

Universidad de Zaragoza

TRABAJO DE FIN DE GRADO

ESTUDIO MATEMÁTICO DE LA
CONVERGENCIA MORAL EN SOCIEDADES
SINTÉTICAS

Autor:

Muñoz Jordán, David[†]

Director:

Moreno Vega, Yamir[‡]

2021/2022

[†]759379@unizar.es

[‡]yamir@unizar.es

Índice

1. Motivación	1
2. Modelo base	2
2.1. Modelos subyacentes	2
2.1.1. Juego de bienes públicos (PGG)	2
2.1.2. Modelo de Axelrod	3
2.2. Modelo Axlerod-PGG	4
2.2.1. Dinámica	6
2.3. Resultados	6
2.3.1. Modelo de Axlerod	6
2.3.2. Juegos de bienes públicos	7
2.3.3. Modelo Axlerod-PGG	8
2.4. Conclusión	10
3. Modificación al modelo: bienes públicos locales	11
3.1. Juego de bienes públicos Santos y Pacheco	12
3.2. Axelrod con un <i>feature</i> binario	14
3.3. Modelo Axlerod-SantosPacheco	15
3.3.1. Modelo frente a la diversidad cultural inicial.	18
3.3.2. Modelo frente al número de rasgos cualitativos.	19
3.3.3. Modelo frente al tamaño de la red	20
3.3.4. Resumen de las diferentes fases en función de la probabilidad de la interacción por homofilia y el factor de mejora.	22
3.4. Conclusión	23
Referencias	24

Resumen

La explicación de la cooperación sigue siendo un tema abierto y de estudio hoy en día. Desde el punto de vista de la teoría de Darwin, a nivel de individuo es siempre más favorable no cooperar con tu entorno y aprovecharse del trabajo de él, pues eso te da una ventaja respecto a tu entorno ya que recibes un beneficio a “coste” nulo. Esto se extiende desde sistemas con menor nivel cognitivo, como puede ser un conjunto de bacterias las cuales tienen que segregarse una sustancia para sobrevivir, hasta sistemas con un nivel alto cognitivo como puede ser nuestra sociedad. En este trabajo nos centraremos en sociedades con nivel alto cognitivo, de las cuales podemos sacar un rasgo característico, la cultura. En este contexto, la cultura puede caracterizarse por un conjunto de pensamientos/opiniones/acciones que definen al individuo y son susceptibles de ser compartidas por un colectivo. De esta forma el conjunto de individuos con distintas o iguales culturas que estén conectados de alguna manera formarán una sociedad.

La parte original y novedosa de este trabajo es combinar aspectos culturales cualitativos, como puede ser la opinión sobre cierto tema (religión, política, etc.), con aspectos cuantitativos asociados a un bien común del cual podemos contribuir o no como una ONG o impuestos, por ejemplo. Definiremos una dinámica subyacente que combine ambos aspectos y estudiaremos en qué condiciones se obtienen sociedades monoculturales o multiculturales y sociedades cooperadoras (se contribuye en los aspectos cuantitativos) o defectoras. Esta dinámica se apoyará en el modelo de Axlerod y los juegos de bienes públicos.

Mostraremos el efecto del modelo de Axlerod sobre los juegos de bienes públicos y viceversa, remarcando lo sensible que es el modelo de Axlerod frente a perturbaciones y cómo se pierden las características principales de este modelo.

1. Motivación

La Teoría de Juegos constituye una herramienta matemática para el estudio matemático de interacciones mediante estructuras formalizadas de incentivos o juegos que reproducen procesos de tomas de decisiones. En este contexto, la Teoría Evolutiva de Juegos consiste en la aplicación de estas estructuras a poblaciones evolutivas, lo que permite modelizar la competición darwiniana.

Por otro lado, los modelos de opinión basados en el agente reproducen formalmente los procesos de imitación cultural que tienen lugar en un colectivo de individuos. Estos modelos se apoyan en mecanismos que imitan los mecanismos subyacentes a los intercambios de opinión en la sociedad.

En este trabajo se estudiarán las condiciones para la convergencia hacia un sistema ético de valores mediante un modelo basado en el agente con dos mecanismos implícitos. El beneficio individual vendrá dado por una función objetivo que tomará sus datos de las interacciones entre los agentes de una sociedad sintética. Estas interacciones tendrán lugar mediante juegos que replicarán situaciones en las que el beneficio individual se contrapone al colectivo. Además, una dinámica de imitación entre los agentes, conducida por la homofilia, replicará la ventaja colectiva e individual de la coordinación. Estos dos mecanismos, el juego y la imitación, con sus respectivas escalas temporales asociadas, estarán integrados en una dinámica evolutiva en la que los agentes, a su vez, serán los nodos de un grafo cuyas aristas determinarán las posibles interacciones entre los agentes.

El objetivo final es estudiar bajo qué circunstancias, que en el modelo vienen caracterizadas por los valores de los parámetros, la dinámica conduce a estados con uno o varios sistemas de

valores en los que prevalezca, parcial o completamente, el sacrificio del beneficio individual en favor del bien común.

2. Modelo base

La idea principal, y original, de este trabajo es implementar un modelo a partir de dos modelos ya estudiados, el modelo cultural de Axelrod y los juegos de bienes públicos o “*Public Good Games*”.

2.1. Modelos subyacentes

2.1.1. Juego de bienes públicos (PGG)

Los juegos de bienes públicos han sido objeto de largo estudio en el área de teoría de juegos. La teoría de juegos es una rama de la matemática aplicada que estudia el marco en el cual hay una función que depende de la acción tomada por los agentes participantes al juego. De esta forma se estudia la elección de la conducta óptima de un individuo para maximizar dicha función cuando no se sabe de antemano qué harán los demás participantes. La teoría de juegos como campo de estudio comenzó a existir en 1928, cuando el matemático John von Neuman publicó una serie de análisis. Durante este periodo, los estudios sobre teoría de juegos se centraron, sobre todo, en teoría de juegos cooperativos. Esta teoría se ha expandido a otros ámbitos como puede ser la biología, ciencias políticas o la economía.

El claro ejemplo al mencionar teoría de juegos es el dilema del prisionero [1]. En su propuesta original se habla de la situación en que hay dos presos A y B sospechosos de cometer un crimen, los cuales son llevados por separado a confesar sin saber qué hará el otro. Cada preso debe elegir entre confesar o no sin saber qué hará el otro preso, sin embargo, ambos presos saben las consecuencias de sus decisiones. Si los dos confiesan, ambos presos van a la cárcel 5 años ya que no se puede determinar quién ha sido el culpable. Si ninguno confiesa, ambos van a la cárcel, pero solo por 1 año porque no se les pueden declarar culpables. Si uno confiesa y el otro no, el que confiesa va a la cárcel 10 años y el otro queda libre.

Desde el punto de vista de la teoría de Darwin, asumiendo que los individuos se comportan como “*homo economicus*”, es decir, cada individuo optará por la estrategia que más le beneficie a él mismo independientemente de la acción de los demás, en el dilema del prisionero lo mejor es no confesar (defectar en términos de la teoría de juegos) pues siempre tendrás igual o mejor recompensa que los demás individuos. Esta situación en la que todos defectan es un caso particular de equilibrio Nash [2]. Una combinación de estrategias constituye un equilibrio Nash si ningún agente aumentaría su pago cambiando de estrategia unilateralmente, esto es, manteniendo inmutables las estrategias de los demás agentes.

Dentro de este rama de teoría de juegos se encuentran los juegos de bienes públicos o “*public good games*” (PGG). Los juegos de bienes públicos son un modelo que describe situaciones donde se requiere que cada agente perteneciente a un grupo coopere en orden a conseguir un objetivo común. Esto se traslada desde grupos de bacterias, donde el nivel cognitivo es bajo, hasta sociedades estructuradas con alto nivel cognitivo como la humana. Ejemplos de juegos de bienes públicos en la actualidad podrían ser el cambio climático, explotación de recursos naturales, pago de impuestos, etc. Todos ellos se basan en que hay un bien común en el cual cada agente decide si contribuir o no. Una vez todos los agentes han hecho la elección, dicho bien

común se potencia por un factor de mejora y se reparte para todos por igual independientemente de su contribución.

La manera de modelizar los juegos de bienes públicos que emplearemos en este trabajo es como sigue. Cada agente participante del juego decide cuanto contribuir al juego, después se toman todas las contribuciones, se incrementan por un factor de mejora r y se reparten entre todos los participantes del juego por igual. De esta forma, el pago π_i de un agente i del juego es

$$\pi_i = C + \frac{r}{N} \sum_{j=1}^N c(j) - c(i),$$

donde $c(j)$ es la contribución del agente j -ésimo y N el número de participantes. Además, se añade el término C que hace referencia a lo que se puede contribuir como máximo en un juego, $c(j) \leq C \forall j$. Podemos ver que si $r < N$ la mejor estrategia es no contribuir, aprovechándose de las contribuciones de los demás, y si $r > N$ la mejor estrategia es contribuir lo máximo que puedas, pues siempre terminarás ganando más de lo que has puesto [3].

A partir de estos pagos, introduciremos una dinámica replicadora. La dinámica replicadora se basa en que un agente i tenderá a imitar a un agente vecino j si éste tiene mejor pago. Definimos la probabilidad de imitación $\Pi_{i,j}$ del agente i con pago π_i al agente j con pago π_j como

$$\Pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{\pi_j - \pi_i}{\pi_j} & \pi_j \geq \pi_i \\ 0 & \pi_j < \pi_i \end{cases}.$$

De esta forma, cada agente dispone de la información de lo que han hecho sus vecinos en el paso de tiempo anterior y cuáles han sido sus pagos. En base a esto eligen su nueva estrategia para la siguiente ronda del juego.

2.1.2. Modelo de Axelrod

El modelo de Axelrod, propuesto por Robert Axelrod en 1997, es un modelo utilizado para estudiar sobre la dinámica de culturas [4]. En esta línea, una cultura es representada como un conjunto de rasgos, como pueden ser, por ejemplo, la lengua, el arte, la religión o normas sociales sujetas a cambio por influencia social, es decir, que podemos cambiar de opinión o gusto mediante interacciones sociales. Este modelo se basa en dos pilares fundamentales: influencia social y homofilia. La influencia social da cuenta de la tendencia de los individuos a parecerse más contra más interactúen. Por otro lado, la homofilia se basa en que entre individuos más similares en cuanto a opiniones, gustos, etc. es más propenso que interactúen más.

Con estos ingredientes Axelrod propone un modelo en el que cada agente o individuo está caracterizado por un vector $(\sigma^1, \dots, \sigma^F)$ con $\sigma^f \in \mathbb{N}$, $f = 1, \dots, F$. En el modelo se considera a este vector la cultura del agente, siendo F el número de rasgos (“*Features*”) que conforman la cultura y σ^f , $f = 1, \dots, F$ el atributo u opinión (“*Traits*”) sobre dicho rasgo. En el modelo original se introduce otro parámetro, q , el cual da cuenta de la diversidad cultural ya que se fijan los *traits* a los valores $\sigma^f = \{1, 2, \dots, q\}$ distribuidos de manera uniforme. De esta forma la cultura de un individuo i se representa mediante el vector $(\sigma_i^1, \dots, \sigma_i^F)$.

Por último falta definir como se produce la interacción entre individuos. En virtud de los dos pilares, se elige un agente i aleatoriamente y un vecino suyo j aleatoriamente también. Luego,

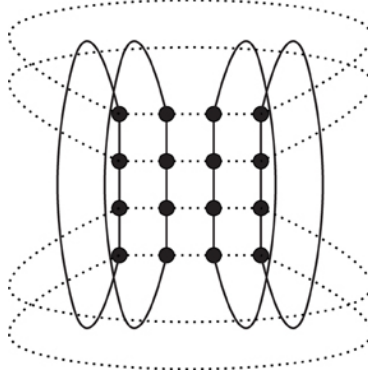


Figura 1: Red cuadrada tipo “*lattice*” de conectividad cuatro y condiciones de contorno periódicas para un tamaño de red de $N = 16$. En línea continua las conexiones verticales y en líneas punteadas las horizontales. Dichas conexiones representan que ambos nodos están conectados, es decir, son vecinos.

se computa el “*overlap*” $\omega_{i,j}$ entre estos dos agentes vecinos como

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_i^f, \sigma_j^f},$$

siendo σ_i^f, σ_j^f los *traits* de cada *feature* f de los agentes i, j respectivamente y siendo $\delta_{x,y}$ la delta de Kroenecker la cual toma valor $\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$ y $\delta_{x,y} = 0$ si $x \neq y$.

El agente i interactúa con un agente vecino j con probabilidad $\omega_{i,j}$. La interacción se basa en que se toma, aleatoriamente, un *feature* f donde no compartan su *trait*, es decir $\sigma_i^f \neq \sigma_j^f$, y se igualan cambiando el *trait* del vecino i quedando $\sigma_i^f = \sigma_j^f$. Dadas las características de esta dinámica, es fácil ver que el sistema dejará de evolucionar cuando todos los *overlaps* entre vecinos sean 0 ó 1, pues en el primer caso nunca van a interactuar y en el segundo, en el cual siempre interactúan, ya no hay *features* con diferentes *traits* a igualar.

2.2. Modelo Axlerod-PGG

El objetivo de este trabajo es investigar qué papel juega la cultura a la hora de participar en un juego de bienes públicos y viceversa. De esta forma modificamos el modelo de Axelrod, el cual se fundamenta en la homofilia y la influencia social, asociando en ciertos rasgos de la cultura un juego de bienes públicos.

Definimos una sociedad como una red con N nodos donde los nodos representan individuos y los enlaces representan si están conectados (son vecinos) o no. Estos enlaces serán bidireccionales, es decir, si un individuo es vecino del otro, el otro es vecino del uno. Emplearemos una red tipo “*lattice*” de conectividad 4 con condiciones de contorno periódicas (véase Figura 1).

En segundo lugar, definimos la cultura de un individuo como un conjunto de F números, es decir, un vector de F componentes. En la cultura haremos distinción entre dos tipos de rasgos culturales de forma que los Z primeros rasgos correspondan a un rasgo cuantitativo asociado a un juego de bienes públicos y los $F - Z$ siguientes correspondan a un rasgo cualitativo. De esta forma, definimos la cultura de un agente i como el vector

$$\left(\underbrace{\sigma_i^1, \sigma_i^2, \dots, \sigma_i^Z}_{Z \text{ rasgos cuantitativos}}, \underbrace{\sigma_i^{Z+1}, \sigma_i^{Z+2}, \dots, \sigma_i^F}_{F-Z \text{ rasgos cualitativos}} \right),$$

donde σ_i^f representa el *trait* del rasgo cultural f -ésimo del agente i -ésimo con $i = 1, \dots, N$ y $f = 1, \dots, F$. Dicho rasgo cultural podrá tomar q valores $\sigma_i^f \in \{0, 1, \dots, q-1\}$.

Dos agentes vecinos pueden imitarse de dos formas. En primer lugar, adoptando el modelo de Axelrod, pueden imitarse mediante homofilia con probabilidad

$$\omega_{i,j} = \frac{1}{F} \sum_{f=1}^F \delta_{\sigma_i^f, \sigma_j^f}, \quad (1)$$

donde $\delta_{x,y}$ es la delta de Kroenecker tomando valores $\delta_{x,y} = 0$ si $x \neq y$ y $\delta_{x,y} = 1$ si $x = y$. De esta forma, a más parecida sea la cultura entre ambos agentes más probabilidad tienen de interactuar.

En segundo lugar, adoptando la dinámica replicadora del juego de bienes públicos pueden imitarse mediante diferencia de pagos con probabilidad

$$\Pi_{i,j} = \begin{cases} \frac{\pi_j - \pi_i}{\pi_j} & \pi_j \geq \pi_i \\ 0 & \pi_j < \pi_i \end{cases}, \quad (2)$$

donde definimos el pago de cada agente i como

$$\pi_i = Z(q-1) + \sum_{f=1}^Z \left(\frac{r}{N} \sum_{j=1}^N \sigma_j^f - \sigma_i^f \right). \quad (3)$$

Es decir, cada agente empieza la ronda con $q-1$ “dinero” (que es la contribución máxima) a repartir por cada uno de los Z juegos, luego en total tendrá $Z(q-1)$. Para cada juego f se suman las contribuciones σ_j^f a ese juego por todos los agentes de la red, se multiplican por un factor de mejora r y se reparten por igual a los N agentes de la red. Finalmente se resta la contribución σ_i^f del propio agente al juego. Esto se itera sobre los Z juegos en los que el agente participa. Nótese que en este modelo el juego es global a toda la red, aunque la interacción se produzca entre vecinos todos los agentes contribuyen al mismo bien público. De esta forma, un agente imita con más probabilidad a su vecino a mayor sea el pago del vecino con respecto al propio. Nótese que la probabilidad de imitación es nula si el pago del vecino es menor que el propio.

Si se da la imitación entre el vecino i con su vecino j , ya sea por homofilia o por diferencia de pagos, entonces se tomará un rasgo f en el cual no compartan el *trait* $\sigma_i^f(t) \neq \sigma_j^f(t)$ y se asignará el *trait* del vecino j al vecino i , $\sigma_i^f(t+1) = \sigma_j^f(t)$. En la interacción se pueden igualar tanto rasgos cualitativos como cuantitativos indistintamente de la procedencia de la imitación.

La dinámica es síncrona, de forma que para cada paso temporal todos los agentes de la red tienen la posibilidad de interactuar con sus vecinos. De esta forma a cada paso temporal lo llamaremos una generación de la red.

Además, añadimos otro parámetro φ que determina la probabilidad de que la interacción sea vía homofilia. De esta forma con probabilidad $0 \leq \varphi \leq 1$ dos vecinos interactúan mediante homofilia, donde se imitan con probabilidad $\omega_{i,j}$, y con probabilidad $1-\varphi$ interactúan mediante diferencia de pagos donde se imitan con probabilidad $\Pi_{i,j}$. La interacción es exclusiva, es decir, solo se puede dar interacción por homofilia o por diferencia de pagos, pero nunca ambas a la vez.

2.2.1. Dinámica

La dinámica de este modelo será como sigue. Trabajaremos en redes cuadradas tipo “*lattice*” de conectividad 4 como la presentada en la Figura 1. Se inicializan las culturas de cada individuo $i = 1, \dots, N$ tomando cada *trait* asociado a cada *feature* un valor aleatorio discreto uniforme en el conjunto $\sigma_i^f \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$. De esta forma el parámetro q da cuenta de la diversidad cultural inicial.

Para cada paso temporal, o generación, a cada jugador se le da una cantidad $Z(q - 1)$ a repartir para cada uno de los Z juegos en los que participa, siendo la cantidad máxima $q - 1$ para cada juego. Así, $0 \leq \sigma_i^f \leq q - 1$ es la contribución al juego $f \leq Z$ por el agente i . Una vez los N agentes han contribuido, en cada juego se suman todas las contribuciones, se multiplican por el factor de mejora r y se reparten equitativamente por todos los participantes del juego, independientemente de su contribución.

La imitación se hace de forma síncrona. Una vez los agentes han hecho su contribución y se les ha repartido la contribución total por el factor de mejora, cada agente elige a uno de sus vecinos de forma aleatoria e interaccionaran. Hay dos mecanismos de interacción, por homofilia con probabilidad φ y por diferencia de pagos con probabilidad $1 - \varphi$. Estos mecanismos son excluyentes, es decir, se puede dar un mecanismo de interacción u otro, pero nunca los dos al mismo tiempo. Si la interacción es por homofilia, entonces la imitación se da con probabilidad $\omega_{i,j}$ dado por (1). Si la interacción es por diferencia de pagos, entonces la imitación se da con probabilidad $\Pi_{i,j}$ dado por (2).

Si se da lugar a la imitación del agente i con su vecino j , independientemente del método de interacción, entonces el agente i tomará un *feature* f , de forma aleatoria, donde el *trait* no sea común con su vecino j $\sigma_i^f(t) \neq \sigma_j^f(t)$ e imitará ese *feature* para la siguiente ronda $\sigma_i^f(t + 1) = \sigma_j^f(t)$.

2.3. Resultados

Fijamos el tamaño de red $N = 1024$ para una red cuadrada tipo “*lattice*” como se presenta en la Figura 1. Se inicializa la cultura de cada agente asignando a cada *trait* σ_i^f un valor en $\{0, 1, \dots, q - 1\}$ de manera aleatoria con distribución de probabilidad uniforme. Antes de hacer un barrido de parámetros general, vamos a los casos extremos del modelo.

2.3.1. Modelo de Axelrod

Nuestro modelo es reducible al modelo original de Axelrod fijando los parámetros $Z = 0$ y $\varphi = 1$. En el modelo de Axelrod lo interesante es estudiar el sistema bajo el parámetro q , por ello haremos un barrido en este parámetro para distintos valores de F . En este caso particular la interacción solo puede darse mediante homofilia con la probabilidad dada por (1), luego el parámetro r , característico del juego de bienes públicos, no tiene ninguna influencia en este caso.

Por la naturaleza del modelo de Axelrod, la dinámica siempre llega a un estado donde deja de evolucionar. Esto ocurre cuando todos los *overlaps* $\omega_{i,j}$ toman valores 0 y/o 1 pues si $\omega_{i,j} = 0$ quiere decir que dos vecinos no comparten *trait* en ningún *feature*/rasgo cultural y nunca van a interaccionar. Por el otro lado, si $\omega_{i,j} = 1$ quiere decir que los dos vecinos comparten *traits* en todos los rasgos por tanto aunque interaccionen no tienen nada más que compartir.

De esta forma, los observables que emplearemos para estudiar la dinámica de Axelrod se

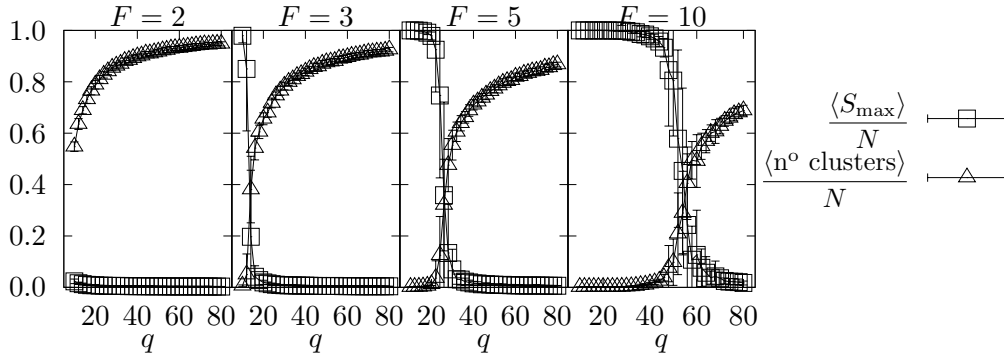


Figura 2: Simulaciones en una red tipo “*lattice*” con $N = 1024$, $\varphi = 1$ y $Z = 0$ para diferentes valores para F y un valor arbitrario de r . Cada punto de la gráfica consta del promedio sobre 50 diferentes realizaciones y las barras de error representan la desviación estándar de las medidas. En cuadrados el promedio del tamaño máximo del clúster y en triángulos el promedio del número de clúster, ambos normalizados al tamaño de la red.

centrarán en el estudio de los clústeres. Definimos un clúster como el conjunto de agentes vecinos que comparten todos los rasgos culturales. Diremos que un agente i y un agente j pertenecen al mismo clúster si comparten cultura, $\sigma_i^f = \sigma_j^f \forall f$, y se puede trazar una camino de agentes vecinos entre ellos con la misma cultura. De cada simulación extraeremos dos observables. En primer lugar, el tamaño del clúster más grande en la red S_{\max} y en segundo lugar el número de diferentes clústeres que se han formado en la red, n° clústeres. Junto con estos dos observables podremos extraer la información del sistema.

Observamos en la Figura 2 como hay una transición clara de los observables en el parámetro q para valores de $F > 2$. Para valores por debajo de la transición $q < q_c$ se tiene un tamaño máximo del cluster igual al de la red y, por tanto, el número de clústeres es 1. Para valores por encima de la transición $q > q_c$ tenemos lo contrario, un tamaño máximo de clúster cercano a la unidad y un número de clústeres elevado. Esto se resume en que para valores por debajo de la transición tenemos una sociedad/red monocultural y para valores por encima de la transición tenemos una sociedad multicultural. Este es el resultado principal del modelo de Axelrod y nos apoyaremos en él más adelante.

2.3.2. Juegos de bienes públicos

De igual forma que nuestro modelo es reducible al modelo de Axelrod, también lo es a un juego de bienes públicos fijando los parámetros $\varphi = 0$ y $F = Z = 1$. Nosotros seremos más laxos en este último y solamente fijaremos $F = Z$ para ver cómo influye el número de juegos. En este caso particular la única interacción posible es por diferencia de pagos controlada por la probabilidad dada por (2).

Los observables que emplearemos para estudiar los juegos de bienes públicos se basarán en la cooperación. Entenderemos que un agente i coopera en el juego f -ésimo cuando su *trait* en ese rasgo sea distinto de 0, $\sigma_i^f \neq 0$. Recordemos que el *trait* puede tomar q valores, de forma que para $q = 2$ podemos interpretar la contribución como contribuir o no y para $q > 2$ se puede contribuir en mayor o menor medida.

En el juego de bienes públicos con la dinámica replicador que hemos empleado nosotros con la probabilidad de imitación $\Pi_{i,j}$ en principio solamente dejará de evolucionar si $\Pi_{i,j} = 0 \forall i, j$,

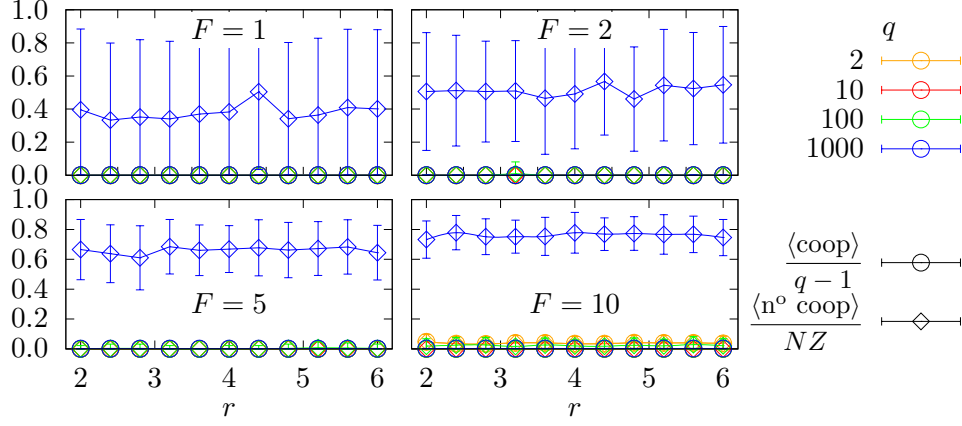


Figura 3: Simulaciones en una red tipo “lattice” con $N = 1024$, $\varphi = 0$, $F = Z$ con diferentes valores de r , q y F . Cada punto representa el promedio de 100 realizaciones independientes y las barras de error la desviación estándar. En círculos se representa el promedio de la cooperación y en rombos el promedio del número de juegos en los que se coopera.

es decir, si todos los pagos π_i son iguales. Al realizar simulaciones se vio que el sistema siempre terminaba en un estado con todos los pagos π_i iguales, de esta forma se toma como observable la cooperación de la red, coop , y el número de juegos en los que se coopera (cada agente puede cooperar en Z juegos), $\text{n}^\circ \text{ coop}$, entendiendo estos como

$$\text{coop} = \sum_{f=1}^Z \sum_{j=1}^N \frac{\sigma_j^f}{NZ}, \quad \text{n}^\circ \text{ coop} = \sum_{f=1}^Z \sum_{j=1}^N \alpha_j^f, \quad (4)$$

donde $\alpha_j^f = 1$ si $\sigma_j^f > 0$ y 0 si $\sigma_j^f = 0$. Nótese que $0 \leq \text{coop} \leq q - 1$ y $0 \leq \text{n}^\circ \text{ coop} \leq NZ$.

En la Figura 3 tenemos el valor de estos observables para diferentes q y $F = Z$ frente r con $\varphi = 0$. La cooperación promedio es siempre nula o despreciable respecto al máximo que se puede contribuir $q - 1$, independientemente de q , $F = Z$ y r . Se observa un cambio en el número de juegos en los que se contribuye, siendo mayor a mayor es F y mayor es q , sin embargo, la cooperación sigue siendo prácticamente nula. Esto significa que, sin importar el valor de r , F o q , la cooperación no es favorable, pues a valores bajos de q no se contribuye nada y para valores altos de q aunque sí se contribuya en los juegos, su contribución es despreciable con respecto a la máxima contribución que podrían hacer.

Concluimos entonces que para $\varphi = 0$ y $F = Z$ tenemos un sistema que tiende a la defección o una contribución despreciable, sin importar los parámetros r, q, F .

2.3.3. Modelo Axlerod-PGG

Una vez estudiados los casos extremos del modelo y hecha una idea de lo esperado en dichos extremos, procedemos a mezclar el modelo de Axelrod con los juegos de bienes públicos. Empezamos tomando $F = 2$, $Z = 1$ y $\varphi \neq \{0, 1\}$, de esta forma tenemos que en la cultura asociada a cada agente el primer *feature* se corresponde a un juego de bienes públicos y el segundo a un rasgo cultural. Tomaremos los valores $\varphi = 0.1, 0.5$ y 0.99 para ver la influencia que tiene darle más peso a una interacción que a la otra.

En la Figura 4 se muestran los valores de los observables tanto culturales (tamaño máximo y número de clústeres) como del juego (cooperación y número de juegos en los que se coopera). Lo

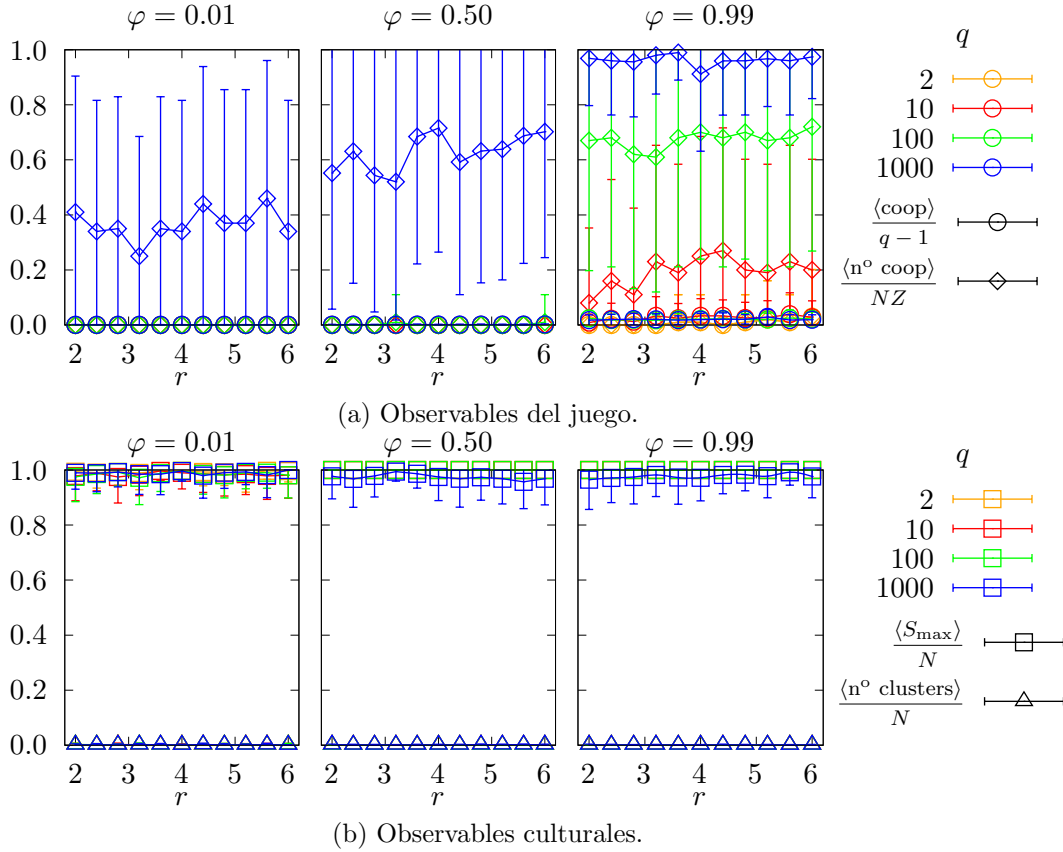


Figura 4: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ para diferentes valores de φ con $F = 2$ y $Z = 1$. En diferentes colores se presentan los resultados para diferentes valores de q . En la subfigura a) se presentan los resultados para los observables propios del juego de bienes públicos. En círculos el promedio de la cooperación y en rombos el número de los juegos en los que se coopera. En la subfigura b) se presentan los resultados para los observables propios del modelo de Axelrod. En cuadrados el promedio del tamaño máximo del clúster y en triángulos el número de clústeres. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 simulaciones.

primero es observar cómo los resultados no dependen significativamente del factor de mejora de r , igual que ocurría en la Figura 3. En cuanto a la formación de clústeres culturales, podemos ver en la subfigura b) como, aunque no sea una monocultura, sí hay una cultura muy predominante frente a las demás, las cuales son marginales. En este hecho la influencia de φ y q no es muy notoria. Es cierto que para φ y q mayores, se tiene que el tamaño de las culturas predominantes que se forman son menores. Además, podemos ver como la desviación estándar es mayor. Esto significa que a valores mayores de φ y q , mayor es la diversidad cultural en la red, sin embargo, una cultura siempre predomina sobre las demás. Esto contrasta completamente con los resultados para el modelo de Axelrod puro en la Figura 2 donde existe una transición con q . En cuanto a la cooperación, podemos ver que a mayor es q , mayor es el número de cooperadores. Por otra parte, para $\varphi = 0.01$ los resultados obtenidos son análogos a los de la Figura 3, siendo la cooperación prácticamente nula aunque existan cooperadores. Nótese que al ser $Z = 1$, el número de juegos en los que se coopera es el mismo que el número de agentes que coopera. Por otro lado, al aumentar φ , es decir, al favorecer la imitación por homofilia de Axelrod, vemos como el número de agentes que cooperan aumenta, incluso llegando a ser notorio para los valores de $q = 10, 100$ para $\varphi = 0.99$. Sin embargo, aunque la homofilia promueva la cooperación, la contribución sigue

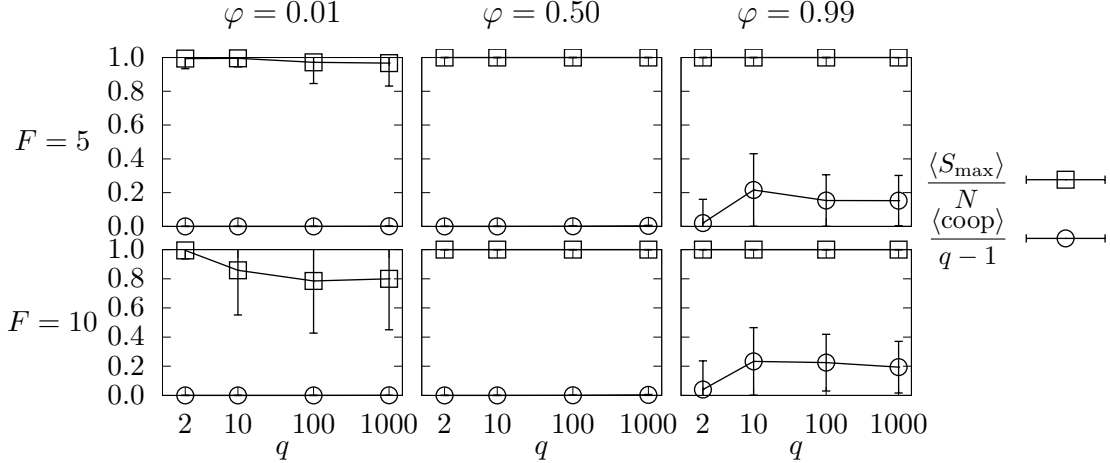


Figura 5: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ con $Z = 1$ y $r = 3$. En columnas tenemos realicaciones con diferentes φ y en filas con diferente F . En cuadrados se presenta el valor promedio del tamaño del clúster más grande y en círculos el promedio de la cooperación frente a q , ambos normalizados. Cada punto consta del promedio de 100 realizaciones independientes.

siendo despreciable.

En virtud de los resultados vistos para $F = 2$ y $Z = 1$, podemos ver que el factor de mejora r no influye significativamente en los resultados, por lo que lo fijaremos $r = 3$ de forma arbitraria. Estudiaremos ahora como influye aumentar F manteniendo $Z = 1$, teniendo así una cultura con más rasgos cualitativos. En la Figura 5 vemos el comportamiento para $F = 5, 10$ y diferentes q y φ . Observamos sobre los observables culturales como sigue habiendo una monoculturalidad clara para valores intermedios y altos de φ sin importar q . Para valores bajos de φ , cuando se potencia la interacción por diferencia de pagos sobre la interacción por homofilia, vemos como conforme aumentamos q el promedio del tamaño máximo del clúster disminuye, pero sigue habiendo una cultura predominante sobre las demás. La diferencia entre $F = 5$ y $F = 10$ es que para $F = 10$ es más sencillo formar culturas diferentes por el hecho de haber más rasgos cualitativos en la cultura, por eso para $F = 10$ se forman más culturas.

Sin embargo, el comportamiento es diferente para los observables del juego. En cuanto a la cooperación podemos ver como para φ bajos e intermedios la cooperación es nula o despreciable con respecto a la contribución máxima $q - 1$ independientemente de q . Para valores altos de φ , donde predomina la imitación por homofilia a la imitación por diferencia de pagos, vemos como para $q > 2$ existe cooperación, entorno a un 15% para $F = 5$ y un 20% para $F = 10$. Con $q = 2$, y como estamos en estados monoculturales, podemos ver que alguna realización ha finalizado en una monocultura cooperadora debido a la desviación estándar asociada al promedio de cooperación, pues para $q = 2$ y siendo una sociedad monocultural, las únicas opciones que hay entre la cooperación es que sea máxima o nula.

2.4. Conclusión

Como conclusión, podemos ver el efecto de la homofilia sobre los juegos de bienes públicos y viceversa. Cuando se potencia la interacción por diferencia de pagos, φ bajos, tenemos que el resultado final en la cooperación es el propio de un juego de bienes públicos, donde se tiende

a la defección como hemos visto en la Figura 3. En este escenario, como el juego de bienes públicos tiende a la defección, y en particular, a que todos los agentes contribuyan de igual forma, tenemos que todos los agentes comparten un rasgo cultural, el que está asociado al juego de bienes públicos. Esto provoca que para la imitación por homofilia, modulada por $\omega_{i,j}$ en la ecuación (1), la probabilidad de imitación por homofilia nunca sea nula y por tanto se va a un estado monocultural inevitablemente.

Por otra parte, para φ elevados, donde se potencia la imitación por homofilia sobre la imitación por diferencia de pagos, tenemos que el efecto de la tendencia a la defección desaparece para $q > 2$. Para $q = 2$, inicialmente la mitad de la red contribuye y la otra mitad no. Si fuese solamente por homofilia, en principio si se forma una monocultura, no hay ninguna preferencia entre que el primer *feature* sea $\sigma_i^1 = 0, 1 \forall i$. Sin embargo, el hecho de que exista una probabilidad de imitación por diferencia de pagos en dicho *feature*, por pequeña que sea, hace que en dicho *feature* se tienda a tomar el valor $\sigma_i^1 = 0$, y por tanto la homofilia “contagia” a toda la red excepto en casos excepcionales. Para $q > 2$ tenemos más libertad en los valores que puede tomar cada *feature*. De esta forma, bajo este escenario con φ elevado y $q > 2$, tenemos dos efectos. En primer lugar, el hecho de la predominancia de la homofilia hace que el *feature* asociado al juego de bienes públicos converja más rápidamente a un valor de forma que el sesgo y la tendencia a la defección disminuye. En segundo lugar, la transición característica con q de Axelrod de un estado monocultural a un estado multicultural que podemos ver en la Figura 2 desaparece en nuestro modelo. Esto es porque para q elevados en el modelo de Axelrod se tiene que ningún vecino, o muy pocos, comparten al menos un *feature* por lo que no se pueden formar clústeres por la homofilia. El *feature* asociado al juego de bienes públicos rompe con esta dinámica, pues por muy elevado que sea q , la imitación por diferencia de pagos siempre será probable inicialmente, aunque no se comparta ningún *feature* entre dos agentes vecinos. Esto provocará que dichos agentes compartan al menos un *feature* y por tanto la homofilia entre dichos agentes ya será probable hasta que acaben compartiendo todos los *features*.

3. Modificación al modelo: bienes públicos locales

Las sociedades humanas cooperan habitualmente en juegos de bienes públicos y situaciones de interés colectivo como podría ser el cambio climático. Sin embargo, como hemos estudiado hasta ahora en nuestro modelo, tenemos que el resultado es una sociedad monocultural defectora. Por cómo se ha definido el juego no es sorpresa, pues el propio juego tiene una tendencia a la defección, pues siempre es más favorable no cooperar que cooperar y por la dinámica replicador, siempre habrá algún defector que se esté beneficiando de los demás y sus vecinos tomen su estrategia defectora, la cual se expande rápidamente a toda la red.

En nuestro modelo hasta ahora hemos tratado a todos los agentes por igual, tanto para el juego como para los rasgos culturales. En cuanto al juego, tratar a todos los agentes por igual contrasta con la realidad donde la diversidad social es obvia, por lo que nuestro modelo no estaba reflejando el paradigma real. Esta diversidad es la que promueve la cooperación entre agentes. En concordancia al trabajo realizado por Santos, Pacheco, et. al. [5], propondremos un nuevo tipo de juego en el que se introduce una diversidad mediante el número de juegos en los que participa cada agente y el número de agentes que hay en cada juego. Este mecanismo es suficiente para promover la cooperación, aunque se pueden usar otros tipos de mecanismos, como puede ser mecanismos basados en la reputación y castigo individual.

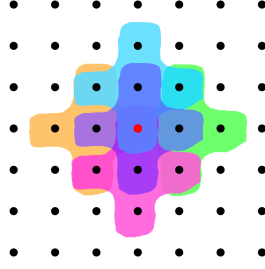


Figura 6: Estructura de la red y vecinos. Fijándonos en el agente central en rojo, podemos ver como participa en 5 juegos (en diferente color cada uno). El suyo propio con sus 4 vecinos y los 4 formados por sus vecinos.

Igual que en el modelo anterior, en cada juego se tomarán todas las contribuciones al bien público realizadas, se multiplicarán por el factor de mejora r y se repartirán por igual entre todos los participantes del juego. La diferencia ahora es que no será un juego de “todos con todos” como teníamos en el modelo anterior, donde para cada juego se tomaban las contribuciones de todos los agentes de la red y se repartían entre todos los agentes de la red.

Cada agente i definirá un juego para cada uno de sus Z *features* asociados a un juego de bienes públicos. En estos Z juegos definidos por el agente i participarán los k_i vecinos del agente i . De esta forma, dado un agente i , dicho agente participará en $Z(k_i + 1)$ juegos de bienes públicos. En la Figura 6 se muestra un ejemplo gráfico de cómo se introduce la diversidad social.

A efectos del marco teórico del modelo, lo único que cambia con el modelo anterior es el pago del agente π_i que teníamos en la expresión (3). El nuevo pago π_i ahora será

$$\pi_i = Z(k_i + 1)(q - 1) + \sum_{f=1}^Z \sum_{\substack{j=0 \\ j \in \mathcal{N}(i)}}^{k_i} \left(\frac{r}{k_j + 1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \in \mathcal{N}(j)}}^{k_j} \sigma_l^f - \sigma_i^f \right), \quad (5)$$

donde $\mathcal{N}(j)$ representa al conjunto formado por los vecinos de j y el propio j , es decir, en el sumatorio $\sum_{\substack{j=0 \\ j \in \mathcal{N}(i)}}^{k_i}$ denotamos por j a los k_i vecinos de i siendo $j = 0$ el propio agente i . La expresión se lee como sigue. Para un agente i , tenemos que participa en $Z(k_i + 1)$ juegos, los Z propios y los Zk_i definidos por sus k_i agentes vecinos. Cada agente i tiene la posibilidad de contribuir en cada juego de bien público $f \leq Z$ con $\sigma_i^f \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$. Para cada juego $f \leq Z$ en el que participa definido por el agente j , se suman las contribuciones de los k_j vecinos de j , se multiplican por el factor de mejora r , se reparte entre los $k_j + 1$ participantes y se quita la contribución realizada por el propio agente i al juego. La contribución solo cambia de *feature* en *feature* f , así los agentes deciden cuanto poner en cada bien público, independientemente de con quién estén jugando ese bien público. Nótese que si $r > k_j + 1$, la mejor estrategia es cooperar pues siempre recibirás más que lo que pones. Es por eso que fijaremos $r \leq (k_j + 1)$, en nuestro caso, al trabajar en redes tipo *lattice*, tenemos que la conectividad $k_j = 4 \forall j$, luego fijaremos $r \leq 5$.

3.1. Juego de bienes públicos Santos y Pacheco

Tomamos la misma dinámica que la presentada en 2.2.1 con la peculiaridad de que ahora el pago viene dado por la ecuación (5) introducida anteriormente. También, de igual forma que en

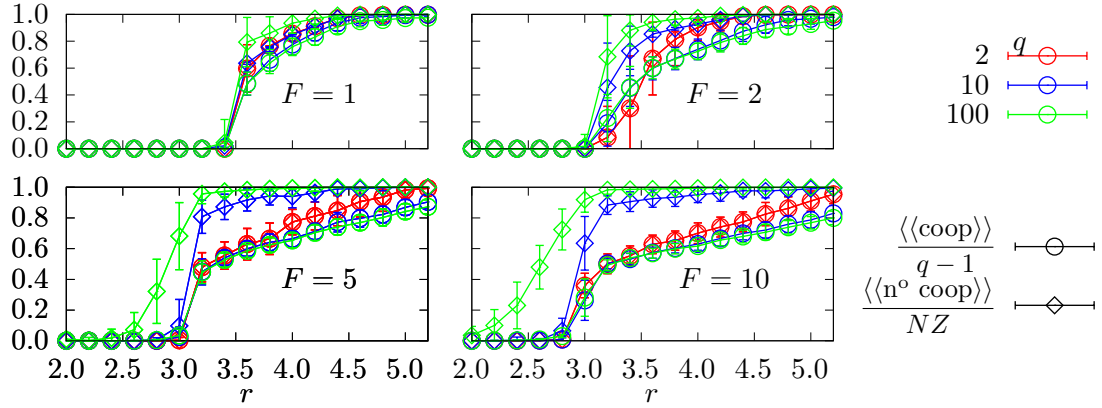


Figura 7: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ con $\varphi = 0$ y $F = Z$. Cada gráfica se corresponde para un valor diferente de F y se muestran los observables del juego normalizados frente a r . En diferentes colores se muestran simulaciones para diferentes valores del parámetro q . En círculos se muestra el promedio del promedio de cooperación y en rombos el promedio del promedio del número de juegos en los que se participa. Cada punto es el promedio de 100 realizaciones independientes. Para cada realización se toma un tiempo transitorio de termalización de 10^5 pasos temporales y se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

2.1.1, fijamos los valores $\varphi = 0$ y $F = Z$.

La dinámica tiene una peculiaridad con respecto a la anterior y es que ahora el sistema no llega a un estado donde deje de evolucionar siempre, sino que dependiendo de los parámetros se queda en un estado estacionario donde los observables en promedio se estabilizan, pero el sistema sigue cambiando de paso temporal en paso temporal, es decir, el estado estacionario tiene varios microestados accesibles. Esto hace que en cada realización no obtengamos un valor concreto para los observables, sino que obtenemos un valor promedio una vez dejamos termalizar el sistema y hacemos varias mediciones en él. Por consiguiente, para cada realización se dejará un tiempo de termalización suficiente para que el sistema llegue al estado estacionario. Una vez en el estado estacionario se tomarán varias medidas en dicho estado estacionario y se realizará el promedio de las mismas para extraer los observables de dicha realización. Este proceso se hará para diferentes realizaciones independientes de forma que al final haremos el promedio del resultado de cada realización. De esta forma los observables son un promedio sobre los promedios de cada realización. En el caso de que en una realización el sistema llegue a un estado donde deje de evolucionar, se toman los observables sobre este último estado.

Podemos ver en la Figura 7 un resultado muy distinto al que teníamos en la Figura 3 con el tipo de juego anterior. Ahora se aprecia una transición clara para r donde para $r < r_c$ tenemos cooperación nula y para $r > r_c$ aparece cooperación. Si nos fijamos en la gráfica con $F = 1$, donde solo tenemos un juego, podemos ver que la transición ocurre alrededor de $r_c = 3.5$, concordando con el resultado de [5]. Además, en este caso no hay ninguna diferencia notoria con el valor de q .

Conforme aumentamos F podemos ver como esta transición se desplaza a valores más pequeños de r , es decir, al añadir juegos se favorece la cooperación. Sin embargo, aunque la transición ocurra para valores inferiores de r , la forma de la transición cambia, haciendo que para F más pequeños, la contribución para $r > r_c$ sea mayor que para F más grandes. En cuanto a la cooperación, el parámetro q no influye de manera cualitativa, pues la forma de la curva es

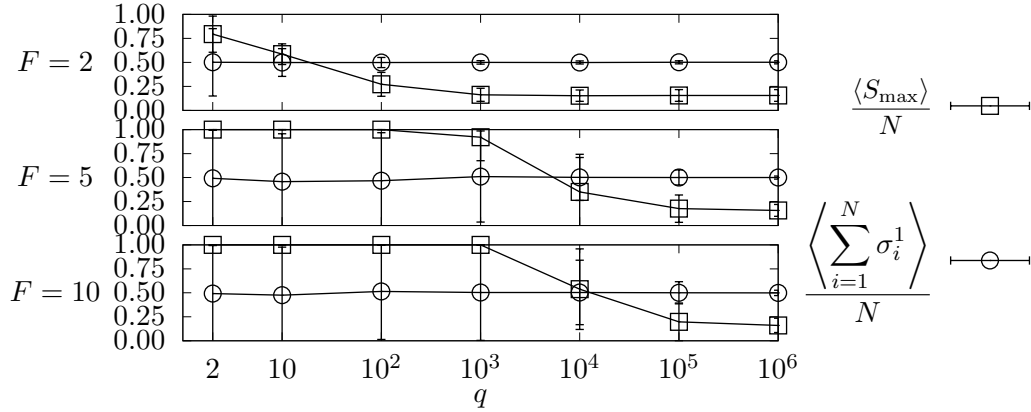


Figura 8: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ con $\varphi = 1$ y $Z = 1$ para diferente F . Cada punto es el promedio de 100 realizaciones independientes.

la misma, aunque si es cierto que a mayor q se tiende a contribuir ligeramente menos. Donde sí vemos que influye q es para $F > 1$ con el número de cooperación. Podemos ver que para F y q elevados, se empieza a contribuir en los juegos antes de la transición con la cooperación. Esto es reflejo de lo que ya vimos en 2.1.1, donde para valores grandes de q , los agentes contribuyen pero su contribución es despreciable comparada con la contribución máxima $q - 1$, por lo que podemos considerar que no se contribuye.

En vista de los resultados, fijamos la contribución en los juegos con $q = 2$, es decir, cada agente puede elegir contribuir o no al juego. Esto repercute en nuestro modelo completo cambiando ahora la manera en la que inicializaremos la cultura, pues ahora q solo se aplicará a los *features* cualitativos $f > Z$, mientras que para los *features* cuantitativos asociados a un juego de bienes públicos, tendremos que los *traits* serán binarios $\sigma_i^f \in \{0, 1\}$ $f \leq Z$.

3.2. Axelrod con un *feature* binario

En virtud del apartado anterior, vamos a proponer el cambio en nuestro modelo de tomar los *features* asociados al juego como binarios y los no asociados al juegos controlados por el parámetro q como en el modelo base.

Estudemos como afecta al modelo de Axelrod la introducción de un *feature* binario, de forma que el primer *trait* puede tomar valores $\sigma_i^1 \in \{0, 1\}$ mientras que los demás $\sigma_i^f \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$ $\forall f > 1, \forall i$. Nuestro modelo sabemos que es reducible al modelo de Axelrod tomando $\varphi = 1$, y para introducir el *feature* binario tomaremos $Z = 1$. En este escenario sabemos que r no tiene ninguna influencia ya que no es posible la interacción por diferencia de pagos, por lo que lo fijaremos a $r = 3$ de forma arbitraria.

Al tratarse del modelo de Axelrod, sabemos que la dinámica llega a un estado en el cual deja de evolucionar cuando todos los $\omega_{i,j}$ son 0 ó 1, por lo que en este caso tomaremos el promedio de los observables para cada realización independiente. Tomaremos el tamaño del clúster más grande S_{\max} y el número de agentes con el primer *trait* $\sigma_i^1 = 1$, es decir, $\sum_{i=1}^N \sigma_i^1$, ambos normalizados por el tamaño de la red N . Nótese que al ser un modelo de Axelrod, no hacemos todavía la asociación de este *feature* con un juego de bienes públicos.

En la Figura 8 podemos ver los resultados de las simulaciones y podemos ver como sigue existiendo una transición clara en el parámetro q . Esta transición se ha desplazado a valores

muchos más altos de q , por ejemplo, en $F = 10$ en la Figura 2 tenemos la transición en torno a $q_c = 55$ y, al introducir un *feature* binario, ahora tenemos que la transición se ha desplazado hasta $q_c = 10^4$. Esto concuerda con los resultados de la literatura [6], donde se predice que la transición ocurre para $\frac{q_c}{N} = 10$ con $F = 10$.

Para valores $q < q_c$ se tienen estados monoculturales, pues el tamaño máximo del clúster es el tamaño de la red. Además, vemos que el promedio del primer *feature* es 0.5 y su desviación estándar 0.5 también. Esto nos indica que para $q < q_c$ tenemos estados monoculturales donde el primer *feature* toma valor $\sigma_i^1 = 1 \quad \forall i$ o $\sigma_i^1 = 0 \quad \forall i$ con igual probabilidad. Para valores $q > q_c$ se tienen estados multiculturales, donde el tamaño máximo de los clusters disminuye conforme aumenta q . Además, se vuelve a tener que el promedio del primer *feature* es 0.5, pero ahora su desviación estándar decrece con q indicando que lo que está ocurriendo que para cada realización la mitad de los agentes tienen $\sigma_i^1 = 1$ y la otra mitad $\sigma_i^1 = 0$ aproximadamente.

3.3. Modelo Axlerod-SantosPacheco

Por todo lo comentado hasta ahora, vamos a incorporar en nuestro modelo la modificación hecha por Santos y Pacheco [5], con el fin de que nuestro modelo refleje la diversidad social a la hora de participar en un juego de bienes públicos. Además, vamos a fijar la contribución en los juegos de forma binaria, es decir, se coopera o no. De esta forma, la cultura de un agente ahora vendrá dada por $\sigma_i^f \in \{0, 1\} \quad \forall f \leq Z$ y $\sigma_i^f \in \{0, 1, \dots, q-1\} \quad \forall f > Z$.

La dinámica será la misma que en el modelo anterior, inicializando las culturas de forma aleatoria uniforme entre los posibles valores que pueden tomar los *traits* de cada *feature*. El parámetro φ determinará qué tipo de interacción se da entre agentes vecinos, siendo con probabilidad φ la interacción dada por homofilia, donde se da imitación con probabilidad $\omega_{i,j}$ dada por (1). Si la interacción no es por homofilia, entonces será por diferencia de pagos, donde la imitación se da con probabilidad $\Pi_{i,j}$, dada por (2). La diferencia es que ahora el pago es diferente, pues para los *features* asociados a un juego de bienes públicos hemos fijado los *traits* a ser binarios, por lo que la expresión (5) para el pago se transforma en

$$\pi_i = Z(k_i + 1) + \sum_{f=1}^Z \sum_{\substack{j=0 \\ j \in \mathcal{N}(i)}}^{k_i} \left(\frac{r}{k_j + 1} \sum_{\substack{l=0 \\ l \in \mathcal{N}(j)}}^{k_j} -\sigma_i^f \right). \quad (6)$$

Como hemos visto en la Figura 7 que el número de juegos afecta de manera cualitativa en la cooperación desplazándose la transición, fijaremos $Z = 1$ teniendo así el primer *feature* asociado a un juego de bienes públicos bajo el método de Santos y Pacheco.

Las simulaciones ahora, de igual forma que ocurre en la Figura 7, no llegan a un estado congelado donde dejen de evolucionar, sino que se quedan en estados estacionarios donde los observables se estabilizan. Por esto, para cada realización dejaremos un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales y posteriormente se tomarán 200 medidas para cada observable equiespaciadas en 10^6 pasos temporales y se hará el promedio de éstas. Así los datos que se presenten en las posteriores figuras serán el promedio de 100 realizaciones independientes habiendo en cada realización un promedio de 200 puntos. Habrá valores para los parámetros que se lleguen a estados congelados donde el sistema deja evolucionar, para esos casos se tomará la medida sobre el estado final sin hacer el promedio de los 200 puntos.

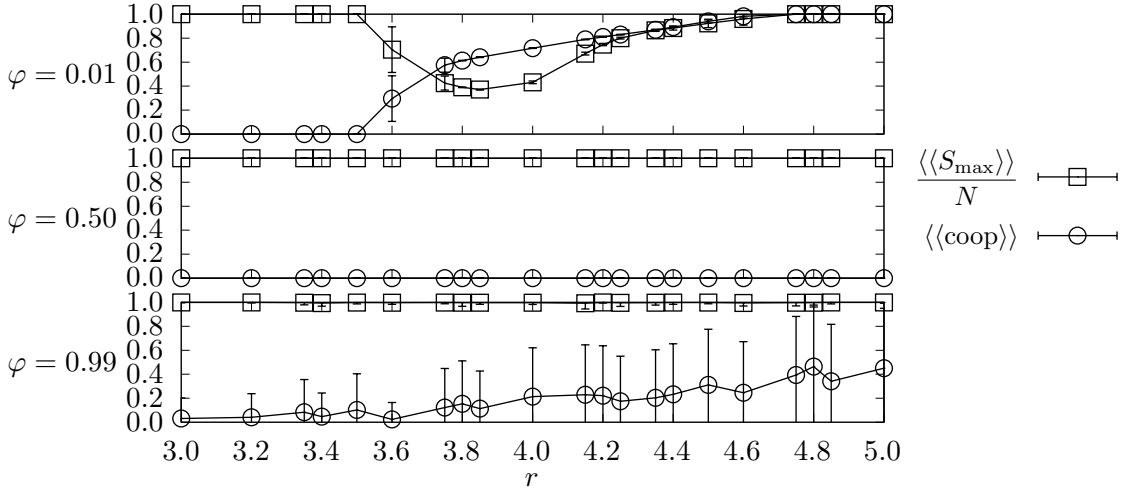


Figura 9: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ y valores de $q = 2$, $F = 2$ y $Z = 1$. Cada gráfica se corresponde con los valores de $\varphi = 0.01, 0.05$ y 0.99 respectivamente. En cuadrados se representa el valor del observable del tamaño máximo de los clústeres y en círculos el promedio de la cooperación en la red, ambos normalizados. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 realizaciones independientes. Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

En la Figura 9 podemos diferenciar tres zonas dependiendo del valor de φ . Para φ bajos tenemos el comportamiento cooperativo propio de un juego de bienes públicos pasando de una monocultura no cooperadora para r bajos a una monocultura cooperadora para r altos (cerca de $r = 5$). Para valores medios hay multiculturalidad y cooperación intermedia. Esto significa que se forman clústeres de cooperadores y defectores. Nótese que para los valores bajos y altos de r el sistema llega a un estado congelado, donde todos los links son inactivos y la probabilidad de imitación por diferencia de pagos es nula pues todos tienen el mismo pago. Para los valores medios se llega a un estado estacionario. Podemos ver el efecto de la homofilia en la figura con $\varphi = 0.01$ sobre los juegos de bienes públicos.

Para φ medios hay una monoculturalidad defectora, sin importar r , como podemos ver en la figura con $\varphi = 0.50$.

Para φ altos hay monoculturalidad, sin embargo r sí juega un papel. Todas las simulaciones por separado terminan en un estado monocultural cooperador o defector. A r bajos la probabilidad de terminar en una sociedad monocultural cooperadora es ínfima. Conforme aumentamos r se promueve la cooperación. Para r elevados la tendencia es que la mitad de las veces la sociedad termina siendo cooperadora y la mitad defectora.

Analicemos el efecto que tiene la homofilia sobre los juegos de bienes públicos y viceversa una vez vistas estas tres regiones. En la primera región, con φ bajos, tenemos que la forma de la curva para la cooperación tiene la misma que en la Figura 8, donde teníamos un juego de bienes públicos puro. El hecho de introducir homofilia en este rango, donde la probabilidad de interacción por homofilia es muy baja, hace que se modifique el valor de r_c para el cual empieza a haber cooperación, aumentándolo conforme aumentamos φ . Además, podemos ver que para $\varphi = 0.01$ y r cercanos a $r = 5$, la homofilia rompe con los clústeres de defectores que sí aparecen en la Figura 8, haciendo que el sistema tienda a una sociedad monocultural cooperadora. Conforme

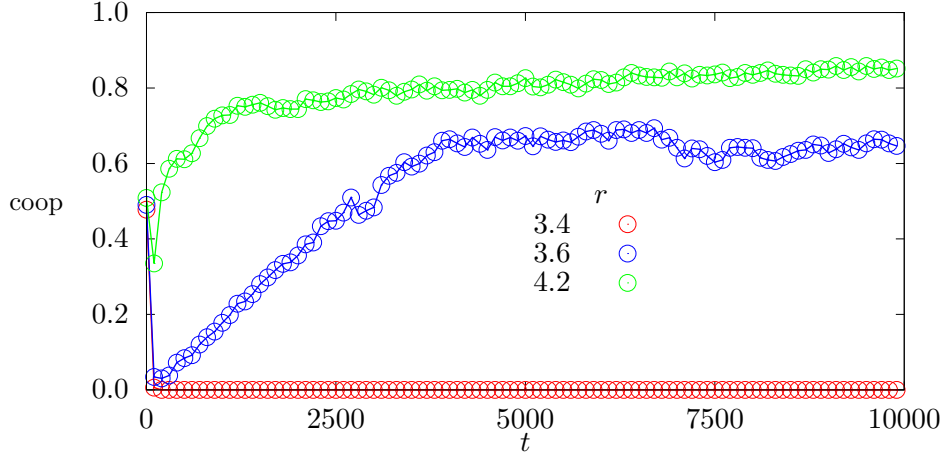


Figura 10: Cooperación frente al tiempo en una red tipo “*lattice*” de tamaño $N = 1024$ para el valor de los parámetros $F = Z = 1$, $\varphi = 0$. Cada color representa una realización con diferente parámetro r . Se toma un intervalo temporal de 10^4 pasos temporales y se mide la cooperación cada 100 pasos temporales.

aumentamos φ , aumentando la probabilidad de interacción por homofilia, tenemos que el valor r_c para el cual empieza a haber cooperación se desplaza a valores más altos hasta tal punto de desaparecer, como podemos ver en la figura con $\varphi = 0.50$. En esta segunda región se tiene un estado monocultural defector sin importar el factor de mejora r . Sin embargo, cuando seguimos aumentando φ hasta tal punto que la interacción por diferencia de pagos es mínima, podemos ver el efecto de los juegos de bienes públicos a la homofilia. Para $\varphi = 1$, como hemos visto en la Figura 2, esperamos una transición de un estado monocultural a uno multicultural con el *feature* binario tomando valor 0 ó 1 con igual probabilidad, en particular para $q = 2$ esperamos un estado monocultural con igual probabilidad de que sea defector o cooperador. Sin embargo, el asociar un juego de bienes públicos a este *feature* hace que esta equiprobabilidad desaparezca y dependa del factor de mejora r . A r bajos, predomina la defección a la cooperación, pero conforme aumentamos r vamos recuperando la equiprobabilidad tendiendo a 0.5 para $r = 5$.

Otro aspecto importante que no se ve directamente en la figura es que al final las diferentes culturas las define el *feature* asociado al bien público, pues poco a poco, debido a la imitación tanto por homofilia como por diferencia de pagos, se empiezan a compartir los rasgos cualitativos y una vez éstos son compartidos por toda la red, ya no hay manera de que dejen de compartirse. De esta forma, cuando hablamos de clústeres culturales en este modelo, realmente se asocia siempre con clústeres de cooperadores o defectores, pues los rasgos cualitativos son compartidos por toda la red.

La explicación de la aparición de estas tres regiones tiene que ver con las escalas temporales asociadas a cada modelo por separado. En la Figura 10 mostramos como es una realización típica para $\varphi = 0$ y $F = Z = 1$, es decir, un juego de bienes públicos puro. Podemos ver como la cooperación empieza en 0.5, pues al principio se inicializan σ_i^1 de forma manera uniforme aleatoria entre los valores 0 y 1. Posteriormente la dinámica tiene un periodo donde se tiende a la defección, llegando a un mínimo de cooperación. Debido al juego introducido por Santos, Pacheco, si se forma un clúster de cooperadores, este clúster es muy robusto frente a defectores y hace que no se llegue a la defección total. Estos clústeres van “contagiando” poco a poco a sus

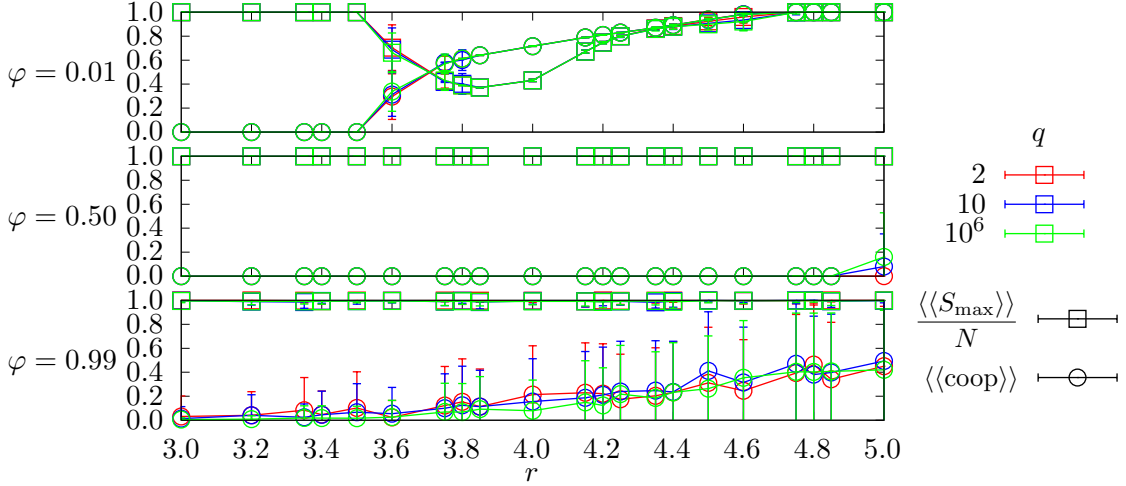


Figura 11: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ y valores de $F = 2$ y $Z = 1$. Cada gráfica se corresponde con los valores de $\varphi = 0.01, 0.05, 0.99$ respectivamente. En diferentes colores se representan simulaciones para diferentes valores de q . En cuadrados se representa el valor del observable del tamaño máximo de los clústeres y en círculos el promedio de la cooperación en la red, ambos normalizados. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 realizaciones independientes. Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

vecinos defectores y haciéndose más y más grandes. La robustez y el tamaño de estos clústeres depende del factor de mejora r , pues para $r < r_c$ la robustez no es suficiente y los defectores son capaces de romper los clústeres de cooperadores llegando a la defección total.

Esto nos ayuda a comprender por qué se produce la transición entre la primera región a φ bajos y con φ medios. Si nos fijamos en la realización para $r = 3.6$ en la Figura 10, vemos como al inicio está muy cerca de la defección total en el mínimo de cooperación que comentábamos. En este momento, si damos pie a la imitación por homofilia aumentando φ , tenemos que los clústeres de cooperadores, los cuales son robustos frente a la imitación por pagos, se rompen debido a la imitación por homofilia. Así, para φ intermedios, como $\varphi = 0.50$, se tiene que la imitación por homofilia se “aprovecha” de este mínimo de cooperación para actuar de forma que toda la red se vuelve defectora.

Por otro lado, cuando predomina la interacción por homofilia, es decir, φ elevados, es el juego de bienes públicos quien rompe con lo esperado por el modelo de Axelrod. En el modelo de Axelrod se espera que cada realización vaya a una red monocultural con igual probabilidad de cooperación y defección. En este escenario, es la interacción por diferencia de pagos, que al hacer que haya una ligera tendencia inicial a la defección, la monocultura predominante sea defectora. Esta tendencia a la defección inicial se potencia bajando el valor de r o φ .

3.3.1. Modelo frente a la diversidad cultural inicial.

Una vez hecho un primer estudio sobre el modelo conjunto, vamos a ver cómo afectan los diferentes parámetros a los resultados obtenidos. Empezamos por la diversidad cultural inicial introducida por el parámetro q . Recordamos que inicializamos las culturas en nuestro sistema con $\sigma_i^f = \{0, 1\}$ para $f \leq Z$ y con $\sigma_i^f = \{0, 1, \dots, q-1\}$ para $f > Z$. De esta forma se introduce

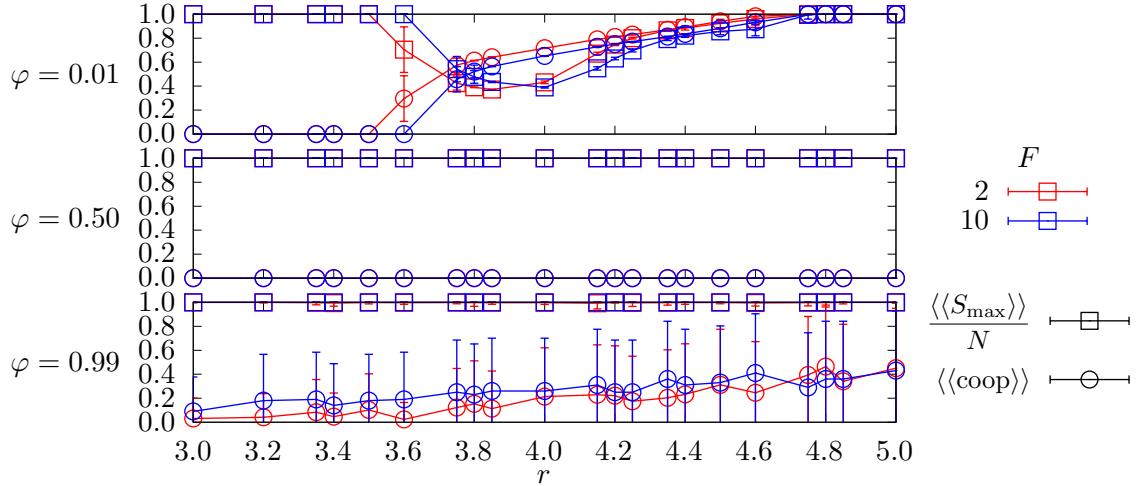


Figura 12: Simulaciones en una red tipo “lattice” de tamaño $N = 1024$ y valores de $q = 2$ y $Z = 1$. Cada gráfica se corresponde con los valores de $\varphi = 0.01, 0.05, 0.99$ respectivamente. En diferentes colores se representan simulaciones para diferentes valores de F . En cuadrados se representa el valor del observable del tamaño máximo de los clústeres y en círculos el promedio de la cooperación en la red, ambos normalizados. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 realizaciones independientes. Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales para $F = 2$ y 10^6 para $F = 10$ y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

la diversidad cultural en los rasgos cualitativos que no están asociados a un juego de bienes públicos.

Podemos ver en la Figura 11 que q no tiene ninguna influencia sobre los resultados. Donde sí tiene influencia es sobre el tiempo de termalización, pues a mayor es la diversidad cultural inicial, mayor es el tiempo necesario para que la imitación, tanto por homofilia como por diferencia de pagos, haga que se compartan los rasgos cualitativos. Pensemos, por ejemplo, para r bajos y φ bajos. En estas condiciones sabemos que predominará la interacción por diferencia de pagos, la cual hará que toda la red tienda a la defeción. Bajo esta circunstancia, tenemos que todos los agentes comparten al menos un *feature*, por lo que la probabilidad por imitación por homofilia $\omega_{i,j}$ nunca será nula. Sin embargo, como toda la red defecta, todos sus pagos son iguales y por tanto la imitación por diferencia de pagos $\Pi_{i,j}$ sí es nula. Como φ es bajo, la interacción por homofilia no tomará acción frecuentemente. A este hecho se le añade, que contra mayor sea q , más veces se tendrá que dar la imitación por homofilia para conseguir formar consenso cultural en los rasgos cualitativos, lo que incrementa el tiempo de termalización en cuanto a los clústeres culturales, pues la cooperación en este ejemplo convergería rápido.

Debido a que solo influye en el tiempo de termalización, fijaremos a partir de ahora el parámetro $q = 2$ en las siguientes figuras.

3.3.2. Modelo frente al número de rasgos cualitativos.

Seguimos nuestro estudio ahora enfocándonos en el efecto que tiene añadir *features* cualitativos, los cuales no tienen asociado ningún juego de bienes públicos a ellos. De esta forma fijaremos $Z = 1$ e incrementaremos F para estudiar su efecto. Por lo comentado en la sección anterior, como la diversidad cultural no influye en los resultados, tomaremos $q = 2$.

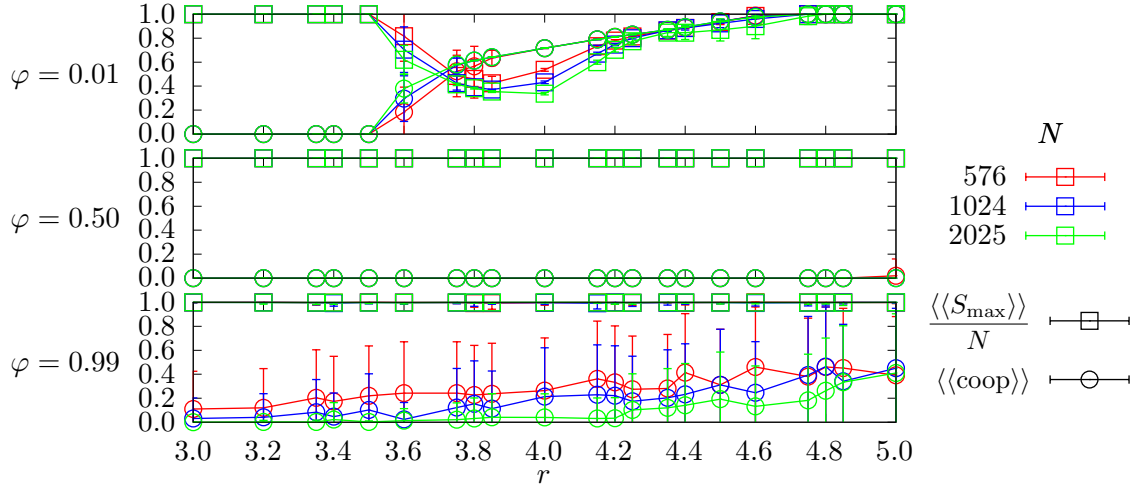


Figura 13: Simulaciones en una red tipo “lattice” de diferente tamaño y valores de $q = 2$, $F = 2$ y $Z = 1$. Cada gráfica se corresponde con los valores de $\varphi = 0.01, 0.05, 0.99$ respectivamente. En diferentes colores se representan simulaciones para diferentes valores de N . En cuadrados se representa el valor del observable del tamaño máximo de los clústeres y en círculos el promedio de la cooperación en la red, ambos normalizados. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 realizaciones independientes. Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales para $F = 2$ y 10^6 para $F = 10$ y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

Podemos ver en la Figura 12 como para φ bajos, en la primera región, el valor de r_c se desplaza a un valor superior para F superior. La explicación es análoga a la vista en la Figura 10, pues ahora lo que está ocurriendo es que al tener más rasgos culturales la homofilia tiene mayor efecto sobre los clústeres de cooperadores formados y éstos son menos robustos sobre la homofilia.

Para los valores intermedios de φ , en la segunda región, no tenemos ningún cambio, se sigue teniendo una monocultura defectora.

A valores altos de φ , podemos ver como para $F = 10$ sí hay una ligera tendencia mayor a la cooperación estando la curva de cooperación ligeramente por encima de la de $F = 2$. Esto se debe, de nuevo, a que al añadir más rasgos culturales cualitativos se potencia la homofilia y por tanto se disminuye el efecto de la imitación por diferencia de pagos.

3.3.3. Modelo frente al tamaño de la red

Otro aspecto de vital importancia en nuestro modelo es ver cómo le afecta el tamaño de la red que estemos empleando, por ello vamos a estudiar cómo varían los resultados en función del tamaño de red N . Fijaremos $q = 2$, $F = 2$ y $Z = 1$, de forma que tengamos dos rasgos culturales, uno cuantitativo asociado a un juego de bienes públicos y otro cualitativo.

Observamos en la Figura 13 como para las dos primeras regiones, con φ bajos e intermedios, las curvas con diferentes N se superponen prácticamente, por lo que el tamaño de la red no influye significativamente en dicho contexto de forma cuantitativa. Sin embargo, para φ elevados, en la tercera región, tenemos que sí afecta el tamaño de red N . Si comparamos la curva roja con $N = 576$ y la curva verde con $N = 2025$, podemos ver como la cooperación en la primera es siempre mayor que 0, por lo que existe la posibilidad siempre de que la red termine en un estado monocultural cooperador, mientras que para $N = 2025$, hasta que no nos vamos a valores

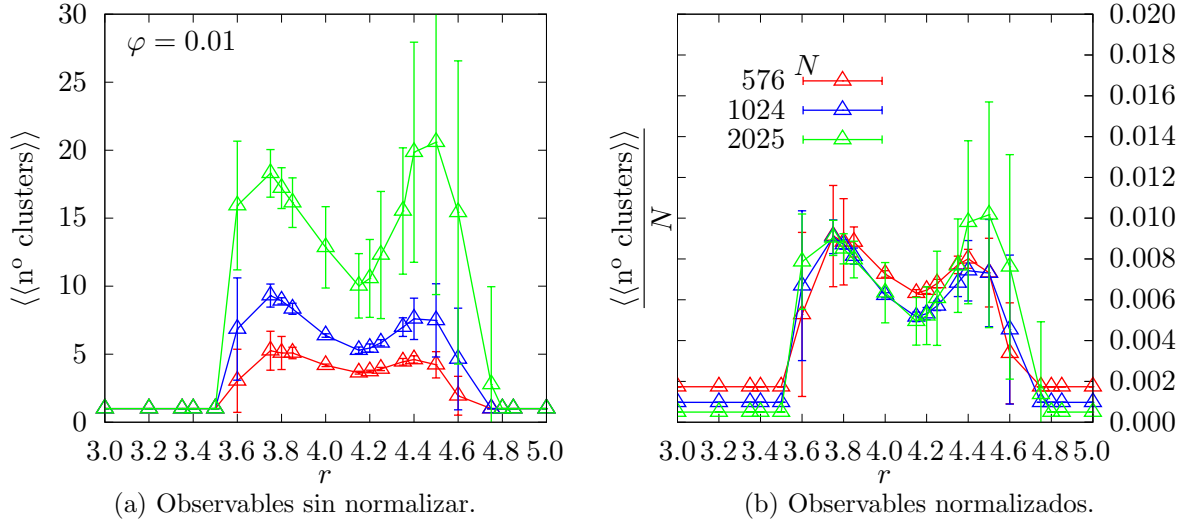


Figura 14: Simulaciones en una red tipo “*lattice*” de diferente tamaño N para $\varphi = 0.01$, $q = 2$, $F = 2$ y $Z = 1$. En diferentes colores se presentan los resultados para diferentes valores de N . En la subfigura a) se presentan los resultados sin normalizar por el tamaño de red y en la subfigura b) se presentan normalizados. En triángulos el promedio del número de clústeres culturales formados. Cada punto se corresponde con el promedio de 100 realizaciones diferentes. Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales para $N = 576, 1024$ y 10^6 para $N = 2025$ y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

superiores de $r = 4.2$ aproximadamente, no existe ninguna probabilidad de que la red termine en una monocultura cooperadora, siendo ésta siempre defectora.

Por tanto, si damos mucho peso a la homofilia, habiendo una pequeña probabilidad de que haya imitación por diferencia de pagos, a mayor sea la red/sociedad, podemos ver que se potencia la defección hasta tal punto que en tamaños arbitrariamente grandes de N desaparecería por completo la cooperación sin importar el valor de r .

Otro aspecto de interés es ver el número de diferentes clústeres que se han formado en el estado multicultural que aparece en la primera región, es por ello que en la Figura 14 se representa el número de clústeres correspondientes a las simulaciones de la Figura 13 para $\varphi = 0.01$.

Observamos en la Figura 14a como el número de clústeres formados se incrementa conforme aumentamos el tamaño de la red N . También vemos como para valores bajos y altos de r el número de clústeres es 1, pues es la región de monoculturalidad discutida anteriormente. Para los valores intermedios donde hay multiculturalidad se observa como el número de clústeres tiene dos picos próximos a las zonas de transición entre el estado monocultural y multicultural. Con este resultado y viendo como la cooperación en la Figura 13, se deduce que para ligeramente por encima de la transición de monocultura defectora a multicultural tenemos que hay varios clústeres de cooperadores aislados y el predominante es defector, mientras que para valores ligeramente por debajo de la transición de multiculturalidad a monocultura cooperadora tenemos que el clúster predominante es cooperador y hay varios clústeres aislados de defectores.

En adición a este resultado, mostramos en la Figura 14b como el número de clústeres normalizado por el tamaño de la red N tiene la misma forma cualitativamente, de lo que se deduce que independientemente del tamaño de la red, la proporción del número de clústeres en promedio

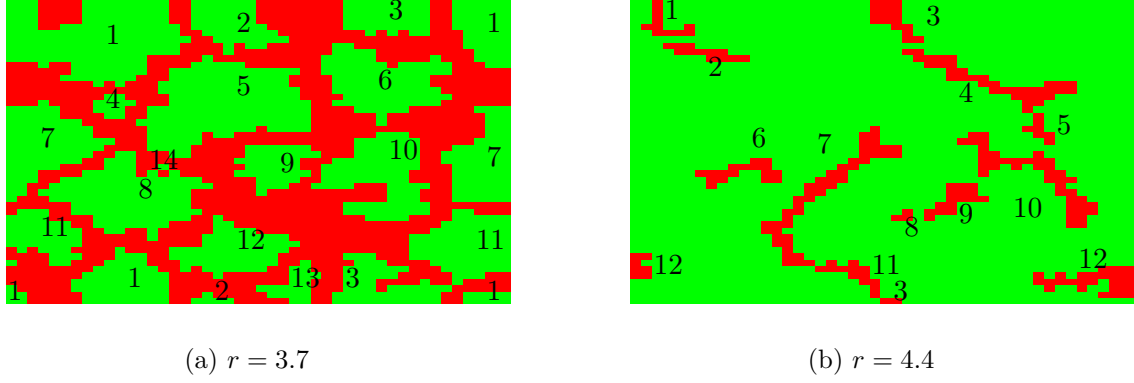


Figura 15: Imagen de una red tipo “lattice” de tamaño $N = 2025$ para $\varphi = 0.01$, $q = 2$, $F = 2$ y $Z = 1$ y diferente r . En rojo se muestran los agentes defectores y en verde los cooperadores. Ambas representaciones son tomadas al azar tras el periodo de termalización.

será la misma.

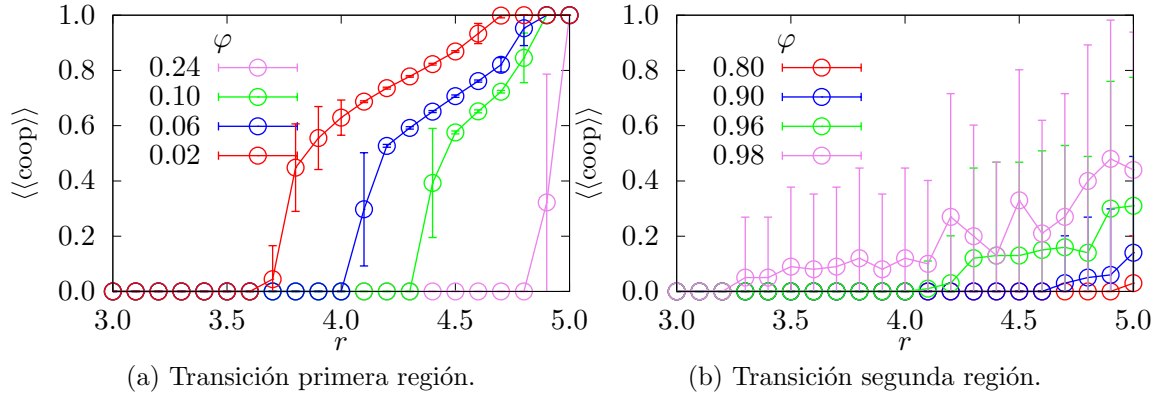


Figura 16: Simulaciones para una red tipo “lattice” de tamaño $N = 576$ con parámetros $F = 2$, $Z = 1$ y $q = 2$. En diferentes colores diferentes realizaciones para valores diferentes de φ . Para cada realización se toma un tiempo de termalización de 10^5 pasos temporales y posteriormente se toman 200 medidas equiespaciadas en un intervalo de 10^6 pasos temporales.

Para hacernos una mejor idea de cómo está el sistema en este punto, se muestra en la Figura 15 una imagen del sistema para $r = 3.7$ y $r = 4.4$. Podemos ver como en el primer caso se forman clústeres de cooperadores separados por un clúster de defectores y en el segundo caso es al revés, siendo el clúster principal de cooperadores y habiendo pequeños clústeres de defectores.

3.3.4. Resumen de las diferentes fases en función de la probabilidad de la interacción por homofilia y el factor de mejora.

Para resumir el estudio de nuestro modelo, mostramos el espacio de parámetros para el factor de mejora r y la probabilidad de interacción por homofilia φ para una red tipo “lattice” de tamaño $N = 576$ y parámetros $F = 2$, $Z = 1$ y $q = 2$, es decir, dos rasgos culturales, uno asociado a un juego de bienes públicos y otro cualitativo.

Como se ha comentado en la Figura 9, existen tres regiones diferenciadas en función de

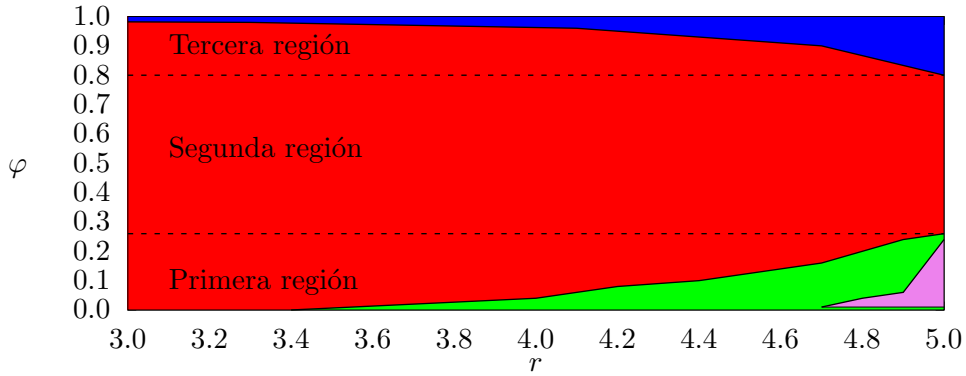


Figura 17: Resumen de las distintas fases en diferente color en el espacio de parámetros (r, φ) para una red tipo “*lattice*” de tamaño $N = 576$ con parámetros $F = 2$, $Z = 1$ y $q = 2$. En violeta monocultura cooperadora, en verde multicultura, en rojo monocultura defectora y en azul monocultura con probabilidad no nula de cooperadora. Además se hace la distinción entre las tres regiones comentadas.

la probabilidad de interacción por homofilia. En la primera, en función del factor de mejora r , tenemos tres fases: monocultura defectora, multicultura y monocultura cooperadora. En la segunda, independientemente del factor de mejora r , se tiene una monocultura defectora. En la tercera y última se tiene siempre una monocultura, pero conforme aumenta r se tiene mayor probabilidad de que la cultura sea cooperadora tendiendo a probabilidad 0.5 para $r = 5$.

En la Figura 16a mostramos diferentes realizaciones con diferentes φ para que se vea como la transición propia de la primera región se desplaza a valores más altos de r conforme aumenta φ . Por otra parte, en la Figura 16b mostramos diferentes realizaciones con diferentes φ para que se vea como la transición propia de la segunda región se desplaza a valores más bajos de r conforme aumenta φ .

Todo esto se resume en la Figura 17, donde se pueden ver las distintas regiones con las diferentes fases estudiadas.

3.4. Conclusión

En este estudio hemos sido capaces de combinar una dinámica social que se fundamenta en la homofilia y la influencia social, el modelo de Axelrod, junto con una dinámica asociada a un juego de bienes públicos que se fundamenta en el “*homo economicus*” priorizando el beneficio individual independientemente de las acciones de los demás.

La combinación de estos dos modelos rompe con las características propias del modelo de Axelrod, el cual ha sido objeto de largo estudio, pues se pierde la característica principal del modelo que es la transición entre un estado monocultural y otro multicultural (Figura 2 y Figura 8). Esto es debido a la introducción de una perturbación en uno de los *features* que no depende exclusivamente de la homofilia. Un estado final propio del modelo de Axelrod se fundamenta en que, entre vecinos, se comparten todos o ningún rasgo y por tanto la probabilidad de imitación es nula si no se comparte o total si ya se comparte todo, luego el sistema no evoluciona más. En un estado multicultural y con la introducción de dicha perturbación se logra que, aunque el sistema no pueda evolucionar más por homofilia en un paso temporal, en el siguiente paso puede ser que exista la posibilidad por la perturbación. De esta forma, en el modelo de Axelrod los estados multiculturales no son estables y en nuestro modelo explotamos

esta característica. Esto conduce inevitablemente en nuestro modelo a que todos los rasgos cualitativos sean compartidos por toda la red independientemente del estado inicial, rompiéndose la fase de multiculturalidad propia del modelo de Axelrod. La única fase de multiculturalidad que queda en nuestro modelo es la propia asociada a la perturbación, es decir, al juego de bienes públicos, pues lo que determina si dos vecinos tienen la misma cultura es únicamente el *feature* asociado al juego de bienes públicos.

Por otro lado, la introducción de la homofilia también altera a la dinámica de propia de los juegos de bienes públicos de Santos y Pacheco. Como estudiamos en la Figura 10, el juego de bienes públicos propuesto por Santos y Pacheco tiene la característica que al inicio casi todos los agentes son defectores y los cooperadores logran sobrevivir debido a la robustez que los clústeres de cooperadores tienen en este marco. La introducción de la homofilia entra en juego cuando la mayoría de los agentes son defectores, pues al compartir ese rasgo la probabilidad de imitación por homofilia no es nula y se empiezan a formar clústeres de defectores compartiendo tanto el rasgo cuantitativo asociado al juego como los cualitativos. Estos clústeres de defectores son capaces de romper con la robustez de los cooperadores y romper con la cooperación de la red.

Todos estos efectos dependen, en primera instancia, del peso que le demos a la interacción por homofilia sobre la imitación por diferencia de pagos φ y en segunda instancia por el factor de mejora r . Debido a que los estados multiculturales no son estables en el modelo de Axelrod, en nuestro modelo se pierde la influencia de la diversidad social parametrizada por q .

Referencias

- [1] G. Szabó and C. Tóke, “Evolutionary prisoner’s dilemma game on a square lattice,” *Phys. Rev. E*, vol. 58, pp. 69–73, Jul 1998. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.58.69>
- [2] P. K. Newton and Y. Ma, “Maximizing cooperation in the prisoner’s dilemma evolutionary game via optimal control,” *Phys. Rev. E*, vol. 103, p. 012304, Jan 2021. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.103.012304>
- [3] C. e. a. Hauert, “Evolutionary games and population dynamics: maintenance of cooperation in public goods games.” vol. 227, July 2006.
- [4] R. Axelrod, “The dissemination of culture: A model with local convergence and global polarization,” *The Journal of Conflict Resolution*, vol. 41, no. 2, pp. 203–226, 1997. [Online]. Available: <http://www.jstor.org/stable/174371>
- [5] F. Santos, M. Santos, and J. Pacheco, “Social diversity promotes the emergence of cooperation in public goods games,” *Nature*, vol. 454, pp. 213–6, 08 2008.
- [6] C. Gracia-Lázaro, E. Brigatti, A. R. Hernández, and Y. Moreno, “Polarization inhibits the phase transition of axelrod’s model,” *Phys. Rev. E*, vol. 103, p. 062306, Jun 2021. [Online]. Available: <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.103.062306>