMB que es la sensibilidad de un activo al tamaño del mismo y HML que es el ratio del valor de mercado.

Por último hemos realizado un estudio práctico con el objetivo de validar el grado de ajuste de los dos modelos factoriales principales, el CAPM y el modelo de Tres factores de Fama - French a acciones de la bolsa española (IBEX 35) con la ayuda del lenguaje de programación R donde hemos escrito el código para obtener los modelos.

Summary

Harry Markowitz (1927) developed the model named after him over the decade of the 50s, with the aim of finding an optimal investment portfolio in terms of risk and returns. This model is a starting point for the modern investment portfolio theory; moreover, his approach and related works are considered a significant advance of the economic theory in the 20th century.

His hypothesis is based on designing an optimal portfolio to minimize risk by means of the diversification, i.e., designing an optimal portfolio to maximize asset profitability while assuming a specific risk. In the interest of comparing different portfolios and stocks, profitability is measured by mathematical expectation and risk by variance. We will also study the geometry and behaviour of a portfolio in the plane (σ, μ) , by so understanding the relationship established between mean and variance.

In addition, we will define a portfolio that coincides with the tangent portfolio in a equilibrium market in order to express the risk of an asset or a portfolio in two clearly defined parts. This will be key to outline one of the models trying to improve Markowitz's model. Despite its relevance, we will realize that its practical application has been restricted by some limitations, which leads us to define other models by mean of factorial analysis.

Factorial analysis is a statistics technique of data reduction used to explain the correlations between observable variables in terms of a lower number of latent variables, which are the factors. These latent variables help reduce the dimension of data. Factorial models are financial models that incorporate factors (statistical, macroeconomic and fundamental) to determine market's equilibrium and calculate the required rate of return. These models link the yield of a value to singular or multiple risk factors in a lineal model, and can be used as alternatives to modern portfolio theory. This representation of the yield of assets according to a reduced number of factors links each asset with an array of betas coefficients.

This way, two possible models are defined that improve that of Markowitz. Namely, CAMP, a uni-factorial model of asset assessment developed by William Sharpe in 1964 which allows to express the expected yield of an asset based on systematic and specific risk. Furthermore, Shape's model continues to be highly used nowadays due to its simplicity, though it is known that it has some limitations and that it has triggered the search for an improved model, which is the three-factor model devised by Fama and French.

The aforementioned model follows the same line and simplicity than the CAPM model, adding two new factors to be analysed whenever the expected yield of an asset is calculated, which are—as well as those of coefficient used in CAPM—the SMB factor, i.e., the asset's sensibility to its size, and HML factor, which is value's market ratio. To conclude, we have carried out a practical study with the aim of validating the degree of adjustment of both main factorial models (CAPM together with Fama and French's three-factor model) to Spanish stock market (IBEX 35) with the aid of R programming language where we have written the code to obtain the models.

Glosario

La mayoría de estas definiciones las hemos tomado de [14] pero hemos querido presentarlas de forma agrupada para facilitar el acceso al lectores de estos términos.

Glosario de Términos Económicos

- *Acciones*: cada una de las partes en las que se divide el capital de una sociedad.
- *Activo*: cualquier posesión que tiene valor en un intercambio.
- *Activo libre de riesgo*: activo donde el rendimiento se conoce con anterioridad y no presenta riesgos, es decir, no presenta volatilidad (o presenta menos que el resto de activos) y, por tanto, su valor no cambiará sustancialmente con el tiempo. Es la inversión más segura entre las ofrecidas en el mercado. Lo denotamos como F y al rendimiento de este activo lo denotamos f .
- *Cartera de valores*: es un conjunto de activos financieros que posee una persona. Además la proporción de los activos A_k con $k = 1, \dots, n$ en una cartera equivale a

$$\frac{\text{valor invertido en el activo } A_k}{\text{total invertido en la cartera}}$$

- *Cartera eficiente*: cartera que tiene el mayor rendimiento esperado entre todas las carteras de valores con la misma varianza, es decir, una cartera eficiente maximiza el rendimiento esperado para un riesgo determinado.
- *Cartera de mercado*: cartera que contiene todos los activos de un mercado determinado ponderados por el peso proporcional a su valor de mercado. Esta depende del valor del rendimiento libre de riesgo en el mercado, ya que los valores de mercado de los activos de riesgo dependen de él.
- *Cartera envolvente*: cartera que presenta el menor riesgo de entre todas las carteras con un mismo rendimiento esperado.
- *Cartera tangente*: única cartera que pertenece a las envolventes $Env(A_1, \dots, A_n)$ y $Env(A_1, \dots, A_n, F)$.
- *Conjunto factible*: conjunto de todos los pares (σ, μ) de los activos A_1, \dots, A_n donde σ es el riesgo y μ es el rendimiento de los activos y lo representamos en el plano (σ, μ) .
- *Diversificación de carteras*: técnica de inversión que consiste en componer la cartera con distintos tipos de activos con el objetivo principal de reducir los riesgos naturales de la inversión.
- *Envolvente*: conjunto de todas las carteras envolventes de los activos A_1, \dots, A_n , se denota como $Env(A_1, \dots, A_n)$.
- *Frontera eficiente*: conjunto de todas las carteras eficientes de los activos A_1, \dots, A_n y lo denotamos $EF(A_1, \dots, A_n)$.
- *Inversión*: creación de más dinero mediante el uso de capital.

- *Línea del mercado de capitales*: es una línea recta en el plano (σ, μ) que representa todos los niveles óptimos de rendimiento-riesgo para el conjunto de carteras de inversión.
- *Prima de riesgo*: recompensa que se le concede al inversor por invertir en un activo con riesgo en vez de invertir en uno con menos riesgo. Se utiliza habitualmente para comparar la rentabilidad o interés de un activo con riesgo con la del activo sin riesgo, es decir es la diferencia $\mu_x - f$, siendo x la cartera y f el rendimiento de un activo libre de riesgo.
- *Rendimiento*: rentabilidad obtenida en una inversión, normalmente medida en porcentaje sobre el capital invertido.
- *Riesgo*: incertidumbre sobre la evolución de un activo. Es la posibilidad de que una inversión ofrezca un rendimiento distinto del esperado, tanto si es a favor o si es en contra del inversor, aunque lógicamente suele importar el riesgo de registrar pérdidas.
- *Riesgo no sistemático* (o riesgo específico): riesgo que afecta a un número pequeño de activos y que podemos reducir mediante la diversificación.
- *Riesgo sistemático* (o riesgo de mercado): riesgo que afecta a todos los activos por igual e independientemente de su categoría, ya que son factores externos y por lo tanto aunque diversifiquemos nuestra cartera no se puede reducir.
- *Título financiero*: documento que genera un derecho privado patrimonial y, por tanto, supone la propiedad de un activo financiero, esta propiedad puede ser una acción de una sociedad, un crédito o una obligación con una serie de características y derechos estandarizados.
- *Venta corta* (o posición corta): venta de un activo con anterioridad (aunque no lo tenga), con el fin de recomprarlo más barato en un futuro.
- *Venta larga* (o posición larga): compra de un activo esperando que aumente su valor en el futuro.
- *Volatilidad*: término que mide la variabilidad de las trayectorias o fluctuaciones de cualquier activo financiero en el mercado, de los precios, de los rendimientos de un activo financiero, de los tipos de interés.

Glosario de términos estadísticos

- *Proceso estocástico estacionario*: proceso cuya distribución de probabilidad conjunta para n instantes temporales no varía a lo largo del tiempo. Es un proceso cuya función de media y varianza no cambia con el tiempo.
- *Variables latentes* (o variables no observadas): variables que no se observan directamente sino que son deducidas (a través de un modelo matemático) a partir de otras variables que se observan.
- *Variables observadas*: variables que podemos medir de manera directa.
- *Varianza común* (o comunalidad): parte de la variación total de la variable que está compartida con las otras variables o factores subyacentes y se puede cuantificar.
- *Varianza específica* (o especificidad): parte de la variación total de la variable que es propia de esa variable, y no es recogida por la varianza común.

Índice general

Prólogo	III
Summary	V
Glosario	VII
1. Teoría moderna de carteras	1
1.1. Reseña histórica	1
1.2. Relación Media-Varianza. El plano (σ, μ) y su geometría	3
1.3. Línea del mercado de capitales (CML)	7
1.4. Crítica al modelo de Markowitz	8
2. Análisis Factorial	9
2.1. El modelo factorial	9
2.1.1. Unicidad del modelo factorial	10
2.2. Modelo CAPM como modelo unifactorial	11
2.2.1. Diversificación del riesgo en el modelo CAPM	12
2.2.2. Ventajas del modelo	13
2.2.3. Limitaciones del modelo	13
2.3. Modelo de tres factores de Fama y French	13
3. Aplicaciones al IBEX 35	15
3.1. Objetivos	15
3.2. Metodología	15
3.2.1. Fuente de datos	15
3.2.2. Software utilizado	15
3.2.3. Periodo temporal	15
3.2.4. Proceso del modelo CAPM y del modelo de tres factores de Fama - French	16
3.3. Resultados	16
Bibliografía	23
Anexo	25
A. Demostraciones de los teoremas del capítulo 1	27

Capítulo 1

Teoría moderna de carteras

En la mayor parte de este capítulo hemos usado como referencia [4]. Las demostraciones de los teoremas las podemos encontrar en el Anexo A.

1.1. Reseña histórica

La teoría moderna de carteras o el modelo de Markowitz fue desarrollado por Harry Markowitz durante los años 50, Markowitz es un economista estadounidense especializado en el análisis de inversiones. Su objetivo era encontrar la cartera de **inversión** óptima para cada inversor en términos de **rendimiento** y **riesgo**. Quería determinar un criterio para comparar los diferentes valores y carteras como un intercambio entre el rendimiento, medido por el rendimiento esperado, y el riesgo, medido por la varianza del rendimiento. La teoría se basa en la hipótesis de Markowitz donde los inversores diseñan una cartera óptima para maximizar los rendimientos asumiendo una cantidad determinada de riesgo o lo que es lo mismo, minimizar el riesgo mediante la **diversificación**.

En [5] se expone la importancia de tener en cuenta tanto el rendimiento como el riesgo y el efecto reductor que tenía la diversificación sobre el riesgo y en [6] se recoge toda su teoría sobre los modelos de inversión en carteras de **acciones**. En 1990, Markowitz recibió el Premio Nobel en Economía por este trabajo junto con Merton Miller y William Sharpe.

Vamos a representar una cartera de **activos** A_1, \dots, A_n como el vector $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)^t$ siendo x_k los pesos de los activos A_k , es decir, la proporción de los activos A_k en la cartera y \mathbf{x} representa la cartera por unidad de tiempo. El rendimiento r de una inversión es una variable aleatoria. De manera que, el rendimiento esperado de una inversión es $\mu = E(r)$ y la varianza, $Var(r) = \sigma_r^2$ y la desviación típica σ_r son medidas del riesgo de inversión.

El modelo de Markowitz toma las siguientes restricciones.

- Los activos A_1, \dots, A_n de la cartera \mathbf{x} son conocidos.
- El rendimiento de cada uno de los activos es una variable aleatoria conocida que sigue una distribución normal.
- El modelo es uniperiódico, es decir, todas las inversiones tienen el mismo periodo de tiempo.
- El presupuesto de la cartera debe invertirse completamente, es decir, $x_1 + \dots + x_n = 1$ siendo x_k el peso del activo A_k .
- No se admite la **venta corta** o posición corta, solo la **venta larga** o posición larga por lo que tenemos que los pesos son positivos o nulos, ($x_k \geq 0$).
- Los activos son infinitamente divisibles por lo que no se tiene en cuenta ningún tipo de gasto, ni los impuestos y tampoco la inflación.

Veamos ahora qué parámetros estadísticos vamos a utilizar. Tomamos el rendimiento del activo A_k como r_k , el rendimiento esperado del activo A_k es $\mu_k = E(r_k) < \infty$, el riesgo de inversión del activo A_k es $\sigma_k^2 = \text{Var}(r_k)$ y sea $\sigma_{kj} = \text{Cov}(r_k, r_j)$ la covarianza entre dos rendimientos. Todas las varianzas y covarianzas son finitas. De manera que tenemos las siguientes consecuencias del modelo y que luego las usaremos como propiedades básicas de la **cartera de valores**.

Nota. Para cada cartera \mathbf{x} de activos A_1, \dots, A_n .

1. La suma de todos los pesos es 1, es decir, $x_1 + \dots + x_n = 1$, y si tomamos el vector $U = (1 \dots 1)^t$ como una columna de tamaño n con componentes iguales a 1, tenemos que $U^t \mathbf{x} = 1$.
2. El rendimiento es $r_{\mathbf{x}} = \sum_{k=1}^n x_k r_k$ y el rendimiento esperado viene dado por $E(r_{\mathbf{x}}) = \mu_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = M^t \mathbf{x} = E(\mathbf{x})$ (vamos a hacer abuso del lenguaje), tomando el vector $M = (\mu_1 \dots \mu_n)^t$ como una columna de los rendimientos esperados de los activos.
3. Los vectores columna M y U no son proporcionales.
4. La matriz de covarianzas del rendimiento de los activos es $S = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \dots & \sigma_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix}$ donde asumimos que $\det S > 0$. El determinante de S es positivo si y solo si las variables r_1, \dots, r_n son linealmente independientes.
5. Sea $\mathbf{y} = (y_1 \dots y_n)^t$ otra cartera de valores de los activos A_1, \dots, A_n , la covarianza entre las dos carteras es:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \text{Cov}\left(\sum_{i=1}^n x_i r_i, \sum_{j=1}^n y_j r_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \text{Cov}(r_i, r_j) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \sigma_{ij} = \mathbf{x}^t \mathbf{S} \mathbf{y} \quad \text{si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) &= \text{Cov}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{S} \mathbf{x} = \text{Var}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{aligned}$$

Normalmente la cartera con un alto rendimiento esperado implica un mayor riesgo, pero podemos identificar cual de entre todas las carteras con un mismo rendimiento esperado presenta un menor riesgo.

Definición. Una cartera \mathbf{x} es una **cartera envolvente** si es solución del problema de mínimo:

$$\begin{cases} \min & \text{Var}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t \mathbf{S} \mathbf{x} \\ \text{s.a.} & x_1 + \dots + x_n = 1 \\ & M^t \mathbf{x} = \mu_{\mathbf{x}} \\ & x_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{cases} \quad (1.1)$$

Sabemos que las carteras son combinaciones de al menos dos activos por lo tanto tomamos $n \geq 2$. Para resolver el problema de encontrar una cartera envolvente vamos a calcular la proyección ortogonal en un subespacio K siendo este el conjunto de todas las variables aleatorias combinación lineal de (r_1, \dots, r_n) para obtener una solución invariante.

Como $E(\mathbf{x}) = M^t \mathbf{x}$ entonces tenemos que las restricciones del problema (1.1) son las siguientes:

$$\begin{cases} U^t \mathbf{x} = 1 \\ M^t \mathbf{x} = \mu \quad \mu \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (1.2)$$

Sabemos que este sistema tiene una solución ya que M y U no son proporcionales, la solución la encontramos en el sistema homogéneo.

$$\begin{cases} U^t \mathbf{x} = 0 \\ M^t \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (1.3)$$

Es inmediato comprobar que en el caso $n = 2$ con $\mu \in \mathbb{R}$ solo hay una cartera con rendimiento esperado μ . Por lo tanto tomamos, $n \geq 3$.

Definición. Sea un subconjunto Q de un espacio lineal C , decimos que es un **subespacio afín** de C si existe $q \in Q$ y un subespacio lineal $W \subset C$ tal que $Q = \{q + w \mid w \in W\}$.

De manera que tenemos el siguiente lema, que nos ayudará a entender el primer teorema.

Lema 1.1. Consideramos un sistema consistente $AX = B$ siendo A una matriz $m \times n$ y B una matriz $m \times 1$. Entonces el conjunto de soluciones de este sistema es un subespacio afín de \mathbb{R}^n y su correspondiente subespacio lineal es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

Sea Q el conjunto de las soluciones de (1.2) y W el conjunto de las soluciones de (1.3). Por el lema anterior, Q es un subespacio afín de K y W es el correspondiente subespacio lineal de dimensión $n - 2$. Entonces, el subespacio afín Q podemos escribirlo como $Q = \{q + w \mid w \in W\}$ para cualquier solución q del sistema (1.2). Con lo que tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. Hay una única cartera envolvente con rendimiento esperado μ , tal que $\mathbf{x}_\mu = q - \text{Proj}_W q$, siendo q una solución de (1.2).

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Definimos $H = \{X \text{ variable aleatoria} \mid X \in (\Omega, \mathcal{X}, P) \wedge E(X^2) < \infty\}$. Si tomamos ahora un sistema de soluciones ortogonal al sistema (1.3), tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.3. Sea v_1, \dots, v_{n-2} una base de soluciones ortogonales al sistema (1.3). Entonces,

1. Para cualquier $\mathbf{y} \in H$ definimos $\langle \mathbf{y}, v_k \rangle = \text{Cov}(\mathbf{y}, v_k)$ con $k = 1, \dots, n - 2$.
2. La cartera envolvente con rendimiento esperado μ es: $\mathbf{x}_\mu = q - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$, donde q es una solución de (1.2).
3. La **envolvente** es el conjunto $\{\mathbf{x}_\mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Poder determinar dos fondos o carteras en la envolvente nos permite expresar cualquier otra cartera envolvente como combinación lineal de estas dos carteras fijas.

Teorema 1.4. (Principio de separación de dos fondos). Sea \mathbf{x} e \mathbf{y} dos carteras envolventes, siendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Entonces, la envolvente es el conjunto $\{\gamma \mathbf{x} + (1 - \gamma) \mathbf{y} \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

1.2. Relación Media-Varianza. El plano (σ, μ) y su geometría

Hemos visto en la sección anterior que la media y la varianza definen una cartera y que no son dos conceptos independientes. En esta sección vamos a describir su geometría.

Para cada cartera de activos A_1, \dots, A_n vamos a tomar el par desviación típica y rendimiento esperado, (σ, μ) . Veamos en primer lugar la relación Media-Varianza para dos activos, después establecemos la relación general mediante un teorema.

Tomamos ahora una cartera de valores con los activos A_1, A_2 y sean r_1 y r_2 los rendimientos de estos activos respectivamente y tomamos μ_1 y μ_2 los rendimientos esperados con $\mu_1 \neq \mu_2$. Además tomamos $\sigma_1 > 0$ y $\sigma_2 > 0$ y consideramos tanto el caso $\det S > 0$ como el caso $\det S = 0$. También definimos ρ como el coeficiente de correlación entre el rendimiento de los activos A_1 y A_2 .

Sabemos que $\det S = 0 \Leftrightarrow r_1$ y r_2 son linealmente dependientes $\Leftrightarrow |\text{Cov}(r_1, r_2)| = \sigma_1 \sigma_2 \Leftrightarrow |\rho| = 1$. Además como estamos en el caso $n = 2$ para algún $\mu \in \mathbb{R}$ hay una única cartera con rendimiento esperado μ , de manera que la envolvente y el **conjunto factible** son lo mismo.

Ahora bien, veamos el siguiente teorema para ver como se comporta el conjunto factible de los activos A_1 y A_2 dependiendo el valor de ρ .

Teorema 1.5. Sea $\mu_1 \neq \mu_2$ entonces tenemos:

1. Si $\rho \neq \pm 1$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano tomando solo la hipérbola con $\sigma > 0$.

$$\frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \quad A > 0, B > 0 \quad (\text{figura 1.1a}) \quad (1.4)$$

2. Si $\rho = -1$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por dos rectas que salen de un punto del eje μ . (figura 1.1b).
3. Si $\rho = 1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por dos rectas que salen de un punto del eje μ . (figura 1.1b).
4. Si $\rho = 1$ y $\sigma_1 = \sigma_2$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por una recta vertical dada por $\sigma = \sigma_1$. (figura 1.1c).

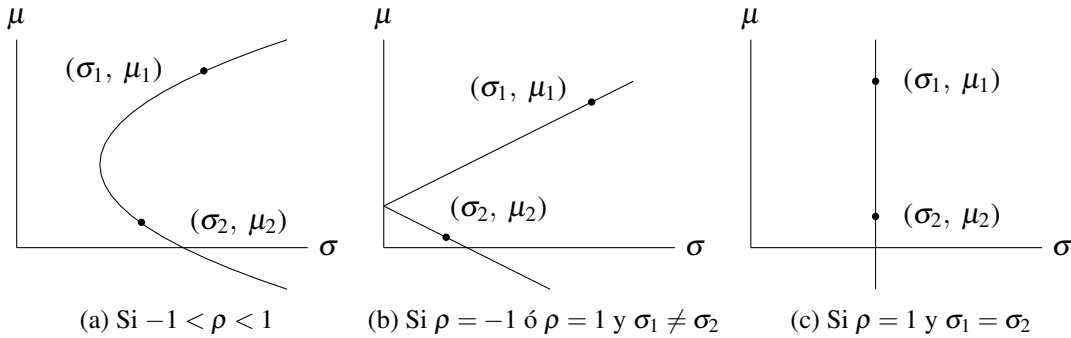


Figura 1.1: Conjunto factible de dos activos

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Ahora mediante el siguiente teorema vemos la relación Media-Varianza de manera más general.

Teorema 1.6. (Ver figura 1.2)

1. La envolvente esta representada en el plano por la hipérbola:

$$\frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \quad \sigma > 0, A > 0, B > 0 \quad (1.5)$$

2. La región factible es la región a la derecha de la curva (1.5) para $n \geq 3$.
3. La cartera \mathbf{x}_{\min} con el menor riesgo corresponde al vértice de la hipérbola, es el punto (\sqrt{A}, μ_0) .
4. La **frontera eficiente** está representada en el plano (σ, μ) por la mitad superior de la hipérbola

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \\ \sigma > 0 \\ \mu \geq \mu_0 \end{cases}$$

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

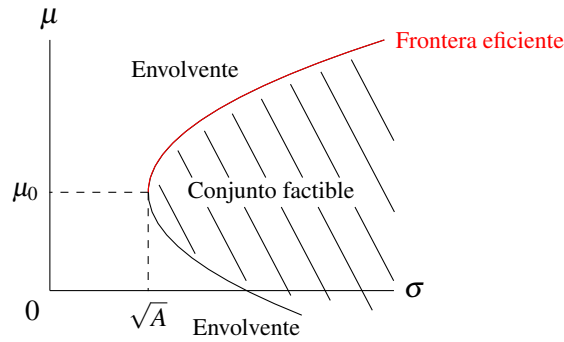


Figura 1.2: Conjunto factible, frontera eficiente y envolvente

En el glosario hemos definido el **activo libre de riesgo** como un activo con rendimiento constante, al que vamos a denotarlo como F , y al rendimiento de este activo lo denotamos f . (Tenemos $E(f) = f$ y $Var(f) = 0$).

Ahora vamos a tomar una cartera de activos A_1, \dots, A_n, F representados por vectores en un espacio $(n+1)$ -dimensional con base $\{r_1, \dots, r_n, f\}$ siendo $f = (0, \dots, 0, 1)^t$. Veamos cómo cambia la geometría de las carteras de valores cuando incorporamos F como un activo más.

Lema 1.7. *El rendimiento del activo libre de riesgo está en la envolvente, es decir, $f \in Env(A_1, \dots, A_n, F)$.*

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Ahora bien, para una cartera \mathbf{x} de activos vamos a definir dos rectas $R_{1\mathbf{x}}$ y $R_{2\mathbf{x}}$ en el plano (σ, μ) que empiezan en el punto $(0, f)$ y además $R_{1\mathbf{x}}$ pasa por el punto $(\sigma_{\mathbf{x}}, \mu_{\mathbf{x}})$ y $R_{2\mathbf{x}}$ pasa por el punto $(\sigma_{\mathbf{x}}, 2f - \mu_{\mathbf{x}})$ (figura 1.3), con lo que tenemos que las rectas vienen definidas por las siguientes ecuaciones:

$$R_{1\mathbf{x}}: \mu = f + \frac{\mu_{\mathbf{x}} - f}{\sigma_{\mathbf{x}}} \sigma \quad \text{y} \quad R_{2\mathbf{x}}: \mu = f - \frac{\mu_{\mathbf{x}} - f}{\sigma_{\mathbf{x}}} \sigma \quad (1.6)$$

De esta manera tenemos el siguiente lema.

Lema 1.8.

1. Sea \mathbf{x} una cartera de activos A_1, \dots, A_n y sea \mathbf{y} otra cartera de los activos A_1, \dots, A_n, F de manera que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \iff (\sigma_{\mathbf{y}}, \mu_{\mathbf{y}}) \in R_{1\mathbf{x}} \cup R_{2\mathbf{x}}$
2. La región factible de los activos A_1, \dots, A_n, F viene dada por el conjunto

$$\{R_{1\mathbf{x}} \cup R_{2\mathbf{x}} \mid \mathbf{x} \text{ cartera de los activos } A_1, \dots, A_n, F\} \quad (\text{figura 1.3})$$

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

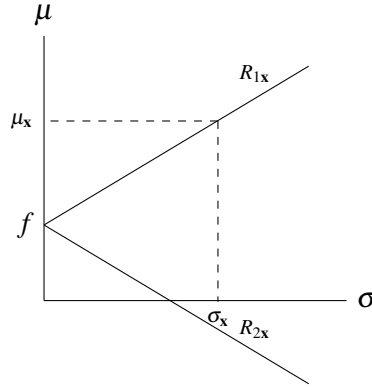


Figura 1.3: Región factible de los activos A_1, \dots, A_n, F

Vamos a caracterizar una cartera que está a la vez en la $Env(A_1, \dots, A_n)$ y la $Env(A_1, \dots, A_n, F)$ que se conoce como **cartera tangente**.

Lema 1.9. Consideramos la rama derecha de la hipérbola (1.5) representada por la $Env(A_1, \dots, A_n)$. Si suponemos que $f \neq \mu_0$, entonces hay una recta tangente a la hipérbola desde el punto $(0, f)$ y viene dada por la ecuación:

$$\mu = f \pm \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma \quad (1.7)$$

siendo $(\sigma_t = \sqrt{A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2}}, \mu_t = \mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f})$ las coordenadas del punto tangente t .

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Como para cada valor del rendimiento esperado hay exactamente un cartera envolvente, el punto de tangencia $t = (\sigma_t, \mu_t)$ corresponde a una única cartera de la envolvente $(Env(A_1, \dots, A_n, F))$, a esta cartera la vamos a denotar también t (cartera tangente).

Ahora bien, tenemos diferentes resultados del comportamiento de la recta tangente según el valor de f (rendimiento de un activo libre de riesgo).

Teorema 1.10. Suponemos que $f \neq \mu_0$ y sea $t = (\sigma_t, \mu_t)$ el punto tangente.

1. La envolvente viene representada por el conjunto $R_{1t} \cup R_{2t} = \{(\sigma, \mu) \mid \mu = f \pm \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma, \sigma \geq 0\}$.
2. La región factible es el ángulo formado por las rectas $R_{1t} = \mu = f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$ y $R_{2t} = \mu = f - \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$ incluyendo también las fronteras.

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

Ahora bien, si tenemos $f \neq \mu_0$, podemos distinguir dos casos $f > \mu_0$ y $f < \mu_0$. Vamos a estudiar el caso $f < \mu_0$ ya que en el mundo real el rendimiento del activo libre de riesgo es menor al rendimiento esperado de cualquier **cartera eficiente** de activos, incluido el rendimiento esperado de la cartera con menor riesgo.

Teorema 1.11. Sea $f < \mu_0$. (Ver en figura 1.4).

1. La recta tangente a la hipérbola empezando en el punto $(0, f)$ está encima de la hipérbola.
2. La región factible de los activos (A_1, \dots, A_n, F) es el conjunto $\{(\sigma, \mu) \mid f - \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma \leq \mu \leq f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma, \sigma \geq 0\}$.
3. La frontera eficiente $(EF(A_1, \dots, A_n, F))$ viene representada por la recta $R_{1t} = f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$.

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A □

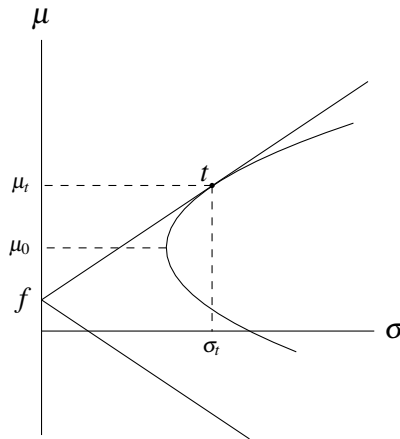


Figura 1.4: Recta y punto tangente a la hipérbola con $f < \mu_0$

Teorema 1.12. *Suponemos que $f = \mu_0$.*

1. *No existe una recta tangente a la hipérbola desde el punto $(0, f)$.*
2. *La región factible de los activos A_1, \dots, A_n, F es el ángulo formado entre las asíntotas de la hipérbola sin incluirlas (siendo las asíntotas: $\mu = \mu_0 \pm \sqrt{\frac{B}{A}}\sigma$).*
3. *No existe la envolvente $Env(A_1, \dots, A_n, F)$, es decir, entre las carteras con un determinado rendimiento esperado el límite inferior del riesgo no se alcanza.*
4. *No existe la frontera eficiente $EF(A_1, \dots, A_n, F)$, es decir, entre las carteras con un riesgo dado el límite superior del rendimiento esperado no se alcanza.*

Demostración. Encontramos la demostración en el Anexo A

□

1.3. Línea del mercado de capitales (CML)

En esta sección se analiza cómo construir una cartera que coincide con la cartera tangente en un mercado en equilibrio y la posibilidad de poder expresar el riesgo de un activo o de una cartera en dos partes bien diferenciadas.

Tomamos la **cartera de mercado** $\mathbf{m} = (m_1 \ m_2 \ \dots \ m_n)^t$, donde los pesos son:

$$m_k = \frac{\text{valores de mercado de los activos } A_k}{\text{valor total de mercado de todos los activos}}$$

Como vamos a tomar $f < \mu_0$ entonces la cartera tangente y la cartera de mercado son lo mismo. De esta manera definimos la **línea del mercado de capitales (CML)** como la recta tangente de la hipérbola de la que hemos hablado en el teorema 1.11, es decir, el CML representa la frontera eficiente de los activos A_1, \dots, A_n, F .

Vamos a relacionar los rendimientos de los activos individuales o de cualquier cartera con los rendimientos de la cartera de mercado mediante un modelo de regresión. Podemos así formular el siguiente modelo:

$$\mathbf{x} = \alpha_{\mathbf{x}} + \beta_{\mathbf{x}}\mathbf{m} + \varepsilon \quad (1.8)$$

La perturbación aleatoria ε debe cumplir que $\mu_{\varepsilon} = 0$ y $Cov(\varepsilon, \mathbf{m}) = 0$. De manera que la expresión de los coeficientes es:

$$\beta_{\mathbf{x}} = \frac{Cov(\mathbf{x}, \mathbf{m})}{\sigma_{\mathbf{m}}^2} \text{ y } \alpha_{\mathbf{x}} = \mu_{\mathbf{x}} - \mu_{\mathbf{m}}\beta_{\mathbf{x}}$$

Además el riesgo total de la cartera \mathbf{x} viene dado por la varianza $\sigma_{\mathbf{x}}^2$ y recordemos que la interpretación de $\beta_{\mathbf{x}}$ es la tasa de variación media del rendimiento de \mathbf{x} respecto al rendimiento del mercado.

Además, la cartera de mercado \mathbf{m} no es libre de riesgo por lo que $\sigma_{\mathbf{m}} \neq 0$.

Podemos definir el riesgo total de la cartera \mathbf{x} como la suma del **riesgo sistemático** ($\beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2$) y el **riesgo no sistemático** (σ_{ϵ}^2) definidos en el glosario.

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \sigma_{\epsilon}^2 \quad (1.9)$$

1.4. Crítica al modelo de Markowitz

El modelo de Markowitz se considera el punto de partida de la teoría moderna de carteras, además su planteamiento y aportaciones posteriores son un gran avance de la teoría económica en el Siglo XX. A pesar de su importancia, su aplicación en la práctica se ha visto restringida por algunas limitaciones.

El modelo presenta un algoritmo de resolución complejo donde hay que calcular un elevado número de estimaciones de la covarianza de los rendimientos entre cada par de activos dentro de la cartera, además de la estimación de los rendimientos esperados y sus varianzas. De esta manera vamos a estudiar modelos más simples donde solo hace falta calcular la covarianza de cada activo con respecto al índice de mercado que son los coeficientes beta ($\beta_{\mathbf{x}}$) que hemos definido antes y que reducen notablemente los cálculos haciendo factible la selección óptima de carteras. Además, el modelo de Markowitz no tiene en cuenta ningún tipo de coste (impuestos, inflación, etc.) ya que considera que los activos son infinitamente divisibles. El inversor tampoco puede reflejar su actitud ante el riesgo, que sería necesario para determinar la cartera óptima con su función de utilidad.

Capítulo 2

Análisis Factorial

El análisis factorial es una técnica estadística usada para explicar las correlaciones entre las **variables observadas** en términos de un número menor de **variables latentes** o no observadas que llamamos factores. Utilizar variables latentes reduce la dimensionalidad de los datos. Un gran número de variables observadas se puede agregar en un modelo para representar un concepto subyacente, por lo que es más fácil de entender los datos.

En el contexto de la teoría de carteras, los métodos factoriales tratan de caracterizar precisamente un número reducido de fuentes de riesgo para un amplio conjunto de activos, ya sean de renta variable (en la forma de rentabilidades de acciones) o de renta fija (en la forma de tasas de descuento o de tipos de interés a distintos vencimientos). Esta representación de la rentabilidad de los activos en función de un número reducido de factores, asocia a cada activo un vector de betas. Cada beta es la sensibilidad del rendimiento de un activo a cada uno de los factores de riesgo. El concepto de cartera de mercado visto al final del capítulo anterior, no es observable o factible pero puede verse como un concepto subyacente que nos servirá para formular uno de los modelos factoriales más simples, el CAPM.

En este capítulo hemos tomado como referencias fundamentales la monografía [7] y el capítulo 12 del libro [8].

2.1. El modelo factorial

Sea \mathbf{x} un vector de variables aleatorias observadas de dimensión $(p \times 1)$. Entonces el modelo de análisis factorial dice que cada componente x_i del vector \mathbf{x} podemos escribirla como el vector de medias μ de dimensión $(p \times 1)$, que es la media de las variables de \mathbf{x} y una combinación lineal de m variables latentes $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_m)$ siendo $m < p$, junto con un vector de errores ε de dimensión $(p \times 1)$.

$$\mathbf{x} = \mu + \beta \mathbf{f} + \varepsilon \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_{p1} & \cdots & \beta_{pm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

tomando $\beta = (\beta_{ij})_{p \times m}$ como la matriz de coeficientes desconocidos que llamamos matriz de carga y son los coeficientes que describen como los factores \mathbf{f} afectan a las variables observadas \mathbf{x} , siendo cada una de las β_{ij} la covarianza entre x_i y el factor f_j .

Es habitual suponer que el vector de factores \mathbf{f} sigue una distribución normal $N(0, I)$, es decir, que los factores son variables de media cero e independientes entre sí. Además el vector ε tiene una distribución normal $N(0, \psi)$ siendo ψ una matriz diagonal, además los errores están incorrelados con los factores. De manera que \mathbf{x} tiene una distribución normal, ya que es suma de variables normales, y tomamos \mathbf{V} como la matriz de covarianzas, con lo que, $\mathbf{x} \sim N(\mu, \mathbf{V})$.

Teorema 2.1. Sea β la matriz de carga y sea \mathbf{f} un vector de variables latentes de manera que la matriz de covarianzas es:

$$\mathbf{V} = \beta \beta^t + \psi \quad (2.2)$$

Demostración. Sea β la matriz de carga que contiene las covarianzas entre los factores y las variables observadas y la obtenemos a partir de la ecuación (2.1), si ahora multiplicamos por \mathbf{f}' tenemos:

$$\mathbf{x} = \mu + \beta\mathbf{f} + \varepsilon \Rightarrow \mathbf{x} - \mu = \beta\mathbf{f} + \varepsilon \Rightarrow (\mathbf{x} - \mu)\mathbf{f}' = \beta\mathbf{f}\mathbf{f}' + \varepsilon\mathbf{f}'$$

y tomando esperanzas:

$$E((\mathbf{x} - \mu)\mathbf{f}') = \beta E(\mathbf{f}\mathbf{f}') + E(\varepsilon\mathbf{f}') = \beta$$

debido a que los factores son incorrelados, entonces $E(\mathbf{f}\mathbf{f}') = I$, y además están incorrelados con los errores, por lo que $E(\varepsilon\mathbf{f}') = 0$.

Si volvemos a tener en cuenta la ecuación (2.1), la matriz de covarianzas es:

$$\mathbf{V} = E((\mathbf{x} - \mu)(\mathbf{x} - \mu)') = \beta E(\mathbf{f}\mathbf{f}')\beta' + \beta E(\mathbf{f}\varepsilon') + \beta' E(\varepsilon\mathbf{f}') + E(\varepsilon\varepsilon') = \beta E(\mathbf{f}\mathbf{f}')\beta' + E(\varepsilon\varepsilon')$$

ya que tanto $E(\varepsilon\mathbf{f}') = 0$ como $E(\mathbf{f}\varepsilon') = 0$ por estar incorrelados los factores y los errores. Además como $E(\mathbf{f}\mathbf{f}') = I$ y $E(\varepsilon\varepsilon') = \psi$, tenemos:

$$\mathbf{V} = \beta\beta' + \psi$$

siendo $\beta\beta'$ una matriz simétrica de rango $m < p$ que contiene la parte común de las variables y ψ definida antes, sería la parte específica de cada variable y que es independiente, con lo que tenemos que la matriz de covarianzas es una descomposición de dos matrices. \square

Acabamos de ver que las varianzas de las variables observadas podemos descomponerlas como la **comunalidad** y la **especificidad** respectivamente:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^2 + \psi_i^2 = h_i^2 + \psi_i^2 \quad \text{con } h_i = \sum_{j=1}^m \beta_{ij}^2, \quad i = 1, \dots, p \quad (2.3)$$

Tomamos ahora una muestra aleatoria simple de m elementos generada por la ecuación (2.1) del modelo factorial, y consideramos p activos y n observaciones temporales. Una representación general del modelo factorial es:

$$x_{it} = \mu_i + \beta_{i1}f_{1t} + \dots + \beta_{im}f_{mt} + \varepsilon_{it} \quad \text{con } i = 1, \dots, p; \quad t = 1, \dots, n \quad \text{y} \quad m \ll p$$

donde β_{ij} con $j = 1, \dots, m$ representa las cargas factoriales, f_{jt} con $j = 1, \dots, m$ representa los m factores comunes y ε_{it} el componente específico del activo i no explicado por los factores comunes. Vamos a suponer que el vector de factores $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, \dots, f_{mt})$ sigue un **proceso estocástico estacionario** con:

$$\begin{aligned} & - E(\mathbf{f}_t) = \mu_{\mathbf{f}} & - \text{Cov}(\mathbf{f}_{jt}, \varepsilon_{is}) = 0 \quad \forall i, j, s, t \\ & - E(\varepsilon_{it}) = 0 \quad \forall i, t & - \text{Cov}(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{js}) = \begin{cases} \sigma_i^2 & \text{si } i = j, t = s \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \\ & - \text{Cov}(\mathbf{f}_t) = \mathbf{V}_{\mathbf{f}} \text{ (matriz de covarianzas)} \end{aligned}$$

por lo que las correlaciones entre activos las obtenemos por la existencia de los factores comunes. Pero, los factores comunes pueden estar correlados entre sí, con matriz de covarianza $\mathbf{V}_{\mathbf{f}}$. También se da la ausencia de correlación serial (autocorrelación consigo misma) en las variables x_t por ser el proceso estacionario.

2.1.1. Unicidad del modelo factorial

Tenemos un modelo que permite reducir o simplificar el análisis de una matriz de covarianzas, pero el modelo factorial de factores ortogonales no está exento de algunos problemas.

De manera que, si tenemos dos matrices de carga, β y β' y dos vectores de factores, \mathbf{f} y \mathbf{f}' diremos que (β, \mathbf{f}) y (β', \mathbf{f}') son equivalentes si $\beta\mathbf{f} = \beta'\mathbf{f}'$. Lo que implicaría que el modelo dado en (2.1) con factores incorrelados es esencialmente equivalente a otro modelo con factores correlados si los factores son correlados o incorrelados, o que los factores del modelo incorrelado no quedan determinados de manera unívoca.

- Primer problema: El modelo puede explicarse con la misma precisión si los factores son correlados o incorrelados.

Vamos a tomar una matriz A no singular de manera que podemos escribir la ecuación (2.1) de la siguiente forma: $\mathbf{x} = \mu + \beta A A^{-1} \mathbf{f} + \varepsilon = \mu + \beta' \mathbf{f}' + \varepsilon$ siendo $\beta' = \beta A$, la nueva matriz de carga y $\mathbf{f}' = A^{-1} \mathbf{f}$, los nuevos factores que ahora siguen una distribución normal $N(0, A^{-1}(A^{-1})')$, con lo cual están correlados.

De la misma manera, si partimos ahora de factores correlados $\mathbf{f} \sim N(0, \mathbf{V}_f)$, podemos encontrar una expresión equivalente de las variables mediante un modelo con factores incorrelados. Es decir, si tomamos una matriz C tal que $\mathbf{V}_f = CC'$, que existe si es definida positiva, entonces $C^{-1} \mathbf{V}_f (C^{-1})' = \mathbf{I}$, con lo cual $\mathbf{x} = \mu + \beta C C^{-1} \mathbf{f} + \varepsilon = \mu + \beta' \mathbf{f}' + \varepsilon$ siendo $\beta' = \beta C$ la nueva matriz de carga y $\mathbf{f}' = C^{-1} \mathbf{f}$ los nuevos factores, el modelo es equivalente a otro con factores incorrelados. De manera que podemos resolver el primer problema con la hipótesis del modelo tomando siempre factores incorrelados.

- Segundo problema: Los factores ortogonales tampoco quedan determinados de manera unívoca. Si tomamos una matriz A ortogonal, el modelo $\mathbf{x} = \mu + \beta \mathbf{f} + \varepsilon$ y el modelo $\mathbf{x} = \mu + (\beta A)(A^{-1} \mathbf{f}) + \varepsilon$ son iguales. Los dos tienen factores incorrelados, tomando la matriz de covarianzas la matriz identidad, por lo que decimos que el modelo factorial esta indeterminado ante las rotaciones.

A pesar de todo esto, podemos encontrar distintos metodos de estimación de los factores que nos ayudan a obtener una solución ortogonal inicial al modelo factorial, como:

- Método de las componentes principales.
- Método de factor principal
- Método de máxima verosimilitud
- Método de mínimos cuadrados

A veces podemos añadir algún tipo de rotación que nos permite obtener una matriz de cargas más simple para la interpretación de las correlaciones de las variables con los factores.

Podemos encontrar dos tipos de rotaciones: las rotaciones ortogonales y las rotaciones oblicuas. Además tenemos diferentes métodos que utilizar para las rotaciones.

- Rotaciones ortogonales:
 - Método Varimax
 - Método Quartimax
 - Método Equamax
- Rotaciones oblicuas:
 - Método Oblimin

El detalle de todos estos procedimientos, excede los objetivos de un trabajo como el presente y pueden ser consultados en [8].

2.2. Modelo CAPM como modelo unifactorial

El modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model) es un modelo de valoración de activos financieros desarrollado por William Sharpe en 1964 en el artículo [13].

El modelo permite expresar el rendimiento esperado de un activo en función del riesgo sistemático y del riesgo específico o idiosincrático. El desarrollo de este modelo está basado en diversas formulaciones

de Harry Markowitz sobre la teoría moderna de carteras y la diversificación. Sigue siendo a día de hoy un modelo ampliamente utilizado.

El modelo CAPM busca predecir el riesgo de un activo separándolo en el riesgo sistemático y en riesgo específico. El riesgo específico puede reducirse mediante la diversificación, pero el riesgo sistemático no. Por lo tanto, este riesgo que no podemos eliminar, es el que tenemos que tener en cuenta cuando exigimos rendimientos.

2.2.1. Diversificación del riesgo en el modelo CAPM

En el capítulo anterior, hemos visto en la ecuación (1.9) que podemos separar el riesgo total en el riesgo sistemático y el riesgo específico. Sabemos que podemos expresar el valor esperado de los rendimientos de los activos de una cartera \mathbf{x} de la siguiente manera (recordamos que $r_{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^n x_i r_i$):

$$E(r_{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^n x_i E(r_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i + \sum_{i=1}^n x_i \beta_i E(r_{\mathbf{m}}) = \mu_{\mathbf{x}} + \left(\sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right) E(r_{\mathbf{m}}) = \mu_{\mathbf{x}} + \beta_{\mathbf{x}} E(r_{\mathbf{m}})$$

Además,

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j < i}^n x_i x_j \sigma_{ij} = \sum_{i=1}^n x_i^2 \beta_i^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\epsilon}^2 + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j < i}^n x_i x_j \beta_i \beta_j \sigma_{\epsilon}^2$$

De manera que la varianza de una cartera podemos escribirla:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \beta_i \beta_j \right) \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\epsilon}^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right) \left(\sum_{j=1}^n x_j \beta_j \right) \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\epsilon}^2 = \beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{\epsilon}^2$$

Con lo que obtenemos la ecuación (1.9), que depende en parte de su beta y en parte de la varianza de su componente específico.

Por lo tanto, si identificamos varianza con riesgo, llegamos a que el riesgo de un activo individual es (1.9), que depende de su β y de la varianza de su componente específica. De manera que el efecto de σ_{ϵ}^2 sobre el riesgo de una cartera puede eliminarse si aumenta n que, como ya hemos dicho es el riesgo específico. Y por el otro lado nos queda $\beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2$ que no disminuye si aumenta n .

Si consideramos ahora una cartera diversificada, entonces esta cartera, invierte en un abundante conjunto de activos y no concentra el valor nominal invertido en un subconjunto reducido de los activos en los que invierte.

Este tipo de cartera distribuye su valor nominal en partes iguales entre un conjunto de n activos, tomando n grande. De manera que, la volatilidad de dicha cartera sería:

$$\sigma_{\mathbf{x}}^2 = \beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2 + \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_{\epsilon}^2 \right) \quad (2.4)$$

siendo $\sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \sigma_{\epsilon}^2$ el promedio de varianzas residuales de las n regresiones estimadas en la construcción del modelo CAPM. Con lo cual su cociente por n tenderá a cero al aumentar el número de activos en la cartera. La componente del riesgo de una cartera que no puede eliminarse es el asociado al riesgo sistemático, que nos queda:

$$\sigma_{\mathbf{x}} \simeq \sqrt{\beta_{\mathbf{x}}^2 \sigma_{\mathbf{m}}^2} = \sigma_{\mathbf{m}} \left| \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \right| \quad (2.5)$$

y como $\sigma_{\mathbf{m}}$ es común a cualquier cartera que podemos construir, tenemos que la contribución de un activo individual al riesgo de una cartera se mide a través de su beta, β_i .

La relación de un activo con el factor que queremos estudiar es una relación lineal y, si tomáramos como factor un índice observable que mide el rendimiento del mercado, entonces el modelo de mercado propuesto por William Sharpe sería como el definido en la fórmula (2.1).

Si analizamos el modelo de mercado desde la expresión del riesgo, visto en la fórmula (1.9). Vemos que el riesgo específico es el riesgo que el inversor quiere diversificar para que sea lo más bajo posible, incluso llegando a eliminarlo. De manera que el mercado no debería preocuparse por el riesgo específico de su cartera de inversión ya que si la cartera está bien gestionada obtendrá un riesgo específico nulo. Esto nos lleva a la conclusión de que el rendimiento esperado de la cartera dependerá principalmente del riesgo sistemático que viene dado por las variaciones de mercado.

La teoría de carteras de Markowitz supone que el inversor elige su cartera según la frontera eficiente debido a sus expectativas sobre el rendimiento esperado y el riesgo del activo. Sin embargo, el modelo CAPM estudia cómo los inversores determinan los beneficios esperados y así los precios de los activos como una función del riesgo, es decir, analiza si en el mercado se alcanzan precios de equilibrio.

Por lo que el rendimiento esperado de un activo viene definido la siguiente ecuación:

$$E(\mathbf{x}) = f + \beta_{\mathbf{x}}(E(\mathbf{m}) - f) \Rightarrow \mu_{\mathbf{x}} = f + \beta_{\mathbf{x}}(\mu_{\mathbf{m}} - f) \quad (2.6)$$

siendo f el rendimiento de un activo libre de riesgo; $(\mu_{\mathbf{m}} - f)$ la prima de riesgo de mercado (el rendimiento esperado que un inversor recibe al tener una cartera de riesgo en vez de activos libre de riesgo) y el coeficiente β_i mide el riesgo de mercado de un activo.

Pero en este modelo podemos encontrar tanto ventajas como limitaciones.

2.2.2. Ventajas del modelo

El CAPM es un modelo muy bien valorado por investigadores de la materia de finanzas ya que tenemos un modelo muy sencillo y práctico que recoge en gran medida las variables más relevantes que se pueden tener en cuenta cuando se valoran los precios de los activos. El modelo supone que los inversores tienen una cartera diversificada parecida a la cartera de mercado, donde muchas veces podemos eliminar el riesgo específico, además se tiene en cuenta el riesgo sistemático que es una variable importante ya que a menudo no podemos eliminarla ni disminuirla.

2.2.3. Limitaciones del modelo

Este modelo no explica adecuadamente la variación en los rendimientos de los activos. Estudios empíricos muestran que los activos con bajos betas pueden ofrecer rendimientos más altos de los que el modelo sugiere. También asume que todos los inversores tienen acceso a la misma información, y además se ponen de acuerdo sobre el rendimiento esperado y el riesgo para todos los activos.

2.3. Modelo de tres factores de Fama y French

Los investigadores Eugene Fama quién ganó un Premio Nobel en 2013 y Kenneth French realizaron una investigación empírica estudiando el coeficiente β que se utiliza en el modelo CAPM, intentando buscar variables que explicasen los rendimientos esperados de los activos de una manera más significativa, concluyendo que esta variable β no explica el rendimiento de los activos.

De esta manera en 1993 desarrollaron el Modelo de tres factores *Common risk factors in the returns on stocks and bonds* [1], que sigue la misma línea y sencillez que el modelo CAPM, añadiendo dos nuevas variables que hay que analizar cuando se calculan los rendimientos esperados de cualquier activo.

Con lo cual, el rendimiento esperado de un activo aplicando el modelo de tres factores viene dado por la siguiente fórmula:

$$E(\mathbf{x}) = f + \beta_{\mathbf{x}}(E(\mathbf{m}) - f) + \beta_{SMB}E(SMB) + \beta_{HML}E(HML) \quad (2.7)$$

donde $E(\mathbf{m}) - f$ es la prima de riesgo de mercado, $E(SMB)$ es la prima de riesgo con respecto a la diferencia en rendimientos de una cartera SMB y $E(HML)$ es la prima de riesgo con respecto a la diferencia en rendimientos de una cartera HML.

Tenemos entonces que el modelo de tres factores expone que el rendimiento de cualquier activo o cartera está explicado por:

- La sensibilidad de dicho rendimiento ante variaciones en las rentabilidades de la cartera de mercado que corresponde con el **coeficiente** β del modelo CAPM.
- La sensibilidad de dicho activo al tamaño del mismo, denominado **SMB** (Small Minus Big) que es la diferencia entre el rendimiento de las acciones de pequeña capitalización y el rendimiento de las acciones de más capitalización. Luego, las empresas con menor capitalización bursátil ofrecen mayores rendimientos ya que tienen más riesgo que las empresas con gran capitalización. De manera que el factor SMB determina cuanto rendimiento da el riesgo por tamaño.
- El ratio book-to market (valor de mercado) definido como **HML** (High Minus Low) que es la diferencia entre los rendimientos del activo de la compañía con mayor ratio book-to-market y la rentabilidad del activo de la compañía con menor ratio book-to-market en una cartera. Luego, las empresas con mayor ratio book-to market ofrecen mayores rendimientos y por tanto mayor riesgo que las de menor ratio. De manera que el factor HML determina cuanto rendimiento da el riesgo por valor.

Estos dos últimos factores indican que los activos con una baja capitalización y los activos con un alto ratio de valor de mercado ofrecen un mayor rendimiento al mercado.

Para poder estimar estos factores, los autores proponen un procedimiento de cálculo. Las empresas que cotizan en el mercado se categorizan según su tamaño (capitalización) y su ratio book-to market.

- Categorización según su tamaño:
 - Empresas de gran capitalización bursátil.
 - Empresas de baja capitalización bursátil.
- Categorización según su ratio book-to market: Se divide en tres grupos según el percentil 30 y 70.
 - Empresas con bajo ratio book-to market.
 - Empresas con medio ratio book-to market.
 - Empresas con alto ratio book-to market.

Una vez divididas las empresas según su tamaño y ratio podemos construir 6 carteras diferentes combinando cada una de las categorías y tendríamos la siguiente tabla 2.1:

		Ratio book-to market		
		Bajo	Medio	Alto
Tamaño	Pequeño	P1	P2	P3
	Grande	P4	P5	P6

Tabla 2.1: Carteras generadas para el cálculo de los factores

De manera que, el factor SMB es el rendimiento promedio de las 3 carteras pequeñas menos el rendimiento promedio de las 3 carteras grandes, es decir,

$$SMB = \frac{P1 + P2 + P3}{3} - \frac{P4 + P5 + P6}{3}$$

Y el factor HML es el rendimiento promedio de las 2 carteras con un ratio book-to market alto menos el rendimiento promedio de las 2 carteras con un ratio book-to market bajo, es decir,

$$HML = \frac{P3 + P6}{2} - \frac{P1 + P4}{2}$$

Capítulo 3

Aplicaciones al IBEX 35

Gran parte del código de programación utilizado en este capítulo lo hemos obtenido de las siguientes páginas web [10] y [11] y del TFG [3].

3.1. Objetivos

El objetivo de este capítulo es validar el grado de cumplimiento de los dos modelos factoriales principales, el CAPM y el modelo de Tres factores de Fama - French a acciones del IBEX 35. Para ello vamos a usar el lenguaje R y el entorno de trabajo R-Studio, donde hemos programado los dos modelos anteriores.

3.2. Metodología

3.2.1. Fuente de datos

Para poder construir estos modelos, hemos descargado los rendimientos de la bolsa española desde el entorno R Studio que consigue los datos desde la página de Yahoo! Finance [15], y hemos creado un vector de acciones con los tickers de las empresas que pertenecen al IBEX 35.

Los factores europeos de tres factores de Fama - French los hemos obtenido de la siguiente página web [2].

3.2.2. Software utilizado

Hemos utilizado el lenguaje de programación R que es un software de libre acceso que se utiliza en la estadística, y hemos utilizado como entorno de programación R Studio. Además permite el uso de paquetes, como el de BatchGetSymbols [9], que tiene funciones como GetSymbols() o BatchGetSymbols() que nos han ayudado a descargar los rendimientos ajustados de la página de Yahoo! Finance, o el paquete Broom [12] que toma los resultados desordenados de las funciones incorporadas en R (como: lm, nls, o t.test) y los convierte en “tibbles” ordenados, tiene funciones como tidy() que ayudan a crear tablas con los parámetros estimados, los p-value e intervalos de confianza.

También hemos usado algunas funciones para ajustar el formato de las fechas como mutate(), roll-back(), filter(), y otras funciones como la de apa.reg.table() para generar una tabla en el estilo APA cada vez que hacemos una regresión.

3.2.3. Periodo temporal

Vamos a hacer un estudio de los rendimientos desde el 10 de Febrero de 2010 hasta el 10 de Febrero de 2020 ya que nos pareció que un periodo temporal de 10 años era suficientemente amplio para el estudio que queremos realizar y así también evitábamos coger la caída de la bolsa en Marzo de 2020.

3.2.4. Proceso del modelo CAPM y del modelo de tres factores de Fama - French

Respecto a las acciones que tomamos del IBEX 35, que son las diferentes empresas que cotizan en la bolsa española, hemos decidido eliminar alguna de las empresas del IBEX 35 debido a que habían entrado en la bolsa más tarde de la fecha de inicio elegida, así que nos hemos quedado con 25 empresas de la bolsa española. Aunque, una vez hecho el modelo de regresión nos hemos quedado con 5 acciones para hacer un estudio más extenso de ellas. Hemos elegido alguna acción que tuviera una alta ponderación en el índice de mercado de la bolsa española, que suelen ser empresas grandes, también hemos escogido como acciones un par de bancos, uno con una ponderación alta en el índice de mercado y otro banco con una menor ponderación para ver un poco sus diferencias, y por último hemos elegido alguna acción que tenga una baja ponderación en el índice de mercado, es decir, hemos buscado una empresa de menor volumen.

Como ya hemos dicho en el capítulo 2, el modelo CAPM es un modelo unifactorial, por lo que solo necesitamos calcular un factor, los coeficientes β . En cambio, para el modelo de tres factores de Fama - French, además de tener los coeficientes de los β , tenemos dos factores más, el SMB (Small Minus Big) que es la sensibilidad de un activo al tamaño del mismo y el factor HML (High Minus Low) que es el ratio book-to market. Por lo que tenemos que descargar los factores europeos de Fama - French a partir de una página web [2], que también lo hemos podido hacer desde el entorno R Studio. En este archivo que obtenemos, encontramos los datos desde Julio de 1990, pero con un formato de fecha que hemos tenido que modificar.

Como hemos conseguido los rendimientos ajustados diarios de las empresas del IBEX 35, y los factores europeos que hemos descargado son mensuales tenemos que modificar los rendimientos de manera que sean rendimientos mensuales. Luego, ajustamos las fechas de los factores y de nuestra prima de riesgo de manera que eliminamos los factores europeos anteriores a la fecha de inicio elegida y los factores europeos pasada la fecha seleccionada, que en nuestro caso es el 10 de Febrero de 2020.

Una vez hechas estas modificaciones, hemos combinado las estimaciones de los factores europeos del modelo con la prima de riesgo de cada acción y así tener todos los datos en una misma tabla. Este proceso nos sirve para poder ajustar por regresión el modelo de 3 factores de Fama - French (asociado a Mkt.RF, SMB, HML). Una vez tenemos este proceso, poder ajustar por regresión el modelo CAPM asociado a Mkt.RF, es sencillo, ya que simplemente creamos una data frame con los datos que necesitamos de los datos obtenidos de los factores europeos de Fama - French, y nos quedamos con el factor Mkt.RF.

Como ya hemos dicho al principio, las acciones que son nuestro vector de tickers está formado por 25 empresas diferentes de la bolsa española, pero hemos seleccionado 5 empresas, unas con una mayor ponderación en el índice de mercado y otras con una menor ponderación. Las empresas de las que vamos a hacer un estudio son las siguientes:

- Iberdrola, S.A. (Ticker: IBE.MC)
- Telefónica, S.A. (Ticker: TEF.MC)
- Banco de Sabadell, S.A. (Ticker: SAB.MC)
- Banco Santander, S.A. (Ticker: SAN.MC)
- Pharma Mar, S.A. (Ticker: PHM.MC)

3.3. Resultados

Una vez seleccionadas las 5 acciones, vamos a hacer una valoración cualitativa del grado de variabilidad explicada (R^2) por los modelos en cada una de las acciones.

Primero de todo, la variabilidad explicada es la variación en la variable respuesta que es explicada por un modelo lineal, es decir, es una medida que nos indica cómo de bien se ajusta nuestro modelo lineal a un conjunto de observaciones. Esta medida la encontramos entre 0 y 1.

Ticker	Nombre Empresa	R^2 CAPM	R^2 FF
SAN.MC	Banco Santander, S.A.	0.412	0.629
IBE.MC	Iberdrola, S.A.	0.245	0.376
TEF.MC	Telefónica, S.A.	0.341	0.502
SAB.MC	Banco de Sabadell, S.A.	0.220	0.327
PHM.MC	Pharma Mar, S.A.	0.189	0.193

Tabla 3.1: Variabilidad explicado de los modelos CAPM y 3 factores de FF

Vemos entonces, en la tabla 3.1, que la variabilidad explicada en las 5 acciones que hemos escogido es mayor en el modelo de tres factores de Fama - French que en el modelo CAPM, además nos damos cuenta que excepto en un par de acciones donde la diferencia entre la variabilidad explicada de los modelos es mínima, en el resto hay una diferencia de un 10% y en una acción la diferencia llega a ser de un 20%. También nos damos cuenta que este valor solo es mayor que 0.5 en tres ocasiones, por lo que podemos pensar que gran parte de la variabilidad de la prima de riesgo de las acciones no es explicada por los modelos.

Estudiamos más a fondo alguna de las acciones y vemos las diferencias entre los dos modelos. En las tablas de resultados, se detalla la siguiente información:

- b: ponderaciones de regresión no estandarizadas.
- β : ponderaciones de regresión estandarizadas.
- sr2: correlación semiparcial al cuadrado.
- r: correlación de orden cero.

Una ponderación b estadísticamente significativa indica que la ponderación β y la correlación semiparcial también son significativas. Se utilizan corchetes para encerrar los límites inferior y superior de un intervalo de confianza. Por último, * indica $p < 0.05$, ** indica $p < 0.01$.

Viendo las siguientes tablas vamos a darnos cuenta de las diferencias entre los dos modelos, ya que, un modelo que solo tiene en cuenta un factor para medir el riesgo (en este caso el sistemático) tendrá un coeficiente β menos preciso que si tenemos un modelo con tres factores de riesgo, ya que, cuantos más factores de riesgo tengamos más se aísla el efecto de cada uno y por tanto se precisa mejor el efecto del riesgo sistemático. De esta manera veremos que el factor de riesgo del coeficiente β en el modelo CAPM es más alto que en el otro modelo. Con lo cual, el coeficiente β que obtenemos del modelo de 3 factores de Fama- French que corresponde con el factor Mkt.RF será una mejor estimación de la sensibilidad del rendimiento.

- Banco Santander: Esta acción que hemos escogido, es un banco con una alta ponderación en el índice de mercado del IBEX 35. Respecto a las diferencias entre el CAPM y el modelo de tres factores, hemos dicho que el modelo de Fama - French nos aporta más información, lo podemos ver si nos fijamos en las tablas 3.2 y 3.3.

Vemos que el valor de la variabilidad explicada en el modelo de Fama - French es bastante alto, por lo que podemos decir que es su rendimiento se ajusta bien a este modelo propuesto. También podemos ver fijándonos en la tabla 3.3 que la estimación del coeficiente del factor SMB es negativo, situación concordante con la idea inicial de ser una empresa “big”. Vemos que la estimación del factor HML es positiva, por lo que podemos pensar que tenemos unos rendimientos asociados positivamente con momentos en el que el mercado prima un alto valor de mercado.

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.01	[-0.02, 0.00]					
Mkt.RF	1.09**	[0.85, 1.33]	0.64	[0.50, 0.78]	0.41	[0.28, 0.52]	0.64**
Fit	$R^2=0.412^{**}$ 95 %_CI [0.28,0.52]						

Tabla 3.2: Tabla modelo de regresión del modelo CAPM Banco Santander

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.00	[-0.01, 0.01]					
Mkt.RF	0.67**	[0.45, 0.89]	0.39	[0.27, 0.52]	0.12	[0.04, 0.20]	0.64**
SMB	-0.78**	[-1.35, -0.20]	-0.15	[-0.26, -0.04]	0.02	[-0.01, 0.06]	-0.24**
HML	1.76**	[1.30, 2.21]	0.49	[0.37, 0.62]	0.19	[0.09, 0.29]	0.69**
Fit	$R^2=0.629^{**}$ 95 %_CI [0.51,0.70]						

Tabla 3.3: Tabla modelo de regresión del modelo de 3 factores de FF Banco Santander

En el siguiente gráfico vemos las ponderaciones de regresión no estandarizadas junto a su intervalo de confianza al 95 % de los tres factores del modelo de Fama - French.

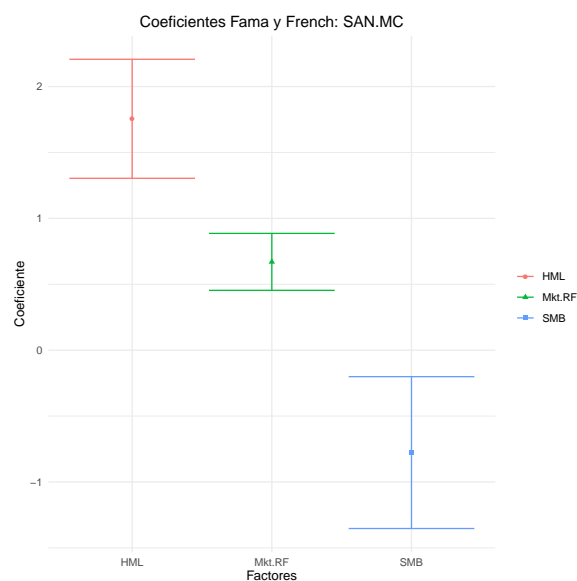


Figura 3.1: Coeficientes FF Banco Santander

- Banco Sabadell: Esta acción corresponde a un banco con una ponderación media del índice de mercado del IBEX 35. Las diferencias entre los dos modelos las vemos en las tablas 3.4 y 3.5, así que nos fijamos primero en el modelo de FF.

Vemos que el valor de la variabilidad explicada en el modelo de Fama - French no es demasiado alto, por lo que no podemos decir que se ajusta bien al modelo factorial. También nos fijamos en la tabla 3.5 y vemos que la estimación de los factores HML y SMB es muy parecida a los obtenidos antes con el Banco Santander.

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.01	[-0.03, 0.01]					
Mkt.RF	1.03*	[0.67, 1.38]	0.47	[0.31, 0.63]	0.22	[0.10, 0.34]	0.47**
Fit	$R^2=0.220^{**}$ 95 %_CI [0.10,0.34]						

Tabla 3.4: Tabla modelo de regresión del modelo CAPM Banco Sabadell

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.00	[-0.02, 0.01]					
Mkt.RF	0.65**	[0.27, 1.02]	0.30	[0.12, 0.47]	0.07	[-0.01, 0.14]	0.47**
SMB	-0.69	[-1.69, 0.31]	-0.11	[-0.26, 0.05]	0.01	[-0.02, 0.04]	-0.17
HML	1.59**	[0.81, 2.37]	0.35	[0.18, 0.52]	0.09	[0.01, 0.18]	0.49**
Fit	$R^2=0.327^{**}$ 95 %_CI [0.18,0.43]						

Tabla 3.5: Tabla modelo de regresión del modelo de 3 factores de FF Banco Sabadell

El siguiente gráfico muestra las ponderaciones de regresión no estandarizadas con su intervalo de confianza al 95 % de los 3 factores del modelo de Fama - French.

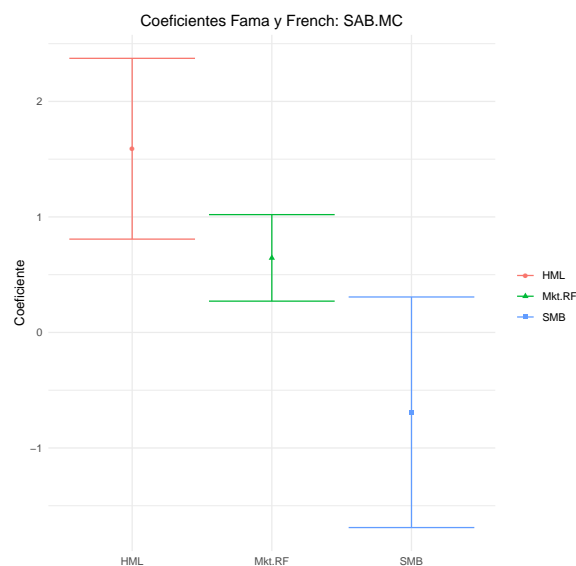


Figura 3.2: Coeficientes FF Banco Sabadell

Ambos bancos presentan coeficientes muy similares en los dos modelos factoriales, a pesar de ser dos empresas con volumen de negocio diferente. En este caso es posible que el sector determine la estructura común factorial más que otros elementos como es el volumen. La diferencia entre ellas se caracteriza en una mayor varianza específica del banco Sabadell.

- Telefónica: Observamos en las tablas 3.6 y 3.7 las diferencias de ambos modelos.

El análisis que vamos a hacer de esta acción es muy parecido al que hemos hecho con el Banco Santander. Vemos que el valor de la variabilidad explicada en el modelo de Fama - French supera el 0.5, por lo que podríamos decir que se tiene un buen ajuste al modelo factorial. Además la estimación del factor SMB es negativo, el valor más alto obtenido hasta ahora, luego tenemos una empresa donde se amplifica en la rentabilidad de las acciones la prima de riesgo por tamaño. Y la

estimación del factor HML es positiva, por lo que podemos pensar que tenemos unos rendimientos con un alto valor de mercado.

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.01	[-0.02,0.00]					
Mkt.RF	0.79**	[0.59, 0.99]	0.58	[0.44,0.73]	0.34	[0.21,0.45]	0.58**
Fit	$R^2=0.341^{**}$ 95 %_CI [0.21,0.45]						

Tabla 3.6: Tabla modelo de regresión del modelo CAPM Telefónica

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.00	[-0.01,0.00]					
Mkt.RF	0.60**	[0.40,0.80]	0.44	[0.29,0.59]	0.15	[0.05,0.25]	0.58**
SMB	-1.40**	[-1.94,-0.87]	-0.34	[-0.47,-0.21]	0.12	[0.03,0.20]	-0.41**
HML	0.64**	[0.22,1.06]	0.23	[0.08,0.37]	0.04	[-0.01,0.09]	0.46**
Fit	$R^2=0.502^{**}$ 95 %_CI [0.36,0.59]						

Tabla 3.7: Tabla modelo de regresión del modelo de 3 factores de FF Telefónica

El siguiente gráfico muestra las ponderaciones de regresión no estandarizadas con su intervalo de confianza al 95 % de los 3 factores del modelo de Fama - French.

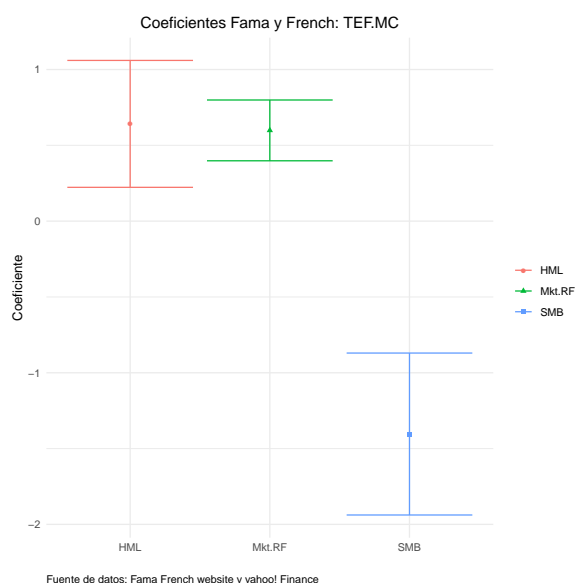


Figura 3.3: Coeficientes FF Telefónica

- **Iberdrola**: Es una de las empresas con mayor ponderación en el índice de mercado del IBEX 35. Obtenemos las siguientes tablas 3.8 y 3.9 y vemos las diferencias de los riesgos entre los dos modelos.

El análisis de esta acción es muy parecido al que hemos hecho con el Banco Santander, que también es una de las empresas con mayor volumen en la bolsa española. La proporción de la

variabilidad explicada en el modelo de Fama - French es muy bajo, luego podemos decir que este modelo no sería un buen ajuste al modelo factorial, y el modelo CAPM todavía peor ya que su variabilidad explicada es menor. La estimación del factor SMB es negativa, es menor que -1, luego tenemos una empresa “big”, donde el rendimiento obtenido está negativamente asociado a la prima de riesgo que aportan las empresas pequeñas frente a las grandes e incluso se amplificará la rentabilidad asociada a esta prima de riesgo. Y la estimación del factor HML es positiva, por lo que podemos pensar que tenemos unos rendimientos con un alto valor de mercado.

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	0.00	[-0.01,0.02]					
Mkt.RF	0.66**	[0.45, 0.87]	0.50	[0.34, 0.65]	0.25	[0.12,0.36]	0.50**
Fit	$R^2=0.245^{**}$ 95 %_CI [0.12,0.36]						

Tabla 3.8: Tabla modelo de regresión del modelo CAPM Iberdrola

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	0.01	[-0.00, 0.02]					
Mkt.RF	0.47**	[0.25, 0.69]	0.35	[0.19, 0.52]	0.10	[0.01,0.18]	0.50**
SMB	-1.15**	[-1.74, -0.56]	-0.29	[-0.43, -0.14]	0.08	[0.00,0.16]	-0.34**
HML	0.68**	[0.22, 1.14]	0.24	[0.08, 0.41]	0.05	[-0.01,0.11]	0.43**
Fit	$R^2=0.376^{**}$ 95 %_CI [0.23,0.48]						

Tabla 3.9: Tabla modelo de regresión del modelo de 3 factores de FF Iberdrola

El siguiente gráfico muestra las ponderaciones de regresión no estandarizadas con su intervalo de confianza al 95 % de los 3 factores del modelo de Fama - French.

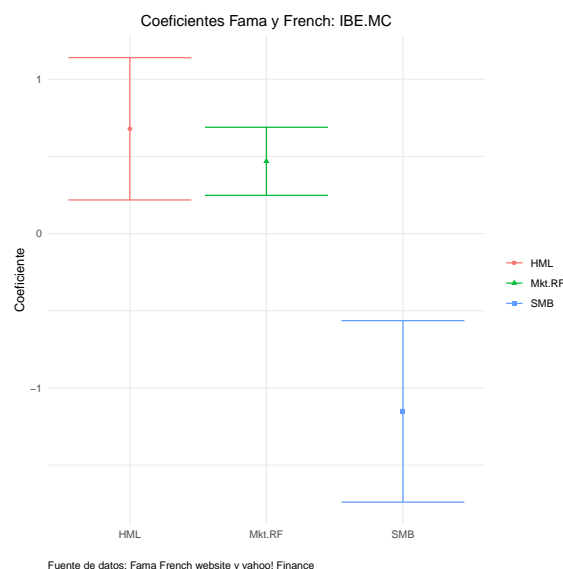


Figura 3.4: Coeficientes FF Iberdrola

- **Pharma Mar**: Es una empresa con una baja ponderación en el índice de mercado de la bolsa española. Tiene un modelo de negocio basado en la I+D+I, donde los impactos de avances científicos

producen volatilidad muy puntual y fuera de otros ciclos económicos que puedan justificar que los coeficientes asociados a SBM o HML hayan resultado estadísticamente nulos en estos modelos, así como un R^2 bajo.

Vemos que en este activo, la proporción de la variabilidad explicada tanto de un modelo como del otro, es prácticamente la misma, eso si, se encuentra por debajo de 0.5 en los dos casos por lo que podemos decir que estos modelos para este activo no se ajustan demasiado bien. También podemos ver, fijándonos en las tablas 3.10 y 3.11 que la estimación del factor Mkt.RF es casi igual en los dos modelos. Además de que el coeficiente de regresión del factor HML es cercano a 0, por lo que no habría prima de riesgo por valor.

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.01	[-0.03, 0.02]					
Mkt.RF	1.24**	[0.77, 1.70]	0.43	[0.27, 0.60]	0.19	[0.08, 0.31]	0.43**
Fit	$R^2=0.189^{**}$ 95 %_CI [0.08, 0.31]						

Tabla 3.10: Tabla modelo de regresión del modelo CAPM Pharma Mar

Predictor	b	b_95 %_CI	β	β _95 %_CI	sr2	sr2_95 %_CI	r
(Intercept)	-0.01	[-0.03, 0.02]					
Mkt.RF	1.27**	[0.73, 1.80]	0.44	[0.26, 0.63]	0.15	[0.04, 0.27]	0.43**
SMB	0.54	[-0.88, 1.97]	0.06	[-0.10, 0.23]	0.00	[-0.02, 0.02]	0.01
HML	-0.03	[-1.15, 1.08]	-0.01	[-0.19, 0.18]	0.00	[0.00, 0.00]	0.20*
Fit	$R^2=0.193^{**}$ 95 %_CI [0.07,0.30]						

Tabla 3.11: Tabla modelo de regresión del modelo de tres factores de FF Pharma Mar

En la gráfica siguiente vemos las ponderaciones de regresión no estandarizadas junto a su intervalo de confianza al 95 % de los tres factores del modelo de Fama - French.

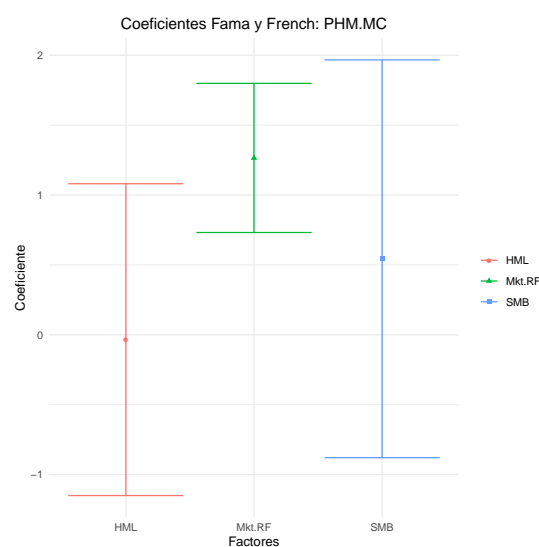


Figura 3.5: Coeficientes FF Pharma Mar

Bibliografía

- [1] FAMA, E. y FRENCH, K., *Common risk factors in the returns on stocks and bonds*, Universidad de Chicago, 1993 https://rady.ucsd.edu/faculty/directory/valkanov/pub/classes/mfe/docs/fama_french_jfe_1993.pdf
- [2] FRENCH, K., *Página web Factores europeos de Fama-French*: http://mba.tuck.dartmouth.edu/pages/faculty/ken.french/data_library.html.
- [3] GARCÍA, L., *TFG: Cálculo del coste de los recursos propios en la bolsa española mediante el modelo de 3 factores de Fama y French*, Universidad Politécnica de Valencia, 2020
- [4] KACHAPOVA, F., *Mathematical models in portfolio analysis*, Bookboon, 2013.
- [5] MARKOWITZ, H., *Portfolio Selection del Journal of Finance*, The Journal of Finance, 7, n°1, 1952.
- [6] MARKOWITZ, H., *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, 1959.
<https://cowles.yale.edu/sites/default/files/files/pub/mon/m16-all.pdf>
- [7] NOVALES, A., *Modelos Factoriales*, Departamento de Economía Cuantitativa Universidad Complutense de Madrid, 2014.
<https://www.ucm.es/data/cont/media/www/pag-41460/Reduccion%20dimensionalidad.pdf>
- [8] PEÑA, D., *Análisis de datos multivariantes*, Mc Graw Hill, 2002.
- [9] PERLIN, M., *BatchGetSymbols: Downloads and Organizes Financial Data for Multiple Tickers*. R package version 2.6.1, 2020.
<https://CRAN.R-project.org/package=BatchGetSymbols>
- [10] REGENSTEIN, J., *Calculating Beta in the Capital Asset Pricing Model*. R Views, 2018.
<https://rviews.rstudio.com/2018/02/08/capm-beta/>.
- [11] REGENSTEIN, J., *Introduction to Fama French*. R Views, 2018.
<https://rviews.rstudio.com/2018/04/11/introduction-to-fama-french/>.
- [12] ROBINSON, D., HAYES, A. y SIMON, C., *broom: Convert Statistical Objects into Tidy Tibbles*. R package version 0.7.10, 2021.
<https://CRAN.R-project.org/package=broom>
- [13] SHARPE, W., *Asset capital prices: a theory of market equilibrium under risky conditions*, The Journal of Finance, 19, n°3, 1964.
https://psc.ky.gov/pscecf/2012-00221/rateintervention@ag.ky.gov/10252012f/sharpe_-_CAPM.pdf
- [14] *Página web Economipedia*: <https://economipedia.com/definiciones>

- [15] Página web Yahoo!Finance IBEX-35: <https://es.finance.yahoo.com/quote/%5EIBEX/history?p=%5EIBEX>

Anexo

Anexo A

Demostraciones de los teoremas del capítulo 1

Vamos a hacer un pequeño resumen de datos que necesitamos para no tener que volver al capítulo 1 cada vez que los referenciamos. Tenemos en cuenta los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} U^t \mathbf{x} = 1 \\ M^t \mathbf{x} = \mu \end{cases} \quad \mu \in \mathbb{R} \quad (\text{A.1})$$

Sabemos que este sistema tiene una solución ya que M y U no son proporcionales, la solución la encontramos partiendo del sistema homogéneo.

$$\begin{cases} U^t \mathbf{x} = 0 \\ M^t \mathbf{x} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Definimos Q como el conjunto de soluciones de A.1, q una solución de A.1 y W el conjunto de soluciones de A.2.

Para demostrar el teorema 1.2, vamos a introducir el siguiente lema.

Lema A.1. Sea $Q = \{q + w \mid w \in W\}$ el subespacio afín de K . Entonces el vector de norma mínima $\mathbf{x}_{\min} \in Q$ es único y viene dado por la siguiente fórmula: $\mathbf{x}_{\min} = q - \text{Proj}_W q$.

Teorema 1.2. Hay una única cartera envolvente con rendimiento esperado μ , tal que $\mathbf{x}_\mu = q - \text{Proj}_W q$, siendo q una solución de A.1.

Demostración. Una cartera envolvente \mathbf{x} con rendimiento esperado μ tiene una solución en el sistema A.1.

Luego tenemos que:

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = E(\mathbf{x}^2) = \text{Var}(\mathbf{x}) + [E(\mathbf{x})]^2 = \text{Var}(\mathbf{x}) + \mu^2$$

donde $E(\mathbf{x}) = \mu$ para un μ fijo, y como tomamos el menor valor posible de la varianza ya que una cartera envolvente es la cartera que presenta menos riesgo (varianza) dentro de todas las carteras con el mismo rendimiento esperado, entonces si aplicamos el lema A.1, tenemos que $\mathbf{x}_{\min} = q - \text{Proj}_W q = \mathbf{x}_\mu$. \square

Enunciamos el siguiente lema que vamos a utilizarlo para el teorema 1.3.

Lema A.2. Sea v_1, \dots, v_n una base ortogonal de V entonces $\text{Proj}_V q = \frac{\langle q, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \dots + \frac{\langle q, v_n \rangle}{\langle v_n, v_n \rangle} v_n$.

Teorema 1.3. Sea v_1, \dots, v_{n-2} un sistema de soluciones ortogonal al sistema A.2. Entonces,

1. Para cualquier $y \in H$ definimos $\langle y, v_k \rangle = \text{Cov}(y, v_k)$ con $k = 1, \dots, n-2$.

2. La cartera envolvente con rendimiento esperado μ es: $\mathbf{x}_\mu = q - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$, donde q es una solución de A.1.
3. La envolvente es el conjunto $\{\mathbf{x}_\mu \mid \mu \in \mathbb{R}\}$.

Demostración.

1. Sabemos que cada v_k es solución del sistema A.2, por lo que $E(v_k) = Mv_k = 0$. Y si además tomamos un $y \in H$ tenemos:

$$\langle y, v_k \rangle = E(y v_k) = \text{Cov}(y, v_k) + E(y)E(v_k) = \text{Cov}(y, v_k)$$

2. El sistema v_1, \dots, v_{n-2} es una base ortogonal en W , luego si aplicamos el teorema 1.2, y el lema A.2. Tenemos que:

$$\mathbf{x}_\mu = q - \text{Proj}_W q = q - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$$

siendo q una solución de A.1.

3. Ya hemos visto en el glosario que la envolvente es el conjunto de todas las carteras envolventes, donde cada una de ellas es la cartera que tiene menor riesgo para un $\mu \in \mathbb{R}$ fijo. Por lo tanto, tenemos que la envolvente es el conjunto $\mathbf{x}_\mu = q - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$ con $\mu \in \mathbb{R}$. □

Teorema 1.4 (Principio de separación de dos fondos). Sea \mathbf{x} e \mathbf{y} dos carteras envolventes, siendo $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$. Entonces, la envolvente es el conjunto $\{\gamma\mathbf{x} + (1 - \gamma)\mathbf{y} \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$.

Demostración. Tenemos que ver que $\text{Env}(A_1, \dots, A_n) = \{\gamma\mathbf{x} + (1 - \gamma)\mathbf{y} \mid \gamma \in \mathbb{R}\}$, por lo tanto vamos a hacerlo por doble contenido. Tomamos $E(\mathbf{x}) = \mu_1$ y $E(\mathbf{y}) = \mu_2$ y fijamos las soluciones ortogonales v_1, \dots, v_{n-2} del sistema A.2. Como \mathbf{x} e \mathbf{y} son carteras envolventes por el teorema 1.3, para algún μ_1, μ_2 y los vectores q_1, q_2 se sigue

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mu_1} = q_1 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q_1, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k \quad \text{y} \quad \begin{cases} U^t q_1 = 1 \\ M^t q_1 = \mu_1 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

y

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}_{\mu_2} = q_2 - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q_2, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k \quad \text{y} \quad \begin{cases} U^t q_2 = 1 \\ M^t q_2 = \mu_2 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Por lo tanto, para algún $\gamma \in \mathbb{R}$ y aplicando (A.3) y (A.4) tenemos,

$$U^t(\gamma q_1 + (1 - \gamma)q_2) = \gamma U^t q_1 + (1 - \gamma)U^t q_2 = \gamma + (1 - \gamma) = 1$$

Con lo cual,

$$U^t(\gamma q_1 + (1 - \gamma)q_2) = 1 \quad (\text{A.5})$$

\supseteq) Suponemos que $\mathbf{z} = \gamma\mathbf{x} + (1 - \gamma)\mathbf{y}$ para algún $\gamma \in \mathbb{R}$. Denotamos $q = \gamma q_1 + (1 - \gamma)q_2$ y $\mu = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2$ y aplicando (A.3) y (A.4), tenemos,

$$\mathbf{z} = \gamma q_1 + (1 - \gamma)q_2 - \sum_{k=1}^{n-2} [\gamma \langle q_1, v_k \rangle + (1 - \gamma) \langle q_2, v_k \rangle] \frac{v_k}{\langle v_k, v_k \rangle} = q - \sum_{k=1}^{n-2} \langle q, v_k \rangle \frac{v_k}{\langle v_k, v_k \rangle}$$

Aplicando ahora (A.5), tenemos que $U^t q = 1$ y $M^t q = \gamma M^t q_1 + (1 - \gamma)M^t q_2 = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 = \mu$.

Obtenemos así $\begin{cases} U^t q = 1 \\ M^t q = \mu \end{cases}$ de manera que $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\mu$ y aplicando ahora el teorema 1.2 y el teorema 1.3 vemos que $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\mu \in \text{Env}(A_1, \dots, A_n)$.

\subseteq) Tomamos ahora $\mathbf{z} \in \text{Env}(A_1, \dots, A_n)$. Vamos a denotar $\mu = E(\mathbf{z})$. Resolvemos ahora la siguiente ecuación:

$$\gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 = \mu \Rightarrow \gamma(\mu_1 - \mu_2) = \mu - \mu_2 \quad (\text{A.6})$$

Si $\mu_1 = \mu_2$, entonces aplicamos el teorema 1.2 y tenemos $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\mu_1} = \mathbf{x}_{\mu_2} = \mathbf{y}$. Por otro lado, si $\mu_1 \neq \mu_2$, la solución de la ecuación (A.6) es $\gamma = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$.

Denotamos ahora $q = \gamma q_1 + (1 - \gamma)q_2$. Por (A.5) tenemos $U^t q = 1$ y además si aplicamos la ecuación anterior (A.6) tenemos, $M^t q = \gamma M^t q_1 + (1 - \gamma)M^t q_2 = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 = \mu$. Con lo que tenemos

$$\begin{cases} U^t q = 1 \\ M^t q = \mu \end{cases}.$$

Tomamos la cartera envolvente $\mathbf{x}_\mu = q - \sum_{k=1}^{n-2} \frac{\langle q, v_k \rangle}{\langle v_k, v_k \rangle} v_k$. Luego es claro que $\mathbf{x}_\mu = \gamma\mathbf{x} + (1 - \gamma)\mathbf{y}$. Luego si aplicamos el teoremas 1.2 y el teorema 1.3, vemos que \mathbf{x}_μ es la única cartera envolvente con rendimiento esperado μ , por lo tanto, $\mathbf{z} = \mathbf{x}_\mu = \gamma\mathbf{x} + (1 - \gamma)\mathbf{y}$ \square

Teorema 1.5. Sea $\mu_1 \neq \mu_2$ entonces tenemos:

1. Si $\rho \neq \pm 1$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano tomando solo la hipérbola con $\sigma > 0$.

$$\frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \quad A > 0, B > 0 \quad (\text{Figura 1.1a}) \quad (\text{A.7})$$

2. Si $\rho = -1$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por dos rectas que salen de un punto del eje μ . (Figura 1.1b).
3. Si $\rho = 1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por dos rectas que salen de un punto del eje μ . (Figura 1.1b).
4. Si $\rho = 1$ y $\sigma_1 = \sigma_2$. El conjunto factible y la envolvente de los activos está representada en el plano por una recta vertical dada por $\sigma = \sigma_1$. (Figura 1.1c).

Demostración. Estamos en el caso $n=2$, es decir que dentro de nuestra cartera \mathbf{x} , tenemos dos activos.

Para cualquier cartera con dos activos podemos representarla de la siguiente manera $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix}$

1. Tiene que cumplirse que $M^t \mathbf{x} = \mu$. Por lo que, $\mu_1 \gamma + (1 - \gamma)\mu_2 = \mu \Rightarrow \gamma = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} = a^* \mu + b^*$ con $a^* = \frac{1}{\mu_1 - \mu_2}$ y $b^* = \frac{-\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$.

$$\text{Entonces, } \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \gamma \\ 1 - \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = (a^* \mu + b^*) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\mu + b \text{ con } a = a^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ y } b = b^* \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\sigma^2 = \text{Var}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^t S \mathbf{x} = (a\mu + b)^t S (a\mu + b) = \mu^2 a^t S a + \mu (a^t S b + b^t S a) + b^t S b$. Entonces vemos que la relación entre el rendimiento esperado μ y el riesgo σ , viene dado por una ecuación de segundo grado:

$$\mu^2 a^t S a + \mu (a^t S b + b^t S a) - \sigma^2 + b^t S b = 0 \quad (\text{A.8})$$

Sabemos que la fórmula general de una curva de grado 2 es: $c_{11}u^2 + 2c_{12}uv + c_{22}v^2 + 2c_{13}u + 2c_{23}v + c_{33} = 0$, luego en nuestro caso, $c_{11} = a^t S a$, $c_{22} = -1$, $c_{33} = b^t S b$, $c_{13} = \frac{1}{2}(a^t S b + b^t S a)$ y $c_{12} = c_{23} = 0$.

Si tomamos ahora M_2 y M_3 .

$$M_2 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{vmatrix} = c_{11}c_{22} - c_{12}^2 = -a^t S a, \text{ vemos que } M_2 < 0 \text{ ya que } S \text{ es definida positiva}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} \\ c_{11} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ 0 & -1 & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_{11} & c_{13} \\ c_{13} & c_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} (a^t S a + b^t S b)^2 - (a^t S a) (b^t S b)$$

Como S es una matriz definida positiva, tenemos $(am + b)^t S (am + b) > 0$ para un $m \in \mathbb{R}$, entonces, $m^2 a^t S a + m(a^t S b + b^t S a) + b^t S b > 0$. Por lo tanto,

$$\frac{1}{4} (a^t S a + b^t S b)^2 - (a^t S a)(b^t S b) = (a^t S a + b^t S b)^2 - 4(a^t S a)(b^t S b) < 0$$

Esto quiere decir que $M_3 < 0$ y como $M_2 < 0$ entonces la ecuación (A.8) define una hipérbola no degenerada con el eje real paralelo al eje $O\sigma$. Esta ecuación podemos transformarla a forma canónica tomando cuadrados para μ , de manera que obtendríamos la ecuación (A.7).

Para los siguientes apartados, tomamos $\mu = \mu_x$ y $\sigma = \sigma_x$. Además como los rendimientos son r_1 y r_2 tenemos que $x = \gamma r_1 + (1 - \gamma)r_2$ luego,
$$\begin{cases} \mu = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 \\ \sigma^2 = \gamma^2\sigma_1^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\sigma_{12} + (1 - \gamma)^2\sigma_2^2 \end{cases}$$

2. Como $\rho = -1$, entonces tenemos que $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2 = -\sigma_1\sigma_2$, con lo cual, $\sigma^2 = (\gamma\sigma_1 - (1 - \gamma)\sigma_2)^2$.

De manera que como $\sigma > 0$ obtenemos el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \mu = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 & (1) \\ \sigma = |\gamma\sigma_1 - (1 - \gamma)\sigma_2| & (2) \end{cases}$$

De (1) sacamos que: $\gamma = \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$ y $1 - \gamma = \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2}$. Ahora, si sustituimos esto en (2) tenemos:

$$\sigma = \left| \frac{\mu - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_1 - \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2} \sigma_2 \right| = \left| \frac{\mu(\sigma_1 + \sigma_2) - \mu_2\sigma_1 - \mu_1\sigma_2}{\mu_1 - \mu_2} \right| = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{|\mu_1 - \mu_2|} \cdot \left| \mu - \frac{\mu_2\sigma_1 + \mu_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \right|$$

Si llamamos $p = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{|\mu_1 - \mu_2|}$ y $\mu_0 = \frac{\mu_2\sigma_1 + \mu_1\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$, nos queda la ecuación $\sigma = p|\mu - \mu_0|$ que define dos rectas que empiezan en el punto $(0, \mu_0)$.

3. Mismo razonamiento que antes pero teniendo en cuenta que tomamos $\rho = 1$ y $\sigma_1 \neq \sigma_2$.

4. Como $\rho = 1$, entonces tenemos que $\sigma_{12} = \rho\sigma_1\sigma_2 = \sigma_1\sigma_1 = \sigma_1^2$, con lo cual, $\sigma^2 = \gamma^2\sigma_1^2 + 2\gamma(1 - \gamma)\sigma_1^2 + (1 - \gamma)^2\sigma_1^2 = \sigma_1^2(\gamma^2 + 2\gamma(1 - \gamma) + (1 - \gamma)^2) = \sigma_1^2(\gamma + 1 - \gamma)^2 = \sigma_1^2$.

De manera que obtenemos el siguiente sistema:
$$\begin{cases} \mu = \gamma\mu_1 + (1 - \gamma)\mu_2 \\ \sigma = \sigma_1 \end{cases} \quad \text{donde se define la recta vertical } \sigma = \sigma_1.$$

□

Teorema 1.6.

1. La envolvente esta representada en el plano por la hipérbola:

$$\frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \quad \sigma > 0, A > 0, B > 0 \quad (\text{A.9})$$

2. La región factible es la región a la derecha de la curva (1.5) para $n \geq 3$.

3. La cartera x_{min} con el menor riesgo corresponde al vértice de la hipérbola, es el punto (\sqrt{A}, μ_0) .

4. La frontera eficiente está representada en el plano (σ, μ) por la mitad superior de la hipérbola

$$\begin{cases} \frac{\sigma^2}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)^2}{B} = 1 \\ \sigma > 0 \\ \mu \geq \mu_0 \end{cases}$$

Demostración.

1. Sea x_μ una cartera envolvente con rendimiento esperado μ y sea σ^2 su varianza. Ya hemos visto que la solución q es una función lineal de parámetro μ del sistema de ecuaciones lineales A.1. Aplicando el Teorema 1.3.2 tenemos que la cartera envolvente \mathbf{x}_μ es también una función lineal respecto μ , es decir, $\mathbf{x}_\mu = b\mu + c$ siendo c, b vectores independientes de μ y $b \neq \mathbf{0}$.

El resto de la demostración se sigue como en la demostración del teorema 1.5.1.

2. Sabemos que la curva (A.9) representa la cartera envolvente, el resto de carteras con mayores valores de la varianza se encuentran a la derecha de la curva.
3. Para la ecuación (A.9) vemos que el vértice derecho de la hipérbola con coordenadas (\sqrt{A}, μ_0) corresponde con la cartera de menor riesgo.
4. Cada valor de la región factible de σ , exceptuando el valor del vértice, corresponde con dos puntos de la envolvente y dos valores de μ . El punto más alto con mayor valor de μ esta en la frontera eficiente.

□

Lema 1.7. El rendimiento del activo libre de riesgo esta en la envolvente, es decir, $f \in Env(A_1, \dots, A_n, F)$.

Demostración. Sabemos que la $\sigma_f^2 = Var(f) = 0$, por lo tanto la desviación típica también será nula, $\sigma_f = 0$, y el valor 0 es el menor valor posible que puede tomar la desviación típica, con lo cual, f esta en la envolvente. □

Lema 1.8.

1. Sea \mathbf{x} una cartera de activos A_1, \dots, A_n y sea \mathbf{y} otra cartera de los activos A_1, \dots, A_n, F de manera que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$ para algún $\lambda \in \mathbb{R} \iff (\sigma_y, \mu_y) \in R_{1x} \cup R_{2x}$
2. La región factible de los activos A_1, \dots, A_n, F viene dada por el conjunto

$$\{R_{1x} \cup R_{2x} \mid \mathbf{x} \text{ cartera de los activos } A_1, \dots, A_n, F\} \quad (\text{Figura 1.3})$$

Demostración.

1. \Rightarrow) Vamos a suponer que \mathbf{x} es nuestra cartera de activos A_1, \dots, A_n y que \mathbf{y} otra cartera de los activos A_1, \dots, A_n, F de manera que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$. Luego vamos a llamar $\sigma = \sigma_y$ y $\mu = \mu_y$, por lo tanto tenemos que $\mu = \lambda \mu_x + (1 - \lambda)f$ y que $\sigma^2 = \lambda^2 \sigma_x^2$ con lo cual $\sigma = |\lambda| \sigma_x$. De esta manera tenemos que estudiar dos casos:

- Caso $\lambda < 0$: Tenemos que $\sigma = -\lambda \sigma_x \Rightarrow \lambda = -\frac{\sigma}{\sigma_x}$. Si sustituimos ahora en μ tenemos:

$$\mu = -\frac{\sigma}{\sigma_x} \mu_x + (1 + \frac{\sigma}{\sigma_x})f \Rightarrow \mu = f - \frac{\mu_x - f}{\sigma_x} \sigma \text{ con } \sigma \geq 0, \text{ luego tenemos } R_{2x}.$$

- Caso $\lambda \geq 0$: Tenemos que $\sigma = \lambda \sigma_x \Rightarrow \lambda = \frac{\sigma}{\sigma_x}$. Si sustituimos ahora en μ tenemos:

$$\mu = \frac{\sigma}{\sigma_x} \mu_x + (1 - \frac{\sigma}{\sigma_x})f \Rightarrow \mu = f + \frac{\mu_x - f}{\sigma_x} \sigma \text{ con } \sigma \geq 0, \text{ luego tenemos } R_{1x}.$$

\Leftarrow) Ahora suponemos que tenemos una cartera \mathbf{y} tal que $(\sigma_y, \mu_y) \in R_{1x} \cup R_{2x}$ y tenemos que ver si se cumple que esta cartera es $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$ siendo \mathbf{x} una cartera de los activos A_1, \dots, A_n .

Tomando $\lambda = \pm \frac{\sigma}{\sigma_x}$ tenemos que $\mu = \pm \frac{\sigma}{\sigma_x} \mu_x + \left(1 - \left(\pm \frac{\sigma}{\sigma_x}\right)\right)f$ y como $\mu = \mu_y$ tenemos que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$.

2. Tenemos que probar que los activos A_1, \dots, A_n, F son de la cartera \mathbf{y} si y solo si $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$ tomando $\lambda \in \mathbb{R}$ y \mathbf{x} la cartera de activos A_1, \dots, A_n .
 \Rightarrow) Suponemos que \mathbf{y} es una cartera de activos A_1, \dots, A_n, F . Entonces, $\mathbf{y} = kf + y_1 r_1 + \dots + y_n r_n$ donde $k + y_1 + \dots + y_n = 1 \Rightarrow y_1 + \dots + y_n = 1 - k$. Sea $\lambda = 1 - k$ y $\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}(y_1 r_1 + \dots + y_n r_1)$. Por lo tanto, \mathbf{x} es una cartera de activos A_1, \dots, A_n y $\lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f = \mathbf{y}$.
 \Leftarrow) Suponemos que $\mathbf{y} = \lambda \mathbf{x} + (1 - \lambda)f$ y \mathbf{x} es la cartera de activos A_1, \dots, A_n . Entonces sabemos que $\mathbf{x} = x_1 r_1 + \dots + x_n r_n$ sabiendo que $x_1 + \dots + x_n = 1$. Luego, $\lambda x_1 r_1 + \dots + \lambda x_n r_n + (1 - \lambda)f$ y $\lambda x_1 + \dots + \lambda x_n + (1 - \lambda) = \lambda(x_1 + \dots + x_n) + (1 - \lambda) = \lambda + (1 - \lambda) = 1$. Por lo que tenemos que \mathbf{y} es una cartera de los activos A_1, \dots, A_n, F . \square

Lema 1.9. Consideramos la rama derecha de la hipérbola (1.5) representada por la $Env(A_1, \dots, A_n)$. Si suponemos que $f \neq \mu_0$, entonces hay una recta tangente a la hipérbola desde el punto $(0, f)$ y viene dada por la ecuación (1.7)

$$\mu = f \pm \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$$

siendo $(\sigma_t = \sqrt{A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2}}, \mu_t = \mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f})$ son las coordenadas del punto tangente t .

Demostración. Si tomamos la ecuación típica de una hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, la recta tangente que pasa por el punto tangente (X, Y) viene dada por la ecuación $\frac{xX}{a^2} - \frac{yY}{b^2} = 1$. Por lo que la recta tangente de nuestra hipérbola viene dada por el punto tangente (σ_t, μ_t) de manera que tenemos la siguiente ecuación $\frac{\sigma \sigma_t}{A} - \frac{(\mu - \mu_0)(\mu_t - \mu_0)}{B} = 1$.

Como sabemos que la recta tangente pasa por el punto $(0, f)$ tenemos:

$$\frac{0 \cdot \sigma_t}{A} - \frac{(f - \mu_0)(\mu_t - \mu_0)}{B} = 1 \Rightarrow \mu_t - \mu_0 = \frac{B}{\mu_0 - f} \Rightarrow \mu_t = \mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f}$$

Si sustituimos el resultado en la ecuación de la hipérbola obtenemos σ_t .

$$\frac{\sigma^2}{A} = 1 + \frac{(\mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f} - \mu_0)^2}{B} \Rightarrow \sigma^2 = A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2} \Rightarrow \sigma_t = \sqrt{A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2}}$$

\square

Teorema 1.10. Suponemos que $f \neq \mu_0$ y sea $t = (\sigma_t, \mu_t)$ el punto tangente.

1. La envolvente viene representada por el conjunto $R_{1t} \cup R_{2t} = \{(\sigma, \mu) \mid \mu = f \pm \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma, \sigma \geq 0\}$.
2. La región factible es el ángulo formado por las rectas $R_{1t} = \mu = f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$ y $R_{2t} = \mu = f - \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$ incluyendo también las fronteras.

Demostración.

1. Como el punto de tangencia t se encuentra en la hipérbola, y le corresponde una única cartera de la envolvente de activos A_1, \dots, A_n , entonces las rectas R_{1t} y R_{2t} vienen dadas por la recta tangente.
2. Lo hemos demostrado en el Lema 1.8. \square

Teorema 1.11. Sea $f < \mu_0$. (Ver en Figura 1.4).

1. La recta tangente a la hipérbola empezando en el punto $(0, f)$ esta encima de la hipérbola.
2. La región factible de los activos (A_1, \dots, A_n, F) es el conjunto $\{(\sigma, \mu) \mid f - \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma \leq \mu \leq f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma, \sigma \geq 0\}$.
3. La frontera eficiente $(EF(A_1, \dots, A_n, F))$ viene representada por la recta $R_{1t} = f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma$.

Demostración.

1. Como ya hemos visto en el Lema 1.9, $\mu_t = \mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f}$ y $f < \mu_0$. Entonces, $\mu_t > \mu_0$, por lo que el punto de tangencia está encima del vértice y la recta tangente está encima de la hipérbola.
2. Por el Teorema 1.10 es el conjunto $\{(\sigma, \mu) \mid f - \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma \leq \mu \leq f + \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma, \sigma \geq 0\}$ es la región factible de los conjuntos A_1, \dots, A_n, F .
3. Por el Teorema 1.10 también vemos que la frontera eficiente viene representada por la recta R_{1t} \square

Teorema 1.12. Suponemos que $f = \mu_0$.

1. No existe una recta tangente a la hipérbola desde el punto $(0, f)$.
2. La región factible de los activos A_1, \dots, A_n, F es el ángulo formado entre las asíntotas de la hipérbola sin incluirlas (siendo las asíntotas: $\mu = \mu_0 \pm \sqrt{\frac{B}{A}} \sigma$).
3. No existe la envolvente $Env(A_1, \dots, A_n, F)$, es decir, entre las carteras con un determinado rendimiento esperado el límite inferior del riesgo no se alcanza.
4. No existe la frontera eficiente $EF(A_1, \dots, A_n, F)$, es decir, entre las carteras con un riesgo dado el límite superior del rendimiento esperado no se alcanza.

Demostración.

1. Sabemos por el teorema anterior que la recta tangente pasa por los puntos $(0, f)$ y (σ_t, μ_t) . Ahora bien, si $\mu_0 = f$, entonces si hiciéramos tender μ_0 a f en σ_t y μ_t se tendría:

$$(\sigma_t, \mu_t) = \left(\sqrt{A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2}}, \mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f} \right) \xrightarrow{\mu_0 \rightarrow f} (+\infty, +\infty)$$

Por lo tanto no existe una recta tangente.

2. Ya hemos visto que el punto (σ_t, μ_t) tiende a infinito, por lo que, si sustituimos en la ecuación de la recta tangente (1.7), obtenemos las asíntotas de la hipérbola que son dos rectas que empiezan en el punto $(0, f = \mu_0)$.

$$\begin{aligned} \mu = f \pm \frac{\mu_t - f}{\sigma_t} \sigma &= f \pm \frac{\mu_0 + \frac{B}{\mu_0 - f} - f}{\sqrt{A + \frac{AB}{(\mu_0 - f)^2}}} \sigma = f \pm \frac{(\mu_0(\mu_0 - f) + B - f(\mu_0 - f))}{\sqrt{A(\mu_0 - f)^2 + AB}} = \\ &= f \pm \frac{(\mu_0 - f)^2 + B}{\sqrt{A(\mu_0 - f)^2 + AB}} = \mu_0 \pm \sqrt{\frac{B}{A}} \sigma \end{aligned}$$

3. Se sigue por el apartado anterior, ya que hemos visto que la región factible de los activos es el ángulo formado entre las asíntotas de la hipérbola sin incluirlas, con lo que no podemos obtener el límite inferior del riesgo.
4. De la misma manera, vemos que tampoco existe la frontera eficiente. \square

