

Constante de Lebesgue para nodos de Chebyshev



Javier Luis Quintanilla Echeverria
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Jesús Carnicer Álvarez
6 de junio de 2022

Summary

The Lebesgue constant $\Lambda_k(X)$ serves as an indicator of the stability and approximation properties of a given interpolation operator. This constant only depends on the set of interpolation nodes, X , and hence on the size of that set, $k + 1$. It can be proven that there exists an optimal set of nodes for polynomial interpolation in the sense that the Lebesgue constant is minimized. However, an explicit formula for the optimal set of nodes is not available yet. The Chebyshev nodes are the zeroes of the Chebyshev polynomials of the first kind. So they are explicitly given by a trigonometrical formula which is relatively easy to compute. Throughout this memory we will present both the Lebesgue constant and the Chebyshev nodes, as well as the relations between them. We will see that the Lebesgue constant at the Chebyshev nodes exhibits a logarithmic growth. The expanded Chebyshev nodes are obtained from the Chebyshev nodes using an affine transformation and they are considered to be the best choice for filling the gap that the lack of an explicit expression for the optimal nodes leaves. We will see why the expanded Chebyshev nodes serve as a placeholder for the optimal set of nodes.

Given a triangular array of nodes in an interval I

$$\begin{aligned} & x_0^{(0)} \\ & x_0^{(1)}, x_1^{(1)} \\ X := & \begin{array}{c} \vdots \\ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \\ \vdots \end{array}, \end{aligned}$$

the polynomials of the form

$$l_{j,k}(x) = \frac{(x - x_0^{(k)})(x - x_1^{(k)}) \cdots (x - x_{j-1}^{(k)})(x - x_{j+1}^{(k)}) \cdots (x - x_k^{(k)})}{(x_j^{(k)} - x_0^{(k)})(x_j^{(k)} - x_1^{(k)}) \cdots (x_j^{(k)} - x_{j-1}^{(k)})(x_j^{(k)} - x_{j+1}^{(k)}) \cdots (x_j^{(k)} - x_k^{(k)})}, \quad j = 0, \dots, k,$$

are called the Lagrange basis polynomials and they can be used to express the interpolating polynomial. Then we can define the Lebesgue function as the following

$$\lambda_k(X; x) := \sum_{j=0}^k |l_{j,k}(X; x)|.$$

We can then give a definition for the Lebesgue constant in terms of the Lebesgue function

$$\Lambda_k(X) := \max_{x \in I} \lambda_k(X; x).$$

As we have previously mentioned, the Chebyshev nodes are the zeroes of the Chebyshev polynomials of the first kind. These are given by the following expression,

$$\xi_j^{(k)} := \cos \theta_j^{(k)} = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2(k+1)}, \quad j = 0, \dots, k.$$

It can be shown that the Lebesgue function on the Chebyshev nodes can be written as

$$\lambda_k(T; \cos \theta) = \frac{|\cos(k+1)\theta|}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{\sin \theta_j^{(k)}}{|\cos \theta - \cos \theta_j^{(k)}|},$$

where T is the triangular array of Chebyshev nodes, whose k -th row is $\xi_0^{(k)}, \dots, \xi_k^{(k)}$.

In order to properly show that the Chebyshev nodes are nearly optimal for polynomial interpolation, we will need first to provide bounds for the Lebesgue constant on the Chebyshev nodes. The maximum value of the Lebesgue function on the Chebyshev nodes can be computed using a trigonometrical change of variables. For that purpose, we define the following trigonometrical polynomial

$$d(\theta) := \frac{1}{2(n+1)} \left(1 + \cos(n+1)\theta + 2 \sum_{j=1}^n \cos j\theta \right), \quad \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Then, the functions $d_k(\theta) := d(\theta - \theta_k)$ are fundamental solutions for a trigonometrical interpolation problem in a subspace of \mathcal{T}_{n+1} of dimension $2n+2$ on the set of nodes given by

$$\theta_k := (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

From this fact we can provide an expression for the trigonometrical Lebesgue constant,

$$\delta_n(\theta) := \sum_{k=0}^{2n+1} |d_k(\theta)|,$$

which is a periodic function of period $\frac{\pi}{n+1}$ and also coincides on the interval $[-\pi/2(n+1), \pi/2(n+1)]$ with the function

$$t(\theta) := \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k(\theta) - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k d_k(\theta).$$

It can be shown that $t(\theta)$ reaches its maximum at $\theta = 0$ and that

$$\Lambda_k(T) = \lambda_k(T; 1) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \cot \frac{(2j+1)\pi}{4(k+1)} := \Delta_k.$$

The above formula can be related with Riemann sums corresponding with the integral

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx,$$

to obtain the following limit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\Delta_k - \frac{2}{\pi} \log(k+1) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right),$$

where γ is Euler's constant. Finally, after showing that the sequence

$$\tau_k = \Delta_k - \frac{2}{\pi} \log(k+1),$$

is decreasing with $\tau_0 = 1$, we can provide the following bounds for the Lebesgue constant on the Chebyshev nodes,

$$\frac{2}{\pi} \log(k+1) + \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right) < \Delta_k \leq \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 1.$$

If X is a triangular array of nodes in the interval $[-1, 1]$, then we can define the corresponding expanded triangular array of nodes X' as the array of nodes whose k -th row can be obtained from the k -th row of X by an affine transformation so that the first node is -1 and the last node is 1 . It can be proven that

$$\Lambda_k(X') = \max_{x \in [-1, 1]} \lambda_k(X'; x) \leq \Lambda_k(X).$$

Therefore it follows that, if there exists an optimal array of nodes, its corresponding expanded array must also be optimal. The conjectures made by F.Bernstein and P. Erdős, and proven by T.A. Kilgore, C.R. De Boor and A. Pinkus imply that such an optimal array of nodes exists. The expanded triangular array of Chebyshev nodes T' is obtained by multiplying the nodes in the k -th row of T by $\sec(\pi/(2k+2))$ and, if X^* is the optimal array of nodes, it can be shown that

$$\frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.7219 > \Lambda_k(T') > \Lambda_k(X^*) > \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.5212.$$

The above inequalities show why the expanded Chebyshev nodes are considered, for any practical purposes, to be as useful as the optimal array of nodes.

Índice general

Summary	III
1. Introducción y conceptos básicos	1
1.1. Introducción	1
1.2. La constante de Lebesgue en la interpolación polinómica	2
1.3. Los polinomios de Chebyshev	5
1.4. Polinomios trigonométricos	7
2. Interpolación en los nodos de Chebyshev	9
2.1. Los polinomios de Lagrange y la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev	9
2.2. Valor máximo de la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev	11
2.3. Cotas para la constante de Lebesgue en los nodos de Chebyshev	18
2.4. La sucesión expandida de nodos de Chebyshev	23
Bibliografía	27

Capítulo 1

Introducción y conceptos básicos

1.1. Introducción

La constante de Lebesgue en problemas de interpolación da una idea de la precisión del interpolante de una función en una sucesión de nodos en comparación con la mejor aproximación polinómica de la función en cuestión. Esta constante depende del conjunto del nodos sobre el que se interpole y el tamaño de este conjunto. El matemático francés Henri Léon Lebesgue utilizó por primera vez la constante que ahora lleva su nombre, aunque sin definirla propiamente, para acotar la suma de los m primeros términos de una serie de Fourier en el artículo *Représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz* [11] publicado en 1910. En este artículo, en el párrafo 8, Lebesgue da unas primeras cotas para la constante, $\frac{1}{2\pi} \log m < \rho_m < \frac{2}{\pi} \log m$, donde ρ_m es la integral del valor absoluto del núcleo de Dirichlet. Este valor es precisamente la norma del operador que asocia a cada función su enésima suma de Fourier. Lebesgue [12] observó que la divergencia de esta constante implica que existen series de Fourier de funciones continuas que son divergentes. Este fenómeno no es único de series de Fourier y se presenta cuando las normas de una sucesión de operadores son divergentes. En honor a Lebesgue se llama constante de Lebesgue a la norma de un operador de aproximación. En este trabajo trataremos con las constantes de Lebesgue en problemas de interpolación.

Pafnuty Lvovich Chebyshev definió por primera vez los polinomios que llevan su nombre en el artículo *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* [4] en 1854. En su artículo, Chebyshev hace uso del análisis matemático y del análisis numérico para diseñar una serie de apartos mecánicos muy ingeniosos y, en el proceso de minimizar los esfuerzos laterales que soportan los pistones en estas máquinas mediante técnicas de aproximación polinómica, define una serie de polinomios sobre los que más tarde realiza un cambio de variable que resulta en lo que hoy conocemos como los polinomios de Chebyshev de primera especie.

Unos años más tarde, en 1859, Chebyshev generalizó y formalizó su teoría sobre polinomios ortogonales en el artículo *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions* [5]. Es en este artículo donde define por primera vez los nodos de Chebyshev como los ceros de los polinomios de Chebyshev de primera especie y analiza sus propiedades.

En cuanto al problema de interpolación polinómica de una función continua, en 1901 Carl David Tolmé Runge [14] demostró que si $r(x) = 1/(1+x^2)$, con $x \in [-5,5]$, se interpola sobre la sucesión de nodos $-5 + 10j/n$, con $j = 0, 1, \dots, n$, entonces el polinomio de interpolación de r no converge a la función cuando n tiende a infinito. El ejemplo de Runge puso de manifiesto la importancia de la elección de los nodos en la interpolación polinómica. Esto motivó la pregunta de que si existía alguna sucesión de nodos para los cuales se pudiera asegurar la convergencia del polinomio de interpolación para cualquier función continua dada.

Georg Faber [7] respondió a esta cuestión en 1914 cuando demostró que para cualquier sucesión de nodos existe una función continua definida en un intervalo cerrado para la cual el polinomio de interpolación no converge a la misma.

Más adelante, en 1931, Serguéi Natánovich Bernstein [1] conjeturó que la norma uniforme del operador error de interpolación se hace mínima cuando la función de Lebesgue asociada al conjunto de nodos sobre el que se interpola es equioscilante, es decir, alcanza el mismo máximo relativo en todos los intervalos definidos entre dos nodos de la sucesión.

A esta conjetura se sumó la de Paul Erdős [6] en 1947, que conjeturó que existe una única elección de nodos para la cual la función de Lebesgue equioscila, y que el mínimo de las constantes de Lebesgue alcanza su máximo cuando la función de Lebesgue equioscila.

Ambas conjeturas quedaron sin resolver hasta 1978 cuando de manera independiente, Theodore Kilgore [9] por un lado y Carl-Wilhelm Reinhold de Boor y Allan Pinkus [2] por otro, demostraron la conjetura de Bernstein. Estos últimos demostraron además la conjetura de Erdős basándose en el teorema de Kilgore que este usó para demostrar la conjetura de Bernstein.

Así, quedó demostrada la conjetura de Bernstein, incluida la unicidad. Sin embargo, no se ha llegado a obtener todavía una fórmula explícita para la sucesión de nodos óptima; aunque se han calculado los nodos óptimos para los polinomios de interpolación de grado menor o igual que 15.

A falta de una expresión explícita de la sucesión de nodos óptima, y gracias a los trabajos de Theodore Joseph Rivlin [13] y Lev Brutman [3], se puede demostrar que la sucesión de nodos de Chebyshev expandida es, a efectos prácticos, tan buena como la óptima.

Este trabajo se basa en los dos primeros capítulos del libro *Chebyshev polynomials, from approximation theory to algebra and number theory* de Theodore J. Rivlin [13].

En primer lugar, demostraremos el lema de Lebesgue que permite relacionar el error de aproximación y la distancia de una función a un espacio de polinomios a través de la constante de Lebesgue. También analizaremos cómo se comporta la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev usando polinomios trigonométricos y daremos cotas para la constante de Lebesgue en los nodos de Chebyshev. Para la demostración utilizaremos la monotonía de ciertas sucesiones. Por último, recordaremos algunos resultados que garantizan la existencia de una sucesión óptima de nodos y razonaremos por qué los nodos de Chebyshev expandidos se pueden considerar tan útiles como la sucesión óptima.

1.2. La constante de Lebesgue en la interpolación polinómica

Sea $f(x)$ una función continua definida en un intervalo compacto I , la cual queremos aproximar por un polinomio de grado n a lo sumo. Como indicador de cómo de buena es la aproximación que proporciona $p \in \mathcal{P}_n$ tomamos la norma uniforme en I

$$\|f - p\|_{\infty} := \max_{x \in I} |f(x) - p(x)|.$$

Una forma natural de encontrar un polinomio que proporcione buenas aproximaciones en el sentido de la norma uniforme consiste en elegir un polinomio $p \in \mathcal{P}_n$ que tome los mismos valores que $f(x)$ en distintos puntos x_0, \dots, x_n del intervalo I . A este proceso le llamamos interpolación y se dice que p interpola a f en los nodos x_0, \dots, x_n .

Definición (Polinomios fundamentales). Dada una sucesión de nodos distintos $x_0, \dots, x_n \in I$, llamamos *polinomios fundamentales* a los polinomios

$$l_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{j-1})(x - x_{j+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1) \cdots (x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1}) \cdots (x_j - x_n)}, \quad j = 0, \dots, n. \quad (1.1)$$

Claramente los $l_j(x)$ son polinomios de grado n y satisfacen

$$l_j(x_i) = \begin{cases} 0, & j \neq i, \\ 1, & j = i, \end{cases}$$

para $i, j = 0, \dots, n$. Haciendo uso de estos polinomios fundamentales podemos construir para cada función $f \in C(I)$ el siguiente polinomio de grado n

$$L_n(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + \cdots + f(x_n)l_n(x),$$

este polinomio es una solución del problema de interpolación de Lagrange ya que

$$L_n(x_j) = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n,$$

al cual llamamos *polinomio de interpolación de Lagrange* de f en los nodos x_0, \dots, x_n .

Teorema 1.1 (Unicidad del polinomio de interpolación de Lagrange). *Dados $f \in C(I)$ y una sucesión de nodos distintos $x_0, \dots, x_n \in I$, $L_n(x)$ es el único polinomio de \mathcal{P}_n que interpola a f en x_0, \dots, x_n .*

Demostración. Supongamos que $p \in \mathcal{P}_n$ interpola a f en los nodos x_0, \dots, x_n , entonces

$$p(x_j) = f(x_j) = L_n(x_j), \quad j = 0, \dots, n.$$

Así, $q(x) = L_n(x) - p(x)$ es un polinomio que pertenece a \mathcal{P}_n y además $q(x_j) = 0$, $j = 0, \dots, n$, por lo que tiene $n+1$ ceros y por lo tanto debe ser $q(x) = 0$ para todo $x \in I$, es decir, $p(x) = L_n(x)$ para todo $x \in I$. \square

Consideremos ahora un *esquema triangular* de nodos en I , es decir,

$$\begin{array}{c} x_0^{(0)} \\ x_0^{(1)}, x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \\ \vdots \end{array} \quad X := \quad (1.2)$$

donde $x_j^{(n)}$, $j = 0, 1, \dots, n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, son nodos distintos del intervalo I . Así, las filas de X determinan una sucesión de polinomios de interpolación de Lagrange $\{L_k\}_{k=0}^{\infty}$ para una cierta función $f \in C(I)$, luego tenemos una sucesión de aproximaciones polinómicas de f en I .

Definición (Función de Lebesgue y constante de Lebesgue). Dado el esquema triangular X definido como en (1.2) y los polinomios fundamentales definidos en (1.1), llamamos *función de Lebesgue* de orden k en X a la función

$$\lambda_k(X; x) := \sum_{j=0}^k |l_{j,k}(X; x)|,$$

donde el subíndice k en $l_{j,k}$ indica que estamos tomando los polinomios fundamentales generados por la fila k de X . A partir de la función de Lebesgue definimos también la *constante de Lebesgue* de orden k en X

$$\Lambda_k(X) := \max_{x \in I} \lambda_k(X; x).$$

En la siguiente figura mostramos la función de Lebesgue correspondiente a interpolación de grado 10 en nodos equidistantes en el intervalo $[-1, 1]$.

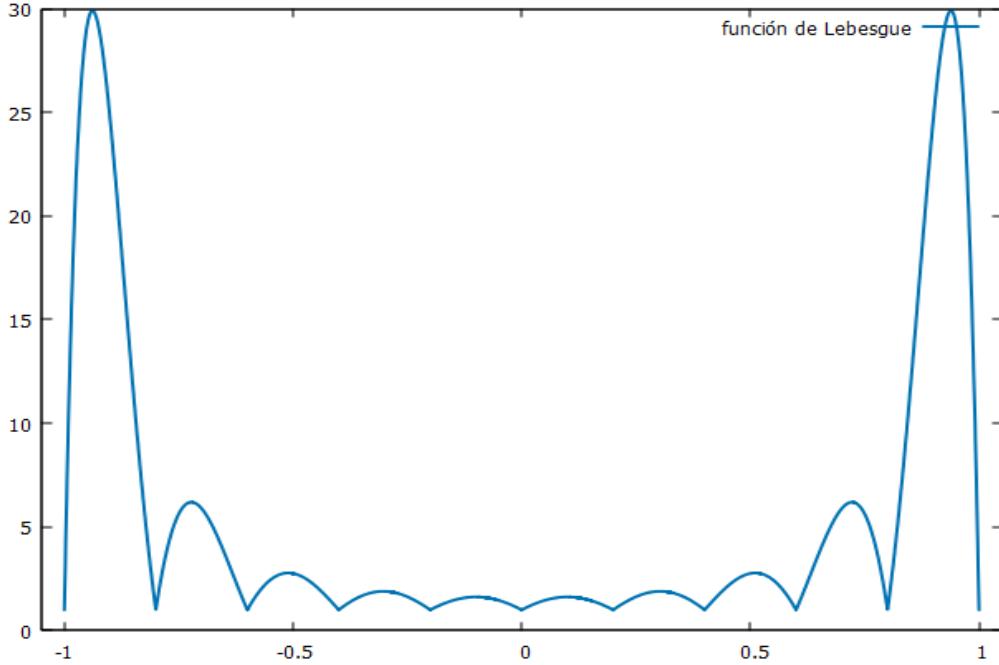


Figura 1.1: Función de Lebesgue en los nodos equidistantes correspondientes a grado 10 en el intervalo $[-1, 1]$.

El lema de Lebesgue permite comparar el error de aproximación de un operador de proyección sobre un subespacio con la mejor aproximación de la función en ese subespacio. A continuación ofrecemos un enunciado de este importante resultado para la interpolación de Lagrange.

La calidad de estas aproximaciones se mide por la norma uniforme

$$M_k := \|f - L_k\|_\infty = \max_{x \in I} |f(x) - L_k(x)|, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

Como el espacio \mathcal{P}_k es de dimensión finita, existe p^* la mejor aproximación de f en \mathcal{P}_k . Denotaremos por E_k la distancia de f a p^*

$$E_k := \|f - p^*\|_\infty \leq \|f - p\|_\infty \quad \forall p \in \mathcal{P}_k,$$

es decir, E_k es la distancia de f al espacio de polinomios \mathcal{P}_k ,

$$E_k = \text{dist}(f, \mathcal{P}_k) := \min_{p \in \mathcal{P}_k} \|f - p\|_\infty.$$

Teorema 1.2 (Lema de Lebesgue para la interpolación de Lagrange). *Sea f una función continua en I intervalo compacto y sea X un esquema triangular de nodos en I , entonces*

$$M_k \leq E_k(1 + \Lambda_k(X)), \quad k = 0, 1, \dots$$

Demostración. Sea p^* la mejor aproximación uniforme de f en \mathcal{P}_k . Observemos primero que

$$|f(x) - L_k(f, X; x)| = |f(x) - p^*(x) + p^*(x) - L_k(f, X; x)| \leq |f(x) - p^*(x)| + |p^*(x) - L_k(f, X; x)|.$$

Ahora, si $p \in \mathcal{P}_k$ tenemos que $L_k(p, X; x) = p(x)$, ya que $L_k(p, X; x)$ es el único polinomio que interpola a $p(x)$ en la sucesión de nodos de la fila k de X y claramente p se interpola a sí mismo. En particular tenemos que $p^*(x) = L_k(p^*, X; x)$ y así, por la definición de L_k ,

$$p^*(x) - L_k(f, X; x) = L_k(p^*, X; x) - L_k(f, X; x) = L_k(p^* - f, X; x),$$

y sustituyendo en la desigualdad anterior

$$|f(x) - L_k(f, X; x)| \leq E_k + |L_k(p^* - f, X; x)|.$$

Por otra parte, para cualquier g continua en I , por la desigualdad triangular tenemos

$$|L_k(g, X; x)| \leq |g(x_0^{(k)})l_{0,k}(X; x)| + \cdots + |g(x_k^{(k)})l_{k,k}(X; x)|,$$

y por lo tanto

$$|L_k(g, X; x)| \leq \max_{x \in I} |g(x)| \max_{x \in I} \sum_{j=0}^k |l_{j,k}(X; x)| = \|g\|_\infty \Lambda_k(X).$$

Por lo que, tomando $g = p^* - f$, tenemos

$$|L_k(p^* - f, X; x)| \leq \|f - p^*\|_\infty \Lambda_k(X) = E_k \Lambda_k(X),$$

obteniendo

$$|f(x) - L_k(f, X; x)| \leq E_k + |L_k(p^* - f, X; x)| \leq E_k + E_k \Lambda_k(X) = E_k(1 + \Lambda_k(X)).$$

Por último, eligiendo $x^* \in I$ de manera que

$$|f(x^*) - L_k(f, X; x^*)| = \max_{x \in I} |f(x) - L_k(f, X; x)| = \|f - L_k\|_\infty = M_k,$$

y sustituyendo obtenemos el resultado del teorema, $M_k \leq E_k(1 + \Lambda_k(X))$. \square

1.3. Los polinomios de Chebyshev

Consideremos la función

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad x \in [-1, 1],$$

donde n es un entero no negativo. Dado $x \in [-1, 1]$, podemos encontrar un único valor $\theta = \arccos x$ en el intervalo $[0, \pi]$, tal que $x = \cos \theta$. Si θ recorre el intervalo $[0, \pi]$, $x = \cos \theta$ decrece en el intervalo $[-1, 1]$, luego $\arccos x$ es una función decreciente. Por lo tanto, la función $T_n(x)$ está bien definida en $[-1, 1]$ y toma valores en el mismo intervalo.

La función $T_n(x)$ es un polinomio ya que

$$T_n(x) = \cos n\theta = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^j \binom{n}{2j} \cos^{n-2j} x \cos^{2j} \theta = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} (-1)^j x^{n-2j} (1-x^2)^j,$$

y, desarrollando en potencias de x , obtenemos

$$T_n(x) = t_0^{(n)} + t_1^{(n)} x + \cdots + t_n^{(n)} x^n,$$

donde

$$\begin{aligned} t_{n-(2k+1)}^{(n)} &= 0, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor, \\ t_{n-2k}^{(n)} &= (-1)^k \sum_{j=k}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2j} \binom{j}{k}, \quad k = 0, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Hemos utilizado la notación $\lfloor x \rfloor$ para la parte entera de x , es decir, el mayor entero menor o igual que x .

A los términos de esta sucesión de polinomios, $\{T_n(x)\}_{n=0}^\infty$, se les conoce como *polinomios de Chebyshev* en honor al matemático ruso P. L. Chebyshev (1821–1894) que fue el primero en estudiarlos.

De las fórmulas que definen los coeficientes del polinomio de Chebyshev de grado n , (1.4), podemos obtener una primera propiedad de los polinomios de Chebyshev: los polinomios de grado par solo presentan potencias pares de x mientras que los de grado impar solo presentan potencias impares de x . Por tanto,

$$T_n(-x) = (-1)^n T_n(x),$$

es decir, T_n es una función par para n par y una función impar para n impar. Para ilustrarlo, mostramos los seis primeros polinomios de Chebyshev.

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, & T_1(x) &= x, & T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, & T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, & T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x. \end{aligned}$$

En la siguiente figura podemos ver las gráficas de estos polinomios.

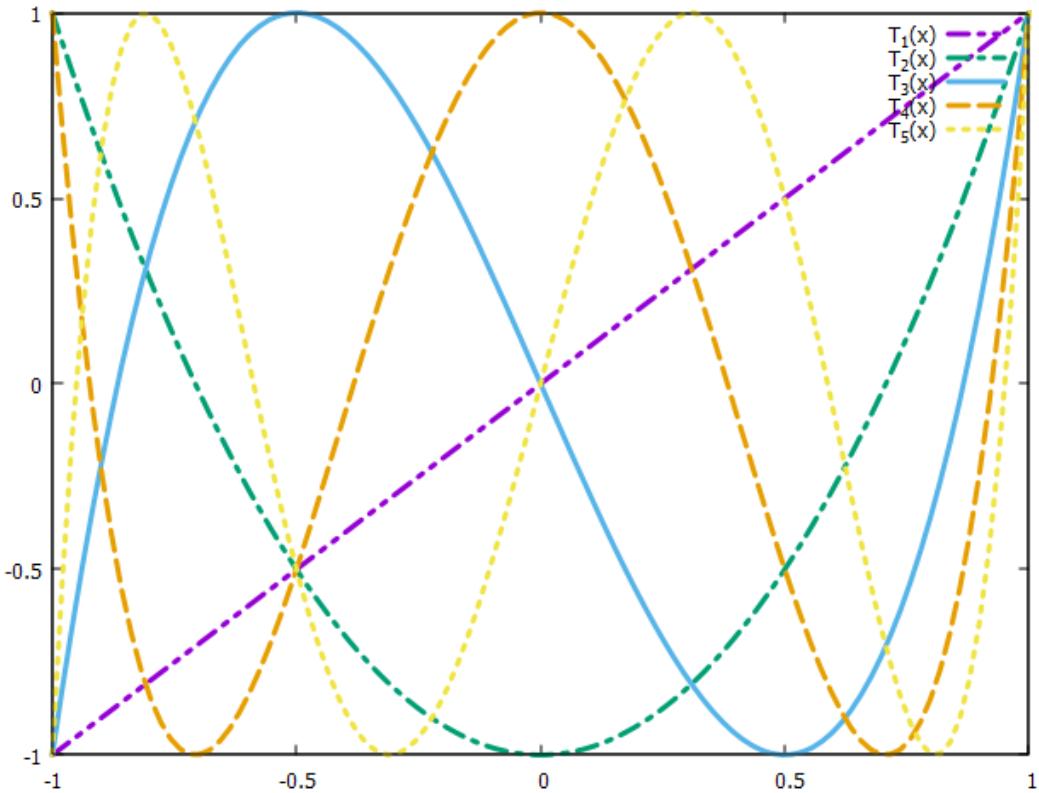


Figura 1.2: Primeros polinomios de Chebyshev.

Ceros y extremos de los polinomios de Chebyshev

Vamos a estudiar ahora los ceros y los extremos de los polinomios de Chebyshev, comenzamos buscando los ceros de los polinomios. Puesto que $T_{n+1}(\cos \theta) = \cos((n+1)n\theta)$ y $\cos((n+1)\theta)$ se anula para

$$\theta_j^{(n)} := \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Tenemos que los puntos

$$\xi_j^{(n)} := \cos \theta_j^{(n)} = \cos \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)}, \quad j = 0, \dots, n, \quad (1.5)$$

pertenecen a $(-1, 1)$, son todos distintos y satisfacen $T_{n+1}(\xi_j^{(n)}) = 0$. Puesto que $T_{n+1}(x)$ es un polinomio de grado $n+1$, sabemos que tiene exactamente $n+1$ ceros; por tanto, los $\xi_j^{(n)}$ definidos en (1.5) son todos los ceros de $T_{n+1}(x)$. Los ceros de los polinomios de Chebyshev son proyecciones sobre el eje de abscisas de puntos equidistantes de la circunferencia centrada en el origen y de radio 1. Todos los arcos determinados por dos puntos consecutivos son iguales a $\frac{\pi}{n+1}$.

En la figura 1.3 vemos los ceros del polinomio de Chebyshev de grado 11.

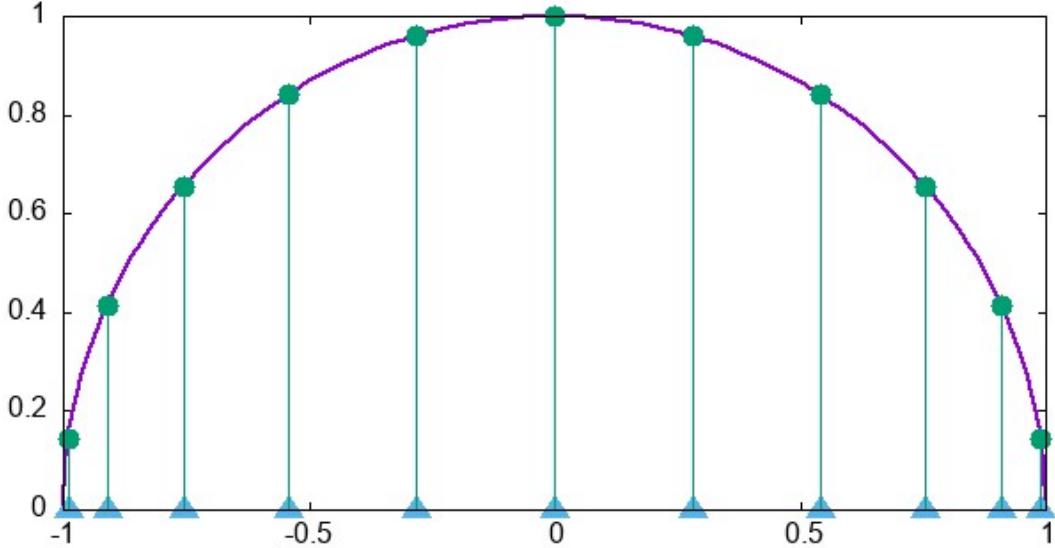


Figura 1.3: Ceros del polinomio de Chebyshev de grado 11.

Buscamos ahora los extremos del polinomio T_n . Puesto que $T_n(x)$ toma valores en $[-1, 1]$, está claro que $-1 \leq T_n(x) \leq 1$ y por lo tanto los valores $x \in [-1, 1]$ tales que $|T_n(x)| = 1$ serán sus puntos extremos. Teniendo en cuenta que $\cos k\pi = (-1)^k, k \in \mathbb{Z}$, si tomamos

$$\varphi_k^{(n)} := \frac{k\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

entonces los puntos

$$\eta_k^{(n)} := \cos \varphi_k^{(n)} = \cos \frac{k\pi}{n} \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

pertenecen a $[-1, 1]$, son todos distintos y satisfacen $T_n(\eta_k^{(n)}) = (-1)^k$. Podemos observar que

$$1 = \eta_0^{(n)} > \eta_1^{(n)} > \dots > \eta_{n-1}^{(n)} > \eta_n^{(n)} = -1,$$

luego los puntos $\eta_1^{(n)}, \dots, \eta_{n-1}^{(n)}$ están contenidos en $(-1, 1)$ y son extremos relativos de $T_n(x)$ por lo que

$$T_n'(\eta_k^{(n)}) = 0 \quad k = 1, \dots, n-1,$$

y, como $T_n'(x)$ es un polinomio de grado $n-1$, tenemos que $\eta_1^{(n)}, \dots, \eta_{n-1}^{(n)}$ son todos sus ceros y por lo tanto $\eta_0^{(n)} = 1$ y $\eta_n^{(n)} = -1$ no son puntos críticos de $T_n(x)$.

1.4. Polinomios trigonométricos

Denotamos por \mathcal{T}_n el espacio de *polinomios trigonométricos* de grado menor o igual que n , generado por las funciones

$$1, \cos \theta, \sin \theta, \dots, \cos n\theta, \sin n\theta,$$

de manera que los elementos de \mathcal{T}_n son las funciones de la forma

$$t(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta),$$

donde $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ para todo $k = 1, \dots, n$.

Los polinomios trigonométricos tienen propiedades y aplicaciones muy interesantes. Para el desarrollo de este trabajo vamos a necesitar el siguiente teorema.

Teorema 1.3. *Si el polinomio trigonométrico*

$$t(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta),$$

es un polinomio trigonométrico par, entonces existe $p \in \mathcal{P}_n$ tal que $t(\theta) = p(\cos \theta)$.

Demostración. Por ser $t(\theta)$ una función par tenemos que $t(\theta) = t(-\theta)$, es decir,

$$\begin{aligned} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(-k\theta) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(-k\theta) &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) - \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta) \\ &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos(k\theta) + \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta), \end{aligned}$$

luego

$$\sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta) = 0.$$

Además, puesto que las funciones $\sin(k\theta)$ son ortogonales,

$$0 = \sum_{k=1}^n \int_{-\pi}^{\pi} b_k \sin(k\theta) \sin(j\theta) d\theta = b_j \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(j\theta) d\theta = \pi b_j, \quad j = 1, \dots, n,$$

se tiene que $b_1 = \dots = b_n = 0$ y por lo tanto,

$$t(\theta) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(\cos \theta).$$

Por último, llamando

$$p(x) = \sum_{k=0}^n a_k T_k(x),$$

se tiene $p(\cos \theta) = t(\theta)$. □

Capítulo 2

Interpolación en los nodos de Chebyshev

Hemos estudiado previamente, en el lema de Lebesgue, la relación que existe entre el máximo error de aproximación M_k y la distancia de la función al espacio de polinomios \mathcal{P}_k , E_k , a través de la constante de Lebesgue Λ_k . Puesto que E_k depende de f y de k pero no de X , el efecto que tiene X en el valor de M_k proviene de Λ_k . El objetivo de este capítulo será llegar a la conclusión de que los ceros de los polinomios de Chebyshev constituyen una sucesión de nodos que da lugar a una constante de Lebesgue pequeña para la interpolación de Lagrange, proporcionando cotas uniformes del error (1.3) cuyo tamaño no es demasiado grande en relación con E_k .

A lo largo del capítulo probaremos principalmente dos resultados. El primero, que existe una constante positiva c de manera que

$$\Lambda_k(X) > \frac{2}{\pi} \log(k+1) + c, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

para cualquier esquema triangular X . Como consecuencia, para todos los esquemas triangulares tenemos divergencia de la constante de Lebesgue, es decir, $\Lambda_k(X) \rightarrow \infty$ cuando $k \rightarrow \infty$. G. Faber dedujo la divergencia de la constante de Lebesgue de la propiedad análoga de las sumas de Fourier trigonométricas. Utilizando la divergencia de la constante de Lebesgue obtuvo su resultado negativo sobre la convergencia de los interpolantes,

Teorema 2.1 (Teorema de Faber). *Para cada X existe una función f continua en I tal que la sucesión de funciones $(L_k(f, X; x))_{k=0}^{\infty}$ no converge uniformemente a f .*

Como consecuencia de este hecho, un solo esquema triangular X no permite aproximar cualquier función continua. El segundo resultado que demostraremos es

$$\Lambda_k(T) \leq \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.2)$$

donde T es el esquema triangular de nodos cuya fila k está constituida por $\xi_0^{(k)}, \dots, \xi_k^{(k)}$, los ceros del polinomio de Chebyshev de grado $k+1$. Veamos entonces cómo se comportan los polinomios de Lagrange y la constante de Lebesgue al interpolar sobre T .

2.1. Los polinomios de Lagrange y la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev

Si definimos el polinomio, $\omega_{n+1}(x) := (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, entonces los polinomios fundamentales l_j pueden escribirse de la siguiente manera,

$$l_j(x) = \frac{\omega_{n+1}(x)}{(x - x_j)\omega'_{n+1}(x_j)}, \quad j = 0, \dots, n.$$

Sustituyendo esta expresión en la formula de interpolación de Lagrange, obtenemos

$$L_n(f, X; x) = \omega_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n \frac{f(x_j)}{(x - x_j) \omega'_{n+1}(x_j)}.$$

Proposición 2.1. *La función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev admite la expresión,*

$$\lambda_n(T; \cos \theta) = \frac{|\cos(n+1)\theta|}{n+1} \sum_{j=0}^n \frac{\sin \theta_j^{(n)}}{|\cos \theta - \cos \theta_j^{(n)}|}, \quad (2.3)$$

donde $\theta_j^{(n)} = \frac{(2j+1)\pi}{2(n+1)} \in (0, \pi)$, $j = 0, \dots, n$.

*Demuestra*o. Teniendo en cuenta que al interpolar sobre el esquema triangular de nodos de Chebyshev se tiene que $\omega_{n+1}(x) = 2^{-n} T_{n+1}(x)$, podemos particularizar la fórmula de Lagrange,

$$L_n(f, T; x) = T_{n+1}(x) \sum_{j=0}^n \frac{f(\xi_j^{(n)})}{(x - \xi_j^{(n)}) T'_{n+1}(\xi_j^{(n)})}.$$

Ahora bien, puesto que

$$T'_{n+1}(\cos \theta) = (n+1) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta}, \quad \theta \in (0, \pi),$$

y $\xi_j^{(n)} = \cos \theta_j^{(n)}$, se tiene que,

$$T'_{n+1}(\xi_j^{(n)}) = \sin \frac{(2j+1)\pi}{2} \frac{n+1}{\sqrt{1 - \cos^2 \theta_j^{(n)}}} = (-1)^j \frac{n+1}{\sqrt{1 - (\xi_j^{(n)})^2}},$$

es decir,

$$L_n(f, T; x) = \frac{T_{n+1}(x)}{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{f(\xi_j^{(n)}) \sqrt{1 - (\xi_j^{(n)})^2}}{x - \xi_j^{(n)}}.$$

Por último, usando la forma trigonométrica de los polinomios de Chebyshev y $\xi_j^{(n)} = \cos \theta_j^{(n)}$, tenemos

$$L_n(f, T; \cos \theta) = \frac{\cos(n+1)\theta}{n+1} \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{f(\cos \theta_j^{(n)})}{\cos \theta - \cos \theta_j^{(n)}} \sin \theta_j^{(n)},$$

de donde se deduce (2.3) □

En la siguiente figura hemos calculado la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev correspondientes a grado 10.

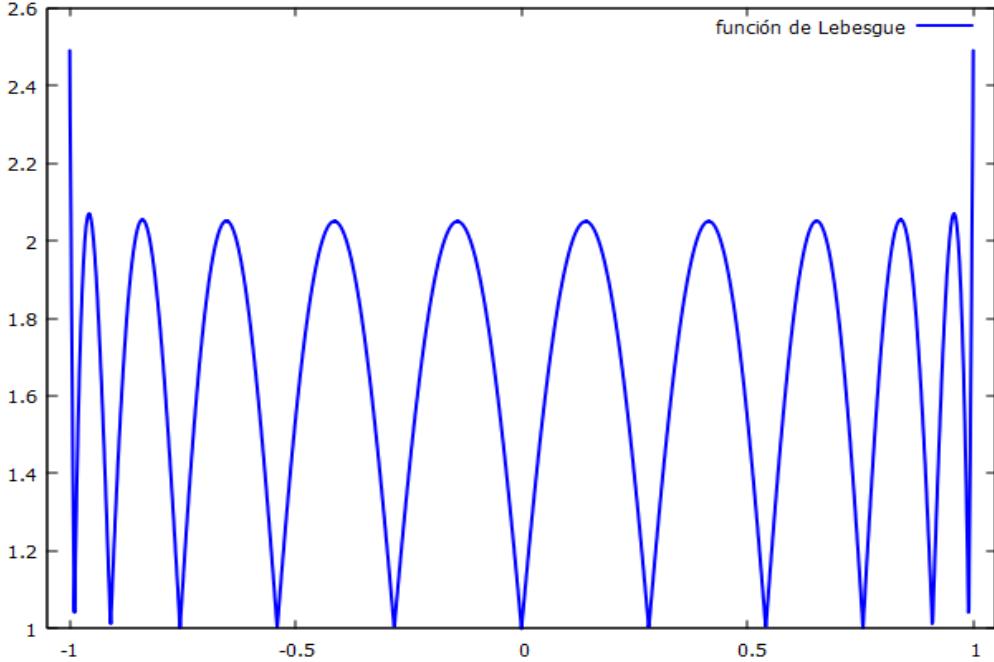


Figura 2.1: Función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev correspondientes a grado 10.

2.2. Valor máximo de la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev

Para llegar a demostrar los resultados que mencionamos al comienzo del capítulo necesitamos probar primero que la función de Lebesgue $\lambda_n(T; x)$ alcanza su valor máximo en $x = 1$,

$$\Lambda_n(T) = \lambda_n(T; 1), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.4)$$

que será el objetivo al que llegaremos en esta sección.

Proposición 2.2. *El polinomio trigonométrico*

$$d(\theta) := \frac{1}{2(n+1)} \left(1 + \cos(n+1)\theta + 2 \sum_{j=1}^n \cos j\theta \right) \in \mathcal{T}_{n+1}, \quad (2.5)$$

admite la expresión

$$d(\theta) = \frac{\sin(n+1)\theta \cos(\theta/2)}{2(n+1)\sin(\theta/2)}, \quad (2.6)$$

para $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$.

Demostración. Puesto que

$$\sin a - \sin b = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

tenemos

$$\sin(j+1/2)\theta - \sin(j-1/2)\theta = 2 \sin(\theta/2) \cos j\theta,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} 2 \sin(\theta/2) \sum_{j=1}^n \cos j\theta &= \sum_{j=1}^n \sin(j+1/2)\theta - \sin(j-1/2)\theta \\ &= \sin(1+1/2)\theta - \sin(1-1/2)\theta + \sin(2+1/2)\theta - \sin(2-1/2)\theta + \cdots + \sin(n+1/2)\theta - \sin(n-1/2)\theta \\ &= \sin(n+1/2)\theta - \sin(\theta/2), \end{aligned}$$

ya que la serie es telescopica. Así tenemos que

$$2 \sum_{j=1}^n \cos j\theta = \frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)} - 1,$$

luego

$$\begin{aligned} 1 + \cos(n+1)\theta + 2 \sum_{j=1}^n \cos j\theta &= \frac{\sin(n+1/2)\theta}{\sin(\theta/2)} + \cos(n+1)\theta \\ &= \frac{\sin(n+1-1/2)\theta + \sin(\theta/2)\cos(n+1)\theta}{\sin(\theta/2)}. \end{aligned}$$

Usando la propiedad

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a,$$

obtenemos

$$\frac{\sin(n+1)\theta \cos(\theta/2) - \sin(\theta/2) \cos(n+1)\theta + \sin(\theta/2) \cos(n+1)\theta}{\sin(\theta/2)},$$

y simplificando se sigue el resultado. \square

Proposición 2.3. *Sea $d(\theta)$ la función definida en (2.5) y sean los nodos*

$$\theta_k := (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Entonces las funciones $d_k(\theta) := d(\theta - \theta_k)$, $k = 0, 1, \dots, 2n+1$, verifican

$$d_k(\theta_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ 1, & j = k, \end{cases}$$

es decir, son soluciones fundamentales de un problema de interpolación trigonométrica en un subespacio de \mathcal{T}_{n+1} de dimensión $2n+2$, además, los únicos ceros de d_k en $[0, 2\pi]$ son los θ_j con $j \neq k$. El correspondiente polinomio de interpolación que verifica $t(\theta_j) = y_j$ para $j = 0, \dots, 2n+1$ es

$$t(\theta) = \sum_{k=0}^{2n+1} y_k d_k(\theta).$$

Demostración. De las formulas de adición trigonométricas se deduce que $d_k(\theta) \in \mathcal{T}_{n+1}$. Es inmediato comprobar que $d_k(\theta_k) = 1$, ya que

$$\cos j(\theta_k - \theta_k) = 1, \quad j \in \mathbb{Z},$$

luego

$$\frac{1}{2(n+1)} \left(1 + \cos((n+1)(\theta_k - \theta_k)) + 2 \sum_{j=1}^n \cos j(\theta_k - \theta_k) \right) = \frac{1}{2(n+1)} (1 + 1 + 2 \sum_{j=1}^n 1),$$

por lo que $d_k(\theta_k) = 1$.

Para $j \neq k$, se tiene que

$$\theta_j - \theta_k = \frac{(j-k)\pi}{n+1},$$

y por (2.6)

$$d_k(\theta_j) = d(\theta_j - \theta_k) = \frac{\sin(j-k)\pi \cos \frac{(j-k)\pi}{2(n+1)}}{\sin \frac{(j-k)\pi}{2(n+1)}} = 0,$$

ya que

$$\sin(j-k)\pi = 0 \quad y \quad \sin \frac{(j-k)\pi}{2(n+1)} \neq 0.$$

Veamos que θ_j con $j \neq k$ son los únicos ceros de d_k . Si $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\theta \neq \theta_k$, tenemos por la proposición 2.2

$$d_k(\theta) = \frac{\sin(n+1)(\theta - \theta_k) \cos((\theta - \theta_k)/2)}{2(n+1) \sin((\theta - \theta_k)/2)}.$$

Por tanto, $d_k(\theta)$ se anula solamente en los ceros de la función $\sin(n+1)(\theta - \theta_k)$ o en los ceros de $\cos((\theta - \theta_k)/2)$, y estos corresponden a los valores de θ_j cuando $j \neq k$. \square

A partir de aquí podemos obtener una expresión de la función trigonométrica de Lebesgue y deducir que es periódica de periodo $\frac{\pi}{n+1}$. La siguiente figura muestra la gráfica de la función de Lebesgue trigonométrica de grado 10.

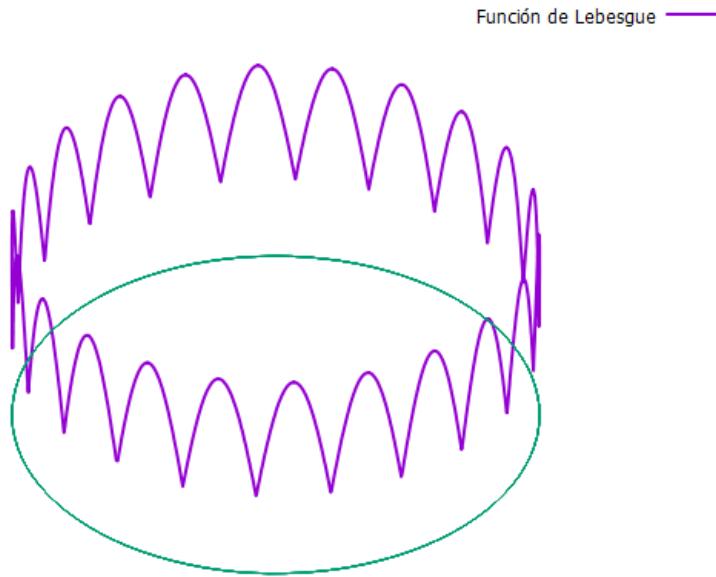


Figura 2.2: Función de Lebesgue trigonométrica de grado 10.

Proposición 2.4. *La función trigonométrica de Lebesgue*

$$\delta_n(\theta) := \sum_{k=0}^{2n+1} |d_k(\theta)|,$$

verifica

$$\delta_n\left(\theta + \frac{\pi}{n+1}\right) = \delta_n(\theta).$$

Demostración. Sea $d_k(\theta) = d(\theta - \theta_k)$, con

$$\theta_k := (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \theta + \frac{\pi}{n+1} - \theta_k &= \theta + \frac{\pi}{n+1} - (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \theta + \frac{2\pi - (2k+1)\pi}{2(n+1)} = \theta + \frac{(-2k+1)\pi}{2(n+1)} = \\ &= \theta - (2k-1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \theta - (2(k-1)+1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \theta - \theta_{k-1}. \end{aligned}$$

Así $d_k\left(\theta + \frac{\pi}{n+1}\right) = d_{k-1}(\theta)$, y como además

$$\theta_{-1} = (2(-1) + 1) \frac{\pi}{2(n+1)} = -\frac{\pi}{2(n+1)},$$

y

$$\theta_{2n+1} = (2(2n+1) + 1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{(4n+4)\pi}{2(n+1)} - \frac{\pi}{2(n+1)} = 2\pi - \frac{\pi}{2(n+1)},$$

tenemos que $d_{-1}(\theta) = d_{2n+1}(\theta)$ y por lo tanto,

$$\delta_n\left(\theta + \frac{\pi}{n+1}\right) = \sum_{k=0}^{2n+1} \left|d_k\left(\theta + \frac{\pi}{n+1}\right)\right| = \sum_{k=0}^{2n+1} |d_{k-1}(\theta)| = \sum_{k=-1}^{2n} |d_k(\theta)| = \delta_n(\theta).$$

□

Proposición 2.5. *Sea $d(\theta)$ la función definida en (2.5) y sean los nodos*

$$\theta_k := (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad k = 0, 1, \dots, 2n+1.$$

Entonces la función $d_k(\theta) := d(\theta - \theta_k)$ verifica

$$\begin{aligned} d'_k(\theta_{k+n+1}) &= 0, & \text{si } 0 \leq k \leq n, \\ d'_k(\theta_{k-(n+1)}) &= 0, & \text{si } n \leq k \leq 2n+1. \end{aligned}$$

Demostación. Derivando en la fórmula

$$d_k(\theta) := \frac{1}{2(n+1)} \left(1 + \cos((n+1)(\theta - \theta_k)) + 2 \sum_{j=1}^n \cos j(\theta - \theta_k) \right),$$

obtenemos

$$d'_k(\theta) = -\frac{1}{2} \sin((n+1)(\theta - \theta_k)) - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n j \sin j(\theta - \theta_k).$$

Ahora, si $0 \leq k \leq n$, tenemos que $k+n+1 \in \{0, 1, \dots, 2n+1\}$ y

$$\theta_{k+n+1} - \theta_k = (2(k+n+1) + 1) \frac{\pi}{2(n+1)} - (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{(k+n+1)\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{n+1} = \pi.$$

Por tanto, $d''_k(\theta_{k+n+1})$ es una suma de términos en los que aparece un factor de la forma $\sin j\pi = 0$, $j = 1, \dots, n+1$, y deducimos que $d''_k(\theta_{k+n+1}) = 0$.

Análogamente, si $k \geq n$, entonces

$$\theta_{k-(n+1)} - \theta_k = (2(k-(n+1)) + 1) \frac{\pi}{2(n+1)} - (2k+1) \frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{(k-(n+1))\pi}{n+1} - \frac{k\pi}{n+1} = -\pi,$$

de donde obtenemos $d''_k(\theta_{k-(n+1)}) = 0$. □

Por la proposición 2.3 y la proposición 2.5, $d_k(\theta)$ tiene $2n$ raíces simples y una raíz doble en el intervalo $[0, 2\pi]$, y $d_k(\theta) \neq 0$ en el intervalo $(-\pi/2(n+1), \pi/2(n+1))$ ya que θ_k no pertenece a dicho intervalo para ningún k entero.

La función $\delta_n(\theta)$ coincide con un polinomio trigonométrico

$$t(\theta) = \sum_{k=0}^{2n+1} \varepsilon_k d_k(\theta),$$

en el intervalo $[-\pi/2(n+1), \pi/2(n+1)]$, donde $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ se elige de manera que $\varepsilon_k d_k(\theta) > 0$ para todo $\theta \in (-\pi/2(n+1), \pi/2(n+1))$. Por tanto, ε_k tiene el mismo signo que $d_k(0) = d(-\theta_k)$, donde

$$d_k(0) = d(-\theta_k) = \frac{-\sin(n+1)\theta_k \cos(\theta_k/2)}{-2(n+1)\sin(\theta_k/2)} = \frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2(n+1)} \frac{1}{\tan\frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}} = \frac{(-1)^k}{2(n+1)} \frac{1}{\tan\frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}}. \quad (2.8)$$

Además

$$0 < \frac{\pi}{4(n+1)} \leq \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \leq \frac{(2n+1)\pi}{4(n+1)} < \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, \dots, n,$$

$$\frac{\pi}{2} < \frac{(2n+3)\pi}{4(n+1)} \leq \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \leq \frac{(4n+3)\pi}{4(n+1)} < \pi, \quad k = n+1, \dots, 2n+1,$$

luego se tiene

$$\begin{aligned} \tan\frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} &> 0 \quad k = 0, \dots, n, \\ \tan\frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} &< 0 \quad k = n+1, \dots, 2n+1, \end{aligned}$$

por lo que

$$\varepsilon_k = \begin{cases} (-1)^k & k = 0, \dots, n, \\ (-1)^{k+1} & k = n+1, \dots, 2n+1. \end{cases}$$

De esta manera obtenemos la expresión del polinomio trigonométrico que coincide con δ en el intervalo $[-\pi/2(n+1), \pi/2(n+1)]$

$$t(\theta) := \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k(\theta) - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k d_k(\theta). \quad (2.9)$$

Proposición 2.6. *La función $t(\theta)$ definida en (2.9) es una función par*

Demostración. Tenemos que ver que los θ_k dados por (2.7) verifican $\theta_{2n-k+1} = 2\pi - \theta_k$, en efecto

$$\theta_k = (2k+1)\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{k\pi}{n+1} + \frac{\pi}{2(n+1)},$$

y

$$\theta_{2n-k+1} = (2(2n-k+1)+1)\frac{\pi}{2(n+1)} = \frac{(4n+4)\pi}{2(n+1)} - \frac{k\pi}{n+1} - \frac{\pi}{2(n+1)} = 2\pi - \theta_k. \quad (2.10)$$

Por la definición de las funciones $d_k(\theta)$, tenemos

$$d_k(-\theta) = \frac{1}{2(n+1)} \left(1 + 2 \sum_{j=0}^n \cos j(\theta + \theta_k) + \cos((n+1)(\theta + \theta_k)) \right),$$

y deducimos que

$$d_k(-\theta) = d_{2n-k+1}(\theta), \quad k = 0, \dots, 2n+1. \quad (2.11)$$

Así obtenemos

$$\begin{aligned} t(-\theta) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k d_{2n-k+1}(\theta) - \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^k d_{2n-k+1}(\theta) = \sum_{k=n+1}^{2n+1} (-1)^{2n-k+1} d_k(\theta) - \sum_{k=0}^n (-1)^{2n-k+1} d_k(\theta) \\ &= - \sum_{n+1}^{2n+1} (-1)^{k+1} d_k(\theta) + \sum_{k=0}^n (-1)^k d_k(\theta) = t(\theta). \end{aligned}$$

□

Como consecuencia de la proposición 2.4, tenemos que,

$$\max_{0 \leq \theta \leq 2\pi} |\delta_n(\theta)| = \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} |\delta_n(\theta)|, \quad (2.12)$$

luego el problema de determinar el valor máximo de la función trigonométrica de Lebesgue se reduce a examinar el intervalo $[\frac{-\pi}{2(n+1)}, \frac{\pi}{2(n+1)}]$. En la siguiente proposición deducimos que se alcanza en el origen.

Proposición 2.7. *Sea $t(\theta)$ el polinomio trigonométrico par dado por (2.9) y $\bar{\theta}$ el lugar donde la función t alcanza su valor máximo en el intervalo $[\frac{-\pi}{2(n+1)}, \frac{\pi}{2(n+1)}]$, es decir,*

$$\Delta_n := \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} t(\theta) = t(\bar{\theta}).$$

Entonces $\bar{\theta} = 0$ y

$$\Delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}.$$

Demostración. Supongamos primero que $\bar{\theta} = \pm\pi/2(n+1)$, es decir, $\bar{\theta} = \theta_0$ o $\bar{\theta} = \theta_{2n+1} - 2\pi = \theta_{-1}$. Entonces por la proposición 2.3 y la expresión (2.9), tenemos que $t(\bar{\theta}) = 1$ en ambos casos. Sea

$$s(\theta) := \sum_{k=0}^{2n+1} d_k(\theta),$$

que cumple $s(\theta_j) = 1$, $j = 0, \dots, 2n+1$. Por (2.8), tenemos que

$$s(-\theta) = \sum_{k=0}^{2n+1} d_k(-\theta) = \sum_{k=0}^{2n+1} d_{2n+1-k}(-\theta) = s(\theta).$$

Luego $1 - s$ es un polinomio trigonométrico par de grado $n+1$. Por tanto, existe $u \in \mathcal{P}_{n+1}$ tal que $u(\cos \theta) = 1 - s(\theta)$. Como θ_j son valores distintos en $[0, \pi]$, tenemos que u es un polinomio de grado menor o igual que $n+1$ que se anula en $\xi_j = \cos \theta_j$, $j = 0, \dots, n$. Si el polinomio u no es la función nula, entonces tiene $n+1$ raíces simples en ξ_j , $j = 0, \dots, n$, y cambia de signo en cada ξ_j , $j = 0, \dots, n$. En particular, existe θ^* cerca de θ_0 tal que $u(\cos \theta^*) < 0$ y $s(\theta^*) = 1 - u(\cos \theta^*) > 1$, por lo que

$$1 = \Delta_n = \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} t(\theta) \geq t(\theta^*) = \delta_n(\theta^*) \geq |s(\theta^*)| > 1,$$

lo cual es una contradicción. Por otro lado, si u es identicamente nula, entonces tendríamos que $s = 1$ y

$$1 = \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} t(\theta) \geq t(\theta) = \delta_n(\theta) \geq s(\theta) = 1, \quad \theta \in \left[\frac{-\pi}{2(n+1)}, \frac{\pi}{2(n+1)}\right],$$

lo que implica que

$$t(\theta) = 1, \quad \theta \in \left[\frac{-\pi}{2(n+1)}, \frac{\pi}{2(n+1)}\right] = [-\theta_0, \theta_0].$$

Como $t(\theta)$ es un polinomio trigonométrico par podemos escribir $t(\theta) = p(\cos \theta)$, de donde se deduce que $p \in \mathcal{P}_{n+1}$ verifica $p(x) = 1$, $x \in [\cos \theta_0, 1]$. Por el teorema fundamental del álgebra, p es el polinomio 1 y

$$t(\theta) = 1, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

lo cual es una contradicción, ya que $t(\theta_1) = -1$.

Supongamos ahora que $0 < |\bar{\theta}| < \pi/2(n+1)$, entonces tenemos que $t(\bar{\theta}) = t(-\bar{\theta})$. Sea $p \in \mathcal{P}_{n+1}$ el polinomio tal que $t(\theta) = p(\cos \theta)$. Derivando tenemos

$$t'(\theta) = p'(\cos \theta) \sin \theta.$$

Como $\bar{\theta} \in (0, \theta_0)$ anula la derivada de t , y $\sin \bar{\theta} \neq 0$, tenemos $p'(\cos \bar{\theta}) = 0$.

Por otro lado, $p(\cos \theta_k) = t(\theta_k) = (-1)^k$ para $k = 0, \dots, n$. Por el teorema de Bolzano p' tiene n raíces distintas en $(\cos \theta_n, \cos \theta_0)$. Así que p' tiene n raíces distintas en $(-1, 1)$, lo que implica que p' es el polinomio nulo y $t(\theta) = p(\cos \theta)$ es constante. Esto contradice que $t(\theta_0) = 1$ y $t(\theta_1) = -1$.

De esta manera llegamos a la conclusión de que $\bar{\theta} = 0$. Luego hemos probado que $\Delta_n = \delta_n(0)$ y, por (2.8),

$$(-1)^k d_k(0) = \frac{1}{2(n+1)} \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)},$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} |d_k(0)| = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2(n+1)} \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{2(n+1)} \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \\ &= 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2(n+1)} \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}. \end{aligned}$$

□

Ahora podemos demostrar (2.4), el resultado que mencionamos al principio de esta sección.

Teorema 2.2. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$\Lambda_n(T) = \lambda_n(T; 1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}.$$

Demuestra Si $n = 0$ el resultado es trivial. Supongamos que $n \geq 1$. Como ya comprobamos en (2.11), $d_k(\theta) + d_{2n-k+1}(\theta)$ es una función par, luego es un polinomio de senos

$$p_k(\cos \theta) = d_k(\theta) + d_{2n-k+1}(\theta), \quad k = 0, \dots, n.$$

Los ceros de los polinomios de Chebyshev de grado n son

$$\xi_i^{(n)} = \cos \theta_i^{(n)}, \quad \theta_i^{(n)} = (2i+1) \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad i = 0, \dots, n.$$

Además, para $i = 0, \dots, n$,

$$p_k(\xi_i^{(n)}) = d_k(\theta_i^{(n)}) + d_{2n-k+1}(\theta_i^{(n)}) = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k, \end{cases} \quad (2.13)$$

y, como vimos en (2.10), $\theta_{2n-k+1}^{(n)} = 2\pi - \theta_k^{(n)}$ por lo que,

$$\cos((n+1)(\theta - \theta_k^{(n)})) + \cos((n+1)(\theta - \theta_{2n-k+1}^{(n)})) = 0.$$

Se deduce que $p_k(x)$ es de grado menor o igual que n y cumple (2.13), por lo que

$$p_k(x) = l_{k,n}(T; x), \quad k = 0, \dots, n.$$

Por lo tanto,

$$\lambda_n(T; x) = \sum_{k=0}^n |p_k(x)|,$$

luego

$$\begin{aligned} \lambda_n(T; \cos \theta) &= \sum_{k=0}^n |p_k(\cos \theta)| = \sum_{k=0}^n |d_k(\theta) + d_{2n-k+1}(\theta)| \leq \sum_{k=0}^n |d_k(\theta)| + \sum_{k=0}^n |d_{2n-k+1}(\theta)| \\ &= \sum_{k=0}^n |d_k(\theta)| + \sum_{k=n+1}^{2n+1} |d_k(\theta)|, \end{aligned}$$

es decir,

$$\lambda_n(T, \cos \theta) \leq \delta_n(\theta).$$

Por la fórmula (2.12),

$$\delta_n(\theta) \leq \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} |\delta_n(\theta)| = \Delta_n := \max_{-\pi/2(n+1) \leq \theta \leq \pi/2(n+1)} t(\theta),$$

así,

$$\lambda_n(T; x) \leq \Delta_n.$$

Por tanto, se verifica la siguiente desigualdad

$$\Lambda_n(T) \leq \Delta_n.$$

Por otro lado, por (2.3),

$$\lambda(T, 1) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}}{|1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}|} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}}{1 - \cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)}},$$

ya que $1 - \cos \theta > 0$, con $\theta \in (0, \pi)$, y teniendo en cuenta que

$$\sin \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} = 2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)},$$

$$\cos \frac{(2k+1)\pi}{2(n+1)} = \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)},$$

obtenemos, por la proposición 2.7

$$\begin{aligned} \lambda_n(T, 1) &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}}{1 - \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} + \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{2 \sin \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} \cos \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}}{2 \sin^2 \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}} \\ &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{\cos \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}}{\sin \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)}} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} = \Delta_n. \end{aligned}$$

Así, tenemos que

$$\Delta_n = \lambda_n(T; 1) \leq \Lambda_n(T) \leq \Delta_n,$$

es decir,

$$\lambda_n(T; 1) = \Lambda_n(T) = \Delta_n.$$

□

2.3. Cotas para la constante de Lebesgue en los nodos de Chebyshev

Como mencionamos al principio del capítulo, vamos a encontrar tanto una cota superior como inferior para la constante de Lebesgue, en concreto para el esquema triangular T dado por los nodos de Chebyshev. Daremos además el valor de la constante c de la desigualdad (2.1), que junto con la desigualdad (2.2) queda

$$\frac{2}{\pi} \log(n+1) + \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right) < \Lambda_n(T) \leq \frac{2}{\pi} \log(n+1) + 1,$$

donde γ es la constante de Euler y $n \in \mathbb{N}$. En la siguiente figura podemos observar estas cotas para $n = 10$.

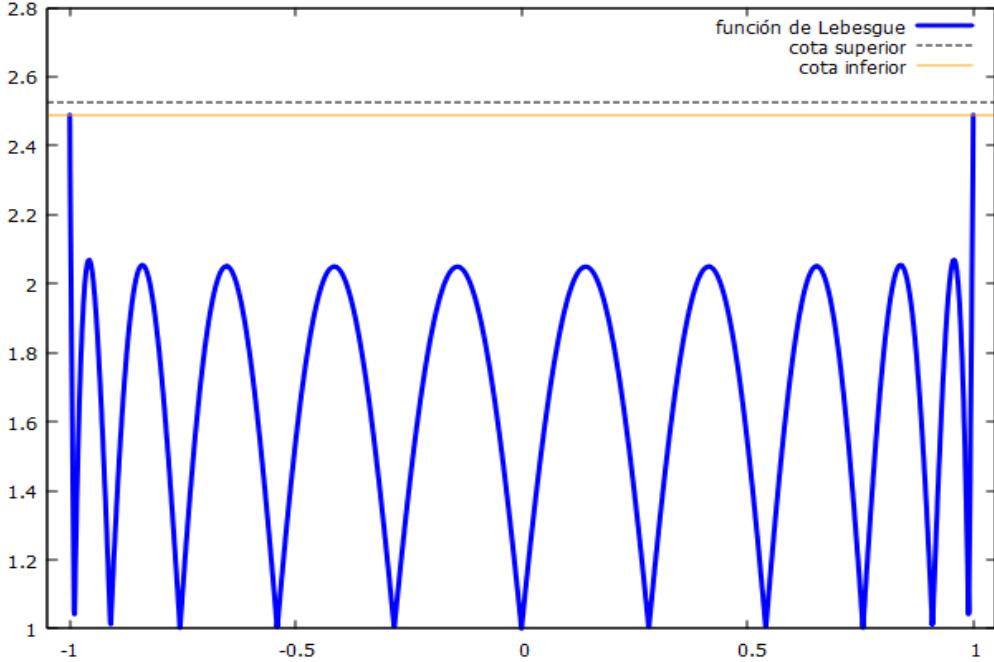


Figura 2.3: Función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev correspondientes a grado 10 y cotas para la constante de Lebesgue.

Proposición 2.8. *Sea Δ_n definido como en la proposición 2.7, entonces se tiene que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Delta_n - \frac{2}{\pi} \log(n+1) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right) \approx 0.9625,$$

donde γ es la constante de Euler.

Demostración. Sea a_n la sucesión de sumas de Riemann de la integral

$$\int_0^{\pi/2} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx,$$

dada por

$$a_n := \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2k+1)\pi} \right). \quad (2.14)$$

Como

$$\int_0^t \left(\cot x - \frac{1}{x} \right) dx = \log \frac{\sin t}{t},$$

tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \log \frac{2}{\pi}. \quad (2.15)$$

Como vimos en la proposición 2.7,

$$\Delta_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)},$$

luego

$$\frac{\pi}{2} \Delta_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2k+1)\pi} \right) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = a_n + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1},$$

Por otro lado, observemos que

$$\frac{\pi}{2} \Delta_n - \log(n+1) = a_n + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \log(n+1).$$

Si desarrollamos la suma tenemos

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = 2 + 2/3 + 2/5 + 2/7 + 2/9 + \cdots + 2/(2n+1),$$

y como se verifican las siguientes igualdades

$$2 \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} = 2 + 1 + 2/3 + 1/2 + 2/5 + 1/3 + 2/7 + 1/4 + 2/9 + \cdots + 1/n + 2/(2n+1) + 1/(n+1),$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \cdots + 1/n + 1/(n+1),$$

restándolas obtenemos

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} = 2 \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

Como además se cumple

$$-\log(n+1) = -2\log(2(n+1)) + \log(n+1) + \log 4,$$

podemos escribir

$$2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \log(n+1) = 2 \left(\sum_{k=1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \log(2(n+1)) \right) - \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \log(n+1) \right) + \log 4.$$

De la definición de la constante de Euler,

$$\gamma := \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{j} - \log m \right),$$

deducimos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \log(n+1) = \gamma + \log 4,$$

que junto con lo visto en (2.15) nos da el límite que buscamos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Delta_n - \frac{2}{\pi} \log(n+1) \right) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{2}{\pi} + \gamma + \log 4 \right) = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right). \quad (2.16)$$

□

Para acotar $\Delta_n(T)$, demostraremos que $\Delta_n - \frac{2}{\pi} \log(n+1)$ es una sucesión monótona decreciente en n . Para ello, vamos a necesitar primero un resultado sobre la convergencia monótona de sumas de Riemann, por lo que enunciamos a continuación el siguiente lema de D.J. Newman y T.J. Rivlin, cuya demostración puede encontrarse en la página 20 de [13].

Teorema 2.3 (Lema de Newman-Rivlin sobre la monotonía de sumas de Riemann). *Sea f una función definida en el intervalo $[0, 1]$, tal que f'' y f''' sean ambas no negativas en $[0, 1]$. Entonces las sumas de Riemann de la forma*

$$b_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{2k+1}{2(n+1)}\right), \quad (2.17)$$

son monótonas crecientes en n .

Teorema 2.4. La constante de Lebesgue en los nodos de Chebyshev verifica las siguientes desigualdades

$$\frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right) + \frac{2}{\pi} \log(n+1) < \Lambda_n(T) \leq 1 + \frac{2}{\pi} \log(n+1).$$

Demostración. Vamos a aplicarle el lema de Newman-Rivlin a la función

$$f(x) = \frac{1}{(\pi/2)x} - \cot \frac{\pi}{2}x. \quad (2.18)$$

El desarrollo en serie de Taylor de la función $\cot x$, para $0 < |x| < \pi$, es (Véase sección 4 del párrafo 24 del capítulo 6 de [10], fórmula 115)

$$\cot x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n} B_{2n} x^{2n-1}}{(2n)!} = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \dots,$$

donde B_{2n} son los números de Bernoulli, los cuales son positivos para n impar y negativos para n par, por lo que los coeficientes de la serie de potencias son todos negativos a excepción del primero y así,

$$\frac{1}{x} - \cot x = c_1 x + c_3 x^3 + \dots + c_{2n-1} x^{2n-1} + \dots,$$

donde $c_{2n-1} > 0$ para $n = 1, 2, \dots$, y por tanto, podemos concluir que f'' y f''' son ambas no negativas en $[0, 1]$. De esta manera, la sucesión b_n definida en (2.17), tomando la función de (2.18), es una sucesión monótona creciente en n , y como además la sucesión a_n que definimos en (2.14) cumple

$$a_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2k+1)\pi} \right) = -\frac{\pi}{2} b_n,$$

tenemos que a_n es una sucesión monótona decreciente en n , como podemos observar en la siguiente figura.

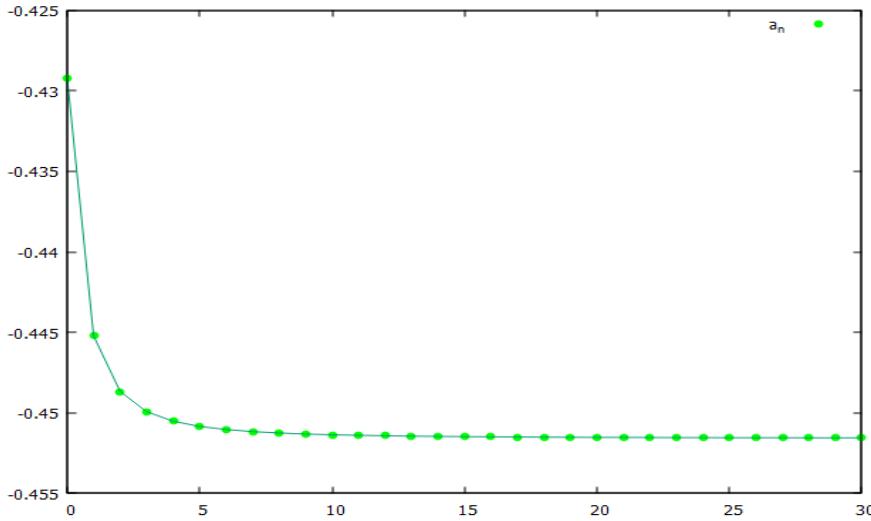


Figura 2.4: 30 primeros términos de la sucesión a_n .

Por otro lado, si definimos la sucesión

$$u_n = 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \log(n+1),$$

entonces

$$u_n - u_{n+1} = \log \frac{n+2}{n+1} - \frac{2}{2n+3},$$

es positivo para $n = 1$ y tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Además, la derivada de

$$u(x) := \log \frac{x+2}{x+1} - \frac{2}{2x+3},$$

es

$$\frac{-1}{(2x+3)^2(x+1)(x+2)} < 0, \quad x \geq 0.$$

Y como $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = 0$ $u(x)$ es una función positiva y decreciente. Luego u_n es una sucesión monótona estrictamente decreciente. En la siguiente figura están representados los 30 primeros términos de la sucesión u_n .

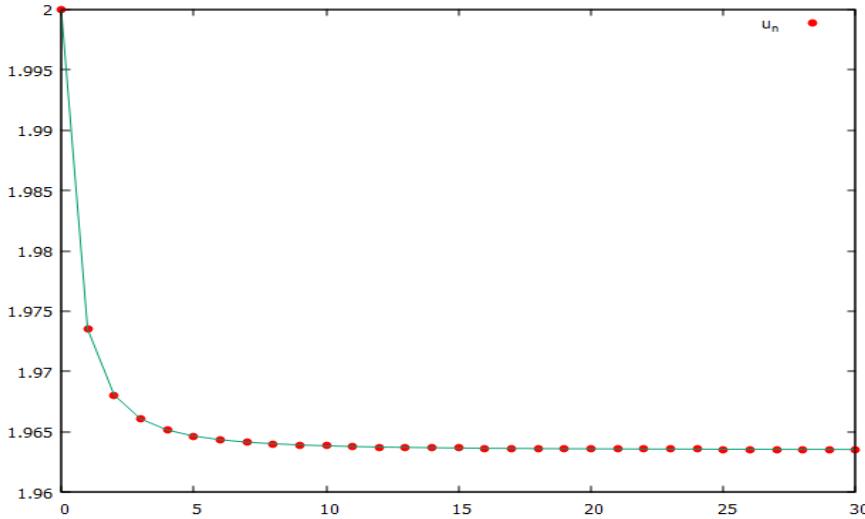


Figura 2.5: 30 primeros términos de la sucesión u_n .

Para terminar la demostración de las desigualdades, definimos la siguiente sucesión

$$\tau_n = \Lambda_n(T) - \frac{2}{\pi} \log(n+1),$$

puesto que en el teorema 2.2 vimos que $\Lambda_n(T) = \Delta_n$ observamos que $\tau_0 = \Lambda_0(T) - (2/\pi) \log 1 = \cot(\pi/4) = 1$ y además

$$a_n + u_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \sum_{k=0}^n \left(\cot \frac{(2k+1)\pi}{4(n+1)} - \frac{4(n+1)}{(2k+1)\pi} \right) + 2 \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1} - \log(n+1) = \frac{\pi}{2} \Delta_n - \log(n+1) = \frac{\pi}{2} \tau_n,$$

luego τ_n es una sucesión monótona estrictamente decreciente tal que $\tau_0 = 1$ y como vimos en (2.16)

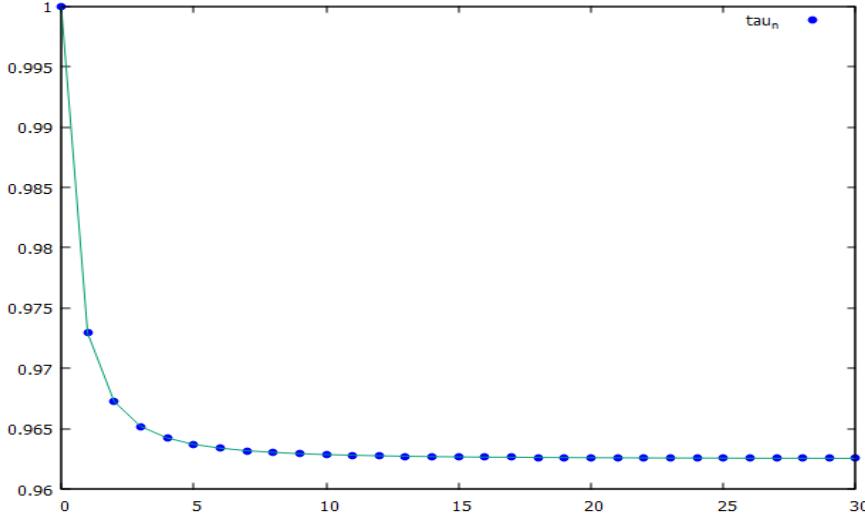
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right).$$

Por tanto,

$$\frac{2}{\pi} \left(\log \frac{8}{\pi} + \gamma \right) < \tau_n \leq 1.$$

□

En la siguiente figura se pueden observar los 30 primeros términos de la sucesión τ_n .

Figura 2.6: 30 primeros términos de la sucesión τ_n .

2.4. La sucesión expandida de nodos de Chebyshev

En esta sección vamos a hablar brevemente sobre las constantes de Lebesgue mínimas, $\Lambda_k(X^*)$, cuya existencia dejamos intuir ligeramente en el primer capítulo. En el siguiente resultado vemos que la función de Lebesgue es invariante por cambios afines.

Proposición 2.9. *Sea $T_k(x) = a_k x + b_k$ con $a_k \neq 0$ una sucesión de transformaciones afines, y $T(X)$ el esquema triangular cuya fila k -ésima es $T_k(x_0^{(k)}), \dots, T_k(x_k^{(k)})$, entonces*

$$l_{i,k}(X; x) = l_{i,k}(T(X); T_k(x)), \quad i = 0, \dots, k,$$

y

$$\lambda_k(X; x) = \lambda_k(T(X); T_k(x)),$$

para $k = 0, 1, \dots$

Demostración. En primer lugar tenemos que

$$l_{i,k}(T(X); T_k(x)) = \prod_{j \neq i} \frac{T_k(x) - T_k(x_j^{(k)})}{T_k(x_i^{(k)}) - T_k(x_j^{(k)})} = \prod_{j \neq i} \frac{a_k(x - x_j^{(k)})}{a_k(x_i^{(k)} - x_j^{(k)})} = l_{i,k}(X; x).$$

La segunda igualdad se deduce de la primera. \square

Definición. Sea X un esquema triangular de nodos definido en el intervalo $[-1, 1]$ que verifica $-1 \leq x_0^{(k)} < x_1^{(k)} < \dots < x_k^{(k)} \leq 1$, el esquema triangular expandido X' es el esquema $T(X)$ correspondiente a la sucesión de transformaciones afines

$$T_k(x) = \frac{2x - (x_k^{(k)} + x_0^{(k)})}{x_k^{(k)} - x_0^{(k)}}.$$

El primer nodo de cada fila siempre es -1 y el último 1 .

La sucesión de nodos de Chebyshev expandidos se obtiene a través de la siguiente fórmula,

$$t_{i,k} = \frac{\cos \frac{(2i+1)\pi}{2k+2}}{\cos \frac{\pi}{2k+2}} = \frac{\cos \theta_i^{(k)}}{\cos \theta_0^{(k)}} = \cos \theta_i^{(k)} \sec \theta_0^{(k)}.$$

En la figura 2.7 mostramos los nodos de Chebyshev expandidos y su función de Lebesgue correspondiente.

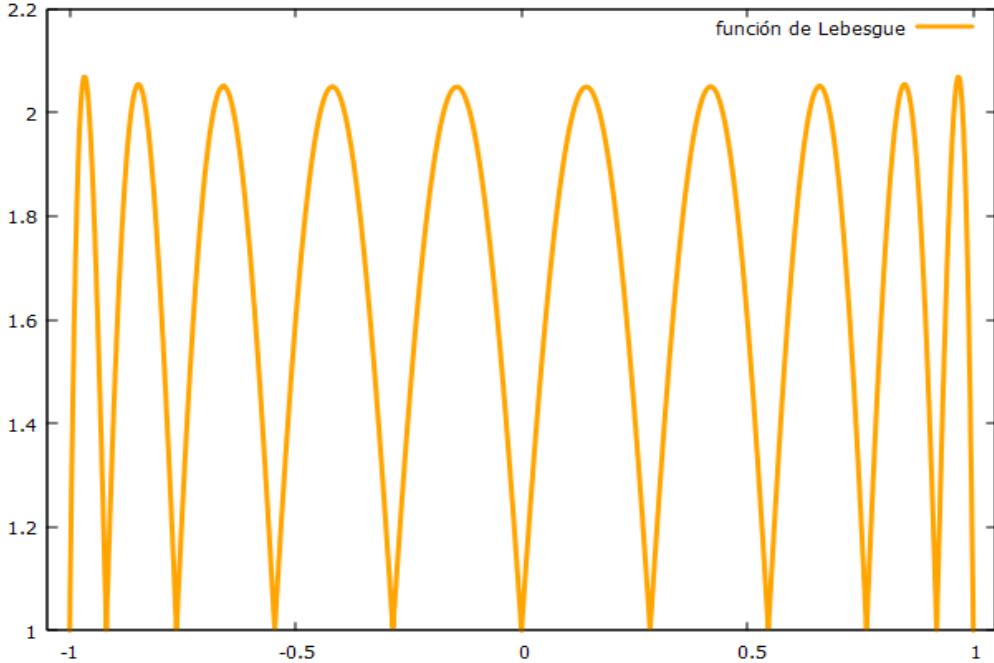


Figura 2.7: Función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev expandidos correspondientes a grado 10.

Proposición 2.10. *Sea X un esquema triangular y X' el esquema triangular expandido correspondiente, entonces*

$$\Lambda_k(X') = \max_{x \in [-1, 1]} \lambda_k(X'; x) \leq \Lambda_k(X).$$

*Demuestra*ón. Sea $T_k(x)$ la sucesión de transformaciones afines tales que $X' = T(X)$, entonces

$$\Lambda_k(X') = \max_{x \in [-1, 1]} \lambda_k(X'; x) = \max_{x \in [x_0^{(k)}, x_k^{(k)}]} \lambda_k(T(X); T_k(x)) = \max_{x \in [x_0^{(k)}, x_k^{(k)}]} \lambda_k(X; x) \leq \max_{x \in [-1, 1]} \lambda_k(X; x) = \Lambda_k(X).$$

□

Se deduce que, si existe un esquema triangular óptimo

$$\Lambda_k(X^*) := \min_X \Lambda_k(X),$$

entonces su esquema triangular expandido también es óptimo.

Concluimos que existe un esquema triangular de nodos óptimo, al que llamaremos X^* , cuyas filas a partir de la segunda contienen todas a 1 y -1 . Por tanto, a partir de ahora vamos a trabajar con esquemas triangulares de nodos expandidos, es decir aquellos que cumplen $X = X'$.

Sea X un esquema triangular expandido y para $k \geq 1$ definamos

$$M_j(X) := \max_{x_j \leq x \leq x_{j+1}} \lambda_k(X; x), \quad j = 0, \dots, k-1,$$

F. Bernstein [1] conjeturó que si

$$M_0(X) = M_1(X) = \dots = M_{k-1}(X),$$

entonces X es un esquema triangular de nodos óptimo. Más adelante, P. Erdős [6] amplió la conjetura de Bernstein de la siguiente manera.

Teorema 2.5 (Conjetura de Erdős). *Existe un único esquema triangular expandido X^* para el cual se cumple $M_0(X^*) = M_1(X^*) = \dots = M_{k-1}(X^*)$, tal que para todo esquema triangular expandido X se tiene*

$$\min_{0 \leq j \leq k-1} M_j(X) \leq \Lambda_k(X^*).$$

Las conjeturas de Bernstein y de Erdős fueron demostradas por T. A. Kilgore [9] y por C. R. De Boor y A. Pinkus [2] respectivamente, sin embargo aún no se conoce explícitamente el esquema triangular expandido óptimo.

Para el esquema triangular de los nodos de Chebyshev expandidos, T' , que se obtiene de multiplicar los nodos de la fila k -ésima de T por $\sec \pi/(2k+2)$, L. Brutman [3] demostró que

$$\min_{0 \leq j \leq k-1} M_j(T') > \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.5212,$$

y

$$\Lambda_k(T') < \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.7219.$$

Por lo que, junto con la conjetura de Erdős, se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 2.6. *Sea T' el esquema de los nodos de Chebyshev expandidos y X^* el esquema triangular de nodos óptimo, entonces*

$$\frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.7219 > \Lambda_k(T') > \Lambda_k(X^*) > \frac{2}{\pi} \log(k+1) + 0.5212.$$

Por tanto, para cualquier esquema triangular X se tiene la desigualdad

$$\Lambda_k(X) > \frac{2}{\pi} \log(k+1) + c.$$

Donde c es una constante tal que $0.5212 < c < 0.7219$.

El teorema 2.6 nos indica que el esquema triangular de los nodos de Chebyshev expandidos, T' , es a efectos prácticos tan útil como la sucesión óptima de nodos. En la siguiente figura se puede observar la función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev expandidos correspondientes a grado 10 junto con las cotas que se han expuesto en el teorema.

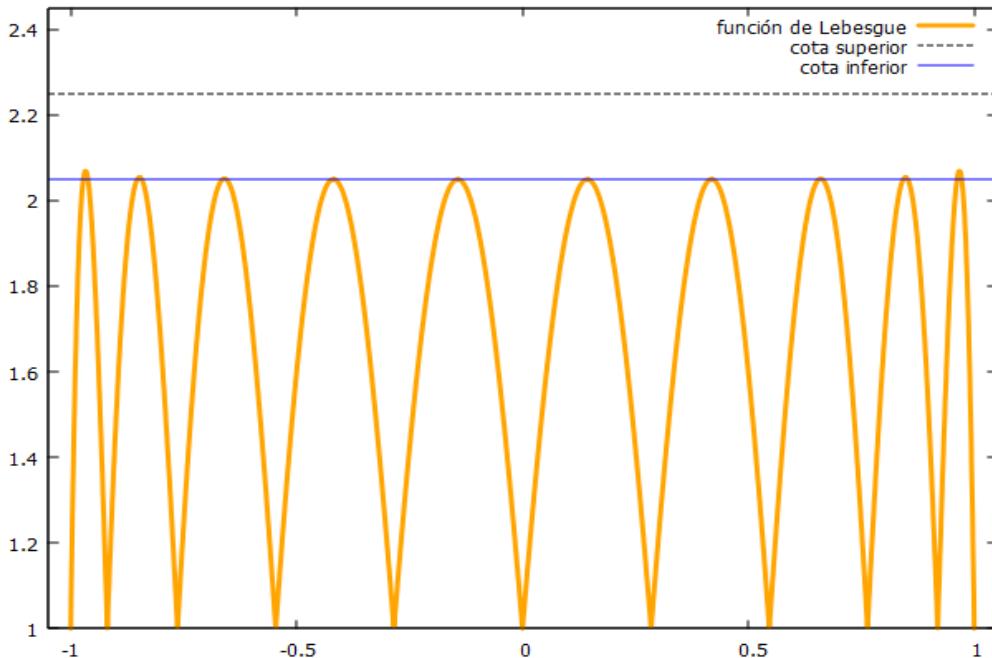


Figura 2.8: Función de Lebesgue en los nodos de Chebyshev expandidos correspondientes a grado 10 y cotas para la constante de Lebesgue.

Bibliografía

[1] **S. N. Bernstein.**

Sur la limitation des valeurs d'une polynome $P(x)$ de degré n sur tout un segment par ses valeurs en $(n+1)$ points du segment, Izv. Akad. Nauk SSSR, **7** (1931), 1025-1050.

[2] **C. de Boor y A. Pinkus.**

Proof of the conjectures of Bernstein and Erdős concerning the optimal nodes for polynomial interpolation, J. Approximation Theory, **24** (1978), 289-303.

[3] **L. Brutman.**

On the Lebesgue function for polynomial interpolation, SIAM J. on Numer. Anal., **15** (1978), 694-704.

[4] **P. L. Chebyshev.**

Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes, Mém. Acad. Sci. Pétersb. **7** (1854) 539-568.

[5] **P. L. Chebyshev.**

Sur les questions de minima qui se rattachent a la représentation approximative des fonctions, Mém. Acad. Sci. Pétersb. **7** (1859) 199-291.

[6] **P. Erdős.**

Problems and results on the theory of interpolation, I, Acta. Math. Acad. Sci. Hungar., **9** (1958), 381-388.

[7] **G. Faber.**

Über die interpolatorische darstellung stetiger funktionen, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. **23** (1914) 192-210.

[8] **M. S. Henry.**

Approximation by Polynomials: Interpolation and Optimal Nodes, Am. Math. Mon. **91** (1984) 497-99.

[9] **T. A. Kilgore.**

A characterization of the Lagrange interpolating projection with minimal Tchebycheff norm, J. Approximation Theory, **24** (1978), 273-288.

[10] **K. Knopp.**

Theory and application of infinite series, Hafner, Nueva York, 1949.

[11] **H. L. Lebesgue.**

Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz, Bull. Soc. Math. France, **38** (1910), 184-210.

[12] **H. L. Lebesgue.**

Sur les intégrales singulières, Ann. Fac. Sci. Toulouse 3^e série, **1** (1909), 25-117.

- [13] **T. J. Rivlin.**
Chebyshev polynomials, from approximation theory to algebra and number theory, segunda edición, John Wiley & Sons Inc., Nueva York, 1990.
- [14] **C. Runge.**
Über empirische Funktionen und die Interpolation zwischen äquidistanten Ordinaten, Zeit. Math. Physik. **46** (1901) 224-243.