

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Topologías débiles en espacios de Banach

Autor:

Jorge Santiago IBÁÑEZ MARCOS

Supervisor:

Dr. Luis Carlos GARCÍA LIROLA



Universidad Zaragoza

Proyecto del Grado en Matemáticas realizado en el

Departamento de Matemáticas
Área de Análisis Matemático

24 de junio de 2022

«'Obvious' is the most dangerous word in mathematics.»

Eric Temple Bell

Lista de Símbolos

\mathcal{D}	Conjunto dirigido.	
$\mathcal{U}(s)$	Familia de entornos abiertos del punto s .	
A'	Puntos de acumulación de A .	
\overline{A}^τ	Clausura A en la topología τ .	
$B(a, r)$	Bola abierta de radio r centrada en a .	$\{x \in X : \ x - a\ < r\}$
B_X	Bola cerrada de radio unidad centrada en el origen.	$\{x \in X : \ x\ \leq 1\}$
S_X	Esfera de radio unidad centrada en el origen.	$\{x \in X : \ x\ = 1\}$
X^*	Espacio dual topológico.	
c_0	Espacio de sucesiones con límite nulo.	
ℓ_p	Espacio de sucesiones con norma $\ \cdot\ _p$ ($1 \leq p \leq \infty$).	
$C(K)$	Espacio de funciones continuas de K a \mathbb{K} .	
e_n	Vector n -ésimo de la base canónica	
D	Disco cerrado en el cuerpo \mathbb{K} .	$\{ x \leq 1\} \subset \mathbb{K}$
$d(a, b)$	Distancia entre los puntos a y b .	
$d(a, B)$	Distancia entre el punto a y el conjunto B .	$\inf\{d(a, b) : b \in B\}$
$\text{diam } A$	Diámetro del conjunto A	$\sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$
$\mathcal{P}(X)$	Conjunto de partes de X	$\{A : A \subset X\}$
$X \cong Y$	Existe un isomorfismo isométrico de X en Y .	
δ_{ij}	Delta de Kronecker	$\begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Resumen

Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas

Grado en Matemáticas

Topologías débiles en espacios de Banach

por Jorge Santiago IBÁÑEZ MARCOS

When working in normed vector spaces with finite dimension we have strong results that allow us to move the problem to well known spaces such as \mathbb{R}^n or \mathbb{C}^n where the topological, algebraic and geometric structures have been studied for a long time. Moreover, these known spaces have good properties that provide useful theorems and characterizations. One example is the Heine-Borel's Theorem that characterizes compact sets in \mathbb{R}^n as closed and bounded sets. Unfortunately, this is not possible in spaces with infinite dimension where the properties are more challenging and the classification of spaces is not well understood yet. Furthermore, these spaces lack a lot of the strong topological, algebraic or geometrical results that help us in finite dimension. In particular, Riesz's Lemma proves that Heine-Borel's characterization of compact sets does no longer hold. Thus, common spaces like ℓ_p or L^p lack some good properties when they are endowed with the topology induced by the norm.

In the face of these problems we propose this work as the first steps into the problem of classification and the use of a topological tool, the weak topologies, that provide valuable results in Banach spaces. More precisely, the weak topology, ω , will be defined in any Banach space X and will give us a strong characterization of reflexive spaces (spaces where the canonical embedding to their double dual is surjective) and the weak* topology, ω^* , defined over the dual of a Banach space X^* , will provide us with Alaoglu's Theorem, a characterization of the compact sets in the weak* topology similar to that of Heine-Borel's Theorem. It will also present us with the Goldstine's Theorem, a result stating that B_X , the closed unit ball of the Banach space X , is ω^* -dense in $B_{X^{**}}$, the closed unit ball of its double dual. These three strong results will be enough to show the complexity of the classification problem by proving some negative results. To do all this we divided this study in three parts.

In the first chapter, we will introduce the basic results with which we will work in this study. The leading section is focused on the basic properties of nets, a generalization of sequences, that are able to completely describe any topology. This device will prove to be useful and will help us define the weak topologies. After that, we will focus on the analytical results. We will open this new section with the main character in this work, the Banach space, a normed vector space with a metric that is also complete. We will give some basic properties and examples of the classical spaces c , c_0 , ℓ_p and L^p . Then, we will focus our attention on proving Riesz's Lemma and its theorem showing the need for a new topology with more useful properties. Finally, we will introduce some of the classical results of functional analysis (Hahn-Banach and Banach-Steinhaus Theorems) that will be helpful while working with Banach spaces and the weak topologies.

In the second chapter, we will define the weak topology ω by means of nets and we will give a topological basis made by the intersection of finitely many hyperplanes. We will prove that this topology is different from the norm topology (following an unusual but simple path) and some properties that will prove to be useful in the following sections. Then, we will proceed likewise defining the weak* topology ω^* over the dual spaces (making it equivalent to the

point-wise topology) and studying its basic properties. Finally, in the last section of this chapter, we will look at the key results of weak topologies. First, with the help of Tychonoff's Theorem, we will prove Alaoglu's Theorem that identifies the compact sets in the weak* topology with the closed and bounded sets, making this result akin to Heine-Borel's result. Furthermore, for spaces with separable dual we will be able to show that weak topology is metrizable when restricted to the closed unit ball. Last but not least, we will center our attention on Goldstine's Theorem that shows the density properties of the Banach space in its double dual.

In the last chapter, we will focus on the uses of the weak topology but especially on its uses in the problem of classification. It is known that all separable Hilbert spaces are linearly isometric to ℓ_2 , for example $\ell_2 \cong L^2(\mathbb{R})$, and we will see not only that this is not the case for Banach spaces, but they are not even topologically isomorphic. To see that we will prove Schur's Theorem, this result states that, in ℓ_1 , the weak and norm topologies coincide on sequences. This theorem will show that ℓ_1 is not isomorphic to L^1 and, in particular, there is no Banach space that is isomorphic to all other Banach spaces. This opens the path to a very active field of study that tries to classify the Banach spaces.

After showing the complexity of this problem, we will introduce the concept of complementability and, again, we will use the known results of Hilbert spaces. In Hilbert spaces, given a closed subspace Y , there is a decomposition of the Hilbert space as the direct sum of Y and its orthogonal Y^\perp . This idea can be extended to Banach spaces thanks to projections and one useful result is the Sobczyk's Theorem. This result proves that c_0 is complemented in all spaces, that is if c_0 is contained in some space X , then X can be decomposed in the direct sum of c_0 and some other subspace of X .

To finish, we work with the properties of reflexive spaces since the weak topology provides a useful characterization of these spaces. This will immediately prove that a continuous functional will achieve its maximum in the closed unit ball, giving one of the implications of James's Theorem. Finally, we will center our study in uniformly convex spaces, where the segments that join two points in the sphere distance themselves from the sphere. We will prove that these spaces are reflexive and provide another property in the classification of Banach spaces, the superreflexivity.

At the end, we attach a few appendices. The first one is focused in Baire's Theorem and its usefulness as a topological tool in functional analysis. The second appendix focuses on the rigorous proof of a detail that is usually assumed in the literature. The third appendix proposes a simple but detailed example that shows that not all Banach spaces are linearly isometric. In the last appendix, we focus on the Axiom of Choice's role in this work and how to 'overcome' it.

Índice general

Resumen	IV
1. Preliminares	1
1.1. Preliminares topológicos: Redes	1
1.2. Preliminares analíticos: Riesz y Hahn-Banach	4
2. Topologías Débil y Débil*	8
2.1. Topología Débil	8
2.2. Topología Débil*	11
2.3. Teoremas principales	12
3. Aplicaciones	16
3.1. Teorema de Schur	16
3.2. Teorema de Sobczyk	19
3.3. Reflexividad	21
3.4. Conclusiones y posibles líneas de estudio	24
Bibliografía	25
A. Sobre el Teorema de Baire	26
B. Detalles con el Teorema de Tjonov	28
C. Isomorfías e Isometrías entre c y c_0	29
D. Relación con el Axioma de Elección	31

1 Preliminares

En este escrito vamos a trabajar en espacios de Banach con distintas topologías y esto va a requerir del uso de distintas herramientas. Una herramienta especialmente útil en espacios métricos son las sucesiones, con ellas podemos estudiar distintas propiedades topológicas de forma sencilla e intuitiva. Sin embargo, las sucesiones no describen de forma correcta una topología si esta no cumple el primer axioma de la numerabilidad, y veremos que las topologías débiles no lo cumplen si el espacio no es de dimensión finita. Por ello vamos a introducir una generalización de las sucesiones, las redes.

Por otro lado, nos vamos a centrar en espacios de Banach de dimensión no finita. Un resultado bien conocido en espacios de dimensión finita es que un conjunto compacto es equivalente a un conjunto cerrado y acotado. Esto no es cierto en dimensión infinita (gracias al Lema de Riesz 1.6), es más, la bola cerrada de radio unidad no es compacta en estos espacios. Parte de la motivación de este trabajo es conseguir una topología donde la bola unidad sea compacta, ya que esto conlleva buenas propiedades. Además, al trabajar en estos espacios requeriremos de herramientas básicas del análisis funcional, en concreto, los teoremas de separación de Hahn-Banach resultarán especialmente útiles.

1.1. Preliminares topológicos: Redes

En esta sección seguiremos un desarrollo análogo al presentado en el Capítulo 2 de [1] y realizaremos un desarrollo elemental de la Teoría de redes (o convergencia de Moore-Smith) comparándola con los resultados en sucesiones.

Para generalizar el concepto de sucesiones se redefine el conjunto de índices; en una sucesión este conjunto es \mathbb{N} , en una red el conjunto de índices es un conjunto dirigido:

Definición. Dado un conjunto \mathcal{D} no vacío, decimos que una relación binaria \geq dirige al conjunto \mathcal{D} si cumple las siguientes propiedades:

i) Transitividad: dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathcal{D}$ con $\alpha \geq \beta$ y $\beta \geq \gamma$, se tiene que $\alpha \geq \gamma$.

ii) Reflexividad: dado $\alpha \in \mathcal{D}$, se tiene que $\alpha \geq \alpha$.

iii) Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{D}$, se tiene que existe $\gamma \in \mathcal{D}$ tal que $\gamma \geq \alpha$ y $\gamma \geq \beta$.

Diremos que α sigue a β o que β precede a α si $\alpha \geq \beta$ y al par (\mathcal{D}, \geq) lo llamaremos conjunto dirigido.

Ejemplos 1.1. i) \mathbb{R} es dirigido por la relación \geq (o con la relación \leq) usual.

ii) Sea un espacio topológico X y un elemento x de este. El conjunto de entornos abiertos de x , $\mathcal{U}(x)$, es dirigido por la relación \subset .

Una vez tenemos el conjunto de índices nuevo, el resto de definiciones se siguen de forma análoga a las sucesiones.

Definición. Sea $S : \mathcal{D} \rightarrow \Omega$ una función entre dos conjuntos \mathcal{D} , Ω y \geq una relación dirigida sobre \mathcal{D} . Denotaremos como red al par (S, \geq) . Diremos que:

i) La red está contenida en $A \subset \Omega$ si $S_\alpha := S(\alpha) \in A$ para todo $\alpha \in \mathcal{D}$.

- ii) La red está eventualmente en $A \subset \Omega$ si existe $\beta \in \mathcal{D}$ tal que $S_\alpha \in A$ para todo $\alpha \geq \beta$.
- iii) La red está frecuentemente en $A \subset \Omega$ si para cada $\beta \in \mathcal{D}$ existe $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $S_\alpha \in A$ con $\alpha \geq \beta$.

Definición. Una red $S : \mathcal{D} \rightarrow X$ con la relación \geq en \mathcal{D} converge a $s \in X$ en el espacio topológico (X, τ) si está eventualmente en cada entorno abierto de s . Es decir, $\forall U \in \mathcal{U}(s)$ existe $\beta \in \mathcal{D}$ tal que $S_\alpha \in U$ para toda $\alpha \geq \beta$.

Cuando denotemos una red general usaremos como subíndices letras griegas y para las sucesiones usaremos como subíndices letras latinas. Además, como trabajaremos las redes en espacios topológicos (X, τ) , las indicaremos directamente con los elementos, es decir, $x_\alpha = S(\alpha)$ y daremos el conjunto dirigido \mathcal{D} al definir la red, $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}} \subset X$.

Ejemplos 1.2. i) Ya hemos discutido (en los Ejemplos 1.1) como dado $x \in X$, el par $(\mathcal{U}(x), \subset)$ es dirigido, así podemos construir una red que converja a x tomando un elemento en cada entorno: $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ con $x_U \in U$.

ii) Todas las sucesiones son redes (insistimos en que el recíproco no es cierto) y su límite como sucesión coincide con su límite como red.

Como ya hemos recalado, las sucesiones son una herramienta que permite describir topologías que cumplen el primer axioma de la numerabilidad¹, en concreto, los espacios métricos. Los siguientes resultados, nos indican que las redes cumplen un papel completamente análogo al de las sucesiones pero en topologías arbitrarias.

Teorema 1.1. Sea el espacio topológico (X, τ) y sea $A \subset X$. Entonces:

- i) Un punto s es un punto de acumulación de A si y solo si existe una red contenida en $A \setminus \{s\}$ que converge al punto s .
- ii) Un punto s pertenece a la clausura de A si y solo si existe una red contenida en A que converge al punto s .
- iii) A es cerrado si y solo si no existe ninguna red en A que converja a un punto de A^c .

Demostración. i) Denotamos los puntos de acumulación de A como A' . Si $s \in A'$, entonces para cada entorno abierto U de s existe un punto x_U de A que pertenece a $U \setminus \{s\}$. La familia $\mathcal{U}(s)$ de todos los entornos abiertos de s es dirigido por \subset y si U y V son entornos abiertos de s tales que $V \subset U$, entonces $x_V \in V \subset U$. Así, la red $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(s)}$ es una red que converge a s .

Recíprocamente, si una red en $A \setminus \{s\}$ converge a s , está eventualmente en todo entorno abierto de s . Entonces la intersección de cada entorno abierto con $A \setminus \{s\}$ es no vacía.

ii) Denotamos la clausura topológica como \bar{A} . Recordar que $\bar{A} = A' \cup A$. Si $s \in A'$, por i), existe una red en $A \setminus \{s\} \subset A$ convergiendo a s . Si $s \in A$, cualquier red que tome siempre el valor s es una red convergente a s y contenida en A .

Recíprocamente, si tenemos una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ en A que converge a s , tenemos que para cualquier entorno $U \in \mathcal{U}(s)$ la intersección es no vacía con A ya que existe $\alpha \in \mathcal{D}$ tal que $x_\alpha \in A \cap U$. Así $s \in \bar{A}$.

iii) Obvio con lo anterior.

□

¹Recordamos, un espacio topológico cumple dicho axioma si todo punto de él admite una base de entornos abiertos numerable.

Más adelante, veremos en el Ejemplo 2.2 un caso en el que las sucesiones no determinan de forma correcta las clausuras en la topología en la que estamos interesados. A continuación, demostramos algunos resultados sobre la descripción de la topología mediante redes.

Proposición 1.2. *Sea $f : X \rightarrow Y$ una aplicación entre espacios topológicos. Entonces f es continua si y solo si para toda red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ que converge a un punto x de X , se tiene que $(f(x_\alpha))_{\alpha \in \mathcal{D}}$ converge a $f(x)$.*

Demostración. Sea (x_α) una red que converge a x y supongamos que $f(x_\alpha) \not\rightarrow f(x)$. Así, existe $V \in \mathcal{U}(f(x))$ tal que $\forall \alpha$ existe $\beta \geq \alpha$ con $f(x_\beta) \notin V$. Ahora, como f es continua $f^{-1}(V)$ es abierto en X y existe γ tal que $x_\alpha \in f^{-1}(V)$ si $\alpha \geq \gamma$, de forma que $f(x_\alpha) \in f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$. Así, hemos llegado a un absurdo.

Recíprocamente, supongamos que f no es continua. En tal caso, sea V un abierto en Y con $x \in f^{-1}(V)$, de forma que para cualquier $U \in \mathcal{U}(x)$ se tiene que $(X \setminus f^{-1}(V)) \cap U \neq \emptyset$. Tomamos la red $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ con $x_U \in (X \setminus f^{-1}(V)) \cap U$ que converge a x . Por hipótesis $f(x_U) \rightarrow f(x)$, lo que implica que existe $U_0 \in \mathcal{U}(X)$ tal que para cualquier $U \subset U_0$ se tiene que $f(x_U) \in V$ y, en consecuencia, $x_U \in f^{-1}(V)$ lo cual es una contradicción. \square

Teorema 1.3. *Un espacio topológico (X, τ) es Hausdorff (T_2) si y solo si cada red del espacio converge como mucho a un punto.*

Demostración. Sea X un espacio T_2 y sean $x, y \in X$ tales que $x \neq y$. Al ser Hausdorff existen $U, V \in \tau$ tales que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Puesto que la red no puede estar eventualmente en ambos abiertos U y V (al ser disjuntos) tenemos que la red no puede converger simultáneamente a x y a y .

Para el recíproco, probaremos que si X no es T_2 entonces existe una red que converge a dos puntos. Como X no es T_2 , tenemos que existen $x, y \in X$ con $x \neq y$ y que no pueden separarse con abiertos disjuntos. Sea $\mathcal{U}(z)$ la familia de entornos abiertos de z con $z \in \{x, y\}$. Entonces $\mathcal{U}(z)$ esta dirigida por \subset . Consideramos $\mathcal{D} = \mathcal{U}(x) \times \mathcal{U}(y)$ y definimos la relación \geq tal que $(T, U) \geq (V, W)$ si $T \subset V$ y $U \subset W$. Notar que esta relación dirige a \mathcal{D} y que para cada par $(T, U) \in \mathcal{D}$ la intersección $T \cap U$ es no vacía y podemos escoger un punto $x_{(T,U)}$ que pertenezca a la intersección. Si $(V, W) \geq (T, U)$, entonces $x_{(V,W)} \in V \cap W \subset T \cap U$ y, en consecuencia, la red $(x_{(T,U)})_{(T,U) \in \mathcal{D}}$ converge a x y a y . \square

En tal caso, denotaremos que una red S_α converge a un punto x en la topología τ como $\tau\text{-}\lim_\alpha S_\alpha = x$ o como $S_\alpha \xrightarrow{\tau} x$ ($\lim S_\alpha = x$ o $S_\alpha \rightarrow x$ si el contexto lo deja claro). Al igual que las sucesiones, podemos trabajar con subredes de una red y con puntos de aglomeración de esta, de lo que se desprenden resultados semejantes. No entraremos en más detalles, pero sí recalcamos un hecho importante. Es claro que la topología determina completamente la convergencia (o no convergencia) de todas las redes del espacio, pero además, el recíproco también es cierto: La convergencia (o no convergencia) de cada una de las redes de un espacio determina completamente su topología. Esto es especialmente importante porque definiremos las topologías débiles mediante redes y no mediante conjuntos.

A modo de detalle final recalcamos el hecho de que aunque las redes y las sucesiones cumplen gran cantidad de propiedades análogas, no siempre es así. Todos los resultados para redes vistos anteriormente son semejantes a los resultados conocidos para sucesiones y en este trabajo solo usaremos propiedades que sean comunes a sucesiones. Pero esto no significa que todas las propiedades de sucesiones se cumplen en redes y, a modo de ejemplo, veamos un resultado que se da en sucesiones pero no en redes.

Ejemplo 1.3. El Teorema de Convergencia Dominada no se cumple para redes.

Consideramos el espacio $C([0, 1])$ de funciones continuas de $[0, 1]$ al cuerpo de los reales y la familia $\mathcal{F} = \{F \subset [0, 1] : F \text{ finito}\}$. Para cada elemento $F \in \mathcal{F}$ tomamos una función continua f_F tal que $f_F : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con $f_F(x) = 1$ si $x \in F$ y con $\int_0^1 f_F \leq \frac{1}{2}$ ². Notar ahora que (\mathcal{F}, \supset)

²No es difícil ver que una función de estas características siempre existe.

es un conjunto dirigido, así se tiene que $\lim_F f_F(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$ (ya que $\{x\} \in \mathcal{F}$). Con ello

$$\lim_F \int_0^1 f_F \leq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \int_0^1 \lim_F f_F = 1.$$

De forma que aunque las funciones de la red estén acotadas por una función integrable ($f_F(x)$ está acotada por la función $g(x) = 1$) la conclusión del Teorema de la Convergencia Dominada no se cumple. Destacamos también el hecho de que este es un ejemplo de una red convergente sin subsucesiones convergentes.

1.2. Preliminares analíticos: Riesz y Hahn-Banach

Vamos a trabajar con espacios de Banach y muchas de sus estructuras. Por ello, con el fin de familiarizar al lector con la notación, expondremos las nociones básicas. Primero introduciremos las piezas básicas junto con algunas de sus propiedades. Tras ello, pasaremos a los resultados sobre los que construimos el trabajo, el Lema de Riesz 1.6 y su Teorema 1.7 y, finalmente, enunciaremos algunos teoremas claves sobre los que se fundamenta el análisis funcional.

Definición. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Diremos que X es un espacio de Banach si la topología determinada por la norma es completa, es decir, toda sucesión de Cauchy es convergente. En general, omitiremos la escritura de la norma en la definición siempre que no lleve a confusión.

Podemos definir el espacio normado sobre el cuerpo de los complejos o de los reales. En general, nosotros trabajaremos en la máxima generalidad denotada con \mathbb{K} . Sin embargo, en muchas demostraciones supondremos el espacio de Banach sobre los reales o sobre los complejos para que estas sean más llevaderas.

Definición. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Denotamos por B_X a la bola unidad cerrada, $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$, y denotamos S_X a la esfera unidad, $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$.

Definición. Sea (X, τ) un espacio topológico. Denotamos por $(X, \tau)^*$ al dual topológico, es decir, al conjunto de funciones lineales y continuas (respecto a la topología τ) de X a \mathbb{K} . En general, cuando consideremos la topología de una norma $\tau_{\|\cdot\|}$ abreviaremos de la siguiente forma $(X, \|\cdot\|)^* = X^*$.

Dado X espacio normado, podemos definir sobre X^* la norma $\|x^*\| = \sup_{y \in B_X} \{|x^*(y)|\}$ para todo elemento x^* de X^* y recordamos que esta norma hace de X^* un espacio de Banach³. Además, dado un espacio de Banach X si es el espacio dual de otro espacio Y , es decir, $Y^* = X$, entonces diremos que Y es el predual de X . Destacamos un teorema que resulta de gran utilidad para ver si una función lineal en un espacio de Banach es continua, es decir, para comprobar que una función lineal se encuentra en el dual.

Teorema 1.4. Sean $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal. Se tiene que T es continua si y solo si existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$ para todo x del espacio X .

Además, en el Capítulo 3 de Aplicaciones nos preocuparemos de las propiedades de los espacios de Banach y en como estas se conservan bajo distintas aplicaciones. En concreto, trabajaremos con dos tipos de aplicaciones.

Definición. Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \rightarrow Y$ una aplicación. Diremos que T es un isomorfismo topológico si es biyectiva, lineal, continua y con inversa también continua y,

³Recalamos el hecho de que en este trabajo denotaremos las normas en X y en X^* de la misma forma $(\|\cdot\|)$ ya que la norma sobre X define la norma sobre X^* .

en tal caso, indicamos que X e Y son isomorfos. Siempre que hablemos de isomorfismo nos referiremos a este tipo de isomorfismo. Si, además, T conserva la norma ($\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$) diremos que es un isomorfismo isométrico e indicaremos que X e Y son isomorfos de forma isométrica, $X \cong Y$.

Otro concepto muy útil en el análisis funcional y en los espacios de Banach es el concepto del encaje y de la reflexividad. Hemos definido el espacio dual de X y, de forma análoga, podemos definir el dual de este, el bidual $(X^*)^* = X^{**}$. Los elementos de X^{**} son las funciones lineales y continuas (en la norma del dual) que toman valores sobre \mathbb{K} y algunas de ellas se pueden ver como elementos del espacio original X mediante el encaje π .

Definición. Sea X un espacio normado. Definimos la aplicación encaje π de X a X^{**} como $(\pi(y))(x^*) = x^*(y)$ para todo punto y de X y todo funcional x^* de X^* . Diremos que X es reflexivo si π es suprayectiva.

Es sencillo ver que esta aplicación es un isomorfismo isométrico sobre su imagen y, en general, omitiremos su escritura entendiendo $x \in X^{**}$ como si fuera $\pi(x) \in X^{**}$ e interpretando $x(x^*)$ como $(\pi(x))(x^*)$.

Como última aclaración sobre la notación, introducimos los espacios clásicos con los que vamos a trabajar constantemente.

Definición. Denotamos como ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ al espacio de sucesiones con norma $\|\cdot\|_p$ finita,

$$\ell_p := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p = \left(\sum_{i \in \mathbb{N}} |x_i|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

y como ℓ_∞ al espacio de sucesiones acotadas,

$$\ell_\infty := \left\{ x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty = \sup_{i \in \mathbb{N}} |x_i| < \infty \right\}.$$

Definición. Denotamos como c al subespacio de ℓ_∞ de sucesiones con límite y como c_0 al subespacio de ℓ_∞ de sucesiones con límite nulo. Es decir,

$$c := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{i \rightarrow \infty} x_i \in \mathbb{K}\} \quad \text{y} \quad c_0 := \{x = (x_1, x_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0\}.$$

Definición. Sea A un espacio con una topología τ . Denotamos por $C(A)$ al conjunto de funciones continuas de A a \mathbb{K} . Al espacio $C(A)$ lo dotaremos de la topología definida por la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in A} \{|f(x)|\}$ de forma que es un espacio de Banach.

Definición. Dado un espacio de medida Ω sobre \mathbb{K} , una σ -álgebra Σ sobre X y μ una medida sobre Ω . Denotamos como $L^p(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$ al espacio de funciones con potencia p integrable,

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_p = \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

y como $L^\infty(\Omega)$ al espacio de funciones esencialmente acotadas,

$$L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{K} : \|f\|_\infty = \inf\{C > 0 : |f(x)| \leq C \text{ en casi todo punto } x \in \Omega\} < \infty\}.$$

Estos espacios son una generalización de los ℓ_p ya que ambos coinciden cuando el espacio de medida es \mathbb{N} , con la σ -álgebra del conjunto de partes y la medida de contar. Al igual que los

ℓ_p , estos espacios son de Banach (veasé el capítulo 1 de [2]).

Existen relaciones bien conocidas entre estos espacios, las cuales resumimos en el siguiente teorema que no demostraremos (para su demostración véase el primer capítulo de [3]).

Teorema 1.5. *Dados $p, q \in (1, \infty)$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y dado Ω espacio de medida con Σ una σ -álgebra σ -finita, se tiene que:*

$$(c)^* \cong \ell_1, \quad (c_0)^* \cong \ell_1, \quad (\ell_1)^* \cong \ell_\infty, \quad (\ell_p)^* \cong \ell_q, \quad (L^1(\Omega))^* \cong L^\infty(\Omega) \quad (L^p(\Omega))^* \cong L^q(\Omega)$$

Por otro lado, es bien conocido (ver capítulo 1 de [4]) que todo los espacios normados lineales de dimensión $n \in \mathbb{N}$ son isomorfos y homeomorfos. Este resultado no se puede extender a dimensión infinita y una de las consecuencias de trabajar en espacios de dimensión infinita es la pérdida de la caracterización de conjuntos compactos como conjuntos cerrados y acotados.

Ejemplo 1.4. La bola B_{ℓ_2} no es compacta porque la sucesión $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con e_n el n -ésimo vector de la base canónica no tiene un subsucesión convergente aunque esta contenida en B_{ℓ_2} (ya que $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$ para todo par $n \neq m$).

Este ejemplo no es especial ya que una caracterización de espacio normado con dimensión infinita es la propiedad de tener una bola unidad cerrada no compacta. Para ver este hecho primero demostraremos el Lema de Riesz.

Lema 1.6 (Riesz). *Sea Y un subespacio vectorial cerrado propio de un espacio normado X y sea $0 < \theta < 1$. Entonces, existe $x_\theta \in S_X$ tal que $\|x_\theta - y\| > \theta$ para todo $y \in Y$.*

Demostración. Sea $x \in X \setminus Y$. Como Y es cerrado tenemos que la distancia de x a Y es positiva, es decir, $d(x, Y) := \inf\{d(x, y) : y \in Y\} = d > 0$. Además, $d < \frac{d}{\theta}$, por lo que existe $z \in Y$ tal que $\|x - z\| < \frac{d}{\theta}$. Ahora tomamos:

$$x_\theta = \frac{x - z}{\|x - z\|} \in S_X.$$

Con ello si $y \in Y$:

$$\|x_\theta - y\| = \left\| \frac{x - z}{\|x - z\|} - y \right\| = \frac{1}{\|x - z\|} \|x - \underbrace{(z + y\|x - z\|)}_{\in Y}\| > \frac{\theta}{d} d = \theta.$$

□

Teorema 1.7 (Riesz). *Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, son equivalentes:*

- i) X es de dimensión finita.
- ii) Todo conjunto cerrado y acotado de X es compacto.
- iii) La bola unidad cerrada B_X es compacta.

Demostración. Si X es de dimensión finita es obvio que todo cerrado y acotado es compacto ya que todo espacio de dimensión finita es homeomorfo a \mathbb{K}^n donde el resultado es bien conocido.

Si todo cerrado y acotado es compacto es claro que la bola unidad cerrada es compacta.

Supongamos que la bola unidad cerrada es compacta y veamos que la dimensión es finita. Denotamos por $B(a, r)$ a la bola abierta centrada en el punto a y de radio r . Consideramos el recubrimiento formado por las bolas de radio $\frac{1}{2}$ en cada punto, es decir, $B_X \subset \bigcup_{x \in B_X} B(x, \frac{1}{2})$. Al ser B_X compacto, existe un subrecubrimiento finito, es decir, $\exists \{y_1, \dots, y_m\} \subset B_X$ tales que $B_X \subset \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \frac{1}{2})$. Consideramos ahora el subespacio $Y = \text{span}\{y_1, \dots, y_m\}$. Si X es de dimensión infinita, tenemos que el subespacio Y es propio. Por el Lema 1.6, tenemos que existe

$x \in S_X \subset B_X$ tal que $d(x, Y) \geq \frac{1}{2}$. Pero como pertenece a B_X tenemos que $x \in \bigcup_{i=1}^m B(y_i, \frac{1}{2})$, es decir, existe $j \in \{1, \dots, m\}$ tal que $x \in B(y_j, \frac{1}{2})$. Con ello se presenta una contradicción. \square

En el Capítulo 2, con el resultado de Alaoglu 2.11, veremos que la compacidad de la bola se puede obtener con una topología más gruesa lo que permitirá obtener de nuevo la caracterización de compactos. Sin embargo, antes de poder entrar al tema de las topologías débiles, debemos ver tres versiones del Teorema de Hahn-Banach, un corolario de estas y el Teorema de Banach-Steinhaus que nos serán muy útiles.

Teorema 1.8 (Hahn-Banach). *Sea Y un subespacio de un espacio de Banach X . Si $y^* \in Y^*$, entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $x^*|_Y = y^*$ con $\|x^*\|_X = \|y^*\|_Y$.*

Esta primera versión del teorema es, conceptualmente, distinta a las siguientes. Esta nos indica de la posibilidad de extensión de funcionales de un subespacio cerrado a cualquier espacio que lo contenga y le daremos uso en el Capítulo 3 de Aplicaciones. Las siguientes versiones nos proporcionan resultados de separabilidad, es decir, métodos para separar conjuntos mediante elementos del dual y les daremos un gran uso a lo largo de todo el trabajo.

Teorema 1.9 (Hahn-Banach). *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach X . Si x_0 no pertenece a Y , entonces existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(Y) = \{0\}$ y $x^*(x) = d(x_0, Y)$.*

Teorema 1.10 (Hahn-Banach). *Sea C un convexo cerrado en un espacio de Banach X . Si x_0 no pertenece a C , entonces existe $x^* \in X^*$ tal que $\text{Re}(x^*(x_0)) > \sup\{\text{Re}(x^*(x)); x \in C\}$.*

Corolario 1.11. *Sea X un espacio de Banach:*

- i) *Sea C un convexo abierto en X . Si $x_0 \notin C$, entonces existe $x^* \in X^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tales que $x^*(x_0) = \lambda$ y $\text{Re}[x^*(x)] < \lambda \forall x \in C$.*
- ii) *Sean A, B convexos disjuntos en X . Si A es abierto, entonces existe $x^* \in X^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que, $\text{Re}[x^*(a)] < \lambda \forall a \in A$ y $\text{Re}[x^*(b)] \geq \lambda \forall b \in B$.*

Para una demostración de estos enunciados ver el capítulo 2 de [2].

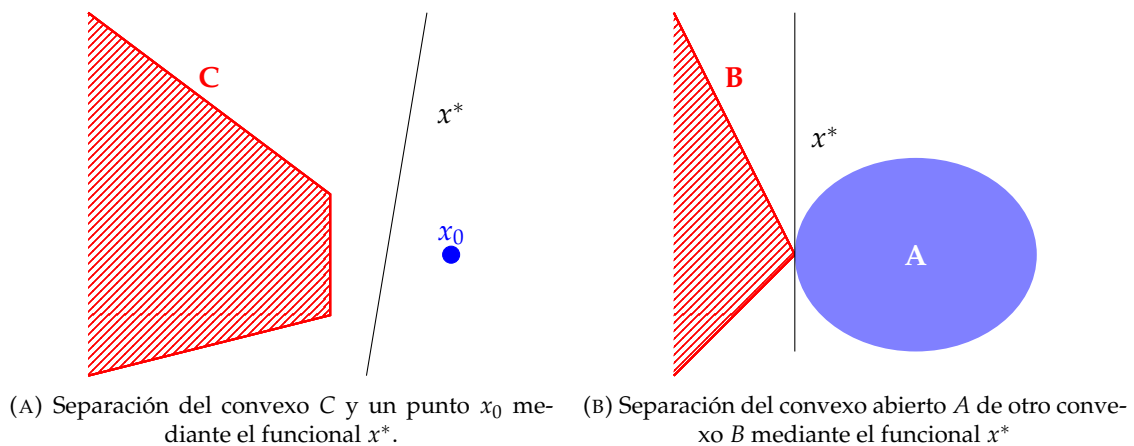


FIGURA 1.1: Representaciones gráficas de los casos del Corolario 1.11.

Finalmente, mencionamos otro resultado clásico del análisis funcional al que le daremos uso durante el Capítulo 2.

Teorema 1.12 (Banach-Steinhaus). *Sea X un espacio de Banach y sea \mathcal{F} un subconjunto de X^* tal que para cada $a \in X$ existe $C_a > 0$ con $|f(a)| \leq C_a$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\sup\{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$.*

Demostración. Recogemos una prueba mediante el Teorema de Baire en el Apéndice A. \square

2 Topologías Débil y Débil*

Llegamos a la pieza central de este trabajo, las topologías débiles. En este capítulo nos centraremos en familiarizarnos con las topologías, sus propiedades y sus relaciones con la topología de la norma. Seguiremos esquemas presentados en el capítulo 2 de [4] y en el capítulo 3 de [2].

Ya hemos visto en el capítulo anterior que la topología de la norma es demasiado estricta (tiene muchos abiertos) para ciertas buenas propiedades como la compacidad de la bola unidad. Por ello vamos a construir unas topologías más gruesas, es decir, con menos abiertos. Para hacerlo recurrimos a duales topológicos, el dual del espacio para la topología débil y el predual para la topología débil*.

2.1. Topología Débil

Como ya se discutió en la primera sección, vamos a construir esta topología mediante el comportamiento de las redes, en concreto, vamos a usar la Proposición 1.2 para que todas las funciones lineales y continuas en la topología de la norma también lo sean en esta topología.

Definición. Sea X un espacio normado. Sea una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ en X con \mathcal{D} un conjunto dirigido. Diremos que esta red converge débilmente a un punto x_0 de X si para todo elemento x^* de X^* se tiene que:

$$x^*(x_0) = \lim_{\alpha} x^*(x_\alpha).$$

Denotaremos a la topología débil como ω .

Es claro, al estar formado X^* por funciones lineales, que tanto la suma como la multiplicación por un escalar son ω -continuas, es decir, (X, ω) es un espacio vectorial topológico. No solo ello, sino que la topología débil es Hausdorff (debido al Teorema 1.3 y al hecho de que X^* separa puntos gracias al Corolario 1.11). A continuación veamos una útil caracterización:

Teorema 2.1. Una base de la topología débil es:

$$\mathcal{B} = \{W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subset X \text{ con } x_0 \in X, x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0\}.$$

donde $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) := \{y \in X : |x_i^*(y - x_0)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$. Además, una base local de un punto x_0 es $\mathcal{B}_{x_0} = \{W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subset X; \text{ con } x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*, \varepsilon > 0\}$.

Demostración. Es sencillo ver que \mathcal{B} es un base de una topología, por ello veremos que la topología ω es la misma que la dada por \mathcal{B} .

Sea $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ una red que converja a x en la topología ω y sea U un entorno abierto de x en la topología generada por \mathcal{B} . Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tales que:

$$x \in \{y \in X : |x_i^*(y - x)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\} = W(x; x_1^*, \dots, x_n^*; \varepsilon) \subset U.$$

Notar que como $x^*(x_\alpha) \rightarrow x^*(x) \forall x^* \in X^*$ se tiene que $|x^*(x - x_\alpha)| \rightarrow 0 \forall x^* \in X^*$ y, en particular, lo hace para x_1^*, \dots, x_n^* . Así la red está eventualmente en U y, por tanto, converge también en la topología inducida por \mathcal{B} .

Veamos el recíproco. Sea una red $(x_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ que converga a x en la topología de \mathcal{B} y sea $x^* \in X^*$. Dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $A = \{y \in X : |x^*(x - y)| < \varepsilon\}$ es un abierto en \mathcal{B} , por lo tanto existe un β tal que $|x^*(x - x_\alpha)| < \varepsilon \forall \alpha \geq \beta$. Así $x^*(x - x_\alpha) \rightarrow 0$.

Para la base local solo lo veremos en el origen ya que las traslaciones son ω -continuas. Sea $W(x_0, x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)$ un entorno abierto del 0, así podemos tomar $0 < \delta < \min_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon - |x_i^*(x_0)|\}$. Con ver que $W(0; x_1^*, \dots, x_n^*, \delta)$ está contenido en $W(x_0; x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon)$ será suficiente para ver lo que queremos, pero es claro ya que $|x_i^*(x)| < \delta$ implica que $|x_i^*(x - x_0)| < \delta + |x_i^*(x_0)| < \varepsilon$. \square

Este resultado nos está indicando que los abiertos básicos de la topología ω son las intersecciones finitas de hiperplanos. Además, es inmediato ver que la topología débil es más gruesa que la topología de la norma ya que los elementos de la base \mathcal{B} son abiertos en norma. El lector se preguntará si el recíproco es cierto, para ver que no lo es usaremos el siguiente lema.

Lema 2.2. Sea X un espacio vectorial y f, g_1, \dots, g_n funcionales lineales sobre X tales $\ker f \supset \bigcap_{i=1}^n \ker g_i$. Entonces, f es una combinación lineal de g_i 's.

Demostración. Lo demostramos por inducción. Para $n = 1$ el lema se puede ver de forma sencilla probando que existe $h : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$ lineal tal que $f = h \circ g$, lo que implica el resultado. Supongamos que es cierto para n y $\ker f \supset \bigcap_{i=1}^{n+1} \ker g_i$. Aplicamos la hipótesis de inducción a

$$f|_{\ker g_{n+1}}, g_1|_{\ker g_{n+1}}, \dots, g_n|_{\ker g_{n+1}}.$$

Así $f = \sum_{i=1}^n a_i g_i$ en $\ker g_{n+1}$ y $f - \sum_{i=1}^n a_i g_i$ se anula en $\ker g_{n+1}$. Es decir, $\ker g_{n+1}$ está contenido en $\ker (f - \sum_{i=1}^n a_i g_i)$ y por el caso base tenemos que $f - \sum_{i=1}^n a_i g_i = a_{n+1} g_{n+1}$. \square

Este resultado algebraico va a ser el enlace entre la propiedad algebraica de la dimensión y las propiedades topológicas gracias a que la topología débil viene determinada por el comportamiento de los funcionales lineales. Aquí nos desviamos de la literatura para proponer un hilo alternativo por el que demostrar las propiedades esenciales, en concreto, utilizaremos el siguiente resultado.

Proposición 2.3. Sea X un espacio normado. Entonces X es de dimensión infinita si y solo si el conjunto vacío es el único abierto acotado de la topología débil.

Demostración. Sea U un abierto débil no vacío. Supongamos que $0 \in U$ (si no lo está podemos considerar una traslación debido a la linealidad de la topología ω). Entonces existen $\varepsilon > 0$, $x_1^*, \dots, x_n^* \in X^*$ tales que $W(0; x_1^*, \dots, x_n^*, \varepsilon) = \{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon\} \subset U$. Con ello es claro que $\bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* \subset U$. Supongamos que $\bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* = \{0\}$. Entonces para cualquier $x^* \in X^*$ tenemos que $\bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* \subset \ker x^*$ y por el Lema 2.2 tenemos que $x^* \in \text{span}\{x_i^*\}$, lo cual indica que X^* es de dimensión finita lo cual es un absurdo con el hecho de que X es de dimensión infinita¹. Así existe $x \in \bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* \setminus \{0\}$ y para todo λ en \mathbb{K} tenemos que $\lambda x \in \bigcap_{i=1}^n \ker x_i^* \subset U$. Así U no puede estar acotado.

Para el recíproco, vamos a contruir un abierto débil acotado centrado en el origen. Supongamos que $\dim X = n \in \mathbb{N}$ y $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de este. Consideramos la base $\{x_1^*, \dots, x_n^*\}$ del dual de X dada por $x_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ y construimos la norma $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i^*(x)|\}$. Como todas las normas son equivalentes en X , existe $m > 0$ tal que $m\|x\|_\infty \leq \|x\|$ y, en consecuencia, el conjunto $W(0; x_1^*, \dots, x_n^*, m)$ está contenido en B_X . \square

Notar que esta proposición demuestra que en dimensión infinita la topología de la norma y la topología débil son distintas y esto tiene una interesante traducción a redes.

¹Esto se debe a que en espacios de dimensión finita, el dual topológico coincide con el dual algebraico (todas las aplicaciones lineales son continuas). Así, por álgebra lineal, sabemos que X^{**} es de dimensión finita y como $X \subset X^{**}$ tenemos que X es de dimensión finita.

Ejemplo 2.1. Un red puede converger de forma débil a un punto, pero estar arbitrariamente lejos de este en un espacio de dimensión infinita.

Consideremos un punto x en el espacio X y $\delta > 0$, por la proposición anterior para cualquier abierto débil que contenga al punto, $U \in \mathcal{U}(x)$, se tiene que $U \setminus B(x, \delta) \neq \emptyset$. Así, podemos considerar la red $(x_U)_{U \in \mathcal{U}(x)}$ con $x_U \in U \setminus B(x, \delta)$. Claramente esta red converge al punto y se tiene que $\|x_U - x\| \geq \delta$ para cualquier elemento de la red.

Notar que, de forma análoga, podemos construir una red cuya distancia al punto no esté acotada y es otro hecho por el que es necesario recurrir a redes; en sucesiones esto no es cierto.

Lema 2.4. *Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ una sucesión ω -convergente. Entonces $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ está acotada.*

Demostración. Por definición de convergencia débil, tenemos que para todo elemento x^* de X^* se satisface que $x^*(x_n) \rightarrow 0$. En consecuencia, el conjunto $\{x^*(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado y existe C_{x^*} tal que $|x^*(x_n)| \leq C_{x^*}$ para cualquier valor de n . Recordar ahora que, gracias al encaje π , la sucesión (x_n) la podemos pensar como una sucesión de funcionales en X^{**} . Así, podemos pensar $\mathcal{F} = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ como un subconjunto de X^{**} y para la que existe una constante C_{x^*} tal que $|x_n(x^*)| \leq C_{x^*}$. Aplicando el Teorema de Banach-Steinhaus 1.12 en X^* tenemos que existe una cota $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para cualquier n . \square

Sin embargo, todo esto solo es posible en dimensión infinita ya que en dimensión finita ambas topologías son iguales. Para verlo necesitaremos el Teorema de Categoría de Baire cuya demostración y discusión recogemos en un apéndice (ver Apéndice A).

Lema 2.5 (Teorema de Categoría de Baire). *Si X es un espacio de Banach, la unión numerable de cerrados con interior² vacío tiene interior vacío.*

Teorema 2.6. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado y sea ω su topología débil. Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- i) $\dim X < \infty$.
- ii) La topología ω coincide con la topología de la norma.
- iii) ω es metrizable³.

Demostración. i) implica ii) : Ya sabemos que la topología débil es más gruesa que la topología de la norma. Para el contenido inverso, es suficiente con lo demostrado en la Proposición 2.3 anterior. Efectivamente, puesto que las traslaciones y las dilataciones son ω -continuas, dada una bola $B(x, r)$, podemos transformarla en la bola $B(0, 1)$ donde encontramos el entorno abierto débil del origen.

ii) implica iii) : Si la topología ω coincide con la topología de una norma, es obvio que es metrizable.

iii) implica i) : Para la última implicación usaremos reducción al absurdo. Vamos a encontrar una sucesión $(x_n^*) \subset X^*$ tal que para todo abierto débil U del 0, podemos encontrar un racional $\varepsilon > 0$ y un $n(U)$ tal que $\{x \in X : |x_i^*(x)| < \varepsilon \forall i = 1, \dots, n(U)\}$ está contenido en U . Veamos esto con más detalle.

Supongamos que ω es metrizable, lo que indica que cumple el primer axioma de la numerabilidad. Sea $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una base numerable de entornos del origen, dado U_n consideramos $\tilde{U}_n = W(0; x_{k_{n-1}+1}^*, \dots, x_{k_n}^*; \varepsilon_n)$ un abierto básico contenido en U_n que contiene al 0 con $\varepsilon_n \in \mathbb{Q}$. Así, $\{\tilde{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es otra base numerable de entornos del origen formada por abiertos básicos. Con

²Recordamos que el interior de un subconjunto A es el mayor abierto contenido en él.

³Es decir, existe una métrica d cuya topología coincide con ω .

ello tenemos la sucesión $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por los funcionales de la cadena. Aún restringimos más y definimos $\varepsilon'_n = \min_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon_i\}$ y $V_n = W(0; x_1, \dots, x_{k_n}; \varepsilon'_n)$. De nuevo, $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una base numerable del origen ya que el origen está contenido en $V_n \subset \tilde{U}_n$ para todo n .

Con ello tenemos que para cualquier entorno abierto débil U del origen existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \subset U$. En concreto, para $x^* \in X^*$, tenemos que $W(0; x^*; 1)$ es un abierto débil del origen y existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $V_m \subset W(0; x^*; 1)$. Es claro que $\bigcap_{i=1}^{k_m} \ker x_i^* \subset W(0; x^*; 1)$ y como $\bigcap_{i=1}^{k_m} \ker x_i^*$ es un espacio vectorial, si $y \in \bigcap_{i=1}^{k_m} \ker x_i^*$ entonces $\lambda y \in \bigcap_{i=1}^{k_m} \ker x_i^* \subset W(0; x^*; 1)$. Esto implica que $|x^*(\lambda y)| = |\lambda| |x^*(y)| < 1$ para todo λ , lo que fuerza $|x^*(y)| = 0$ y así, $\ker x^* \supset \bigcap_{i=1}^{k_m} \ker x_i^*$. Por el Lema 2.2 tenemos que $x^* \in \text{span}\{x_1^*, \dots, x_{k_m}^*\}$ y $X^* = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{span}\{x_1^*, \dots, x_i^*\}$. Si el espacio X es de dimensión infinita, $\text{span}\{x_1^*, \dots, x_i^*\}$ son cerrados de interior vacío y por el teorema de categoría de Baire (Lema 2.5) tenemos que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{span}\{x_1^*, \dots, x_i^*\}$ tiene interior vacío lo que supone una contradicción. \square

Observar que realmente, hemos demostrado que ω cumple el primer axioma de la numerabilidad si y solo si el espacio es de dimensión finita. Por ello, no recurrimos a sucesiones ya que son incapaces de resolver la topología como ya anticipamos.

Ejemplo 2.2. La sucesiones no son suficientes en ω .

Sea $A \subset \ell_2$ dado por $A = \{e_m + me_n : 1 \leq m < n < \infty\}$ con $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la base canónica. Veamos que $0 \in \overline{A}^{\omega}$.

Sea $V = W(0; x_1^*, \dots, x_k^*; \varepsilon)$ un abierto básico de ω con $\varepsilon > 0$, $x_i^* \in \ell_2^*$ y recordamos con el Teorema 1.5 que el dual de ℓ_2 es ℓ_2 . Con ello, $x_i^* = (a_1^i, a_2^i, \dots) \in \ell_2$ para $1 \leq i \leq k$. Así, tomando la red $x_{(m,n)} = e_m + me_n$ contenida en A , tenemos que $x_i^*(x_{(m,n)}) = a_m^i + ma_n^i$. Como $a_m^i \rightarrow 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m^i| < \varepsilon/2$ para todo $m \geq m_0$ y para todo $1 \leq i \leq k$. Fijado el m_0 , existe un n_0 tal que $|a_n^i| < \varepsilon/(2m_0)$ para todo $n \geq n_0$ y para todo $1 \leq i \leq k$. Con ello $|x_i^*(x_{(m_0, n_0)})| \leq \varepsilon$ y tenemos que el abierto V corta con $A \setminus \{0\}$, lo que implica que el 0 es un punto de acumulación y pertenece a la clausura.

Veamos ahora que ninguna sucesión en A converge a 0 débilmente, sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ dada por $x_k = e_{m_k} + m_k e_{n_k}$ con $1 \leq m_k < n_k < \infty$. Si m_k está acotado por M , consideramos el elemento $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ_2 dado por $y_n = \frac{1}{n}$. Así $y^*(x_k) = \frac{1}{m_k} + \frac{m_k}{n_k}$ que implica $y^*(x_k) \geq \frac{1}{M}$ y, en consecuencia, la sucesión (x_n) no converge débilmente a 0. Si m_k no está acotado, el Lema 2.4 nos indica que no es posible.

Como última propiedad destacamos el siguiente resultado que nos indica que desde el punto de vista de los convexos las topologías son muy similares.

Proposición 2.7 (Mazur). *Si C es un conjunto convexo de un espacio normado X , entonces la clausura en la topología de la norma coincide con la clausura en la topología débil.*

Demostración. Como la topología débil es más gruesa, para todo conjunto A de X tenemos que $\overline{A} \subset \overline{A}^{\omega}$. Sea C un convexo e y un elemento en la clausura débil pero no en la clausura de la norma. Por el Teorema 1.10 existe x^* en X^* tal que $\sup_{x \in \overline{C}} x^*(x) < x^*(y)$. Ahora bien, como $y \in \overline{C}^{\omega}$ tenemos que existe una red $(x_{\alpha})_{\alpha \in \mathcal{D}}$ contenida en C tal que $x_{\alpha} \xrightarrow{\omega} y$, lo que implica, por definición, que $x^*(x_{\alpha}) \rightarrow x^*(y)$. Así llegamos a la contradicción. \square

2.2. Topología Débil*

Para la topología débil nos hemos basado en el dual topológico, para la topología débil* realizaremos el mismo proceso pero con el predual.

Definición. Sea X un espacio normado. Sea una red $(x_{\alpha}^*)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ en X^* con \mathcal{D} un conjunto dirigido. Diremos que esta red converge débil* a un funcional x_0^* de X^* si para todo elemento x de X se

tiene que:

$$x_0^*(x) = \lim_{\alpha} x_{\alpha}^*(x).$$

Denotaremos a la topología débil* como ω^* .

Notar la completa analogía entre esta definición y la definición de ω , esto va a producir resultados similares a los descritos en la sección anterior. De nuevo, esta topología es Hausdorff y forma un espacio vectorial topológico, además:

Teorema 2.8. *Una base de la topología débil* es:*

$$\mathcal{B}^* = \{W^*(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) \subset X^*; \text{ con } x_0^* \in X^*, x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0\}.$$

donde $W^*(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) := \{y^* \in X^* : |(y^* - x_0^*)(x_i)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n\}$. Además, una base local de un punto x_0^* es $\mathcal{B}_{x_0^*}^* = \{W^*(x_0^*; x_1, \dots, x_n; \varepsilon) \subset X^*; \text{ con } x_1, \dots, x_n \in X, \varepsilon > 0\}$.

Demostración. Completamente análoga a la realizada en el Teorema 2.1. □

Notar que como $\pi(X) \subset X^{**}$ tenemos que la topología ω^* es más gruesa que ω (definidas ambas sobre X^*) y, en el caso de dimensión finita, las tres topologías coinciden.

Teorema 2.9. *Sea X un espacio lineal normado y sea ω^* la topología débil* sobre X^* . Entonces, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

- i) $\dim X < \infty$.
- ii) La topología ω^* coincide con la topología de la norma.
- iii) ω^* es metrizable.

Demostración. Completamente análogo a la demostración realizada en el Teorema 2.6. □

Sin embargo, en el caso de dimensión infinita, ω y ω^* pueden ser iguales o distintas sobre X^* y, en concreto, el predual afecta a la definición de ω^* . Más adelante estudiaremos la propiedad de reflexividad que implica la igualdad $\omega = \omega^*$, pero en general esto no es cierto.

Ejemplos 2.3. i) En $(c_0)^* \cong \ell_1$ se tiene que $\omega \neq \omega^*$.

Consideramos la base canónica $\{e_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de ℓ_1 . Recordamos que su dual es ℓ_{∞} (ver Teorema 1.5) y tomamos $x^* = (1, 1, \dots) \in c \subset \ell_{\infty}$. Así $x^*(e_n) = 1 \not\rightarrow 0$, lo que implica que $e_n \not\rightarrow_{\omega} 0$. Sin embargo, el predual de ℓ_1 es c_0 y si $y = (y(1), y(2), \dots) \in c_0$ tenemos que $e_n(y) = y(n) \rightarrow 0$ y así $e_n \rightarrow_{\omega^*} 0$.

ii) En ℓ_1 , la topología débil* definida mediante c_0 y la definida mediante c no coinciden.

Notar que el caso anterior nos sirve de ejemplo porque si consideramos como predual c , tenemos que la base canónica no converge al 0 en ω^* porque el elemento $x = (1, 1, \dots)$ pertenece a c y satisface que $e_n(x) = 1$ para cualquier n .

Por último, insistimos que, dado un espacio X , puede que este no sea el dual de ningún otro espacio lo que implica que no se puede definir la topología ω^* sobre este espacio. Es el caso de c o c_0 (como consecuencia directa de [5]).

2.3. Teoremas principales

Pasamos a los resultados claves de estas topologías: Empezamos con el Teorema de Alaoglu (o también conocido como Banach-Alaoglu). Este teorema es clave y es el punto con el que hemos iniciado el trabajo. Para demostrarlo requerimos del Teorema de Tíjonov.

Teorema 2.10 (Tíjonov). *El producto cartesiano de una colección de espacios topológicos compactos es compacto en la topología producto.*

La demostración de este resultado se puede ver en el Capítulo 5 de [1].

Teorema 2.11 (Alaoglu). *Si X es espacio normado, entonces B_{X^*} es ω^* -compacta. En consecuencia, los conjuntos acotados que sean ω^* -cerrados son ω^* -compactos.*

Demostración. Si $x^* \in B_{X^*}$, entonces $x^*(B_X) \subset \{x \in \mathbb{K} : |x| \leq 1\} =: D$ y con ello podemos identificar

$$B_{X^*} \subset \{f : B_X \rightarrow D\} = \prod_{x \in B_X} D = D^{B_X}.$$

El Teorema de Tíjonov nos asegura que D^{B_X} es un espacio compacto con la topología del producto y esta coincide con la débil* ⁴. Con ello, solo debemos ver que B_{X^*} es cerrado (ya que un cerrado dentro de un compacto es también compacto). Sea (x_α^*) una red en B_{X^*} convergente a $f \in D^{B_X}$, es decir, $x_\alpha^*|_{B_X} \xrightarrow{\omega^*} f$. Veamos que existe x^* en B_{X^*} de forma que $x^*|_{B_X} = f$. Para ello, definimos $x^*(x) = \|x\|f\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$ si x está en $X \setminus \{0\}$ y $x^*(0) = 0$. Primero, x^* es un funcional lineal. Efectivamente, sean $x_1, x_2 \in B_X$ y $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} x^*(a_1x_1 + a_2x_2) &= \|a_1x_1 + a_2x_2\|f\left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{\|a_1x_1 + a_2x_2\|}\right) = \|a_1x_1 + a_2x_2\| \lim_{\alpha} x_\alpha^* \left(\frac{a_1x_1 + a_2x_2}{\|a_1x_1 + a_2x_2\|}\right) = \\ &= \lim_{\alpha} a_1x_\alpha^*(x_1) + a_2x_\alpha^*(x_2) = a_1\|x_1\| \lim_{\alpha} x_\alpha^* \left(\frac{x_1}{\|x_1\|}\right) + a_2\|x_2\| \lim_{\alpha} x_\alpha^* \left(\frac{x_2}{\|x_2\|}\right) = a_1x^*(x_1) + a_2x^*(x_2). \end{aligned}$$

Ahora, si $x \in B_X$ tenemos que $|x_\alpha^*(x)| \leq 1$ lo que implica que $|x^*(x)| \leq 1$. Por el Teorema 1.4 y la definición de la norma en X^* , tenemos que $\|x^*\| \leq 1$ y $x^* \in B_{X^*}$. De forma que hemos encontrado el x^* en B_{X^*} cuya restricción a la bola B_X coincide con f , lo que demuestra el resultado. \square

El Teorema de Alaoglu 2.11 nos da una propiedad fuerte de la bola B_{X^*} , pero aún podemos ir más allá, podemos hacer esta bola metrizable (bajo ciertas condiciones). Primero, recordamos la definición de separabilidad:

Definición. Decimos que un espacio topológico (X, τ) es τ -separable si existe un subconjunto denso y numerable de él. Si X es un espacio normado, podemos estudiar su separabilidad tanto en la topología de la norma (diremos que X es separable) como en la topología débil (diremos que X es ω -separable).

Ejemplos 2.4. i) Veamos que si X es un espacio normado, entonces X es separable si y solo si existe $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en X tal que $X = \overline{\text{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Si X es separable la implicación es inmediata. Para la otra implicación, solo debemos notar que la clausura del espacio generado con el cuerpo de los reales es la misma que la generada con el cuerpo de los racionales y estos últimos son numerables.

ii) ℓ_p con $1 \leq p < \infty$ es separable, c_0 y c son separables. En concreto, no es difícil ver que son generados por $\overline{\text{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

iii) ℓ_∞ no es separable.

Dado A un subconjunto de \mathbb{N} (es decir, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$), podemos definir la sucesión $x_A = \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $a_n = 1$ si $n \in A$ y $a_n = 0$ en otro caso. Notar que para cualquier elemento del conjunto de partes $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ la sucesión definida pertenece a ℓ_∞ . Además, dados dos subconjuntos A, B se tiene que $\|x_A - x_B\|_\infty = 0$ si y solo si $A = B$ y si $A \neq B$ se tiene que $\|x_A - x_B\|_\infty = 1$. En

⁴Para el lector que sea más escéptico recogemos los detalles de esta última afirmación en el Apéndice B

consecuencia, las bolas $B(x_A, \frac{1}{2})$ y $B(x_B, \frac{1}{2})$ son disjuntas para cualquier A, B par de elementos distintos de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Si existiera un conjunto denso y numerable $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ debería tener, al menos, un elemento en cada bola anterior. Esto lleva a una contradicción porque necesitamos un x_n por cada bola (ya que son disjuntas) y tenemos tantas bolas como elementos tiene $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ que no es numerable.

Con la noción de separabilidad aclarada, pasamos al resultado ya discutido.

Proposición 2.12. *Sea X un espacio de Banach separable y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S_X$ denso en S_X . La función*

$$\begin{aligned} \rho : B_{X^*} \times B_{X^*} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x^*, y^*) &\longmapsto \rho(x^*, y^*) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |(x^* - y^*)(x_i)| \end{aligned}$$

es una métrica sobre B_{X^*} y la topología definida por ella coincide con la topología ω^* ($\omega^* = \tau_\rho$).

Demostración. Sean $x^*, y^*, z^* \in B_{X^*}$. Primero, es claro que la función está bien definida porque $|(x^* - y^*)(x_i)| \leq 2$. Veamos que es métrica. Se tiene de forma directa que $\rho(x^*, y^*) \geq 0$, $\rho(x^*, y^*) = \rho(y^*, x^*)$ y $\rho(x^*, y^*) \leq \rho(x^*, z^*) + \rho(z^*, y^*)$. Además, $\rho(x^*, x^*) = 0$ y así es una pseudo-métrica. Con ello solo nos falta ver que $\rho(x^*, y^*) = 0$ implica que $x^* = y^*$. Notemos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |(x^* - y^*)(x_i)| = 0 \iff x^*(x_i) = y^*(x_i) \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Puesto que x^*, y^* son funciones continuas y coinciden sobre un conjunto denso de un espacio Hausdorff, se tiene $x^*|_{S_X} = y^*|_{S_X}$ y por tanto $x^* = y^*$. Así ρ es una métrica sobre B_{X^*} .

Para ver que la topología de ρ y ω^* coinciden demostraremos la continuidad de la función identidad $id : (B_{X^*}, \omega^*) \rightarrow (B_{X^*}, \rho)$ ⁵. Sean $x^* \in B_{X^*}$, $\varepsilon > 0$ y $\mathcal{O} = \{y^* \in B_{X^*}; \rho(x^*, y^*) < \varepsilon\}$, veremos que existe un abierto de ω^* contenido en \mathcal{O} y que contiene a x^* . Sabemos que existe n_0 tal que $2^{-n_0} < \frac{\varepsilon}{4}$. Así, $U := W^*(x^*, x_1, \dots, x_{n_0}, \frac{\varepsilon}{2n_0}) \subset \mathcal{O}$. Efectivamente, sea $y^* \in U$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(x^*, y^*) &= \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |(x^* - y^*)(x_i)| = \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} |(x^* - y^*)(x_i)| + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i} |(x^* - y^*)(x_i)| \\ &< \sum_{i=1}^{n_0} 2^{-i} \frac{\varepsilon}{2n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{\infty} 2^{-i+1} < \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-n_0+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

y, además, es claro que $x^* \in U$. □

Ejemplo 2.5. Con los Ejemplos 2.4, el Teorema 1.5 y este resultado tenemos que (B_{ℓ_p}, ω^*) con $1 \leq p \leq \infty$ son metrizables, pero recordamos que (ℓ_p, ω^*) no lo son.

Este resultado se puede mejorar a un si y solo si, mediante la siguiente proposición que hemos adaptado de la sección 2.6 de [7].

Proposición 2.13. *Sea X un espacio de Banach. Sea (B_{X^*}, ω^*) compacto metrizable por una métrica ρ . Entonces X es separable.*

Demostración. Por hipótesis, tenemos que $U_n = \{x^* \in B_{X^*} : \rho(x^*, 0) < \frac{1}{n}\}$ son abiertos de (B_{X^*}, ω^*) , lo que implica que existen $x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}$ en X y ε_n racional positivo de forma que:

$$W_n = W^*(0; x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n}; \varepsilon_n) \cap B_{X^*} \subset U_n.$$

⁵Esto es suficiente porque una biyección continua de un espacio compacto a un espacio Hausdorff es un homeomorfismo. Ver capítulo 3 de [6].

Consideramos ahora $Y = \overline{\text{span}}\{x_{n,1}, \dots, x_{n,m_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ y notar que Y es separable⁶. Veamos que $X = Y$ mediante reducción al absurdo. Sea $x \in X \setminus Y$, como Y es un subespacio cerrado, por uno de los Teoremas de Hahn-Banach 1.9, tenemos que existe x^* en X^* tal que $x^*(y) = 0$ para todo y en Y y $x^*(x) \neq 0$. Así, se tiene que $x^* \in W_n \subset U_n$ para todo n natural, es decir, $x^* \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \{0\}$ con lo que llegamos a un absurdo. \square

Proposición 2.14. *Sea X un espacio de Banach. Si X es ω -separable, entonces X es separable.*

Demostración. Sea S un conjunto contable y ω -denso en X . Denotamos $R = \text{span}(S)$. El conjunto C de combinaciones lineales racionales de elementos de S es denso en R (véase los Ejemplos 2.4) y así, tenemos que R es separable en norma. Como R es convexo y denso en X , tenemos que (por la Proposición 2.7) $\overline{R} = \overline{R}^{\omega} = X$, así C es denso en X . \square

Pasamos al segundo resultado clave de las topologías débiles, el Teorema de Goldstine. Para demostrarlo se suele utilizar de una forma más fuerte del Teorema de Hahn-Banach 1.10 pero, para evitar su uso sin justificación, en este trabajo recurriremos al siguiente lema.

Lema 2.15. *Sea X un espacio de Banach y $C \subset X^*$ ω^* -compacto y convexo. Sea x^* un elemento de X^* que no está en C . Entonces existe x en X con $\text{Re}[x^*(x)] > \sup_{y^* \in C} \{\text{Re}[y^*(x)]\}$*

Demostración. Lo demostraremos en el caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Puesto que los desplazamientos son continuos, podemos considerar $x^* = 0$ y C no corta con el origen. Como C es ω^* -compacto, tenemos que es cerrado, en consecuencia, si 0 no pertenece a C existe un V abierto tal que 0 pertenece a V y $V \cap C$ es vacío. Tomamos un abierto básico local contenido en V y centrado en 0 , $W = W^*(0; x_1, \dots, x_n; \varepsilon)$. Es claro, que C es cerrado en norma y W es un convexo abierto en norma porque ω^* es más gruesa que la norma. Así por el Corolario 1.11 tenemos que existe x^{**} tal que para cualquier $c^* \in C$ y $w^* \in W$ se cumple que $x^{**}(c^*) > x^{**}(w^*)$. Ahora, afirmamos que $\bigcap_{i=1}^n \ker x_i$ está contenido en $\ker x^{**}$. Sea $y^* \in \bigcap_{i=1}^n \ker x_i$, entonces $ty^* \in \bigcap_{i=1}^n \ker x_i \subset W$ para todo t en \mathbb{R} . Tomamos c^* de C y tenemos que $x^{**}(c^*) \geq tx^{**}(y^*)$. Esto fuerza $x^{**}(y^*) = 0$, lo que prueba la afirmación. Por el Lema 2.2 tenemos que x^{**} pertenece a $\text{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ que esta incluido en X . \square

Teorema 2.16 (Goldstine). *Sea X un espacio normado, se tiene que $B_X \subset X^{**}$ es ω^* -denso en $B_{X^{**}}$.*

Demostración. Sea $x^{**} \in X^{**} \setminus \overline{B_X}^{\omega^*}$. Por el Teorema de Alaoglu 2.11, $B_{X^{**}}$ es ω^* -compacta y como $\overline{B_X}^{\omega^*}$ es un cerrado contenido en este, tenemos que es un compacto. Así, con el Lema 2.15 anterior existe x_0^* en X^* que separa la bola y el punto x^{**} :

$$\sup_{y^{**} \in \overline{B_X}^{\omega^*}} \{y^{**}(x_0^*)\} < x^{**}(x_0^*).$$

Ahora, recordando la definición de norma en el dual de un espacio de Banach y tomando $\|x_0^*\| = 1$,

$$\|x^{**}\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} \{|x^{**}(x^*)|\} \geq |x^{**}(x_0^*)| > \sup_{y^{**} \in \overline{B_X}^{\omega^*}} \{y^{**}(x_0^*)\} \geq \sup_{y \in B_X} \{x_0^*(y)\} = \|x_0^*\|.$$

Con ello $\|x^{**}\| > 1$, lo que implica que $x^{**} \notin B_{X^{**}}$. \square

⁶Recordar el Ejemplo 2.4.

3 Aplicaciones

Aunque las aplicaciones de las topologías débiles son muchas y variadas, nosotros nos vamos a centrar en dos problemas. El primero es el problema de clasificación de los espacios de Banach bajo distintos puntos de vista y el segundo es el problema de la superreflexividad. En ambos casos partiremos de resultados que son bien conocidos en los espacios de Hilbert¹ y buscaremos resultados que generalicen estas nociones o que demuestren la imposibilidad de generalizar ciertos teoremas. En este capítulo seguiremos un esquema propio mezclando las ideas y resultados presentados en distintas fuentes como [2] y [3].

3.1. Teorema de Schur

Es sabido (véase el primer capítulo de [2]) que todos los espacios de Hilbert separables (por ejemplo $L^2(\mathbb{R})$) son isométricamente isomorfos a ℓ_2 . Así, cuando estudiamos las propiedades geométricas, algebraicas o topológicas del espacio podemos fijar el espacio como ℓ_2 y trabajar en él. Esto supone una gran ventaja, sobre todo porque permite que el estudio a fondo de un espacio concreto se pueda generalizar a cualquier otro espacio de Hilbert.

En este trabajo nos hemos centrado en los espacios de Banach, una generalización de los espacios de Hilbert, y uno se puede preguntar si existe un resultado similar. ¿Son todos los espacios de Banach separables ‘iguales’?

Lo primero que debemos hacer es aclarar a que nos referimos con la igualdad, en concreto, ya hemos nombrado 3 aspectos: topológico, algebraico y geométrico. La ‘igualdad’ topológica es el homeomorfismo, la algebraica es el isomorfismo y la geométrica es la isometría. Ya hemos discutido que en los espacios de Hilbert, podemos encontrar la igualdad en los tres aspectos de forma simultánea, pero esto no es posible en los espacios de Banach. Un ejemplo de ello es que c_0 y c no son isométricamente isomorfos, hecho que recogemos en el Apéndice C.

Puesto que la respuesta es negativa, nos podemos preguntar si podemos reducir las conclusiones a otros aspectos ya que en el ejemplo de dicho apéndice se puede observar que c y c_0 sí que son isomorfos aunque hayamos visto que no podemos exigir que conserve la norma. El objetivo es, entonces, ver si los espacios de Banach son todos isomorfos entre ellos.

En concreto, demostraremos un teorema clave en ℓ_1 , el Teorema de Schur, probaremos que es una propiedad que se conserva bajo isomorfismos y veremos un contraejemplo de este cuando el espacio sea $L^1(\mathbb{R})$. Con ello, demostraremos que no existe este isomorfismo entre ℓ_1 y $L^1(\mathbb{R})$. Empezamos demostrando el Teorema de Schur:

Teorema 3.1 (Schur). *Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en ℓ_1 . Si $x_n \xrightarrow{\omega} 0$, entonces $\|x_n\| \rightarrow 0$.*

Demostración. Lo demostraremos por reducción al absurdo. Supongamos que existe $\varepsilon > 0$ y una sucesión creciente $n_k < n_{k+1}$ tal que $\|x_{n_k}\|_1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} |x_{n_k}(i)| > \varepsilon$ ² para todo k natural. En esta demostración vamos a construir un elemento y del dual de ℓ_1 (es decir, de ℓ_∞ gracias al Teorema 1.5) que cumplirá que $y(x_{n_k}) \not\rightarrow 0$. Para la construcción de este elemento nos basaremos en dos hechos, el primero es que $x_{n_k}(i) = e_i^*(x_{n_k}) \rightarrow 0$ cuando $n_k \rightarrow \infty$ ya que $x_{n_k} \xrightarrow{\omega} 0$ y el

¹Los espacios de Hilbert son espacios de Banach cuya norma proviene de un producto escalar, como ℓ_2 o $L^2(\mathbb{R})$.

²En esta demostración denotaremos las componentes de un vector con el parentesis, es decir, $x_{n_k} = (x_{n_k}(1), x_{n_k}(2), \dots)$.

segundo es que el norma de x_{n_k} no tiende a 0. Estos dos hechos implican en las gráficas 3.1 que la ‘masa’ de los elementos x_{n_k} debe desplazarse hacia la derecha, por lo que se denomina a esta técnica como las *jorobas deslizantes*.

Tomamos $j_1 = 1$ y nos centramos primero en encontrar la *joroba* de $x_{n_1} = x_{n_{j_1}}$, puesto que la sucesión está en ℓ_1 , existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{i=N_1+1}^{\infty} |x_{n_1}(i)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Así $\sum_{i=1}^{N_1} |x_{n_1}(i)| \geq \frac{4\varepsilon}{5}$ y hemos encontrado un intervalo (de 1 a N_1) donde se encuentra la *joroba*.

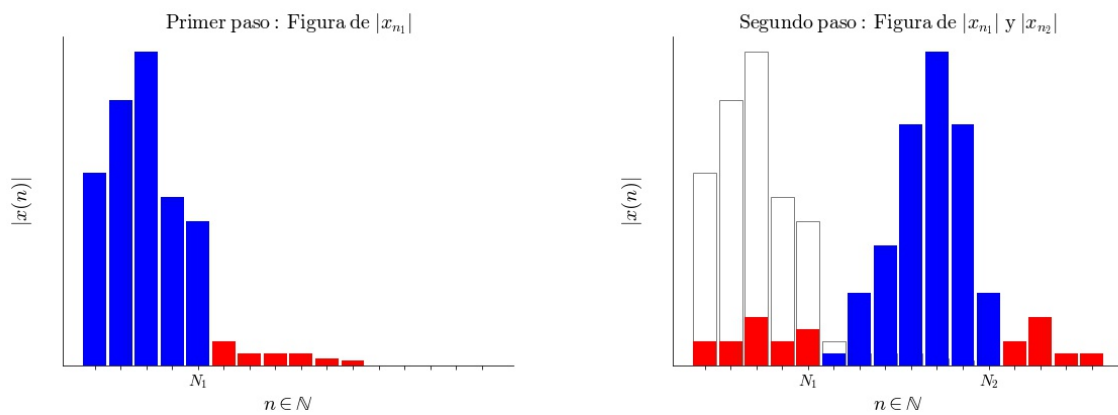
Ahora buscamos un elemento $x_{n_{j_2}}$ cuya *joroba* se encuentre en un intervalo de N_1 a N_2 (con $N_1 < N_2$) de forma que no solape con la *joroba* del elemento $x_{n_{j_1}}$. Este punto lo podemos encontrar porque $x_{n_k}(i) \rightarrow 0$ cuando n_k tiende a ∞ y porque $x_{n_k} \in \ell_1$. Efectivamente, por el primer hecho existe n_{j_2} tal que $\sum_{i=1}^{N_1} |x_{n_{j_2}}(i)| < \frac{\varepsilon}{5}$ y por el segundo existe N_2 tal que $\sum_{i=N_2+1}^{\infty} |x_{n_{j_2}}(i)| < \frac{\varepsilon}{5}$. Es decir, hemos encontrado un elemento $x_{n_{j_2}}$ que tiene $\frac{3\varepsilon}{5}$ de masa en el intervalo $(N_1, N_2]$. De forma iterativa, podemos encontrar una subsucesión $(x_{n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ y una sucesión creciente $(N_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ tal que (tomando $N_0 = 0$)

$$\sum_{i=1}^{N_{k-1}} |x_{n_{j_k}}(i)| < \frac{\varepsilon}{5}; \quad \sum_{i=N_{k-1}+1}^{\infty} |x_{n_{j_k}}(i)| < \frac{\varepsilon}{5}; \quad \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_{n_{j_k}}(i)| \geq \frac{3\varepsilon}{5}$$

para todo k , es decir, la *joroba* de $x_{n_{j_k}}$ se encuentra entre N_{k-1} y N_k . Con ello podemos definir $y \in \ell_{\infty}$ de la siguiente forma: dado $i \in \mathbb{N}$, existe k tal que $N_{k-1} < i \leq N_k$ y consideramos $y(i) = \text{sign}(x_{n_{j_k}}(i))$. Así, notar que $|y(i)| = 1$ para cualquier i y se cumple que:

$$\begin{aligned} |y(x_{n_{j_k}})| &\geq \left| \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} y(i)x_{n_{j_k}}(i) \right| - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} |y(i)x_{n_{j_k}}(i)| - \sum_{i=N_k+1}^{\infty} |y(i)x_{n_{j_k}}(i)| \\ &\geq \sum_{i=N_{k-1}+1}^{N_k} |x_{n_{j_k}}(i)| - \sum_{i=1}^{N_{k-1}} |x_{n_{j_k}}(i)| - \sum_{i=N_k+1}^{\infty} |x_{n_{j_k}}(i)| \geq \frac{3\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} - \frac{\varepsilon}{5} = \frac{\varepsilon}{5} \end{aligned}$$

Así, $y(x_{n_{j_k}}) \not\rightarrow 0$ lo que implica que la sucesión no converge en ω ya que hemos encontrado un elemento $y \in (\ell_1)^*$ con el que no se tiende a 0. \square



(A) Primer paso de la demostración del Teorema de Schur 3.1. Identificamos la *joroba* del $x_{n_{j_1}}$ con masa mayor que $\frac{4\varepsilon}{5}$ con el color azul y la cola a derecha con masa menor que $\frac{\varepsilon}{5}$ con el color rojo.

(B) Segundo paso de la demostración del Teorema de Schur 3.1. Identificamos la *joroba* del segundo $x_{n_{j_2}}$ con masa mayor que $\frac{3\varepsilon}{5}$ con el color azul y las colas a derecha e izquierda con masa menor que $\frac{\varepsilon}{5}$ con el rojo.

FIGURA 3.1: Representación de las *jorobas* deslizantes del Teorema 3.1

Puesto que las traslaciones y dilataciones son ω -continuas y continuas en norma, tenemos que ambas topologías son iguales para las sucesiones. Recordamos que las sucesiones no son suficientes para describir una topología, se necesitan las redes y que ya vimos en el Ejemplo 2.1 que las conclusiones de este teorema no se cumplen para redes. Además, este teorema requiere de convergencia en topología débil ya que la topología débil* es insuficiente por el Ejemplo 2.3. Destacamos que esta propiedad es clave hasta el punto en que se definen los espacios de Schur como los espacios de Banach que cumplen esta propiedad. Esta propiedad se conserva mediante el siguiente lema.

Lema 3.2. Sean X, Y dos espacios normados y T una aplicación lineal de X a Y . Entonces es continua en norma si y solo si es continua débil. Es decir, $T : (X, \|\cdot\|_X) \rightarrow (Y, \|\cdot\|_Y)$ es continua si y solo si $T : (X, \omega_X) \rightarrow (Y, \omega_Y)$ es continua.

Demostración. Notar que T es continua débil si y solo si $y^* \circ T$ pertenece a X^* para todo y^* de Y^* gracias a la Proposición 1.2. Así, si T es continua en norma, el resultado es claro.

El recíproco es consecuencia del Teorema de Banach-Steinhaus 1.12. Omitimos esta demostración pues no es necesaria para nuestros resultados. \square

A este lema le debemos añadir una pequeña caracterización de los isomorfismos de la que solo demostraremos la implicación que nos interesa.

Lema 3.3. Sea $T : X \rightarrow Y$ una aplicación lineal entre los espacios de Banach X, Y . Entonces T es isomorfismo sobre su imagen si y solo si existen $a, b > 0$ tales que $a\|x\| \leq \|T(x)\| \leq b\|x\|$ para todo x de X .

Demostración. Si T es isomorfismo sobre su imagen, se tiene que homeomorfismo sobre su imagen y , en consecuencia, es continua y su inversa también lo es. Por el Teorema 1.4 tenemos el resultado. \square

Finalmente, necesitaremos un resultado básico de análisis de Fourier, el lema de Riemann-Lebesgue que recogemos en el siguiente lema (para su demostración véase el capítulo 3 de [8]).

Lema 3.4 (Riemann-Lebesgue). Sea $f \in L^\infty([0, 2\pi])$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = 0$.

Proposición 3.5. $L^1(\mathbb{R})$ no es isomorfo a un subespacio de ℓ_1 .

Demostración. Vamos a demostrarlo por contradicción. Supongamos que existe un isomorfismo T de $L^1(\mathbb{R})$ a un subespacio de ℓ_1 . Consideramos las sucesión de funciones:

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \notin (0, 2\pi) \\ \cos(nx), & \text{si } x \in (0, 2\pi) \end{cases}$$

cuya norma es $\|f_n\|_{L^1} = 4$ para cualquier n . Sabemos que el dual de $L^1(\mathbb{R})$ es $L^\infty(\mathbb{R})$ y por el Lema de Riemann-Lebesgue 3.4 tenemos que $\int_0^{2\pi} f_n(x)g(x)dx \rightarrow 0$ para cualquier elemento $g \in L^\infty((0, 2\pi))$, en concreto, para cualquier $g \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Con ello, tenemos que la sucesión f_n converge a 0 débilmente, pero tiene norma constante. Por la Proposición 1.2 y por el lema anterior 3.2 tenemos que $T(f_n)$ converge débilmente a $T(0) = 0$, ya que T es continua en norma. Además, como T es un isomorfismo tenemos que $\|T(f_n)\|_{\ell_1} \geq 4b$ con $b > 0$ (por el Lema 3.3 anterior), pero esto contradice el Teorema de Schur 3.1 ya que hemos encontrado una sucesión que converge débilmente a 0 y no converge en norma al 0 en ℓ_1 . \square

Y mediante un procedimiento similar podemos ver muchos más contraejemplos.

Corolario 3.6. ℓ_p con $1 < p < \infty$, c_0 y c no son isomorfos a un subespacio de ℓ_1 .

Demostración. Notar que en todos estos espacios la sucesión $e_n \xrightarrow{\omega} 0$ pero $\|e_n\| = 1$. \square

Con ello hemos dado una respuesta negativa, no puede existir una única clase de espacios de Banach separables bajo el punto de vista de los isomorfismos, pero a la vista de estos resultados uno podría pensar que quizá hay dos clases de espacios de Banach separables, los que cumplen la propiedad de Schur y los que no. De nuevo, la respuesta es negativa, existen espacios de Banach separables con la propiedad de Schur que no son isomorfos a ℓ_1 (ver [9]). Esto muestra como la caracterización de los espacios de Banach es un problema mucho más amplio que el particular de los espacios de Hilbert.

El lector se preguntará si existe alguna igualdad en alguno de los aspectos mencionados y lo cierto es que existen resultados positivos. Algunos ejemplos son el hecho de que todos los espacios de Banach separables son homeomorfos entre ellos (ver capítulo 6 de [10]) o que todo espacio de Banach separable es isométrico a un subespacio de $C([0, 1])$ (ver capítulo 5 de [2]).

3.2. Teorema de Sobczyk

Otra propiedad bien conocida (ver el capítulo 1 de [4]) y especial de los espacios de Hilbert es la capacidad de descomponer el espacio X en un subespacio cerrado Y y su ortogonal Y^\perp de forma que cualquier elemento del espacio se puede escribir de forma única como la suma de un elemento de Y y otro de Y^\perp , es decir, $X = Y \oplus Y^\perp$. En esta sección vamos a buscar como generalizar este resultado a los espacios de Banach separables y, al igual que en la demostración de dicho resultado, recurriremos a las proyecciones.

Definición. Sea X un espacio vectorial, Y un subespacio vectorial de X y una aplicación lineal $P : X \rightarrow Y$. Se dice que P es una proyección sobre Y si $P(y) = y$ para todo $y \in Y$ y diremos que Y está complementado en X si P es continua.

Ejemplo 3.1. Proyección de c a c_0 .

Es obvio que c_0 es un subespacio de c y podemos considerar la aplicación $P : c \rightarrow c_0$ dada por

$$P(x_1, x_2, \dots) = (x_1 - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, x_2 - \lim_{k \rightarrow \infty} x_k, \dots)$$

Es claro que cumple la definición anterior.

Ejemplo 3.2. c_0 es isométricamente isomorfo a un subespacio complementado en $C([0, 1])$.

El primer hecho es sencillo de ver comprobando la aplicación $T : c_0 \rightarrow C([0, 1])$ dada por

$$T(x_1, x_2, \dots) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n f_n$$

con f_n funciones continuas con $\|f_n\|_\infty = 1$ cuyo soporte esta contenido en $I_n = [1 - \frac{1}{2^{n-1}}, 1 - \frac{1}{2^n}]$ para todo n natural es una isometría. En efecto, definimos $t_n \in I_n$ como un punto donde f_n alcanza su máximo, es decir, $f_n(t_n) = 1$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$. Destacamos el hecho de que, claramente, las f_n son funciones de $C([0, 1])$ y que la suma está bien definida por ser los I_n disjuntos y pertenece al espacio porque la sucesión x_n tiende a 0 lo que fuerza a la función a ser continua en el 1.

Veamos simplemente que conserva la norma, puesto que las funciones f_n tienen soporte disjunto y tienen norma 1 se tiene que

$$\|T(x_1, x_2, \dots)\|_\infty = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n f_n \right\|_\infty = \sup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ x \in I_n}} \{|x_n f_n(x)|\} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|x_n|\} = \|(x_1, x_2, \dots)\|_\infty.$$

Ahora buscamos la proyección, sea $f \in C([0, 1])$, consideramos la aplicación $P(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n$ donde $a_n = f(t_n) - f(1)$. Notar que la sucesión a_n tiende a 0 al ser la función f continua en el 1, que la aplicación P es lineal y que es continua por el Teorema 1.4 junto con

$$\|P(f)\|_\infty = \left\| \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n f_n \right\|_\infty = \|(a_1, a_2, \dots)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |f(t_n) - f(1)| \leq 2\|f\|_\infty.$$

Así, tenemos una proyección sobre $T(c_0)$.

Notar como las proyecciones permiten la descomposición de la que hablamos porque para todo elemento x del espacio X podemos escribirlo mediante $x = (x - P(x)) + P(x)$ lo que implica que $X = P(X) \oplus \ker P$ donde el hecho de que la suma sea directa viene dado porque $P(X) \cap \ker P = \{0\}$.

Ahora bien, en los ejemplos anteriores hemos podido construir las proyecciones, pero para el caso general tenemos el Teorema de Sobczyk.

Teorema 3.7 (Sobczyk). *Sea Y un subespacio cerrado de un espacio de Banach X separable. Si Y es isomorfo a c_0 , entonces existe una proyección de X sobre Y .*

Demostración. Sea T el isomorfismo de Y a c_0 , podemos asumir que $\|T\| = 1$. Para cada $y \in Y$ tenemos que $T(y) = (T(y)_n)_{n \in \mathbb{N}} \in c_0$ y podemos definir $y_n^* \in Y^*$ dadas por $y_n^*(x) = T(x)_n$ para toda $x \in Y$. Es claro que $y_n^* = e_n^* \circ T$, que $\|y_n^*\| \leq \|T\| = 1$ y que por el Teorema de Hahn-Banach 1.8 podemos extender y_n^* a todo el espacio con la misma norma. Sea $F = B_{X^*} \cap Y^\perp$ donde $Y^\perp = \{x^* \in X^* : x^*(Y) = \{0\}\}$. Por la Proposición 2.12 consideramos ρ la métrica que induce la topología ω^* en B_{X^*} . Vamos a ver que $\lim_n \rho(y_n^*, F) = 0$. Sea $y_{n_k}^*$ una subsucesión tal que

$$\lim_n \rho(y_{n_k}^*, F) = \lim_n \sup \rho(y_n^*, F) = a \geq 0.$$

Como B_{X^*} es ω^* -compacto por el Teorema de Alaoglu 2.11 y la topología viene de una métrica tenemos que el espacio es secuencialmente compacto³. Esto implica que existe una subsucesión $y_{n_k}^*$ convergente a un y^* de B_{X^*} . Como $T(x) \in c_0$ tenemos que $T(x)_n \rightarrow 0$ para todo $x \in Y$ de forma que $y_n^*(x) \rightarrow 0$ y $y^*(x) = 0$ para todo $x \in Y$. Así $y^* \in Y^\perp$ y como $\|y^*\| \leq 1$, tenemos que esta en F , lo que implica que $a = 0$.

Tomamos x_n^* en F de forma que $\rho(y_n^*, x_n^*) \leq \rho(y_n^*, F) + \frac{1}{n}$. Como $\rho(y_n^*, F) \rightarrow 0$, tenemos que $\rho(y_n^*, x_n^*) \rightarrow 0$. Esto implica que $y_n^* - x_n^* \xrightarrow{\omega^*} 0$ que indica que la aplicación $Q : X \rightarrow c_0$ dada por $Q(x)_n = (y_n^* - x_n^*)(x)$ esta bien definida. Además, es lineal y

$$\|Q(x)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \{|(y_n^* - x_n^*)(x)|\} \leq 2\|x\|.$$

Esto implica por el Teorema 1.4 que Q es continua. Con ello podemos definir, la función proyección P dada por $P = T^{-1} \circ Q$ que claramente es lineal y continua al serlo Q y T^{-1} . El último detalle que queda por comprobar es el hecho de que $P(y) = y$ para cualquier $y \in Y$, pero esto es claro con el hecho de que $x_n^* \in Y^\perp$ que implica que $Q(y) = T(y)$. \square

Esta propiedad es muy fuerte y caracteriza completamente a c_0 . El Teorema de Zippin [11] dice que si un espacio de Banach es complementado en todo espacio separable que lo contenga, entonces es isomorfo a c_0 .

Destacamos que la condición de que X sea separable es una condición necesaria gracias al siguiente teorema (para su demostración véase el capítulo 5 de [2]).

Teorema 3.8 (Phillips). *No existe ninguna proyección de ℓ_∞ sobre c_0 .*

³Recordamos que un espacio es secuencialmente compacto si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.

3.3. Reflexividad

En la Sección 1.2 ya hablamos de la aplicación del encaje π para entender los elementos de X como elementos de X^{**} y ya introdujimos la noción de reflexividad (que dicha aplicación sea suprayectiva). Además, ya comentamos como π es, en este caso, un isomorfismo isométrico de X a su bidual X^{**} , es decir, $X \cong X^{**}$. Esto supone de forma inmediata que $\omega = \omega^*$ en X^* .

Ejemplos 3.3. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos.

Gracias al Teorema 1.5 es sencillo ver que ℓ_p con $1 < p < \infty$ son espacios reflexivos y que c, c_0, ℓ_1 no lo son⁴.

La definición de reflexividad esta basada en la estructura de X^{**} , pero tiene una caracterización directa mediante la topología débil que no requiere de trabajar con el bidual lo cual es un ventaja porque los biduales suelen ser espacios complicados.

Teorema 3.9. *Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si B_X es ω -compacto.*

Demostración. Si X es reflexivo, entonces $B_X = B_{X^{**}}$ y por el Teorema de Alaoglu 2.11 tenemos que B_X es ω^* -compacta en X^{**} lo que significa que es ω -compacta en X .

Si B_X es ω -compacto, tenemos que es ω^* -cerrada en X^{**} . Por el Teorema de Goldstine 2.16, tenemos que coincide con $B_{X^{**}}$ y el espacio es reflexivo. \square

Una consecuencia de este resultado es el hecho de los funcionales alcanzan su máximo sobre la bola unidad, lo cual es una propiedad muy importante y una de las implicaciones en el Teorema de James.

Teorema 3.10 (James). *Un espacio de Banach X es reflexivo si y solo si para cualquier $x^* \in B_{X^*}$ existe $x \in B_X$ tal que $\|x^*\| = x^*(x)$.*

La demostración de este teorema es larga y complicada sobre todo en el caso de que X no sea separable, para el lector interesado la sección 2.9 de [7] está dedicada completamente a la demostración de este teorema.

Ejemplo 3.4. En c_0 no alcanzamos el máximo.

Recordar del Teorema 1.5 que $(c_0)^* \cong \ell_1$. Consideramos el elemento $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} = x^* \in B_{\ell_1}$ dado por $x_n^* = \frac{6}{\pi^2} \frac{1}{n^2}$. Este elemento alcanza el máximo en la bola de c pero no en la de c_0 porque $x^*((1, 1, \dots)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^* = 1$ y $x^*((y_n)) < 1$ cuando $|y_n| \leq 1$ y $\lim y_n = 0$.

La caracterización de reflexividad también conlleva otra consecuencia directa.

Corolario 3.11. *La propiedad de reflexividad es invariante bajo isomorfismos.*

Demostración. Por el Teorema 3.9 anterior podemos trabajar con la caracterización mediante la ω -compacidad de la bola B_X .

Sean X, Y espacios de Banach. Sea T un isomorfismo de X a Y . Por el Lema 3.2 tenemos que también es un homeomorfismo entre (X, ω_X) y (Y, ω_Y) . Así si B_X es ω_X -compacto tenemos que $T(B_X)$ es un ω_Y -compacto. Por el Lema 3.3 tenemos que existe $a > 0$ tal que aB_Y esta contenido en $T(B_X)$ y al ser cerrado tenemos que es un compacto. Finalmente, puesto que las dilataciones son ω_Y -continuas tenemos que B_Y es compacto, lo que implica que Y es reflexivo. \square

Esto proporciona más distinciones entre los espacios de Banach, no solo la propiedad de Schur permite distinguir entre ellos, también la reflexividad.

Corolario 3.12. *Los espacios ℓ_p con $1 < p < \infty$ no son isomorfos a c_0 .*

Demostración. Obvio con el Corolario 3.11 y con los Ejemplos 3.3. \square

⁴Notar que c y c_0 son separables y ℓ_∞ no lo es por el Ejemplo 2.4, por lo que no pueden ser isomorfos.

Nos centramos ahora en una propiedad muy estudiada dentro de la reflexividad, los espacios superreflexivos. Para ello primero debemos introducir los llamados espacios uniformemente convexos.

Definición. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Diremos que es un espacio uniformemente convexo (UC) si para cualquier $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cualquier par de puntos x, y de la bola B_X se cumple que

$$\|x - y\| > \varepsilon \quad \text{implica que} \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Intuitivamente, estos espacios tienen una bola B_X 'muy redonda', es decir, que los segmentos se alejan del borde.

Ejemplos 3.5. i) Los espacios de Hilbert son UC.

Este hecho surge de la identidad del paralelogramo, recordamos que esta identidad es

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2.$$

Con ella, tomando $\|u\|, \|v\| \leq 1$ y tomando $\|u - v\| > \varepsilon$ obtenemos que $\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$.

ii) Los espacios $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, ℓ_p con $1 < p < \infty$ son UC.

iii) Los espacios $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ y $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ no son UC.

Notar que en \mathbb{R}^2 con la norma $\|\cdot\|_1$ si tomamos $x = e_1$ e $y = e_2$ tenemos que todo el segmento que los une no se despega del borde y lo mismo ocurre con $\|\cdot\|_\infty$ con $x = e_1$ e $y = e_1 + e_2$.

iv) Los espacios ℓ_1, ℓ_∞, c y c_0 no son UC.

Esto se debe a que la convexidad solo depende de subespacios de dimensión 2 y por el ejemplo anterior tenemos que los subespacios de estos espacios no lo cumplen.

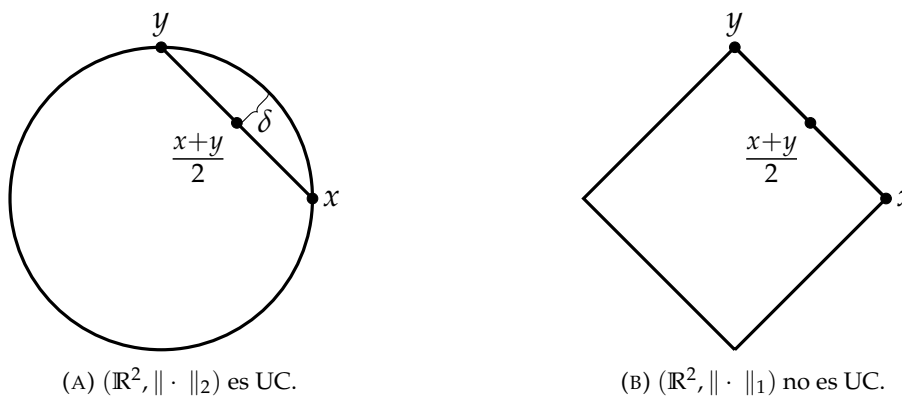


FIGURA 3.2: Representaciones gráficas de casos de los Ejemplos 3.3

La propiedad de ser UC se relaciona con la reflexividad mediante el Teorema de Milman-Pettis, nosotros iremos un paso más allá y demostraremos un resultado más general que demuestre toda la fuerza de los resultados obtenidos para topologías débiles. Para ello, necesitamos un resultado conocido que es consecuencia directa de Hahn-Banach.

Lema 3.13. Sea X un espacio normado. Dado $x \in X \setminus \{0\}$, existe $x^* \in S_{X^*}$ tal que $x^*(x) = \|x\|$. En particular $\|x\| = \max\{|x^*(x)| : x^* \in B_{X^*}\}$.

Demostración. Sea $Y = \text{span}\{x\}$ y definimos $y^* \in Y^*$ como $y^*(tx) = t\|x\|$. Así $\|y^*\|_{Y^*} = 1$ y $y^*(x) = \|x\|$. Con el Teorema de Hahn-Banach 1.8, podemos extender la función a un funcional x^* en X^* con la misma norma y por definición de norma en el dual tenemos el resultado. \square

Teorema 3.14 (Milman-Pettis). *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que existe un $0 < \varepsilon_0 < 1$ y un $\delta > 0$ para los que se cumple la hipótesis de UC. Entonces X es reflexivo.*

Demostración. Trabajaremos con \mathbb{R} por comodidad y supongamos que $X \neq X^{**}$. Como X es un subespacio cerrado de X^{**} por el Lema de Riesz 1.6 existe $x_0^{**} \in S_{X^{**}}$ tal que $d(x_0^{**}, X) > \varepsilon_0$. Puesto que $B := (1 - \delta)B_{X^{**}}$ es un ω^* -compacto de X^{**} (por el Teorema de Alaoglu 2.11) y x_0^{**} no está en B tenemos, por el Lema 2.15, que existe $y^* \in X^*$ que separa x_0^{**} y B , es decir

$$\alpha = \sup_{x^{**} \in B} x^{**}(y^*) < x_0^{**}(y^*).$$

Consideramos $U = \{x^{**} : x^{**}(x_0^*) > \alpha\} = (x^{**})^{-1}((\alpha, \infty))$ entorno abierto débil* de x_0^{**} . Por el Teorema de Goldstine 2.16 tenemos que $S := U \cap B_X \subset S' := U \cap B_{X^{**}}$ con $S \neq \emptyset$. Es obvio que $\varepsilon_0 < d(x_0^{**}, X) \leq \text{diam } S'$ ⁵ ya que $x_0^{**} \in S'$. Vamos a ver que $\text{diam } S = \text{diam } S'$. Sean $x_1^{**}, x_2^{**} \in S'$ y $\varepsilon' > 0$, existe $z^* \in S_{X^*}$ tal que

$$\|x_1^{**} - x_2^{**}\| \leq (x_1^{**} - x_2^{**})(z^*) + \varepsilon',$$

gracias a la definición de norma en los espacios duales. De nuevo por Goldstine 2.16 existen dos redes $(x_{1,\alpha})_{\alpha \in \mathcal{D}_1}, (x_{2,\alpha})_{\alpha \in \mathcal{D}_2}$ en B_X tales que

$$x_{1,\alpha} \xrightarrow{\omega^*} x_1^{**} \quad \text{y} \quad x_{2,\alpha} \xrightarrow{\omega^*} x_2^{**}.$$

Con ello tenemos que

$$\|x_1^{**} - x_2^{**}\| \leq (x_1^{**} - x_2^{**})(z^*) + \varepsilon' = \omega^*\text{-lím}(x_{1,\alpha} - x_{2,\alpha})(z^*) + \varepsilon' \leq \omega^*\text{-lím} \|x_{1,\alpha} - x_{2,\alpha}\| + \varepsilon',$$

donde la última igualdad se debe al Lema 3.13. Ahora solo hay que apreciar que, puesto que $x_{1,\alpha}$ y $x_{2,\alpha}$ convergen a elementos de S' y que ambas redes están en X , tenemos que existen $\alpha_1 \in \mathcal{D}_1$ y $\alpha_2 \in \mathcal{D}_2$ tales que $x_{1,\alpha} \in S$ para todo $\alpha \geq \alpha_1$ y $x_{2,\alpha} \in S$ para todo $\alpha \geq \alpha_2$. Lo que implica que $\|x_{1,\alpha} - x_{2,\alpha}\| \leq \text{diam } S$. Con todo ello, tenemos que $\text{diam } S' \leq \text{diam } S + \varepsilon'$ para cualquier ε' dado, lo que implica que $\text{diam } S' \leq \text{diam } S$ y puesto que la desigualdad inversa es obvia, tenemos que $\varepsilon_0 < \text{diam } S' = \text{diam } S$.

Veamos como esto lleva a una contradicción: Por definición de diámetro, existen dos elementos $x, y \in S \subset B_X$ con $\|x - y\| > \varepsilon_0$, pero el punto medio no puede pertenecer a B porque $U \cap B = \emptyset$ y, al ser S intersección de convexos, se tiene que $\frac{1}{2}(x + y) \in S = U \cap B_X$. Con ello llegamos a una contradicción con el hecho de que es UC con dicho ε_0 y δ . \square

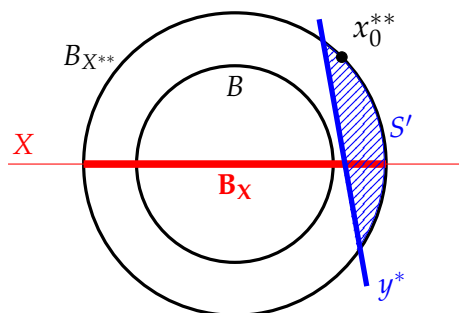


FIGURA 3.3: Representación gráfica de la demostración del Teorema de 3.14. Representamos las bolas $B_{X^{**}}$ y B como círculos, el subespacio X como una recta roja y el funcional que separa y^* como la frontera de un hiperplano azul. La intersección del hiperplano con la bola $B_{X^{**}}$ nos define S' .

Uno podría pensar en buscar una equivalencia entre el hecho de que X sea UC y que sea reflexivo pero esto no es cierto. En concreto, esto se debe al Corolario 3.11 que nos indica que la reflexividad es invariante bajo isomorfismos y es claro que la propiedad de ser UC no lo es.

⁵Recordamos que el diámetro de un conjunto A es $\text{diam } A = \sup\{d(a, b) : a, b \in A\}$.

Ejemplo 3.6. La reflexividad de un espacio es más débil que la condición de UC.

Empezamos este trabajo con una discusión de que los espacios vectoriales de dimensión n son isomorfos entre ellos. Esto implica que todos ellos son reflexivos al ser isomorfos al espacio de Hilbert $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$, pero ya discutimos en los Ejemplos 3.5 como $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ no es UC.

Por esta razón, se distinguen los espacios que son isomorfos a un espacio UC y se les denomina como espacios superreflexivos a los espacios que son isomorfos a un espacio UC.

3.4. Conclusiones y posibles líneas de estudio

La construcción de las topologías débiles nos ha permitido profundizar en el estudio de la caracterización de los espacios de Banach. En el caso separable, estos espacios no se pueden describir de forma única mediante isomorfismos aunque sí mediante homeomorfismos. En la actualidad, se investiga de forma muy activa en una equivalencia intermedia, Lipschitz homeomorfismos. Estas son aplicaciones que satisfacen, junto con su inversa, la propiedad de Lipschitz⁶ y es un problema abierto determinar si esta propiedad es equivalente al isomorfismo en los espacios separables. Para el lector interesado recomendamos la consulta de [12].

También hemos trabajado la propiedad de descomposición y de complementación. Hemos demostrado el Teorema de Sobczyk 3.7 que determina que siempre existe una proyección sobre c_0 y hemos descrito, sin demostrar, como esta propiedad caracteriza a c_0 . Esto se relaciona con el problema de clasificación de dos formas: la primera es que es un resultado de identificación, este resultado nos permite identificar un tipo de espacio de entre los posibles. La segunda es que proporciona el método de descomposición de Pełczyński (ver capítulo 6 de [2]) que proporciona un procedimiento para encontrar isomorfismos.

Finalmente, nos hemos centrado en la propiedad de reflexividad y como está caracterizada mediante la compacidad débil de la bola unidad. Esto nos ha permitido discutir aún más las diferencias entre los espacios clásicos, es más, no esta lejos del alcance de este trabajo demostrar que los espacios ℓ_p y ℓ_q nos son isomorfos si $p \neq q$, ya que se puede demostrar con un procedimiento similar al visto en el Teorema de Schur 3.1. Con ello, veríamos que todos los espacios de sucesiones son distintos (salvo c y c_0 que son isomorfos). Además, hemos podido introducir la propiedad de UC y la superreflexividad. Podemos ir más allá y preguntarnos sobre como mejorar la uniformidad, es decir, encontrar el mejor δ que satisface la definición de UC mediante isomorfismos. Se sabe que en los espacios L^p con $1 < p < \infty$ norma más ‘uniforme’ es $\|\cdot\|_p$ [13], pero existen espacios de Banach para los cuales no existen mejores renormamientos.

Con ello este trabajo es un punto de partida como introducción a la geometría y análisis de los espacios de Banach, en concreto, como introducción a los problemas de clasificación de espacios de Banach y a los problemas de superreflexividad.

⁶Recordamos que una función $T : X \rightarrow Y$ es Lipschitz si $\|T(x) - T(y)\| \leq L\|x - y\|$ con $L \in \mathbb{R}^+$ para todo par de puntos $x, y \in X$.

Bibliografía

- [1] J. L. Kelley. *General topology*. Graduate Texts in Mathematics, No. 27. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1975, págs. xiv+298.
- [2] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos Santalucía, J. Pelant y V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry*. Vol. 8. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2001, págs. x+451.
- [3] B. Cascales, J. M. Mira, J. Origuela y M. Raja. *Análisis Funcional*. Textos Universitarios. Matemáticas. Ediciones Electolibris S.L. y RSEM, 2012, págs. viii+373.
- [4] J. Diestel. *Sequences and series in Banach spaces*. Vol. 92. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1984, págs. xii+261.
- [5] C. Bessaga y Pelczyński A. «On extreme points in separable conjugate spaces». En: *Israel J. Math.* 4 (1966), págs. 262-264.
- [6] J. R. Munkres. *Topology*. Second edition of [MR0464128]. Prentice Hall Inc., Upper Saddle River, NJ, 2000, págs. xvi+537.
- [7] R. E. Megginson. *An introduction to Banach space theory*. Vol. 183. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1998, págs. xx+596. ISBN: 0-387-98431-3.
- [8] E. M. Stein y R. Shakarchi. *Fourier analysis*. Vol. 1. Princeton Lectures in Analysis. An introduction. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2003, págs. xvi+311. ISBN: 0-691-11384-X.
- [9] W. B. Johnson y J. Lindenstrauss. «Examples of \mathcal{L}_1 spaces». En: *Ark. Mat.* 18.1 (1980), págs. 101-106. ISSN: 0004-2080.
- [10] C. Bessaga y A. Pełczyński. *Selected topics in infinite-dimensional topology*. Monografie Matematyczne, Tom 58. [Mathematical Monographs, Vol. 58]. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975, pág. 353.
- [11] M. Zippin. «The separable extension problem». En: *Israel J. Math.* 26.3-4 (1977), págs. 372-387. ISSN: 0021-2172.
- [12] G. Godefroy, G. Lancien y V. Zizler. «The non-linear geometry of Banach spaces after Nigel Kalton». En: *Rocky Mountain J. Math.* 44.5 (2014), págs. 1529-1583. ISSN: 0035-7596.
- [13] T. Figiel. «Lattice norms and the geometry of Banach spaces». En: *Proceedings of the International Conference on Operator Algebras, Ideals, and their Applications in Theoretical Physics (Leipzig, 1977)*. Teubner, Leipzig, 1978, págs. 89-99.
- [14] X. Caicedo y G. Enciso. «The Hahn-Banach theory as a principle of choice». En: vol. 28. 106. Mathematics and statistics (Spanish). 2004, págs. 11-20.
- [15] J. L. Kelley. «The Tychonoff product theorem implies the axiom of choice». En: *Fund. Math.* 37 (1950), págs. 75-76. ISSN: 0016-2736.

A Sobre el Teorema de Baire

Este trabajo se ha estudiado el desarrollo de una herramienta topológica concreta (las topologías débiles) para su uso en el análisis funcional, pero el uso de la topología para estudiar este campo es mucho más amplio y un resultado clave es el Teorema de Baire. Este teorema tiene naturaleza puramente topológica pero sus usos son extensos hasta el punto de demostrar uno de los pilares del análisis funcional, el Principio de acotación uniforme (Teorema de Banach-Steinhaus). Es por ello que introducimos este apéndice para recalcar la importancia de este teorema y para entender este resultado como lo que es, un punto clave en nuestro estudio.

Seguiremos el esquema presentado por [6], pero antes de pasar a la demostración del Lema 2.5 introduciremos unas definiciones que permitan dar ejemplos de espacios que cumplen la conclusión de este lema.

Definición. Un espacio topológico se dice que es un espacio de Baire si para cualquier conjunto numerable $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cerrados con interior vacío se tiene que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ tiene interior vacío.

Ejemplos A.1. i) Los racionales no son un espacio de Baire.

Esto se debe a que los puntos son conjuntos cerrados con interior vacío y su unión forma los racionales siendo numerable.

ii) Los naturales forman un espacio de Baire.

Esto se debe a que cualquier conjunto de números naturales es abierto y, en consecuencia, el único cerrado con interior vacío es el conjunto vacío.

Esta definición también puede ser representada mediante conjuntos densos.

Lema A.1. *X es un espacio de Baire si y solo si para cualquier conjunto numerable $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos densos en el espacio se tiene que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es denso.*

Demostración. Esto es obvio con el hecho de que un conjunto cerrado con interior vacío tiene como complementario un abierto denso. \square

Con ello, solo necesitamos el siguiente lema para demostrar el resultado que nos interesa.

Lema A.2. *Sea $\{C_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de cerrados no vacíos en un espacio métrico completo X tales que $C_{n+1} \subset C_n$. Si $\text{diam } C_n \rightarrow 0$, entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ no es vacío.*

Demostración. Tomamos $x_n \in C_n$ para cada n , así $x_n, x_m \in C_l$ para todo $n, m \geq l$. Puesto que $\text{diam } C_l \rightarrow 0$, tenemos que la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en un espacio completo. Así existe x tal que $x_n \rightarrow x$ y, al ser C_n cerrado, $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$. \square

Aunque parece asombroso, la hipótesis de que $\text{diam } C_n$ converja a 0 es necesaria ya que sin ella surgen contraejemplos (por ejemplo $C_n = [n, \infty)$ en \mathbb{R}). Con esto tenemos suficiente para demostrar el resultado.

Teorema A.3 (de la categoría de Baire). *Si X es un espacio métrico completo, entonces X es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ un conjunto numerable de cerrados con interior vacío en X y sea U_0 un abierto no vacío. Como A_1 tiene interior vacío, existe $y \in (X \setminus A_1) \cap U_0$ y como A_1 es cerrado, existe un entorno abierto U_1 de y tal que $\text{diam } U_1 < 1$, $\overline{U_1}$ está contenido en U_0 y

$\overline{U}_1 \cap A_1$ es vacío. En general, dado el abierto U_{n-1} tomaremos un punto en U_{n-1} que no esté en A_n y tomamos un abierto U_n tal que $\text{diam } U_n < \frac{1}{n}$, \overline{U}_n está contenido en U_{n-1} y $\overline{U}_n \cap A_n$ es vacío.

Con el Lema A.2, tenemos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{U}_n$ es no vacío, lo que implica que existe un punto x que está en U_0 y no está en ningún A_n . \square

Este teorema se suele complementar con el hecho de que los espacios Hausdorff compactos son también espacios de Baire pues su demostración es análoga.

A primera vista este resultado parece muy específico y con poca utilidad fuera de casos concretos, pero no se podría estar más equivocado. Este teorema produce resultados muy interesantes como un método de construcción de funciones continuas no diferenciables en ningún punto.

Teorema A.4. Sea $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Dado $\varepsilon > 0$ existe una función $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no diferenciable en ningún punto tal que $|h(x) - g(x)| < \varepsilon$ para toda $x \in [0, 1]$.

Demostración. Ver [6]. \square

Y no solo proporciona resultados interesantes, también es suficiente para demostrar resultados claves del análisis funcional como el Principio de acotación uniforme (Teorema de Banach-Steinhaus).

Teorema A.5 (Banach-Steinhaus). Sea X un espacio de Banach y sea \mathcal{F} un subconjunto de X^* tal que para cada $a \in X$ existe $C_a > 0$ con $|f(a)| \leq C_a$ para toda $f \in \mathcal{F}$. Entonces $\sup\{\|f\| : f \in \mathcal{F}\} < \infty$.

Demostración. Definimos $A_N = \{x \in X : |f(x)| \leq N \text{ con } f \in \mathcal{F}\}$. Como las funciones f son continuas tenemos que los A_N son cerrados y por hipótesis tenemos que $\bigcup_{N \in \mathbb{N}} A_N = X$. Esto implica por el Teorema de Baire A.3 que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que A_m tiene interior no vacío, es decir, existe x_0 en X y $\varepsilon > 0$ tal que $\overline{B(x_0, \varepsilon)}$ está contenido en A_m . Así, dado $y \in B_X$ y $f \in \mathcal{F}$ se tiene que:

$$|f(y)| = \frac{1}{\varepsilon} |f(x_0 + \varepsilon y) - f(x_0)| \leq \frac{1}{\varepsilon} (|f(x_0 + \varepsilon y)| + |f(x_0)|) \leq \frac{2m}{\varepsilon}.$$

Tomando supremos tenemos que $\|f\| \leq \frac{2m}{\varepsilon}$ y que $\mathcal{F} \subset \overline{B(0, \frac{2m}{\varepsilon})}$. \square

Este teorema es clave en el análisis funcional y nos aporta resultados interesantes respecto a las topologías débiles como el descrito en el Lema 2.4. Otros resultado útil de este teorema es el siguiente.

Corolario A.6. Sea X un espacio de Banach y sea $(x_n^*)_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ una sucesión de funcionales que converge puntualmente a y^* en X^* , es decir, $x_n^*(x) \rightarrow y^*(x)$ para todo x en X . Entonces $\|x_n^*\| < C$ para algún $C > 0$. La convergencia puntual implica la acotación uniforme de la norma del operador.

Demostración. Aplicando directamente el Teorema de Banach-Steinhaus A.5 tenemos que existe dicha cota $C > 0$. \square

B Detalles con el Teorema de Tjonov

En este apéndice nos vamos a centrar en una afirmación indicada en la demostración del Teorema de Alaoglu 2.11, la afirmación de que la topología ω^* coincide con la topología producto de D^{B_X} . Lo cierto es que en la mayor parte de la literatura este hecho se da por cierto sin mayor explicación, pero al enfrentarse a esta afirmación por primera vez, el autor no vio con seguridad este hecho. Por ello, añadimos este apéndice, para explicar con cuidado un detalle que suele pasar desapercibido.

Sean $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ espacios topológicos. Recordamos que la topología producto τ_p de $\prod_{i \in I} X_i$ está formada por los conjuntos $\prod_{i \in I} U_i$ con $J \subset I$ tal que $|J| < \infty$, $U_i = X_i$ para todo $i \in I \setminus J$ y U_i es abierto en X_i para todo $i \in J$. Un ejemplo del caso en que el producto es finito, es decir, $|I| < \infty$, es el caso de \mathbb{R}^n donde la topología producto coincide con la topología usual. Lo que nosotros afirmamos en la demostración del Teorema de Alaoglu 2.11 es que el conjunto $B = \{x^*|_{B_X} : x^* \in B_{X^*}\} \subset D^{B_X}$ con la topología producto es homeomorfo a (B_{X^*}, ω^*) . Para verlo de forma explícita, usaremos el siguiente lema.

Lema B.1. *Una red $(\bar{x}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ en $\prod_{i \in I} X_i$ converge en la topología del producto τ_p a \bar{x} si y solo si converge coordenada a coordenada, es decir, $x_\alpha^{(i)} \xrightarrow{\alpha} x^{(i)}$ en la topología de X_i para toda $i \in I$.*

Demostración. Sea $(\bar{x}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ una red convergente a \bar{x} en la topología producto. Sea $j \in I$ y U un entorno de $x^{(j)}$ en X_j , el conjunto $V = \prod_{i \in I} U_i$ con $U_i = X_i$ si $i \neq j$ y $U_j = U$ es un abierto en la topología producto. Así, existe $\beta \in \mathcal{D}$ tal que $\bar{x}_\alpha \in V$ para todo $\alpha \geq \beta$, es decir, $x_\alpha^{(j)} \in U$. Para el recíproco tomamos $U = \prod_{i \in I} U_i$ un entorno abierto básico de \bar{x} . Sea $J \subset I$ tal que $|J| < \infty$, $U_i = X_i$ si $i \notin J$ y U_j es abierto en X_j si $j \in J$. Como $x_\alpha^{(j)}$ converge a $x^{(j)}$ si $j \in J$, tenemos que existe $\beta \in \mathcal{D}$ tal que $\bar{x}_\alpha \in U$ si $\alpha \geq \beta$. \square

Lema B.2. *La aplicación $F : (B_{X^*}, \omega^*) \rightarrow B$ dada por $F(x^*) = (x^*(x))_{x \in B_X}$ es un homeomorfismo sobre su imagen.*

Demostración. Sea $(x_\alpha^*)_{\alpha \in \mathcal{D}}$ una red de B_{X^*} . Esta red converge $x_\alpha^* \xrightarrow{\omega^*} x^*$ si y solo si converge $x_\alpha^*(x) \rightarrow x^*(x)$ para todo $x \in B_X$. Notar que por la linealidad de las funciones es equivalente a la convergencia para todo $x \in B_X$. Finalmente por el Lema B.1 anterior, tenemos que esto es equivalente a que la red $(x_\alpha^*(x))_{x \in B_X} \xrightarrow{\tau_p} (x^*(x))_{x \in B_X}$ que es exactamente $F(x_\alpha^*) \xrightarrow{\tau_p} F(x^*)$. Al ser una cadena de equivalencias tenemos que F es un homeomorfismo. \square

C Isomorfías e Isometrías entre c y c_0

Los espacios c y c_0 son ambos subespacios cerrados de ℓ_∞ con un mismo dual, ℓ_1 . Ante este detalle uno se puede preguntar si quizá existe un isomorfismo isométrico entre c y c_0 , si quizá estamos haciendo una distinción que a efectos prácticos es innecesaria. En este apéndice, veremos que no es así y para ver que no es cierto (siguiendo los pasos de [2]) introduciremos un nuevo concepto, los puntos extremos.

Definición. Sea X un espacio vectorial y C un conjunto convexo de este. Decimos que $p \in C$ es un punto extremo de C si no existen $x, y \in C$ tales que $x \neq y$ y p es combinación convexa de x e y , es decir, existe $t \in (0, 1)$ tal que $p = tx + (1 - t)y$.

Ejemplo C.1. i) En \mathbb{R}^n , las esquinas de un cubo n -dimensional son sus puntos extremos.
ii) En \mathbb{R}^n , la esfera euclídea son los puntos extremos de la bola euclídea.

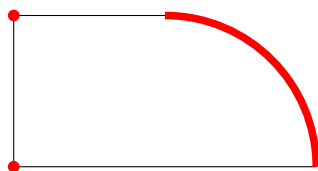


FIGURA C.1: Ejemplo de conjunto convexo con sus puntos extremos indicados en rojo.

Intuitivamente, los puntos extremos son las esquinas o los bordes no rectos de los convexos, pero en dimensión infinita cobran un entendimiento más complicado.

Lema C.1. El conjunto convexo B_c tiene como punto extremo a $p = (1, 1, 1, \dots)$.

Demostración. Sean $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = x, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} = y \in B_c$ tales que $p = tx + (1 - t)y$ para algún $t \in (0, 1)$. Podemos suponer que $t = \frac{1}{2}$, de forma que $p = \frac{x+y}{2}$, es decir, $1 = \frac{x_n+y_n}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y con $|x_n|, |y_n| \leq 1$. La única solución posible es $x_n = y_n = 1$ y así $x = y = p$. \square

Lema C.2. El conjunto convexo B_{c_0} no tiene puntos extremos.

Demostración. Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = p \in B_{c_0}$, entonces como $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = 0$ tenemos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|p_{n_0}| < \frac{1}{2}$. Con ello considerar $p = \frac{(p - \frac{1}{2}e_{n_0}) + (p + \frac{1}{2}e_{n_0})}{2}$ y notar que $p \pm \frac{1}{2}e_{n_0} \in B_{c_0}$ de forma que p no puede ser punto extremo. \square

Esta propiedad es geométrica, de forma que no es sorprendente que los isomorfismos isométricos la conserven. En tal caso, con los lemas anteriores tendríamos suficiente para demostrar que c y c_0 no pueden ser isométricamente isomorfos.

Proposición C.3. Sean X, Y espacios de Banach, sea C un conjunto convexo de X con un punto extremo p y sea $T : X \rightarrow Y$ un isomorfismo. Entonces $T(p)$ es punto extremo de $T(C)$, es decir, la propiedad de ser un punto extremo de un conjunto se conserva mediante isomorfismos.

Demostración. Supongamos que $T(p)$ no es un punto extremo de $T(C)$ que es un convexo (gracias a la linealidad). En tal caso, existen $x, y \in C$ tales que $\frac{T(x)+T(y)}{2} = T(p)$ y por linealidad $T\left(\frac{x+y}{2}\right) = T(p)$. Puesto que la función es biyectiva, tenemos que $\frac{x+y}{2} = p$ y como p es punto extremo tenemos que $x = y = p$, así $T(p)$ es un punto extremo y tenemos un absurdo. \square

Corolario C.4. *No existe un isomorfismo isométrico entre c y c_0 .*

Demostración. Si existiera $T : c \rightarrow c_0$ isomorfismo isométrico, entonces $T((1, 1, 1, \dots))$ es un punto extremo de $T(B_c)$ gracias al Lema C.1 y a la Proposición C.3, pero $T(B_c) = B_{c_0}$ al ser isométrico lo que implica una contradicción con el Lema C.2. \square

Sin embargo, notar que para el corolario anterior hemos necesitado la condición de isometría para conseguir la igualdad $T(B_c) = B_{c_0}$. Si descartamos esta condición sí que podemos conseguir un isomorfismo.

Proposición C.5. *La aplicación $T : c \rightarrow c_0$ dada por*

$$T((x_1, x_2, x_3, \dots)) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, x_2 - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n, \dots \right)$$

es un isomorfismo.

Demostración. Claramente T es lineal y dado $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se tiene que

$$\|T(x)\|_\infty = \max \left\{ \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right|, \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| \right\} \leq \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right| + \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| = 2\|x\|_\infty$$

y por el Teorema 1.4 tenemos que T es continua. Además, la aplicación lineal $R : c_0 \rightarrow c$ dada por

$$R((x_1, x_2, x_3, \dots)) = (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_3, \dots)$$

es claramente lineal y continua porque $\|Rx\|_\infty \leq 2\|x\|_\infty$ para cualquier $x \in c_0$. Finalmente, notar que $T \circ R = I_{c_0}$ y que $R \circ T = I_c$ de forma que $R = T^{-1}$ y T es un isomorfismo. \square

D Relación con el Axioma de Elección

En este escrito hemos asumido (sin mención alguna) el Axioma de Elección, pues sin este se carecen de resultados fuertes como el Teorema de Hahn-Banach 1.8, lo que supone un gran impedimento en el análisis funcional. Sin embargo, el uso que le hemos dado no se restringe a este teorema y hemos trabajado con él de forma disimulada. El Teorema de Tijonov 2.10 es una versión equivalente al Axioma de Elección y hemos necesitado de este resultado para demostrar el Teorema de Alaoglu 2.11. Con ello parece claro la necesidad del Axioma de Elección, pero lo cierto es que se puede salvaguardar en el caso de este trabajo.

La relación de los teoremas mencionados con los axiomas ha sido estudiado con detalle (ver [14] y [15]) y recogemos los aspectos que nos atañen en el siguiente esquema.

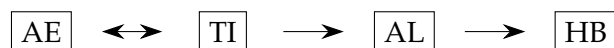


FIGURA D.1: Cadena de implicaciones de los resultados. AE=Axioma de Elección, TI=Teorema de Tijonov, AL=Teorema de Alaoglu y HB=Teorema de Hahn-Banach.

En esta figura destacamos el hecho de que el Teorema de Alaoglu 2.11 implica el Teorema de Hahn-Banach 1.8 lo que conlleva la posibilidad de reducir la ‘potencia’ de los axiomas requeridos para este trabajo. En concreto, en este trabajo hemos requerido de dos resultados que no hemos demostrado para el desarrollo de las topologías débiles. Estos son el Teorema de Hahn-Banach 1.8 (y sus distintas versiones geométricas) y el Teorema de Tijonov 2.10. Ambos resultados son consecuencia del Axioma de Elección pero podemos eliminarlo de nuestros axiomas si introducimos el Teorema de Alaoglu 2.11 a los axiomas.