Problemas de localización de bases de ambulancias.
Una aplicación en la provincia de Teruel

Facultad de Ciencias
Universidad Zaragoza

Universidad
Zaragoza
1542

Santiago Urgel Olea

Trabajo de fin de grado en Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Directores del trabajo:
Herminia I. Calvete y José A. Iranzo
27 de junio de 2022

Resumen

Conocer una ubicación óptima para un conjunto de instalaciones con el fin de satisfacer ciertos objetivos es clave en muchos ámbitos. Entre otros, este problema surge en la instalación de infraestructuras sanitarias. Ubicar instalaciones puede conllevar importantes inversiones y determinar el correcto funcionamiento de un servicio. Por tanto, este problema ha sido objeto de estudio en las últimas décadas. Dicho problema se encuadra dentro de la Investigación Operativa, en los denominados problemas de localización. En el presente trabajo, se estudian varios problemas de localización y se aplican algunos de ellos a la localización de bases de ambulancias en la provincia de Teruel. Esta memoria consta de dos capítulos y tres apéndices cuyos contenidos se presentan de manera resumida seguidamente.

En el capítulo 1 se plantean y modelan algunos problemas de localización. En particular, se estudian el problema de la p-mediana, el problema del p-centro, el problema de ubicación de instalaciones de coste fijo (FLP), el problema de cubrimiento de conjuntos (SCP) y el problema de cubrimiento maximal (MCP).

El problema de la p-mediana consiste en determinar dónde deben ubicarse p instalaciones con objeto de satisfacer la demanda de los clientes y minimizar el coste total. El problema del p-centro es similar al de la p-mediana, pero minimiza la distancia máxima de los clientes a su instalación abierta más cercana en vez del coste total. El FLP consiste en hallar el número y la ubicación de un conjunto de instalaciones con objeto de satisfacer la demanda de los clientes y minimizar el coste total, entendido como la suma de los costes de satisfacer la demanda y los costes fijos por abrir las instalaciones. El FLP tiene dos variantes, el FLP de asignación múltiple y el de asignación única, según se permita o no el fraccionamiento de la demanda entre varias instalaciones. El SCP minimiza el coste total de abrir un conjunto de instalaciones de forma que todos los clientes estén cubiertos. Un cliente está cubierto si su distancia a una instalación abierta es menor o igual que una distancia dada. El MCP maximiza la demanda total cubierta abriendo un número fijo de instalaciones.

Tras la formulación de estos modelos, y teniendo en cuenta que en el resto de la memoria se van a aplicar modelos de cubrimiento, se describen dos de los métodos generales de resolución que se han propuesto para estos modelos. El método de ramificación y acotación aplicado a la resolución del SCP y el método de relajación lagrangiana aplicado a la resolución del MCP. El método de ramificación y acotación resuelve la relajación lineal del SCP, dividiendo sucesivamente el conjunto de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños y disjuntos, eliminando, además, partes de la región de factibilidad de los sucesivos problemas lineales que, con seguridad, no contienen ninguna solución factible del SCP. El método de relajación lagrangiana es un método heurístico que introduce las restricciones "complicadas" del problema en la función objetivo a través de multiplicadores de Lagrange. Después, se sigue un proceso iterativo en el que, en cada iteración, se resuelve el problema relajado para unos valores de los multiplicadores. Los valores de los multiplicadores varían de una iteracion a otra de forma que, en cada iteración, se obtienen unas cotas inferior y superior de la función objetivo del MCP que se acercan entre sí, haciendo más probable que las restricciones relajadas se satisfagan en la solución óptima.

Finalmente, se presentan tres modelos propuestos en la literatura relacionados con la localización de bases de ambulancias. El modelo de doble estándar maximiza la demanda cubierta por dos bases de ambulancias en un tiempo t_1, asegurando el cubrimiento de toda la demanda en un tiempo $t_2 > t_1$ y el cubrimiento de una fracción α de la demanda en el tiempo t_1. El modelo de ubicación máxima esperada maximiza la demanda total cubierta esperada abriendo un número dado de bases de ambulancias. En el último modelo se supone que la demanda es una variable aleatoria y se aborda la formulación del

problema mediante Programación Estocástica. En este modelo se minimiza el coste total asegurando que se satisface toda la demanda con probabilidad R.

En el capítulo 2 se aplican algunos modelos del capítulo 1 a la localización de bases de ambulancias en la provincia de Teruel. Para ello, se describe la organización sanitaria de la provincia de Teruel, señalando sus principales características demográficas, y se enumera la infraestructura sanitaria actual. Además, se describe la situación legislativa de las bases de ambulancias de la zona y se presenta la cobertura de ambulancias en la actualidad. En particular, se hace referencia a dos noticias que hablan de la reducción y el mantenimiento del número de bases de ambulancias en la provincia aparecidas en febrero y abril de 2022.

A continuación, se aplica el modelo SCP para responder a la pregunta: ¿cuál es el mínimo número de bases de ambulancias, y en qué municipios han de ubicarse, que se precisan para cubrir toda la población de la provincia de Teruel en 20, 30 y 40 minutos? En el estudio se consideran varios conjuntos de posibles ubicaciones de las bases de ambulancias: los municipios con centro de salud, los municipios con más de 300 habitantes, los municipios con más de 90 habitantes y todos los municipios de la provincia. Además, utilizando optimización multiobjetivo lexicográfica, se responde a la pregunta anterior cuando se minimiza el número de bases de ambulancias a ubicar como objetivo principal y se maximiza el número de bases que se ubican en municipios con centros de salud como objetivo secundario.

El modelo MCP permite identificar en qué municipios de la provincia de Teruel se tendrían que ubicar 19 bases de ambulancias (número de bases de las que dispone actualmente la provincia) para maximizar la población cubierta en 20, 30 y 40 minutos. Se aplica también la optimación multiobjetivo con orden lexicográfico para resolver el problema con el objetivo secundario de maximizar el número de bases de ambulancias en municipios con centros de salud. Finalmente, se aplica el modelo MCP para estimar las pérdidas de cobertura que se hubieran producido si se hubiera llevado a cabo una reducción en el número de bases de ambulancias.

En el último apartado se aplica el modelo de doble estándar a la localización de bases de ambulancias en la provincia con $t_1 = 20$ minutos, $t_2 = 30$ minutos y $p = 23$ bases de ambulancias (número mínimo que garantiza la cobertura total en 30 minutos).

La memoria incluye tres apéndices. El apéndice A contiene un listado de siglas, conjuntos, variables y parámetros utilizados a lo largo de la memoria. El apéndice B detalla las soluciones óptimas proporcionadas por CPLEX y la cobertura de ambulancia que se tiene actualmente en la provincia de Teruel. El apéndice C incluye los códigos CPLEX que se han compilado para obtener las soluciones de los modelos planteados.

Summary

Knowing an optimal location for a set of facilities to meet certain goals is a key issue in many areas. Among others, this problem arises when locating healthcare facilities. Locating facilities can entail important investments and affect the proper operation of a service. Therefore, this problem has been the subject of study in recent decades. This problem is framed within Operations Research, in location problems. In this work, several location problems are studied and some of them are applied to the location of ambulance bases in the province of Teruel. This report consists of two chapters and three annexes, whose contents are presented below.

Chapter 1. Location problems

In this chapter the following location problems are studied: the p-median problem, the p-center problem, the fixed cost facility location problem (FLP), the set covering problem (SCP) and the maximum covering problem (MCP).

The p-median problem consist of determining where p facilities should be located in order to satisfy customers´ demand and minimize total cost. The p-center problem is similar to the p-median problem, but it minimizes the maximum distance between customers and open facilities instead of the total cost.

The FLP consist of determining the number and location of a set of facilities in order to satisfy customers´ demand and minimize the total cost, understood as the sum of the costs of satisfying the demand and the fixed costs of opening the facilities. The FLP has two variants: the single allocation FLP (SFLP) and the multiple allocation FLP (MFLP). In the SFLP it is required that the total demand of each customer is satisfied from a single facility. In the MFLP each customer's demand can be satisfied from multiple facilities. In the MFLP, if the selection of facilities to be opened is given, the allocation of customers to these facilities can be done by solving a transportation problem.

In covering problems, a customer is said to be covered by an open facility if his/her distance to it is less than or equal to a given distance. The SCP minimizes the total cost of opening a set of facilities so that all customers are covered. The MCP maximizes the total covered demand by opening a fixed number of facilities.

After the formulation of these models, and taking into account that covering models will be applied in the remaining of the memory, two of the general resolution methods that have been proposed for these models are described. The branch and bound method applied to the resolution of the SCP and the lagrangian relaxation method applied to the resolution of the MCP.

The branch and bound method solves the linear relaxation of the SCP (RSCP) and, if necessary, it successively divides its set of feasible solutions into smaller, disjoint subsets, and eliminating parts of the feasible region of the successive linear problems that are guaranteed to contain no feasible solution of the SCP.

The lagrangian relaxation method is a heuristic method that introduces the "difficult" constraints of the problem into the objective function through Lagrange multipliers. Next, an iterative process is carried out in which, in each iteration, the relaxed problem is solved for some values of the multipliers. In each iteration, a lower bound and an upper bound of the MCP´s objective function are obtained. The values of the multipliers change from one iteration to another so that, in each iteration, the above bounds are closer to each other and the relaxed constraints are more likely to be satisfied in the optimal solution.

Finally, three models proposed in the literature related to the location of ambulance bases are presented: the double standard model, the maximum expected location covering problem, and a model using Stochastic Programming. The double standard model proposed by Gendreau et al. [5] maximizes the covered demand by two ambulance bases in a time t_1, ensuring the covering of all the demand in a time $t_2 > t_1$ and the covering of a fraction α of the demand in a time t_1. The maximum expected location covering problem proposed by Daskin [3] takes into account that an ambulance is not always available when it is needed. The proposed model maximizes the expected total covered demand by opening a given number of ambulance bases. The last model appears in the work of Beraldi et al. [1] and, in it, demand is assumed to be a random variable and the formulation of the model is approached through Stochastic Programming. In this approach, the deterministic constraints that ensure that all the demand is satisfied are replaced by probabilistic constraints that only guarantee it with a certain probability.

Chapter 2. Application to the location of ambulance bases in the province of Teruel

In this chapter the SCP model, the MCP model and the double standard model are applied to the location of ambulance bases in the province of Teruel. To do this, the healthcare organization of the province of Teruel is described. The Comunidad Autónoma de Aragón is divided into healthcare areas which, in turn, are divided into healthcare zones. The province of Teruel roughly constitutes the healthcare areas of Alcañiz and Teruel. The main demographic characteristics of the province are pointed out. There are a lot of municipalities with few inhabitants and the province lacks large population municipalities. The available healthcare infrastructure is listed. In addition, the legislative situation of the ambulance bases in the area is described and the current ambulance coverage is presented. In particular, a reference to two pieces of news that speak about the possible reduction of the number of ambulance bases in the province that appeared in February and April 2022 is made.

Next, the SCP model is applied to answer the following question: what is the minimum number of ambulance bases, and in which municipalities should they be located, in order to cover the entire population of the province of Teruel in a time T? In the study they are considered as values of T, $T = 20, 30$ and 40 minutes. Furthermore, the following sets of possible locations for the ambulance bases are considered: municipalities with a healthcare center, municipalities with more than 300 inhabitants, municipalities with more than 90 inhabitants, and all municipalities of the province. If bases are allowed to be located in all municipalities, for $T = 20$ minutes 46 ambulance bases are needed, for $T = 30$ minutes 23 ambulance bases are needed and for $T = 40$ minutes 13 ambulance bases are needed.

Because of the fact that using the existing healthcare facilities can lead to a reduction of the costs of locating the bases, the next goal is to answer the previous question when minimizing the number of ambulance bases to be located is the primary objective and maximizing the number of bases located in municipalities with health centers is the secondary objective. To do this, the SCP model is refined by using lexicographic multi-objective optimization.

For economic reasons, it is not always possible to locate as many ambulance bases as it is needed to cover all the population in a time T. The MCP model allows us to identify in which municipalities of the province of Teruel 19 ambulance bases should be located (19 is the current number of bases available in the province) to maximize the covered population in 20, 30 and 40 minutes. It can be seen that, if ambulance bases are allowed to be located in all municipalities, 95.11 % of the population of the province of Teruel can be covered in 20 minutes, 99.89 % of the population can be covered in 30 minutes and the entire population of the province can be covered in 40 minutes. Multi-objective optimization with lexicographic order is also applied to answer the previous question with the secondary objective of maximizing the number of ambulance bases in municipalities with healthcare centers.

The MCP model is also applied to compute the ambulance coverage losses that would have resulted if the number of ambulance bases in the province had been reduced from 19 to 11 (see the pieces of news: [7] and [8]). It can be seen that 10.54 % and 3.19 % of the population of the province would have lost the ambulance coverage in 20 and 30 minutes, respectively. Furthermore, 29.53 % and 30.80 % of the municipalities of the province would have lost the coverage in 20 and 30 minutes, respectively. As a result, we can conclude that the fastest response times as well as the population of municipalities with few inhabitants would have been the most affected by the reduction.

In the last section the double standard model is applied to the location of ambulance bases in the province with $t_1 = 20$ minutes, $t_2 = 30$ minutes and $p = 23$ ambulance bases (minimum number of bases that guarantees the total coverage in 30 minutes). It can be seen that 81.84 % of the population of the province is covered in 20 minutes and 40.73 % of the population of the province is covered in 20 minutes by two bases. In addition, lexicographical multi-objective optimization is applied to introduce as second criterion for the selection of an optimal solution to maximize the number of ambulance bases that are located in municipalities with healthcare center.

This report also includes three annexes. Annex A contains a list of acronyms, sets, parameters and variables. Annex B details the optimal solutions provided by CPLEX and the current ambulance coverage in the province of Teruel. Finally, Annex C includes the CPLEX codes that has been implemented in order to obtain the solutions of the proposed models.

Índice general

Capítulo 1

Problemas de localización

Genéricamente, los problemas de localización consisten en identificar dónde deben ubicarse un conjunto de instalaciones para atender la demanda de un conjunto de clientes y satisfacer algunos objetivos. Esta descripción general se concreta en distintos modelos según sean los objetivos y las restricciones que hayan de satisfacerse.

1.1. Modelización de algunos problemas de localización

En la presente sección se exponen algunos de los modelos básicos que aparecen en el campo de los problemas de localización. Para ello, se han tomado como referencia los libros de Daskin [2], Laporte et al. [6] y Wolsey [10]. Para formular los modelos, se introducen los siguientes conjuntos. Sea $I = \{1,\dots,i,\dots,m\}$ el conjunto de ubicaciones potenciales de las instalaciones y sea $J = \{1,\dots,j,\dots,n\}$ el conjunto de clientes que precisan algún tipo de servicio ofertado desde las instalaciones. Además, se definen los siguientes parámetros. Sea $f_i \geq 0$ el coste fijo por abrir una instalación en i, sea d_j la demanda del cliente j y sea $c_{ij} \geq 0$ el coste por unidad de demanda del cliente j satisfecha desde una instalación ubicada en i.

1.1.1. Problema de la *p*-mediana

El problema de la p-mediana consiste en determinar dónde deben ubicarse p instalaciones con objeto de satisfacer la demanda de los clientes y minimizar el coste total. Para formular el modelo, se definen las variables v_{ij}, que representan la fracción de la demanda del cliente j satisfecha por una instalación ubicada en i, y las variables

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre una instalación en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El modelo asociado al problema de la p-mediana se formula como:

$$\min \quad \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_j c_{ij} v_{ij} \tag{1.1a}$$

sujeto a

$$\sum_{i\in I} v_{ij} = 1, \qquad j \in J \tag{1.1b}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p, \tag{1.1c}$$

$$v_{ij} \leq y_i, \qquad i \in I, j \in J \tag{1.1d}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I \tag{1.1e}$$

$$v_{ij} \geq 0, \qquad i \in I, j \in J. \tag{1.1f}$$

La función objetivo (1.1a) minimiza el coste total. Las restricciones (1.1b) aseguran que la demanda de cada uno de los clientes se satisface. La restricción (1.1c) indica que se han de abrir p instalaciones. Las restricciones (1.1d) garantizan que solo se puede asignar el suministro de demanda a una instalación si esta está abierta. Las restricciones (1.1e) y (1.1f) definen los dominios de las variables decisión.

Es importante señalar que, como en esta versión del modelo las instalaciones no tienen restricción de capacidad, aunque no se exige en la formulación, la demanda de cada cliente puede ser suministrada desde una única instalación, es decir, las variables v_{ij} en una solución óptima son binarias. En efecto, dado el cliente j, si hay una instalación abierta en i tal que $c_{ij} < c_{i'j}$ para toda instalación abierta en i', como no hay restricciones de capacidad en i, toda la demanda de j puede ser satisfecha desde i, es decir, en una solución óptima, $v_{ij} = 1$ y $v_{i'j} = 0$ para todo $i \neq i'$. En el caso de que haya una instalación abierta en i tal que $c_{ij} \leq c_{i'j}$ para toda instalación abierta en i', podemos suponer sin pérdida de generalidad que toda la demanda de j puede ser satisfecha desde i.

1.1.2. Problema del p-centro

El problema del p-centro consiste en determinar dónde deben ubicarse p instalaciones con objeto de satisfacer la demanda de los clientes y minimizar la distancia máxima de los clientes a su instalación abierta más cercana. Este problema es similar al de la p-mediana, pero pretende eliminar casos extremos en el sentido de que una instalación esté a mucha distancia de un cliente al que sirve, aunque, como consecuencia de ello, el coste total pueda ser mayor. Para formular el modelo, se definen los parámetros D_{ij}, que representan la distancia del cliente j a la instalación i y la variable D, que representa la máxima distancia entre los clientes y las instalaciones abiertas. El modelo asociado al problema del p-centro se formula como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & D && && (1.2a)\\
\text{sujeto a} \quad & && && \\
& \sum_{i \in I} v_{ij} = 1, && j \in J && (1.2b)\\
& \sum_{i \in I} y_i = p, && && (1.2c)\\
& v_{ij} \leq y_i, && i \in I, j \in J && (1.2d)\\
& \sum_{i \in I} D_{ij} v_{ij} \leq D, && j \in J && (1.2e)\\
& y_i \in \{0,1\}, && i \in I && (1.2f)\\
& v_{ij} \geq 0, && i \in I, j \in J. && (1.2g)
\end{aligned}
$$

La función objetivo (1.2a) minimiza la distancia máxima entre los clientes y las instalaciones abiertas. Las restricciones (1.2b) aseguran que la demanda de cada uno de los clientes se satisface. La restricción (1.2c) indica que se han de abrir p instalaciones. Las restricciones (1.2d) garantizan que solo se puede asignar el suministro de demanda a una instalación si esta está abierta. Las restricciones (1.2e) junto con (1.2a) aseguran que el valor de la función objetivo es igual al máximo de las distancias entre los clientes y las instalaciones que los atienden. Las restricciones (1.2f) y (1.2g) definen los dominios de las variables decisión.

Al igual que en el problema de la p-mediana, como en esta versión del modelo las instalaciones no tienen restricción de capacidad, aunque no se exige en la formulación, la demanda de cada cliente puede ser suministrada desde una única instalación, es decir, las variables v_{ij} en una solución óptima son binarias. En efecto, dado el cliente j, si hay una instalación abierta en i tal que $D_{ij} < D_{i'j}$ para toda instalación abierta en i', como no hay restricciones de capacidad en i, toda la demanda de j puede ser satisfecha desde i, es decir, en una solución óptima, $v_{ij} = 1$ y $v_{i'j} = 0$ para todo $i' \neq i$. En el caso de que haya una instalación abierta en i tal que $D_{ij} \leq D_{i'j}$ para toda instalación abierta en i', podemos suponer sin pérdida de generalidad que toda la demanda de j puede ser satisfecha desde i.

1.1.3. Problema de ubicación de instalaciones con coste fijo

El problema de ubicación de instalaciones con coste fijo (FLP, por sus siglas en inglés) consiste en determinar el número y la ubicación de un conjunto de instalaciones con objeto de satisfacer la demanda de los clientes y minimizar el coste total, entendido como la suma de los costes de satisfacer la demanda y los costes fijos por abrir las instalaciones. Este problema se diferencia del de la p-mediana en dos aspectos. Por un lado, se tienen en cuenta los costes fijos por abrir las instalaciones. Por otro lado, hay restricciones de capacidad para las instalaciones abiertas, es decir, cada instalación abierta solo puede satisfacer una determinada demanda. Para modelar este problema, introducimos el parámetro adicional q_i, que representa la capacidad máxima de una instalación abierta en i.

Hay dos variantes de este problema, el FLP de asignación única (SFLP), que requiere que la demanda total de cada cliente sea atendida desde una única instalación, y el FLP de asignación múltiple (MFLP), que permite que la demanda de cada cliente se satisfaga desde varias instalaciones. Notemos que no sería necesario hacer esta distinción si no hubiera restricciones de capacidad. Los argumentos que justifican esta afirmación son semejantes a los expuestos al final del problema de la p-mediana. Para modelar el SFLP, se definen las variables

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del cliente } j \text{ es satisfecha por una instalación abierta en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

El modelo asociado al SFLP se formula como:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_j c_{ij} x_{ij} && && (1.3a)\\
\text{sujeto a} \quad & && && \\
& \sum_{i\in I} x_{ij} = 1, && j \in J && (1.3b)\\
& \sum_{j\in J} d_j x_{ij} \le q_i y_i, && i \in I && (1.3c)\\
& y_i \in \{0,1\}, && i \in I && (1.3d)\\
& x_{ij} \in \{0,1\}, && i \in I, j \in J. && (1.3e)
\end{aligned}
$$

La función objetivo (1.3a) indica que hay que minimizar el coste total, que se obtiene por la selección de las instalaciones a abrir y por la asignación de las demandas de los clientes a las instalaciones abiertas. Las restricciones (1.3b) aseguran que la demanda de cada uno de los clientes se satisface desde una única instalación. Las restricciones (1.3c) tienen doble función. Por un lado, aseguran que la capacidad de las instalaciones no se sobrepasa. Por otro lado, evitan que los clientes sean asignados a instalaciones no abiertas. Por último, las restricciones (1.3d) y (1.3e) definen los dominios de las variables decisión.

Como ya se ha indicado, en el modelo MFLP la demanda de cada cliente puede fraccionarse entre las instalaciones abiertas. Por ello, el modelo asociado al MFLP es el formulado en (1.3a)-(1.3e), sustituyendo las variables x_{ij} por las variables v_{ij} introducidas en el apartado 1.1.1 y las restricciones (1.3e) por las restricciones $v_{ij} \geq 0$, $i \in I, j \in J$.

Notar que la parte "difícil" en la resolución de los FLP es la selección de las instalaciones que se van a abrir. Esto se ve fácilmente en el caso de asignación múltiple, donde, si se da el conjunto factible de instalaciones a abrir $S \subset I$, la mejor asignación de clientes dentro de S puede obtenerse resolviendo el siguiente problema de transporte:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in S}\sum_{j\in J} c_{ij} s_{ij} \\
\text{sujeto a} \quad & \\
& \sum_{i\in S} s_{ij} = d_j, \quad j \in J
\end{aligned}
$$

$$\sum_{j \in J} s_{ij} \leq q_i, \quad i \in S$$
$$s_{ij} \geq 0, \qquad i \in S, j \in J,$$

donde la variable s_{ij} denota la cantidad de demanda del cliente j satisfecha por una instalación ubicada en i, es decir, $s_{ij} = v_{ij} d_j$.

1.1.4. Problemas de cubrimiento

En los problemas de cubrimiento, la demanda de un cliente puede ser satisfecha por una instalación solo si esta se encuentra a menos de una distancia dada de él. Cuando alguna instalación del conjunto de instalaciones abiertas cumple esta propiedad, se dice que el cliente está cubierto. Este tipo de problemas será el objeto de estudio de la memoria de ahora en adelante y, en el capítulo 2, se aplicará a la localización de bases de ambulancias. A continuación, se describen los dos tipos generales de problemas de cubrimiento: el problema de cubrimiento de conjuntos y el problema de cubrimiento maximal.

Problema de cubrimiento de conjuntos

El objetivo del problema de cubrimiento de conjuntos (SCP) es minimizar el coste total de abrir un conjunto de instalaciones de forma que todos los clientes estén cubiertos. Además, si todas las instalaciones tienen el mismo coste de apertura, este modelo es equivalente a minimizar el número de instalaciones a abrir para que todos los clientes estén cubiertos. Para formular el modelo, se definen los parámetros

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \text{ puede ser cubierto por una instalación en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde j puede ser cubierto por una instalación en la ubicación i si dicha instalación se encuentra a menos de una distancia dada de j.

El modelo asociado al SCP se formula como:

$$\min \quad \sum_{i \in I} f_i y_i \tag{1.4a}$$

sujeto a

$$\sum_{i \in I} a_{ij} y_i \geq 1, \quad j \in J \tag{1.4b}$$
$$y_i \in \{0, 1\}, \quad i \in I. \tag{1.4c}$$

La función objetivo (1.4a) minimiza el coste total de apertura de las instalaciones. Las restricciones (1.4b) garantizan que cada cliente esté cubierto por, al menos, una instalación. Por último, las restricciones (1.4c) definen el dominio de las variables decisión.

Este tipo de problemas suele tener múltiples soluciones óptimas diferentes, es decir, conjuntos de instalaciones con el mismo coste total mínimo que cubren a todos los clientes. Además, suele ocurrir que, con pocas instalaciones, es posible cubrir un gran porcentaje de la demanda y que, solo abriendo un número alto de instalaciones, se puede conseguir el cubrimiento completo.

Notar que cuando todos los costes de apertura son iguales y, por tanto, se trata de minimizar el número de instalaciones, podemos reducir el tamaño de la matriz $(a_{ij})_{i \in I, j \in J}$. En efecto, sean $i, i' \in I$. Si $a_{ij} \leq a_{i'j}$, $j \in J$, y $a_{ij} < a_{i'j}$ para algún $j \in J$, entonces una instalación en i' cubre a todos los clientes que cubre una instalación en i y a alguno más. Por tanto, es claro que podemos eliminar la fila i de la matriz y hacer $y_i = 0$. Además, si $\sum_{i \in I} a_{ij} = 1$, el cliente j solo puede ser cubierto por una instalación en i. En tal caso, podemos eliminar la fila i de la matriz y hacer $y_i = 1$.

Problema de cubrimiento maximal

El objetivo del problema de cubrimiento maximal (MCP) es maximizar la demanda total cubierta abriendo un número fijo de instalaciones p. Este problema se plantea cuando, en general, por motivos de coste, no es posible ubicar tantas instalaciones como es necesario para cubrir a todos los clientes. Para modelarlo, se introducen las variables

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del cliente } j \text{ es cubierta por alguna instalación abierta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El modelo asociado al MCP se formula como:

$$\max \quad \sum_{j\in J} d_j z_j \tag{1.5a}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i\in I} a_{ij} y_i - z_j \geq 0, \quad j \in J \tag{1.5b}$$

$$\sum_{i\in I} y_i = p, \tag{1.5c}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I \tag{1.5d}$$

$$z_j \in \{0,1\}, \qquad j \in J. \tag{1.5e}$$

La función objetivo (1.5a) maximiza la demanda total cubierta. Las restricciones (1.5b) aseguran que, si no se abre una instalación de entre las que cubren al cliente j, entonces $z_j = 0$. Además, aun cuando se abra alguna de las instalaciones que cubren al cliente j, la variable z_j puede tomar los valores 0 o 1. Sin embargo, como el problema es de máximo, se garantiza que $z_j = 1$. La restricción (1.5c) asegura que se abren p instalaciones. Finalmente, las restricciones (1.5d) y (1.5e) definen el dominio de las variables decisión.

1.2. Métodos de resolución para algunos problemas de cubrimiento

En general, los problemas de cubrimiento se resuelven utilizando relajación lineal o relajación lagrangiana, que son procedimientos generales de resolución de problemas de programación entera ([2], [10]). En esta sección, se desarrollan dichos procedimientos para resolver los problemas de cubrimiento de conjuntos y de cubrimiento maximal, respectivamente.

1.2.1. Método de ramificación y acotación aplicado al problema de cubrimiento de conjuntos

El método de ramificación y acotación resuelve siempre problemas lineales. Para encontrar una solución óptima del SCP, comienza resolviendo su relajación lineal y, si es necesario, va dividiendo sucesivamente su conjunto de soluciones factibles en subconjuntos más pequeños y disjuntos, eliminando, además, partes de la región de factibilidad de los sucesivos problemas lineales que, con seguridad, no contienen ninguna solución factible del SCP. A continuación, se describe el método en detalle.

En primer lugar, se resuelve la relajación lineal del SCP, RSCP. Este es el problema de optimización que se obtiene al sustituir las restricciones (1.4c) por las restricciones $y_i \geq 0$, $i \in I$, en el SCP. Notar que la función objetivo (1.4a) y las restricciones (1.4b) hacen que no sea necesario imponer las restricciones $y_i \leq 1$, $i \in I$. Si el RSCP es no factible, entonces el SCP también es no factible. Si la solución óptima obtenida del RSCP es entera, entonces dicha solución también será la solución óptima del SCP. En otro caso, existe una variable y_{i_0} que toma un valor no entero en dicha solución óptima. Se consideran los dos subproblemas que se obtienen al imponer las restricciones $y_{i_0} = 0$ e $y_{i_0} = 1$ sobre el RSCP, respectivamente. El proceso anterior recibe el nombre de ramificación y genera subproblemas que, inicialmente, se consideran activos. A continuación, se selecciona uno de los subproblemas activos para ser resuelto.

Si su solución óptima es entera, el problema deja de estar activo y el valor de su función objetivo proporciona una cota superior del valor óptimo de la función objetivo del SCP. En otro caso, se determina si necesita ser ramificado. Un problema no necesita ser ramificado si no contiene una solución factible del problema entero "mejor" que una solución factible del problema entero ya encontrada, o si el problema es no factible. Este proceso recibe el nombre de acotación. En estos casos, el problema deja de estar activo. En otro caso, el problema se ramifica, dando lugar a dos nuevos subproblemas activos. El algoritmo continúa seleccionando un nuevo subproblema activo para su resolución y aplicando ramificación y acotación. El algoritmo termina cuando no queda ningún problema activo. Cuando el proceso de ramificación y acotación ha terminado, una solución óptima se obtiene seleccionando la mejor de las soluciones enteras disponibles.

En la literatura se han desarrollado criterios para determinar cuál de los subproblemas activos se selecciona, entre ellos la regla FIFO, la regla LIFO o el subproblema con el mejor valor de la función objetivo, así como para seleccionar la variable que se elige para ramificar (véanse la página 136 de [2] y 122-123 de [10]).

1.2.2. Método de relajación lagrangiana aplicado al problema de cubrimiento maximal

La relajación lagrangiana (LR) es un método heurístico, es decir, no está garantizado que la solución que se obtiene sea óptima. No obstante, la LR proporciona buenas cotas superiores para el valor óptimo de la función objetivo en un problema de máximo, que se pueden integrar en un algoritmo de ramificación y acotación para desarrollar un método exacto.

En el método LR se identifican en primer lugar las restricciones "complicadas", entendiendo estas como las restricciones que, si no estuvieran en el problema, permitirían una resolución más sencilla. A continuación, se construye un problema relajado introduciendo las restricciones "complicadas" en la función objetivo con el uso de multiplicadores de Lagrange. Después, se sigue un proceso iterativo en el que, en cada iteración, se resuelve el problema relajado para unos valores de los multiplicadores. En cada resolución del problema relajado, se utilizan los valores óptimos de las variables decisión y el valor óptimo de la función objetivo de dicho problema para calcular unas cotas inferior y superior del valor óptimo de la función objetivo del problema original. Los valores de los multiplicadores varían de una iteracion a otra de forma que, en cada iteración, las cotas calculadas se acercan entre sí y es más probable que las restricciones relajadas se satisfagan en la solución óptima. Finalmente, cuando se cumple alguno de los criterios de parada considerados, el proceso iterativo termina y, o bien se obtiene una solución óptima del problema, o bien unas cotas inferior y superior del mismo. A continuación, se describe cómo aplicar la LR al MCP.

En primer lugar, se relajan las restricciones (1.5b) y se considera la función objetivo:

$$\sum_{j\in J} d_j z_j + \sum_{j\in J} \lambda_j \left(\sum_{i\in I} a_{ij} y_i - z_j \right) = \sum_{j\in J} (d_j - \lambda_j) z_j + \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij} \lambda_j y_i,$$

donde se denota con λ_j a los multiplicadores de Lagrange asociados a dichas restricciones.

Fijando un valor de los multiplicadores $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, el modelo asociado al problema relajado RMCP es:

$$\max \quad \sum_{j\in J} (d_j - \lambda_j) z_j + \sum_{i\in I} \sum_{j\in J} a_{ij} \lambda_j y_i \tag{1.6a}$$

sujeto a

$$\sum_{i\in I} y_i = p, \tag{1.6b}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I \tag{1.6c}$$

$$z_j \in \{0,1\}, \qquad j \in J \tag{1.6d}$$

Sea $(\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{\lambda}))$ una solución óptima del RMCP, donde $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ representan los vectores de variables y_i y z_j respectivamente. La función objetivo del RMCP evaluada en estos valores de las variables decisión es mayor o igual que la función objetivo del mismo problema evaluada en cualquier otro conjunto de valores de las variables decisión que satisfagan las restricciones (1.6b)-(1.6d). En particular, es mayor o igual que la función objetivo del RMCP evaluada en la solución óptima del MCP, luego

$$\sum_{j\in J} d_j z_j^*(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{j\in J}\lambda_j\left(\sum_{i\in I} a_{ij}y_i^*(\boldsymbol{\lambda}) - z_j^*(\boldsymbol{\lambda})\right) \geq \sum_{j\in J} d_j z_j^* + \sum_{j\in J}\lambda_j\left(\sum_{i\in I} a_{ij}y_i^* - z_j^*\right) \geq \sum_{j\in J} d_j z_j^*, \tag{1.7}$$

donde $(\boldsymbol{y}^*,\boldsymbol{z}^*)$ denota una solución óptima del problema original. Notar que la segunda desigualdad se sigue de que, por las restricciones (1.5b), se tiene que $\sum_{i\in I} a_{ij}y_i^* - z_j^* \geq 0$, y de que $\lambda_j \geq 0$. Observar también que, como consecuencia de (1.7), se tiene que, para cualquier valor no negativo de los multiplicadores de Lagrange, el valor óptimo de la función objetivo del RMCP proporciona una cota superior del valor óptimo de la función objetivo del MCP.

Para valores fijos de los multiplicadores de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$, el RMCP es separable en los siguientes problemas en $\boldsymbol{y}$ y en $\boldsymbol{z}$:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j\in J}(d_j-\lambda_j)z_j \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & z_j \in \{0,1\}, \qquad j\in J. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} a_{ij}\lambda_j y_i \\ \text{sujeto a} \quad & \\ & \sum_{i\in I} y_i = p, \\ & y_i \in \{0,1\}, \qquad i\in I. \end{aligned}$$

Es claro que la solución del problema en $\boldsymbol{z}$ es

$$z_j = \begin{cases} 1 & \text{si } d_j - \lambda_j > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

Para resolver el problema en $\boldsymbol{y}$, basta encontrar los p coeficientes más grandes de los términos y_i en la función objetivo. Esto equivale a encontrar las p ubicaciones que maximizan la demanda total cubierta cuando la demanda del cliente j es λ_j. Así, para resolver el problema, se calcula la demanda total cubierta por todas las ubicaciones candidatas i, y se hace $y_i = 1$ si i es una de las p instalaciones que cubre más demanda, e $y_i = 0$ en otro caso. Por tanto, el problema relajado es fácil de resolver y proporciona directamente una solución con valores enteros.

Los valores de $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ obtenidos al resolver los subproblemas anteriores, probablemente no sean factibles para el MCP porque no satisfagan las restricciones (1.5b). Sin embargo, se puede encontrar una solución factible para el MCP a partir de estos valores de $\boldsymbol{y}$, calculando la demanda total cubierta por cada una de las p instalaciones i tales que $y_i = 1$. La demanda total cubierta por las p instalaciones anteriores es una cota inferior del valor óptimo de la función objetivo del MCP. Sea LB^n el valor de la cota inferior anterior, donde n es el índice del número de iteración en la aplicación del algoritmo, y sea LB la mayor de las cotas inferiores encontradas hasta el momento. Por otro lado, como consecuencia de las desigualdades (1.7), para cualquier valor dado de $\boldsymbol{\lambda}$, el valor óptimo de la función objetivo del RMCP es una cota superior del valor óptimo de la función objetivo del MCP. Sea UB^n el valor de la cota superior anterior en la iteración n-ésima del algoritmo.

Para continuar con la descripción del método, hay que dar un procedimiento para actualizar los multiplicadores de Lagrange. El que se presenta a continuación [2] se conoce como método de optimización del subgradiente. La idea básica es que, para valores fijos de las variables decisión $\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}$, se han de encontrar los valores de los multiplicadores que minimicen la función objetivo del RMCP. En las ecuaciones siguientes, suponemos que los valores de las variables decisión $\boldsymbol{y}^n,\boldsymbol{z}^n$ corresponden a los de una solución óptima del RMCP en la iteración n-ésima. Los valores de λ_j se actualizan según la expresión

$$\lambda_j^{n+1} = \max\left\{0, \lambda_j^n - t^n\left(\sum_{i\in I} a_{ij}y_i^n - z_j^n\right)\right\},$$

donde t^n se calcula como

$$t^n = \frac{\alpha^n(UB^n - LB)}{\sum\limits_{j\in J}\left(\sum\limits_{i\in I} a_{ij}y_i^n - z_j^n\right)^2}.$$

El objetivo en la iteración $(n+1)$-ésima es que, al actualizar los multiplicadores, se consiga que $\sum\limits_{i\in I} a_{ij}y_i^{n+1} - z_j^{n+1} \geq 0,\ j \in J$. Teniendo en cuenta la expresión de λ_j^{n+1}, si $\sum\limits_{i\in I} a_{ij}y_i^n - z_j^n = 0$, entonces los valores de $\boldsymbol{\lambda}$, $\boldsymbol{y}$ y $\boldsymbol{z}$ no cambian. Si $\sum\limits_{i\in I} a_{ij}y_i^n - z_j^n > 0$, entonces $\lambda_j^{n+1} < \lambda_j^n$ y, por tanto, es más probable que $z_j^{n+1} = 1$ y menos probable que, al resolver el problema en $\boldsymbol{y}$ del RMCP en la iteración $(n+1)$-ésima, se seleccionen las instalaciones que cubren a j. Si $\sum\limits_{i\in I} a_{ij}y_i^n - z_j^n < 0$, entonces $\lambda_j^{n+1} > \lambda_j^n$ y, por tanto, es menos probable que $z_j^{n+1} = 1$ y más probable que, al resolver el problema en $\boldsymbol{y}$ del RMCP en la iteración $(n+1)$-ésima, se seleccionen las instalaciones que cubren a j.

El valor de α^n es una constante que cambia de una iteración a otra. En general, comienza con $\alpha^1 = 2$ y su valor se reduce a la mitad si UB^n no ha disminuido en un número dado de iteraciones consecutivas.

El algoritmo termina cuando, o bien se ha hecho un número dado de iteraciones, o bien $LB = UB^n$ o están "suficientemente cerca", o bien α^n es demasiado pequeño. Notar que, en el último caso, los λ_j cambian muy poco entre iteraciones y no es probable que cambios tan pequeños ayuden a resolver el problema.

1.3. Algunos trabajos sobre localización de bases de ambulancias

Una aplicación importante de los problemas de cubrimiento se da en la planificación de la instalación y/o mantenimiento de bases de ambulancias. Determinar una localización óptima de bases de ambulancias es una decisión crítica, ya que permite que estas puedan llegar rápidamente a los pacientes minimizando su tiempo de espera. De ahora en adelante, se usará bases de ambulancias y puntos de demanda o municipios en vez de instalaciones y clientes.

En este ámbito, uno de los primeros trabajos fue el de Toregas et al. [9], cuyo objetivo era encontrar el mínimo número de bases de ambulancias necesarias para cubrir todos los puntos de demanda. El problema fue planteado como un problema de cubrimiento de conjuntos en el que $I = J$. Con posterioridad, se han propuesto en la literatura otras variantes del problema, de entre las que en esta sección presentamos tres diferentes en estructura y objetivos.

1.3.1. Modelo de doble estándar

Se trata de un modelo propuesto por Gendreau et al. [5] que, como característica principal, tiene en cuenta el número de bases que cubren a un municipio simultáneamente. El objetivo es maximizar la demanda del territorio cubierta por dos bases de ambulancias en un tiempo preestablecido, con un número de bases dado. Además, se ha de asegurar el cubrimiento de toda la demanda por alguna base en un tiempo preestablecido mayor que el anterior, y el cubrimiento de un porcentaje de la demanda por alguna base en el tiempo primero.

Para su formulación, se definen los siguientes parámetros. Sea p el número de bases a ubicar, sea p_i el número máximo de bases a ubicar en i, sean $t_1 \leq t_2$ dos tiempos de respuesta máximos de una ambulancia, y sea α la fracción de la demanda total que se ha de cubrir por alguna base en un tiempo t_1. Se define el parámetro

$$a_{ij}^r = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ puede ser cubierto en el tiempo } t_r \text{ por una base ubicada en } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}, \quad r = 1,2,$$

donde j puede ser cubierto en un tiempo t_r por una base en i si el tiempo de conducción de una ambulancia desde i hasta j es menor o igual que t_r. Además, se definen dos conjuntos de variables decisión. Sea n_i el número de bases de ambulancias ubicadas en i, y sea

$$w_{jk}^1 = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ está cubierto en el tiempo } t_1 \text{ por, al menos, } k \in \{1,2\} \text{ bases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde j está cubierto en el tiempo t_1 por, al menos, k bases si hay, al menos, k bases de ambulancias abiertas tales que el tiempo de conducción de una ambulancia desde cada una de ellas a j es menor o igual que t_1.

El modelo de doble estándar se formula como:

$$\max \quad \sum_{j\in J} d_j w_{j2}^1 \tag{1.8a}$$

sujeto a

$$\sum_{i\in I} a_{ij}^2 n_i \geq 1, \qquad j \in J \tag{1.8b}$$

$$\sum_{j\in J} d_j w_{j1}^1 \geq \alpha \sum_{j\in J} d_j, \tag{1.8c}$$

$$\sum_{i\in I} a_{ij}^1 n_i \geq w_{j1}^1 + w_{j2}^1, \qquad j \in J \tag{1.8d}$$

$$w_{j2}^1 \leq w_{j1}^1, \qquad j \in J \tag{1.8e}$$

$$\sum_{i\in I} n_i = p, \tag{1.8f}$$

$$n_i \leq p_i, \qquad i \in I \tag{1.8g}$$

$$n_i \in \mathbb{N}_0, \qquad i \in I \tag{1.8h}$$

$$w_{j1}^1, w_{j2}^1 \in \{0,1\}, \qquad j \in J. \tag{1.8i}$$

La función objetivo (1.8a) maximiza la demanda cubierta en el tiempo t_1 por dos bases de ambulancias. Las restricciones (1.8b) aseguran que todos los puntos de demanda están cubiertos en el tiempo t_2 por una base. La restricción (1.8c) impone que, al menos, una fracción α de la demanda total tiene que ser cubierta en el tiempo t_1. Las restricciones (1.8d) y (1.8e) garantizan que un municipio solo puede ser cubierto por dos bases si está previamente cubierto por una. Las restricciones (1.8f) y (1.8g) indican respectivamente que se tienen ubicar p bases y que en la ubicación i se pueden instalar, como máximo, p_i bases. Por último, las restricciones (1.8h) y (1.8i) definen los dominios de las variables decisión.

1.3.2. Problema de cubrimiento de ubicación máxima esperada

En la práctica, una ambulancia no siempre está disponible cuando se le requiere. Por tanto, al planificar la instalación y/o mantenimiento de sus bases, es interesante tener en cuenta la probabilidad de que todas las ambulancias de una base estén ocupadas. En este caso, la demanda cubierta de un territorio es una variable aleatoria y no una cantidad determinista. En este sentido, el problema de cubrimiento de ubicación máxima esperada propuesto por Daskin [3] introduce en su modelización el concepto de demanda cubierta esperada. En particular, el objetivo de este modelo es maximizar la demanda total cubierta esperada de un territorio en un tiempo preestablecido con un número de bases dado.

Para formular dicho modelo, se introducen los siguientes parámetros. Sea Q la probabilidad de que todas las ambulancias de una base de ambulancias estén ocupadas. Se supone que esta probabilidad es la misma para todas las bases de ambulancias y que el hecho de que dos bases estén ocupadas son sucesos independientes. Sea T el tiempo máximo de respuesta de una ambulancia. Además, se definen las variables decisión

$$w_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ está cubierto por } k \text{ bases de ambulancias} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases},$$

donde j está cubierto por una base de ambulancias si el tiempo de conducción de una ambulancia desde alguna de las bases abiertas hasta j es menor o igual que T.

Notar que la demanda cubierta esperada de un municipio j cubierto por k bases viene dada por $d_j(1-Q^k)$. Por tanto, la contribución de la k-ésima base de ambulancias a este valor esperado es

$$d_j(1-Q^k)-d_j(1-Q^{k-1}) = d_j(1-Q)Q^{k-1}.$$

El modelo asociado al problema de cubrimiento de ubicación máxima esperada se formula como:

$$\max \quad \sum_{k=1}^{p}\sum_{j\in J} d_j(1-Q)Q^{k-1}w_{jk} \tag{1.9a}$$

sujeto a

$$\sum_{k=1}^{p} w_{jk} - \sum_{i\in I} a_{ij}n_i \leq 0, \qquad j\in J \tag{1.9b}$$

$$\sum_{i\in I} n_i = p, \tag{1.9c}$$

$$n_i \in \mathbb{N}_0, \qquad i\in I \tag{1.9d}$$

$$w_{jk}\in\{0,1\}, \qquad j\in J, k\in\{1,\dots,p\}. \tag{1.9e}$$

La función objetivo (1.9a) maximiza la demanda total cubierta esperada. Las restricciones (1.9b) garantizan que el número de bases que cubren a j es menor o igual el número de bases que pueden cubrirlo. La restricción (1.9c) indica que se tienen que ubicar p bases. Por último, las restricciones (1.9d) y (1.9e) definen los dominios de las variables decisión.

1.3.3. Localización de bases de ambulancias mediante Programación Estocástica

En el trabajo de Beraldi et al. [1] se supone que la demanda es una variable aleatoria y se aborda la formulación del problema de instalación de bases de ambulancias mediante la Programación Estocástica. Para ello, en la modelización se sustituyen las restricciones deterministas que aseguran que se satisface la demanda de todos los municipios por unas restricciones probabilísticas que solo lo garantizan con una cierta probabilidad. El objetivo es determinar el número y la ubicación de un conjunto de bases de ambulancias para cubrir, con cierta probabilidad, la demanda de un conjunto de municipios, y minimizar el coste total, entendido como la suma de los costes por ubicar las bases y de los costes por cubrir la demanda.

Para formular el modelo asociado a este problema, se define el parámetro R, que indica la probabilidad con la que se ha de cubrir la demanda de los municipios. Además, se definen los siguientes conjuntos. Sea M_i el conjunto de municipios que pueden ser cubiertos por una base en i, donde una base en i puede cubrir a un municipio j si el tiempo de conducción de una ambulancia entre i y j es menor o igual que T, el tiempo máximo establecido de respuesta. Sea N_j el conjunto de ubicaciones en las que, si se instala una base de ambulancias, esta puede cubrir la demanda del municipio j. En el modelo propuesto, se supone que si se abre una base en i, entonces esta base tiene r_i ambulancias. Por último, se define la variable m_{ij} como el número de ambulancias de una base en i que se utilizan para cubrir la demanda de j. Notemos que, en este modelo, d_j, la demanda de ambulancias del municipio j, es una variable aleatoria cuya función de distribución se denota por F_j. Además, salvo en situaciones catastróficas, puede suponerse que no existe correlación entre la demanda de ambulancias en distintos municipios, luego, es razonable suponer que las variables d_j son independientes. El modelo se formula como:

$$\min \quad \sum_{i\in I} f_i y_i + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} c_{ij}m_{ij} \tag{1.10a}$$

sujeto a

$$\prod_{j\in J} F_j\left(\sum_{i\in N_j} m_{ij}\right) \geq R, \tag{1.10b}$$

$$\sum_{j\in M_i} m_{ij} \leq r_i y_i, \qquad i\in I \tag{1.10c}$$

$$y_i \in \{0,1\}, \qquad i \in I \tag{1.10d}$$

$$m_{ij} \in \mathbb{N}_0, \qquad i \in I, j \in J. \tag{1.10e}$$

La función objetivo (1.10a) minimiza el coste total. La restricción (1.10b) asegura que la demanda de todos los municipios se satisface con probabilidad R. Las restricciones (1.10c) garantizan que, a cada base, no se le demandan más ambulancias de las que tiene. Por último, las restricciones (1.10d) y (1.10e) definen los dominios de las variables decisión.

Para resolver el problema, se reescribe la restricción (1.10b) en términos de, entre otros, el cuantil R de la distribución de d_j y la función de distribución conjunta de $(d_j)_{j \in J}$, obteniéndose una formulación determinista del problema que se puede resolver aplicando los métodos desarrollados para la resolución de problemas de programación entera.

Capítulo 2

Aplicación a la localización de bases de ambulancias en la provincia de Teruel

En el presente capítulo describimos la situación sanitaria actual de la provincia de Teruel en los ámbitos legislativo, demográfico y de infraestructura. A continuación, aplicamos algunos de los modelos de cubrimiento presentados en el capítulo 1 a la localización de bases de ambulancias para satisfacer distintos objetivos. Además, estimamos las pérdidas de cubrimiento producidas por la reducción de un cierto número de bases de ambulancias en la provincia.

2.1. Mapa sanitario de la provincia de Teruel

En esta sección describimos la organización sanitaria de la Comunidad Autónoma de Aragón centrándonos en la provincia de Teruel, explicamos las dos principales características demográficas de la provincia, indicamos la infraestructura sanitaria actual y comentamos la accesibilidad a esta. Además, detallamos la situación legislativa de los servicios médicos de emergencia de la zona y comentamos la cobertura de ambulancia que se tiene en la actualidad.

Los datos utilizados han sido proporcionados por el Instituto Aragonés de Estadística (IAEST). Los datos de población corresponden al año 2020 y los de infraestructuras sanitarias al año 2016. En estos datos, se tiene, entre otros, información sobre la población y el número de tarjetas sanitarias.

2.1.1. Organización sanitaria de la provincia de Teruel

De acuerdo con el DECRETO 168/2021, de 26 de octubre, del Gobierno de Aragón, por el que se aprueba y regula el mapa sanitario de Aragón, la Comunidad Autónoma de Aragón constituye su territorio en demarcaciones geográficas denominadas áreas de salud. Las áreas de salud son el marco de planificación y desarrollo de las actuaciones sanitarias, con la financiación y dotaciones necesarias para prestar los servicios de atención primaria y especializada, asegurando la continuidad del proceso asistencial y la accesibilidad a los servicios por parte de los usuarios. El sistema de salud de Aragón se organiza territorialmente en 8 áreas de salud: Alcañiz, Barbastro, Calatayud, Huesca, Teruel y Zaragoza I, II y III.

Este decreto también establece que las áreas de salud se dividen en zonas de salud. Las zonas de salud son el marco territorial elemental para la prestación de la atención primaria de salud, de acceso directo, con la capacidad de proporcionar una asistencia continuada integral, permanente y accesible a la población. La selección de las zonas de salud se hace teniendo en cuenta factores socioeconómicos, demográficos, laborales, epidemiológicos, culturales, climatológicos, de dotación de vías y medios de comunicación, y las instalaciones sanitarias presentes en cada área.

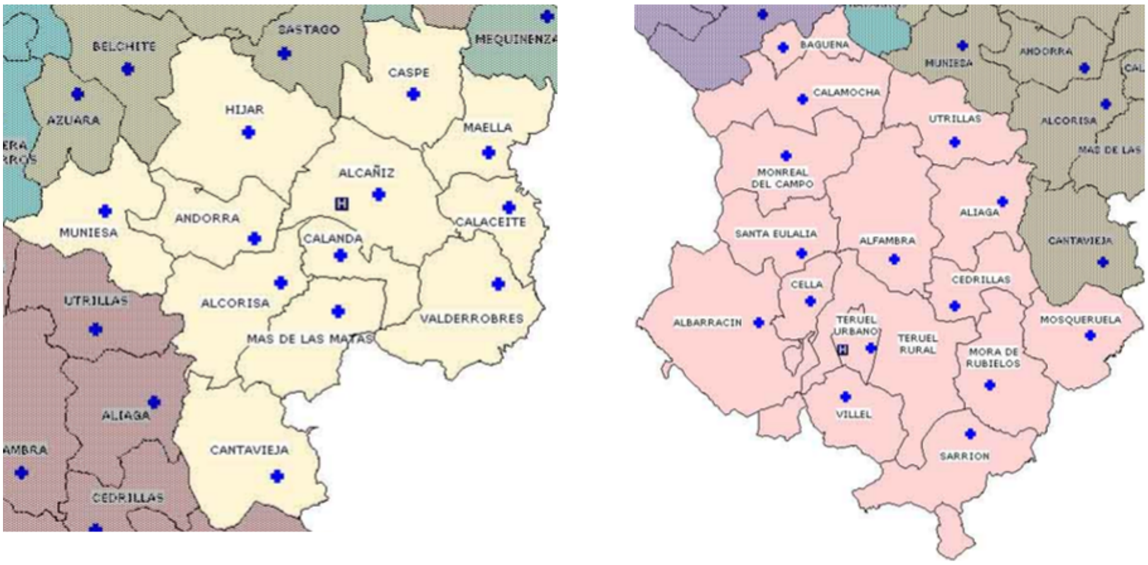

Figura 2.1: Zonas de salud de las áreas de salud de Alcañiz (a la izquierda) y Teruel (a la derecha). Imagen obtenida de [4].

La provincia de Teruel ocupa, aproximadamente, 2 áreas de salud, la de Alcañiz y la de Teruel, las cuales constan de 12 y 16 zonas de salud, respectivamente (véase la figura 2.1). La provincia de Teruel tiene 236 municipios y las áreas de salud de Alcañiz y Teruel, 237 municipios. Es preciso señalar que hay 7 municipios de la provincia de Zaragoza que pertenecen a las áreas de salud anteriores y 6 municipios de la provincia de Teruel que no pertenecen a dichas áreas de salud. Por simplicidad, de ahora en adelante consideraremos únicamente los 237 municipios de las áreas de salud de Alcañiz y Teruel. Además, cuando hablemos de provincia de Teruel nos estaremos refiriendo a las áreas de salud de Alcañiz y Teruel. El conjunto de los 237 municipios tiene una población de 148534 habitantes y un total de 142102 tarjetas sanitarias, por lo que la ratio tarjetas sanitarias / población es de 0.96.

Por simplicidad, nosotros trabajaremos siempre con número de tarjetas sanitarias y, por comodidad, cuando hablemos de población o número de habitantes nos estaremos refiriendo a número de tarjetas sanitarias. Los tiempos de conducción entre municipios se han obtenido a partir del conjunto de datos anterior utilizando la librería *openrouteservice* y la orden *ors_matrix* de *R*.

2.1.2. Características demográficas de la provincia de Teruel

La provincia de Teruel se caracteriza por tener muchos municipios con pocos habitantes. La tabla 2.1 muestra algunos datos relacionados con la población de un conjunto de municipios de la provincia.

Conjunto de municipios	Número de municipios	Porcentaje de municipios	Población	Porcentaje de población
Municipios con más de 10000 habitantes	3	1.27 %	63476	44.67 %
Municipios con más de 1000 habitantes	19	8.02 %	103735	73.00 %
Municipios con más de 300 habitantes	60	25.32 %	126087	88.73 %
Todos los municipios	237	100 %	142102	100 %

Tabla 2.1: Datos relacionados con la población de la provincia de Teruel.

Notemos que un 74.68 % de los municipios tiene menos de 300 habitantes y que 16015 habitantes viven en los 177 municipios con menos de 300 habitantes. La figura 2.2 muestra que la mayoría de los municipios de la provincia tienen poca población. De hecho, en la provincia de Teruel hay solo 4 municipios con entre 800 y 1000 habitantes frente a 156 municipios con menos de 200 habitantes. Otra característica del territorio es que carece de grandes núcleos de población. En efecto, el municipio más poblado es el de Teruel con 36668 habitantes, seguido de Alcañiz con 16463.

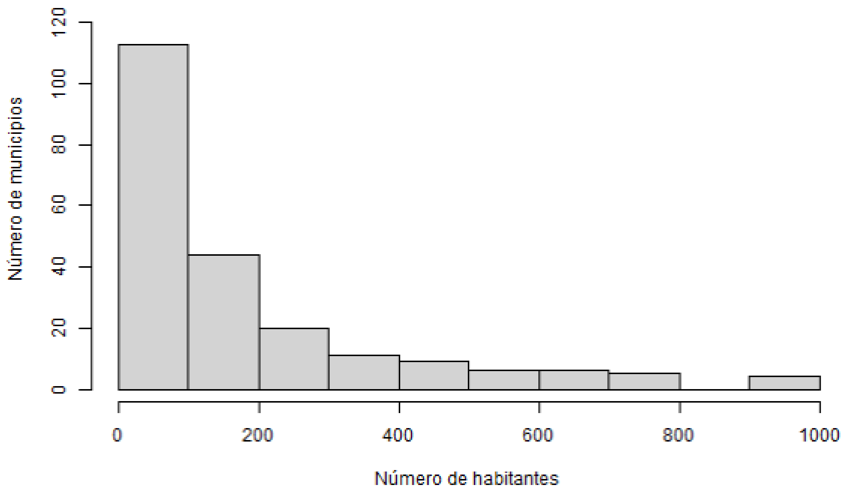

Figura 2.2: Distribución de población de los municipios de la provincia de Teruel con menos de 1000 habitantes.

2.1.3. Infraestructura sanitaria de la provincia de Teruel

En la tabla 2.2 se detallan algunos datos sobre la infraestructura sanitaria de la provincia de Teruel. Notar que solo se suelen hacer fuertes inversiones de infraestructura sanitaria en los grandes núcleos de población (que, como hemos visto, son pocos). Sin embargo, es importante mencionar que un 84.21 % de los municipios con más de 1000 habitantes tiene centro de salud, un 93.58 % de los municipios con menos de 1000 habitantes tiene consultorio y solo 14 municipios no tienen ningún tipo de infraestructura sanitaria.

Tipo de infraestructura	Número de municipios	Porcentaje de municipios	Total
Hospital	2	0.84	4
Centro de salud	27	11.81	28
Consultorio	210	88.61	262
Farmacia	88	37.13	113

Tabla 2.2: Algunos datos sobre la infraestructura sanitaria de la provincia de Teruel.

Dado que hay muchos municipios que no tienen hospital, es interesante conocer el tiempo de conducción desde un municipio hasta su municipio más cercano con hospital. También es interesante hacerse la pregunta anterior, pero con centros de salud o farmacias en vez de hospitales. En la tabla 2.3 se muestran los porcentajes de población y los porcentajes de municipios a menos de 20, 30 y 40 minutos en coche de su municipio más cercano con hospital, centro de salud o farmacia. Notar que si consideramos población en vez de municipios los porcentajes son siempre mayores.

Tipo de infraestructura	a menos de 20 minutos	a menos de 30 minutos	a menos de 40 minutos
Hospital	40.14 / 5.06	57.16 / 18.14	71.60 / 32.91
Centro de salud	92.46 / 62.87	98.41 / 89.87	99.45 / 96.20
Farmacia	98.35 / 84.39	99.60 / 95.78	99.91 / 98.73

Tabla 2.3: Porcentajes de población (a la izquierda) y porcentajes de municipios (a la derecha) a menos de 20, 30 y 40 minutos en coche de su municipio más cercano con hospital, centro de salud o farmacia.

2.1.4. Situación actual de las bases de ambulancias en la provincia de Teruel

Situación legislativa

Al comienzo del año 2022, la provincia de Teruel contaba con 23 ambulancias situadas en los 19 municipios que muestra la figura 2.3. Notemos que las bases de los municipios de Alcañiz y Teruel tienen 3 ambulancias cada una y que las bases del resto de municipios tienen una única ambulancia. El 14 de febrero de 2022 se publicó una noticia [7] en la que se afirmaba que el Gobierno de Aragón había elaborado un nuevo pliego de condiciones del transporte sanitario, el cual se aprobaría el 1 de marzo y supondría la eliminación de las 8 ambulancias de los 8 municipios con círculo rojo en la figura 2.3. El 30 de abril de 2022 se publicó una noticia [8] según la cual se mantendrían las 23 ambulancias inicialmente existentes.

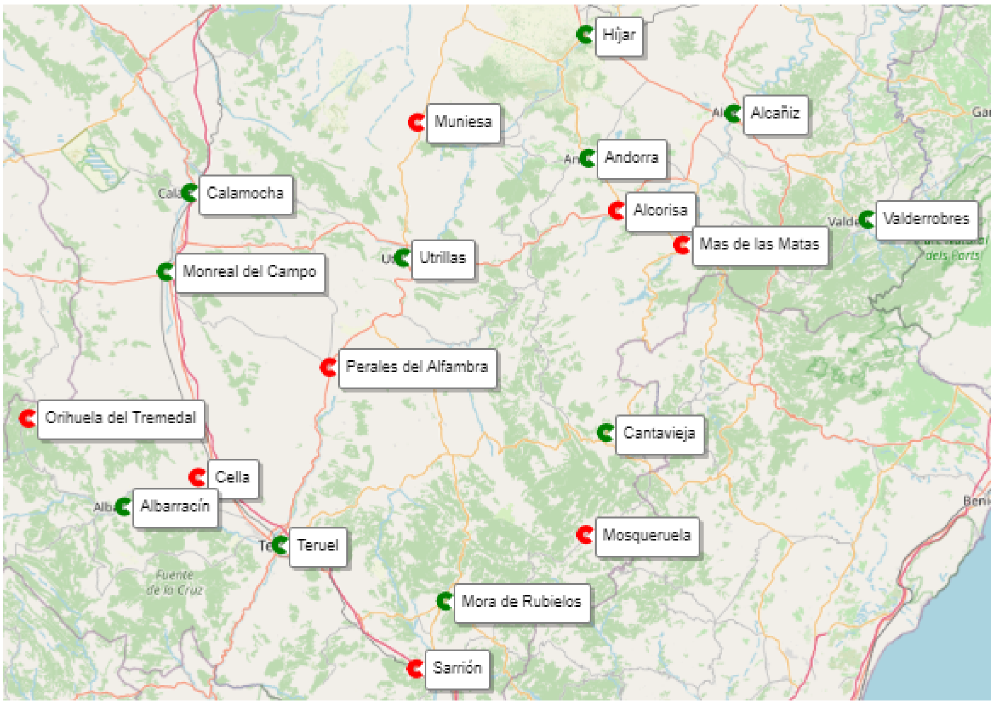

Figura 2.3: Municipios de la provincia de Teruel con base de ambulancias. Los círculos rojos representan los municipios en los que se pretendía eliminar las bases y los círculos verdes los municipios cuyas bases habrían continuado.

Conviene señalar que Orihuela del Tremedal y Perales del Alfambra son los únicos municipios con base de ambulancias que no tienen centro de salud. Además, Albarracín, Cantavieja, Mosqueruela, Muniesa, Orihuela del Tremedal y Perales del Alfambra son los únicos municipios con base de ambulancias y menos de 1000 habitantes, y Perales del Alfambra es el único con menos de 300 habitantes. Por otra parte, en la provincia hay 10 municipios con centro de salud que no tienen base de ambulancias y 6 municipios de más de 1000 habitantes que tampoco tienen base de ambulancias.

Notar que las ambulancias tienen diferentes categorías (Ambulancia Convencional, Soporte Vital Básico, Unidad Móvil de Emergencia y Uvi Móvil), pero por simplicidad, nosotros no haremos dicha distinción. Además, también por simplicidad, en el trabajo se estudia la localización de bases de ambulancias sin especificar el número de ambulancias que podrían instalarse. Por tanto, en la actualidad, la provincia de Teruel tiene 19 bases de ambulancias que podrían haberse reducido a 11 con la modificación que se proponía. De ahora en adelante, y salvo que se indique lo contrario, consideraremos las 19 bases de ambulancias.

Cobertura de ambulancia de la provincia de Teruel en la actualidad

La tabla 2.4 muestra algunos datos de cobertura de ambulancia que se tienen actualmente en la provincia de Teruel.

	20 minutos	30 minutos	40 minutos
Porcentaje de población cubierta en	53.98	92.70	95.34
Porcentaje de municipios cubiertos en	54.85	81.86	94.09

Tabla 2.4: Porcentajes de población y porcentajes de municipios cubiertos en 20, 30 y 40 minutos que se tienen actualmente en la provincia de Teruel.

La figura 2.4 muestra un histograma con los tiempos de conducción desde cada municipio a su base de ambulancias más cercana. Puede señalarse que Abejuela es el municipio al que más tarda en llegar una ambulancia, aproximadamente 61 minutos, siendo su base más cercana la del municipio de Sarrión. La distancia entre Abejuela y Sarrión es de 39 kilómetros, por lo que el alto tiempo de conducción puede dar una idea de las dificultades de la red de carreteras de la zona.

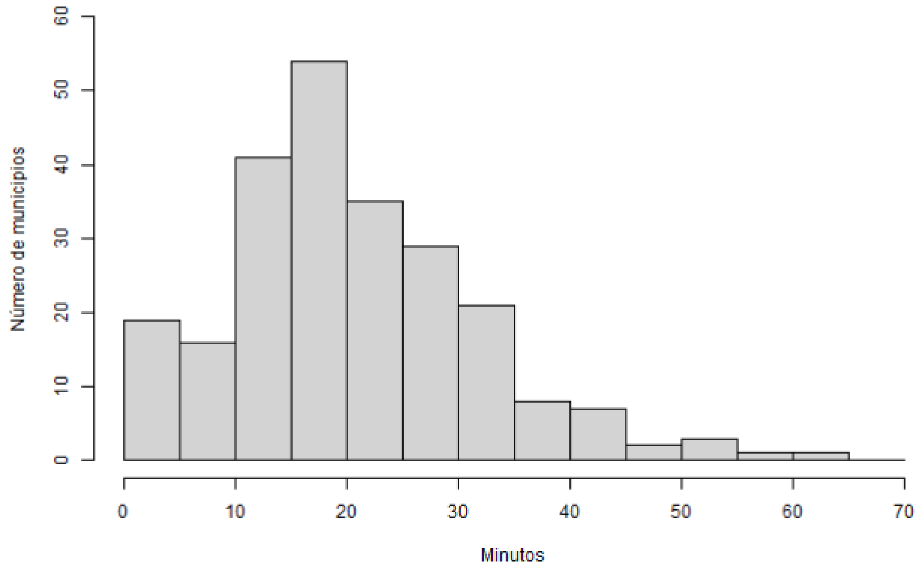

Figura 2.4: Distribución de los tiempos de conducción desde cada municipio a su base de ambulancias más cercana.

2.2. Estudio sobre la posible localización de bases de ambulancias en la provincia de Teruel

En la presente sección vamos a aplicar algunos de los modelos formulados en el capítulo 1 para resolver ciertos problemas relacionados con la ubicación de ambulancias en la provincia de Teruel. Todos los problemas considerados a continuación han sido resueltos utilizando la versión 20.1.0 de *IBM ILOG CPLEX Optimization Studio* con las configuraciones predeterminadas y desde un ordenador *PC Intel Core i7-6500U* con 2.50 GHz, 8.00 GB de RAM y Windows 10 64-bits como sistema operativo. Los códigos CPLEX de todos los modelos resueltos están descritos en el apéndice C.

2.2.1. Aplicación del modelo SCP

El primer problema que nos planteamos es dar respuesta a la siguiente pregunta: ¿cuál es el mínimo número de bases de ambulancias, y en qué municipios han de ubicarse, que se precisan para cubrir toda la población de la provincia de Teruel en un tiempo T? El estudio se ha realizado tomando $T = 20, 30$ y 40 minutos. El problema planteado es un SCP en el que todas las instalaciones tienen el mismo coste de apertura.

Considerando como posibles ubicaciones de las bases de ambulancias los municipios con centros de salud (un total de 27 municipios), el problema no es factible para ninguno de los tres tiempos propuestos. Esto es debido a que el tiempo de conducción desde, por ejemplo, Abejuela hasta su municipio con centro de salud más cercano es de, aproximadamente, 61 minutos.

Con el objetivo de conseguir que el problema sea factible, se ha ampliado el conjunto de posibles ubicaciones de las bases añadiendo los municipios con más de 300 habitantes (un total de 63 municipios), pero de nuevo no es factible para ninguno de los tres tiempos propuestos. Abejuela (41 habitantes) está a 47 minutos de Manzanera, su municipio más cercano de entre los seleccionados. Notemos que solo cuando el conjunto de posibles ubicaciones de las bases son los municipios con más de 90 habitantes (un total de 132 municipios) se consigue que el problema sea factible para $T = 40$ minutos. En la solución óptima proporcionada por CPLEX, que se detalla en el apéndice B, hay que ubicar 13 bases de ambulancias.

Finalmente, permitiendo que se puedan ubicar bases de ambulancias en todos los municipios, se garantiza que el problema sea factible para los tres valores de T. Para $T = 20$ minutos se precisan 46 bases de ambulancias, para $T = 30$ minutos se precisan 23 bases de ambulancias y para $T = 40$ minutos se precisan 13 bases de ambulancias. La figura 2.5 muestra una solución óptima para $T = 30$ minutos. La superficie color salmón representa el área cubierta por alguna base de ambulancias en 30 minutos o menos, los circulos negros representan los municipios de la provincia de Teruel y los círculos rojos representan los municipios en los que se ubica una base de ambulancias.

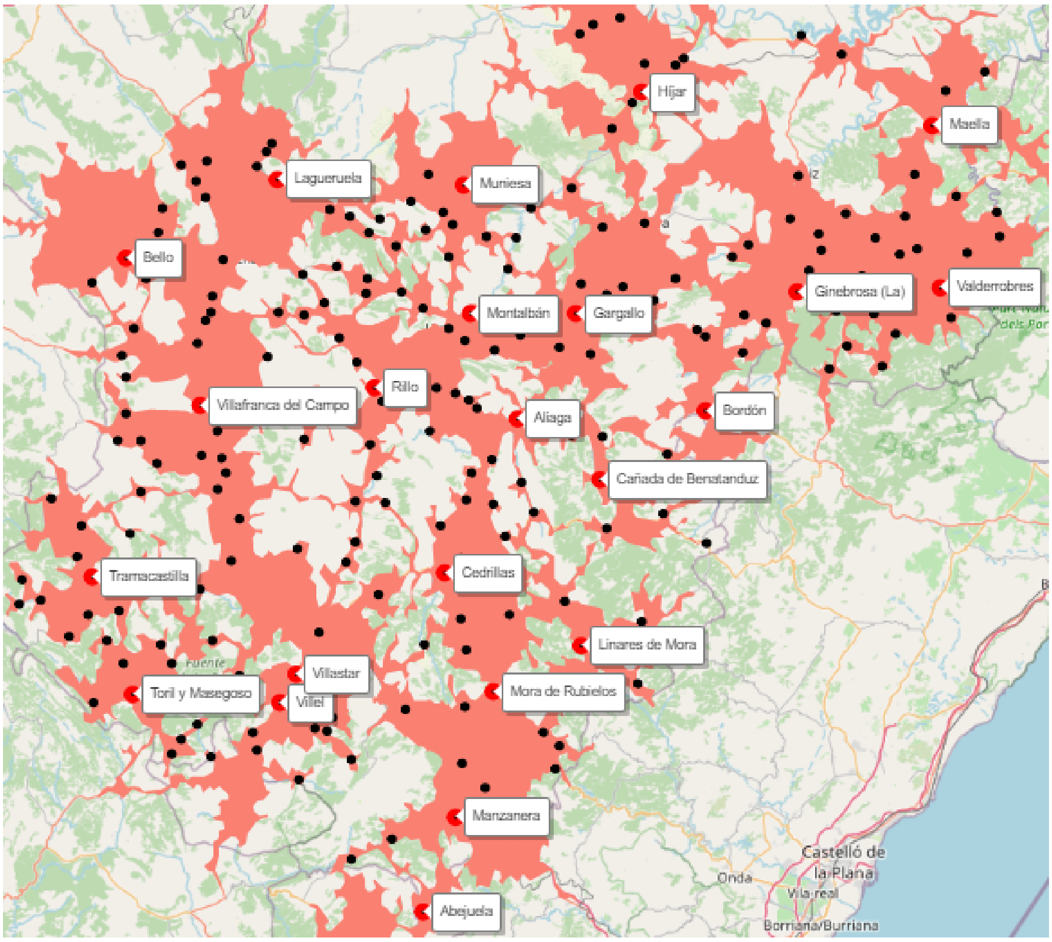

Figura 2.5: Una solución óptima del SCP para $T = 30$ minutos con todos los municipios como posibles ubicaciones de las bases de ambulancias.

Para cubrir toda la población de la provincia de Teruel en 30 minutos se precisa ubicar un mínimo de 23 bases de ambulancias. Notar que, de entre todos los municipios, solo 4 tienen base de ambulancias en la actualidad (Híjar, Mora de Rubielos, Muniesa y Valderrobres), por tanto, la solución propuesta puede no ser viable por motivos de traslado de infraestructura y personal. Notemos también que, garantizar la atención en, a lo sumo, 30 minutos supone un incremento de 4 bases de ambulancias en la provincia, lo que puede no ser asumible económicamente.

Por otro lado, esta solución incluye 6 municipios con menos de 100 habitantes, lo que en la práctica puede hacer difícil implementar esta solución. Como ya se ha indicado, los problemas de cubrimiento, en general, tienen múltiples soluciones óptimas. Por tanto, a continuación, nos planteamos determinar una solución óptima que presente ciertas características que pueden ser deseables desde el punto de vista de su implementación en la práctica.

Refinamiento del modelo SCP utilizando optimización multiobjetivo lexicográfica

Al ubicar bases de ambulancias, parece razonable hacerlo en municipios con centro de salud, ya que estos cuentan con infraestructura sanitaria que puede aprovecharse. Por ejemplo, un centro de salud puede albergar parte del material y del personal del servicio de emergencias, reduciendo así los costes de instalación y mantenimiento de la base. De esta forma, nuestro siguiente objetivo será responder a la pregunta: ¿cuántas bases de ambulancias y en qué municipios han de ubicarse para cubrir toda la población de la provincia de Teruel en un tiempo T, minimizando las bases que se ubican como objetivo prioritario y maximizando las que lo hacen en municipios con centro de salud como objetivo secundario? Para dar respuesta a esta pregunta utilizaremos la optimización multiobjetivo con un orden lexicográfico. Consideramos $T = 30$ minutos y permitimos que se puedan instalar bases de ambulancias en todos los municipios de la provincia.

Anteriormente, se ha resuelto la primera etapa en la resolución del problema multiobjetivo desde la perspectiva lexicográfica, habiéndose obtenido que se precisan 23 bases de ambulancias para cubrir la población de la provincia de Teruel en 30 minutos. Para resolver la segunda etapa en la que el objetivo es maximizar el número de bases de ambulancias en municipios con centro de salud, se introduce el conjunto I_0 que incluye los municipios con centro de salud y las variables

$$y_i^{cs/ncs} = \begin{cases} 1 & \text{si se abre una base de ambulancias en el municipio con/sin centro de salud } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

El modelo que se plantea es:

$$\max \quad \sum_{i \in I_0} y_i^{cs} \tag{2.1a}$$

$$\text{sujeto a}$$

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} y_i^{cs} + \sum_{i \notin I_0} a_{ij} y_i^{ncs} \geq 1, \quad j \in J \tag{2.1b}$$

$$\sum_{i \in I_0} y_i^{cs} + \sum_{i \notin I_0} y_i^{ncs} = 23, \quad i \in I \tag{2.1c}$$

$$y_i^{cs} \in \{0,1\}, \quad i \in I \tag{2.1d}$$

$$y_i^{ncs} \in \{0,1\}, \quad i \in I. \tag{2.1e}$$

La función objetivo (2.1a) maximiza el número de bases que se ubican en municipios con centros de salud. Las restricciones (2.1b) aseguran que todos los municipios de la provincia están cubiertos en 30 minutos. La restricción (2.1c) impone que se ubiquen 23 bases de ambulancias. Por último, las restricciones (2.1d) y (2.1e) definen los dominios de las variables decisión.

Implementando este modelo en CPLEX, obtenemos una solución óptima en la que 14 de las 23 bases que se ubican lo hacen en municipios con centro de salud (véase la figura 2.6). Notar que, en la solución proporcionada anteriormente (figura 2.5), solo 8 de las 23 bases se ubicaban en municipios con centro de salud.

Notemos que, en la solución óptima, Alcañiz y Teruel no disponen de base de ambulancias. Imponiendo que se ubiquen bases en ambos municipios, se llega a un problema no factible en el que no es posible alcanzar la cobertura total con 23 bases de ambulancias en 30 minutos. Si, desde el punto de vista operativo, se desea que tengan base, se pueden instalar en estos las cuatro ambulancias que no han sido consideradas en el estudio.

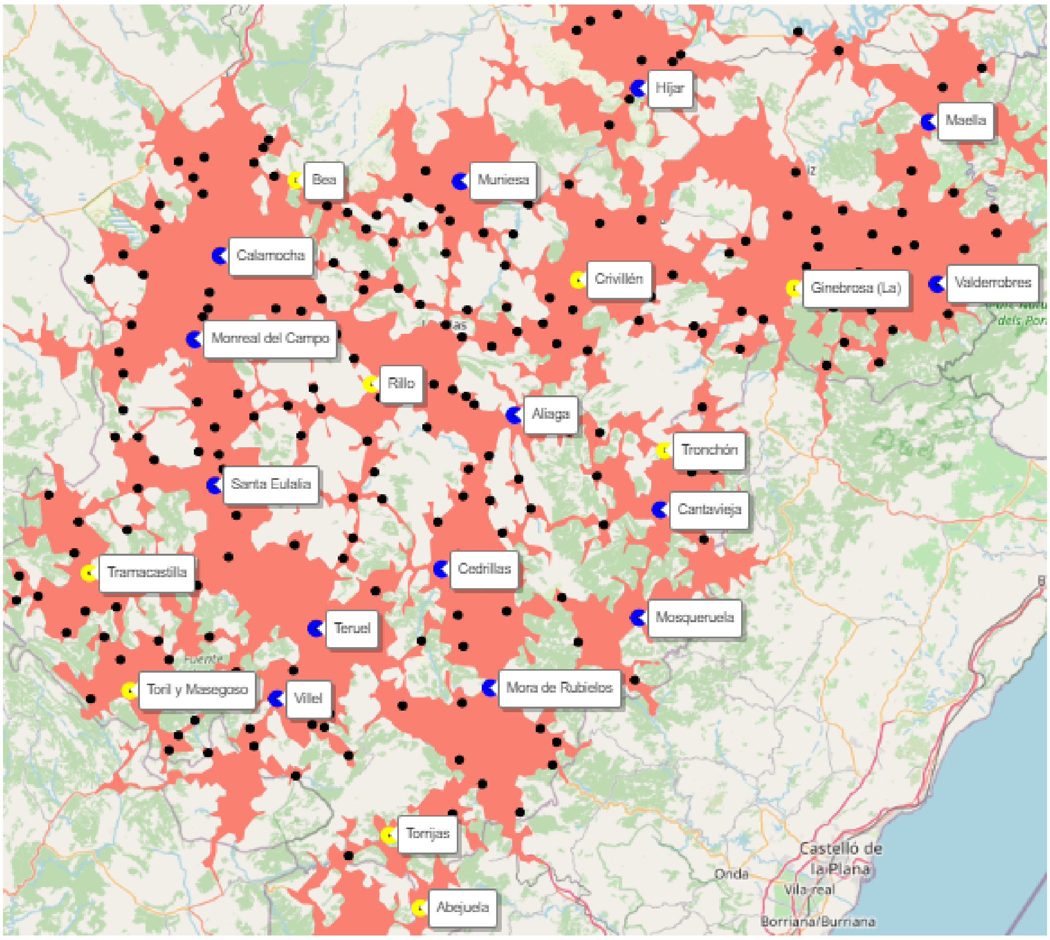

Figura 2.6: Una solución óptima del SCP para $T = 30$ minutos con todos los municipios como posibles ubicaciones de las bases de ambulancias y en la que se maximizan las bases ubicadas en municipios con centro de salud. Los circulos azules representan los municipios en los que se ubica una base de ambulancia y hay centro de salud, y los círculos amarillos, los municipios en los que se ubica una base, pero no hay centro de salud.

La optimización multiobjetivo lexicográfica puede aplicarse para obtener asignaciones de bases de ambulancias con otros objetivos. Por ejemplo, puede maximizarse como objetivo secundario el número de bases que se ubican en municipios con base de ambulancias en la actualidad, con más de un cierto número de habitantes, etc.

2.2.2. Aplicación del modelo MCP

Como ya se ha comentado, en general por motivos presupuestarios, no siempre será posible ubicar las bases de ambulancias necesarias para cubrir toda la población en un tiempo determinado. Por tanto, de forma natural surge el interés en maximizar la población cubierta con un número de bases prefijado. En la actualidad, la provincia de Teruel tiene 19 bases de ambulancias. Por ello, a continuación, nos planteamos identificar en qué municipios de la provincia tendríamos que ubicar 19 bases de ambulancias para maximizar la población cubierta en un tiempo T. Como en la sección anterior, consideraremos $T = 20, 30$ y 40 minutos. En la tabla 2.5 se muestran los porcentajes de cubrimiento según el valor de T

y la selección del conjunto I de posibles ubicaciones de las bases de ambulancias, obtenidos al resolver el modelo MCP correspondiente.

I / T	20 minutos	30 minutos	40 minutos
Municipios con centro de salud	92.09	98.67	99.63
Municipios con centro de salud o más de 300 habitantes	93.67	99.19	99.92
Todos los municipios	95.11	99.89	100

Tabla 2.5: Porcentajes de cubrimiento de la población de la provincia de Teruel según el valor de T y la selección del conjunto I de posibles ubicaciones de las bases de ambulancias.

Como era de esperar, el porcentaje de cubrimiento crece al flexibilizar la selección de los municipios en los que se pueden ubicar bases de ambulancias. En la figura 2.7 se muestra la solución óptima para $T = 30$ minutos y todos los municipios como posibles ubicaciones de las bases de ambulancias.

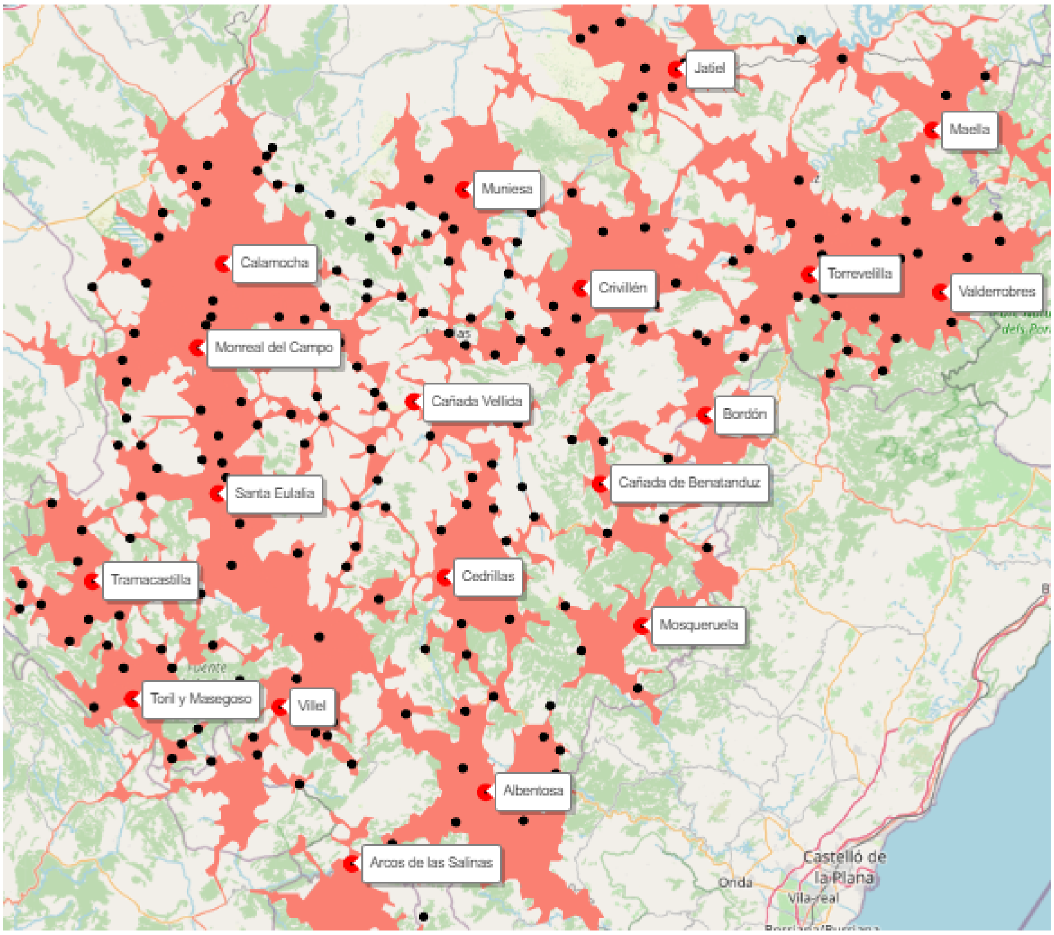

Figura 2.7: Una solución óptima del MCP con $T = 30$ minutos, 19 bases a ubicar y conjunto de posibles ubicaciones de las bases de ambulancias todos los municipios.

Notemos que con $T = 30$ minutos y 19 ambulancias, el máximo porcentaje de cubrimiento de población es 99.89 %. Ya se vio en el apartado 2.2.1 que para cubrir toda la población en ese tiempo se necesitaban 23 bases de ambulancias. Es decir, cubrir un 0.11 % adicional precisa ubicar 4 bases de ambulancias más. Como ya se indicó al introducir el modelo MCP, este puede ser más realista que el SCP ya que permite conocer el grado de cubrimiento al variar el número de bases y, por tanto, permite al decisor determinar qué número de bases puede resultar razonable. Si, por ejemplo, se considera inasumible instalar bases de ambulancias en más de 19 municipios, entonces este modelo indica dónde instalarlas para maximizar la población cubierta. De hecho, con la solución óptima mostrada en la figura 2.7 se dejan de cubrir 10 municipios. Notemos también que las características de Abejuela precisan que, para cubrir este municipio con 41 habitantes en 30 minutos, necesariamente haya que instalar una base en él.

Refinamiento del modelo MCP utilizando optimización multiobjetivo lexicográfica

Como se ha hecho en el modelo SCP, a continuación, se va a considerar el modelo MCP con $T = 30$ minutos y 19 bases de ambulancias con el objetivo secundario de maximizar el número de bases que se ubican en municipios con centro de salud. Con la notación introducida en el apartado 2.2.1 y, teniendo en cuenta que la población cubierta en el modelo MCP es de 141940 habitantes, el modelo a resolver es:

$$\max \quad \sum_{i \in I_0} y_i^{cs} \tag{2.2a}$$

sujeto a

$$\sum_{i \in I_0} a_{ij} y_i^{cs} + \sum_{i \notin I_0} a_{ij} y_i^{ncs} - z_j \geq 0, \quad j \in J \tag{2.2b}$$

$$\sum_{i \in I_0} y_i^{cs} + \sum_{i \notin I_0} y_i^{ncs} = 19, \tag{2.2c}$$

$$\sum_{j \in J} d_j z_j = 141940, \quad i \in I \tag{2.2d}$$

$$y_i^{cs} \in \{0,1\}, \quad i \in I \tag{2.2e}$$

$$y_i^{ncs} \in \{0,1\}, \quad i \in I \tag{2.2f}$$

$$z_j \in \{0,1\}, \quad j \in J. \tag{2.2g}$$

La función objetivo (2.2a) maximiza el número de bases de ambulancias en centros de salud. Las restricciones (2.2b) aseguran que, si no se abre una base de entre las que pueden cubrir al municipio j, entonces $z_j = 0$. En otro caso, $z_j = 1$. La restricción (2.2c) asegura que se abren 19 instalaciones. La restricción (2.2d) garantiza que se cubren 141940 habitantes. Por último, las restricciones (2.2e), (2.2f) y (2.2g) definen los dominios de las variables decisión. La solución óptima indica que se pueden ubicar 11 bases en municipios con centro de salud, frente a las 9 que lo hacían en la solución de la figura 2.7. En este modelo tampoco es posible imponer que se ubiquen bases de ambulancias en Alcañiz y Teruel ya que, si se hace, se llega a un problema no factible en el que no es posible alcanzar la cobertura de 141940 habitantes.

2.2.3. Aplicación del modelo MCP para la estimación de las pérdidas de cubrimiento por reducción del número de bases de ambulancias

En este apartado, se van a determinar las pérdidas de cubrimiento de población y de municipios en $T = 20, 30$ y 40 minutos que se hubieran producido en la provincia de Teruel si se hubieran eliminado las 8 bases que proponía el pliego de marzo. La tabla 2.6 muestra, para cada valor de T, el porcentaje de población cubierta y de municipios cubiertos según haya 19 u 11 bases de ambulancias en los municipios que se indican en la figura 2.3. Observamos que los porcentajes de población cubierta son mayores que los de municipios cubiertos en todos los casos.

Número de bases / T	20 minutos	30 minutos	40 minutos
19	82.35 / 54.85	94.95 / 81.43	96.96 / 93.67
11	71.81 / 25.32	91.76 / 50.63	96.09 / 73.84

Tabla 2.6: Porcentajes de población cubierta (a la izquierda) y de municipios cubiertos (a la derecha) en 20, 30 y 40 minutos según haya 19 u 11 bases de ambulancias en los municipios que se indican en la figura 2.3.

La tabla 2.7 resume las pérdidas de cubrimiento de población y de municipios en 20, 30 y 40 minutos que hubiera supuesto la reforma. Notar que las pérdidas de cubrimiento de municipios son mayores que las de cubrimiento de población en todos los casos. Además, las pérdidas de población cubierta disminuyen con el tiempo máximo de respuesta, mientras que esto no ocurre cuando trabajamos con municipios. Por otro lado, de esta última tabla podemos deducir que los porcentajes de población cubierta y de municipios cubiertos no están directamente relacionados. En efecto, la reforma hubiera supuesto que un 29.53 % de los municipios hubieran perdido la cobertura en 20 minutos, pero ese 29.53 % de los municipios engloba a un 10.54 % de la población. Sin embargo, un 19.83 % de los municipios hubiera perdido la cobertura en 40 minutos, pero ese porcentaje de municipios representa solo un 0.87 % de la población de la provincia de Teruel.

Pérdida de cubrimiento	Número de habitantes	Porcentaje de población	Número de municipios	Porcentaje de municipios
En 20 minutos	14975	10.54	70	29.53
En 30 minutos	4525	3.19	73	30.80
En 40 minutos	1127	0.87	47	19.83

Tabla 2.7: Pérdidas de cubrimiento de población y de municipios en 20, 30 y 40 minutos que se hubieran producido con el pliego de marzo.

A modo ilustrativo, la figura 2.8 muestra la superficie cubierta en 30 minutos con las 19 bases de ambulancias y la superficie que se habría dejado de cubrir en 30 minutos si hubiera continuado la reforma.

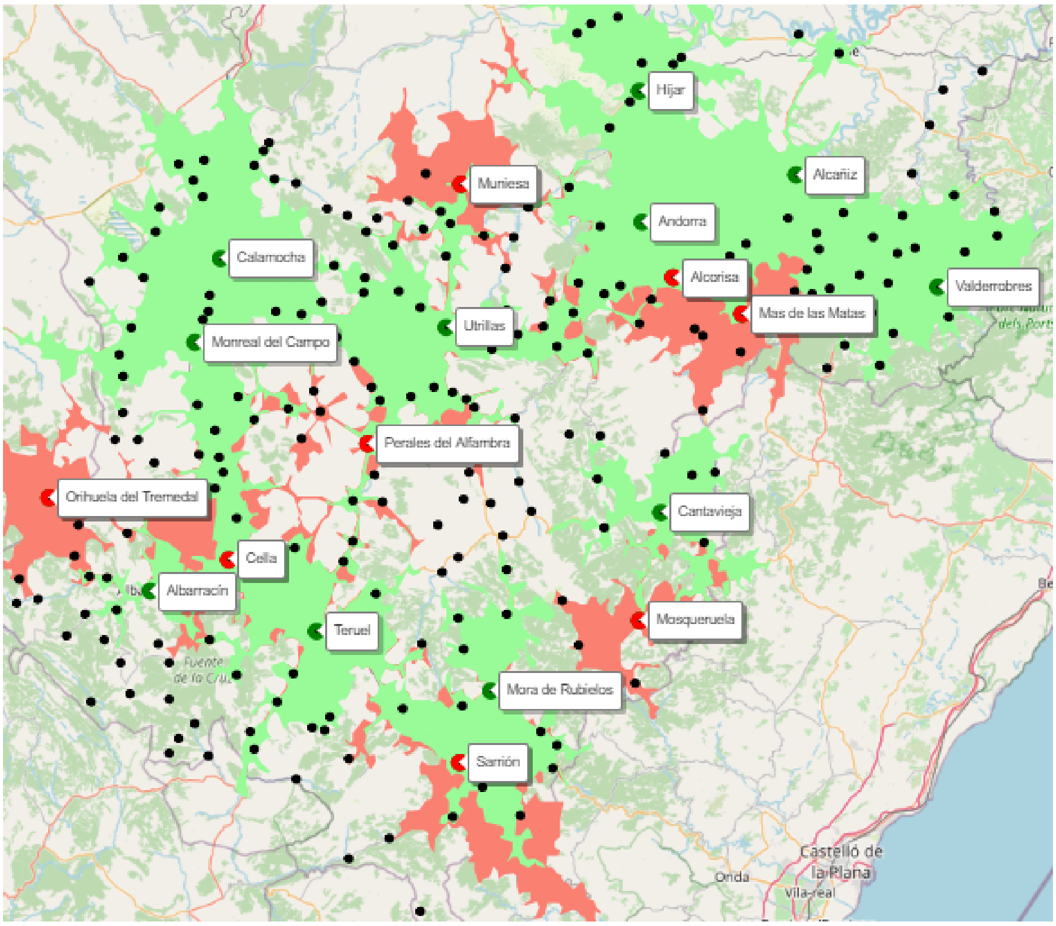

Figura 2.8: Comparativa del área cubierta con las 19 bases de ambulancias que hay en la actualidad frente a las 11 bases que habrían continuado si se hubiera implantado el pliego. La superficie en color verde pálido representa el área cubierta por las 11 bases anteriores, mientras que la superficie en color salmón representa el área que se cubre con las 19 ambulancias y que se habría dejado de cubrir al eliminar las 8 bases que proponía la reforma.

Como conclusión, podemos decir que las mayores pérdidas de cubrimiento de población se hubieran producido para un tiempo de respuesta de 20 minutos, mientras que para un tiempo de respuesta de 40 minutos las pérdidas hubieran sido menores. Teniendo en cuenta que el tiempo de respuesta es clave en muchas ocasiones cuando se llama a una ambulancia, esta pérdida de cobertura en el tiempo más rápido de respuesta podría deteriorar gravemente la calidad del servicio dado por las bases de ambulancias en la zona. También es importante destacar que casi un tercio de los municipios de la provincia hubiera perdido la cobertura de ambulancia en 20 y 30 minutos. Este dato nos indica que la población de los municipios con menos habitantes hubiera sido la más afectada por la reforma. Teniendo en cuenta que la provincia de Teruel se está despoblando, en parte, por el éxodo rural a las grandes ciudades, un deterioro en la cobertura de ambulancia podría acelerar dicho proceso de despoblación. Además, la población de los pequeños municipios de la provincia suele estar constituida en su mayoría por personas de una edad avanzada. Es bien sabido que, esta parte de la población, requiere, en general, más atención sanitaria que el resto, por tanto, con el pliego se estaría perjudicando al sector más vulnerable en el sentido sanitario.

En el apéndice B se detallan los municipios de la provincia Teruel que no están cubiertos en 20, 30 y 40 minutos en la actualidad, así como el número exacto de habitantes y de municipios cubiertos.

2.2.4. Aplicación del modelo de doble estándar

En este apartado se va a aplicar el modelo de doble estándar presentado en el apartado 1.3.1. Se ha considerado $t_1 = 20$ minutos, $t_2 = 30$ minutos y $p = 23$ bases de ambulancias ya que este es el número mínimo que garantiza la cobertura total en 30 minutos. Dadas las características demográficas de la provincia, se ha considerado $\alpha = 0.8$, es decir, al menos un 80 % de la problación ha de cubrirse en 20 minutos. Se ha tomado como conjunto I de posibles ubicaciones de las bases de ambulancias el conjunto de todos los municipios. Además, como en la actualidad a lo sumo hay 3 ambulancias en una base, se ha tomado $p_i = 3$ para todo i.

La figura 2.9 muestra la solución óptima proporcionada por CPLEX al resolver el problema. Las superficies azul y salmón representan las áreas cubiertas por alguna base en 20 y 30 minutos, respectivamente. Las zonas azules más oscuras representan el cubrimiento por varias bases en 20 minutos. El 81.48 % de la población (115783 habitantes) se cubre en 20 minutos y el 40.73 % (57881 habitantes) se cubre por dos bases en 20 minutos.

Refinamiento del modelo de doble estándar utilizando optimización multiobjetivo lexicográfica

Como ya se ha hecho con los modelos SCP y MCP, si se introduce como segundo criterio para la selección de una solución óptima el de maximizar el número de bases de ambulancias que se ubican en municipios con centro de salud, el modelo formulado es:

$$\max \quad \sum_{i\in I_0} n_i^{cs} \tag{2.3a}$$

sujeto a

$$\sum_{i\in I_0} a_{ij}^2 n_i^{cs} + \sum_{i\notin I_0} a_{ij}^2 n_i^{ncs} \geq 1, \qquad j \in J \tag{2.3b}$$

$$\sum_{j\in J} d_j w_{j1}^1 \geq 0.8 \sum_{j\in J} d_j, \tag{2.3c}$$

$$\sum_{i\in I_0} a_{ij}^1 n_i^{cs} + \sum_{i\notin I_0} a_{ij}^1 n_i^{ncs} \geq w_{j1}^1 + w_{j2}^1, \quad j \in J \tag{2.3d}$$

$$w_{j2}^1 \leq w_{j1}^1, \qquad j \in J \tag{2.3e}$$

$$\sum_{i\in I_0} n_i^{cs} + \sum_{i\notin I_0} n_i^{ncs} = 23, \tag{2.3f}$$

$$\sum_{j\in J} d_j w_{j1}^1 = 115783, \qquad i \in I \tag{2.3g}$$

$$\sum_{j\in J} d_j w_{j2}^1 = 57881, \qquad i \in I \qquad (2.3h)$$

$$n_i^{cs} \in \mathbb{N}_0, \qquad i \in I \qquad (2.3i)$$

$$n_i^{ncs} \in \mathbb{N}_0, \qquad i \in I \qquad (2.3j)$$

$$w_{j1}^1, w_{j2}^1 \in \{0,1\}, \qquad j \in J. \qquad (2.3k)$$

La función objetivo (2.3a) maximiza el número de bases que se ubican en municipios con centro de salud. Las restricciones (2.3b) aseguran que todos los municipios de la provincia están cubiertos en 30 minutos. La restricción (2.3c) garantiza que el 80 % de la población está cubierta en 20 minutos. Las restricciones (2.3d) y (2.3e) aseguran que un municipio solo puede ser cubierto por dos bases si está previamente cubierto por una. La restricción (2.3f) impone que se ubiquen 23 bases. Las restricciones (2.3g) y (2.3h) aseguran que se cubren 115783 habitantes en 20 minutos y 57881 habitantes en 20 minutos por dos bases. Por último, las restricciones (2.3i), (2.3j) y (2.3k) definen los dominios de las variables decisión. La solución óptima de este modelo indica que se ubican 10 bases de ambulancias en municipios con centro de salud, dos más que las obtenidas en la solución óptima del modelo con un único objetivo. En este modelo tampoco es posible imponer que se ubiquen bases de ambulancias en Alcañiz y Teruel ya que, si se hace, se llega a un problema no factible en el que no es posible alcanzar la cobertura de 115783 habitantes en 20 minutos y de 57881 habitantes en 20 minutos por dos bases.

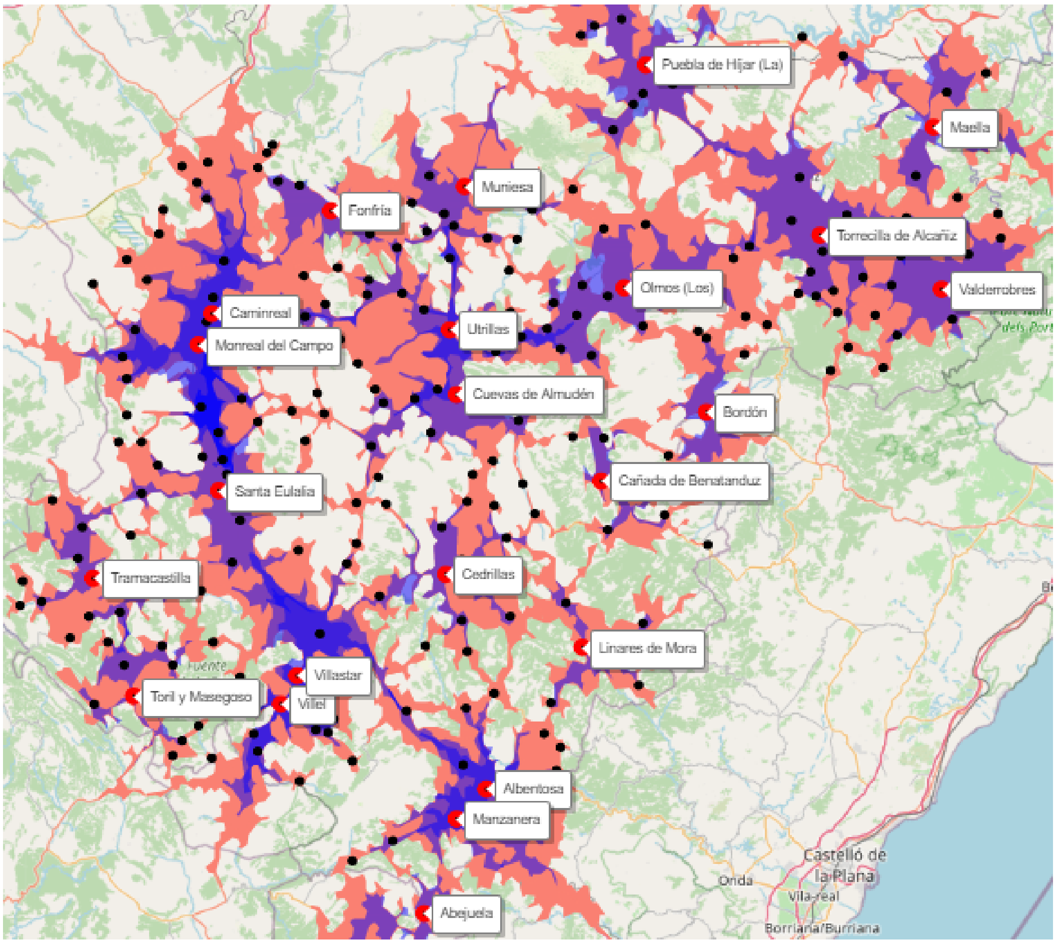

Figura 2.9: Una solución óptima del modelo de doble estándar con 23 bases a ubicar, posibles ubicaciones de las bases todos los municipios, $t_1 = 20$ minutos, $t_2 = 30$ minutos, $\alpha = 0.8$ y $p_i = 3$ para todo i.

Bibliografía

[1] P. BERALDI, M. E. BRUNI, D. CONFORTI, Designing robust emergency medical service via stochastic programming, *European Journal of Operational Research* **158**, (2004), 183-193.

[2] M. S. DASKIN, *Network and Discrete Location: Models, Algorithms, and Applications*, Wiley, Hoboken, US, second edition, 2013.

[3] M. S. DASKIN, A Maximum Expected Covering Location Model: Formulation, Properties and Heuristic Solution, *Transport Science*, **17**, (1983), 48-70.

[4] DEPARTAMENTO DE SALUD Y CONSUMO DEL GOBIERNO DE ARAGÓN, *Mapa sanitario de la Comunidad Autónoma de Aragón*, www.aragon.es.

[5] M. GENDREAU, G. LAPORTE, F. SEMET, Solving an ambulance location model by tabu search, *Location Science*, **5**, (1997), 75–88.

[6] G. LAPORTE, N. STEFAN, F. S. DA GAMA, *Location Science*, Springer, Cham, CH, 2015.

[7] I. MARINESCU, *Indignación por la eliminación de las ambulancias convencionales en el medio rural*, www.lacomarca.net.

[8] I. MUÑOZ, *Todos los pueblos de la provincia mantendrán sus ambulancias, que serán vehículos de soporte vital*, www.diariodeteruel.es.

[9] C. TOREGAS, A. SWAIN, C. REVELLE, L. BERGMAN, The location of emergency service facilities, *Operations Research* **19** (6) (1971), 1363–1373.

[10] L. A. WOLSEY, *Integer Programming*, Wiley, Hoboken, US, second edition, 1998.

Apéndice A

Listado de siglas, conjuntos, parámetros y variables

A.1. Siglas

- FLP: problema de ubicación de instalaciones con coste fijo.
- LR: relajación lagrangiana.
- MCP: problema de cubrimiento maximal.
- MFLP: FLP de asignación múltiple.
- RMCP: relajación lagrangiana del MCP.
- RSCP: relajación lineal del SCP.
- SCP: problema de cubrimiento de conjuntos.
- SFLP: FLP de asignación única.

A.2. Conjuntos

- $I = \{1, \ldots, i, \ldots, m\}$: conjunto de ubicaciones potenciales de las instalaciones.
- I_0: conjunto de municipios con centro de salud.
- $J = \{1, \ldots, j, \ldots, n\}$: conjunto de clientes que precisan algún tipo de servicio ofertado desde las instalaciones.
- M_i: conjunto de municipios que pueden ser cubiertos por una base en i.
- N_j: conjunto de ubicaciones en las que si se instala una base de ambulancias esta puede cubrir la demanda del municipio j.
- S: conjunto factible de instalaciones a abrir en el apartado 1.1.3.

A.3. Parámetros

- $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el cliente } j \text{ puede ser cubierto por una instalación en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
- $a^r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ puede ser cubierto en el tiempo } t_r \text{ por una base ubicada en } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.
- c_{ij}: coste por unidad de demanda del cliente j satisfecha desde una instalación ubicada en i.
- d_j: demanda del cliente j. En el apartado 1.3.3, es una variable aleatoria con función de distribución F_j.
- D_{ij}: distancia del cliente j a la instalación i.
- f_i: coste fijo por abrir una instalación en i.
- LB: mayor cota inferior de entre todas las cotas inferiores obtenidas en las iteraciones realizadas del algoritmo de LR.
- LB^n: cota inferior en la iteración n-ésima del algoritmo de LR.
- p: número de bases a ubicar.
- p_i: el número máximo de bases a ubicar en i.
- q_i: capacidad máxima de una instalación abierta en i.
- Q: probabilidad de que todas las ambulancias de una base estén ocupadas.
- r_i: número de ambulancias de una base en i, si esta se abre.
- R: probabilidad con la que se cubre la demanda de los municipios.
- $t_1 \leq t_2$: dos tiempos de respuesta máximos de una ambulancia.
- T: tiempo máximo de respuesta de una ambulancia.
- UB^n: cota superior en la iteración n-ésima del algoritmo de LR.
- α: fracción de la demanda total que se cubre por alguna base en t_1.
- λ_j: multiplicadores de Lagrange en el algoritmo de LR.

A.4. Variables

- D: máxima distancia entre los clientes y las instalaciones abiertas.
- m_{ij}: número de ambulancias de una base en i que se utilizan para cubrir la demanda de j.
- n_i: número de bases de ambulancias ubicadas en i.
- $n_i^{cs/ncs}$: número de bases ambulancias a ubicar en el municipio con/sin centro de salud i.
- s_{ij}: cantidad de demanda del cliente j satisfecha por una instalación ubicada en i.
- v_{ij}: fracción de la demanda del cliente j satisfecha por una instalación ubicada en i.
- $w_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ está cubierto por } k \text{ bases de ambulancias} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

- $w^1_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{si el municipio } j \text{ está cubierto en el tiempo } t_1 \text{ por, al menos, } k \in \{1,2\} \text{ bases} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

- $x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del cliente } j \text{ es satisfecha por una instalación abierta en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

- $y_i = \begin{cases} 1 & \text{si se abre una instalación en la ubicación } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

- $y_i^{cs/ncs} = \begin{cases} 1 & \text{si se abre una base de ambulancias en el municipio con/sin centro de salud } i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

- $z_j = \begin{cases} 1 & \text{si la demanda del cliente } j \text{ es cubierta por alguna instalación abierta} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$.

A.5. Otros

- $(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{z}^*)$: Una solución óptima del MCP.
- $(\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{z}^*(\boldsymbol{\lambda}))$: Una solución óptima del RMCP.

Apéndice B

Soluciones óptimas proporcionadas por CPLEX y cubrimiento actual de la provincia de Teruel

B.1. Soluciones óptimas

En este apartado se muestran las soluciones óptimas obtenidas al resolver los problemas. Para facilitar su identificación, se incluye un índice a continuación.

B.1.1. Índice de contenidos

B.1.2. Relación de los municipios en los que hay que ubicar una base de ambulancias

1.1.1. Aguilar del Alfambra, Almochuel, Alobras, Camarillas, Corbalán, Fuentes Calientes, Jatiel, Riodeva, Rubiales, Tormón, Torre los Negros, Torrecilla del Rebollar, Villar del Cobo.

1.2.1. Abejuela, Albarracín, Alcorisa, Aliaga, Bezas, Bronchales, Camarena de la Sierra, Camarillas, Cantavieja, Caspe, Castel de Cabra, Castellar (El), Castellote, Castelserás, Cedrillas, Cretas, Cuervo (El), Fabara, Ferreruela de Huerva, Gúdar, Josa, Mirambel, Monroyo, Mosqueruela, Muniesa, Nogueruelas, Oliete, Perales del Alfambra, Puebla de Híjar (La), Royuela, Sarrión, Segura de los Baños, Terriente, Tornos, Torre los Negros, Torrijas, Torrijo del Campo, Tronchón, Valdecuenca, Valdeltormo, Valderrobres, Villar del Cobo, Villar del Salz, Villarluengo, Villarquemado, Villel.

1.2.2. Abejuela, Aliaga, Bello, Bordón, Cañada de Benatanduz, Cedrillas, Gargallo, Ginebrosa (La), Híjar, Lagueruela, Linares de Mora, Maella, Manzanera, Montalbán, Mora de Rubielos, Muniesa, Rillo, Toril y Masegoso, Tramacastilla, Valderrobres, Villafranca del Campo, Villastar, Villel.

1.2.2.1. Abejuela, Aliaga, Bea, Calamocha, Cantavieja, Cedrillas, Crivillén, Ginebrosa (La), Híjar, Maella, Monreal del Campo, Mora de Rubielos, Mosqueruela, Muniesa, Rillo, Santa Eulalia, Teruel, Toril y Masegoso, Torrijas, Tramacastilla, Tronchón, Valderrobres, Villel.

1.2.3. Torrijas, Valdelinares, Cuervo (El), Bordón, Royuela, Fortanete, Aliaga, Puebla de Valverde (La), Torrecilla de Alcañiz, Mazaleón, Albalate del Arzobispo, Monreal del Campo, Utrillas.

2.1.1. Albarracín, Alcañiz, Alcorisa, Alfambra, Calaceite, Cantavieja, Cedrillas, Cella, Híjar, Maella, Mas de las Matas, Monreal del Campo, Mora de Rubielos, Mosqueruela, Muniesa, Sarrión, Utrillas, Valderrobres, Villel.

2.1.2. Albarracín, Alfambra, Aliaga, Andorra, Calamocha, Calanda, Cantavieja, Cedrillas, Híjar, Maella, Mas de las Matas, Monreal del Campo, Mora de Rubielos, Mosqueruela, Muniesa, Santa Eulalia, Utrillas, Valderrobres, Villel.

2.1.3. Albarracín, Alfambra, Aliaga, Báguena, Calaceite, Cantavieja, Cedrillas, Híjar, Maella, Mas de las Matas, Monreal del Campo, Mosqueruela, Muniesa, Santa Eulalia, Sarrión, Teruel, Utrillas, Valderrobres, Villel.

2.2.1. Albarracín, Alfambra, Alloza, Bronchales, Calamocha, Cantavieja, Cedrillas, Cretas, Maella, Mas de las Matas, Nonaspe, Peñarroya de Tastavins, Puebla de Híjar (La), Rubielos de Mora, Sarrión, Torrecilla de Alcañiz, Utrillas, Villarquemado, Villel.

2.2.2. Alfambra, Aliaga, Alloza, Calamocha, Cantavieja, Cedrillas, Gea de Albarracín, Maella, Manzanera, Martín del Río, Mas de las Matas, Monreal del Campo, Mosqueruela, Orihuela del Tremedal, Rubielos de Mora, Torrecilla de Alcañiz, Urrea de Gaén, Valderrobres, Villel.

2.2.3. Alcalá de la Selva, Alfambra, Aliaga, Bronchales, Báguena, Cantavieja, Castellote, Fuentes Claras, Gea de Albarracín, Manzanera, Martín del Río, Mosqueruela, Muniesa, Nonaspe, Torrecilla de Alcañiz, Torrijo del Campo, Urrea de Gaén, Valjunquera, Villel.

2.3.1. Albarracín, Alcorisa, Allepuz, Calamocha, Cantavieja, Castel de Cabra, Castellote, Cretas, Maella, Monroyo, Noguera de Albarracín, Nogueruelas, Oliete, Perales del Alfambra, Puebla de Híjar (La), Sarrión, Valjunquera, Villarquemado, Villel.

2.3.2. Albentosa, Arcos de las Salinas, Bordón, Calamocha, Cañada de Benatanduz, Cañada Vellida, Cedrillas, Crivillén, Jatiel, Maella, Monreal del Campo, Mosqueruela, Muniesa, Santa Eulalia, Toril y Masegoso, Torrevelilla, Tramacastilla, Valderrobres, Villel.

Municipios no cubiertos en 2.3.2. Abejuela, Allueva, Anadón, Bea, Fonfría, Lanzuela, Miravete de la Sierra, Rubiales, Salcedillo, Villanueva del Rebollar de la Sierra.

2.3.2.1. Bordón, Calamocha, Cañada de Benatanduz, Cañada Vellida, Cedrillas, Gargallo, Ginebrosa (La), Híjar, Maella, Manzanera, Monreal del Campo, Mora de Rubielos, Mosqueruela, Muniesa, Santa Eulalia, Toril y Masegoso, Tramacastilla, Valderrobres, Villel.

2.3.3. Aguatón, Almohaja, Arens de Lledó, Belmonte de San José, Cerollera (La), Escorihuela, Fabara, Fuentes Claras, Libros, Maicas, Miravete de la Sierra, Mosqueruela, Seno, Toril y Masegoso, Torres de Albarracín, Torrijas, Tronchón, Urrea de Gaén, Valbona.

3. Abejuela, Albentosa, Bordón, Caminreal, Cañada de Benatanduz, Cedrillas, Cuevas de Almudén, Fonfría, Linares de Mora, Maella, Manzanera, Monreal del Campo, Muniesa, Olmos (Los), Puebla de

Híjar (La), Santa Eulalia, Toril y Masegoso, Torrecilla de Alcañiz, Tramacastilla, Utrillas, Valderrobres, Villastar, Villel.

3.1. Abejuela, Albentosa, Bordón, Caminreal, Cañada de Benatanduz, Cedrillas, Cuevas de Almudén, Híjar, Lagueruela, Maella, Manzanera, Monreal del Campo, Mosqueruela, Muniesa, Olmos (Los), Santa Eulalia, Toril y Masegoso, Torrecilla de Alcañiz, Tramacastilla, Utrillas, Valderrobres, Villastar, Villel.

B.2. Cubrimiento actual de la provincia de Teruel

B.2.1. Número de habitantes y municipios cubiertos

En 20 minutos: 117016 habitantes y 130 municipios.
En 30 minutos: 134923 habitantes y 193 municipios.
En 40 minutos: 137775 habitantes y 222 municipios.

B.2.2. Municipios no cubiertos

En 20 minutos: Ababuj, Abejuela, Aguatón, Aguilar del Alfambra, Alba, Alcaine, Aliaga, Allepuz, Allueva, Almohaja, Alobras, Alpeñés, Anadón, Arcos de las Salinas, Arens de Lledó, Ariño, Barrachina, Bea, Bello, Belmonte de San José, Bezas, Bordón, Calaceite, Calomarde, Camarena de la Sierra, Camarillas, Cascante del Río, Caspe, Castellar (El), Cañada de Benatanduz, Cañada de Verich (La), Cedrillas, Cerollera (La), Chiprana, Corbalán, Cuba (La), Cubla, Cucalón, Cuervo (El), Ejulve, Estercuel, Fabara, Ferreruela de Huerva, Fonfría, Formiche Alto, Frías de Albarracín, Fuentes de Rubielos, Fórnoles, Griegos, Guadalaviar, Gúdar, Jabaloyas, Jorcas, Lagueruela, Lanzuela, Libros, Lledó, Maella, Mazaleón, Miravete de la Sierra, Monroyo, Monteagudo del Castillo, Monterde de Albarracín, Moscardón, Nonaspe, Obón, Odón, Olba, Peracense, Peñarroya de Tastavins, Pitarque, Pobo (El), Pozondón, Riodeva, Royuela, Rubiales, Rubielos de la Cérida, Ráfales, Ródenas, Salcedillo, Saldón, Segura de los Baños, Terriente, Toril y Masegoso, Tormón, Torralba de los Sisones, Torre de Arcas, Torre de las Arcas, Torre los Negros, Torrecilla del Rebollar, Torres de Albarracín, Torrevelilla, Torrijas, Tramacastiel, Tramacastilla, Tronchón, Valacloche, Valdecuenca, Valdelinares, Valdeltormo, Vallecillo (El), Veguillas de la Sierra, Villar del Cobo, Villar del Salz, Villarluengo, Villarroya de los Pinares, Vinaceite.

En 30 minutos: Ababuj, Abejuela, Aguilar del Alfambra, Allepuz, Allueva, Almohaja, Alobras, Anadón, Arcos de las Salinas, Bea, Cedrillas, Cuervo (El), Fabara, Fonfría, Formiche Alto, Frías de Albarracín, Guadalaviar, Jabaloyas, Jorcas, Lanzuela, Maella, Mazaleón, Miravete de la Sierra, Monteagudo del Castillo, Moscardón, Nonaspe, Peracense, Pitarque, Pobo (El), Riodeva, Ródenas, Salcedillo, Saldón, Terriente, Toril y Masegoso, Tormón, Torre de Arcas, Tronchón, Valdecuenca, Vallecillo (El), Veguillas de la Sierra, Villar del Cobo, Villarluengo, Villarroya de los Pinares.

En 40 minutos: Abejuela, Alobras, Cuervo (El), Fabara, Jabaloyas, Maella, Miravete de la Sierra, Monteagudo del Castillo, Nonaspe, Pitarque, Salcedillo, Toril y Masegoso, Tormón, Vallecillo (El), Veguillas de la Sierra.

Apéndice C

Códigos CPLEX

SCP.mod

```
/*SCP*/
int m=237; /*27,63,125,132,237*/
int n=237;
range I=1..m;
range J=1..n;
int a[I][J]=...;
dvar boolean y[I];
minimize
  sum(i in I)y[i];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I)a[i][j]*y[i]>=1;
}
```

MO.mod

```
/*SCP muliobjetivo*/
int m=237;
int n=237;
range I=1..m;
range J=1..n;
{int} I0=...;
{int} I1=...;
int a[I][J]=...;
dvar boolean ycs[I];
dvar boolean yncs[I];
maximize
  sum(i in I)ycs[i];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I0)a[i][j]*ycs[i]+sum(i in I1)a[i][j]*yncs[i]>=1;
  sum(i in I)ycs[i]+sum(i in I)yncs[i]==23;
}
```

MCP.mod

```
/*MCP*/
int p=19; /*19,11*/
int m=237; /*27,63,237,19,11*/
int n=237;
range I=1..m;
range J=1..n;
int d[J]=...;
int a[I][J]=...;
dvar boolean y[I];
dvar boolean z[J];
maximize
  sum(j in J)d[j]*z[j];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I)a[i][j]*y[i]-z[j]>=0;
  sum(i in I)y[i]==p;
}
```

MOMCP.mod

```
/*MCP mulobjetivo*/
int p=19;
int m=237;
int n=237;
range I=1..m;
range J=1..n;
{int} I0=...;
{int} I1=...;
int d[J]=...;
int a[I][J]=...;
dvar boolean ycs[I];
dvar boolean yncs[I];
dvar boolean z[J];
maximize
  sum(i in I)ycs[i];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I0)a[i][j]*ycs[i]+sum(i in I1)a[i][j]*yncs[i]-z[j]>=0;
  sum(i in I)ycs[i]+sum(i in I)yncs[i]==p;
  sum(j in J)d[j]*z[j]==141940;
}
```

DSM.mod

```
/*Modelo de doble estandar*/
int p=23;
int m=237;
int N=237;
range I=1..m;
range J=1..N;
float alpha=0.8;
int d[J]=...;
int a1[I][J]=...;
int a2[I][J]=...;
dvar int+ n[I];
dvar boolean w11[J];
dvar boolean w12[J];
maximize
  sum(j in J)d[j]*w12[j];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I)a2[i][j]*n[i]>=1;
  sum(j in J)d[j]*w11[j]>=alpha*sum(j in J)d[j];
  forall(j in J) sum(i in I)a1[i][j]*n[i]>=w11[j]+w12[j];
  forall(j in J) w12[j]<=w11[j];
  sum(i in I)n[i]==p;
}
```

DSMMO.mod

```
/*Modelo de doble estandar multiobjetivo*/
int p=23;
int m=237;
int N=237;
range I=1..m;
range J=1..N;
float alpha=0.8;
int d[J]=...;
int a1[I][J]=...;
int a2[I][J]=...;
{int} I0=...;
{int} I1=...;
dvar boolean ncs[I];
dvar boolean nncs[I];
dvar boolean w11[J];
dvar boolean w12[J];
maximize
  sum(i in I0)ncs[i];
subject to{
  forall(j in J) sum(i in I0)a2[i][j]*ncs[i]+sum(i in I1)a2[i][j]*nncs[i]>=1;
  sum(j in J)d[j]*w11[j]>=alpha*sum(j in J)d[j];
  forall(j in J) sum(i in I0)a1[i][j]*ncs[i]+sum(i in I1)a1[i][j]*nncs[i]>=w11[j]+w12[j];
  forall(j in J) w12[j]<=w11[j];
  sum(i in I0)ncs[i]+sum(i in I1)nncs[i]==p;
  sum(j in J)d[j]*w11[j]==115783;
  sum(j in J)d[j]*w12[j]==57881;
}
```