Relaciones entre espacios L^p y ℓ_p

Alejandro Lostado Salvatierra

Trabajo de fin de grado de Matemáticas

Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo: Luciano Abadías Ullod
Julio Bernués Pardo

7 de julio de 2022

Summary

The L^p spaces (whose definition will be remembered in Chapter 1) form a very important part of Banach spaces in the area of Functional Analysis and topological vector spaces. Due to its their key role in the analysis of measure and probability spaces, L^p spaces are also used in certain problems in physics, statistics, finance, engineering, and other disciplines.

They are sometimes called Lebesgue's spaces in honor to *Henri Lebesgue* (1875–1941), although according to various sources they were first introduced by *Frigyes Riesz*. The first spaces to appear above 1904 are the spaces L^1 since they are the basis of the study of integrable functions in the Lebesgue sense. Because of the duality with these spaces, the spaces L^∞ of bounded functions appear.

Of independent interest, but no less importants the Hilbert space L^2, whose origins are linked to basic questions of Fourier Analysis. As consequence, it seems natural to study what happens with the spaces L^p with $1 \leq p \leq \infty$.

Throughout this work, we will not focus on visualizing typical properties of these L^p spaces (such as for example seeing that they are normed spaces, Banach spaces, etc.), we will take them for granted (due to the information obtained throughout the degree) and we will collect them (the most important ones) in the Chapter 1.

Thus, Chapter 1 is dedicated to remembering the results and concepts that we will need and we will allude to throughout the job. In it we will enunciate the *Multinomial Theorem*, the *Monotone Convergence Theorem*, the *Dominated Convergence Theorem* and the *Closed Graph Theorem*. Then, we will introduce the concepts of the L^p spaces, discussed above, and spaces of sequences ℓ_p, which are a special case of the L^p spaces as we will see. After this we will give three important properties and state the *Hölder's Inequality*.

Chapter 2 is dedicated to give conditions so that the content between spaces of function with different measures $L^p(\mu)$ and $L^q(\nu)$ is (or is not) present. To do this, we will first present two examples of well-known relationships in Mathematical Analysis. Later, we will look for a more general content between function spaces, and finally we will characterize all relations between spaces with positive measures.

Chapter 3 is dedicated to define the *Rademacher functions* and the *Walsh functions*, two types of functions that we will see if they form (or not) an orthonormal basis of L^2. Later, we will prove the famous *Khintchine inequality*, which together with a corollary that we will prove, finds ℓ_2 as a subspace of L^p (for real $p \geq 1$) through the functions of Rademacher. We will see the case $p = \infty$ as a singular case for which we will see that depending on whether we consider $\mathbb{R}$ or $\mathbb{C}$, the result varies.

Finally, Chapter 4 is dedicated to see the studies carried out by *Kadec and Pelcynski* about the structure of the subspaces of L^p. Through the results of Chapter **??** and new results about a type of subspace that we will define, we will have information about any dimensional infinite subspace of a L^p space.

Resumen

Los espacios L^p (cuya definición será recordada en el Capítulo 1) forman una parte muy importante de espacios de Banach en el área del Análisis Funcional y de espacios vectoriales topológicos. Debido a su papel clave en el análisis de los espacios de medida y probabilidad, los espacios L^p también se utilizan en ciertos problemas en física, estadística, finanzas, ingeniería y otras disciplinas.

A veces se denominan espacios de Lebesgue, en honor a *Henri Lebesgue* (1875–1941), aunque según diversas fuentes fueron introducidos por primera vez por *Frigyes Riesz*. Los primeros en aparecer sobre 1904 son los espacios L^1 ya que son la base del estudio de funciones integrables en el sentido Lebesgue. Por la dualidad con estos espacios, posteriormente aparecen los espacios L^∞ de funciones acotadas.

De interés independiente, pero no por ello menos importante, es el espacio de Hilbert L^2, cuyos orígenes son vinculados a cuestiones básicas del Análisis de Fourier. Como consecuencia, parece natural estudiar que ocurre con los espacios L^p con $1 \leq p \leq \infty$.

A lo largo de este trabajo, no nos centraremos en visualizar propiedades típicas de estos espacios L^p (como puede ser ver que son espacios normados, de Banach, etc.), las daremos por demostradas (debido a la información obtenida a lo largo del grado) y las recogeremos (las de mayor importancia) en el Capítulo 1.

Así pues, el Capítulo 1 está dedicado a recordar los resultados y conceptos que necesitaremos y haremos alusión a lo largo del trabajo. En él enunciaremos el *Teorema Multinomial*, el *Teorema de la Convergencia Monótona*, el *Teorema de la Convergencia Dominada* y el *Teorema del Gráfico Cerrado*. Después, introduciremos los conceptos de espacios de funciones L^p, comentados anteriormente, y los espacios de sucesiones ℓ_p, los cuales son un caso especial de espacios L^p como veremos. Tras esto daremos tres propiedades importantes y enunciaremos la *Desigualdad de Hölder*.

En el Capítulo 2 buscaremos dar condiciones para que se tenga (o no) el contenido entre espacios de funciones con distintas medidas $L^p(\mu)$ y $L^q(\nu)$. Para ello, primero presentaremos dos ejemplos de relaciones muy conocidas en Análisis Matemático. Posteriormente, buscaremos un contenido más general entre espacios de funciones, y por último caracterizaremos todas relaciones entre espacios con medidas positivas.

En el Capítulo 3 definiremos las *funciones de Rademacher* y las *funciones de Walsh*, dos tipos de funciones que veremos si forman (o no) una base ortonormal de L^2. Posteriormente, demostraremos la famosa *desigualdad de Khintchine*, que junto con un corolario que demostraremos, encuentra ℓ_2 como subespacio de L^p (para $p \geq 1$ real) a través de las funciones de Rademacher. Veremos el caso $p = \infty$ como un caso singular para el que veremos que dependiendo de si consideramos $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, el resultado varía.

Por último, en el Capítulo 4 veremos los estudios realizados por *Kadec y Pelcynski* sobre la estructura de los subespacios de L^p. A través de los resultados del Capítulo 3 y de nuevos resultados acerca de un tipo de subespacio que definiremos, tendremos información sobre cualquier subespacio infinito dimensional de un espacio L^p.

Índice general

Capítulo 1

Resultados previos

En este capítulo vamos a recordar algunos conceptos y resultados ya conocidos y de los que daremos uso a lo largo de este trabajo (ver por ejemplo, [8, Pág. 21–22, pág. 26–27 y pág. 63–68], [9] y [5, Pág. 58]).

Teorema 1.0.1 (Teorema Multinomial). *Para cualquier entero positivo m y cualquier entero no negativo n, la fórmula multinomial nos dice que*

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)^n = (x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1+k_2+\ldots+k_m=n} \binom{n}{k_1!k_2!\ldots k_m!} \prod_{1 \le t \le m} x_t^{k_t}. \tag{1.1}$$

Sea $(\Omega, \sum, \mu)$ un espacio de medida en lo que sigue.

Definición 1.0.2. Sea $\{E_k\}_{k=1}^{n} \subseteq \sum$ (E_k y E_j disjuntos si $k \neq j$) con $\mu(E_k) < \infty$ para todo $k = 1, \ldots, n$, entonces las funciones simples son aquellas de la forma

$$s(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k}(x) \text{ con } a_k \in \mathbb{C}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.0.3 (Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ una sucesión de funciones medibles para todo $n \in \mathbb{N}$ que cumplen*

$$0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots f_n(x) \le \ldots \le \infty, \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Entonces, si $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in \Omega$, se tiene que f es una función medible no negativa tal que

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Corolario 1.0.4 (Corolario del Teorema de la Convergencia Monótona). *Sea f una función medible de Ω, entonces existe una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones simples en Ω tal que*

i)

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \text{ para todo } x \in \Omega. \tag{1.3}$$

ii)

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu.$$

Teorema 1.0.5 (Teorema de la Convergencia Dominada). *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas medibles en Ω tales que $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existe para todo $x \in \Omega$. Suponer que existe una función g medible con $\int_{\Omega} |g| d\mu < \infty$ tal que $|f_n(x)| \le g(x)$ para todo $x \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$. Entonces*

$$\int_{\Omega} f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} f_n \, d\mu. \tag{1.4}$$

Teorema 1.0.6 (**Teorema del Gráfico Cerrado**). *Sean X e Y espacios de Banach. Si $T : X \to Y$ es una aplicación lineal cerrada, entonces T es acotada, o sea continua.*

Definición 1.0.7. Sea $p \in (0,\infty)$ real. Recordar que podemos definir una clase de equivalencia $[f]$ sobre las funciones con valores complejos que coinciden en casi todo punto de Ω. Se definen los espacios $L^p(\Omega,\sum,\mu)$ ($L^p(\mu)$ de forma simplificada) sobre las clases de funciones como sigue

$$L^p(\Omega,\sum,\mu) = \left\{[f] : f \text{ medible y } \|f\|_{L^p(\Omega,\sum,\mu)} = (\int_\Omega |f(t)|^p\,dt)^{1/p} < \infty\right\}.$$

A si mismo, si $p = \infty$, definimos

$$L^\infty(\Omega,\sum,\mu) = \left\{[f] : f \text{ medible y } \|f\|_{L^\infty(\Omega,\sum,\mu)} = \text{ínf}\{k \geq 0 : \mu(\{x \in \Omega : |f(x)| > k\}) = 0\} < \infty\right\}.$$

Nota 1.0.8.

i) Por comodidad, escribiremos f en lugar de $[f]$ y $\|\cdot\|_p := \|\cdot\|_{L^p(\Omega,\sum,\mu)}$ en lo que sigue.

ii) Notar que si μ es la medida de contar, denotaremos $L^p(\mu) \equiv \ell_p(\Omega)$. Además, de aquí en adelante, cuando pongamos ℓ_p, estaremos en el caso particular en que $\Omega = \mathbb{N}$.

Teorema 1.0.9. *Sea $p \in [1,\infty]$, entonces ($L^p(\mu), \|\cdot\|_p$) es un espacio de Banach.*

Teorema 1.0.10. *Sea $p \in [1,\infty]$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $L^p(\mu)$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Entonces $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge en casi todo punto a f.*

Teorema 1.0.11 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 \leq p,q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ y f y g funciones medibles. Entonces, se cumple*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q. \tag{1.5}$$

Teorema 1.0.12. *Sea X un espacio de Banach e $Y \subseteq X$ un subespacio. Entonces Y es un espacio de Banach con la norma restringida de X en Y si y sólo si Y es cerrado en X.*

Capítulo 2

Relaciones entre los espacios $L^p(\mu)$ y $L^q(\nu)$

Sea Ω un conjunto no vacio, $\sum$ una σ-álgebra definida sobre Ω y sean μ,ν dos medidas definida sobre $\sum$. En lo siguiente, sean $(\Omega,\sum,\mu)$ y $(\Omega,\sum,\nu)$ los espacios de medida correspondientes.

A lo largo de este capítulo, primero vamos a considerar $\mu=\nu$ para ver dos ejemplos de muy conocidos contenidos entre espacios $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ que nos ilustrarán los resultados más adelante. Después, buscaremos un contenido más general cómo $L^p(\mu)\subseteq L^q(\nu)$, donde tendremos dos medidas distintas definidas sobre la misma σ-álgebra. Por último, trataremos de caracterizar todas medidas positivas μ en $(\Omega,\sum)$ que cumplen $L^p(\mu)\subseteq L^q(\mu)$, y a su vez, las que cumplen $L^q(\mu)\subseteq L^p(\mu)$ para cualesquier $p,q\in\mathbb{R}$ tales que $1\le p\le q\le\infty$.

2.1. Primeras relaciones

Tomaremos en primer lugar espacios de medida particulares para ver dos ejemplos de muy conocidas relaciones en el mundo del Análisis entre espacios $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$ para cualesquier $p,q\in\mathbb{R}$ reales tales que $1\le p\le q\le\infty$. Véase para más información acerca de estos ejemplos [10, Pág. 195–198], [11, Pág. 12–14], [1, Pág. 479–481] y [12, Pág. 186].

Ejemplo 2.1.1. Sea $p\in[1,\infty)$ real y $(\Omega,P(\Omega),\mu)$ un espacio de probabilidad con μ la medida de contar. Recordar, que en cualquier medida, la integral de una función $f(x)$ positiva es el supremo de las integrales de funciones simples $s(x)$ tales que $s(x)\le f(x)$. Además, en medida de contar, la norma p de una función simple $s(x)$ es $\left(\sum\limits_{n\in\Omega}|s(n)|^p\right)^{1/p}$.

Así pues, $\|f\|_p=\sup\{(\sum\limits_{n\in\Omega}|f(n)|^p)^{1/p}\}$. Por ende, $|f(n)|\le\|f\|_p$.

Por tanto, es fácil ver que $\ell_p(\Omega)\subseteq\ell_q(\Omega)$ para cualesquiera $p,q\in\mathbb{R}$ tales que $1\le p\le q\le\infty$ ya que

$$\|f\|_q^q=\int\limits_\Omega|f(n)|^q\,d\mu(n)=\int\limits_\Omega|f(n)|^p|f(n)|^{q-p}\,d\mu(n)\le\|f\|_p^{q-p}\int\limits_\Omega|f(n)|^p\,d\mu(n)=\|f\|_p^{q-p}\|f\|_p^p=\|f\|_p^q.$$

Por ello, $\|f\|_q\le\|f\|_p$. Así pues, si $f\in\ell_p(\Omega)$, es decir, si $\|f\|_p<\infty$, entonces $\|f\|_q\le\|f\|_p<\infty$, lo que equivale a que $f\in\ell_q(\Omega)$.

Ejemplo 2.1.2. Si consideramos ahora μ cualquier medida tal que $\mu(\Omega)<\infty$, con $1\le p\le q\le\infty$, podemos ver que $L^q(\mu)\subseteq L^p(\mu)$ ya que

- Si $p=q$, el contenido es trivial.
- Si $q=\infty$, se tiene $\|f\|_p^p=\int_\Omega|f|^p\,d\mu\le\int_\Omega\|f\|_\infty^p\,d\mu=\|f\|_\infty^p\mu(\Omega)$. Entonces $\|f\|_p\le\mu(\Omega)^{1/p}\|f\|_\infty$

- Supongamos pues que $p < q < \infty$, y por tanto $\frac{q}{p} \in (1,\infty)$. Por ende

$$\|f\|_p^p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_\Omega |f|^p 1 \, d\mu \underset{(1.5)}{\leq} \left(\int_\Omega (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \left(\int_\Omega (1)^{\frac{q}{q-p}} \, d\mu\right)^{\frac{q-p}{q}}$$
$$= \left(\int_\Omega |f|^q \, d\mu\right)^{\frac{p}{q}} \mu(\Omega)^{\frac{q-p}{q}} = \|f\|_q^p \mu(\Omega)^{1-\frac{p}{q}}. \text{ Y por tanto} \|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q.$$

Observación 2.1.3. Si $\mu(\Omega) = 1$, para cualesquier $p, q \geq 1$ reales tal que $p \leq q$ hemos probado que $\|f\|_p \leq \|f\|_q$. Es decir, la función $t \longmapsto \|f\|_t$ es creciente para cualquier t real.

2.2. Relaciones entre $L^p(\mu)$ y $L^q(\nu)$

Sea $(\Omega, \sum, \mu)$, $(\Omega, \sum, \nu)$ dos espacios de medida definidos respectivamente como antes. Los resultados de esta sección han sido tomados de [1, Pág. 342–345].

Nota 2.2.1. Teniendo en cuenta la definición de conjunto L^p como espacio métrico (el espacio cuyos elementos son clases de equivalencia y no funciones), cuando escribimos $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$, lo que realmente queremos decir es que las clases de equivalencia de las funciones de $L^p(\mu)$ pertenecen a $L^q(\nu)$ como clase de equivalencia. La otra interpretación para $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$ es cualquier función f individual que cumpla $\int |f(\omega)|^p \, d\mu(\omega) < \infty$ cumpla también $\int |f(\omega)|^q \, d\nu(\omega) < \infty$.

El siguiente lema muestra la equivalencia entre estas dos posibles interpretaciones que podemos tener al escribir $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$. Así pues, tras haber demostrado dicho lema, daremos uso de cualquiera de las interpretaciones sin mencionar el lema especificamente.

Lema 2.2.2. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se tiene la inclusión $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$ en el sentido de clases de equivalencia sí y sólo si ν es absolutamente continua [1] respecto de μ y se tiene $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$ en el sentido de funciones individuales.*

Demostración
$\Rightarrow$ Suponer $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$ en el sentido de clases de equivalencia. Sea E un conjunto de $\sum$ con $\mu(E) = \int_\Omega \chi_E \, d\mu = 0$, se tiene pues que χ_E está en la clase de equivalencia del 0 en $L^p(\mu)$, pero dicha clase de equivalencia del 0 pertenece también a $L^q(\nu)$ por hipótesis. Por tanto, 0 es necesariamente la clase de equivalencia del 0 en $L^q(\nu)$, así que $\chi_E \in 0$ implica que $\chi_E = 0$ a.e.ν. Por tanto se tiene que $\nu(E) = \int_\Omega \chi_E \, d\nu = 0$. Así pues, $\nu \ll \mu$.
$\Leftarrow$ Trivial. □

A continuación, veremos un resultado que relaciona dos espacios con medida distinta, el cual daremos uso más adelante.

Teorema 2.2.3. *Sean $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Se tiene $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$ si y sólo si $\nu \ll \mu$ y existe una constante $C(p,q)$ tal que*

$$\|f\|_{q,\nu} \leq C(p,q) \, \|f\|_{p,\mu} \text{ para todo } f \in L^p(\mu). \tag{2.1}$$

[1] Recordar que ν es absolutamente continua respecto de μ, en símbolos $\nu \ll \mu$, si para todo conjunto medible E tal que $\mu(E) = 0$, se tiene también que ν(E)=0.

Demostración

$\Rightarrow$ Suponer $L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$. Sabemos que por el Lema 2.2.2 ν es absolutamente continua respecto de μ. Por tanto, nos queda ver la desigualdad. Sean $p, q \geq 1$. Definimos el siguiente operador lineal

$$\begin{aligned} I : L^p(\mu) &\longrightarrow L^q(\nu) \\ f &\longmapsto I(f) = f. \end{aligned}$$

Ahora, demostremos que dicho operador es **cerrado**.
Sea f_n una sucesión de funciones de $L^p(\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{L^p(\mu)} f$ y $I(f_n) \xrightarrow{L^q(\nu)} g$ para algún $f \in L^p(\mu)$ y algún $g \in L^q(\nu)$. Como $\{f_n\}$ converge a f en $L^p(\mu)$, $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^p(\mu)$ y por el Teorema 1.0.10, podemos encontrar una subsucesión $\{f_{n_i}\}$ de $\{f_n\}$ tal que $f_{n_i} \to f$ a.e.μ y $f_{n_i} \to g$ a.e.ν.
Como ν es absolutamente continua respecto de μ, podemos escribir lo anterior de la siguiente forma

$$f_{n_i} \to f \text{ a.e.}\nu, f_{n_i} \to g \text{ a.e.}\nu.$$

Entonces, por unicidad del límite se sigue que $f = g$ a.e.ν, lo que significa que viendo estas dos funciones como elementos de $L^q(\nu)$, son la misma función.
Así pues, el operador lineal I es cerrado y por el Teorema 1.0.6 (notar que $L^p(\mu)$ y $L^q(\nu)$ son ambos espacios de Banach por el Teorema 1.0.9) se sigue que I es continua y que I es un operador acotado, es decir, existe una constante $C(p,q)$ tal que

$$\|f\|_{q,\nu} = \|I(f)\|_{q,\nu} \leq C(p,q)\,\|f\|_{p,\mu} \text{ para todo } f \in L^p(\mu).$$

$\Leftarrow$ Obvio. Sea $f \in L^p(\mu)$, entonces $\|f\|_{p,\mu} < \infty$, y por la desigualdad (2.1) se sigue que $\|f\|_{q,\nu} < \infty$, luego $f \in L^q(\nu)$. $\square$

Ahora, aplicaremos este último teorema a distintos casos para obtener resultados más concretos acerca de este tema.

Proposición 2.2.4. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $L^p(\mu) \subseteq L^p(\nu)$ *para algún* $p \in [1, \infty]$ *real.*

ii) ν *es absolutamente continua con respecto de* μ *y además existe una constante* D *tal que*

$$\nu(E) \leq D\mu(E), \tag{2.2}$$

para cualquier conjunto E *de* $\sum$*.*

iii) $L^1(\mu) \subseteq L^1(\nu)$.

iv) $L^p(\mu) \subseteq L^p(\nu)$ *para cualquier* $p \in [1, \infty]$ *real.*

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii): La continuidad absoluta de ν respecto de μ se sigue del Lema 2.2.2. Como $L^p(\mu) \subseteq L^p(\nu)$, por el Teorema 2.2.3 existe una constante $C(p)$ tal que

$$\|f\|_{p,\nu} \leq C(p)\,\|f\|_{p,\mu} \text{ para todo } f \in L^p(\mu). \tag{2.3}$$

Tomamos cualquier conjunto E de $\sum$ con $\mu(E) < \infty$ ($\chi_E \in L^p(\mu)$). Aplicando (2.3) a $f = \chi_E$ vemos que $\nu(E)^{1/p} = \left(\int_\Omega (\chi_E)^p\, d\nu\right)^{1/p} = \|\chi_E\|_{p,\nu} \leq C(p)\,\|\chi_E\|_{p,\mu} = C(p)\,\left(\int_\Omega (\chi_E)^p\, d\mu\right)^{1/p} = C(p)\,\mu(E)^{1/p}$. Por tanto, $\nu(E) \leq D\mu(E)$ con $D = C(p)^p$.
Para el caso en que tomemos E con $\mu(E) = \infty$ es obvio que se cumple (2.2) pues $\nu(E) \leq \infty$.

ii) $\Rightarrow$ iii): Demostremoslo en primer lugar para funciones simples. Sea $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} ((1.2)) \in L^1(\mu)$ con E_k y E_j disjuntos si $k \neq j$, se tiene lo siguiente

$$\|f\|_{1,\nu}^1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \nu(E_k) \underset{(2.2)}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |a_k| D\mu(E_k) = D \sum_{k=1}^{n} |a_k| \mu(E_k) = D\|f\|_{1,\mu}^1. \tag{2.4}$$

Lo anterior equivale a que cualquier función simple f en $L^1(\mu)$ cumple a su vez que está en $L^1(\nu)$.
Si cogemos ahora cualquier función f en $L^1(\mu)$ y tomamos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones simples en $L^1(\mu)$ tal que $f_n \xrightarrow{L^1(\mu)} f$ (dicha sucesión existe por el Corolario 1.0.4). Por ser $\{f_n\}$ convergente, es a su vez una sucesión de Cauchy en $L^1(\mu)$. Ahora, (2.4) implica que $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(\nu)$, y como $L^1(\nu)$ es de Banach, se sigue de aquí que $\{f_n\}$ converge también en $L^1(\nu)$ a una función $g \in L^1(\nu)$ ($f_n \xrightarrow{L^1(\nu)} g$). Usando un argumento de subsucesiones análogo al usado en la demostración del Teorema 2.2.3, llegamos a que $f = g$ a.e.ν. Como $g \in L^1(\nu)$ y $f = g$ a.e.ν, obtenemos que $f \in L^1(\nu)$.
iii) $\Rightarrow$ iv): Si $f \in L^p(\mu)$, entonces $|f|^p \in L^1(\mu)$. Por iii) se sigue que $|f|^p \in L^1(\nu)$, es decir, $f \in L^p(\nu)$.
iv) $\Rightarrow$ i): Trivial. $\square$

Nota 2.2.5. La demostración de esta proposición muestra que la constante D en ii) puede ser tomada independientemente de p, ya que podemos tomar $D = C(1)$.

Trataremos de visualizar esta proposición a través de un ejemplo.

Ejemplo 2.2.6. Consideramos $\Omega = [0,1]$ y $\sum = B([0,1])$ los bolerianos de $[0,1]$. Sea μ la medida de Lebesgue y ν una medida tal que $d\nu = d(x)dx$ con $d(x) = \begin{cases} 0 & si \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & si \quad \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$ una función continua en el intervalo compacto $[0,1]$.

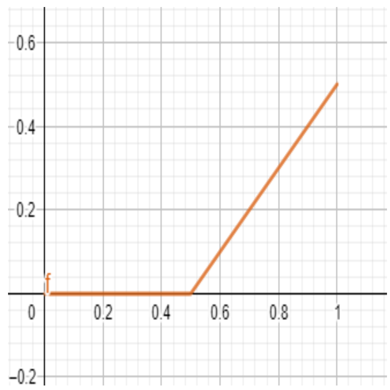

Figura 2.1: Gráfico de la función d(x).

Tomamos un $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$, veamos que se tiene $L^p(\mu) \subseteq L^p(\nu)$ y habremos visto que son ciertas i), iii) y iv) de la Proposición 2.2.4.
Notar que si $x \in [0,1]$, entonces $x - \frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ y por tanto

$$\|f\|_{p,\nu}^p = \int_0^1 |f(x)|^p d(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^p\, 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^p (x - \frac{1}{2})\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^p (x - \frac{1}{2})\,dx$$
$$\leq \int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^p \frac{1}{2}\,dx \leq \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^p\,dx + |\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)^p\,dx|\right) \leq \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{2}}^1 |f(x)|^p\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} |f(x)|^p\,dx\right)$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 |f(x)|^p\,dx = \frac{1}{2}\|f\|_{p,\mu}^p. \text{ Y por tanto } \|f\|_{p,\nu} \leq \frac{1}{2^{1/p}}\|f\|_{p,\mu}.$$

Por tanto, si $f \in L^p(\mu)$, es decir, si $\|f\|_{p,\mu} < \infty$, entonces $\|f\|_{p,\nu} \leq \frac{1}{2^{1/p}}\|f\|_{p,\mu} < \infty$, lo que equivale a que $f \in L^p(\nu)$. Por ende, $L^p(\mu) \subseteq L^p(\nu)$.
Notar que el contenido contrario no se da para cualquier p.
Sea $f(x) = \frac{1}{x-\frac{1}{2}}$. Así pues, como

$$\|f\|_{p,\nu}^p = \int_{\frac{1}{2}}^1 |\frac{1}{x-\frac{1}{2}}|^p (x-\frac{1}{2})\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right)^{p-1} dx < \infty \text{ si } p<2.$$

Sin embargo,

$$\|f\|_{p,\mu}^p = \int_0^1 |\frac{1}{x-\frac{1}{2}}|^p\,dx < \infty \text{ si } p < 1.$$

Por ende, tomando un $p \in [1,2)$, se tiene que $f \in L^p(\nu)$, y que $f \notin L^p(\mu)$. Así pues, $L^p(\nu) \not\subseteq L^p(\mu)$.
Ahora, tomando un conjunto $E \subseteq B([0,1])$ se tiene

$$\nu(E) = \int_E 1d\nu = \int_E 1d(x)dx = \int_E (x-\frac{1}{2})dx = \int_E xdx - \frac{1}{2}\int_E 1dx \underset{E\subseteq B([0,1])}{\leq} \int_E 1dx - \frac{1}{2}\mu(E) = \frac{1}{2}\mu(E).$$

Tomando $D = \frac{1}{2}$ se tiene (2.2) y por ello ν es absolutamente continua respecto de μ, verificando ii).

2.3. Relaciones entre $L^p(\mu)$ y $L^q(\mu)$

Ahora, vamos a clasificar todas medidas positivas μ en $(\Omega,\sum)$ que cumplen $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$, y a su vez, las que cumplen $L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ para cualesquier $p,q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Para ello, hemos tomado resultados de [1, Pág. 342–345], [2, Pág. 203–206] y [3, Pág. 479–481].

Proposición 2.3.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ *para algún* $p,q \in \mathbb{R}$ *tales que* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

ii) Existe una constante $m > 0$ *tal que*

$$\mu(E) \geq m, \tag{2.5}$$

para cualquier conjunto E *no* μ*-nulo de* $\sum$.

iii) $L^p(\mu) \subseteq L^q(\mu)$ *para cualesquiera* $p,q \in \mathbb{R}$ *tales que* $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii): Aplicando el Teorema 2.2.3, existe una constante positiva C tal que

$$\|f\|_{q,\mu} \leq C\|f\|_{p,\mu} \text{ para todo } f \in L^p(\mu). \tag{2.6}$$

Sea E un conjunto no μ-nulo de $\sum$ con medida finita. Entonces $f = \chi_E \in L^p(\mu) \subseteq L^q(\nu)$, y aplicandole (2.6) a $f = \chi_E$ obtenemos $\mu(E)^{1/q} = \|\chi_E\|_{q,\mu} \leq C\|\chi_E\|_{p,\mu} = C\mu(E)^{1/p}$. Como $p<q$ implica que $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$ y además $0 < \mu(E) < \infty$ se tiene que $\mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \geq \frac{1}{C}$. Tomando $m = C^{\frac{pq}{p-q}}$ se tiene ii).
ii) $\Rightarrow$ iii): Sea $f \in L^p(\mu)$ y $n \in \mathbb{N}$ fijo, definimos

$$E_n = \{\omega \in \Omega : |f(\omega)| > n\}.$$

Notar que se tiene

$$n^p\mu(E_n) = \int_{E_n} n^p d\mu \leq \int_{E_n} |f|^p d\mu \leq \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

Así pues, $\mu(E_n) < \infty$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la hipótesis de ii) estamos en una de las dos situaciones siguientes

$$\begin{cases} a)\,\mu(E_n) = 0. \\ b)\,\mu(E_n) \neq 0, \text{ entonces por ii) se tiene } \mu(E) \geq m. \end{cases}$$

Por otro lado, $E_{n+1} \subseteq E_n$, $\mu(E_1) < \infty$ y $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \emptyset$ implica que $\mu(E_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
Entonces, existe algún entero positivo N_0 tal que $|f(\omega)| \leq N_0$ para casi todo punto $\omega \in \Omega$. Por ende

$$\int_\Omega |f|^q d\mu = \int_\Omega |f|^p |f|^{q-p} d\mu \leq N_0^{q-p} \int_\Omega |f|^p d\mu < \infty.$$

iii) $\Rightarrow$ i): Trivial. □

Proposición 2.3.2. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) *$L^q(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ para algún $p,q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$.*

ii) *Existe una constante $M > 0$ tal que*

$$\mu(E) \leq M, \tag{2.7}$$

para cualquier conjunto de medida finita E de $\sum$.

iii) *$L^p(\mu) \subseteq L^p(\mu)$ para cualesquiera $p,q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$.*

Demostración

i) $\Rightarrow$ ii): Usando de nuevo el Teorema 2.2.3 como en la demostración de la Proposición 2.3.1, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\mu(E)^{1/p} \leq C\mu(E)^{1/q},$$

para todo conjunto de medida finita E de $\sum$.
Como $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{q}$, si E es un conjunto de $\sum$ de medida no nula y finita (si es nula la desigualdad es trivial) se tiene que $\mu(E)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \leq C$. Tomando pues $M = C^{\frac{pq}{q-p}} > 0$ obtenemos ii).
ii) $\Rightarrow$ iii): Sea M el menor entero tal que (2.7) se cumple. Existe una sucesión $\{F_n\}$ de conjuntos de $\sum$ con medida finita tal que $\mu(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} M$.
Sea $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, se tiene pues $\mu(S) = \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{m} F_n)$. Veamos que $\mu(S) = M$.

- $\subseteq$: Por la elección de M, $\mu(\bigcup_{n=1}^{m} F_n) \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Por tanto $\mu(S) \leq \lim_{m\to\infty} \mu(\bigcup_{n=1}^{m} F_n) \leq M$.
- $\supseteq$: $\mu(F_n) \leq \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) = \mu(S)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mu(F_n) \xrightarrow{n\to\infty} M$. Por tanto $\mu(S) \geq M$.

Sea $T = \Omega - S$, podemos concluir que o bien $\mu(T) = 0$ ó T es un átomo de medida infinita[2]. Ahora, si $f \in L^p(\mu)$, f debe anularse en T a.e.μ. Por tanto

$$\int_\Omega |f|^p\, d\mu = \int_S |f|^p\, d\mu + \int_T |f|^p\, d\mu = \int_S |f|^p\, d\mu.$$

[2]Sea $(\Omega, \sum, \mu)$ un espacio de medida, un conjunto $A \subset \Omega$ en $\sum$ es un átomo si

1. $\mu(A) > 0$.
2. Para cualquier subconjunto medible $B \subset A$ con $\mu(B) < \mu(A)$, entonces $\mu(B) = 0$.

Ahora, sea $f \in L^q(\mu)$ y recordando que $\mu(S) = M < \infty$ se tiene

$$\int_\Omega |f|^p \, d\mu = \int_S |f|^p |1| \, d\mu \underset{(1.5)}{\leq} \left(\int_S |1| \, d\mu \right)^{1-\frac{p}{q}} \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} = \mu(S)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_S |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{p}{q}} < \infty.$$

Por tanto, $f \in L^p(\mu)$.
iii) $\Rightarrow$ i): Trivial. $\square$

Ejemplo 2.3.3. Consideramos $\Omega = \mathbb{N}, \Sigma = P(\mathbb{N})$ y μ la medida de contar. Recordar que en el Ejemplo 2.1.1 demostramos que $\ell^1 \subseteq \ell^2 \subseteq ... \subseteq \ell^p \subseteq ... \subseteq \ell^q \subseteq ... \subseteq \ell^\infty$ para cualesquiera p, q números reales tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, probando que se cumple tanto i) como iii) de la Proposición 2.3.1.
Notar que, con la medida de contar, todos los conjuntos (salvo el vacío), mínimo, tienen medida 1 (contienen un punto de $\mathbb{N}$), es decir, para cualquier conjunto $E \subseteq P(\mathbb{N})$ de medida μ no nula existe una constante $m = 1 > 0$ tal que $\mu(E) \geq m$, cumpliendose (2.5).
Sin embargo, no se cumplen ni i), ni iii) de la Proposición 2.3.2 por lo que acabamos de comentar. Además, no podemos decir que exista una constante $M > 0$ tal que $\mu(\{1, ..., n\}) = n \leq M$ para cualquier n natural, es decir, tampoco se cumple ii).

Ejemplo 2.3.4. Por otro lado, si tomamos $\Omega = [0,1], \Sigma = B([0,1])$ y μ la medida de Lebesgue, demostramos también en el Ejemplo 2.1.2 que por ser $\mu(\Omega) = 1 < \infty$, se tiene $L^\infty([0,1]) \subseteq ... \subseteq L^q([0,1]) \subseteq ... \subseteq L^p([0,1]) \subseteq ... \subseteq L^2([0,1]) \subseteq L^1([0,1])$ para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $1 \leq p \leq q \leq \infty$, es decir, no se cumplen ni i), ni iii) de la Proposición 2.3.1. Además, podemos tomar un $\varepsilon > 0$ tan pequeño como queramos de forma que $\mu([0, \varepsilon]) = \varepsilon$, demostrando que no se cumple tampoco ii).
Pero sin embargo, si que se cumplen, por lo anterior, i) y iii) de la Proposición 2.3.2. Notar que cualquier conjunto de medida finita E de $B([0,1])$ (todos son de medida finita) cumple $\mu(E) \leq \mu(\Omega) = 1$. Por ende, tomando $M = 1 > 0$ es obvio que se cumple (2.7), y con ello ii).

Capítulo 3

Desigualdad de Khintchine

En este capítulo nos centraremos en ver que ℓ_2 es subespacio de L^p y que una base de ℓ_2 son las *funciones de Rademacher*. Para ello, debemos antes definir este conjunto de funciones muy conocidas en Matemáticas que necesitaremos para demostrar la Desigualdad de Khintchine.
Sea $(\Omega, \sum, \mu)$ un espacio de medida. Consideramos ahora el caso de una medida μ no atómica (para todo $\omega \in \Omega$, $\mu(\{\omega\}) = 0$). Podemos demostrar que si el espacio $L^p(\Omega, \sum, \mu)$ es separable y μ es una medida no atómica, entonces $L^p(\Omega, \sum, \mu)$ es isométricamente isomorfa a $L^p([0,1], dt)$ (la demostración no la veremos, pero si se desea consultar, ver [6, Pág. 123–131]). Así pues, podemos limitarnos a estudiar este último espacio, que llamaremos L^p para abreviar.
A lo largo de este capítulo, daremos uso de información sacada de [4, Pág. 137–144], [5, Pág. 40–41] y [8].

3.1. Funciones de Rademacher

Definición 3.1.1. Sea $L^p(1 \leq p < \infty)$, las **Funciones de Rademacher** quedan definidas por

$$\Big\{ \quad r_n(t) = sign(\sin 2^n \pi t) \text{ para todo } t \in [0,1] \text{ si } n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

dónde $sign(x) = 1$ si $x > 0$, $sign(x) = -1$ si $x < 0$ y $sign(0) = 0$.

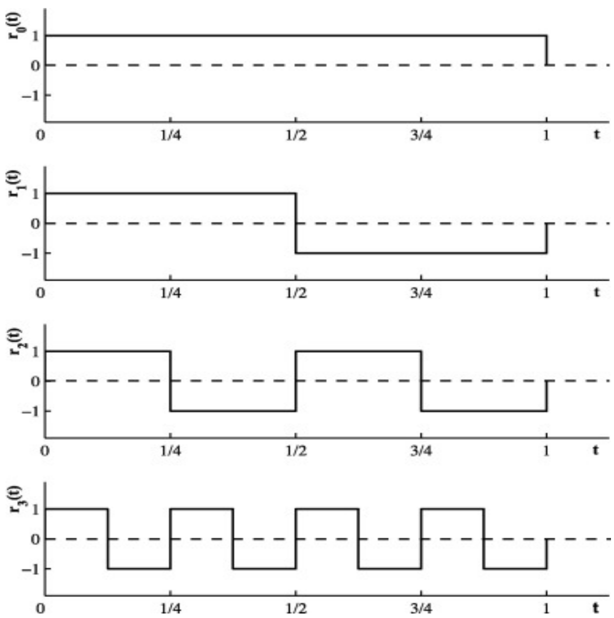

Figura 3.1: Gráfico de las primeras 4 funciones de Rademacher.

Veamos que dicha sucesión de funciones reales forman un sistema ortonormal, ya que posteriormente veremos que son base de ℓ_2.

Nota 3.1.2. Las funciones de Rademacher se pueden expresar a su vez como sigue:

$$r_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}_0. \tag{3.1}$$

Demostración

Sea $n \in \mathbb{N}_0$. Observar que $\sin 2^n \pi t$ tiene en $[0,1]$ $2^n\pi + 1$ ceros (o cambios de signo). Por tanto dividimos $[0,1]$ en $2^n\pi + 1$ subintervalos

$$[0,1] = [\frac{0}{2^n\pi}, \frac{\pi}{2^n\pi}] \cup [\frac{2\pi}{2^n\pi}, \frac{3\pi}{2^n\pi}] \cup \ldots \cup [\frac{(2^n-1)\pi}{2^n\pi}, \frac{2^n\pi}{2^n\pi}] = \bigcup_{k=1}^{2^n} [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}].$$

Así pues, en cada subintervalo de la forma $[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, $\sin 2^n \pi t$ cambia su signo. Notar que en $[0, \frac{1}{2^n}]$ el valor del $\sin 2^n \pi t$ es siempre positivo, es decir, $r_n(t) = sign(\sin 2^n \pi t)$ para todo $t \in [0, \frac{1}{2^n}]$.

Por tanto, $r_n(t) = \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t)$, como queríamos demostrar. □

Lema 3.1.3. *Las funciones de Rademacher forman un sistema ortonormal pero no una base ortonormal de L^2.*

Demostración

Teniendo en cuenta (3.1) se tiene que

$$< r_n, r_n > = \int_0^1 r_n(t) r_n(t) dt = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} 1 dt = \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 1 = 1.$$

Por otro lado, si tomamos $n \neq m$ (sin pérdida de generalidad cogemos $n < m$), y tenemos en cuenta que $[0,1] = \bigcup_{k=1}^{2^n} [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]$, obtenemos

$$< r_n, r_m > = \int_0^1 r_n(t) r_m(t)\, dt = \int_0^1 sign(\sin 2^n \pi t) sign(\sin 2^m \pi t)\, dt = \sum_{k=1}^{2^n} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} sign(\sin 2^n \pi t) sign(\sin 2^m \pi t)\, dt.$$

Si nos fijamos en cada sumando, si t va de $\dfrac{k-1}{2^n}$ a $\dfrac{k}{2^n}$, entonces $2^n \pi t$ está en el intervalo $((k-1)\pi, k\pi)$, y por tanto el signo de $\sin 2^n \pi t$ es constantemente $+1$ o -1 en dicho intervalo (recorre desde un cero del seno al siguiente). Por otro lado, $sign(\sin 2^m \pi t)$ recorre 2^{m-n} periodos completos (veces que va desde un cero del seno al siguiente cero), por tanto cada sumando es 0.

Es decir, tenemos que $< r_n, r_m > = \sum_{k=1}^{2^n} 0 = 0$.

En resumen, tenemos que si $n = m$, obtenemos que $< r_n, r_n > = 1$ y si $n \neq m$ obtenemos $< r_n, r_m > = 0$, es decir, las *funciones de Radamacher* forman un sistema ortonormal de $L^2([0,1], dt)$.

Sin embargo, definiendo una función no nula como $f(t) = \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(t) - \frac{1}{2} \neq 0$ y fijando un $n \in \mathbb{N}$ (si $n = 0$ es claro que $< r_0, f > = 0$) se tiene

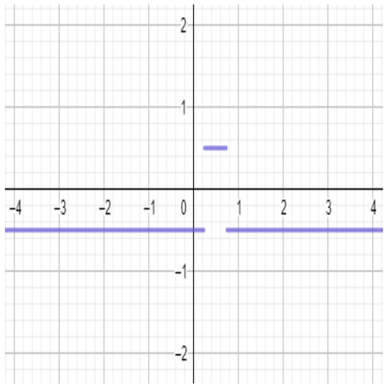

Figura 3.2: Gráfico de la función f.

$$< r_n, f >= \int_0^1 r_n(t) f(t) dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) (\chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(t) - \frac{1}{2}) dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) \chi_{[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]}(t) dt$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} \int_0^1 (-1)^{k-1} \chi_{[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}]}(t) dt = 0 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^{k-1} \int_{\frac{k-1}{2^n}}^{\frac{k}{2^n}} 1 dt = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=1}^{2^n} (-1)^k = \frac{1}{2^{n+1}} 0 = 0.$$

Así pues, $< r_n, f >= 0$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$ con $f \neq 0$, es decir, las *funciones de Radamacher* no forman una base de L^2. $\square$

Si llamamos R_2 al subespacio cerrado generado por combinaciones lineales finitas de funciones de Rademacher en L^2 ($R_2 = \overline{span}\{r_n : n \in \mathbb{N}_0\} = \overline{\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i r_i : \lambda_i \in \mathbb{K}, n \in \mathbb{N}_0\}}$), las funciones de Rademacher forman una base hilbertiana de R_2. Notar que el conjunto span$\{r_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ no es todo el espacio L^2.

3.2. Funciones de Walsh

Definición 3.2.1. Sea $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ el sistema de Rademacher, este sistema se puede ampliar hasta conseguir el sistema de las **funciones de Walsh**. Todo número $N \in \mathbb{N}_0$ se puede escribir de forma única como

$$N = \sum_{j=1}^{n} k_j 2^{j-1}, \text{ con } k_j \in \{0, 1\}.$$

Esto no es otra cosa que la representación de N en el sistema binario. Así pues, definimos la *función de Walsh* de orden N

$$\begin{aligned} W_N : [0,1] &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ x &\longmapsto W_N(x) = \prod_{j=0}^{n} r_j(x)^{k_j}. \end{aligned}$$

Proposición 3.2.2. *Las funciones de Walsh si que son una base de L^2.*

Demostración

En primer lugar, notar que las *funciones de Walsh* son trivialmente (por construcción) una familia ortonormal ya que es producto de *funciones de Radamacher*, las cuales hemos visto que eran ortonormales.

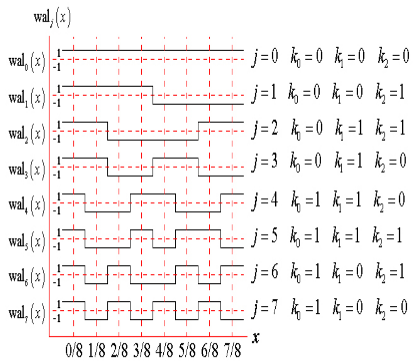

Figura 3.3: Gráfico de las 7 primeras funciones de Walsh.

Por tanto, demostrando que $\overline{span}\{w_N : N \in \mathbb{N}_0\} = L^2$ habremos terminado.
Sea $f \in L^2$, tenemos que ver que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $g \in W = span\{w_N : N \in \mathbb{N}_0\}$ tal que

$$\|f-g\|_2 < \varepsilon.$$

Notar que si se demuestra esto para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ real se tendrá para cualquier función compleja. Esto se demuestra definiendo $f = Re(f) + iIm(f)$. Entonces como $Re(f)$ y $Im(f)$ son funciones reales, dado $\varepsilon > 0$ existen $g_1, g_2 \in W$ tales que $\|Re(f) - g_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|Im(f) - g_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos $g = g_1 + ig_2 \in W$ y se cumple

$$\|f-g\|_2 = \|Re(f) + iIm(f) - (g_1 + ig_2)\|_2 \leq \|Re(f) - g_1\|_2 + \|Im(f) - g_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Del mismo modo, si se demuestra para funciones positivas se cumple para funciones reales puesto que descomponiendo $f = f^+ - f^-$, como $f^+, f^- \geq 0$, dado $\varepsilon > 0$ existen $g_1, g_2 \in W$ tales que $\|f^+ - g_1\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, $\|f^- - g_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Definimos $g = g_1 - g_2 \in W$ y se cumple

$$\|f-g\|_2 = \|f^+ - f^- - (g_1 - g_2)\|_2 \leq \|f^+ - g_1\|_2 + \|f^- - g_2\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Análogamente, si se demuestra para funciones simples e integrables se tiene para funciones positivas. Esto se debe a que si suponemos que para toda función simple de la forma $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ (con $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y con $m(E_i) < \infty$) existe un $g \in W$ cumpliendo $\|s - g\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$, y además recordamos que para todo $\varepsilon > 0$ existe una función s simple e integrable tal que $\|s - f\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ (por resultados del Análisis Funcional), entonces se tiene

$$\|f-g\|_2 = \|f - s - (g - s)\|_2 \leq \|f - s\|_2 + \|g - s\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Por último, si lo demostramos para funciones $\chi_E : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ con $E \in B([0,1])$ y tal que $m(E) < \infty$ se cumplirá para funciones simples e integrables y habremos terminado. Para demostrar esto, suponemos que para todo $\varepsilon > 0$ y $\chi_{E_i} \in L^2$ existe un $g_i \in W$ de tal forma que se cumple que $\|\chi_{E_i} - g_i\|_2 < \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$. Así pues, sea $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ simple e integrable y sea $g = \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \in W$ entonces se tiene

$$\|s-g\|_2 = \|\sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i} - \sum_{i=1}^{n} a_i g_i\|_2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i \|\chi_{E_i} - g_i\|_2 < \varepsilon.$$

Sea pues un $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ fijo, consideramos el conjunto formado por las 2^n primeras *funciones de Walsh*

$$\{w_N : 0 \leq N < 2^n\}. \tag{3.2}$$

Todos los subíndices de las funciones de (3.2) se escriben en base 2 con n cifras a lo sumo, de forma que cada w_N de (3.2) es un producto de algunas de las *n funciones de Rademacher*, y por tanto, es constante en cada uno de los 2^n intervalos diádicos de longitud 2^{-n} del intervalo $[0,1]$, a los que llamaremos $A_j, 1 \leq j \leq 2^n$. Notar que $A_j = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}]$.
Sea M_1 el subespacio vectorial de L^2 engendrado por las funciones χ_{A_j} con $1 \leq j \leq 2^n$ y M_2 al subespacio vectorial de L^2 engendrado por las funciones que cumplen (3.2). Por lo que hemos comentado, es claro que $M_2 \subseteq M_1$ y además como w_N son ortonormales, las funciones de (3.2) son linealmente independientes y por tanto $dim(M_2) = 2^n$. Notar que $dim(M_1) = 2^n$ por construcción, luego $dim(M_1) = dim(M_2)$ y además $M_2 \subseteq M_1$. Por ende, $M_1 = M_2$, es decir, que para cada j con $1 \leq j \leq 2^n$,

$$\chi_{A_j} = \sum_{N=0}^{2^n-1} \alpha_N w_N, \tag{3.3}$$

con unos ciertos coeficientes α_j.
Por tanto, como cualquier $\chi_{(a,b)} \in L^2$ es aproximación de combinación lineal de funciones diádicas cumpliendo (3.3), que a su vez son combinación lineal de *funciones de Walsh*, por tanto existe un $g \in W$ tal que $\|\chi_{(a,b)} - g\|_2 < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$.
Si tomamos E perteneciente al $\sigma-$álgebra generada por los abiertos de la forma (a,b), por lo anterior es claro que $\overline{W}^{\|\cdot\|_2} = L^2$. □

3.3. Desigualdad de Khintchine

En esta sección veremos un resultado que demuestra que la sucesión de *funciones de Rademacher* $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ generan en L^p un subespacio isomorfo a ℓ_2.

Proposición 3.3.1 (Desigualdad de Khintchine). *Para todo p real con $1 \leq p < \infty$, existen constantes A_p y B_p tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, toda secuencia finita de escalares $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cumple*

$$A_p(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2} \leq (\int_0^1 |\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t)|^p \, dt)^{1/p} \leq B_p(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2)^{1/2}. \tag{3.4}$$

Demostración
Asumamos en primer lugar que los a_i's son reales y que p es par, $p = 2k$ con $k \geq 1$. Definamos la siguiente expresión para simplificar con los α_i's enteros

$$A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n)!}{(\alpha_1)!(\alpha_2)! \cdots (\alpha_n)!}.$$

Ahora, recordando el *Teorema Multinomial*, de (1.1) se sigue

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 (\sum_{i=1}^{n} a_i r_i(t))^{2k} \, dt = \int_0^1 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2k} \binom{2k}{\alpha_1!\alpha_2!\cdots\alpha_n!} (a_1 r_1(t))^{\alpha_1} \cdots (a_n r_n(t))^{\alpha_n} \, dt \\
&= \int_0^1 \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2k} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} a_1^{\alpha_1} \cdots a_n^{\alpha_n} (r_1(t)^{\alpha_1} \cdots r_n(t)^{\alpha_n}) \, dt \qquad (3.5)\\
&= \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=2k} A_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} a_1^{\alpha_1} \ldots a_n^{\alpha_n} \int_0^1 (r_1(t)^{\alpha_1} \cdots r_n(t)^{\alpha_n}) \, dt.
\end{aligned}$$

Veamos que $\int_0^1 (r_1(t)^{\alpha_1} \cdots r_n(t)^{\alpha_n}) \, dt \neq 0$ si y sólo si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todos pares.
Notar que r_j toma valor ± 1, si α_j es par $r_j^{\alpha_j} = 1$, y si es impar se tiene $r_j^{\alpha_j} = r_j^{2m+1} = r_j^{2m} r_j = 1 r_j = r_j$.
Por tanto

- Si existen α_i y α_j con $i \neq j$ impares, tendriamos $\int_0^1 r_i(t)^{\alpha_i} r_j(t)^{\alpha_j} dt = \int_0^1 r_i(t) r_j(t) dt = 0$ por ser $\{r_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia ortonormal.
- Por otro lado, si α_j son todos pares $\int_0^1 (r_1(t)^{\alpha_1} \dots r_n(t)^{\alpha_n})\, dt = \int_0^1 1 \dots 1\, dt = 1 \neq 0$.

Suponer pues que $\alpha_i = 2\beta_i$. Usando de nuevo (1.1) del *Teorema Multinomial* obtenemos

$$\sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} A_{\beta_1,\ldots,\beta_n} a_1^{2\beta_1} \cdots a_n^{2\beta_n} = (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^k.$$

Teniendo en cuenta esto, siguiendo con (3.5) se tiene que

$$\int_0^1 (\sum_{i=1}^n a_i r_i(t))^{2k}\, dt = \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} A_{2\beta_1,\ldots,2\beta_n} a_1^{2\beta_1} \cdots a_n^{2\beta_n} \leq B_{2k}^{2k} (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^k, \tag{3.6}$$

donde

$$B_{2k}^{2k} = \sup_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} \frac{A_{2\beta_1,\ldots,2\beta_n}}{A_{\beta_1,\ldots,\beta_n}}.$$

Como además

$$\sup_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} \frac{A_{2\beta_1,\ldots,2\beta_n}}{A_{\beta_1,\ldots,\beta_n}} = \sup_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} \frac{\dfrac{(2\beta_1+\ldots+2\beta_n)!}{(2\beta_1)!\cdots(2\beta_n)!}}{\dfrac{(\beta_1+\ldots+\beta_n)!}{(\beta_1)!\cdots(\beta_n)!}} = \sup_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} \frac{(2\beta_1+\ldots+2\beta_n)!(\beta_1)!\cdots(\beta_n)!}{(2\beta_1)!\cdots(2\beta_n)!(\beta_1+\ldots+\beta_n)!}$$
$$= \sup_{\beta_1+\ldots+\beta_n=k} \frac{(2k)!}{k!} \frac{(\beta_1)!}{(2\beta_1)!} \cdots \frac{(\beta_n)!}{(2\beta_n)!} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}{\prod_{j=1}^n (\beta_j+1)\cdots(2\beta_j)}.$$

Notar que hemos tenido en cuenta que

$$\frac{(2k)!}{k!} = \frac{(2k)(2k-1)\cdots(k+2)(k+1)k!}{k!} = (k+1)(k+2)\cdots(2k).$$

Para los β_j's $\neq 0$ ($\beta_j \geq 1$) se tiene $(\beta_j+1)\cdots(2\beta_j) \geq 2^{\beta_j}$ (pues cada factor es mayor o igual que 2 y hay β_j factores). Por tanto, como además $\beta_1 + \ldots + \beta_n = k$, obtenemos

$$\frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}{\prod_{j=1}^n (\beta_j+1)\cdots(2\beta_j)} \leq \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}{\prod_{j=1}^n 2^{\beta_j}} = \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}{2^{\beta_1+\ldots\beta_n}}$$
$$= \frac{(k+1)(k+2)\cdots(2k)}{2^k} \leq \frac{(2k)^k}{2^k} = k^k.$$

De aquí obtenemos $B_{2k}^{2k} \leq k^k$, es decir, $B_{2k} \leq \sqrt{k}$. Con esta desigualdad y elevando a $\dfrac{1}{2k}$ a ambos lados de (3.6) obtenemos $(\int_0^1 (\sum_{i=1}^n a_i r_i(t))^{2k} dt)^{1/2k} \leq \sqrt{k}(\sum_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$. Como estamos en un espacio con medida finita 1, como hemos dicho en la Observación 2.1.3 la función $p \longmapsto \|f\|_p$ para alguna función $f \in L^p$ fija es creciente. Por tanto, si $p \geq 1$ y k es el menor entero tal que $2k \geq p$ $((\int_0^1 |f|^p\, dt)^{1/p} = \|f\|_p \leq \|f\|_{2k} = (\int_0^1 |f|^{2k}\, dt)^{1/2k})$ concluimos que

$$\left(\int_0^1 (\sum_{i=1}^n a_i r_i(t))^p\, dt\right)^{1/p} \leq \sqrt{k} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}.$$

Lo cual prueba el lado derecho de (3.4).
Para el lado izquierdo de la desigualdad, volveremos tener en cuenta que la función $p \longmapsto \|f\|_p$ es creciente. Así pues, si $p \geq 2$ se tiene

$$\left(\int_0^1 (\sum_{i=1}^n a_i r_i(t))^p\, dt\right)^{1/p} \geq \left(\int_0^1 (\sum_{i=1}^n a_i r_i(t))^2\, dt\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}.$$

Asumamos pues ahora que $1 \leq p < 2$. Por la desigualdad de Hölder (1.5) se tiene

$$\left(\int |f|^2\, dt\right)^{1/2} = \left(\int |f|^{1/2}|f|^{3/2}\, dt\right)^{1/2} \leq \left((\int |f| dt)^{1/2}(\int |f|^3\, dt)^{1/2}\right)^{1/2} \leq \left(\int |f|\, dt\right)^{1/4} \left(\int |f|^3\, dt\right)^{1/4}.$$

Tomamos $f(t) = \sum\limits_{i=1}^n a_i r_i(t)$. Notar que por la desigualdad a derechas demostrada tenemos

$$\left(\int_0^1 |f|^3\, dt\right)^{1/3} \leq \sqrt{2}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}$$

ya que $k = 2$ es el menor entero tal que $2k \geq 3$.
Llamando $\gamma = (\sum\limits_{i=1}^n a_i^2)^{1/2}$ obtenemos

$$\gamma = \left(\int |f|^2\, dt\right)^{1/2} \leq \left(\int |f|\, dt\right)^{1/4} \left(\int |f|^3\, dt\right)^{1/4} \leq \|f\|_1^{1/4}(\sqrt{2}\gamma)^{3/4}, \text{ si y sólo si } \|f\|_1 \geq 2^{\frac{-3}{8}}\gamma.$$

Por ende, como $\|f\|_p \geq \|f\|_1$ (por la Observación 2.1.3), se sigue que $\|f\|_p \geq 2^{\frac{-3}{8}}\gamma$.
Entonces, la desigualdad de Khintchine esta demostrada para a_j's reales. Suponer ahora que los a_j's son complejos, escribimos $a_j = b_j + ic_j$ con $b_j, c_j \in \mathbb{R}$.
Notar que si $x, y, p \in \mathbb{R}^+$ se cumple que

$$x + y \leq 2\max(x,y) = 2c, \text{ entonces } (x+y)^p \leq (2c)^p = 2^p(\max(x,y))^p \leq 2^p(x^p + y^p).$$

Por lo tanto, se tiene $(x+y)^p \leq B(x^p + y^p)$ con $B = 2^p$. Además, notar que

$$\begin{cases} x^p \leq (x+y)^p \text{ para todo } x, y, p \in \mathbb{R}^+. \\ y^p \leq (x+y)^p \text{ para todo } x, y, p \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Por ende,

$$A(x^p + y^p) \leq (x+y)^p \leq B(x^p + y^p) \text{ para todo } x, y, p \in \mathbb{R}^+.$$

De aquí se deduce que existen constantes A'_p, B'_p tales que

$$A'_p\left(|\sum_{i=1}^n b_i r_i(t)|^p + |\sum_{i=1}^n c_i r_i(t)|^p\right)^{1/p} \leq |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)| \leq B'_p\left(|\sum_{i=1}^n b_i r_i(t)|^p + |\sum_{i=1}^n c_i r_i(t)|^p\right)^{1/p}.$$

Elevando a p en cada lado de la desigualdad e integrando en el intervalo $[0,1]$ obtenemos

$$\int_0^1 {A'_p}^p\left(|\sum_{i=1}^n b_i r_i(t)|^p + |\sum_{i=1}^n c_i r_i(t)|^p\right) dt \leq \int_0^1 |\sum_{i=1}^n a_i r_i(t)|^p\, dt \leq \int_0^1 {B'_p}^p\left(|\sum_{i=1}^n b_i r_i(t)|^p + |\sum_{i=1}^n c_i r_i(t)|^p\right) dt. \tag{3.7}$$

Teniendo en cuenta que para el caso real tenemos demostrada la desigualdad de Khintchine, se tiene que existen constantes A_{1p},A_{2p} y B_{1p},B_{2p} tales que

$$i) A_{1p}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1|\sum_{i=1}^{n}b_ir_i(t)|^pdt\right)^{1/p} \leq B_{1p}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2\right)^{1/2}.$$

$$ii) A_{2p}\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1|\sum_{i=1}^{n}c_ir_i(t)|^pdt\right)^{1/p} \leq B_{2p}\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{1/2}.$$

Sustituyendo esto en (3.7) obtenemos

$$A_p'^{\,p}A_{1p}^p(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)^{p/2}+A_p'^{\,p}A_{2p}^p(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2)^{p/2}\leq\int_0^1|\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)|^p\,dt\leq B_p'^{\,p}B_{1p}^p(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)^{p/2}+B_p'^{\,p}B_{2p}^p(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2)^{p/2}.$$

Definiendo pues $C_p=\text{mín}\{A_p'A_{1p}\,,A_p'A_{2p}\}$ y $D_p=\text{mín}\{B_p'B_{1p}\,,B_p'B_{2p}\}$ obtenemos

$$2C_p^p\left((\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)^{p/2}+(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2)^{p/2}\right)\leq\int_0^1|\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)|^p\,dt\leq 2D_p^p\left((\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2)^{p/2}+(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2)^{p/2}\right).$$

Tomando $A_p=2^{1/p}C_p$ y $B_p=2^{1/p}D_p$ y recordando que $\sqrt{|b_j|^2+|c_j|^2}=|b_j+ic_j|=|a_j|$ se sigue el resultado general. $\square$

Corolario 3.3.2. *La desigualdad de Khintchine nos dice que para todo $p\in[1,\infty)$, el subespacio R_p $=\overline{span}\{r_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}\subset L^p([0,1],dt)$ es isomorfo a ℓ_2. En consecuencia, ℓ_2 es subespacio de L^p.*

Demostración

Definimos

$$T:\ell_2\longrightarrow R_p=\overline{span}\{r_n\,:\,n\in\mathbb{N}\}\subseteq L^p$$
$$a\equiv(a_1,a_2,\dots)\longmapsto\sum_{i=1}^{\infty}a_ir_i(t).$$

Veamos que T esta bien definida.

Tomamos un $a\in\ell_2$, es decir, $(\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2)^{1/2}<\infty$. Sea $n<m$, consideramos $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, entonces por la Proposición 3.3.1 se tiene que existen constantes A_p',B_p' tales que

$$A_p'\left(\sum_{i=n}^{m}|a_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_0^1|\sum_{i=n}^{m}a_ir_i(t)|^pdt\right)^{1/p}=\|\sum_{i=n}^{m}a_ir_i(t)\|_p\leq B_p'\left(\sum_{i=n}^{m}|a_i|^2\right)^{1/2}.$$

Haciendo pues $n,m\to\infty$, como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy se tiene que $\left(\sum_{i=n}^{m}|a_i|^2\right)^{1/2}\xrightarrow{n,m\to\infty}0$, y por la regla del Sandwich se sigue que $\{\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también de Cauchy.

Entonces, como R_p es un subespacio cerrado de un espacio de Banach (L^p), R_p es Banach por el Teorema 1.0.12 y por ello $\sum_{i=1}^{n}a_ir_i(t)$ converge en $\|\cdot\|_p$, es decir, $\sum_{i=1}^{\infty}a_ir_i(t)\in R_p$, y por ende T está bien definida.

Ahora, como $\sum_{i=1}^{\infty}a_ir_i(t)\in R_p$, podemos hacer $n\to\infty$ en la ecuación (3.4), obteniendo que existen constantes $A,B>0$ tales que

$$A\|a\|_2=A\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\int_0^1|\sum_{i=1}^{\infty}a_ir_i(t)|^pdt\right)^{1/p}=\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ir_i(t)\|_p\leq B\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^2\right)^{1/2}=B\|a\|_2.$$

Por ende, T es un isomorfismo, es decir $R_p \subset L^p$ es isomorfo a ℓ_2, y por tanto ℓ_2 es un subespacio de L^p. $\square$

En L_∞, el subespacio generado por las *funciones de Rademacher* es algo distinto.

Proposición 3.3.3. *i) En $L^\infty_{\mathbb{R}}([0,1],dt)$, clases de funciones de valor real esencialmente acotadas, el subespacio generado por las funciones de Rademacher es isométrico a ℓ_1.*

ii) En $L^\infty_{\mathbb{C}}([0,1],dt)$, clases de funciones de valor complejo, el subespacio generado por las funciones de Rademacher es isomorfo a ℓ_1.

Demostración

i) Sean $a_1,\dots,a_n$ una secuencia de valores reales finita, todos distintos de 0. Existe un $t_0 \in [0,1]$ tal que $r_1(t_0) = sign(a_1),\dots,r_n(t_0) = sign(a_n)$ y por tanto

$$\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| \geq |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t_0)| = \sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t_0) = \sum_{k=1}^{n} a_k sign(a_k) = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Notar que hemos usado que $a_k r_k(t_0) = |a_k| \geq 0$. Por otro lado, dando uso de la desigualdad triangular y de que $|r_n(t)| \leq 1$ se tiene

$$\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |a_k||r_k(t)| \leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{k=1}^{n} |a_k| 1 = \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Notar que esta última desigualdad se cumple para cualesquiera sucesión $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{C}$.
Por tanto se tiene que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| = \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{3.8}$$

Definimos pues

$$\begin{aligned} T_1 : \ell_1 &\longrightarrow R^\infty_{\mathbb{R}} = \overline{span}\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^\infty_{\mathbb{R}} \\ a = (a_1,a_2,...) &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t). \end{aligned}$$

Por tanto, tomando un $a \in \ell_1$ y haciendo $n \to \infty$ en (3.8) se tiene que

$$\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty,$$

es decir, T_1 está bien definida y además $\|T_1(a)\|_\infty = \|a\|_1$. Por ende, $R^\infty_{\mathbb{R}} = \overline{span}\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una copia isométrica de ℓ_1 en $L^\infty_{\mathbb{R}}$.
ii) Sean $a_1,...,a_n$ una secuencia de valores complejos finita tal que $a_j = b_j + ic_j$, $b_j, c_j \in \mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} &\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| \geq \text{máx}\{\sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} b_k r_k(t)|, \sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} c_k r_k(t)|\} \underset{b_k,c_k\in\mathbb{R}}{\geq} \text{máx}\{\sum_{k=1}^{n} |b_k|, \sum_{k=1}^{n} |c_k|\} \\ &\geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (|b_k| + |c_k|) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \end{aligned}$$

Antes hemos mencionado que $|\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ se cumple para cualesquiera $a_1,...,a_n \in \mathbb{C}$. Por ende, se cumple que

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \sup_{t\in[0,1]} |\sum_{k=1}^{n} a_k r_k(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|. \tag{3.9}$$

Definimos en este caso

$$\begin{aligned} T_2 : \ell_1 &\longrightarrow R_{\mathbb{C}}^{\infty} = \overline{span}\{r_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L_{\mathbb{C}}^{\infty} \\ a = (a_1, a_2, ...) &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t). \end{aligned}$$

Ahora, siguiendo un proceso análogo al seguido en la demostración del Corolario 3.3.2 se ve que T_2 está bien definido. Por tanto, haciendo $n \to \infty$ en (3.9) obtenemos

$$\frac{1}{2}\|a\|_1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| \leq \sup_{t\in[0,1]}|\sum_{k=1}^{\infty} a_k r_k(t)| = \|T_2(a)\|_{\infty} \leq \sum_{k=1}^{\infty}|a_k| = \|a\|_1.$$

Así pues, $R_{\mathbb{C}}^{\infty} = \overline{span}\{r_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a ℓ_1.
Veamos que en este segundo caso, $R_{\mathbb{C}}^{\infty}$ no es una copia isométrica de ℓ_1.
Tomamos $a_1 = 1, a_2 = i$ y se tiene

$$\sup_{t\in[0,1]}|\sum_{k=1}^{2} a_k r_k(t)| = \sup_{t\in[0,1]}|1r_1(t) + ir_2(t)| = \sup_{t\in[0,1]}\sqrt{|r_1(t)|^2 + |r_2(t)|^2} = \sqrt{2} \neq \sum_{k=1}^{2}|a_k| = |1| + |i| = 2.$$

□

Capítulo 4

Estructuras de los subespacios de L^p

Hemos visto que ℓ_2 es un ejemplo de subespacio de L^p a través de las *funciones de Radamacher*. En este capítulo buscaremos una clasificación general de los subespacios de L^p. A continuación, vamos a enunciar y demostrar una serie de resultados hallados por Pelzcynski.

Notar que a lo largo de este capítulo denotaremos (por motivos comentados en el inicio del Capítulo 3) por L^p a $L^p([0,1],dt)$ con la medida de Lebesgue. Véase para más información acerca de lo comentado en este capítulo [4, Pág. 145–153] y [7].

4.1. Definiciones y lemas previos

Definición 4.1.1. Sea $\varepsilon > 0$ y $p \geq 1$. Se define

$$A(\varepsilon,p) = \{f \in L^p : m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon \|f\|_p\}) \geq \varepsilon\}.$$

Nota 4.1.2. La definición anterior es equivalente a decir que $A(\varepsilon,p)$ es el conjunto formado por las funciones de L^p cumpliendo

$$m(\{t : |f(t)| \geq \varepsilon \|f\|_p\}) = \int_0^1 \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,|f(t)|\geq\varepsilon\|f\|_p\}}(s)\,ds \geq \varepsilon.$$

Lema 4.1.3. *Sean $\varepsilon > 0$, $r, p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq r < p$. Si $f \in A(\varepsilon,p)$, entonces*

$$\varepsilon^{1+\frac{1}{r}} \|f\|_p \leq \|f\|_r \leq \|f\|_p.$$

Demostración
Notar que

$$\|f\|_r = \left(\int_0^1 |f(s)|^r\,ds\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\int_{\{t\in[0,1]\,:\,|f(t)|\geq\varepsilon\|f\|_p\}} |f(s)|^r\,ds\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\int_{\{t\in[0,1)\,:\,|f(t)|\geq\varepsilon\|f\|_p\}} (\varepsilon\|f\|_p)^r\,ds\right)^{\frac{1}{r}}$$

$$= \varepsilon\|f\|_p \left(\int_{\{t\in[0,1]\,:\,|f(t)|\geq\varepsilon\|f\|_p\}} 1\,ds\right)^{\frac{1}{r}} = \varepsilon\|f\|_p m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon\|f\|_p\})^{\frac{1}{r}} \geq \varepsilon\|f\|_p \varepsilon^{\frac{1}{r}} = \varepsilon^{1+\frac{1}{r}}\|f\|_p,$$

donde la última desigualdad se debe a que $f \in A(\varepsilon,p)$. Por último, ya hemos dicho en la Observación 2.1.3 que la función $t \longmapsto \|f\|_t$ es creciente, y por tanto $\|f\|_r \leq \|f\|_p$. $\square$

Veamos ahora una serie de propiedades del conjunto $A(\varepsilon,p)$ que usaremos más adelante.

Lema 4.1.4. *Sea $p \geq 1$. Entonces* *i) Si $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$, entonces $A(\varepsilon_1, p) \subset A(\varepsilon_2, p)$.*

ii) $L^p = \bigcup\limits_{0<\varepsilon<1} A(\varepsilon, p)$.

iii) Si $f \notin A(\varepsilon, p)$, entonces existe un subconjunto medible A de $[0,1]$ con $m(A) < \varepsilon$ tal que

$$\int\limits_A |f(t)|^p \, dt \geq (1-\varepsilon^p)\|f\|_p^p. \tag{4.1}$$

Demostración

i) Si $f \in A(\varepsilon_1, p)$, entonces $f \in L^p$ y $m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon_1 \|f\|_p\}) \geq \varepsilon_1$. Como $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, se tiene que

$$m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon_2 \|f\|_p\}) > m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon_1 \|f\|_p\}) \geq \varepsilon_1 > \varepsilon_2.$$

Entonces $m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon_2 \|f\|_p\}) \geq \varepsilon_2$, es decir, $f \in A(\varepsilon_2, p)$.
ii) El contenido $\bigcup\limits_{0<\varepsilon<1} A(\varepsilon, p) \subseteq L^p$ es trivial puesto que si $f \in A(\varepsilon, p)$, entonces $f \in L^p$ por la definición del conjunto $A(\varepsilon, p)$.
Para ver que $L^p \subseteq \bigcup\limits_{0<\varepsilon<1} A(\varepsilon, p)$ razonaremos por reducción a lo absurdo. Asumimos que existe una $f \in L^p$ tal que no existe ningún $\varepsilon > 0$ tal que $f \in A(\varepsilon, p)$. Notar que esto es equivalente a decir que para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon \|f\|_p\}) < \varepsilon$.
Podemos asumir que $f \neq 0$ ya que si $f = 0$ es obvio que existe un ε tal que $f \in A(\varepsilon, p)$. Dicha f cumple

$$\int_0^1 \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s)\, ds = m(\{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon \|f\|_p\}) < \varepsilon \text{ para todo } \varepsilon > 0.$$

Se tiene pues que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s)\, ds < \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \varepsilon = 0$. Observar que para todo $t \in [0,1]$:

- Si $f(s) = 0$, se tiene que $\chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s) = 0$ para todo $\varepsilon > 0$.
- Si $|f(s)| > 0$, existe un ε_0 lo suficientemente pequeño tal que $|f(s)| \geq \varepsilon_0 \|f\|_p$, y por tanto $\chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s) = 1$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_0$.

Luego

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s) = \begin{cases} 1 & si \quad |f(s)| > 0, \\ 0 & si \quad f(s) = 0. \end{cases}$$

Además, $|\chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s)| \leq 1 \in L^p([0,1])$. Por ende, podemos aplicar el Teorema 1.0.5 e intercambiar límite e integral, obteniendo

$$\begin{aligned} 0 = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^1 \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s) ds \underset{TCD}{=} \int_0^1 \lim_{\varepsilon\to 0} \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,\frac{|f(t)|}{\|f\|_p} \geq \varepsilon\}}(s) ds = \int_0^1 \chi_{\{t\in[0,1]\,:\,|f(t)|>0\}}(s) ds \\ = m(\{t \in [0,1] : f(t) \neq 0\}). \end{aligned}$$

Es decir, $m(\{t \in [0,1] : f(t) = 0\}) = 1$, que ocurre sí y sólo si $f = 0$ en casi todo punto, que es una contradicción, pues habiamos supuesto $f \neq 0$ en L^p.
iii) Suponer que $f \notin A(\varepsilon, p)$. Llamamos $A = \{t \in [0,1] : |f(t)| \geq \varepsilon \|f\|_p\}$. Por hipótesis, como $f \notin A(\varepsilon, p)$ tenemos que $m(A) < \varepsilon$. Además,

$\int\limits_{A^C} |f(s)|^p ds = \int_{\{t\in[0,1]\,:\,|f(t)|<\varepsilon\|f\|_p\}} |f(s)|^p \, ds \leq \varepsilon^p \|f\|_p^p$. Entonces $\int\limits_A |f(t)|^p \, dt = \int\limits_0^1 |f(t)|^p \, dt - \int\limits_{A^C} |f(t)|^p \, dt$

$= \|f\|_p^p - \int\limits_{A^C} |f(t)|^p \, dt \geq \|f\|_p^p - \varepsilon^p \|f\|_p^p = (1-\varepsilon^p)\|f\|_p^p.$ $\square$

De aquí en adelante supondremos que $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos medibles de $[0,1]$ cumpliendo

$$\begin{cases} m(A_n) > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \\ m(A_i \cap A_j) = 0 \text{ si } i \neq j. \end{cases}$$

Lema 4.1.5. *Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ una sucesión de funciones de norma uno soportadas en conjuntos como los anteriores, es decir, tal que cada $f_n = f_n \cdot \chi_{A_n}$ en casi todo punto para $n \in \mathbb{N}$.*
Entonces $F = \overline{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isométrico a ℓ_p.

Demostración

Definimos

$$\begin{aligned} T : \ell_p &\longrightarrow F = \overline{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq L^p \\ a = (a_1, a_2, \ldots) &\longmapsto \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t). \end{aligned}$$

Notar que se tiene que

$$\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt = \int_{\cup_{i=1}^n A_i} |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt + \int_{[0,1]\setminus \cup_{i=1}^n A_i} |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt = \int_{\cup_{i=1}^n A_i} |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt$$
$$= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} |a_i f_i(t)|^p \, dt = \sum_{i=1}^n |a_i|^p \int_{A_i} |f_i(t)|^p \, dt = \sum_{i=1}^n |a_i|^p \|f_i\|_p^p = \sum_{i=1}^n |a_i|^p.$$

Suponiendo que $a \in \ell_p$, elevando a $\dfrac{1}{p}$ a ambos lados de la igualdad y haciendo $n \to \infty$ obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^n a_k f_k(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Así pues, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t) \in F$ y por tanto T está bien definida.
Por ende, se tiene que

$$\left(\int_0^1 |\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(t)|^p \, dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p \right)^{1/p}.$$

Esto prueba que $\|T(a)\|_p = \|a\|_p$, y por tanto que T es un isomorfismo isométrico. □

A continuación, veremos un lema que tendremos en cuenta de aquí en adelante en alguna demostración.

Lema 4.1.6. *Sea $f \in L^1([0,1], dt)$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\int_A |f(t)| \, dt < \varepsilon$, para todo conjunto medible A con $m(A) < \delta$.*

Demostración

Por reducción a lo absurdo, tomo un $\varepsilon > 0$ de forma que existe un $\delta > 0$ (sea A con $m(A) < \delta$) tal que se tiene $\int_A |f(t)| \, dt \geq \varepsilon$.
Esto es falso ya que por ejemplo si tomo A de medida nula, $m(A) = 0 < \delta$, pero sin embargo $\int_A |f(t)| \, dt = 0 \not\geq \varepsilon$. □

Proposición 4.1.7. *Sea $p \in [1, \infty)$ y sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de L^p de norma 1 que no está totalmente contenida en ninguno de los conjuntos $A(\varepsilon, p)$ con $0 < \varepsilon < 1$. Entonces, existe una subsucesión $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\overline{span}\{f'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a ℓ_p.*

Demostración

Sea $\varepsilon \in (0,1)$, veamos primero que hay una colección no finita de elementos de la sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que no pertenecen a $A(\varepsilon,p)$.
Razonamos por reducción a lo absurdo. Supongamos que para algún $\varepsilon \in (0,1)$ existen sólo $f_{n_1},...,f_{n_k}$ que no pertenecen a $A(\varepsilon,p)$. Recordar, que por el Lema 4.1.4 ii), $L^p = \bigcup_{0<\varepsilon<1} A(\varepsilon,p)$, por tanto como $f_{n_1},...,f_{n_k}$ pertenecen a L^p, existirán $\varepsilon_1,...,\varepsilon_k > 0$ tal que $f_{n_i} \in A(\varepsilon_i,p)$ para todo $i = 1,...,k$.
Tomamos pues $\varepsilon' = \text{mín}\{\varepsilon,\varepsilon_1,...,\varepsilon_k\}$ y por el Lema 4.1.4 i), se tiene que $f_n \in A(\varepsilon',p)$ para todo $n \geq 1$, lo cual contradice la hipótesis de que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no está totalmenmte contenida en ninguno de los conjuntos $A(\varepsilon,p)$.
Notar que lo anterior equivale a decir que para todo $\varepsilon > 0$ y todo $n_0 \geq 1$, existe un $n \geq n_0$ tal que $f_n \notin A(\varepsilon,p)$.
Ahora, tomamos $\eta \in (0,1)$ de tal forma que $\varepsilon_1 = \frac{\eta}{4^2} < 1$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no esta contenido en $A(\varepsilon_1,p)$, podemos encontrar un n_1 tal que $f_{n_1} \notin A(\varepsilon_1,p)$. Por el Lema 4.1.4 iii) se sigue que existe un subconjunto A_1 de $[0,1]$ con $m(A_1) < \varepsilon_1$ y además $\int_{A_1} |f_{n_1}(t)|^p dt \geq (1-\varepsilon_1^p)\|f_{n_1}\|_p^p = (1-\varepsilon_1^p)$.
Notar que $|f_{n_1}(t)|^p \in L^1$, luego dado $\varepsilon_1 > 0$ ($\varepsilon_1^p > 0$), por el Lema 4.1.6 podemos tomar un $\delta = \varepsilon_2 < \frac{\eta}{4^3} (< \frac{\eta}{4^2} = \varepsilon_1)$ lo suficientemente pequeño tal que

$$\int_A |f_{n_1}(t)|^p dt < \varepsilon_1^p,$$

para cualquier conjunto medible A con $m(A) < \varepsilon_2$.
De nuevo, existe un $n_2 > n_1$ tal que $f_{n_2} \notin A(\varepsilon_2,p)$ y por el Lema 4.1.4 iii) existe un subconjunto A_2 con $m(A_2) < \varepsilon_2$ y $\int_{A_2} |f_{n_2}(t)|^p dt \geq (1-\varepsilon_2^p)$.
Notar que $(|f_{n_1}(t)|^p + |f_{n_2}(t)|^p) \in L^1$, luego dado $\varepsilon_2 > 0$ ($\varepsilon_2^p > 0$), de nuevo por el Lema 4.1.6 podemos tomar un $\varepsilon_3 < \frac{\eta}{4^4}$ lo suficientemente pequeño tal que

$$\int_A (|f_{n_1}(t)|^p + |f_{n_2}(t)|^p) dt < \varepsilon_2^p,$$

para cualquier conjunto medible A con $m(A) < \varepsilon_3$.
Así pues, reiterando el proceso k veces, habremos encontrado $A_1,\ldots,A_k$ subconjuntos medibles de $[0,1]$, enteros $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$ y numeros positivos $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_k > 0$ que cumplen que para todo $i = 1,\ldots,k$

$$\begin{cases} i)\, m(A_i) < \varepsilon_i < \frac{\eta}{4^{i+1}}, \\ ii)\, \int_{A_i} |f_{n_i}(t)|^p dt \geq (1-\varepsilon_i^p), \\ iii)\, \int_{A_i} (|f_{n_1}(t)|^p + \ldots + |f_{n_{i-1}}(t)|^p) dt < \varepsilon_{i-1}^p. \end{cases} \tag{4.2}$$

Por el Lema 4.1.6, teniendo en cuenta que $\varepsilon_k > 0$ ($\varepsilon_k^p > 0$), como $(|f_{n_1}(t)|^p + \ldots + |f_{n_k}(t)|^p) \in L^1$, podemos tomar un $\varepsilon_{k+1} < \frac{\eta}{4^{k+2}}$ lo suficientemente pequeño para que cualquier conjunto medible A satisfaciendo $m(A) < \varepsilon_{k+1}$ cumpla

$$\int_A (|f_{n_1}(t)|^p + \ldots + |f_{n_k}(t)|^p) dt < \varepsilon_k^p.$$

Por ende, existe un $n_{k+1} > n_k$ tal que $f_{n_{k+1}} \notin A(\varepsilon_k,p)$ y A_{k+1} será dado por el Lema 4.1.4 iii) para $f_{n_{k+1}}$.
Definamos pues $A'_k = A_k \setminus \cup_{j>k} A_j$, para $k = 1,2,\ldots$ Notar que estos subconjuntos son mutuamente disjuntos ya que si tomamos cualquier pareja A'_k, A'_{k+1}, se tiene

$$A'_{k+1} \cap A'_k = \left(A_{k+1} \setminus \cup_{j>k+1} A_j\right) \cap \left(A_k \setminus (A_{k+1} \cup_{j>k+1} A_j)\right) = \emptyset.$$

Si llamamos $f'_k = \dfrac{f_{n_k} \cdot \chi_{A_{k'}}}{\|f_{n_k} \cdot \chi_{A_{k'}}\|_p}$, obtenemos una sucesión de funciones normalizadas soportadas disjuntamente. Por tanto, por el Lema 4.1.5 se tiene que $\overline{span}\{f'_n : n \in \mathbb{N}\}$ es isomorfo a ℓ_p. $\square$

4.2. Teorema de Pelczynski

Con todos los resultados previos de este y de los anteriores capítulos vamos a caracterizar cualquier subespacio cerrado infinito dimensional de un L^p.

Teorema 4.2.1 (Pelczynski). *Sea $2 < p < \infty$. Todo subespacio cerrado (infinito dimensional) X de L^p, ó bien es isomorfo a ℓ_2, o en caso contrario, contiene un subespacio Y isomorfo a ℓ_p.*

Demostración

Sea X un subespacio cerrado, infinito dimensional de L^p. Llamamos $S = \{x \in X : \|x\|_p = 1\}$ a la esfera unidad en X. Así pues, estamos ante dos situaciones:

- Existe un $\varepsilon > 0$ tal que $S \subset A(\varepsilon, p)$. Entonces, si $f \in X$, definimos $g = \frac{f}{\|f\|_p} \in S \subset A(\varepsilon, p)$, y por el Lema 4.1.3 ($1 \leq 2 = r < p$) se tiene

$$\varepsilon^{1+\frac{1}{2}}\|g\|_p \leq \|g\|_2 \leq \|g\|_p.$$

Es decir, $\varepsilon^{\frac{3}{2}} \leq \frac{\|f\|_2}{\|f\|_p} \leq 1$, que equivale a $\varepsilon^{\frac{3}{2}}\|f\|_p \leq \|f\|_2 \leq \|f\|_p$. Por ende, se tiene que

$$\|f\|_2 \leq \|f\|_p \leq \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|f\|_2 \text{ para todo } f \in X.$$

Notar que X es cerrado por hipótesis en $L^p \subseteq L^2$, veamos que además es cerrado en L^2. Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X \subseteq L^2$ es una sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n - x\|_2 = 0$ para algún $x \in L^2$, entonces veamos que $x \in X$. Notar que por las desigualdades anteriores se tiene que $\|x - x_n\|_p \leq \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\|x - x_n\|_2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ya que $x - x_n \in X$. Esto equivale a que para todo $\eta > 0$ existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene $\|x - x_n\|_p < \eta$. Como además $x_n \in X$ ($\|x_n\|_p < \infty$), se deduce que

$$\|x\|_p = \|x - x_n + x_n\|_p \leq \|x - x_n\|_p + \|x_n\|_p < \eta + \|x_n\|_p < \infty.$$

Por ende, $x \in X$, y X es cerrado en L^2. Así pues, $(X, \|\cdot\|_2)$ es Hilbert. Es decir, X es isomorfo a L^2 y como L^2 es isomorfo isometricamente a ℓ_2 (todo espacio de Hilbert es isomorfo isometricamente a ℓ_2), se tiene que X es isomorfo a ℓ_2.

- Para todo $\varepsilon > 0$ existe un $f_\varepsilon \in S$ tal que $f_\varepsilon \notin A(\varepsilon, p)$. Tomamos sucesivos $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$, $n \geq 1$ y obtenemos una sucesión $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq S$ ($\|f_n\|_p = 1$) tal que $f_n \notin A(\frac{1}{2^n}, p)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por la Proposición 4.1.7 se sigue que $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ contiene una subsucesión $\{f'_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $Y = \overline{span}\{f'_n : n \in \mathbb{N}\} \subset X$ es isomorfo a ℓ_p.

$\square$

Notar que no hemos considerado que ocurre con los subespacios de L^p cuando $1 \leq p \leq 2$. La descripción de estos subespacios no es tan buena y conocida como cuando $p > 2$. Sólo mencionaremos unos resultados demostrados por *H.P. Rosenthal* (ver [7, Pág. 344–373])

- Si X es un subespacio cerrado de L^p, con $1 \leq p \leq 2$, ó bien existe un $r > p$ tal que X es isomorfo a un subespacio de L^r, o en caso contrario, X contiene un subespacio Y isomorfo a ℓ_p.

- El ánalogo al Teorema 4.2.1 es falso. Si $1 \leq p \leq r \leq 2$, el espacio L^r es isométrico a un subespacio de L^p.

Bibliografía

[1] A. G. MIAMEE. *The Inclusion $Lp(\mu) \subseteq Lq(\nu)$ - The American Mathematical Monthly*, Vol. 98, Nº 4 (Apr., 1991), Department of Mathematics, Hampton University, Hampton, disponible en https://www.jstor.org/stable/2323804?seq=1.

[2] JUAN L. ROMERO. *When is $Lp(\mu)$ Contained in $Lq(\nu)$? - The American Mathematical Monthly*, Vol. 90, Nº3 (Mar., 1983).

[3] B. SUBRAMANIAN. *On The Inclusion $Lp(\mu) \subseteq Lq(\mu)$ - The American Mathematical Monthly*, Vol. 85, Nº6 (1978).

[4] BERNARD BEAUZAMY, *North-Holland, Mathematics Studies. - Introduction to Banach Spaces and their Geometry.*

[5] JOSÉ GARCÉA-CUERVA. - *Análisis Funcional, 4 de marzo de 2011*, disponible en http://verso.mat.uam.es/~dmitry.yakubovich/AF_2019_20/Garcia-Cuerva_Analisis-Funcional_2011.pdf.

[6] TH. SCHLUMPRECHT. - *Course Notes for Functional Analysis I, Math 655-601, Fall 2015*, disponible en https://www.math.tamu.edu/~thomas.schlumprecht/course_notes_math655_0c11.pdf.

[7] ROSENTHAL, H.P, - *On subspaces of L^p*. Ann. of Maths, 97 (1973), disponible en https://web.ma.utexas.edu/users/rosenthl/pdf-papers/27.pdf.

[8] W.RUDIN, *Real and Complex Analysis*, 3.ª Ed., McGraw-Hill Inc., New York, 1987, disponible en https://59clc.files.wordpress.com/2011/01/real-and-complex-analysis.pdf.

[9] DAVID LEE HILLIKER, *ON THE MULTINOMIAL THEOREM*, The Cleveland State University, Cleveland, Ohio 44115, disponible en http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.388.5357.

[10] SHELDON AXLER, *Measure, Integration Real Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, disponible en https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-3-030-33143-6.pdf.

[11] WAYNE GREY, *INCLUSIONS AMONG MIXED-NORM LEBESGUE SPACES*, The University of Western Ontario, London, Ontario, Canada, disponible en https://core.ac.uk/download/pdf/61658332.pdf.

[12] GERALD B. FOLLAND, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2.ª ed., Wiley-Interscience, 1999.