

Francisco Javier Gómez Diest

El problema global en la ecuación
de Schrödinger con una clase de
potenciales confinantes de
potencias

Departamento
Física Teórica

Director/es
Sesma Biezobas, Javier

<http://zaguan.unizar.es/collection/Tesis>



Universidad
Zaragoza

Tesis Doctoral

EL PROBLEMA GLOBAL EN LA ECUACIÓN DE
SCHRÖDINGER CON UNA CLASE DE
POTENCIALES CONFINANTES DE POTENCIAS

Autor

Francisco Javier Gómez Diest

Director/es

Sesma Bienzobas, Javier

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

Física Teórica

2013

UNIVERSIDAD DE
ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FÍSICA TEÓRICA

**El problema global en la ecuación de
Schrödinger con una clase de potenciales
confinantes de potencias**

Memoria presentada en la Facultad de Ciencias
de la Universidad de Zaragoza por
Francisco Javier Gómez Diest
para optar al grado de Doctor en Ciencias (sección Físicas)

Zaragoza, noviembre de 2012

Don Javier Sesma Bienzobas, Catedrático jubilado de la Universidad de Zaragoza,

CERTIFICA:

Que la presente memoria *El problema global en la ecuación de Schrödinger con una clase de potenciales confinantes de potencias*, ha sido realizada bajo su dirección en el Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza, y que autoriza su presentación para que sea calificada como Tesis Doctoral.

En Zaragoza a 28 de noviembre de 2012

Firmado: Javier Sesma Bienzobas

A mis padres, Lamberto y María Carmen.
A mis hermanos, María Paz y José Manuel.
Al padre José Nemry Bodson, O. F. M.
A mis profesores y compañeros del colegio "La Salle" de Zaragoza.

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi profundo agradecimiento a Javier Sesma Bienzobas, cuya orientación eficaz y paciencia sin límite hacen posible que este trabajo vea la luz.

Agradezco también al Departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza el apoyo constante y trato amable que me ha dispensado. No son pocas las personas a las que debo agradecer las enseñanzas recibidas durante las etapas de licenciatura y doctorado, en seminarios, cursos y conversaciones informales. Quiero dejar testimonio de particular reconocimiento a los profesores Andrés Cruz Flor, José F. Cariñena Marzo, Manuel F. Rañada, Antonio F. Rañada, José Luis Alonso Buj, José Vicente García Esteve, Manuel Asorey Carballeira, José Luis Cortés Azcoiti, Luis Mario Floría Peralta, María Antonia Navascués, Luis J. Boya, Amalio Fernández Pacheco, Antonio Seguí, Juan Antolín, y a los tristemente fallecidos Justiniano Casas Peláez y J. M. Savirón.

Finalmente, quisiera dedicar un recuerdo emocionado a dos compañeros que nos han dejado en la plenitud de la vida, Julio Abad Antoñanzas y Javier Casahorrán Sebastián, cuya bondad y simpatía no olvidaré.

"Supliqué y se me concedió la prudencia, invoqué y vino a mí un espíritu de sabiduría. La preferí a cetros y a tronos, y en su comparación tuve en nada la riqueza. No le equiparé la piedra más preciosa, porque todo el oro a su lado es un poco de arena y junto a ella la plata vale lo que el barro. La preferí a la salud y a la belleza, y me propuse tenerla por luz, porque su resplandor no tiene ocaso. Con ella, me vinieron todos los bienes juntos, en sus manos había riquezas incontables."

(Sb 7, 7-11)

Índice general

1. Desarrollos asintóticos. Ideas generales	1
1.1. ¿Qué es el análisis asintótico?	1
1.2. Relaciones asintóticas. Símbolos de orden O , o	2
1.3. Desarrollos asintóticos	9
1.4. Operaciones con desarrollos asintóticos generales	16
1.5. Operaciones con desarrollos asintóticos de potencias	28
1.6. Representación de funciones mediante desarrollos asintóticos .	38
1.6.1. Convergencia y carácter asintótico de series funcionales	38
1.6.2. Suma asintótica de una serie formal	42
1.6.3. Representación asintótica de funciones	43
1.7. Notas	46
2. Ecuaciones diferenciales con puntos singulares. Soluciones globales	53
2.1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes polinomiales	53
2.1.1. Clasificación de los puntos singulares	54
2.1.2. Representación de las soluciones en la vecindad de puntos singulares	57
2.2. El fenómeno de Stokes	63
2.3. Método de Naundorf de solución del problema global	73
2.4. Resolución del problema global por el método de los Wronskianos (I). Ecuación con dos puntos singulares, regular e irregular	80
2.4.1. Ecuación de Schrödinger con un potencial polinomial más culombiano	82
2.4.2. Ecuación canónica	83
2.4.3. Soluciones analíticas y formales de la ecuación canónica	85
2.4.4. Fórmulas de conexión, sectores de validez y rayos de Stokes	89
2.4.5. Cálculo de los factores de conexión	92
2.5. Resolución del problema global por el método de los Wronskianos (II). Ecuación con dos puntos singulares irregulares . .	101
2.5.1. Ecuación canónica	102

2.5.2.	Soluciones multiplicativas y formales de la ecuación canónica	103
2.5.3.	Fórmulas de conexión, sectores de validez y rayos de Stokes	108
2.5.4.	Cálculo de los factores de conexión	114
2.6.	Notas	124
3.	Aplicaciones del método de Naundorf	145
3.1.	El potencial Coulombiano + lineal	146
3.2.	Efecto Stark esférico en el hidrógeno	150
3.3.	Osciladores anarmónicos	153
3.4.	Potenciales sombrero	156
4.	Aplicaciones del método de los Wronskianos I. Potenciales polinomiales	161
4.1.	Potenciales anarmónicos	161
4.2.	Potenciales polinomiales	171
5.	Aplicaciones del método de los Wronskianos II. Potenciales suma de potencias	179
5.1.	La ecuación biconfluyente de Heun	179
5.2.	Osciladores "spiked"	186
A.	Convergencia de las series Ω y Q	203
A.1.	Un teorema de Perron sobre recurrencias lineales	203
A.2.	Convergencia de las series Ω , Q . Caso regular-irregular	208
A.3.	Convergencia de las series Ω , Q . Caso irregular-irregular	217
A.3.1.	Convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$, $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$	217
A.3.2.	Convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)}$, $Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)}$	224
A.4.	Notas	230
B.	Índices de las soluciones multiplicativas en la vecindad de un punto singular irregular	243

Índice de figuras

2.1.	El rayo de Stokes $\arg(z) = \pi/2$ separa los sectores de validez adyacentes $S_{1,0}$: $-3\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $S_{1,1}$: $\pi/2 < \arg(z) < 5\pi/2$ de los factores de conexión $T_{1,0}$ y $T_{1,1}$ en la ecuación de Bessel de orden cero. $S_{1,0}$ cubre tres cuartas partes de la primera hoja de Riemann, $S_{1,1}$ cubre la cuarta parte restante.	72
2.2.	El rayo de Stokes $\arg(z) = -\pi/2$ separa los sectores de validez adyacentes $S_{2,-1}$: $-5\pi/2 < \arg(z) < -\pi/2$ y $S_{2,0}$: $\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$ de los factores de conexión $T_{2,-1}$ y $T_{2,0}$ en la ecuación de Bessel de orden cero. $S_{2,0}$ cubre tres cuartas partes de la primera hoja de Riemann, $S_{2,-1}$ cubre la cuarta parte restante.	73
2.3.	Sectores de validez S_{1,p_1} ($p_1 = -1, 0, 1, 2$) de los factores de conexión T_{1,p_1} en el caso $N = 2$ cuando el parámetro asintótico principal λ_1 es real negativo: $S_{1,-1}$: $-4\pi/3 < \arg(z) < -2\pi/3$, $S_{1,0}$: $-2\pi/3 < \arg(z) < 0$, $S_{1,1}$: $0 < \arg(z) < 2\pi/3$, $S_{1,2}$: $2\pi/3 < \arg(z) < 4\pi/3$. Los sectores cubren la primera hoja de Riemann y los rayos de Stokes que los separan corresponden a valores $-2\pi/3, 0, 2\pi/3$ de $\arg z$. La mitad de cada sector $S_{1,-1}, S_{1,2}$ pertenece a las hojas inferior y superior respectivamente. . .	93
2.4.	Sectores de validez S_{2,p_2} ($p_2 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{2,p_2} en el caso $N = 2$ cuando λ_2 es real positivo: $S_{2,-1}$: $-\pi < \arg(z) < -\pi/3$, $S_{2,0}$: $-\pi/3 < \arg(z) < \pi/3$, $S_{2,1}$: $\pi/3 < \arg(z) < \pi$. Los tres sectores cubren la primera hoja de Riemann y los rayos de Stokes que los separan corresponden a valores $-\pi/3, \pi/3$, de $\arg z$	94
2.5.	Sectores de validez S_{1,p_1} ($p_1 = -1, 0, 1, 2$) de los factores de conexión T_{1,p_1} cuando $M = -2, N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_1 es real negativo: $S_{1,-1}$: $-4\pi/3 < \arg(z) < -2\pi/3$, $S_{1,0}$: $-2\pi/3 < \arg(z) < 0$, $S_{1,1}$: $0 < \arg(z) < 2\pi/3$, $S_{1,2}$: $2\pi/3 < \arg(z) < 4\pi/3$. Los sectores $S_{1,0}, S_{1,1}$ y la mitad de $S_{1,-1}, S_{1,2}$ cubren la primera hoja de Riemann. La mitad de $S_{1,-1}$ y de $S_{1,2}$ pertenecen a las hojas inferior y superior respectivamente. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$. Aunque representan casos diferentes, esta figura coincide con la 2.3.	111

2.6. Sectores de validez S_{2,p_2} ($p_2 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{2,p_2} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_2 es real positivo: $S_{2,-1}$: $-\pi < \arg(z) < -\pi/3$, $S_{2,0}$: $-\pi/3 < \arg(z) < \pi/3$, $S_{2,1}$: $\pi/3 < \arg(z) < \pi$. Los tres sectores $S_{2,-1}$, $S_{2,0}$ y $S_{2,1}$, cubren exactamente la primera hoja de Riemann. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -\pi/3, \pi/3$. Aunque representan casos diferentes, esta figura coincide con la 2.4. 112

2.7. Sectores de validez S_{3,p_3} ($p_3 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{3,p_3} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_3 es real negativo: $S_{3,1}$: $-2\pi < \arg(z) < 0$, $S_{3,0}$: $0 < \arg(z) < 2\pi$, $S_{3,-1}$: $2\pi < \arg(z) < 4\pi$. Los sectores $S_{3,0}$ y $S_{3,-1}$ cubren la mitad positiva de la primera hoja de Riemann y toda la hoja superior, $S_{3,1}$ cubre la mitad negativa de la primera hoja de Riemann y mitad de la hoja inferior. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = 0, 2\pi$. 113

2.8. Sectores de validez S_{4,p_4} ($p_4 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{4,p_4} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_4 es real positivo: $S_{4,1}$: $-3\pi < \arg(z) < -\pi$, $S_{4,0}$: $-\pi < \arg(z) < \pi$, $S_{4,-1}$: $\pi < \arg(z) < 3\pi$. Cada sector cubre una hoja de Riemann completa, correspondiendo la primera a $S_{4,0}$. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -\pi, \pi$ 114

A.1. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow \infty$ de las soluciones formales de la ecuación canónica (2.147). Los parámetros de grado del potencial toman los valores $M = -1$, $N = 2$. La pendiente del segmento es $q_0 = 1/3$ 210

A.2. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$ en la expansión de la función $w_{\text{reg},k}$ cuando los parámetros de grado del potencial en la ecuación canónica (2.147) toman los valores $M = -1$, $N = 2$. La pendiente del segmento es $q'_0 = -1/3$ 214

A.3. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow \infty$ de las soluciones formales de clase (a) de la ecuación canónica (2.246) cuando $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q_0 = 1/3$, $q_1 = -1$ 218

A.4. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$ en la expansión de la función $w_{\eta,k}(z)$ cuando $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q'_0 = 1$, $q'_1 = -1/3$ 221

A.5. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $\hat{a}_s^{(\tau)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow 0$ de las soluciones formales de clase (b) de la ecuación canónica (2.246). Los valores de los parámetros de grado son $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q''_0 = 1$, $q''_1 = -1/3$ 225

- A.6. Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $\hat{b}_n^{(\tau)}$ en la expansión de la función $\hat{w}_{\eta,\tau}(z)$ cuando los parámetros de grado del potencial en la ecuación canónica (2.246) toman los valores $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q_0''' = 1/3$, $q_1''' = -1.227$

Prefacio

La presente memoria es un resumen del trabajo de investigación desarrollado por el doctorando en el departamento de Física Teórica de la Universidad de Zaragoza bajo la tutela del catedrático doctor don Javier Sesma Biezobas. El objetivo principal de este proyecto ha sido explorar, más allá de su utilidad como herramienta de cálculo numérico, las posibilidades de aplicación de métodos asintóticos para resolver un conjunto de problemas de la Mecánica Cuántica que derivan de la ecuación de Schrödinger con cierta clase de potenciales confinantes dados por una suma de potencias. Estos problemas pueden formularse mediante ecuaciones diferenciales de segundo orden que, verificadas por funciones de una variable compleja z , presentan singularidades en el origen y en el infinito de rangos enteros arbitrarios. El conocimiento de las soluciones físicamente aceptables de la ecuación de Schrödinger en el intervalo completo de distancias de cero a infinito exige disponer de representaciones adecuadas de cualquier solución particular de la ecuación en la vecindad de ambos puntos singulares y establecer relaciones entre ambas representaciones mediante expresiones algebraicas denominadas *fórmulas de conexión*. Estas fórmulas dependen de ciertas constantes complejas, denominadas *factores de conexión* o *multiplicadores de Stokes*, cuyo cálculo es equivalente a resolver el *problema global* o *problema de conexión* de la ecuación diferencial correspondiente al problema físico de interés.

El capítulo primero contiene un breve compendio de algunas definiciones y teoremas fundamentales del Análisis Asintótico que permiten, entre otras cuestiones, comprender el significado de símbolos utilizados para la expresión del comportamiento de una función en la vecindad de algún punto de su dominio de definición, la diferencia entre un desarrollo asintótico de una función y una serie convergente a la función dada, establecer condiciones bajo las cuales pueden realizarse operaciones algebraicas, integración o derivación de desarrollos asintóticos, o cuándo un desarrollo asintótico constituye una representación válida de una función compleja en la vecindad de un punto dado. En las dos primeras secciones del capítulo segundo el lector encontrará algunos tópicos de la teoría de representación de soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden en la vecindad de puntos singulares que son necesarios para formular correctamente nuestro problema de conexión,

con referencia especial al fenómeno de Stokes. En la sección tercera describimos el método de F. Naundorf [43] de resolución del problema global en ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con dos puntos singulares, en el cual se inspira nuestro trabajo. En las secciones cuarta y quinta exponemos nuestro método de resolución del problema global, el método de los Wronskianos, considerando primero ecuaciones que presentan una singularidad regular en el origen y una irregular en el infinito (caso regular-irregular), y en segundo lugar ecuaciones donde ambos puntos singulares, origen e infinito, son irregulares (caso irregular-irregular). Este método, exacto salvo cálculos numéricos, se basa en la idea de que es posible obtener los factores de conexión como cocientes de Wronskianos de dos sistemas de soluciones de la ecuación diferencial: el primero representado por series de potencias (soluciones de Floquet), el segundo por desarrollos asintóticos en potencias de la variable independiente (soluciones de Thomé). En particular, el espectro de energías se obtiene exigiendo, en la fórmula que conecta a una solución regular en el origen con las dos soluciones de Thomé, regular e irregular, en la vecindad del infinito, la anulación del factor que multiplica a la solución irregular.

Los capítulos tercero, cuarto y quinto presentan, siguiendo un orden cronológico, la referencia de los trabajos publicados cuyos contenidos definen etapas sucesivas en el desarrollo de nuestro proyecto. En el capítulo tercero exponemos algunas aplicaciones del método de Naundorf a la ecuación de Schrödinger con diferentes potenciales que han merecido la atención de muchos autores: el potencial "de Cornell" (Coulomb más lineal), [26],

$$V(r) = -\frac{a'}{r} + b + cr, \quad (1)$$

utilizado en la espectroscopia de hadrones, el potencial del efecto Stark esférico en el hidrógeno, [27]

$$V(r) = -\frac{1}{r} + \lambda r, \quad (2)$$

y los osciladores anarmónicos unidimensionales, [28], como el séxtico

$$V(x) = \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4 + \lambda_6 x^6, \quad (3)$$

que han servido para contrastar diferentes métodos aproximados de resolución de la ecuación de Schrödinger, y los potenciales "sombrero", [29]

$$V_s(r) = a(r^2 - b^2)^2, \quad (4)$$

que aparecen en diferentes modelos de física molecular, física de la materia condensada y teorías de campos. El método de Naundorf da el espectro de energías correspondiente a cada potencial como conjunto de ceros de una

función definida en términos de series dobles que se suman numéricamente. Los valores de las energías obtenidas por nosotros aplicando este método para diferentes valores escogidos de los parámetros de cada potencial se han comparado con los valores publicados por otros autores, con resultados satisfactorios, lo que para nosotros constituye una prueba de validez suficiente del método de Naundorf.

En el capítulo cuarto damos cuenta de algunas aplicaciones de la versión (I) del método de los Wronskianos, descrita en la sección 2.4 del capítulo segundo, a problemas de conexión en los cuales uno de los dos puntos singulares de la ecuación diferencial es regular, siendo el otro irregular. En la sección 4.1 consideramos varios ejemplos de osciladores anarmónicos, [31], como el oscilador unidimensional representado por el potencial

$$V(x) = gx^2 + x^{2N}, \quad N = 1, 2, 3, \dots, \quad (5)$$

estudiado por Guardiola et al. [36], Nanayakkara et al. [42] y Amore et al. [5], otros solubles algebraicamente, como los de Pöschl-Teller, Pöschl-Teller modificado y Morse [23]. Otros ejemplos [30] son el oscilador anarmónico cuártico

$$V(r) = A_4 r^4 + A_2 r^2 + A_{-2} r^{-2}, \quad A_4 > 0, \quad (6)$$

discutido por Balsa et al. [7] cuando $A_4 = 1$, $A_{-2} = 0$, y el oscilador anarmónico general

$$V(r) = \sum_{j=-2}^{2N} A_j r^j, \quad N \geq 2, \quad A_{2N} > 0. \quad (7)$$

En la sección 4.2 aplicamos nuestro método a la ecuación de Schrödinger [32]

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\sum_{s=0}^{2\hat{N}} \hat{g}_s z^s \right) w = 0, \quad \hat{g}_{2\hat{N}} \neq 0, \quad (8)$$

con un potencial polinomial

$$g(z) = z^{-2} \hat{g}(z) = \sum_{s=-2}^{2N} g_s z^s, \quad g_s = \hat{g}_{s+2}, \quad N = \hat{N} - 1, \quad (9)$$

que incluye los términos centrífugo y de energía. A fin de comparar los valores de los factores de conexión que genera nuestro método con los obtenidos por otros autores, como [16], consideramos dos ejemplos de ecuaciones integrables mediante productos de funciones elementales por funciones hipergeométricas: correspondiendo a $\hat{N} = 1$ ($N = 0$) la ecuación

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(z^2 + \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) w = 0, \quad (10)$$

y para $\hat{N} = 2$ ($N = 1$) la ecuación de un oscilador armónico de energía ε ,

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + (z^4 + \varepsilon z^2) w = 0. \quad (11)$$

En el capítulo quinto presentamos algunas aplicaciones de la versión (II) del método de los Wronskianos, descrita en la sección 2.5 del capítulo segundo, a problemas donde la ecuación de Schrödinger contiene un potencial suma de potencias de la variable independiente, de modo que el origen y el infinito son ambos puntos singulares irregulares de la ecuación diferencial. La sección 5.1 está dedicada al cálculo de los factores de conexión en la ecuación de Heun doblemente confluyente (DCHE), [1], [51, p. 129], un ejemplo clásico de ecuación que tiene en el origen y el infinito dos singularidades irregulares de rango 1. A fin de comprobar la viabilidad del método, tomamos como ejemplo la ecuación radial reducida de Schrödinger de una partícula de masa m , momento angular $l\hbar$ y energía $E = A_2 \hbar^2 / 2mr_0^2$ en un potencial con simetría esférica

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{A_{-2} r_0^2}{r^4} + \frac{A_{-1} r_0}{r^3} + \frac{A_0 + l(l+1)}{r^2} + \frac{A_1 r_0^{-1}}{r} \right), \quad (12)$$

que mediante un cambio adecuado de variable adopta la forma normal [55] de la DCHE. Eligiendo adecuadamente los valores de los parámetros A_{-2} , A_{-1} , A_0 , A_1 , y del parámetro de energía A_2 , (12) pertenece a una clase de potenciales cuasixactamente solubles [62] y presenta un estado ligado, de momento angular $l = 0$ y energía $E = -(1/4)\hbar^2/2mr_0^2$, representado por una solución normalizable en el semieje real positivo [46]. En estas condiciones, es posible conocer los valores exactos de los factores de conexión de la solución multiplicativa, que vienen dados por series cuyo término general es un producto de funciones elementales. Los valores obtenidos sumando estas series coinciden con los valores de las partes reales de los mismos factores calculados por nuestro método utilizando un programa FORTRAN con doble precisión.

Los osciladores "spiked" cuánticos, i.e. osciladores armónicos dotados de un término repulsivo singular en el origen,

$$\frac{\lambda}{r^\alpha}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0, \quad (13)$$

han suscitado el interés de una considerable nómina de autores desde la publicación del trabajo pionero de Klauder [38]. En la sección 5.2 utilizamos el método de los Wronskianos para obtener los niveles de energía y funciones de onda de una partícula en un potencial "spiked" confinante tridimensional [33]

$$V(r) = \sum_{q=q_{\min}}^{q_{\max}} A(q) r^q, \quad (14)$$

donde el índice q recorre un conjunto finito de números enteros y/o racionales positivos y negativos ($q_{\min} < 0$), ($q_{\max} > 0$), $A(q_{\min}) > 0$, $A(q_{\max}) > 0$. La ecuación de Schrödinger con este potencial se lleva a la forma

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \left(\sum_{s=-2\hat{M}}^{2\hat{N}} \hat{g}_s z^s \right) w = 0, \quad \hat{M}, \hat{N} > 0, \quad \hat{g}_{-2\hat{M}}, \hat{g}_{2\hat{N}} > 0, \quad (15)$$

donde \hat{M} , \hat{N} representan los rangos de las singularidades en el origen y el infinito respectivamente. Nuestro método no precisa del cálculo de las funciones de onda en ambos puntos singulares, es suficiente conocer el comportamiento asintótico de tales funciones en la vecindad de uno y otro punto. En este caso, la condición de cuantización deriva de exigir que, de las dos soluciones de Thomé representadas por sendos desarrollos asintóticos en la vecindad del origen, la que tiene un comportamiento regular en el origen sea también regular en el infinito. La idoneidad de nuestro procedimiento para tratar osciladores "spiked" se verifica aplicándolo a algunos casos particulares, como el potencial

$$V(r) = A_2 r^2 + A_{-4} r^{-4}, \quad A_2 = 1, \quad (16)$$

estudiado por Buendía et al. [14], Roy [52], Znojil [69], Aguilera-Navarro et al. [4], el potencial

$$V(r) = A_2 r^2 + A_{-4} r^{-4} + A_{-6} r^{-6}, \quad (17)$$

tratado en [14], [52], [53], y el potencial

$$V(r) = r^2 + \lambda r^{-5/2}, \quad (18)$$

considerado por Aguilera-Navarro et al. [3] y Buendía et al. [14]. En el primer caso, con el potencial (16), nuestra aritmética FORTRAN de doble precisión genera resultados cuya exactitud es comparable a la excelente alcanzada por Buendía et al. con un método de continuación analítica, o a la de Roy, quien utiliza un método pseudoespectral generalizado. En el caso del potencial (17), la concordancia de nuestros resultados con los de Buendía et al. y Roy es notable. Finalmente, con el potencial (18) la exactitud de nuestros resultados mejora la de los que se obtienen en [3] por integración numérica de la ecuación de Schrödinger, aunque no alcanza la de Buendía et al. con el método de continuación analítica.

En un capítulo suplementario dividido en dos apéndices analizamos sendos problemas cuya solución reviste una dificultad particular. El primero afecta de modo crítico a la validez de nuestro método, mediante el cual se han obtenido expresiones de los factores de conexión que dependen de series infinitas cuya convergencia ha de quedar probada. En el apéndice A proponemos una demostración basada en un teorema de Perron [47] sobre recurrencias lineales, que permite establecer mayoraciones de los valores absolutos de los términos generales de las citadas series cuando su índice crece

indefinidamente. De estas mayoraciones se deduce que en el problema de conexión regular-irregular, así como en el caso irregular-irregular, los factores de conexión dependen de series que convergen a la misma velocidad que la serie geométrica. En [32] se da la prueba de convergencia en los casos de conexión regular-irregular, en el apéndice A consideramos también la convergencia en los casos de conexión irregular-irregular. En el apéndice B se plantea el problema de determinar los índices ρ_η y coeficientes $c_{n,\eta}$ en las expansiones de las soluciones multiplicativas, o soluciones de Floquet,

$$u_\eta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho_\eta}, \quad \eta = 1, 2, \quad (19)$$

en la vecindad del origen cuando éste, además del infinito, es un punto singular irregular de la ecuación diferencial. Se trata de un problema más complicado que el correspondiente a las expansiones en la vecindad del origen cuando éste es un punto singular regular,

$$u_\eta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho_\eta}, \quad \eta = 1, 2, \quad (20)$$

teniéndose entonces que para cada $\eta = 1, 2$, ρ_η son las raíces de una ecuación de segundo grado y $c_{n,\eta}$ verifican una recurrencia cuyo valor inicial $c_{0,\eta}$ determina a los demás. En el caso irregular-irregular, la sustitución de (19) en la ecuación diferencial da lugar a un conjunto infinito de ecuaciones en diferencias homogéneas que puede interpretarse como un problema de valores propios no lineal. El método de iteración de Newton que describimos en el apéndice B da solución al problema en etapas sucesivas, resolviendo en cada una un sistema lineal finito de ecuaciones que procede del sistema original por linealización [44] y truncadura, habida cuenta de que ρ_η son tales que se verifica la condición de normalización

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n,\eta}|^2 < +\infty. \quad (21)$$

Al final de algunos capítulos incluimos notas aclaratorias de varias cuestiones cuya exposición detallada en las secciones donde se presentan convertiría en extremadamente ardua y dificultosa la lectura del texto. La bibliografía que completa esta memoria contiene una lista, no exhaustiva, de libros y artículos publicados en revistas científicas que han contribuido a allanar las dificultades que surgieron en la elaboración de esta tesis. La citada lista incluye casi todos nuestros trabajos de investigación publicados hasta la fecha, donde el lector encontrará una relación pormenorizada de otras referencias que han servido de orientación y guía al desarrollo de este proyecto.

Capítulo 1

Desarrollos asintóticos. Ideas generales

1.1. ¿Qué es el análisis asintótico?

La elaboración sistemática de la teoría que hoy conocemos como "Análisis asintótico" se inició en 1886 con la publicación de sendos trabajos de Stieltjes [59] y Poincaré [48]. A su desarrollo han contribuido matemáticos ilustres como Borel, Nevanlinna, Carleman, Perron, Birkhoff y Watson, entre otros.

A pesar de su respetable historia y de una presencia frecuente en libros y publicaciones de ámbito científico y tecnológico, no parece existir, a día de hoy, un acuerdo unánime acerca de la naturaleza de este cuerpo de doctrina ni de su ubicación precisa en el vasto espacio del conocimiento matemático. Sirvan a modo de ejemplo las definiciones de algunos expertos en la materia:

"El Análisis asintótico es la rama de las Matemáticas dedicada al estudio del comportamiento de funciones en y en la vecindad de puntos dados de sus dominios de definición" [13, p. 1].

"El Análisis asintótico es el arte de encontrar una función sencilla que constituye una buena aproximación de una función complicada, de manera que la exactitud de la aproximación aumenta cuando el argumento de la función dada se comporta de cierta manera preestablecida" [66, p. 108].

"La definición más prudente y no la más incierta es la siguiente: El Análisis asintótico es la parte del Análisis que considera problemas del tipo tratado en este libro" [15, p. 1].

Sin ánimo de arrojar más leña al fuego de la incertidumbre acerca de la naturaleza genuina de las cosas, declaramos que, a lo largo de esta memoria, el Análisis asintótico es para nosotros un sistema de conceptos y métodos que constituyen una herramienta útil para resolver problemas de Mecánica Cuántica, en particular para obtener soluciones globales de ecuaciones diferenciales de segundo orden que aparecen al considerar la ecuación de Schrödinger con una amplia clase de potenciales dados por sumas de potencias de

una variable compleja.

En este capítulo, a modo de introducción, revisamos los conceptos y resultados fundamentales del Análisis asintótico, centrando la atención en las funciones complejas de una variable compleja z . Las demostraciones de cierto número de teoremas y corolarios aparecen resumidas, remitiendo las restantes a las referencias que se citan a lo largo del texto.

1.2. Relaciones asintóticas. Símbolos de orden O , o

La manera más simple de obtener alguna información acerca del comportamiento de una función compleja dada $f(z)$ en la vecindad de un punto z_0 de su dominio de definición, consiste en calcular su límite cuando $z \rightarrow z_0$. Desde luego, en el paso al límite desaparece una gran parte de la información específica que permite diferenciar el comportamiento de la función dada del comportamiento de otras funciones $g(z)$ cuyo límite hacia z_0 coincide con el de $f(z)$.

No obstante, si el límite del cociente $f(z)/g(z)$ de la función dada entre otra función $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es conocido, además de comparar las velocidades de crecimiento de ambas funciones en la vecindad de z_0 será posible obtener información detallada acerca del comportamiento de $f(z)$, siempre que se disponga de una representación adecuada de $g(z)$ en dicha vecindad. En el caso más frecuente, la representación de $f(z)$ así obtenida toma la forma de una serie, convergente o no, de funciones de z , denominada serie asintótica o expansión asintótica. Por razones de rigor que luego expondremos, siguiendo a [24, p. 209], consideramos preferible denominar *desarrollos asintóticos* a las representaciones aproximadas de funciones en la vecindad de algún punto de acumulación de su dominio de definición.

Definición 1. (Dominancia asintótica fuerte. Símbolo o). Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas de la variable compleja z definidas en una región D del plano complejo. Sea z_0 un punto de acumulación de D . Se dice que $g(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, y se escribe

$$f(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.1)$$

si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 0, \quad (1.2)$$

es decir, si para todo $\varepsilon > 0$ existe una vecindad U_ε de z_0 tal que

$$|f(z)| \leq \varepsilon |g(z)| \quad \forall z \in U_\varepsilon \cap D. \quad (1.3)$$

Se dice que $g(z)$ domina asintóticamente sobre $f(z)$ en D si $g(z)$ domina asintóticamente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación

z_0 del conjunto D .

Definición 2. (Equivalencia asintótica. Símbolo \sim). En las mismas condiciones de la definición 1, se dice que $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y se escribe

$$f(z) \sim g(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.4)$$

si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = 1. \quad (1.5)$$

La propiedad anterior también se expresa diciendo que $g(z)$ es una aproximación asintótica a $f(z)$, o bien que $f(z)$ es asintótica a $g(z)$.

Se dice que $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente equivalentes en D si son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación z_0 del conjunto D .

La equivalencia asintótica de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ es una relación de equivalencia algebraica, toda vez que verifica las propiedades reflexiva, simétrica y transitiva.

Definición 3. (Proporcionalidad asintótica). En las mismas condiciones de las definiciones 1 y 2, se dice que $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente proporcionales cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y se escribe

$$f(z) \propto g(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.6)$$

si existe una constante A compleja no nula tal que $f(z)$ y $Ag(z)$ son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ en D , es decir, si

$$f(z) \sim Ag(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.7)$$

o bien si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = A. \quad (1.8)$$

Se dice que $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente proporcionales en D si son asintóticamente proporcionales cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación z_0 del conjunto D .

Corolario 1. En las mismas condiciones de la definición 3, si las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente proporcionales y A es la constante de proporcionalidad correspondiente, entonces la función $f(z) - Ag(z)$ es dominada asintóticamente por la función $Kg(z)$ para todo valor no nulo de la constante compleja K . En efecto,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - Ag(z)}{Kg(z)} = 0, \quad (1.9)$$

es decir,

$$f(z) - Ag(z) = o(Kg(z)), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.10)$$

en particular, para $K = A$,

$$f(z) = Ag(z)(1 + o(1)), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.11)$$

Definición 4. (Dominancia asintótica débil. Símbolo O). En las mismas condiciones de las definiciones precedentes, se dice que $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, y se escribe

$$f(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.12)$$

si existe una constante real no negativa A y alguna vecindad U de z_0 tales que

$$|f(z)| \leq A|g(z)| \quad \forall z \in U \cap D. \quad (1.13)$$

En particular, si $g(z) \neq 0$ en alguna vecindad de z_0 , 1.12 significa que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq A. \quad (1.14)$$

Se dice que $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ en D si $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación z_0 del conjunto D .

Corolario 2. Si $g(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$f(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0) \implies f(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.15)$$

En efecto, asumida la dominancia asintótica fuerte de $g(z)$ sobre $f(z)$, existe una infinidad de vecindades de z_0 en las cuales $|f(z)|$ es mayorada por $A|g(z)|$, donde la constante no negativa A depende en general de la vecindad considerada.

La proposición recíproca no es verdadera necesariamente. Si $f(z) = O(g(z))$, cabe deducir solamente que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \leq A, \quad (1.16)$$

donde A es una constante no negativa, que puede ser cero o mayor que cero.

Corolario 3. Si la dominancia de $g(z)$ sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es débil y no fuerte, entonces ambas funciones son asintóticamente proporcionales cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$f(z) = O(g(z)) \text{ y } f(z) \neq o(g(z)) \implies f(z) \propto g(z) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.17)$$

En las condiciones dadas, existe una constante compleja no nula, \tilde{A} , tal que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \tilde{A}, \quad (1.18)$$

donde

$$|\tilde{A}| = \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z)}{g(z)} \right| \neq 0 \quad (1.19)$$

y cuyo argumento es el desfase entre ambas funciones en el punto límite z_0 .

Teorema 1. (Propiedades de las relaciones asintóticas de orden). Sean $f(z)$, $g(z)$, $\phi(z)$, $\psi(z)$ funciones complejas definidas en una región D del plano complejo, sea z_0 un punto de acumulación de D .

Proposición 1.1. Si $\psi(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ y $g(z)$ domina débilmente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = O(\psi(z)) \text{ y } \psi(z) = O(g(z)) &\Rightarrow f(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } &O(O(g)) = O(g), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.20)$$

En efecto, cuando $z \rightarrow z_0$, los límites de los módulos de los cocientes $f(z)/\psi(z)$ y $\psi(z)/g(z)$ permanecen acotados, de donde se deduce que también permanece acotado el límite del módulo del cociente $f(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Proposición 1.2. Si $\psi(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ y $g(z)$ domina fuertemente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $g(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = O(\psi(z)) \text{ y } \psi(z) = o(g(z)) &\Rightarrow f(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } &O(o(g)) = o(g), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.21)$$

En efecto, cuando $z \rightarrow z_0$, el límite del módulo de $f(z)/\psi(z)$ permanece acotado y el límite del módulo de $\psi(z)/g(z)$ es cero, de donde se deduce que el límite del módulo de $f(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es igual a cero.

Proposición 1.3. Si $\psi(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ y $g(z)$ domina débilmente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $g(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = o(\psi(z)) \text{ y } \psi(z) = O(g(z)) &\Rightarrow f(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } &o(O(g)) = o(g), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Cuando $z \rightarrow z_0$, el límite del módulo de $f(z)/\psi(z)$ es cero y el límite del módulo de $\psi(z)/g(z)$ permanece acotado, de donde se deduce que el límite

del módulo de $f(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es igual a cero.

Proposición 1.4. Si $\psi(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ y $g(z)$ domina fuertemente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $g(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = o(\psi(z)) \text{ y } \psi(z) = o(g(z)) &\Rightarrow f(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } & \quad o(o(g)) = o(g), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.23)$$

Ahora, los límites cuando $z \rightarrow z_0$ de los módulos de $f(z)/\psi(z)$ y de $\psi(z)/g(z)$ son ambos nulos, de donde se deduce la nulidad del límite del módulo de $f(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Proposición 1.5. Si $f(z)$ domina débilmente sobre $\phi(z)$ y $g(z)$ domina débilmente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $f(z)g(z)$ domina débilmente sobre $\phi(z)\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(z) = O(f(z)) \text{ y } \psi(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi(z)\psi(z) = O(f(z)g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } & \quad O(fg) = O(f)O(g), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.24)$$

En estas condiciones, cuando $z \rightarrow z_0$, permanecen acotados los límites de los módulos de $\phi(z)/f(z)$ y de $\psi(z)/g(z)$. Por consiguiente, el límite del módulo de $\phi(z)\psi(z)/f(z)g(z)$ también permanece acotado cuando $z \rightarrow z_0$.

Proposición 1.6. Si $f(z)$ domina débilmente sobre $\phi(z)$ y $g(z)$ domina fuertemente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $f(z)g(z)$ domina fuertemente sobre $\phi(z)\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(z) = O(f(z)) \text{ y } \psi(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi(z)\psi(z) = o(f(z)g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } & \quad O(f)o(g) = o(fg), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Cuando $z \rightarrow z_0$, el límite del módulo de $\phi(z)/f(z)$ permanece acotado y el límite del módulo de $\psi(z)/g(z)$ es cero. Entonces, el límite del módulo de $\phi(z)\psi(z)/f(z)g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es igual a cero.

Proposición 1.7. Si $f(z)$ domina fuertemente sobre $\phi(z)$ y $g(z)$ domina débilmente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $f(z)g(z)$ domina fuertemente sobre $\phi(z)\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(z) = o(f(z)) \text{ y } \psi(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi(z)\psi(z) = o(f(z)g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada, } & \quad o(f)O(g) = o(fg), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.26)$$

El razonamiento es semejante al de la proposición 1.6. Ahora, el límite del módulo de $\phi(z)/f(z)$ es cero y el límite del módulo de $\psi(z)/g(z)$ permanece acotado cuando $z \rightarrow z_0$. Por tanto, el límite del módulo de $\phi(z)\psi(z)/f(z)g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es igual a cero.

Proposición 1.8. Si $f(z)$ domina fuertemente sobre $\phi(z)$ y $g(z)$ domina fuertemente sobre $\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $f(z)g(z)$ domina fuertemente sobre $\phi(z)\psi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } \phi(z) = o(f(z)) \text{ y } \psi(z) = o(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \phi(z)\psi(z) = o(f(z)g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada,} \quad o(f)o(g) = o(fg), \quad (z \rightarrow z_0). &\quad (1.27) \end{aligned}$$

De la nulidad de los límites de los módulos de $\phi(z)/f(z)$ y de $\psi(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, se deduce que el límite de $\phi(z)\psi(z)/f(z)g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ es igual a cero.

Proposición 1.9. Si $\phi(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ y $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $\phi(z)$ domina débilmente sobre $f(z) + g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = O(\phi(z)) \text{ y } g(z) = O(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) + g(z) = O(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada,} \quad O(\phi) + O(\phi) = O(\phi), \quad (z \rightarrow z_0). &\quad (1.28) \end{aligned}$$

Cuando $z \rightarrow z_0$, permanecen acotados los módulos de $f(z)/\phi(z)$ y de $g(z)/\phi(z)$, luego en esa vecindad también permanece acotado el límite del módulo de $(f(z) + g(z))/\phi(z)$.

Proposición 1.10. Si $\phi(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$ y $\phi(z)$ domina fuertemente sobre $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $\phi(z)$ domina débilmente sobre $f(z) + g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = O(\phi(z)) \text{ y } g(z) = o(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) + g(z) = O(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada,} \quad O(\phi) + o(\phi) = O(\phi), \quad (z \rightarrow z_0). &\quad (1.29) \end{aligned}$$

Cuando $z \rightarrow z_0$, el límite del módulo de $f(z)/\phi(z)$ permanece acotado y el límite del módulo de $g(z)/\phi(z)$ es cero. En consecuencia, el límite del módulo de $(f(z) + g(z))/\phi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ permanece acotado.

Proposición 1.11. Si $\phi(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ y $\phi(z)$ domina débilmente sobre $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $\phi(z)$ domina débilmente sobre $f(z) + g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\text{Si } f(z) = o(\phi(z)) \text{ y } g(z) = O(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow f(z) + g(z) = O(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada,} \quad &o(\phi) + O(\phi) = O(\phi), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.30)$$

El caso es análogo al planteado en la proposición 1.9. Ahora es nulo el límite del módulo de $f(z)/\phi(z)$ y acotado el límite del módulo de $g(z)/\phi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

Proposición 1.12. Si $\phi(z)$ domina fuertemente sobre $f(z)$ y $g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces $\phi(z)$ domina fuertemente sobre $f(z) + g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$. Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) = o(\phi(z)) \text{ y } g(z) = o(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0) &\Rightarrow \\ &\Rightarrow f(z) + g(z) = o(\phi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{en notación abreviada,} \quad &o(\phi) + o(\phi) = o(\phi), \quad (z \rightarrow z_0). \end{aligned} \quad (1.31)$$

De la nulidad de los límites de los módulos de $f(z)/\phi(z)$ y de $g(z)/\phi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ se deduce que también es cero el límite del módulo de $(f(z) + g(z))/\phi(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$.

(Fin del teorema 1).

Definición 5. (Refinamiento de una relación de dominancia asintótica débil). Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en una región D del plano complejo tales que, cuando $z \rightarrow z_0$,

(i) $g(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$, es decir,

$$f(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.32)$$

Si existe una función compleja $\psi(z)$ definida en D tal que, cuando $z \rightarrow z_0$,

(ii) $\psi(z)$ domina débilmente sobre $f(z)$, es decir,

$$f(z) = O(\psi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.33)$$

(iii) $g(z)$ domina débilmente sobre $\psi(z)$, es decir,

$$\psi(z) = O(g(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.34)$$

(iv) $\psi(z)$ no domina débilmente sobre $g(z)$, es decir,

$$g(z) \neq O(\psi(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.35)$$

entonces se dice que la relación de dominancia asintótica débil (ii) es un refinamiento de la relación de dominancia asintótica débil (i).

1.3. Desarrollos asintóticos

Definición 6. (Sucesión asintótica o secuencia asintótica). Sea $\{\phi_n(z)\} = \{\phi_0(z), \phi_1(z), \phi_2(z), \dots\}$ una sucesión, finita o infinita, de funciones complejas definidas en una región D del plano complejo y z_0 un punto de acumulación de D . Se dice que $\{\phi_n(z)\}$ es una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D si, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, $\phi_n(z)$ domina fuertemente sobre todas las funciones que le siguen en la secuencia dada, es decir, si

$$\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.36)$$

Si $\{\phi_n(z)\}$ es una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D para todo punto de acumulación z_0 de la región D , se dice que $\{\phi_n(z)\}$ es una sucesión o secuencia asintótica en D .

Ejemplo 1. La sucesión $\{z^n\}$ es asintótica en \mathbf{C} cuando $z \rightarrow 0$.

Ejemplo 2. La sucesión $\{z^{-n}\}$ es asintótica en \mathbf{C} cuando $z \rightarrow \infty$.

Definición 7. (Serie asintótica o serie formal). Sea $\{\phi_n(z)\}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en una región D del plano complejo y $\{a_n\}$ una sucesión de constantes complejas. La serie, convergente o no,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (1.37)$$

recibe el nombre de serie asintótica o serie formal cuando $z \rightarrow z_0$ relativa a la sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}$.

Definición 8. (Desarrollo asintótico finito de una función. Símbolo \approx). Sean $f(z)$ una función compleja definida en una región D del plano complejo, z_0 un punto de acumulación de D y $\{\phi_n(z)\}_0^{+\infty}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Se dice que la serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es un desarrollo asintótico finito de la función $f(z)$ hasta $N \geq 1$ términos cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y se escribe

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.38)$$

si la función $F_{N-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$ es dominada fuertemente por la función $\phi_{N-1}(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Es decir, si

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) = o(\phi_{N-1}(z)), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.39)$$

o bien

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-1}(z)), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.40)$$

Corolario 4. En las mismas condiciones de la definición 8, si la serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es un desarrollo asintótico de la función $f(z)$ hasta $N \geq 1$ términos cuando $z \rightarrow z_0$ en $D \subseteq \mathbf{C}$, entonces, para todo M entero tal que $1 \leq M \leq N$, se verifica que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es también un desarrollo asintótico de $f(z)$ hasta M términos cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Formalmente,

$$\begin{aligned} \text{Si } f(z) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \implies \\ \implies f(z) &\approx \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (M = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (1.41)$$

En efecto, del carácter asintótico de la sucesión $\{\phi_n(z)\}$ se deduce que

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_{M-1}(z)} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_{M-1}(z)} = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_{N-1}(z)} \times \frac{\phi_{N-1}(z)}{\phi_{M-1}(z)} = 0. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Definición 9. (Representación asintótica de una función). En las mismas condiciones de la definición 8, si $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es un desarrollo asintótico hasta $N = 1$ término de una función $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D , es decir, si

$$f(z) = a_0 \phi_0(z) + o(\phi_0(z)), \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.43)$$

o de modo equivalente,

$$f(z) - a_0 \phi_0(z) = o(\phi_0(z)), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.44)$$

entonces se dice que la función $a_0 \phi_0(z)$ es una representación asintótica de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y se escribe

$$f(z) \approx a_0(\phi_0(z)), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.45)$$

Corolario 5. En las mismas condiciones de la definición 9, la función $a_0 \phi_0(z)$ es una representación asintótica de una función $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$

en D si y solo si las funciones $f(z)$ y $\phi_0(z)$ son asintóticamente proporcionales cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Formalmente,

$$f(z) \approx a_0 \phi_0(z) \quad (z \rightarrow z_0) \iff f(z) \sim a_0 \phi_0(z) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.46)$$

En particular, si $a_0 = 1$, las funciones $f(z)$ y $\phi_0(z)$ son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ en D .

El enunciado es consecuencia inmediata de las definiciones 3 y 9.

Definición 10. (Desarrollo asintótico de una función). Sean $f(z)$ una función compleja definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, z_0 un punto de acumulación de D y $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Se dice que la serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es un desarrollo asintótico de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y se escribe

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.47)$$

cuando, para todo $N = 1, 2, 3, \dots$, la serie asintótica dada es un desarrollo asintótico de $f(z)$ hasta N términos en el sentido de la definición 8.

El símbolo \sim (cfr. definición 2) se utiliza frecuentemente en vez de \approx para expresar el desarrollo asintótico de una función relativo a una secuencia asintótica dada. (Ver nota 5).

Definición 11. (Sucesiones asintóticamente equivalentes). Sean $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ sucesiones de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$. Sea z_0 un punto de acumulación de D . Se dice que $\{\phi_n\}$ y $\{\psi_n\}$ son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ en D si para todo $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\phi_n(z) = O(\psi_n(z)) \quad \text{y} \quad \psi_n(z) = O(\phi_n(z)) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.48)$$

Se dice que $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ son asintóticamente equivalentes en D si ambas secuencias son asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación z_0 de la región D .

Corolario 6. En las condiciones de la definición 11, si $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$, $\{\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ son sucesiones asintóticamente equivalentes cuando $z \rightarrow z_0$ en $D \subseteq \mathbf{C}$ y una de ellas es una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D , entonces la otra es también una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D .

En efecto, si por ejemplo $\{\phi_n\}$ es asintótica, por hipótesis se tiene que para todo $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\psi_{n+1} = O(o(O(\psi_n))) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.49)$$

expresión que, aplicando el teorema 1, se reduce a

$$\psi_{n+1} = o(\psi_n) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.50)$$

concluyendo así (cfr. 1.36) que $\{\psi_n\}$ es también una secuencia asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D .

Corolario 7. Si $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ son sucesiones asintóticas cuando $z \rightarrow z_0$ en D , y ambas contienen el mismo número de funciones, entonces la sucesión producto $\{\phi_n\psi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ es también una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D .

A partir de la hipótesis y de la proposición 1.8 se tiene que, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$,

$$\phi_{n+1}\psi_{n+1} = o(\phi_n)o(\psi_n) = o(\phi_n\psi_n) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.51)$$

Corolario 8. (Unicidad del desarrollo asintótico de una función dada relativo a una secuencia asintótica dada). Sea $f(z)$ una función compleja definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y z_0 un punto de acumulación de D . Sea $\sum_{n=0}^{N-1} a_n\phi_n(z)$ el desarrollo asintótico de $f(z)$ hasta $N \geq 1$ términos, relativo a una sucesión asintótica dada $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D . En estas condiciones, el desarrollo asintótico

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n\phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.52)$$

es único. En otras palabras, una condición necesaria y suficiente para que una función compleja dada $f(z)$ definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ posea un desarrollo asintótico (1.52) en la vecindad de un punto de acumulación z_0 de D es que, para todo $n = 0, 1, \dots, N-1$, exista el límite

$$a_n = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\phi_k(z)}{\phi_n(z)}. \quad (1.53)$$

En efecto, por hipótesis se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-2} a_n\phi_n(z) - a_{N-1}\phi_{N-1}(z)}{\phi_{N-1}(z)} = 0, \quad (1.54)$$

de donde

$$a_{N-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-2} a_n\phi_n(z)}{\phi_{N-1}(z)}, \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.55)$$

fórmula recurrente que permite calcular los coeficientes a_n del desarrollo asintótico

$$a_n = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\phi_k(z)}{\phi_n(z)}, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.56)$$

(N finito o infinito) y demuestra que todos ellos están determinados unívocamente por $f(z)$ y por la secuencia asintótica $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$.

Corolario 9. En las mismas condiciones de la definición 8, si la serie formal $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es un desarrollo asintótico hasta $N \geq 1$ términos de una función $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, entonces la misma serie formal es un desarrollo asintótico hasta $M = 1, 2, \dots, N - 1$ términos de la función dada $f(z)$. En notación abreviada, dado un entero $N \geq 1$,

$$\text{Si } f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \implies f(z) \approx \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z), \quad (z \rightarrow z_0),$$

$$(M = 1, 2, \dots, N - 1). \quad (1.57)$$

A consecuencia de la hipótesis y del carácter asintótico de la sucesión $\phi_n(z)$, se deduce que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-2} a_n \phi_n(z) + a_{N-1} \phi_{N-1}(z) + o(\phi_{N-1}(z)) =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-2} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-2}(z)) + o(\phi_{N-2}(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.58)$$

es decir, habida cuenta de la proposición 1.12 (ver 1.31),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-2} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-2}(z)), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.59)$$

quedando así probado el corolario cuando $M = N - 1$ y por iteración para todo $M = 1, 2, \dots, N - 1$.

Corolario 10. En las mismas condiciones del corolario 9 se verifica que, para todo $M = 1, 2, \dots, N$, la función $\phi_M(z)$ domina débilmente sobre la función $F_{M-1}(z) = f(z) - \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z) + O(\phi_M(z)) \quad (z \rightarrow z_0),$$

$$(M = 1, 2, \dots, N). \quad (1.60)$$

En efecto, del corolario 9 y la definición 8 se deduce que

$$F_{M-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z) = o(\phi_{M-1}(z)) \quad (z \rightarrow z_0),$$

$$(M = 1, 2, \dots, N), \quad (1.61)$$

es decir, según la definición 1,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_{M-1}(z)}{\phi_{M-1}(z)} \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{M-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_{M-1}(z)} = 0, \quad (M = 1, 2, \dots, N). \quad (1.62)$$

Escribiendo

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_{M-1}(z)}{\phi_{M-1}(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_{M-1}(z)}{\phi_M(z)} \times \frac{\phi_M(z)}{\phi_{M-1}(z)} = 0, \quad (1.63)$$

y teniendo en cuenta el carácter asintótico de la sucesión $\{\phi_n\}$, se deduce que el límite del módulo de $F_{M-1}(z)/\phi_M(z)$ está acotado superiormente para todo $M = 1, 2, \dots, N$.

Este resultado permite justificar el uso del símbolo O para expresar la relación entre una función dada $f(z)$ y su desarrollo asintótico relativo a una sucesión asintótica dada $\{\phi_n(z)\}$. (Ver nota 6).

Un aspecto fundamental de los desarrollos asintóticos es que una expansión asintótica dada no representa en general a una única función compleja. En otras palabras, dada una sucesión asintótica $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y una serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D , en general existe más de una función compleja cuyo desarrollo asintótico relativo a $\{\phi_n\}$ es la expansión dada. Por ejemplo [18, p. 14], las funciones

$$(1+z)^{-1}, \quad \frac{1+e^{-z}}{1+z}, \quad (1+e^{-\sqrt{z}}+z)^{-1}, \quad (1.64)$$

tienen el mismo desarrollo asintótico relativo a $\{z^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S(-\pi/2, \pi/2)), \quad (1.65)$$

donde

$$S(\alpha, \beta) \equiv \{z \in \mathbf{C}; 0 < |z| < +\infty, \alpha + \delta \leq \arg(z) \leq \beta - \delta, \delta > 0\}. \quad (1.66)$$

Asimismo [24, p. 208], las funciones

$$(1+z)^{-1}, \quad (1+z)^{-1} + e^{-z}, \quad (1.67)$$

tienen el mismo desarrollo asintótico relativo a $\{z^{-n}\}_{n=1}^{+\infty}$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S(-\pi/4, \pi/4)). \quad (1.68)$$

Definición 12. (Funciones asintóticamente iguales). Sea $D \subseteq \mathbf{C}$ una región del plano complejo y z_0 un punto de acumulación de D . Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Se dice que dos funciones complejas $f(z)$, $g(z)$ definidas en D son asintóticamente iguales cuando $z \rightarrow z_0$ respecto de la sucesión dada $\{\phi_n\}$ si, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, la función ϕ_n domina fuertemente sobre la función diferencia $f(z) - g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$, es decir, si

$$f(z) - g(z) = o(\phi_n(z)), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.69)$$

Si la propiedad anterior se verifica para todo punto de acumulación z_0 de la región D , se dice que $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente iguales en D respecto de $\{\phi_n\}$.

La relación de igualdad asintótica respecto de una secuencia dada es una relación de equivalencia, cuyas propiedades reflexiva, simétrica y transitiva se comprueban sin dificultad.

Corolario 11. En las condiciones dadas para la definición 12, las funciones $f(z)$ y $g(z)$ son asintóticamente iguales cuando $z \rightarrow z_0$ en D respecto de una sucesión asintótica $\{\phi_n\}_{n=0}^{+\infty}$ si y solo si $f(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow z_0$ en D relativo a la sucesión asintótica dada.

En efecto, si el desarrollo asintótico de $g(z)$ es

$$g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.70)$$

por hipótesis se tiene:

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) = o(\phi_{N-1}) = o(\phi_{N-1}), \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.71)$$

expresión equivalente a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.72)$$

luego $f(z)$ tiene el mismo desarrollo asintótico que $g(z)$. Recíprocamente, si

$$\begin{aligned} f(z) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad \text{y} \\ g(z) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \end{aligned} \quad (1.73)$$

entonces, para todo $N = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} f(z) - g(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-1}) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) - o(\phi_{N-1}) = \\ &= o(\phi_{N-1}) - o(\phi_{N-1}) = o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \end{aligned} \quad (1.74)$$

es decir,

$$f(z) - g(z) = o(\phi_n) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.75)$$

En resumidas cuentas, una serie asintótica dada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ representa a una *clase de funciones* cuyo comportamiento asintótico es similar en una región determinada del plano complejo.

1.4. Operaciones con desarrollos asintóticos generales

Teorema 2. (Combinación lineal de los desarrollos asintóticos de dos o más funciones). Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, z_0 un punto de acumulación de D y $\{\phi_n(z)\}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Sean $f(z)$, $g(z)$ tales que existen los desarrollos asintóticos hasta $N \geq 1$ términos (N finito o infinito)

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z), \quad g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n \phi_n(z), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.76)$$

Entonces, para todo par de constantes complejas λ, μ , la función $\lambda f(z) + \mu g(z)$ tiene el desarrollo asintótico hasta $N \geq 1$ términos

$$\lambda f(z) + \mu g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} (\lambda a_n + \mu b_n) \phi_n(z), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.77)$$

El resultado es consecuencia inmediata de la hipótesis enunciada y de la propiedad (ver teorema 1)

$$\lambda o(\phi_{N-1}) + \mu o(\phi_{N-1}) = o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.78)$$

y se extiende sin dificultad a la combinación lineal de los desarrollos asintóticos de un conjunto finito arbitrario de $M > 2$ funciones complejas $\{f_j(z)\}_{j=0}^{M-1}$

[18, p. 14]. Dado un conjunto $\{\alpha_j\}_{j=0}^{M-1}$ de $M > 2$ constantes complejas,

$$\begin{aligned} \text{Si } f_j(z) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} a_{n,j} \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (0 \leq j \leq M-1) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_M(z) &\equiv \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} A_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \\ \text{siendo } A_n &\equiv \sum_{j=0}^{M-1} a_{n,j} \alpha_j, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1). \end{aligned} \quad (1.79)$$

En el caso de la combinación lineal de desarrollos asintóticos de un conjunto infinito numerable de funciones complejas, el resultado es válido cuando la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j$ converge absolutamente y la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{n,j} \alpha_j$ converge para todo n .

La multiplicación de desarrollos asintóticos no da lugar en general a desarrollos asintóticos porque en el producto formal de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n$ por $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \phi_n$ se obtienen todos los productos $\phi_m \phi_n$ y no es posible en general ordenar el conjunto de funciones $\{\phi_m \phi_n\}$ ($m, n = 0, 1, \dots$) de manera que constituya una sucesión asintótica. No obstante, existen sucesiones asintóticas $\{\phi_n\}$ tales que los productos $\phi_m \phi_n$, o bien forman una sucesión asintótica, o bien poseen desarrollos asintóticos en términos de alguna sucesión asintótica dada, que puede ser $\{\phi_n\}$ u otra [18, p. 17, 18]. El teorema 3 establece condiciones suficientes para la existencia del desarrollo asintótico del producto de dos funciones complejas.

Teorema 3. Sean $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$, $\{\psi_m(z)\}_{m=0}^{M-1}$, $\{\chi_k(z)\}_{k=0}^{K-1}$, (N, M, K finitos o infinitos) sucesiones asintóticas cuando $z \rightarrow z_0$ en una región D del plano complejo tales que

$$(i) \quad \phi_0 \psi_{M-1} = O(\chi_{K-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.80)$$

y

$$(ii) \quad \phi_{N-1} \psi_0 = O(\chi_{K-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.81)$$

y para todo n, m ,

$$(iii) \quad \phi_n \psi_m \approx \sum_{k=0}^{K-1} c_{n,m,k} \chi_k \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.82)$$

Sean $f(z), g(z)$ funciones complejas definidas en D tales que

$$(iv) \quad f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.83)$$

y

$$(v) \quad g(z) \approx \sum_{m=0}^{M-1} b_m \psi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.84)$$

y

$$(vi) \quad \begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{M-1} a_n b_m c_{n,m,k} \text{ converge si } N = +\infty \text{ y } M \text{ es finito, o bien} \\ & \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m c_{n,m,k} \text{ converge si } N \text{ es finito y } M = +\infty, \text{ o bien} \\ & \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m c_{n,m,k} \text{ converge si } N \text{ y } M \text{ son ambos infinitos.} \end{aligned} \quad (1.85)$$

En estas condiciones, la función producto $f(z)g(z)$ posee el desarrollo asintótico respecto a $\{\chi_k\}$

$$f(z)g(z) \approx \sum_{k=0}^{K-1} C_k \chi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.86)$$

donde los coeficientes

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_n b_m c_{n,m,k}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.87)$$

se han obtenido "por sustitución formal", es decir, por multiplicación formal de los desarrollos asintóticos de ambas funciones y sustitución de los desarrollos asintóticos (1.82) de los productos $\phi_n \psi_m$. El teorema se verifica en particular cuando las tres secuencias asintóticas coinciden en una sola $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$, asegurando la existencia del desarrollo asintótico de la función producto $f(z)g(z)$ relativo a la secuencia asintótica dada.

Corolario 12. Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tal que

$$(i) \quad \phi_0 \phi_{N-1} = O(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.88)$$

y para todo $m, n = 0, 1, \dots, N-1$,

$$(ii) \quad \phi_n \phi_m \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_{n,m,k} \phi_k \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.89)$$

Sean $f(z), g(z)$ funciones complejas definidas en D tales que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.90)$$

$$g(z) \approx \sum_{m=0}^{N-1} b_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.91)$$

donde, cuando N es infinito, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m c_{n,m,k}$ converge para todo k .

En estas condiciones, la función producto $f(z)g(z)$ posee el desarrollo asintótico relativo a $\{\phi_n\}$

$$f(z)g(z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} C_k \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0),$$

$$\text{donde } C_k \equiv \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} a_n b_m c_{nmk}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.92)$$

Definición 13. (Sucesiones asintóticas multiplicativas). Sea $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y sea z_0 un punto de acumulación de D . Se dice que $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica multiplicativa cuando $z \rightarrow z_0$ en D si

(i) $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$, de manera que

$$\phi_{n+1}(z) = o(\phi_n(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \text{ y} \quad (1.93)$$

(ii) La función $\phi_0(z)$ es dominada débilmente por 1 cuando $z \rightarrow z_0$, es decir,

$$\phi_0 = O(1) \quad (z \rightarrow z_0), \text{ y} \quad (1.94)$$

(iii) Para todo $n, m = 0, 1, \dots, N-1$, el producto $\phi_n \phi_m$ posee un desarrollo asintótico relativo a la sucesión asintótica dada, es decir,

$$\phi_n(z) \phi_m(z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_{nmk} \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.95)$$

Si $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica multiplicativa cuando $z \rightarrow z_0$ para todo punto de acumulación z_0 de la región D donde las funciones ϕ_n están definidas, se dice que $\{\phi_n\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica multiplicativa en D .

Dentro de la clase de las sucesiones asintóticas, existe una subclase caracterizada por la siguiente propiedad.

Definición 14. (Sucesión de índice aditivo). Una sucesión $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ es de índice aditivo si, para todo $z \in D$,

$$\phi_n(z) \phi_m(z) = \phi_{n+m}(z) \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.96)$$

Corolario 13. Si $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión de índice aditivo, entonces $\phi_0(z) = 1$ para todo $z \in D$.

En efecto, $\phi_0(z)\phi_m(z) = \phi_{0+m}(z) = \phi_m(z)$ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$ y todo $z \in D$.

El producto de desarrollos asintóticos relativos a una sucesión asintótica de índice aditivo dada tiene una forma particularmente sencilla que deriva del siguiente resultado, cuya prueba por inducción no reviste especial dificultad.

Teorema 4. (Producto de formas lineales sobre una sucesión de índice aditivo). Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión de índice aditivo de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$. Sean $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$, $\sum_{m=0}^{M-1} b_m \phi_m(z)$ ($M \leq N$), $a_n, b_n \in \mathbf{C}$, formas lineales sobre $\{\phi_n\}$ tales que, si N es infinito, la serie $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_n b_m$ es convergente. En estas condiciones, el producto de ambas formas lineales admite la expresión

$$\left(\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \right) \times \left(\sum_{m=0}^{M-1} b_m \phi_m(z) \right) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_n b_m \phi_{n+m}(z) = \sum_{k=0}^{K-1} C_k \phi_k(z), \quad (1.97)$$

donde $K = N + M - 1$ y los coeficientes C_k dependen de los a_n, b_m en la forma siguiente:

(i) Si N es finito,

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} & (k = 0, 1, \dots, M-1), \\ C_k &= \sum_{j=k-M+1}^k a_j b_{k-j} & (k = M, M+1, \dots, N-1), \quad (M < N), \\ C_k &= \sum_{j=k-M+1}^{N-1} a_j b_{k-j} & (k = N, N+1, \dots, K-1). \end{aligned} \quad (1.98)$$

(ii) Si N es infinito y M es finito,

$$\begin{aligned} C_k &= \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} & (k = 0, 1, \dots, M-1), \\ C_k &= \sum_{j=k-M+1}^k a_j b_{k-j} & (k = M, M+1, \dots). \end{aligned} \quad (1.99)$$

(iii) Si M es infinito,

$$C_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.100)$$

Corolario 14. (Producto de desarrollos asintóticos relativos a una sucesión asintótica de índice aditivo). Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica de índice aditivo en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y z_0 un punto de acumulación de D . Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en D que poseen sendos desarrollos asintóticos

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.101)$$

$$g(z) \approx \sum_{m=0}^{M-1} b_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.102)$$

$M \leq N$, tales que, si N es infinito, la serie $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{M-1} a_n b_m$ es convergente. En estas condiciones, la función producto posee el desarrollo asintótico

$$f(z)g(z) \approx \sum_{k=0}^{M-1} C_k \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.103)$$

donde

$$C_k = \sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}, \quad (k = 0, 1, \dots, M-1). \quad (1.104)$$

La demostración de este corolario se realiza multiplicando formalmente los desarrollos asintóticos de $f(z)$ y $g(z)$, teniendo en cuenta el carácter asintótico e índice aditivo de la sucesión $\{\phi_n\}$ y aplicando el teorema 4 a la expresión asintótica resultante de la función producto $f(z)g(z)$.

Corolario 15. Si $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión asintótica de índice aditivo cuando $z \rightarrow z_0$ en $D \subseteq \mathbf{C}$, entonces es multiplicativa cuando $z \rightarrow z_0$ en D .

Desde luego, $\phi_0(z) = 1 = O(1)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Además, dado que $\phi_n \phi_m = \phi_{n+m}$, se puede escribir

$$\phi_n(z)\phi_m(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{n,m,k} \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.105)$$

donde $c_{n,m,k} = 1$ si $k = n + m$ y cero en caso contrario. Entonces, haciendo valer el carácter asintótico de $\{\phi_n\}$, se verifica que, para todo $N = 1, 2, 3, \dots$ y todo $m, n = 0, 1, 2, \dots$ tales que $1 \leq N \leq n + m$,

$$\phi_n \phi_m - \sum_{k=0}^{N-1} c_{n,m,k} \phi_k = o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.106)$$

y lo mismo sucede cuando $N > n + m$, quedando así probado el carácter multiplicativo de la sucesión asintótica de índice aditivo a partir de $n = 0$.

El problema de la división de desarrollos asintóticos guarda estrecha relación con el del producto y se plantea del modo siguiente: dada una sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito), sean $f(z)$, $g(z)$ dos funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ que poseen desarrollos asintóticos

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z), \quad g(z) \approx \sum_{m=0}^{N-1} b_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.107)$$

donde z_0 es un punto de acumulación de D . Establecer las condiciones de existencia del desarrollo asintótico relativo a $\{\phi_n\}$ de la función cociente $f(z)/g(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D y determinar la relación entre los coeficientes de tal desarrollo y los a_n , b_m . El teorema 5 establece condiciones suficientes para la existencia del desarrollo asintótico de la función recíproca en el producto de una función dada.

Teorema 5. Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión asintótica multiplicativa de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, sea z_0 un punto de acumulación de D . Sea $g(z)$ una función compleja definida en D tal que posee el desarrollo asintótico

$$g(z) \approx c + \sum_{n=1}^{N-1} b_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (c \neq 0). \quad (1.108)$$

Entonces, la función $1/g(z) \equiv [g(z)]^{-1}$, recíproca de $g(z)$ respecto de la multiplicación de funciones, posee el desarrollo asintótico

$$1/g(z) \approx \bar{c} + \sum_{m=1}^{N-1} \bar{b}_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.109)$$

donde las constantes \bar{c} , \bar{b}_m se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones

$$c\bar{c} = 1, \\ \bar{c}\bar{b}_k + \bar{c}b_k + \sum_{n=1}^{N-1} \sum_{m=1}^{N-1} b_n \bar{b}_m c_{n,m,k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1), \quad (1.110)$$

siendo $c_{n,m,k}$ los coeficientes de los desarrollos asintóticos de los productos $\phi_n \phi_m$. La existencia de estos desarrollos es consecuencia del carácter multiplicativo de la sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}$:

$$\phi_n(z)\phi_m(z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} c_{n,m,k} \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (n, m = 0, 1, \dots, N-1). \quad (1.111)$$

La demostración se realiza multiplicando formalmente los desarrollos (1.108), (1.109) y aplicando el carácter multiplicativo de la secuencia $\{\phi_n\}$ para reemplazar los productos $\phi_n\phi_m$ por combinaciones (1.111). El desarrollo así obtenido se compara con la expresión $g(z)[g(z)]^{-1} = 1 + 0\phi_1(z) + 0\phi_2(z) + \dots$, dando como resultado el sistema (1.110) cuya compatibilidad se verifica, toda vez que $c \neq 0$ y $\bar{c} \neq 0$.

Corolario 16. Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión asintótica multiplicativa de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, sea z_0 un punto de acumulación de D . Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en D tales que poseen los desarrollos asintóticos

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.112)$$

$$g(z) \approx c + \sum_{m=1}^{N-1} b_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (c \neq 0). \quad (1.113)$$

En estas condiciones, la función cociente $f(z)/g(z)$ tiene el desarrollo asintótico

$$f(z)/g(z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} C_k \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.114)$$

donde

$$C_k = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} a_n \bar{b}_j c_{n,j,k} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.115)$$

siendo $c_{n,j,k}$ los coeficientes en los desarrollos (1.111) y \bar{b}_j los coeficientes del desarrollo asintótico

$$1/g(z) \approx \bar{b}_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \bar{b}_j \phi_j(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.116)$$

cuya existencia está asegurada por el teorema 5.

El resultado es consecuencia directa del teorema 5 y el corolario 12.

En el caso de que las funciones posean desarrollos asintóticos relativos a una secuencia asintótica de índice aditivo (ver definición 14) el desarrollo asintótico del cociente adquiere una forma particularmente sencilla.

Corolario 17. Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica de índice aditivo en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y z_0 un punto de acumulación de D . Sea $g(z)$ una función compleja definida en D tal que posee el desarrollo asintótico

$$g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (b_0 \neq 0). \quad (1.117)$$

Entonces, la función $1/g(z) \equiv [g(z)]^{-1}$, recíproca de $g(z)$ respecto de la multiplicación de funciones, posee el desarrollo asintótico

$$1/g(z) \approx \sum_{m=0}^{+\infty} \bar{b}_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.118)$$

donde las constantes \bar{b}_m se obtienen resolviendo el sistema recurrente de ecuaciones

$$\begin{aligned} b_0 \bar{b}_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^k b_j \bar{b}_{k-j} &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (1.119)$$

La demostración es análoga a la del teorema 5.

Corolario 18. Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica de índice aditivo en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, sea z_0 un punto de acumulación de D . Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en D tales que poseen los desarrollos asintóticos

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.120)$$

$$g(z) \approx \sum_{m=0}^{N-1} b_m \phi_m(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (b_0 \neq 0). \quad (1.121)$$

En estas condiciones, la función cociente $f(z)/g(z)$ posee el desarrollo asintótico

$$f(z)/g(z) \approx \sum_{k=0}^{N-1} C_k \phi_k(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.122)$$

donde los coeficientes C_k , que son soluciones del sistema recurrente de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^k C_j b_{k-j} = a_k \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.123)$$

tienen la forma explícita

$$C_k = \sum_{j=0}^k a_j \bar{b}_{k-j} \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.124)$$

donde \bar{b}_j son los coeficientes del desarrollo asintótico de la función recíproca $1/g(z)$ dados en (1.119).

La demostración es análoga a la del corolario 16.

La integración de desarrollos asintóticos respecto a la variable independiente o respecto de parámetros es en general posible, supuesta la convergencia de las integrales de las funciones que intervienen en el proceso. Presentamos los enunciados de algunos resultados fundamentales cuya demostración puede consultarse en [18, p. 7, 11, 16, 17].

Teorema 6. (Integración de relaciones de orden respecto de una variable real). Sea x una variable real definida en un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real ampliada $\bar{\mathbf{R}}$, sean $\phi(x), \psi(x)$ funciones de I en $\bar{\mathbf{R}}$ tales que

- (i) $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son medibles en I .
- (ii) $\phi(x) = O(\psi(x))$ cuando $x \rightarrow a$ en I .
- (iii) $\phi(x) = O(\psi(x))$ cuando $x \rightarrow b$ en I .

Entonces, a consecuencia de (i) y (ii) se verifica

$$\int_a^x \phi(t)dt = O\left(\int_a^x |\psi(t)|dt\right) \quad (x \rightarrow a), \quad (1.125)$$

y a consecuencia de (i) y (iii) se verifica

$$\int_x^b \phi(t)dt = O\left(\int_x^b |\psi(t)|dt\right) \quad (x \rightarrow b). \quad (1.126)$$

El enunciado es válido cuando la relación de orden O es sustituida por la relación de orden o .

Teorema 7. (Integración de relaciones de orden O respecto de un parámetro real). Sea x una variable real definida en una región D de la recta real ampliada $\bar{\mathbf{R}}$, sean x_0 un punto de acumulación de D y λ un parámetro real definido en un intervalo $I = (\alpha, \beta)$ de $\bar{\mathbf{R}}$.

Sean $\phi(x, \lambda), \psi(x, \lambda)$ funciones de $D \times I$ en $\bar{\mathbf{R}}$ tales que

- (i) $\phi(x, \lambda)$ y $\psi(x, \lambda)$ son medibles de λ en I .
- (ii) $\phi(x, \lambda) = O(\psi(x, \lambda))$ cuando $x \rightarrow x_0$ uniformemente en λ .

Entonces se verifica

$$\int_\alpha^\beta \phi(x, \lambda)d\lambda = O\left(\int_\alpha^\beta |\psi(x, \lambda)|d\lambda\right) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (1.127)$$

Corolario 19. (Integración de desarrollos asintóticos respecto de una variable real).

Proposición 19.1. Sea x una variable real definida en un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real ampliada $\bar{\mathbf{R}}$, sea $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión de funciones definidas en I tal que

- (i) $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow a$ en I .
- (ii) $\phi_n(x)$ es positiva en I para todo $n = 0, 1, \dots, N - 1$.

(iii) Todas las integrales

$$\Phi_{n,a}(x) = \int_a^x \phi_n(t) dt \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.128)$$

existen. Sea $f(x)$ una función definida y medible en I tal que posee el desarrollo asintótico

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(x) \quad (x \rightarrow a). \quad (1.129)$$

En estas condiciones, la función

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.130)$$

existe en algún intervalo $(a, c) \subset (a, b)$ y posee el desarrollo asintótico

$$F_a(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Phi_{n,a}(x) \quad (x \rightarrow a). \quad (1.131)$$

Proposición 19.2. Sea x una variable real definida en un intervalo $I = (a, b)$ de la recta real ampliada $\bar{\mathbf{R}}$, sea $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ una sucesión de funciones definidas en I tal que

- (i) $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow b$ en I .
- (ii) $\phi_n(x)$ es positiva en I para todo $n = 0, 1, \dots, N-1$.
- (iii) Todas las integrales

$$\Phi_{n,b}(x) = \int_x^b \phi_n(t) dt \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.132)$$

existen. Sea $f(x)$ una función definida y medible en I tal que posee el desarrollo asintótico

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n \phi_{n,b}(x) \quad (x \rightarrow b). \quad (1.133)$$

En estas condiciones, la función

$$F_b(x) = \int_x^b f(t) dt \quad (1.134)$$

existe en algún intervalo $(c, b) \subset (a, b)$ y posee el desarrollo asintótico

$$F_b(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n \Phi_n(x) \quad (x \rightarrow b). \quad (1.135)$$

Proposición 19.3. Si además de las condiciones (i), (ii), (iii) de las proposiciones 19.1, 19.2 la función $f(x)$ es integrable Riemann sobre $I = (a, b)$, se verifica que

a) La función $F_a(x)$ definida en (1.130) posee el desarrollo asintótico

$$F_a(x) \approx A_0 - \sum_{n=0}^{N-1} b_n \Phi_{n,b}(x) \quad (x \rightarrow b), \quad (1.136)$$

donde $\Phi_{n,b}(x)$ han sido definidas en (1.132).

b) La función $F_b(x)$ definida en (1.134) posee el desarrollo asintótico

$$F_b(x) \approx A_0 - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \Phi_{n,a}(x) \quad (x \rightarrow a), \quad (1.137)$$

donde $\Phi_{n,a}(x)$ han sido definidas en (1.128) y

$$A_0 \equiv \int_a^b f(t) dt = F_a(b) = F_b(a). \quad (1.138)$$

(Fin del teorema 7).

Corolario 20. (Integración de desarrollos asintóticos respecto de un parámetro real). Sea x una variable real definida en una región D de la recta real ampliada $\bar{\mathbf{R}}$. Sean x_0 un punto de acumulación de D y λ un parámetro real definido en un intervalo $I = (\alpha, \beta)$ de \mathbf{R} . Sea $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión de funciones definidas en D tales que

(i) $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{N-1}$ es una sucesión asintótica cuando $x \rightarrow x_0$ en D .

(ii) $\phi_n(x)$ es independiente de λ para todo $n = 0, 1, \dots, N-1$.

Sea $f(x, \lambda)$ una función de $D \times I$ en $\bar{\mathbf{R}}$ tal que

(iii) $f(x, \lambda)$ es una función medible respecto de λ en I para todo $x \in D$.

(iv) $f(x, \lambda)$ posee el desarrollo asintótico

$$f(x, \lambda) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n(\lambda) \phi_n(x) \quad (x \rightarrow x_0), \quad (1.139)$$

donde $a_n(\lambda)$ es medible respecto de λ en I para todo $n = 0, 1, \dots, N-1$. Sea $h(\lambda)$ una función integrable respecto de λ en I tal que todas las integrales

$$A_n = \int_{\alpha}^{\beta} h(\lambda) a_n(\lambda) d\lambda \quad (n = 0, 1, \dots, N-1) \quad (1.140)$$

existen. En estas condiciones, la integral

$$F(x) = \int_{\alpha}^{\beta} h(\lambda) f(x, \lambda) d\lambda \quad (1.141)$$

existe para todo x en alguna vecindad de x_0 y posee el desarrollo asintótico

$$F(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} A_n \phi_n(x) \quad (x \rightarrow x_0). \quad (1.142)$$

La derivación de desarrollos asintóticos respecto de la variable independiente o respecto de algún parámetro es posible solo cuando se dan ciertas condiciones. Si una función compleja $f(z)$ definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tiene un desarrollo asintótico $f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D relativo a una sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}$, la función derivada $f'(z)$ no existe necesariamente. Cuando $f(z)$ es derivable, la mera existencia de la derivada no asegura que ésta posea un desarrollo asintótico respecto a la secuencia dada $\{\phi_n\}$.

Por ejemplo, [24, p. 209] la función $f(z) = 2z^{1/2}$ es derivable y su primera derivada es $f'(z) = z^{-1/2}$, función que no tiene desarrollo asintótico respecto a la sucesión asintótica $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$, toda vez que la aplicación del corolario 8 al caso actual da como resultado que el coeficiente del término de orden cero de tal desarrollo sería igual a cero, e igual a infinito los coeficientes de los términos sucesivos.

La razón inmediata de la imposibilidad de derivar desarrollos asintóticos reside [18, p. 7] en que no es admisible en general la diferenciación de relaciones de orden, ora respecto de la variable independiente, ora respecto de algún parámetro. Por consiguiente, la diferenciación de una sucesión asintótica no produce en general una sucesión asintótica. Por ejemplo, [18, p.11] la sucesión $\{\phi_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$, donde $\phi_n(x) = x^{-(n+1)} [a + \cos(x^{n+1})]$ es asintótica cuando $|x| \rightarrow +\infty$ en el eje real, toda vez que $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \phi_{n+1}(x)/\phi_n(x) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$. No obstante, la sucesión $\{\phi'_n(x)\}_{n=0}^{+\infty}$, donde $\phi'_n(x) \sim -(n+1)x^{-1} \operatorname{sen}(x^{n+1})$ cuando $|x| \rightarrow +\infty$ para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, no es una sucesión asintótica cuando x tiende a infinito en el eje real, toda vez que $\phi'_{n+1}(x)/\phi'_n(x)$ es oscilante cuando $|x| \rightarrow +\infty$.

En la sección siguiente se darán condiciones suficientes de diferenciación de desarrollos asintóticos relativos a sucesiones asintóticas de potencias.

1.5. Operaciones con desarrollos asintóticos de potencias

Las sucesiones de potencias enteras $\{z^n\}_{n=0}^{+\infty}$ y $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$ desempeñan un papel fundamental en el estudio del comportamiento de funciones en la vecindad del origen y el infinito respectivamente. En lo sucesivo nos referimos a la segunda, toda vez que es posible transformar una en otra mediante la inversión de la variable independiente.

Corolario 21. La sucesión de potencias enteras $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$ es una sucesión asintótica multiplicativa cuando $z \rightarrow +\infty$ en toda región D del plano complejo excluido el origen.

En efecto, denominando $\phi_n(z) = z^{-n}$, es inmediato verificar que el límite de ϕ_{n+1}/ϕ_n es cero y que $\phi_0(z) = O(1)$ cuando $z \rightarrow +\infty$. Además, para todo $m, n = 0, 1, 2, \dots$, el producto $\phi_{n+m}(z) = \phi_n(z)\phi_m(z)$ admite un desarrollo en potencias donde los coeficientes $a_{n,m,k}$ de todos los términos son nulos excepto el de orden $n + m$, que es igual a 1. Este es además un desarrollo asintótico porque para todo $N = 1, 2, 3, \dots$, se comprueba sin dificultad que la función $F_{N-1}(z) \equiv \phi_{n+m}(z) - \sum_{k=0}^{N-1} a_{n,m,k}\phi_k(z)$ es dominada fuertemente por $\phi_{N-1}(z)$ cuando $z \rightarrow +\infty$. La sucesión $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$ cumple así las condiciones de la definición 13. A la misma conclusión se llega teniendo en cuenta que la sucesión de potencias enteras es de índice aditivo (cfr. definición 14) y aplicando el corolario 15.

Una consecuencia directa del corolario 21 es que las definiciones 7, 8 y 10 son aplicables a la sucesión $\{z^{-n}\}$.

Definición 15. (Serie asintótica de potencias). Dada una sucesión $\{a_n\}_{n=0}^{+\infty}$ de constantes complejas, la serie formal (convergente o no)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots, \quad (1.143)$$

es una serie asintótica de potencias cuando $z \rightarrow +\infty$ en cualquier región $D \subseteq \mathbf{C}$ excluido el origen.

Definición 16. (Desarrollo asintótico finito de una función compleja en potencias enteras de la variable independiente). Sea $f(z)$ una función compleja definida en una región no acotada $D \subseteq \mathbf{C}$. La serie asintótica $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}$ es un desarrollo asintótico de $f(z)$ en potencias hasta $N \geq 1$ términos cuando $z \rightarrow +\infty$ en D , y se expresa

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.144)$$

si se verifica que la función $F_{N-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}$ es dominada fuertemente por $z^{-(N-1)}$ cuando $z \rightarrow +\infty$ en D , es decir, si

$$F_{N-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} = o\left(z^{-(N-1)}\right) \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.145)$$

o lo que es igual,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + o\left(z^{-(N-1)}\right) \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (1.146)$$

Definición 17. (Desarrollo asintótico de una función compleja en potencias enteras de la variable independiente). En las mismas condiciones de la definición 16, la serie asintótica de potencias $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ es un desarrollo asintótico de la función compleja $f(z)$ en potencias cuando $z \rightarrow +\infty$ en D , y se expresa

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.147)$$

si para todo $N = 1, 2, 3, \dots$, la serie asintótica de potencias $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n}$ es un desarrollo asintótico de $f(z)$ hasta N términos en el sentido de la definición 16.

Corolario 22. (Combinación lineal de los desarrollos asintóticos en potencias enteras de dos funciones complejas).

Proposición 22.1. Sean $f(z), g(z)$ funciones complejas definidas en sendas regiones no disjuntas D_f, D_g del plano complejo ampliado $\bar{\mathbf{C}}$, sea $D = D_f \cap D_g$ la región del plano donde ambas funciones están definidas. Si $f(z)$ y $g(z)$ poseen desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta un número finito dado $N \geq 1$ de términos, es decir, si

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.148)$$

$$g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.149)$$

para todo par de constantes complejas λ, μ , la función $\lambda f(z) + \mu g(z)$ definida en D posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos

$$\lambda f(z) + \mu g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} (\lambda a_n + \mu b_n) z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (1.150)$$

Proposición 22.2. En las condiciones de la proposición 22.1, si $f(z)$ y $g(z)$ poseen desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta cualquier número $N \geq 1$ de términos, es decir, si

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.151)$$

$$g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.152)$$

para todo par de constantes complejas λ, μ , la función $\lambda f(z) + \mu g(z)$ definida en D posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$

hasta cualquier número de términos

$$\lambda f(z) + \mu g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty). \quad (1.153)$$

El resultado es consecuencia del teorema 2 y el corolario 21 y se extiende sin condiciones adicionales a la combinación lineal de un conjunto finito de funciones complejas de z .

Corolario 23. (Combinación lineal de los desarrollos asintóticos en potencias enteras de un conjunto finito de funciones complejas).

Proposición 23.1. Sea $\{f_j(z)\}_{j=0}^{M-1}$ ($M = 3, 4, 5, \dots$), un conjunto finito de M funciones complejas definidas en una región común $D \subseteq \bar{\mathbf{C}}$ tales que poseen M desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta un número finito dado $N \geq 1$ de términos, es decir,

$$f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_{n,j} z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (j = 0, 1, \dots, M-1). \quad (1.154)$$

Entonces, para todo conjunto $\{\alpha_j\}_{j=0}^{M-1}$ de M constantes complejas, se verifica que la función $F_M(z) \equiv \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j f_j(z)$ tiene el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos

$$F_M(z) \equiv \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} A_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty),$$

siendo $A_n \equiv \sum_{j=0}^{M-1} a_{n,j} \alpha_j, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$ (1.155)

Proposición 23.2. En las condiciones de la proposición 23.1, si todas las M funciones $f_j(z)$ poseen desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta cualquier número $N \geq 1$ de términos, es decir, si

$$f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,j} z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (j = 0, 1, \dots, M-1), \quad (1.156)$$

entonces se verifica que para todo conjunto finito de M constantes complejas $\{\alpha_j\}_{j=0}^{M-1}$ la función $F_M(z) \equiv \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j f_j(z)$ tiene el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta cualquier número de términos

$$F_M(z) \equiv \sum_{j=0}^{M-1} \alpha_j f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty),$$

siendo $A_n \equiv \sum_{j=0}^{M-1} a_{n,j} \alpha_j, \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$ (1.157)

Corolario 24. (Combinación lineal de los desarrollos asintóticos en potencias enteras de un conjunto infinito numerable de funciones complejas).

Proposición 24.1. Sea $\{f_j(z)\}_{j=0}^{+\infty}$ un conjunto infinito numerable de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tales que poseen desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta un número finito dado $N \geq 1$ términos

$$f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_{n,j} z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.158)$$

Entonces, para todo conjunto infinito numerable de constantes complejas $\{\alpha_j\}_{j=0}^{+\infty}$ tal que

(i) La serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j$ converge absolutamente,

(ii) La serie $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{n,j} \alpha_j$ converge para todo $n = 0, 1, \dots, N-1$,

se verifica que la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z)$ converge para todo z tal que $|z| > \rho > 0$ y la función $F(z) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z)$ definida por esta serie posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos

$$F(z) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} A_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty),$$

siendo $A_n \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} a_{n,j} \alpha_j, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1).$ (1.159)

Proposición 24.2. En las condiciones de la proposición 24.1, si para todo $j = 0, 1, 2, \dots$ $f_j(z)$ posee un desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta cualquier número $N \geq 1$ de términos

$$f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,j} z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.160)$$

y si $\{\alpha_j\}_{j=0}^{+\infty}$ es un conjunto infinito numerable de constantes complejas tales que

(i) La serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j$ converge absolutamente,

(ii) La serie $\sum_{j=0}^{+\infty} a_{n,j} \alpha_j$ converge para todo $n = 0, 1, 2, \dots$,

se verifica que la serie $\sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z)$ converge para todo z tal que $|z| > \rho > 0$ y la función $F(z) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z)$ definida por esta serie posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta cualquier número de términos

$$F(z) \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j f_j(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} A_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty),$$

$$\text{siendo } A_n \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} a_{n,j} \alpha_j, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.161)$$

El resultado es consecuencia del corolario 21 y de la extensión del teorema 2 a las combinaciones lineales de conjuntos infinitos numerables de funciones que verifican las condiciones (i) y (ii).

El producto de desarrollos asintóticos en potencias enteras de la variable independiente es siempre realizable hasta un número finito de términos. También es realizable hasta cualquier número de términos, asumida la convergencia de la serie producto de los coeficientes de los desarrollos asintóticos de los factores.

Corolario 25. (Producto de desarrollos asintóticos en potencias enteras de dos funciones complejas). Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tales que poseen desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta $N \geq 1$ (N finito o infinito)

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.162)$$

$$g(z) \approx \sum_{m=0}^{N-1} b_m z^{-m} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.163)$$

de manera que si N es infinito, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} a_n b_m$ es convergente.

Entonces, la función producto $f(z)g(z)$ posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos en D (N finito o infinito respectivamente)

$$f(z)g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} C_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty),$$

$$\text{donde } C_n \equiv \sum_{j=0}^n a_j b_{n-j}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.164)$$

El resultado es consecuencia de los corolarios 14 y 21.

El cociente de desarrollos asintóticos en potencias enteras de la variable independiente se realiza en las condiciones establecidas en los corolarios 17 y 18.

Corolario 26. (Inversión del desarrollo asintótico de una función compleja en potencias enteras de la variable independiente). Sea $g(z)$ una función

compleja definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tal que posee un desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos en D (N finito o infinito)

$$g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} b_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (b_0 \neq 0). \quad (1.165)$$

Entonces, la función $1/g(z) \equiv [g(z)]^{-1}$, recíproca de $g(z)$ respecto a la multiplicación de funciones, posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$

$$1/g(z) \equiv [g(z)]^{-1} \approx \sum_{m=0}^{N-1} \bar{b}_m z^{-m} \quad (z \rightarrow +\infty) \quad (1.166)$$

donde $\bar{b}_0 \neq 0$ y las constantes \bar{b}_m ($m = 0, 1, 2, \dots$) se obtienen resolviendo el sistema recurrente de ecuaciones

$$\begin{aligned} b_0 \bar{b}_0 &= 1 \\ \sum_{j=0}^k b_j \bar{b}_{k-j} &= 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (1.167)$$

El resultado es consecuencia directa de los corolarios 17 y 21. También consecuencia directa de los corolarios 18 y 21 es el enunciado que expresa el cociente de desarrollos asintóticos en potencias enteras.

Corolario 27. (Cociente de los desarrollos asintóticos de dos funciones complejas en potencias enteras de la variable independiente). Sean $f(z)$, $g(z)$ funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tales que poseen los desarrollos asintóticos en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow +\infty$ hasta N términos (N finito o infinito)

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.168)$$

$$g(z) \approx \sum_{m=0}^{N-1} b_m z^{-m} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (b_0 \neq 0). \quad (1.169)$$

Entonces, la función cociente $f(z)/g(z)$ tiene el desarrollo asintótico en potencias de z cuando $z \rightarrow +\infty$

$$f(z)/g(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} C_n z^{-n} \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.170)$$

donde los coeficientes C_n ($n = 0, 1, \dots, N-1$), que son soluciones del sistema recurrente de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^n C_j b_{n-j} = a_n, \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.171)$$

tienen la forma explícita

$$C_n = \sum_{j=0}^n a_j \bar{b}_{n-j} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1), \quad (1.172)$$

donde \bar{b}_j son los coeficientes del desarrollo asintótico de la función recíproca $1/g(z)$ dados en (1.167).

La integración de desarrollos asintóticos en potencias enteras de una variable real x es consecuencia del corolario 19.

Corolario 28. (Integración de desarrollos asintóticos en potencias enteras de la variable independiente). Sea $f(x)$ una función real o compleja definida en un intervalo $I = (a, +\infty)$ del semieje real positivo tal que

(i) $f(x)$ es continua en I .

(ii) $f(x)$ posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de x cuando $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n} = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \dots \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (1.173)$$

Entonces, la función

$$F_a(x) = \int_a^x f(t) dt \quad (1.174)$$

existe en algún intervalo $(a, c) \subset (a, +\infty)$ y posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de x cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} F_a(x) &\equiv \int_a^x f(t) dt \approx A + a_0 x + a_1 \ln x - \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{-(n-1)} / (n-1) = \\ &= A + a_0 x + a_1 \ln x - \sum_{n=1}^{+\infty} a_{n+1} x^{-n} / n \quad (x \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (1.175)$$

siendo

$$A \equiv \int_a^{+\infty} (f(t) - a_0 - a_1 t^{-1}) dt - a_0 a - a_1 \ln a. \quad (1.176)$$

Desde luego, para todo $n = 0, 1, 2, \dots$, la función $\phi_n(x) \equiv x^{-n}$ es positiva en el intervalo $I = (a, +\infty)$ del semieje real positivo. Además, las funciones

$$\Phi_{n,+\infty}(x) \equiv \int_x^{+\infty} \phi_n(t) dt = \int_x^{+\infty} t^{-n} dt, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.177)$$

existen para $n = 2, 3, 4, \dots$, no para $n = 0, 1$. Ahora bien, la función $\hat{f}(x) \equiv f(x) - a_0 - a_1 x^{-1}$ posee un desarrollo asintótico en potencias enteras de

x cuando $x \rightarrow +\infty$ en el que faltan los términos de órdenes cero y uno que hacen diverger la integral del desarrollo de $f(x)$. En consecuencia, $\hat{f}(x)$ verifica las condiciones del corolario 19 y la función

$$\hat{F}_{+\infty}(x) \equiv \int_x^{+\infty} \hat{f}(t) dt \equiv \int_x^{+\infty} (f(t) - a_0 - a_1 t^{-1}) dt \quad (1.178)$$

existe en algún intervalo $(c, +\infty)$ ($c \geq a$) y posee el desarrollo asintótico

$$\hat{F}_{+\infty}(x) \approx \sum_{n=2}^{+\infty} a_n x^{-(n-1)} / (n-1) \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (1.179)$$

Además, para todo $x \in (a, +\infty)$, la función $f(x)$ es integrable sobre (a, x) debido a su continuidad y al carácter acotado del intervalo, de manera que

$$F_a(x) = \hat{F}_a(x) + a_0 x + a_1 \ln x - a_0 a - a_1 \ln a, \quad (1.180)$$

donde

$$\hat{F}_a(x) \equiv \int_a^x \hat{f}(t) dt \quad (1.181)$$

existe en $I = (a, +\infty)$ y posee el desarrollo asintótico que deriva de la igualdad

$$\hat{F}_a(x) = \int_a^{+\infty} \hat{f}(t) dt - \int_x^{+\infty} \hat{f}(t) dt \equiv \hat{A}_0 - \hat{F}_{+\infty}(x), \quad (1.182)$$

donde

$$\hat{A}_0 \equiv \int_a^{+\infty} \hat{f}(t) dt = \int_a^{+\infty} (f(t) - a_0 - a_1 t^{-1}) dt. \quad (1.183)$$

La tesis del corolario resulta de llevar (1.179) a (1.182) y sustituir la expresión asintótica de $\hat{F}_a(x)$ así obtenida en (1.180).

La derivación del desarrollo asintótico de una función en potencias enteras de la variable independiente es posible cuando la función verifica determinadas condiciones.

Teorema 8. (Condiciones suficientes para la derivación de desarrollos asintóticos en potencias enteras de una variable real). Sea $f(x)$ una función real o compleja definida en la recta real \mathbf{R} tal que

- (i) $f(x)$ es diferenciable en \mathbf{R} .
- (ii) $f(x)$ posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de x cuando $x \rightarrow +\infty$

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n} = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \dots \quad (x \rightarrow +\infty). \quad (1.184)$$

(iii) La función derivada $f'(x)$ es continua para todo $x > c$ ($c \in \mathbf{R}$).

(iv) Existe el desarrollo asintótico de $f'(x)$ en potencias enteras de x cuando $x \rightarrow +\infty$.

Entonces, el desarrollo asintótico de $f'(x)$ se obtiene derivando término a término el desarrollo asintótico de $f(x)$, es decir,

$$f'(x) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{-n} \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.185)$$

donde

$$b_0 = 0, \quad b_n = -(n-1)a_{n-1}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.186)$$

El resultado es consecuencia de (1.178), (1.179) (ver Nota 8).

Teorema 9. (Derivación de desarrollos asintóticos en potencias enteras de una variable compleja). Sea $f(z)$ una función compleja definida en una región anular $D \subseteq \mathbf{C}$ tal que

(i) $f(z)$ es holomorfa en D , es decir, analítica y no singular para todo $z \in D$.

(ii) Existe un sector anular

$$S \equiv \{z \in \mathbf{C}; |z| > R, \alpha < \arg(z) < \beta\} \subseteq D, \quad (1.187)$$

tal que $f(z)$ posee el desarrollo asintótico

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (1.188)$$

uniformemente en $\arg z$ cuando $z \rightarrow +\infty$ en cualquier rayo contenido en S .

Entonces existe un sector anular $\hat{S} \subset S$ tal que la función derivada $f'(z)$ posee el desarrollo asintótico

$$f'(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (1.189)$$

uniformemente en $\arg z$ cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier rayo contenido en \hat{S} , donde los coeficientes b_n vienen dados por (1.186). Además, el desarrollo asintótico (1.188) de $f(z)$ en S puede derivarse término a término cualquier número m de veces cuando $z \rightarrow \infty$ en cualquier rayo contenido en \hat{S} :

$$f^{(m)}(z) \equiv \frac{d^m f}{dz^m} \approx \sum_{n=m+1}^{+\infty} (-1)^m \frac{(n-1)! a_{n-m}}{(n-m-1)!} z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty)$$

$$(\arg(z) = \text{cte.}), \quad (z \in \hat{S}), \quad (m = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.190)$$

1.6. Representación de funciones mediante desarrollos asintóticos

Una de las razones que justifican la presencia de los métodos asintóticos en el ámbito de la matemática aplicada y de las ciencias es la notable propiedad de los desarrollos asintóticos de aproximar una función en la vecindad de un punto dado mediante sumas de un número finito de términos. No obstante, a diferencia de los desarrollos de Taylor, los desarrollos asintóticos infinitos no pueden considerarse en general como representaciones genuinas de funciones en la vecindad de puntos dados de sus dominios de definición, toda vez que no son necesariamente convergentes (ver Nota 4). En esta sección examinamos las condiciones bajo las cuales un desarrollo asintótico de una función relativo a una secuencia asintótica dada puede considerarse como representación de la misma función en el sentido usual de la convergencia de series funcionales.

1.6.1. Convergencia y carácter asintótico de series funcionales

Consideremos el desarrollo asintótico de una función compleja dada $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ relativo a una sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.191)$$

donde N es finito o infinito. Cuando N es infinito, la serie en el segundo miembro $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ no converge necesariamente, es decir, puede ser convergente o divergente cuando $z \rightarrow z_0$, y sin embargo es útil para obtener aproximaciones de $f(z)$ con gran exactitud (ver por ejemplo [24, p. 209, observación (e)]). ¿Cómo entender el comportamiento aparentemente paradójico de los desarrollos asintóticos?

Cuando afirmamos que una serie funcional $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ converge para todo z en cierto conjunto $G \subseteq \mathbf{C}$, en realidad afirmamos que

(i) Existe un subconjunto no vacío $G \subseteq \mathbf{C}$ tal que, para cada valor fijo $z \in G$, la sucesión numérica de sumas parciales

$$\left\{ S_N(z) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \right\}_{N=1}^{+\infty} \quad (1.192)$$

es convergente, es decir, para cada $z \in G$, existe el límite de la sucesión cuando $N \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} S_N(z) \equiv S(z) \equiv \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \in \mathbf{C}. \quad (1.193)$$

Este límite $S(z)$ es la suma de la serie numérica resultante de fijar el valor de z en la serie funcional dada.

(ii) Existe la función

$$\begin{aligned} g : G &\longrightarrow \mathbf{C} \\ z &\longrightarrow g(z) \equiv S(z), \end{aligned} \quad (1.194)$$

que asocia a cada valor fijo $z \in G$ la suma $S(z)$ de la serie numérica resultante de fijar el valor de la variable z en la serie funcional dada:

$$g(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z), \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (1.195)$$

Cuando afirmamos que una serie funcional $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es el desarrollo asintótico de una función dada $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$, siendo z_0 un punto de acumulación de D , afirmamos que

(i) Para cada valor fijo $N = 1, 2, 3, \dots$, la función

$$F_{N-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (1.196)$$

es dominada fuertemente cuando $z \rightarrow z_0$ por la función $\phi_{N-1}(z)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.197)$$

de manera que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_{N-1}(z)} = 0. \quad (1.198)$$

(ii) La función $F_{N-1}(z)$ es dominada débilmente cuando $z \rightarrow z_0$ por la función $\phi_N(z)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + O(\phi_N) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.199)$$

de manera que

$$L_N \equiv \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)}{\phi_N(z)} \right| \in \mathbf{R}^+. \quad (1.200)$$

Así pues, al afirmar la convergencia de la serie funcional se afirma la existencia de un límite cuando el índice entero $N \rightarrow +\infty$. En cambio, la afirmación del carácter asintótico de la serie funcional es equivalente a aseverar que existe un límite cuando la variable compleja $z \rightarrow z_0$, donde z_0 es un

punto de acumulación de una región $D \subseteq \mathbf{C}$.

La diferencia esencial entre convergencia y carácter asintótico de una serie funcional está en el origen de algunas propiedades curiosas de las series asintóticas que no se dan en las series convergentes. Sean $f(z)$ una función compleja definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D tal que

(i) $f(z)$ posee el desarrollo asintótico relativo a $\{\phi_n(z)\}$

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.201)$$

(ii) La serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es convergente en el sentido usual, de manera que existe una función $g(z)$ definida por la suma de la serie en alguna vecindad U de z_0 :

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (z \in U \cap D). \quad (1.202)$$

En estas condiciones, ¿es $g(z) = f(z)$?, ¿es la serie asintótica convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ el desarrollo asintótico de su suma?. La respuesta es que no necesariamente. En algunos casos sucede que $g(z) = f(z)$, es decir, la serie asintótica convergente $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es el desarrollo asintótico de su suma $f(z)$:

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad \text{y} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (z \in U \cap D). \quad (1.203)$$

En otros casos sucede que $g(z) \neq f(z)$, de manera que la serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es el desarrollo asintótico de una función $f(z)$ que no es igual a su suma $g(z)$:

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad \text{y} \quad f(z) \neq g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (z \in U \cap D). \quad (1.204)$$

Supongamos que $g(z) \neq f(z)$. ¿Es posible que el desarrollo asintótico de $g(z)$, si existe, sea igual que el de $f(z)$? La respuesta es afirmativa, toda vez que, además de $f(z)$, puede haber otras funciones cuyo desarrollo asintótico sea la serie asintótica dada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ (ver nota 4). En otras palabras, es posible que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.205)$$

y no obstante

$$f(z) \neq g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (z \in U \cap D). \quad (1.206)$$

También es posible que exista el desarrollo asintótico de $g(z)$ relativo a la secuencia asintótica dada $\{\phi_n\}$ pero que tal desarrollo no coincida con el desarrollo de $f(z)$, es decir, que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.207)$$

y

$$f(z) \neq g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (z \in U \cap D), \quad (1.208)$$

donde $b_n \neq a_n$, o puede suceder que $g(z)$ no tenga desarrollo asintótico relativo a la secuencia dada $\{\phi_n\}$.

Un ejemplo de función cuyo desarrollo asintótico converge a otra función es ([15, p. 12]), ([45, p. 17]) la función

$$f(z) = \exp(-z), \quad (-\pi/2 < \arg(z) < +\pi/2), \quad (1.209)$$

cuyo desarrollo asintótico relativo a la sucesión asintótica de potencias $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$ es

$$f(z) \equiv \exp(-z) \approx 0 + 0z^{-1} + 0z^{-2} + \dots, \quad (z \rightarrow \infty), \\ (-\pi/2 < \arg(z) < +\pi/2). \quad (1.210)$$

La serie asintótica en el segundo miembro de (1.210) es convergente y su suma es $g(z) = 0$, que desde luego no coincide con la función dada $f(z) \equiv \exp(-z)$. Además, esta serie asintótica es el desarrollo asintótico de su suma $g(z) = 0$ relativo a la sucesión de potencias $\{z^{-n}\}$.

Un caso importante en el que una serie asintótica convergente es también el desarrollo asintótico de su suma se presenta en las series asintóticas de potencias enteras de la variable independiente $\{z^{-n}\}$.

Teorema 10. [15, p.14], [45, p. 7,17]. (Una condición suficiente para que una serie asintótica de potencias convergente sea el desarrollo asintótico de su suma). Sea $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ una serie de potencias asintótica cuando $z \rightarrow \infty$. Si la serie converge para todo $z \in \mathbf{C}$ tal que $|z|$ es suficientemente grande, es decir, si

$$\exists f(z) \ni f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad \forall z \in \mathbf{C}, \quad |z| > \rho > 0, \quad (1.211)$$

donde ρ es el radio de convergencia de la serie, entonces se verifica que la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ es el desarrollo asintótico de su suma $f(z)$ en potencias $\{z^{-n}\}_{n=0}^{+\infty}$ cuando $z \rightarrow \infty$ para todo valor de $\arg(z)$:

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (1.212)$$

sin perjuicio de que existan otras funciones diferentes de $f(z)$ cuyo desarrollo asintótico en potencias $\{z^{-n}\}$ sea la misma serie dada $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$.

En la nota 9 se da una idea del razonamiento que conduce a la conclusión del teorema 10.

1.6.2. Suma asintótica de una serie formal

¿Es posible que no exista función alguna cuyo desarrollo asintótico sea una serie asintótica dada? El teorema siguiente establece que este caso no puede darse.

Teorema 11. [18, p. 22,23,24]. (Sobre la existencia de funciones cuyo desarrollo asintótico es una serie asintótica dada). Sea $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ de la cual z_0 es un punto de acumulación. Sea $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$ una serie asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ relativa a la sucesión $\{\phi_n\}$. Entonces, existe al menos una función compleja $f(z)$ definida en D tal que $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$ es el desarrollo asintótico de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D relativo a la sucesión $\{\phi_n\}$, es decir, el conjunto de funciones complejas definidas en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ tales que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \quad (1.213)$$

es no vacío.

En la nota 10 se da un resumen de la demostración del teorema 11.

Definición 18. [18, p. 22]. (Suma asintótica de una serie asintótica). Sean $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{N-1}$ (N finito o infinito) una sucesión asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$ una serie asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D relativa a $\{\phi_n\}$. La clase no vacía

$$\mathcal{S}_{asy} \equiv \left\{ f(z), z \in D; f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \right\}, \quad (1.214)$$

constituida por las funciones complejas definidas en D cuyo desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow z_0$ en D es la serie asintótica dada, recibe el nombre de suma asintótica de la serie asintótica $\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$.

Si $N = +\infty$, las funciones que constituyen la suma asintótica de una serie asintótica dada son asintóticamente iguales cuando $z \rightarrow z_0$ en D respecto a la sucesión asintótica $\{\phi_n\}$ dada. (Recordar la definición 12 y el corolario 11).

1.6.3. Representación asintótica de funciones

Consideremos una serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ relativa a una sucesión asintótica $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ de la cual z_0 es punto de acumulación. Sabemos (ver teorema 11) que existe al menos una función definida en D cuyo desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow z_0$ en D es precisamente la serie dada:

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.215)$$

y decimos que $f(z) \in \mathcal{S}_{asy}$, donde \mathcal{S}_{asy} representa a la suma asintótica (1.214) de la serie dada. La suma asintótica de la serie dada existe siempre, porque el conjunto \mathcal{S}_{asy} es no vacío.

Si la serie asintótica es divergente en el sentido usual de la convergencia de series, no existe función a la que pueda denominarse suma de la serie en alguna vecindad de z_0 . Si la serie asintótica es convergente, existe la función suma

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z), \quad (1.216)$$

que puede pertenecer o no a \mathcal{S}_{asy} , toda vez que la condición (1.216) no asegura por sí sola que la serie asintótica sea el desarrollo asintótico de $g(z)$. En suma, dada una serie asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en $D \subseteq \mathbf{C}$, su suma asintótica

$$\mathcal{S}_{asy} \equiv \{f_\theta(z)\}, \quad f_\theta(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0),$$

$$(\theta \in I \subseteq \mathbf{R}), \quad (1.217)$$

consta en general de más de una función. Cuando la serie es convergente a $g(z)$ en alguna vecindad de z_0 , es posible que $g(z)$ no pertenezca a \mathcal{S}_{asy} , sea porque su desarrollo asintótico relativo a la sucesión $\{\phi_n(z)\}$ no es igual a la serie asintótica (1.217) dada, o bien porque no tiene desarrollo asintótico relativo a esa sucesión asintótica. También puede suceder que $g(z)$ pertenezca a \mathcal{S}_{asy} , pero esta condición no asegura que la suma asintótica de la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ se reduzca a $g(z)$ solamente. Cuando la serie asintótica es divergente en toda vecindad de z_0 , su suma asintótica puede constar asimismo de una o más funciones.

Recíprocamente, dada una función $f(z)$ definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y una sucesión $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$ asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en D , puede suceder que

$f(z)$ no tenga desarrollo asintótico relativo a dicha sucesión, o bien que tal desarrollo exista. En este último caso, existe una y solo una sucesión $\{a_n\}$ de constantes complejas tal que

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.218)$$

que puede ser convergente o no y, si fuera convergente, su suma $g(z)$ puede ser igual o no a $f(z)$. Además, si $g(z) \neq f(z)$, $g(z)$ puede pertenecer o no a la suma asintótica de la serie formal $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$. Sea o no convergente esta serie, la función dada $f(z)$ puede ser o no la única función que verifique (1.218). El teorema que sigue puede considerarse recíproco del teorema 10.

Teorema 12. [18, p. 22], [24, pp. 210, 211] (Una condición suficiente para que el desarrollo asintótico de una función compleja sea convergente a la propia función). Sea $f(z)$ una función compleja definida en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ que contiene a una vecindad anular Ω del infinito,

$$\Omega \equiv \{z \in \mathbf{C}; |z| \geq A > 0\} \subseteq D \subseteq \mathbf{C}, \quad (1.219)$$

tal que

(i) $f(z)$ es univaluada y holomorfa en Ω .

(ii) $f(z)$ posee el desarrollo asintótico en potencias enteras de z cuando $z \rightarrow \infty$

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty), \quad (1.220)$$

para todo valor de $\arg(z)$. Entonces, la serie asintótica $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ es convergente para todo z tal que $|z|$ es suficientemente grande y su suma es la función dada $f(z)$, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}, \quad |z| > \rho > A, \quad (1.221)$$

para todo valor de $\arg(z)$.

La idea de la demostración puede consultarse en la nota 11.

Para que una serie asintótica dada (convergente o no) represente asintóticamente a *una sola función* $f(z)$ en la vecindad de un punto z_0 , es necesario que $f(z)$ sea la única función cuyo desarrollo asintótico en una vecindad de z_0 sea la serie formal dada.

Definición 19. (Representación asintótica de una función compleja). Sean $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ una serie asintótica cuando $z \rightarrow z_0$ en una región $D \subseteq \mathbf{C}$ y $f(z)$ una función compleja definida en D . Se dice que la serie formal

$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es la representación asintótica de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ en D si $f(z)$ es la única función cuyo desarrollo asintótico es la serie formal dada cuando $z \rightarrow z_0$ en D . Es decir, cuando se verifica

$$(i) \quad f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.222)$$

y

$$(ii) \quad \text{Si } g(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \Rightarrow f(z) = g(z) \text{ en } D. \quad (1.223)$$

El problema de la representación asintótica de una función compleja dada consiste en establecer cuándo la función verifica las propiedades (i) y (ii) de la definición 19 en la vecindad de algún punto de acumulación de su región de existencia. Ahora bien, ni el teorema 10 ni el teorema 12 aseguran la correspondencia biunívoca entre una función y su desarrollo asintótico [18, p. 24]: "En general no hay modo de asociar una única suma asintótica a una serie asintótica, pero en ciertas circunstancias un tanto especiales puede suceder que bajo hipótesis más precisas acerca de los coeficientes de la serie asintótica, y bajo ciertas restricciones sobre la función $f(x)$, pueda obtenerse una única suma; y con frecuencia en tales casos la serie asintótica, aunque divergente, es en algún sentido *sumable* a su suma asintótica. Watson (1912a) y Nevanlinna (1916) han obtenido teoremas de esa especie para series asintóticas de potencias sumadas por funciones analíticas regulares en alguna región sectorial."

En nuestro caso, el problema de la representación asintótica atañe a funciones que verifican una ecuación diferencial en un sector determinado del plano complejo. ¿Es suficiente que un desarrollo asintótico verifique la ecuación diferencial dada para que represente asintóticamente a una solución de la ecuación y solo a una? [56]: "Refiriéndonos a las series asintóticas de potencias, se ve que si uno se limita a considerar valores de la variable sólo a lo largo de un rayo del plano complejo, un mismo desarrollo puede corresponder a funciones distintas. Pero esa ambigüedad desaparece si se estudia lo que ocurre cuando la variable cubre el plano complejo. De hecho, si exigimos que el desarrollo asintótico cumpla formalmente las mismas relaciones (ecuaciones diferenciales, recurrencias, etc.) que una función $f(z)$ dada en cierto sector, $\alpha < \arg(z) < \beta$, del plano complejo, la correspondencia entre función y desarrollo asintótico es biunívoca [16, pp. 19-20]. A la hora de representar una función en el citado sector, el desarrollo asintótico es tan válido como podría serlo una serie convergente. Su única desventaja es que no permite asignar un valor numérico tan preciso como se desee a la función."

1.7. Notas

Nota 1 [15, p. 10]. En sentido amplio, la expresión "obtener el comportamiento asintótico de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ " significa "obtener información de cualquier clase acerca de $f(z)$ en la vecindad de z_0 ". No obstante, el significado usual de la citada expresión es "encontrar una función sencilla $g(z)$ que sea asintóticamente equivalente a $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$." En este caso, por "sencilla" se entiende que el cálculo de sus valores en la vecindad de z_0 no resulte extremadamente dificultoso. En consecuencia, el significado usual de la expresión "fórmula asintótica de $f(z)$ cuando $z \rightarrow z_0$ " es el de una equivalencia asintótica: $f(z) \sim g(z)$ ($z \rightarrow z_0$).

Nota 2 [15, p. 10]. En el análisis asintótico, las relaciones de dominancia fuerte (o) no son tan interesantes como las de dominancia débil (O) porque ocultan mucha información acerca del comportamiento asintótico de una función en la vecindad de un punto dado. Por ejemplo, además de saber que $f(z)/g(z)$ tiende a cero, también interesa conocer lo mejor posible la rapidez de esa convergencia.

Nota 3 [66, p. 110]. La expresión

$$f(z) = g(z) + o(h(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.224)$$

significa

$$f(z) - g(z) = o(h(z)) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.225)$$

Asimismo, la expresión

$$f(z) = g(z) + O(h(z)) \quad (z \rightarrow z_0), \quad (1.226)$$

significa

$$f(z) - g(z) = O(h(z)) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.227)$$

Nota 4 [24, p. 209]. El concepto de desarrollo asintótico es muy diferente del concepto de desarrollo de Taylor, no obstante ambos se confunden frecuentemente. El error se debe a que se suele emplear la denominación de "serie asintótica" para lo que debería llamarse desarrollo asintótico. El concepto de desarrollo de Taylor hace referencia a la *representación exacta* de una función en la vecindad de un punto del plano complejo por medio de una serie de potencias *convergente* en dicha vecindad, de manera que tal desarrollo corresponde a la función dada y solo a ella. El concepto de desarrollo asintótico alude a la *aproximación* de una función dada en la vecindad de un punto del plano complejo, hasta cierto orden de precisión, mediante una "serie asintótica" o "serie formal" que puede o no ser convergente, y

en general no lo es. Una consecuencia notable de este hecho (recordar 1.64, 1.65, 1.67, 1.68) es que dos o más funciones diferentes pueden tener el mismo desarrollo asintótico relativo a una sucesión asintótica dada.

Nota 5 [45, p. 16], (ver definiciones 2, 8, 10). El uso del símbolo \sim en lugar de \approx en la expresión de los desarrollos asintóticos de funciones se justifica del modo siguiente:

$$\begin{aligned} f(z) &\approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) &= o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - S_{N-1}(z)}{\phi_{N-1}(z)} &= 0, \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (1.228)$$

donde

$$S_{N-1}(z) \equiv \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z), \quad (N = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.229)$$

Del carácter asintótico de la sucesión $\{\phi_n\}$ se deduce que para todo $N = 1, 2, 3, \dots$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi_{N-1}(z)}{S_{N-1}(z)} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - S_{N-1}(z)}{S_{N-1}(z)} = 0, \quad (1.230)$$

de manera que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{S_{N-1}(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - S_{N-1}(z)}{S_{N-1}(z)} + 1 = 1, \quad (1.231)$$

expresión equivalente a

$$f(z) \sim \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.232)$$

Nota 6 [45, p. 16, 17], (ver definiciones 8 y 10). Sobre el uso del símbolo O en lugar de o en la definición de los desarrollos asintóticos de funciones. La relación entre una función compleja dada $f(z)$ y su desarrollo asintótico se expresa de modo equivalente a la definición 8 mediante el símbolo O :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) + O(\phi_N) \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.233)$$

En efecto, poniendo $F_{N-1}(z) \equiv f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z)$, a partir de 1.228 (ver nota 5) se tiene:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_{N-1}(z)}{\phi_{N-1}(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{F_{N-1}(z)}{\phi_N(z)} \times \frac{\phi_N(z)}{\phi_{N-1}(z)} = 0, \quad (1.234)$$

donde debido al carácter asintótico de la sucesión $\{\phi_n\}$,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\phi_N(z)}{\phi_{N-1}(z)} = 0, \quad (1.235)$$

por consiguiente, existe algún número real no negativo A tal que en alguna vecindad de z_0 ,

$$|F_{N-1}(z)| \leq A |\phi_N(z)|, \quad (1.236)$$

quedando así justificada (1.233).

Nota 7 [18, p. 13, 14], (ver definición 11 y corolario 8). Una función dada $f(z)$ puede tener desarrollos asintóticos respecto de dos o más secuencias asintóticas diferentes, equivalentes o no equivalentes en el sentido de la definición 11. Algunos de tales desarrollos pueden ser convergentes, otros divergentes.

Nota 8 (ver teorema 8). Por hipótesis, existen los desarrollos asintóticos

$$f(x) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n} = a_0 + a_1 x^{-1} + a_2 x^{-2} + a_3 x^{-3} + \dots \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.237)$$

$$f'(x) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{-n} = b_0 + b_1 x^{-1} + b_2 x^{-2} + b_3 x^{-3} + \dots \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.238)$$

donde los a_n son dados y se ha de demostrar que los b_n están determinados unívocamente por los a_n . A consecuencia de (1.237), (1.238) se tiene que para todo $N = 1, 2, 3, \dots$,

$$f(x) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n x^{-n} = o\left(x^{-(N-1)}\right), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.239)$$

$$f'(x) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^{-n} = o\left(x^{-(N-1)}\right), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.240)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = b_0. \quad (1.241)$$

Para cada $N = 1, 2, 3, \dots$ se consideran las funciones

$$(N = 1) : \quad g_0(x) \equiv f(x) - b_0 x,$$

$$(N = 2) : \quad g_1(x) \equiv f(x) - (b_0 x + b_1 \ln x),$$

$$\begin{aligned}
 (N = 3) : \quad & g_2(x) \equiv f(x) - (b_0x + b_1 \ln x - b_2x^{-1}), \\
 (N = 4) : \quad & g_3(x) \equiv f(x) - (b_0x + b_1 \ln x - b_2x^{-1} - \frac{1}{2}b_3x^{-2}), \\
 & \dots\dots\dots (1.242)
 \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned}
 g_0(x) &\equiv f(x) - b_0x, \\
 g_{N-1}(x) &\equiv f(x) - \left(b_0x + b_1 \ln x - \sum_{n=1}^{N-2} \frac{b_{n+1}}{n} x^{-n} \right), \\
 &\quad (N = 2, 3, 4\dots), \quad (1.243)
 \end{aligned}$$

donde se asume que el sumatorio en el paréntesis se anula cuando $N = 2$.

Las funciones $g_0(x), g_1(x), \dots$ permanecen acotadas cuando $x \rightarrow +\infty$ solo si $b_0 = b_1 = 0$. En tal caso,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_j(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a_0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots). \quad (1.244)$$

Las primeras derivadas de estas funciones admiten la expresión

$$g'_{N-1}(x) = f'(x) - \sum_{n=0}^{N-1} b_n x^{-n}, \quad (N = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.245)$$

A partir de (1.240) y (1.245) se deduce

$$g'_{N-1}(x) = o\left(x^{-(N-1)}\right), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.246)$$

y

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g'_{N-1}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) - b_0 = b_0 - b_0 = 0. \quad (1.247)$$

Aplicando el teorema 6, tenemos

$$\int_x^{+\infty} g'_{N-1}(t)dt = o\left(\int_x^{+\infty} t^{-(N-1)}dt\right) \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.248)$$

donde, habida cuenta de (1.239), para $N = 1, 2$ se tiene

$$\begin{aligned}
 \int_x^{+\infty} g'_0(t)dt &= g_0(+\infty) - g_0(x) = f(+\infty) - f(x) = \\
 &= a_0 - f(x) = o(1), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.249)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_x^{+\infty} g'_1(t)dt &= g_1(+\infty) - g_1(x) = f(+\infty) - f(x) = \\
 &= a_0 - f(x) = o(1), \quad (x \rightarrow +\infty), \quad (1.250)
 \end{aligned}$$

y para $N = 3, 4, 5, \dots$,

$$\begin{aligned} g_{N-1}(+\infty) - g_{N-1}(x) &= a_0 - g_{N-1}(x) = o\left(\left[\frac{t^{-(N-2)}}{-(N-2)}\right]_x^{+\infty}\right) = \\ &= o\left(x^{-(N-2)}\right) \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (1.251)$$

Para obtener una expresión del desarrollo asintótico de $f(x)$ en potencias de x cuando $x \rightarrow +\infty$ hasta $N - 1$ términos para todo $N \geq 1$ donde aparezcan los coeficientes b_n del desarrollo asintótico de su derivada $f'(x)$, es necesario que las funciones $g_{N-1}(x)$ introducidas en (1.242), (1.243) permanezcan acotadas cuando $x \rightarrow +\infty$. Sabemos que esta condición se verifica solamente si los dos primeros coeficientes del desarrollo asintótico de la derivada son nulos: $b_0 = b_1 = 0$. Entonces,

$$g_{N-1}(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{N-2} \frac{b_{n+1}}{n} x^{-n}, \quad (N = 1, 2, 3, \dots). \quad (1.252)$$

Comparando (1.251) con (1.252) se obtiene, después de cambiar N por $N + 1$,

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{b_{n+1}}{n} x^{-n} + o\left(x^{-(N-1)}\right) \quad (x \rightarrow +\infty), \\ & \quad (N = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \quad (1.253)$$

Comparando (1.237) con (1.253) se tiene, habida cuenta de la unicidad del desarrollo asintótico de una función relativo a una secuencia asintótica dada,

$$b_n = -(n-1)a_{n-1}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (1.254)$$

quedando así probado que los coeficientes b_n del desarrollo asintótico de la derivada $f'(x)$ están determinados unívocamente por los coeficientes a_n del desarrollo asintótico de la función $f(x)$.

Nota 9. [15, p.14], [45, p. 7, 17]. (Ver teorema 10). Si la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$ converge para todo z tal que $|z| > \rho > 0$, se verifica que

$$R_N \equiv \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^{-n} = O(z^{-N}) \quad (z \rightarrow \infty), \quad (1.255)$$

para todo $N = 1, 2, 3, \dots$ y todo $\arg(z)$. Además, existe $f(z)$ tal que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}, \quad (|z| \geq p > \rho), \quad (1.256)$$

siendo p un número real positivo mayor que el radio de convergencia ρ . En particular, la serie converge para $|z| = p$, luego existe al menos un número real positivo A tal que

$$|a_n p^{-n}| < A, \quad \text{i. e.} \quad |a_n| < A p^n, \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.257)$$

La serie también converge para $|z| = 2p$, es decir, para $p|z|^{-1} = 1/2$. Entonces se tiene que

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^{-n} \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n| |z|^{-n} < A \sum_{n=N}^{+\infty} p^n |z|^{-n}, \quad (1.258)$$

donde

$$\sum_{n=N}^{+\infty} p^n |z|^{-n} = p^N |z|^{-N} \sum_{n=0}^{+\infty} (p|z|^{-1})^n = p^N |z|^{-N} \sum_{n=0}^{+\infty} (1/2)^n = 2p^N |z|^{-N}. \quad (1.259)$$

En consecuencia,

$$\left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^{-n} \right| < \hat{A} |z|^{-N}, \quad (N = 1, 2, 3, \dots), \quad (1.260)$$

donde $\hat{A} \equiv 2Ap^N$. Entonces, a partir de la igualdad

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^{-n}, \quad (1.261)$$

se deduce que para todo $N = 1, 2, 3, \dots$,

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} \right| = \left| \sum_{n=N}^{+\infty} a_n z^{-n} \right| < \hat{A} |z|^{-N}, \quad (|z| > \rho). \quad (1.262)$$

Aplicando la definición del símbolo de orden O , (1.262) equivale a

$$f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n z^{-n} = O(z^{-N}) \quad (z \rightarrow +\infty), \quad (1.263)$$

es decir, (recordar nota 6) a

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n} \quad (z \rightarrow \infty). \quad (1.264)$$

Nota 10. [18, pp. 22,23,24]. (Ver teorema 11). La idea de la demostración es la siguiente. Si N es finito, la suma

$$\sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) = f(z) \quad (1.265)$$

existe y define una función $f(z)$ cuyo desarrollo asintótico es la propia suma:

$$f(z) \approx \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z), \quad (z \rightarrow z_0). \quad (1.266)$$

Si $N = +\infty$, existe para todo $n = 0, 1, 2, \dots$ una función continua $\mu_n(z)$ tal que

$$|a_{n+p} \mu_{n+p}(z) \phi_{n+p}(z)| \leq 2^{-p} |a_n \phi_n(z)|, \quad (1.267)$$

para todo $p = 0, 1, 2, \dots$ y todo z en cierta vecindad U_n de z_0 . Entonces, la serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \mu_n(z) \phi_n(z) = f(z) \quad (1.268)$$

es convergente y define una función $f(z)$ en la región $D \subseteq \mathbf{C}$ de existencia de la secuencia asintótica $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{+\infty}$, siendo z_0 un punto de acumulación de D .

Entonces, tomando $p = 0$ en (1.267) y la expresión (1.268) de $f(z)$ resulta:

$$\begin{aligned} & \left| f(z) - \sum_{n=0}^{N-1} a_n \phi_n(z) \right| \leq \sum_{n=N}^{+\infty} |a_n \mu_n(z) \phi_n(z)| \leq \\ & \leq |a_N \phi_N(z)| \sum_{n=N}^{+\infty} 2^{N-n} = 2 |a_N \phi_N(z)| = o(\phi_{N-1}) \quad (z \rightarrow z_0), \end{aligned} \quad (1.269)$$

quedando así probado que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \phi_n(z)$ es el desarrollo asintótico de la función $f(z)$ definida por (1.268).

Nota 11. [24, p. 210, 211] (ver teorema 12). La idea es que en el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en $\Omega_0 \equiv \{z; |z| > \rho_0 \geq A\}$, i.e.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n z^n, \quad (z \in \Omega_0), \quad (1.270)$$

para todo $n = 1, 2, 3, \dots$, $|b_n| \leq M/\rho^n$, donde $\rho > \rho_0$ y $M > 0$ es tal que $|f(z)| < M$ para todo z tal que $|z| \geq A$. La existencia de M deriva del desarrollo asintótico $f(z) \approx \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$, del que resulta $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = a_0$. Haciendo tender $\rho \rightarrow +\infty$, resulta que el desarrollo de Laurent queda reducido a los términos de órdenes $0, -1, -2, \dots$, cuyos coeficientes se identifican respectivamente con los coeficientes a_0, a_1, a_2, \dots del desarrollo asintótico de $f(z)$.

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales con puntos singulares. Soluciones globales

Este capítulo está dedicado al planteamiento y resolución del denominado *problema global* o *problema de conexión* en las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con dos puntos singulares. La primera sección contiene las definiciones y propiedades fundamentales necesarias para clasificar los puntos singulares de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes polinomiales y representar sus soluciones en la vecindad de las singularidades. En la segunda sección planteamos formalmente el problema global y describimos uno de sus aspectos más interesantes conocido como el *fenómeno de Stokes*. En la sección tercera se expone el método de Naundorf de resolución del problema global en el cual se inspira nuestro método, el *método de los Wronskianos*, cuyo desarrollo presentamos en las secciones cuarta y quinta.

2.1. Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes polinomiales

La ecuación diferencial ordinaria lineal homogénea de segundo orden

$$P_0(z)y''(z) + P_1(z)y'(z) + P_2(z)y(z) = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.1)$$

donde $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_2(z)$ son polinomios de grados m_0 , m_1 , m_2 respectivamente que carecen de ceros comunes a los tres, es la llave que permite resolver una amplia clase de problemas de la Mecánica Cuántica, entre los cuales se encuentran los modelos de potenciales confinantes que describen con notable exactitud la interacción entre quarks. Es bien sabido que (2.1)

puede llevarse a la forma estándar

$$y''(z) + P(z)y'(z) + Q(z)y(z) = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.2)$$

de coeficientes racionales

$$P(z) = \frac{P_1(z)}{P_0(z)}, \quad Q(z) = \frac{P_2(z)}{P_0(z)}, \quad (2.3)$$

que son en general funciones meromorfas en \mathbf{C} , i. e. derivables (holomorfas) en todo punto de \mathbf{C} excepto en un conjunto discreto de polos. Al analizar las propiedades de las soluciones, es conveniente transformar la ecuación (2.2) en una ecuación donde es nulo el coeficiente de la primera derivada y' ,

$$\hat{y}''(z) + \hat{Q}(z)\hat{y}(z) = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.4)$$

siendo

$$\hat{Q}(z) = Q(z) - \frac{1}{4}P(z)^2 - \frac{1}{2}P'(z), \quad (2.5)$$

mediante el cambio de la variable dependiente

$$y \longrightarrow \hat{y}, \quad y = \hat{y} \exp\left(-\frac{1}{2} \int P(z) dz\right). \quad (2.6)$$

Se dice que (2.4) es la *forma normal* de (2.1)

2.1.1. Clasificación de los puntos singulares

Las propiedades de $P(z)$, $Q(z)$ determinan el comportamiento de las soluciones de (2.1) en la vecindad de los polos de las funciones racionales $P(z)$ y $Q(z)$. Estos polos pueden localizarse en puntos z_i del plano finito o bien en el infinito ∞ . En este último caso, el comportamiento de las soluciones en una vecindad del infinito se estudia aplicando a (2.2) el cambio de la variable independiente

$$z \longrightarrow \zeta, \quad \zeta = \frac{1}{z - z_0}, \quad (2.7)$$

donde z_0 es un punto finito arbitrario en el z -plano complejo, usualmente el origen. La ecuación transformada

$$y''(\zeta) + \tilde{P}(\zeta)y'(\zeta) + \tilde{Q}(\zeta)y(\zeta) = 0, \quad (2.8)$$

donde

$$\tilde{P}(\zeta) \equiv 2\zeta^{-1} - \zeta^{-2}P(\zeta^{-1} + z_i), \quad \tilde{Q}(\zeta) \equiv \zeta^{-4}Q(\zeta^{-1} + z_i), \quad (2.9)$$

presenta en el origen $\zeta = 0$ una singularidad del mismo tipo que $z = \infty$ en la ecuación (2.2).

Los puntos del z -plano complejo y el punto infinito se clasifican atendiendo al comportamiento de las funciones $P(z)$, $Q(z)$ en la vecindad de cada uno. Los puntos en el plano finito donde $P(z)$ y $Q(z)$ son holomorfas se denominan *puntos ordinarios* de la ecuación (2.1). En estos puntos, $P(z)$ y $Q(z)$ poseen desarrollos en serie de Taylor y un comportamiento regular:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(z_i)}{n!} (z - z_i)^n, \quad |z - z_i| < \delta_P, \quad (2.10)$$

$$Q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{Q^{(n)}(z_i)}{n!} (z - z_i)^n, \quad |z - z_i| < \delta_Q. \quad (2.11)$$

Esta definición se aplica a la ecuación (2.8) para establecer que el punto infinito $z = \infty$ es un punto ordinario de (2.1) si y solo si

$$P(z) = \frac{2}{z} + O(z^{-2}), \quad Q(z) = O(z^{-4}), \quad (z \rightarrow \infty). \quad (2.12)$$

Un punto $z \in \mathbf{C}$ que no es punto ordinario se denomina *punto singular* de la ecuación (2.1). Los puntos singulares se clasifican atendiendo a los desarrollos en serie de Laurent de las funciones $P(z)$ y $Q(z)$. En una vecindad de cada singularidad z_i del plano finito, $P(z)$ y $Q(z)$ pueden desarrollarse en series de Laurent de $(z - z_i)$ cuyas partes principales constan de un número finito de términos:

$$P(z) = \sum_{j=1}^{K_1} p_j (z - z_i)^{-j} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} p_{-\tau} (z - z_i)^\tau, \quad (p_{K_1} \neq 0),$$

$$(p_j = p_j(z_i)), \quad (p_{-\tau} = p_{-\tau}(z_i)), \quad (K_1 = K_1(z_i)), \quad (2.13)$$

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{K_2} q_j (z - z_i)^{-j} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} q_{-\tau} (z - z_i)^\tau, \quad (q_{K_2} \neq 0),$$

$$(q_j = q_j(z_i)), \quad (q_{-\tau} = q_{-\tau}(z_i)), \quad (K_2 = K_2(z_i)). \quad (2.14)$$

Si la singularidad se localiza en el infinito, en lugar de (2.13), (2.14) se consideran las series de Laurent

$$P(z) = \sum_{j=1}^{K_1} p_j z^{j-2} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} p_{-\tau} z^{-\tau-2}, \quad (p_{K_1} \neq 0),$$

$$(p_j = p_j(\infty)), \quad (p_{-\tau} = p_{-\tau}(\infty)), \quad (K_1 = K_1(\infty)), \quad (2.15)$$

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{K_2} q_j z^{j-4} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} q_{-\tau} z^{-\tau-4}, \quad (q_{K_2} \neq 0),$$

$$(q_j = q_j(\infty)), \quad (q_{-\tau} = q_{-\tau}(\infty)), \quad (K_2 = K_2(\infty)). \quad (2.16)$$

Un punto finito z_i es un *punto singular regular* de (2.1) si las series de Laurent en z_i (2.13), (2.14) tienen las formas

$$\begin{aligned} P(z) &= p_1(z - z_i)^{-1} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} p_{-\tau}(z - z_i)^\tau, \\ Q(z) &= q_2(z - z_i)^{-2} + q_1(z - z_i)^{-1} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} q_{-\tau}(z - z_i)^\tau, \end{aligned} \quad (2.17)$$

donde al menos uno de los coeficientes p_1 , q_1 , q_2 es no nulo. El punto infinito $z = \infty$ es un *punto singular regular* de (2.1) si y solo si las series de Laurent en ∞ (2.15), (2.16) toman las formas

$$\begin{aligned} P(z) &= p_1 z^{-1} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} p_{-\tau} z^{-\tau-2}, \\ Q(z) &= q_2 z^{-2} + q_1 z^{-3} + \sum_{\tau=0}^{+\infty} q_{-\tau} z^{-\tau-4}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde al menos uno de los coeficientes p_1 , q_1 , q_2 es no nulo. Los puntos singulares regulares tales que

$$(p_1 - 1)^2 - 4q_2 = \frac{1}{4}, \quad (2.19)$$

reciben el nombre de *puntos singulares elementales*, en otro caso hablamos de puntos singulares regulares no elementales. Un punto singular, finito o infinito, que no es regular recibe el nombre de *punto singular irregular* de (2.1).

Una propiedad esencial para clasificar los puntos singulares de (2.1) es *el rango*. La definición de H. Poincaré o *rango de Poincaré* es de uso común a lo largo de esta memoria y nos referimos a él como rango del punto singular. Si z_i es una singularidad en el plano finito, su rango es

$$R(z_i) \equiv \max \{1, K_1(z_i), K_2(z_i)/2\} - 1, \quad (2.20)$$

donde $K_1(z_i)$, $K_2(z_i)$ son los valores máximos K_1 , K_2 del índice de sumatorio j en las partes principales de las series de Laurent (2.13) y (2.14) respectivamente. Si la singularidad se localiza en el infinito, su rango es

$$R(\infty) \equiv \max \{1, K_1(\infty), K_2(\infty)/2\} - 1, \quad (2.21)$$

donde $K_1(\infty)$, $K_2(\infty)$ son ahora los valores máximos K_1 , K_2 del índice de sumatorio j en las partes principales de las series de Laurent (2.15) y (2.16) respectivamente. Los números introducidos por Ince para clasificar las singularidades, denominados *especies*, equivalen al doble del rango de Poincaré. De acuerdo con (2.20), (2.21), una singularidad regular tiene rango de Poincaré igual a cero y una singularidad irregular tiene rango de Poincaré mayor que cero.

2.1.2. Representación de las soluciones en la vecindad de puntos singulares

La solución general de (2.1) es igual a una combinación lineal de un sistema fundamental de soluciones de la ecuación diferencial, sistema formado por dos soluciones particulares linealmente independientes. En una vecindad de un punto ordinario finito z_i , toda solución es holomorfa porque existe un sistema fundamental

$$\begin{aligned} y_1(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k}(z - z_i)^k, \\ y_2(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k}(z - z_i)^k, \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde el radio de convergencia de cada una de las series de Taylor es mayor o igual que el mínimo de los radios de convergencia de las series (2.10), (2.11) correspondientes a $P(z)$, $Q(z)$ y los c_{1k} , c_{2k} se determinan mediante relaciones de recurrencia. Si el punto ordinario se localiza en el infinito, (2.22) se reemplazan por

$$\begin{aligned} y_1(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{1,k}z^{-k}, \\ y_2(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} c_{2,k}z^{-k}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En una vecindad de un punto singular regular, existen soluciones $y(z)$ que, si bien no son holomorfas, multiplicadas por una potencia de $(z - z_i)$ (cuando la singularidad es finita) o de z (cuando la singularidad se encuentra en el infinito) de exponente ρ adecuado, dan lugar a funciones que se representan mediante series de Taylor. Denominamos *soluciones multiplicativas de Taylor* o bien *soluciones de Frobenius* a las soluciones de (2.1) así definidas. Si z_i es un punto singular regular localizado a distancia finita del origen, existen soluciones Frobenius $\{y_1, y_2\}$ linealmente independientes que admiten representaciones locales

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{1,n}(z - z_i)^n, \\ y_2(z) &= (z - z_i)^{\rho_2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2,n}(z - z_i)^n, \end{aligned} \quad (2.24)$$

cuando la diferencia entre ρ_1 y ρ_2 , denominados *exponentes característicos* de la singularidad, no es igual a un número entero. Si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$

es igual a un número entero, (2.24) ha de reemplazarse por

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{1,n} (z - z_i)^n, \\ y_2(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2,n} (z - z_i)^n + Ay_1(z) \ln(z - z_i), \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde A es una constante compleja que puede ser nula. En uno y otro caso, las series convergen en el disco de centro z_i y radio igual a la distancia de z_i a la singularidad más próxima. Si la singularidad regular se localiza en el infinito, cuando $\rho_1 - \rho_2$ no es igual a un número entero, en vez de (2.24) se tiene

$$\begin{aligned} y_1(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{1,n} z^{-n}, \\ y_2(z) &= z^{\rho_2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2,n} z^{-n}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

y cuando $\rho_1 - \rho_2$ es igual a un número entero, (2.25) ha de reemplazarse por

$$\begin{aligned} y_1(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{1,n} z^{-n}, \\ y_2(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=0}^{+\infty} c_{2,n} z^{-n} + Ay_1(z) \ln z; \end{aligned} \quad (2.27)$$

en ambos casos, las series convergen en una vecindad anular del infinito. Los valores numéricos de ρ_1, ρ_2 dependen de la posición de la singularidad regular y son soluciones de la ecuación de segundo grado denominada *ecuación indicial* de la singularidad:

$$\rho(\rho - 1) + p_1\rho + q_2 = 0. \quad (2.28)$$

En una vecindad de un punto singular irregular, es posible encontrar soluciones que admiten representaciones semejantes a las que se tienen en una vecindad de una singularidad regular, a condición de que las series de Taylor en (2.24), (2.25), (2.26), (2.27) sean reemplazadas por series de Laurent. Las soluciones definidas por estas representaciones reciben el nombre de *soluciones de Floquet*, o bien *soluciones multiplicativas*, porque resultan multiplicadas por sendas constantes λ_1, λ_2 cuando la variable z describe un circuito completo en el plano complejo en sentido antihorario alrededor de la singularidad z_i excluyendo a cualquier otro punto singular de la ecuación

diferencial. Así, cuando la singularidad irregular z_i es finita y la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ no es igual a un número entero, en vez de (2.24) se tiene

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1,n}(z - z_i)^n, \\ y_2(z) &= (z - z_i)^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2,n}(z - z_i)^n, \end{aligned} \quad (2.29)$$

o bien, si $\rho_1 - \rho_2$ es igual a un número entero, en vez de (2.25) se tiene

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1,n}(z - z_i)^n, \\ y_2(z) &= (z - z_i)^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2,n}(z - z_i)^n + Ay_1(z) \ln(z - z_i), \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde las series convergen en el disco de centro la singularidad z_i , excluida ésta, y radio igual a la distancia de z_i a la singularidad más próxima. Cuando la singularidad irregular se localiza en el infinito y la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ no es igual a un número entero, en vez de (2.26) se escribirá

$$\begin{aligned} y_1(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1,n}z^{-n}, \\ y_2(z) &= z^{\rho_2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2,n}z^{-n}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

y si $\rho_1 - \rho_2$ es igual a un número entero, (2.27) se reemplaza por

$$\begin{aligned} y_1(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{1,n}z^{-n}, \\ y_2(z) &= z^{\rho_1} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{2,n}z^{-n} + Ay_1(z) \ln z, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde las series convergen en una vecindad anular del infinito y A es una constante que, en casos particulares, puede ser cero. A diferencia de las singularidades regulares, en el caso de las singularidades irregulares los coeficientes $c_{1,n}$, $c_{2,n}$ verifican un sistema infinito de ecuaciones en diferencias lineales y la ecuación que determina los valores de ρ_1 , ρ_2 no es sencilla como (2.28).

Thomé descubrió que el *comportamiento* local de las soluciones de (2.1) en una vecindad de una singularidad irregular de rango finito se representa de manera más ventajosa mediante formas funcionales que son los *desarrollos asintóticos* de soluciones particulares de la ecuación diferencial *en ciertos sectores* del z -plano con vértice en la singularidad z_i (cuando es finita) o en

el origen (cuando la singularidad se localiza en el infinito), y amplitud angular $\Delta\phi_i$ determinada por el rango de la singularidad. Los coeficientes c_s de los términos de las series asintóticas en tales desarrollos pueden obtenerse de modo recurrente, y los exponentes característicos $\alpha_0, \alpha_1, \dots$ correspondientes verifican sistemas de ecuaciones algebraicas. Estos desarrollos asintóticos, denominados *soluciones de Thomé*, son soluciones formales de (2.1), es decir, si son sustituidos en la ecuación, ésta se verifica. No obstante, las series asintóticas asociadas con estos desarrollos son en general divergentes, de modo que, a diferencia de las series de Taylor y de Laurent, no constituyen representaciones exactas de soluciones de la ecuación diferencial. Si z_i es una singularidad irregular finita de rango entero $R \geq 1$, las soluciones de Thomé tienen la forma

$$\begin{aligned} y_1(z) &= (z - z_i)^{\alpha_{1,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_{1,j}}{j} (z - z_i)^{-j} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{1,s} (z - z_i)^s, \\ y_2(z) &= (z - z_i)^{\alpha_{2,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_{2,j}}{j} (z - z_i)^{-j} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{2,s} (z - z_i)^s, \end{aligned} \quad (2.33)$$

y reciben el nombre de *soluciones de Thomé normales*. Si el rango de la singularidad finita es semientero, $R \geq 1/2$, para la ecuación (2.4), forma normal de (2.1), las soluciones de Thomé son

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(z) &= (z - z_i)^{\alpha_{1,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^{R+1/2} \frac{\alpha_{1,j}}{j - 1/2} (z - z_i)^{-j+1/2} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{1,s} (z - z_i)^{s/2}, \\ \hat{y}_2(z) &= (z - z_i)^{\alpha_{2,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^{R+1/2} \frac{\alpha_{2,j}}{j - 1/2} (z - z_i)^{-j+1/2} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{2,s} (z - z_i)^{s/2}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

y reciben el nombre de *soluciones de Thomé subnormales*. Si la singularidad irregular se localiza en el infinito, (2.33) ha de reemplazarse por

$$\begin{aligned} y_1(z) &= z^{\alpha_{1,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_{1,j}}{j} z^j \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{1,s} z^{-s}, \\ y_2(z) &= z^{\alpha_{2,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_{2,j}}{j} z^j \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{2,s} z^{-s}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

y (2.34) ha de reemplazarse por

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(z) &= z^{\alpha_{1,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^{R+1/2} \frac{\alpha_{1,j}}{j - 1/2} z^{j-1/2} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{1,s} z^{-s/2}, \\ \hat{y}_2(z) &= z^{\alpha_{2,0}} \exp \left(\sum_{j=1}^{R+1/2} \frac{\alpha_{2,j}}{j - 1/2} z^{j-1/2} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} c_{2,s} z^{-s/2}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Dentro de la clase de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden, para nosotros revisten interés particular las que, llevadas a la forma normal (2.4), presentan en el origen o en el infinito una singularidad irregular de rango entero, siendo ordinarios los demás puntos del plano finito. Si el rango de una singularidad irregular es semientero, la ecuación (2.4) puede transformarse en una ecuación también exenta del término en la primera derivada

$$\frac{d^2\tilde{y}}{d\xi^2} + \tilde{Q}(\xi)\tilde{y}(\xi) = 0, \quad (2.37)$$

donde

$$\tilde{Q}(\xi) = 4\xi^2\hat{Q}(\xi^2) - \frac{3}{4\xi^2}, \quad (2.38)$$

mediante los cambios de variables

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow \xi, & z &= \xi^2, \\ \hat{y} &\longrightarrow \tilde{y}, & \hat{y} &= \tilde{y}\xi^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.39)$$

La ecuación (2.37) presenta en $\xi = 0$ (resp. $\xi = \infty$) una singularidad irregular cuyo rango entero es igual al doble del rango de la singularidad correspondiente en $z = 0$ (resp. $z = \infty$). En la aplicación al modelo de potencial confinante que presentamos en esta memoria, el origen y el infinito son ambos puntos singulares de la ecuación diferencial, el origen puede ser regular o irregular, el infinito es en todo caso irregular y los rangos de uno y otro son enteros. En estas condiciones, la ecuación diferencial de referencia adopta la forma

$$u''(z) + q(z)u(z) = 0, \quad (2.40)$$

donde

$$q(z) = \sum_{j=2M}^{2N} q_j z^j, \quad (2.41)$$

pudiendo ser $M = -1, -2, -3, \dots$ y $N = 0, 1, 2, \dots$, de manera que el rango de $z = 0$ es

$$R(0) = -M - 1, \quad (2.42)$$

correspondiendo a $M = -1$ una singularidad regular en el origen y a $M = -2, -3, -4, \dots$ una irregular. El rango de $z = \infty$ es

$$R(\infty) = N + 1. \quad (2.43)$$

Cuando $z = 0$ es un punto singular regular de (2.40), existe un sistema fundamental de soluciones de la ecuación tal que al menos una de ellas es de la forma multiplicativa de Taylor o solución Frobenius sin término logarítmico, i.e. de la forma (2.24) con $z_i = 0$:

$$u(z) = z^\rho \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n, \quad (z \in \mathbf{C}). \quad (2.44)$$

Cuando $z = 0$ es un punto singular irregular, existe un sistema fundamental de soluciones de (2.40) tal que al menos una de ellas es de la forma multiplicativa o de Floquet sin término logarítmico, i.e. de la forma (2.29) con $z_i = 0$:

$$u(z) = z^\rho \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.45)$$

así como dos sistemas fundamentales de soluciones formales. En una vecindad de la singularidad irregular $z = \infty$ existe un sistema fundamental de soluciones formales de Thomé normales de la forma (2.35) a las que denominamos *soluciones formales de clase (a)*

$$u_{a,k}(z) = z^{\mu_k} \exp \left(\sum_{p=1}^{R(\infty)} \frac{\alpha_p^{(k)}}{p} z^p \right) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{(k)} z^{-s},$$

$$(\alpha_{R(\infty)}^{(k)} \neq 0), \quad (k = 1, 2), \quad (2.46)$$

donde μ_k sustituye a $\alpha_{k,0}$, $p = 1, 2, \dots, R(\infty)$ a $j = 1, 2, \dots, R$, $\alpha_p^{(k)}$ a $\alpha_{k,j}$ y $a_s^{(k)}$ a $c_{k,s}$. Para cada $k = 1, 2$, los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ verifican el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{R(\infty)-p} \alpha_{R(\infty)-j}^{(k)} \alpha_{p+j}^{(k)} + q_{R(\infty)-2+p} = 0,$$

$$(p = R(\infty), R(\infty) - 1, \dots, 2, 1, 0), \quad (2.47)$$

de cuya resolución recurrente se obtienen las relaciones de antisimetría

$$\alpha_p^{(1)} = -\alpha_p^{(2)}, \quad (p = 0, 1, \dots, R(\infty)). \quad (2.48)$$

En una vecindad de la singularidad irregular $z = 0$ existe además un sistema fundamental de soluciones formales de Thomé normales, i.e. de la forma (2.33) con $z_i = 0$, a las que denominamos convencionalmente *soluciones formales de clase (b)*

$$u_{b,\tau}(z) = z^{\mu_\tau} \exp \left(\sum_{p=1}^{R(0)} \frac{\beta_p^{(\tau)}}{p} z^{-p} \right) \sum_{s=0}^{+\infty} \hat{a}_s^{(\tau)} z^{-s},$$

$$(\beta_{R(0)}^{(\tau)} \neq 0), \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.49)$$

donde el índice $\tau = 3, 4$ sustituye a $k = 1, 2$, μ_τ a $\alpha_{\tau,0}$, $p = 1, 2, \dots, R(0)$ a $j = 1, 2, \dots, R$, $\beta_p^{(\tau)}$ a $\alpha_{k,j}$ y $\hat{a}_s^{(\tau)}$ a $c_{k,s}$. Los parámetros $\beta_p^{(\tau)}$ verifican, para cada $\tau = 3, 4$, el sistema de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{R(0)-p} \beta_{R(0)-j}^{(\tau)} \beta_{j+p}^{(\tau)} + q_{R(0)-2-p} = 0, \quad (p = R(0), R(0) - 1, \dots, 2, 1, 0), \quad (2.50)$$

de cuya resolución recurrente se obtienen las relaciones de antisimetría

$$\beta_p^{(3)} = -\beta_p^{(4)}, \quad (p = 0, 1, \dots, R(0)). \quad (2.51)$$

Las expresiones (2.44), (2.45) son representaciones exactas y unívocas de soluciones particulares de la ecuación (2.40) en sendas vecindades completas del origen $z = 0$. Las expresiones (2.46), (2.49) son en cambio desarrollos asintóticos de ciertos sistemas fundamentales de soluciones, $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ y $\{u_{b,3}, u_{b,4}\}$, de la ecuación, respectivamente válidos en ciertos sectores $\{S_{1,p_1}, S_{2,p_2}\}$ y $\{S_{3,p_3}, S_{4,p_4}\}$, que constituyen vecindades incompletas del infinito y el origen. Estos desarrollos no son en general representaciones exactas de soluciones de la ecuación diferencial cuando $z \rightarrow \infty$ o $z \rightarrow 0$ a lo largo de cualquier rayo en el z -plano complejo, tampoco son unívocas, toda vez que la correspondencia entre funciones complejas y desarrollos asintóticos no es en general biyectiva.

2.2. El fenómeno de Stokes

A pesar del carácter generalmente no convergente y sectorialmente limitado de los segundos miembros de (2.46), (2.49), la suma de un número de términos no muy grande en las series asintóticas correspondientes a estas expresiones genera valores precisos de ciertas soluciones de la ecuación diferencial (2.40) cuando $|z|$ es tan grande o pequeño respectivamente que la convergencia de las series en (2.44), (2.45) es muy lenta. La representación de una solución particular de (2.40) es completa si es válida en todo el z -plano complejo, incluyendo los puntos singulares de la ecuación. Cuando tal representación existe, afirmamos que la solución representada es una *solución global* de la ecuación diferencial. A fin de obtener soluciones globales, es necesario resolver el *problema global* o *problema de conexión* de la ecuación, i. e. obtener las relaciones algebraicas que representan a las soluciones multiplicativas (2.44) o (2.45) como sendas combinaciones lineales de soluciones formales de clase (a) (2.46) o de clase (b) (2.49):

$$u(z) = T_{1,p_1}u_1(z) + T_{2,p_2}u_2(z), \quad z \in S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}, \quad (2.52)$$

$$u(z) = T_{3,p_3}u_3(z) + T_{4,p_4}u_4(z), \quad z \in S_{3,p_3} \cap S_{4,p_4}, \quad (2.53)$$

donde p_1, p_2, p_3, p_4 son números enteros. Las expresiones (2.52), (2.53) son las *fórmulas de conexión* de clases (a) y (b) respectivamente y los coeficientes T_{k,p_k} ($k = 1, 2$) y T_{τ,p_τ} ($\tau = 3, 4$) que multiplican a las soluciones formales en tales expresiones son los *factores de conexión* cuya determinación es equivalente a la resolución del problema global. Conocidos estos factores, las fórmulas de conexión permiten describir el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial en todo el rango de valores complejos de la

variable independiente z . Si la ecuación diferencial depende de un parámetro, las fórmulas de conexión permiten además caracterizar el conjunto de valores del parámetro para los cuales las soluciones globales presentan un comportamiento regular en ambos puntos singulares. En las aplicaciones a la Mecánica Cuántica, será posible obtener de este modo una caracterización simple y general del espectro de energías, i. e. del conjunto de valores del observable hamiltoniano para los cuales las soluciones de la ecuación de Schrödinger representan estados físicamente aceptables de un sistema cuántico.

Una consecuencia del carácter asintótico de las soluciones formales de Thomé $u_\tau(z)$, $u_k(z)$ es que al abandonar un sector de validez S_{τ,p_τ} (resp. S_{k,p_k}) variando $\arg z$ de modo continuo, una o ambas u_τ (resp. u_{k,p_k}) pueden dejar de ser desarrollos asintóticos de los mismos sistemas fundamentales de soluciones $\{u_{b,\tau}(z)\}$, $\tau = 3, 4$ (resp. $\{u_{a,k}(z)\}$, $k = 1, 2$) a los que representan en el sector abandonado, para convertirse en desarrollos asintóticos de otros sistemas fundamentales de soluciones en el nuevo sector. Por ejemplo, supongamos que las soluciones formales (2.46) representan a un sistema fundamental $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ de soluciones en sendas vecindades sectoriales S_{1,p_1} , S_{2,p_2} del infinito, i.e.

$$\begin{aligned} u_{a,1}(z) &\approx u_1(z) = z^{\mu_1} \exp\left(\sum_{p=1}^{R(\infty)} \frac{\alpha_p^1}{p} z^p\right) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^1 z^{-s}, & (z \rightarrow \infty), (z \in S_{1,p_1}), \\ u_{a,2}(z) &\approx u_2(z) = z^{\mu_2} \exp\left(\sum_{p=1}^{R(\infty)} \frac{\alpha_p^2}{p} z^p\right) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^2 z^{-s}, & (z \rightarrow \infty), (z \in S_{2,p_2}). \end{aligned} \quad (2.54)$$

Es posible que al modificar $\arg z$ abandonando el sector S_{1,p_1} y pasando al sector adyacente S_{1,p_1+1} suceda que $u_1(z)$ no es el desarrollo asintótico de $u_{a,1}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ en el nuevo sector S_{1,p_1+1} y sí lo es de otra solución $\bar{u}_{a,1}(z)$ de la ecuación diferencial (2.40), verificándose en consecuencia

$$\bar{u}_{a,1}(z) \approx u_1(z) = z^{\mu_1} \exp\left(\sum_{p=1}^{R(\infty)} \frac{\alpha_p^1}{p} z^p\right) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^1 z^{-s}, \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$(z \in S_{1,p_1+1}), \quad (2.55)$$

también es posible que al modificar $\arg z$ pasando del sector S_{2,p_2} al sector adyacente S_{2,p_2+1} suceda que $u_2(z)$ no es el desarrollo asintótico de $u_{a,2}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ en el nuevo sector S_{2,p_2+1} y sí lo es de otra solución $\bar{u}_{a,2}(z)$ de la ecuación diferencial

$$\bar{u}_{a,2}(z) \approx u_2(z) = z^{\mu_2} \exp\left(\sum_{p=1}^{R(\infty)} \frac{\alpha_p^2}{p} z^p\right) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^2 z^{-s}, \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$(z \in S_{2,p_2+1}). \quad (2.56)$$

Entonces, para obtener una representación asintótica de cualquier solución particular de (2.40) en una región sectorial dada del z -plano mediante las soluciones formales de Thomé de clase (a) $\{u_1, u_2\}$, es necesario que los sectores de validez correspondientes a cada una S_{1,p_1} , S_{2,p_2} sean no disjuntos y que su intersección contenga a la región de interés. Es decir, si $u(z)$ es una solución particular de la ecuación diferencial cuya representación exacta en una base de soluciones $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ viene dada por sendos factores constantes complejos T_{1,p_1} , T_{2,p_2} ,

$$u(z) = T_{1,p_1}u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}u_{a,2}(z), \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.57)$$

y se verifica (2.54), se tendrá la representación asintótica cuando $z \rightarrow \infty$

$$u(z) \approx T_{1,p_1}u_1(z) + T_{2,p_2}u_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}), \quad (2.58)$$

con $\{u_1(z), u_2(z)\}$ dadas en (2.46). Esta representación es válida en el sector $S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}$, no es válida necesariamente fuera de este sector. Por ejemplo, si las relaciones (2.55), (2.56) se verifican y los sectores correspondientes no son disjuntos, para tener una representación asintótica de la misma solución particular $u(z)$ mediante las mismas soluciones formales de clase (a) $\{u_1, u_2\}$ cuando $z \rightarrow \infty$ en el sector intersección $S_{1,p_1+1} \cap S_{2,p_2+1}$, la representación exacta (2.57) no es adecuada, debe reemplazarse por otra representación exacta en la base de soluciones $\{\bar{u}_{a,1}, \bar{u}_{a,2}\}$ cuyos desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$ en los sectores S_{1,p_1+1} , S_{2,p_2+1} son u_1 y u_2 respectivamente. Cuando tiene lugar este cambio sectorial de base en el espacio de soluciones de la ecuación (2.40) permaneciendo invariante el sistema fundamental de soluciones formales de clase (a), se produce un cambio en el valor de T_1 o T_2 al atravesar el rayo que separa dos sectores adyacentes. En lugar de (2.57) ahora se tiene

$$u(z) = T_{1,p_1+1}\bar{u}_{a,1}(z) + T_{2,p_2+1}\bar{u}_{a,2}(z), \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.59)$$

y en lugar de (2.58) se tiene

$$u(z) \approx T_{1,p_1+1}u_1(z) + T_{2,p_2+1}u_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \\ (z \in S_{1,p_1+1} \cap S_{2,p_2+1}). \quad (2.60)$$

Por consiguiente, cualquier solución particular de la ecuación diferencial puede representarse asintóticamente cuando $z \rightarrow \infty$ en cada sector no vacío $S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}$ mediante una combinación lineal de las dos soluciones formales de clase (a) dadas en (2.46). La importancia relativa de cada contribución depende del signo de la parte real del exponente más alto $\lambda_k z^{R(\infty)}$, ($\lambda_k \equiv \alpha_{R(\infty)}^k$), en los factores exponenciales de (2.46) correspondientes a $k = 1, 2$. Los coeficientes complejos T_{1,p_1} , T_{2,p_2} que multiplican a cada solución formal en (2.58) reciben el nombre de *coeficientes de Stokes de clase*

(a) y sus valores pueden cambiar cuando $\arg z$ varía de modo continuo, permaneciendo constante $|z|$, al atravesar ciertos rayos del z -plano complejo, a los cuales denominamos *rayos de Stokes de clase (a)*. Cuando este cambio sectorial de los coeficientes de Stokes tiene lugar, se produce abruptamente porque responde a un cambio de base en el espacio de soluciones de la ecuación diferencial que deja invariante el sistema fundamental de soluciones formales de clase (a). No obstante, este cambio abrupto de los coeficientes de Stokes no genera discontinuidad en la representación asintótica de la función porque el cambio de uno u otro coeficiente se produce cuando la solución formal a la que multiplica es recesiva por decrecer exponencialmente, mientras la solución formal multiplicada por el otro factor crece exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$. Estos cambios en los valores de los coeficientes complejos que multiplican a cada solución formal de Thomé en la representación asintótica compuesta de una solución particular de una ecuación diferencial lineal cuando el argumento de la variable independiente varía de modo continuo recibe el nombre de *fenómeno de Stokes* en honor de su descubridor George G. Stokes [60]. Para cada $k = 1, 2$, las líneas

$$\Re(\lambda_k z^{R(\infty)}) = 0, \quad (2.61)$$

son *líneas críticas de clase (a)* sobre las cuales se produce un cambio en el comportamiento asintótico de las soluciones formales de clase (a) cuando $z \rightarrow \infty$. Cuando $\Re(\lambda_1 z^{R(\infty)})$ cambia de signo, la solución formal $u_1(z)$ pasa de recesiva a dominante o viceversa y, habida cuenta de (2.48), $u_2(z)$ pasa de dominante a recesiva o viceversa.

Un razonamiento paralelo al antecedente nos lleva a establecer otra clase de representaciones asintóticas de cualquier solución particular de la ecuación diferencial (2.40) en regiones sectoriales del z -plano donde son válidas las soluciones formales de clase (b) $\{u_3, u_4\}$ dadas en (2.49)

$$u(z) \approx T_{3,p_3} u_3(z) + T_{4,p_4} u_4(z), \quad (z \rightarrow 0), \quad (z \in S_{3,p_3} \cap S_{4,p_4}), \quad (2.62)$$

donde los coeficientes T_{3,p_3} o T_{4,p_4} , denominados *coeficientes de Stokes de clase (b)*, pueden variar abruptamente de un sector a otro al atravesar ciertos rayos denominados *rayos de Stokes de clase (b)*. La importancia relativa de uno y otro término en el segundo miembro de (2.62) depende ahora del signo de la parte real del exponente más alto $\lambda_\tau z^{R(0)}$, ($\lambda_\tau \equiv \beta_{R(0)}^\tau$), en los factores exponenciales de (2.49) correspondientes a $\tau = 3, 4$. Para cada $\tau = 3, 4$, las líneas críticas de clase (b), en las cuales se produce un cambio en el comportamiento asintótico de las soluciones formales de clase (b) $\{u_3, u_4\}$, son, análogamente a (2.61),

$$\Re(\lambda_\tau z^{R(0)}) = 0. \quad (2.63)$$

La localización de los sectores de validez ha sido establecida por M. Kohno [39]. Consideremos por ejemplo la variación discontinua del factor de conexión T_{1,p_1} cuando $\arg z$ cambia de manera continua al atravesar ciertos rayos (fenómeno de Stokes). Para que este cambio brusco no afecte a la continuidad de la solución $u(z)$ representada asintóticamente mediante (2.58), es necesario y suficiente que las partes real e imaginaria de la solución formal $u_1(z)$ a la cual dicho factor multiplica tengan un comportamiento evanescente cuando $|z|$ crece indefinidamente ($z \rightarrow \infty$) sobre los rayos en los que se produce la discontinuidad de Stokes, i.e. que $u_1(z)$ sea recesiva sobre los rayos de Stokes del factor T_{1,p_1} . Esta condición se cumple si

$$\Im(\lambda_1 z^{R(\infty)}) = 0, \text{ y } \Re(\lambda_1 z^{R(\infty)}) < 0, \quad (2.64)$$

es decir, si

$$\arg(\lambda_1 z^{R(\infty)}) = (2p_1 + 1)\pi, \quad (p_1 \in \mathbf{Z}), \quad (2.65)$$

y una condición semejante se tiene sobre los rayos de Stokes del factor T_{2,p_2} .

Por consiguiente, para cada $k = 1, 2$, los rayos de Stokes de clase (a) \vec{s}_{k,p_k} tienen argumentos

$$\phi_{k,p_k} \equiv \arg(\vec{s}_{k,p_k}) = \frac{(2p_k + 1)\pi - \arg(\lambda_k)}{R(\infty)}, \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (2.66)$$

y los sectores de validez de las soluciones formales de clase (a) limitados por sendos rayos de Stokes consecutivos

$$S_{k,p_k} = \left\{ z \in \mathbf{C}; \left| \arg(\lambda_k z^{R(\infty)}) - 2\pi p_k \right| < \pi \right\}, \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (2.67)$$

tienen amplitudes angulares

$$\Delta\phi_{k,p_k} = \frac{2\pi}{R(\infty)}. \quad (2.68)$$

Análogamente, para cada solución formal de clase (b) ($\tau = 3, 4$) se tienen los sectores de validez

$$S_{\tau,p_\tau} = \left\{ z \in \mathbf{C}; \left| \arg(\lambda_\tau z^{-R(0)}) - 2\pi p_\tau \right| < \pi \right\}, \quad (p_\tau \in \mathbf{Z}). \quad (2.69)$$

Los rayos de Stokes de clase (b) que separan sectores contiguos S_{τ,p_τ} , $S_{\tau,p_\tau+1}$ tienen argumentos

$$\phi_{\tau,p_\tau} \equiv \arg(\vec{s}_{\tau,p_\tau}) = \frac{(2p_\tau + 1)\pi - \arg(\lambda_\tau)}{-R(0)}, \quad (2.70)$$

y las amplitudes angulares de los sectores S_{τ,p_τ} son

$$\Delta\phi_{\tau,p_\tau} = \frac{2\pi}{R(0)}. \quad (2.71)$$

A modo de ejemplo consideremos el comportamiento a grandes valores de $|z|$ de las soluciones de la ecuación diferencial de Bessel de orden cero, cuya forma estándar es

$$\frac{d^2 y}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dy}{dz} + y(z) = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.72)$$

que llevamos a la forma normal

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \left(1 + \frac{1}{4z^2}\right) u(z) = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.73)$$

mediante el cambio de la variable dependiente

$$y \longrightarrow u, \quad y = z^{1/2} u. \quad (2.74)$$

A partir de (2.17), (2.20) establecemos que el origen ($z = 0$) es el único punto singular de la ecuación de Bessel en el z -plano finito, es también un punto singular regular (rango $R(0) = 0$). Asimismo, a partir de (2.18), (2.21) establecemos que en el punto infinito la ecuación presenta una singularidad irregular de rango $R(\infty) = 1$ que, siendo entero, hace innecesario un nuevo cambio de variables (2.39).

En una vecindad del infinito, la ecuación (2.73) admite por tanto un sistema fundamental de soluciones de Thomé normales, i.e. soluciones formales (de clase (a)) de la forma (2.35)

$$\begin{aligned} u_1(z) &= z^{\mu_1} \exp(\lambda_1 z) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{(1)} z^{-s}, \\ u_2(z) &= z^{\mu_2} \exp(\lambda_2 z) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{(2)} z^{-s}, \end{aligned} \quad (2.75)$$

donde para cada $k = 1, 2$ utilizamos la notación $\mu_k \equiv \alpha_{k,0} \equiv \alpha_0^{(k)}$, $\lambda_k \equiv \alpha_{k,1} \equiv \alpha_1^{(k)}$, $a_s^{(k)} \equiv c_{k,s}$. Los valores de $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$ y la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ se obtienen sustituyendo (2.75) en (2.73):

$$\mu_1 = \mu_2 = 0, \quad \lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 s a_s &= (s - 1/2)^2 a_{s-1}, & (s \in \mathbf{Z}), \quad (a_0 \neq 0), \\ & (a_{-1} = a_{-2} = \dots = 0). \end{aligned} \quad (2.77)$$

La recurrencia (2.77) es soluble analíticamente, dando lugar al sistema fundamental de soluciones formales de (2.72)

$$\begin{aligned} y_1(z) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp(iz - i\pi/4) \sum_{s=0}^{+\infty} \tilde{a}_s (-i)^s z^{-s-1/2}, \\ y_2(z) &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \exp(-iz + i\pi/4) \sum_{s=0}^{+\infty} \tilde{a}_s i^s z^{-s-1/2}, \end{aligned} \quad (2.78)$$

donde

$$\tilde{a}_s \equiv \frac{(\Gamma(s + 1/2))^2}{s!2^s\pi}. \quad (2.79)$$

Cambiando sucesivamente en (2.78)

$$z \longrightarrow ze^{i\pi}, \quad z \longrightarrow ze^{-i\pi}, \quad (2.80)$$

se obtienen las relaciones de prolongación analítica

$$\begin{aligned} y_1(ze^{i\pi}) &= -y_2(z), & y_1(ze^{-i\pi}) &= y_2(z), \\ y_2(ze^{i\pi}) &= y_1(z), & y_2(ze^{-i\pi}) &= -y_1(z). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Las líneas críticas dadas en (2.61) son ahora

$$\begin{aligned} \Re(\lambda_1 z) &= \Re(iz) = \Re(-\Im(z) + i\Re(z)) = -\Im(z) = 0, \\ \Re(\lambda_2 z) &= \Re(-iz) = \Re(\Im(z) - i\Re(z)) = \Im(z) = 0, \end{aligned} \quad (2.82)$$

se localizan en el eje real, de manera que en el semiplano superior $\Im z > 0$ la solución formal y_1 es recesiva e y_2 es dominante, intercambiando sus comportamientos en el semiplano inferior $\Im z < 0$. Toda solución particular de la ecuación de Bessel (2.72) tiene un desarrollo asintótico compuesto cuando $z \rightarrow \infty$ formado por una combinación lineal de $y_1(z)$, $y_2(z)$ dadas por (2.78) en sectores de validez que son intersecciones no vacías de los sectores de validez (2.67) de cada una de las soluciones formales:

$$\begin{aligned} S_{1,p_1} &= \{z \in \mathbf{C}; |\arg(iz) - 2\pi p_1| < \pi\}, & (p_1 \in \mathbf{Z}), \\ S_{2,p_2} &= \{z \in \mathbf{C}; |\arg(-iz) - 2\pi p_2| < \pi\}, & (p_2 \in \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (2.83)$$

Los rayos de Stokes dados por (2.66) son

$$\begin{aligned} \phi_{1,p_1} &= (2p_1 + 1)\pi - \arg(\lambda_1) = (2p_1 + 1)\pi - \pi/2, & (p_1 \in \mathbf{Z}), \\ \phi_{2,p_2} &= (2p_2 + 1)\pi - \arg(\lambda_2) = (2p_2 + 1)\pi + \pi/2, & (p_2 \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.84)$$

correspondiendo a la primera hoja de Riemann los rayos

$$\phi_{1,0} = \frac{\pi}{2}, \quad \phi_{2,-1} = -\frac{\pi}{2}. \quad (2.85)$$

Una solución de la ecuación de Bessel (2.72) es la *función de Bessel de primera especie y orden cero*

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{1}{2}z\right)^{2n}, \quad (2.86)$$

que es una función entera par de z . $J_0(z)$ es la única solución particular de (2.72) holomorfa en el origen que tiene en ese punto $z = 0$ el valor 1 (ver por ejemplo [49]).

El problema de formar la integral general de la ecuación de Bessel (2.72), y determinar con ella cualquiera de sus soluciones particulares, queda resuelto introduciendo la *función de Bessel de segunda especie y orden cero* (por ejemplo, [2, página 360, expresión 9.1.11])

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \ln\left(\frac{1}{2}z\right) J_0(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} 2\psi(k+1) \frac{\left(-\frac{1}{4}z^2\right)^k}{(k!)^2}, \quad (2.87)$$

donde ψ es la función digamma, derivada logarítmica de la función gamma de Euler (por ejemplo, [2, página 258, expresiones 6.3.1, 6.3.2, página 255, expresión 6.1.3])

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{d(\ln \Gamma(z))}{dz} = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}, \\ \psi(1) &= -\gamma = -0,5772156649\dots, \\ \psi(n) &= -\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} k^{-1}, \quad (n = 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (2.88)$$

siendo γ la constante de Euler.

No obstante, en el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación de Bessel resulta más cómodo partir de otro sistema fundamental de soluciones. En concreto, las soluciones particulares de (2.72) que tienen el comportamiento asintótico más sencillo cuando $z \rightarrow \infty$ son las denominadas *funciones de Bessel de tercera especie y orden cero* o *funciones de Hankel de orden cero* $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$. Estas funciones pueden introducirse a partir de $J_0(z)$, $Y_0(z)$ (ver por ejemplo [49, página 13])

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= J_0(z) + iY_0(z), \\ H_0^{(2)}(z) &= J_0(z) - iY_0(z), \end{aligned} \quad (2.89)$$

de manera que

$$\begin{aligned} J_0(z) &= \frac{1}{2}H_0^{(1)}(z) + \frac{1}{2}H_0^{(2)}(z), \\ Y_0(z) &= \frac{1}{2i}H_0^{(1)}(z) - \frac{1}{2i}H_0^{(2)}(z). \end{aligned} \quad (2.90)$$

Los desarrollos asintóticos de $H_0^{(1)}(z)$, $H_0^{(2)}(z)$ se obtienen a partir de las representaciones integrales de esas funciones (ver por ejemplo [63, página 198]),

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &\approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{iz - i\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n(0, n)}{(2iz)^n}, \\ &(z \rightarrow \infty), \quad (-\pi < \arg z < 2\pi), \end{aligned} \quad (2.91)$$

$$H_0^{(2)}(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{-iz+i\pi/4} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(0, n)}{(2iz)^n},$$

$$(z \rightarrow \infty), \quad (-2\pi < \arg z < \pi), \quad (2.92)$$

donde

$$(0, n) = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{n! \Gamma(-n + 1/2)}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.93)$$

Utilizando propiedades elementales de la función $\Gamma(z)$ (por ejemplo, [2, página 256, expresiones 6.1.15, 6.1.17]) es inmediato verificar que los desarrollos asintóticos (2.91), (2.92) de las funciones de Hankel de orden cero coinciden con las soluciones formales (2.78) de la ecuación de Bessel de orden cero (2.72) que prescribe la teoría de las singularidades irregulares de las ecuaciones diferenciales lineales:

$$H_0^{(1)}(z) \approx y_1(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (-\pi < \arg z < 2\pi),$$

$$H_0^{(2)}(z) \approx y_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (-2\pi < \arg z < \pi). \quad (2.94)$$

Consecuencia inmediata de la primera expresión (2.90) y de (2.94) es el desarrollo asintótico compuesto de la función de Bessel de primera especie y orden cero en el plano completo excepto el semieje real negativo:

$$J_0(z) \approx \frac{1}{2}y_1(z) + \frac{1}{2}y_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (-\pi < \arg z < \pi). \quad (2.95)$$

A fin de obtener desarrollos asintóticos de $J_0(z)$ válidos en sectores que incluyen al semieje real negativo se tiene en cuenta que, a consecuencia de (2.86) y (2.95),

$$J_0(z) = J_0(ze^{i\pi}) \approx \frac{1}{2}y_1(ze^{i\pi}) + \frac{1}{2}y_2(ze^{i\pi}),$$

$$(z \rightarrow \infty), \quad (-\pi < \arg(ze^{i\pi}) < \pi), \quad (2.96)$$

es decir, aplicando las relaciones de prolongación analítica (2.81),

$$J_0(z) \approx \frac{1}{2}y_1(z) - \frac{1}{2}y_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (-2\pi < \arg z < 0). \quad (2.97)$$

También a consecuencia de (2.86) y (2.95) se tiene

$$J_0(z) = J_0(ze^{-i\pi}) \approx \frac{1}{2}y_1(ze^{-i\pi}) + \frac{1}{2}y_2(ze^{-i\pi}),$$

$$(z \rightarrow \infty), \quad (-\pi < \arg(ze^{-i\pi}) < \pi), \quad (2.98)$$

y aplicando de nuevo las relaciones (2.81),

$$J_0(z) \approx -\frac{1}{2}y_1(z) + \frac{1}{2}y_2(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (0 < \arg z < 2\pi). \quad (2.99)$$

La comparación de los desarrollos asintóticos completos (2.95) y (2.99) en el sector de validez común $0 < \arg z < \pi$ pone en evidencia el fenómeno de Stokes: el coeficiente T_1 que multiplica a $y_1(z)$ cambia abruptamente su valor de $1/2$ a $-1/2$ según se considere uno u otro desarrollo. En este sector, limitado por las líneas críticas $\arg z = 0$, $\arg z = \pi$ y cuya bisectriz es el rayo de Stokes $\arg z = \pi/2$ (véase la figura 2.1), el cambio brusco de T_1 no afecta a la representación asintótica de $J_0(z)$, pues dado el carácter recesivo de $y_1(z)$ y dominante de $y_2(z)$, los segundos miembros de (2.95) y (2.99) son asintóticamente iguales.

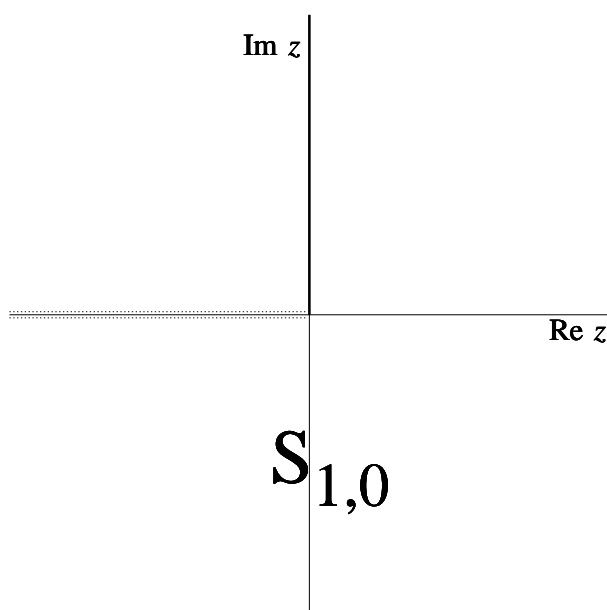


Figura 2.1: El rayo de Stokes $\arg(z) = \pi/2$ separa los sectores de validez adyacentes $S_{1,0}$: $-3\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ y $S_{1,1}$: $\pi/2 < \arg(z) < 5\pi/2$ de los factores de conexión $T_{1,0}$ y $T_{1,1}$ en la ecuación de Bessel de orden cero. $S_{1,0}$ cubre tres cuartas partes de la primera hoja de Riemann, $S_{1,1}$ cubre la cuarta parte restante.

Asimismo, el fenómeno de Stokes se manifiesta al comparar los desarrollos (2.95) y (2.97) en el sector de validez común $-\pi < \arg z < 0$, donde el coeficiente T_2 que multiplica a $y_2(z)$ cambia abruptamente su valor de $1/2$ a $-1/2$ según se utilice uno u otro desarrollo para representar asintóticamente a la función $J_0(z)$. Tampoco en este sector, limitado por las líneas críticas $\arg z = -\pi$, $\arg z = 0$ y cuya bisectriz es el rayo de Stokes $\arg z = -\pi/2$ (véase la figura 2.2), el cambio abrupto de T_2 afecta a la representación asintótica de $J_0(z)$, pues dado el carácter recesivo de $y_2(z)$ y dominante de $y_1(z)$, los segundos miembros de (2.95) y (2.97) son asintóticamente iguales.

2.3. MÉTODO DE NAUNDORF DE SOLUCIÓN DEL PROBLEMA GLOBAL73

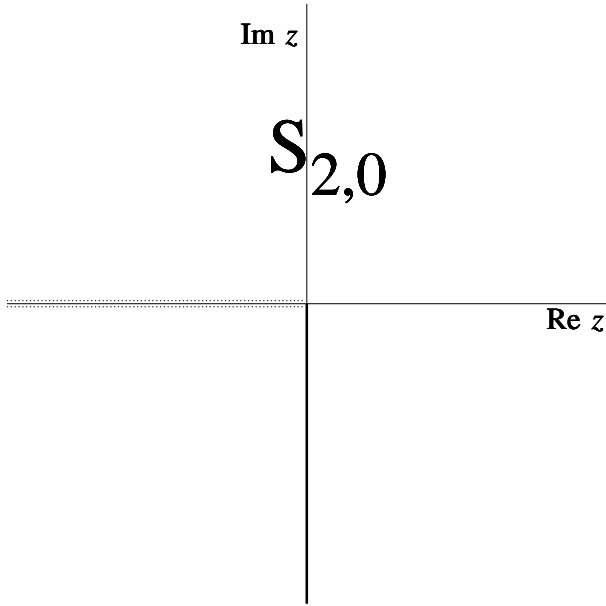


Figura 2.2: El rayo de Stokes $\arg(z) = -\pi/2$ separa los sectores de validez adyacentes $S_{2,-1}$: $-5\pi/2 < \arg(z) < -\pi/2$ y $S_{2,0}$: $\pi/2 < \arg(z) < 3\pi/2$ de los factores de conexión $T_{2,-1}$ y $T_{2,0}$ en la ecuación de Bessel de orden cero. $S_{2,0}$ cubre tres cuartas partes de la primera hoja de Riemann, $S_{2,-1}$ cubre la cuarta parte restante.

2.3. Método de Naundorf de solución del problema global

El método de Naundorf se aplica a las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con sendos puntos singulares irregulares en el origen y en el infinito, o bien uno irregular (el infinito) y otro regular (el origen). Estas ecuaciones pueden llevarse a la forma canónica

$$t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} + \left(\sum_{j=-r}^R a_j t^j \right) t \frac{dw}{dt} + \left(\sum_{j=-2r}^{2R} b_j t^j \right) w = 0, \quad (2.100)$$

donde r, R son los rangos enteros de los puntos singulares $t = 0$ y $t = \infty$ respectivamente ($0 \leq r$), ($0 < R < +\infty$), $r = 0$ si el origen es regular.

La ecuación (2.100) admite soluciones en serie de potencias (soluciones multiplicativas)

$$w_\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n t^{n+\rho}, \quad (0 < |t| < +\infty), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.101)$$

cuyos coeficientes c_n y exponente característico ρ se determinan a partir de

la recurrencia de orden $2(R+r)$ ($2R$ si el origen es regular)

$$(n+\rho)(n+\rho-1)c_n + \sum_{j=-r}^R a_j(n+\rho-j)c_{n-j} + \sum_{j=-2r}^{2R} b_j c_{n-j} = 0, \quad (2.102)$$

resultante de sustituir (2.101) en (2.100) (ver nota 12). Nosotros estamos interesados en aquella solución que tiene un comportamiento regular en el origen.

Asimismo, la ecuación admite dos soluciones formales, i. e., soluciones representadas por sus desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow +\infty$

$$w_{asy}^k(t) \approx \exp\left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_j^k}{j} t^j\right) t^{\mu_k} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^k t^{-s}, \quad (t \rightarrow +\infty), \quad (k=1,2), \quad (2.103)$$

donde se utilizará la notación $\lambda_k \equiv \alpha_R^k$. La sustitución de (2.103) en (2.100) conduce a la ecuación

$$\lambda^2 + a_R \lambda + b_{2R} = 0, \quad (2.104)$$

que determina los dos valores de λ_k , y a un sistema de ecuaciones que permite el cálculo recurrente de los α_j^k restantes y de μ_k . También se obtiene la recurrencia de orden $2(R+r)$ verificada por los coeficientes h_s^k de la serie asintótica:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=-2r-2}^{2R-2} \varphi_{j+r+1}^k h_{s+j+2}^k + \sum_{j=-r}^R \theta_j^k (\mu_k - s - j) h_{s+j}^k + \\ & + [\mu_k (\mu_k - 1) + s(s - 2\mu_k + 1)] h_s^k = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \\ & (h_0^k = 1), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.105)$$

donde φ_j^k, θ_j^k son funciones algebraicas de α_j^k, a_j, b_j .

El problema de conexión para la ecuación diferencial (2.100) consiste en obtener, para un rayo dado ($\arg(t)$ fijo), los factores T_k^η que permiten expresar las relaciones entre el sistema de soluciones multiplicativas y el sistema de soluciones formales de la ecuación diferencial (*relaciones de conexión*):

$$w_\eta(t) = \sum_{k=1}^2 T_k^\eta w_{asy}^k(t), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.106)$$

de manera que, una vez determinadas las constantes T_k , la sustitución de (2.103) en (2.106) dará como resultado el desarrollo asintótico completo de las soluciones multiplicativas (2.101) cuando $t \rightarrow \infty$ en sectores que dependen de R y λ_k .

En síntesis [31, p. 3194] el procedimiento de Naundorf consiste en obtener $2R$ series formales de potencias independientes (véase (2.121)), con índice entero que recorre el intervalo de $-\infty$ a $+\infty$, de comportamientos asintóticos bien definidos, y cuyos coeficientes $f_n^{(k,L)}$ son utilizados como una base en el subespacio $2R$ -dimensional del espacio de soluciones de la recurrencia (2.102) donde estas series formales reemplazan a los desarrollos asintóticos (2.103). A fin de obtener esta base, Naundorf sustituye, en las expresiones (2.103) de w_{asy}^1, w_{asy}^2 , el término exponencial que determina sus comportamientos asintóticos respectivos por R expansiones formales independientes del tipo serie exponencial de Heaviside que corresponden a las determinaciones de la raíz R -ésima de t^R . La multiplicación de estas expansiones formales por las series de Taylor de los restantes términos exponenciales y por las series asintóticas en (2.103) produce $2R$ expansiones formales cuyos coeficientes verifican la recurrencia mencionada, teniéndose de este modo la base requerida. Comparando $2R$ coeficientes consecutivos de la expresión (2.101) de w_η en serie de potencias con los coeficientes análogos de los elementos de la base, se establece un sistema de $2R$ ecuaciones lineales cuya solución permite obtener los factores de conexión.

Para unos valores dados de los factores de conexión $T_k^{(n)}$, las relaciones (2.106) no son válidas en general para todo valor de $\arg(t)$. La validez de las relaciones de conexión queda restringida a regiones sectoriales del plano complejo limitadas por rayos denominados *rayos de Stokes* a causa del denominado fenómeno de Stokes (véase la sección 2.2). En la ecuación canónica de Naundorf (2.100), el fenómeno de Stokes consiste en que los factores de conexión T_k que intervienen en los desarrollos asintóticos de las soluciones multiplicativas (2.101) toman valores que dependen de $\arg(t)$ y cambian de modo discontinuo cuando $\arg(t)$ varía de modo continuo manteniendo constante $|t|$. Las variaciones discontinuas de T_k ocurren cuando $\arg(t)$ alcanza ciertos valores que corresponden a otros tantos rayos en el plano complejo de la variable t : estos son los rayos de Stokes. El cambio brusco de T_1 se produce cuando la función $w_{asy}^1(t)$ a la que multiplica es despreciable frente a $w_{asy}^2(t)$, y recíprocamente, el cambio brusco de T_2 se produce cuando la función $w_{asy}^2(t)$ a la que multiplica es despreciable frente a $w_{asy}^1(t)$.

Para cada $\eta, k = 1, 2$, los factores de conexión de $w_\eta(t)$ con $w_{asy}^k(t)$ son las constantes $T_{k,p_k}^{(n)}$ ($p_k \in \mathbf{Z}$), definidas en los sectores

$$S_{k,p_k} \equiv \left\{ t \in \mathbf{C}; \left| \arg(\lambda_k t^R) - 2\pi p_k \right| < \pi \right\}, \quad (2.107)$$

denominados *sectores de validez*, tales que en cada uno de ellos se verifican las relaciones de conexión (2.106). Por consiguiente, los sectores de validez de las fórmulas de conexión corresponden a las intersecciones no vacías de

los sectores S_{k,p_k} :

$$S(p_1, p_2) \equiv S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}, \quad (p_1, p_2 \in \mathbf{Z}). \quad (2.108)$$

Los argumentos de los rayos de Stokes \vec{s}_{k,p_k} que separan a sectores adyacentes S_{k,p_k} y S_{k,p_k+1} se obtienen a partir de (2.107):

$$\phi_{k,p_k} \equiv \arg(\vec{s}_{k,p_k}) = \frac{(2p_k + 1)\pi - \arg(\lambda_k)}{R}, \quad (2.109)$$

de donde resulta que la amplitud angular de estos sectores está determinada por el rango de la singularidad del infinito:

$$\Delta\phi_{k,p_k} = \frac{2\pi}{R}, \quad (k = 1, 2), \quad (p_k \in \mathbf{Z}). \quad (2.110)$$

La idea fundamental del método de Naundorf es que puede obtenerse información precisa acerca de los factores $T_k^{(\eta)}$ mediante las relaciones de conexión (2.106) comparando el desarrollo (2.101) de $w_\eta(t)$ en serie de potencias $t^{n+\rho}$, donde n toma los valores enteros en el intervalo $(-\infty, +\infty)$, con los desarrollos formales (2.103) de $w_{asy}^{(k)}(t)$ ($k = 1, 2$) que dependen de series asintóticas en potencias t^{-s} , donde s toma los valores enteros del intervalo $(0, +\infty)$. A tal fin, es necesario disponer de representaciones asintóticas de $w_{asy}^{(k)}(t)$ que dependan de series de potencias de t cuyo índice entero recorra también el intervalo completo $(-\infty, +\infty)$. En el método de Naundorf, esas representaciones se obtienen a partir de la serie exponencial de Heaviside [37]

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+\delta}}{(n+\delta)!}, \quad (2.111)$$

que es igual a $\exp(t)$ para todo valor entero de δ y diverge para todo $t \in \mathbf{C}$ y todo δ no entero, aunque verifica la relación asintótica

$$\exp(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad (t \rightarrow \infty), \\ |\arg(t)| < \pi, \quad (t, \delta \in \mathbf{C}), \quad (2.112)$$

cuyo significado es

- (i) $\sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+\delta}/\Gamma(n+1+\delta)$ es una función entera, y
- (ii) $\sum_{n=-\infty}^{-1} t^{n+\delta}/\Gamma(n+1+\delta)$ es el desarrollo asintótico de la función $\exp(t) - \sum_{n=0}^{+\infty} t^{n+\delta}/\Gamma(n+1+\delta)$ cuando $t \rightarrow \infty$ en el sector $-\pi < \arg(t) < \pi$.

Para cada $k = 1, 2$, el desarrollo de Heaviside del factor $\exp(\lambda_k t^R) \equiv \exp(\alpha_R^k t^R)$ en (2.103) conduce, debido al carácter multivaluado de la raíz R -ésima, a R desarrollos asintóticos linealmente independientes

$$\exp\left(\frac{\lambda_k}{R} t^R\right) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(\lambda_k/R)^{n+(\delta+L)/R}}{(n+(\delta+L)/R)!} t^{nR+L+\delta}, \quad |t| \rightarrow +\infty,$$

$$\left|\arg(\lambda_k t^R)\right| < \pi, \quad (L = 0, 1, \dots, R-1), \quad (2.113)$$

donde la condición $\left|\arg(\lambda_k t^R)\right| < \pi$ corresponde a cualquier rayo dentro del sector $S_{k,0}$ (ver (2.107)). El producto de (2.113) por la serie de Taylor de $\exp\left(\sum_{j=1}^{R-1} \alpha_j^k t^j/j\right)$ da como resultado, para cada $L = 0, 1, \dots, R-1$, la expansión del factor exponencial en el desarrollo asintótico (2.103)

$$\exp\left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_j^k}{j} t^j\right) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n^{(k,L)} t^{n+\delta}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (t \in S_{k,0}), \quad (2.114)$$

donde para todo $n \in \mathbf{Z}$, $R = 1, 2, 3, \dots$,

$$g_n^{(k,L)} = \sum_{p=-\infty}^{[(n-L)/R]} a_{Rp+L} b_{n-L-Rp}^{(R)}, \quad (2.115)$$

$$a_{Rp+L} = \frac{(\lambda_k/R)^{p+(\delta+L)/R}}{(p+(\delta+L)/R)!}, \quad (2.116)$$

siendo $b_{n-L-Rp}^{(R)}$ los coeficientes del desarrollo de Taylor de $\exp\left(\sum_{j=1}^{R-1} \alpha_j t^j/j\right)$

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{R-1} \frac{\alpha_j}{j} t^j\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m^{(R)} t^m, \quad (0 < |t| < +\infty), \quad (2.117)$$

es decir,

$$\begin{aligned} b_0^{(R)} &= 1, \\ b_1^{(R)} &= \alpha_1/1!, \\ b_2^{(R)} &= (\alpha_1^2 + \alpha_2)/2!, \\ b_3^{(R)} &= (\alpha_1^3 + 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_3)/3!, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.118)$$

al efectuar el cambio de índice $m \rightarrow n - L - Rp$. Para cada $k = 1, 2$, los coeficientes $g_n^{(k,L)}$ en el segundo miembro de (2.114) constituyen un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia [43, p. 161]

$$(n + \delta)g_n^{(k)} = \sum_{j=1}^R \alpha_j^{(k)} g_{n-j}^{(k)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.119)$$

que se obtiene derivando (2.114) respecto a t .

El desarrollo (2.114) se extiende a otros sectores S_{k,p_k} teniendo en cuenta que si t pertenece a un sector S_{k,p_k} , entonces $t \exp(-i2\pi p_k/R)$ pertenece al sector $S_{k,0}$:

$$\exp\left(\sum_{j=1}^R \frac{\alpha_j^{(k)}}{j} t^j\right) \approx \exp\left(-i2\pi p_k \left(\frac{L+\delta}{R}\right)\right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_n^{(k,L)} t^{n+\delta},$$

$$(t \rightarrow \infty), \quad (t \in S_{k,p_k}), \quad (L = 0, 1, \dots, R-1). \quad (2.120)$$

La multiplicación formal del desarrollo (2.114) por t^μ y por la expansión asintótica en el segundo miembro de (2.103) conduce, para cada $k = 1, 2$, a los R desarrollos asintóticos [43, p. 161]

$$w_{asy}^{(k)}(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n^{(k,L)} t^{n+\rho}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (t \in S_{k,0}),$$

$$(L = 0, 1, \dots, R-1), \quad (2.121)$$

donde

$$f_n^{(k,L)} = \sum_{s=0}^{+\infty} g_{n+s}^{(k,L)} h_s^{(k)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.122)$$

y δ se elige de manera que

$$\delta = \rho - \mu_k. \quad (2.123)$$

La convergencia de la serie en el segundo miembro de (2.121) se establece [43, p. 171] aplicando un teorema de Perron sobre recurrencias lineales a las recurrencias (2.105) y (2.119) verificadas por $h_s^{(k)}$ y $g_n^{(k)}$ respectivamente. Nosotros hemos utilizado ese teorema para verificar la convergencia de nuestro método de cálculo de los factores de conexión (véanse las secciones 2.4, 2.5 y el apéndice A).

Ahora es posible comparar en las relaciones de conexión (2.106) las expansiones (2.101) de $w_\eta(t)$ y (2.121) de $w_{asy}^{(k)}(t)$, dando como resultado que los coeficientes c_n en los desarrollos de las soluciones multiplicativas dependen linealmente de los $f_n^{(k,L)}$ [43, p. 162]

$$c_n = \sum_{k=1}^2 \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L} f_n^{(k,L)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.124)$$

para todo n a partir de cierto N , de manera que

$$\sum_{j=-r}^R |a_j(n+2R-j+\rho)| + \sum_{j=-2r}^{2R} |b_j| < |(n+2R+\rho)(n+2R-1+\rho)|.$$

$$(2.125)$$

En el primer miembro de las relaciones de conexión (2.106) para los sectores $S_{k,0}$ se reemplaza $w_\eta(t)$ por la expansión

$$w_\eta(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^2 \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L} f_n^{(k,L)} t^{n+\rho}, \quad (0 < |t| < +\infty), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.126)$$

y en el segundo miembro de (2.106) las $w_{asy}^{(k)}(t)$ son reemplazadas por las expansiones (2.121), es decir, para cada $\eta = 1, 2$, y cada $L = 0, 1, \dots, R-1$,

$$\sum_{k=1}^2 T_{k,0}^{(\eta)} w_{asy}^{(k)}(t) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=1}^2 T_{k,0}^{(\eta)} f_n^{(k,L)} t^{n+\rho}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (t \in S_{k,0}). \quad (2.127)$$

Comparando los segundos miembros de (2.126) y (2.127) se obtiene la expresión

$$T_{k,0}^{(\eta)} = \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L}, \quad (\eta, k = 1, 2), \quad (2.128)$$

válida en el sector $S_{k,0}$. En otros sectores S_{k,p_k} se obtiene

$$T_{k,p_k}^{(\eta)} = \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L}^{(p_k)}, \quad (\eta, k = 1, 2), \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (2.129)$$

donde $\beta_{k,L}^{(p_k)}$ verifican la relación semejante a (2.124)

$$c_n = \sum_{k=1}^2 \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L}^{(p_k)} f_{n,p_k}^{(k,L)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.130)$$

siendo $f_n^{(k,L)}$, para cada $k = 1, 2$, los coeficientes en los R desarrollos asintóticos análogos a (2.121)

$$w_{asy}^{(k)}(z) \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_{n,p_k}^{(k,L)} t^{n+\rho}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (t \in S_{k,p_k}), \quad (L = 0, 1, \dots, R-1), \quad (2.131)$$

que resulta de la multiplicación formal del desarrollo (2.120) por t^{μ_k} y por la expansión asintótica en el segundo miembro de (2.103), de manera que en vez de (2.122) se tiene ahora

$$f_{n,p_k}^{(k,L)} = \exp\left(-i2\pi p_k \left(\frac{L + \rho - \mu_k}{R}\right)\right) f_n^{(k,L)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.132)$$

siendo $f_{n,0}^{(k,L)} = f_n^{(k,L)}$.

Sustituyendo (2.132) en (2.130) se obtiene la expresión de c_n

$$c_n = \sum_{k=1}^2 \sum_{L=0}^{R-1} \beta_{k,L}^{p_k} \exp\left(-i2\pi p_k \left(\frac{L + \rho - \mu_k}{R}\right)\right) f_n^{(k,L)}, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (2.133)$$

que comparada con (2.124) para cada $k = 1, 2$ y $L = 0, 1, \dots, R-1$, da lugar a expresiones de las constantes β válidas en todo sector S_{k,p_k}

$$\beta_{k,L}^{p_k} = \exp\left(i2\pi p_k \left(\frac{L + \rho - \mu_k}{R}\right)\right) \beta_{k,L}, \quad (p_k \in \mathbf{Z}). \quad (2.134)$$

Llevando (2.134) a (2.129) se obtiene finalmente la expresión de los factores de conexión en cualquier sector S_{k,p_k}

$$T_{k,p_k}^{(\eta)} = \sum_{L=0}^{R-1} \exp\left(i2\pi p_k \left(\frac{L + \rho - \mu_k}{R}\right)\right) \beta_{k,L}, \quad (\eta, k = 1, 2), \quad (p_k \in \mathbf{Z}). \quad (2.135)$$

Cuando la variable independiente t recorre un rayo de Stokes que separa dos sectores adyacentes S_{k,p_k} y S_{k,p_k+1} , se adopta como valor del factor de conexión la semisuma de los valores que toma el mismo factor en ambos sectores, es decir, para cada $\eta, k = 1, 2$, para cada $p_k \in \mathbf{Z}$,

$$T_k^{(\eta)}(\vec{s}_{k,p_k}) = \frac{1}{2} \left(T_{k,p_k}^{(\eta)} + T_{k,p_k+1}^{(\eta)} \right). \quad (2.136)$$

La resolución numérica del sistema de ecuaciones (2.124), donde $f_n^{k,L}$ son dados por (2.123), permite a Naundorf calcular los coeficientes $\beta_{k,L}$ y obtener los factores de conexión por medio de (2.129).

2.4. Resolución del problema global por el método de los Wronskianos (I). Ecuación con dos puntos singulares, regular e irregular

El método de Naundorf [43] constituye una estrategia diferente de solución del problema global o problema de conexión de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con dos puntos singulares en el origen y el infinito. Ejemplos de esta clase de problema se presentan al resolver la ecuación de Schrödinger con potenciales dados por combinaciones lineales de potencias de exponentes enteros de la variable radial r . En todos ellos, la ecuación de Schrödinger puede llevarse a la forma canónica (2.40) mediante cambios adecuados de las variables y parámetros. Cuando las potencias de r son tales que la ecuación canónica presenta una singularidad regular en el

origen y una irregular en el infinito, hablamos de *potenciales polinomiales*. En este caso siempre es posible obtener dos soluciones Frobenius de la ecuación linealmente independientes que contienen series de potencias r^n de exponentes enteros no negativos, de las que una al menos, sea u_{reg} , es físicamente aceptable en el origen al carecer de término logarítmico. Además, es posible obtener otro sistema de dos soluciones de Thomé normales linealmente independientes, sean $u_{\text{asy}}^{(1)}$, $u_{\text{asy}}^{(2)}$, en la forma de expansiones asintóticas cuando $r \rightarrow +\infty$, tales que una de ellas, sea $u_{\text{asy}}^{(1)}$, tiende a cero cuando la variable independiente crece, mientras $u_{\text{asy}}^{(2)}$ tiende a infinito. El problema es conectar ambos sistemas de soluciones de la ecuación diferencial, a fin de obtener *soluciones globales*, esto es, soluciones válidas en el rango completo de valores de la variable radial ($0 \leq r < +\infty$). El problema se resuelve calculando los *factores de conexión* T_k que representan a u_{reg} en combinación lineal de $u_{\text{asy}}^{(1)}$, $u_{\text{asy}}^{(2)}$, i.e. las *fórmulas de conexión*.

A fin de determinar las soluciones físicamente aceptables y el espectro de energías, sugerimos en [30] un método diferente de resolución del problema global en la ecuación de Schrödinger de un oscilador anarmónico cuántico que presenta dos puntos singulares, uno en el origen (regular) y otro en el infinito (irregular). Nuestro método, inspirado en el estudio de Naundorf [43] citado en la sección precedente, se apoya como éste en las relaciones de conexión entre la solución u_{reg} físicamente aceptable en el origen y las soluciones $u_{\text{asy}}^{(1)}$, $u_{\text{asy}}^{(2)}$ conocidas por sus expansiones asintóticas en la vecindad del infinito

$$u_{\text{reg}} = T_1 u_{\text{asy}}^{(1)} + T_2 u_{\text{asy}}^{(2)}, \quad (2.137)$$

donde los factores de conexión T_k dependen de los parámetros del potencial y de la energía. La nulidad del factor T_2 , multiplicador de la solución que diverge en el infinito, es la condición que determina el espectro de valores propios de la energía cuando los parámetros del potencial se han ajustado numéricamente. Para estos valores de la energía la función u_{reg} tiene un comportamiento regular en ambos puntos singulares y representa una solución físicamente aceptable de la ecuación de Schrödinger. Asimismo, nuestro método coincide con Naundorf en el uso de la serie exponencial de Heaviside para obtener desarrollos formales del factor exponencial $\exp(\lambda_k t^R/R)$ que determina el comportamiento de las soluciones $u_{\text{asy}}^{(k)}$ ($k = 1, 2$) en la vecindad del infinito.

En vez de seguir las etapas del método de Naundorf, nosotros utilizamos un procedimiento de cálculo de los factores de conexión en el que éstos se expresan como cocientes de Wronskianos de las soluciones que intervienen

en las fórmulas de conexión

$$T_1 = \frac{\mathcal{W}[u_{reg}, u_{asy}^{(2)}]}{\mathcal{W}[u_{asy}^{(1)}, u_{asy}^{(2)}]}, \quad T_2 = \frac{\mathcal{W}[u_{reg}, u_{asy}^{(1)}]}{\mathcal{W}[u_{asy}^{(2)}, u_{asy}^{(1)}]}. \quad (2.138)$$

El objeto de esta sección es describir este nuevo método de cálculo de los factores de conexión, al que denominamos en lo sucesivo *método de los Wronskianos*, en el caso de ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con dos puntos singulares en el origen (regular) y en el infinito (irregular).

2.4.1. Ecuación de Schrödinger con un potencial polinomial más culombiano

En muchas situaciones físicas: sistemas hidrogenoides, osciladores anarmónicos, efecto Stark esférico, potenciales confinantes, etc., la interacción de una partícula con su entorno se describe de modo satisfactorio incorporando a la ecuación radial de Schrödinger en un espacio de dimensión $D = 3$

$$\frac{\hbar^2}{2m} R''(r) + \left[E - V(r) - \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R(r) = 0, \\ (0 \leq r < +\infty), \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.139)$$

un potencial polinomial más culombiano

$$V(r) = \sum_{j=-1}^{\tilde{\nu}} A_j r^j, \quad (A_{\tilde{\nu}} \neq 0), \quad (A_{-1} \neq 0), \quad (2.140)$$

donde $\tilde{\nu} \geq -1$. Cuando $\tilde{\nu} = -1$ el potencial es culombiano puro, cuando $\tilde{\nu} = 0, 1, 2, \dots$ al término culombiano se superpone uno o más términos que en conjunto constituyen un polinomio de grado $\tilde{\nu}$. Una vez ajustados los valores numéricos de los parámetros A_j del potencial, l del momento cinético orbital y m (masa), interesa conocer el *espectro de energías*, esto es, el conjunto de valores numéricos del parámetro E para los cuales las soluciones correspondientes $R(r)$ de la ecuación (2.139) son componentes radiales de funciones de onda de Schrödinger,

$$\psi(r, \theta, \varphi) = Y_l^{\tilde{m}}(\theta, \varphi) R(r)/r, \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (\tilde{m} = l, l-1, \dots, -l) \quad (2.141)$$

tales que son de cuadrado integrable, i.e. verifican la condición

$$\int_{\mathbf{R}^3} d^3r |\psi|^2 < +\infty, \quad (2.142)$$

siendo $Y_l^{\tilde{m}}(\theta, \varphi)$, $(0 \leq \theta \leq \pi)$, $(0 \leq \varphi < 2\pi)$ armónicos esféricos.

Para cada valor numérico de E , las soluciones de la ecuación radial (2.139) dependen de l porque al potencial polinomial (2.140) se suma el término

centrífugo $l(l+1)\hbar^2/2mr^2$ resultante de la separación de la variable radial r y las variables angulares (θ, φ) en la ecuación de Schrödinger verificada por $\psi(r, \theta, \varphi)$. Las funciones de onda de Schrödinger dependen por tanto de la energía E y de un potencial efectivo

$$V_{ef}(r) = \sum_{j=-2}^{\tilde{\nu}} A_j r^j, \quad (A_{\tilde{\nu}} \neq 0), \quad (A_{-1} \neq 0), \quad (2.143)$$

donde además de los parámetros A_j ($j = -1, 0, 1, \dots, \tilde{\nu}$) del potencial central (2.140) definimos el parámetro correspondiente al potencial centrífugo

$$A_{-2} = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.144)$$

de manera que la ecuación radial (2.139) se escribe en notación más sencilla

$$R''(r) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_{ef}(r)) R(r) = 0, \quad (0 \leq r < +\infty). \quad (2.145)$$

En lo sucesivo, nos referimos a (2.145) como *la ecuación radial*. Esta ecuación proporciona una descripción ajustada de muchas situaciones físicas que se plantean en el estudio de la materia a escala atómica y subatómica. En todas ellas, interesa obtener la parte regular del espectro de energías de un sistema cuántico, entendida como el conjunto de valores numéricos del parámetro E a los cuales corresponden funciones radiales $R(r)$ cuyo comportamiento regular en el rango de distancias de cero a infinito se caracteriza por la condición

$$\int_0^{+\infty} dr |R(r)|^2 < +\infty. \quad (2.146)$$

Denominamos *función radial completamente regular* a toda solución $R(r)$ de la ecuación radial tal que verifica la condición (2.146). Esta condición asegura que la medida de la distribución de probabilidad sobre el espacio tridimensional asociada con las funciones propias del operador de Schrödinger es finita y por tanto normalizable. A este conjunto de funciones radiales completamente regulares corresponde un subconjunto del espectro de energías donde se encuentran los valores físicamente realizables de la energía de una partícula en interacción con su entorno vía el potencial central (2.140).

2.4.2. Ecuación canónica

El método de los Wronskianos puede aplicarse directamente sobre la misma ecuación radial, cuya variable independiente r tiene dimensiones de longitud y cuyos parámetros \hbar , m , E , A_j ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, \tilde{\nu}$) tienen dimensiones de acción, masa, energía y energía dividida entre longitud elevada a j respectivamente. Esa vía directa produce resultados que dependen del sistema de unidades elegido para representar los valores numéricos de la variable,

de los parámetros y de otras cantidades relacionadas con ellos. En cambio, resulta ventajoso plantear y resolver el problema global en una ecuación canónica cuyas variables y parámetros son adimensionales y guardan relaciones funcionales explícitas con las variables y parámetros de la ecuación radial. Esta ecuación adimensional de variable independiente y parámetros complejos es la *ecuación canónica I* o ecuación canónica correspondiente a (2.145)

$$\frac{d^2u}{dz^2} - g(z)u = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.147)$$

donde $g(z)$ es la combinación lineal de potencias de z

$$g(z) = \sum_{j=-2}^{2N} g_j z^j, \quad (g_{2N} \neq 0). \quad (2.148)$$

El proceso de transformación de la ecuación radial de Schrödinger (2.145) en la ecuación canónica (2.147) se describe en la nota 13.

La ecuación canónica (2.147), (2.148) responde a la forma general

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0, \quad (2.149)$$

donde

$$p(z) = 0, \quad q(z) = -g(z) = -\sum_{j=-2}^{2N} g_j z^j, \quad (2.150)$$

de manera que, siendo nulo el término en la primera derivada, el comportamiento de la función $g(z)$ determina el carácter ordinario o singular de los puntos del z -plano complejo respecto de la ecuación diferencial. Así, el origen y el infinito son los únicos puntos en los que pueden localizarse singularidades de la ecuación canónica porque $g(z)$ tiene un comportamiento regular para todo $z \neq 0, \infty$ con independencia de los valores numéricos asignados a N, g_j ; en cambio, el comportamiento de $g(z)$ en el origen y el infinito es en general irregular.

El origen $z = 0$ es un punto singular regular (rango de Poincaré igual a cero) si g_{-2} o g_{-1} toman valores diferentes de cero porque si $z \rightarrow 0$ la razón de crecimiento de $g(z)$ hacia infinito nunca es mayor que la de $1/z^2$, de manera que $g(z)$ tiene un polo de orden menor o igual que 2 en $z = 0$; si g_{-2} y g_{-1} son ambos nulos, el origen es un punto ordinario en el cual $g(z)$ permanece finita.

El comportamiento de $p(z)$ y $q(z)$ en la vecindad del origen se caracteriza por sendos exponentes K_1, K_2 dados en (2.13), (2.14) tales que

$$p(z) = O(z^{-K_1}), \quad (z \rightarrow 0), \quad K_1 = -\infty, \quad (2.151)$$

$$q(z) = O(z^{-K_2}), \quad (z \rightarrow 0), \quad K_2 = 2, \quad (2.152)$$

a partir de los cuales se define el rango de Poincaré H_0 de la singularidad en el origen de la ecuación canónica mediante (2.20):

$$H_0 = \max \{1, -\infty, 1\} - 1 = 0. \quad (2.153)$$

El infinito $z = \infty$ es una singularidad irregular de la ecuación canónica cuyo rango de Poincaré es $N + 1$ porque cuando $z \rightarrow \infty$, el comportamiento de la función $g(z)$ es dominado por el término de grado $2N$, de manera que las funciones

$$\tilde{P}(z) = 2z - z^2 p(z) = 2z, \quad (2.154)$$

$$\tilde{Q}(z) = z^4 q(z) = -z^4 g(z), \quad (2.155)$$

dadas en (2.9) con $z_i = 0$, tienen en el infinito sendos polos de órdenes 1 y $2N + 4$ respectivamente, y $Q(z)$ en particular crece a un ritmo más rápido que z^2 .

El comportamiento de $p(z)$, $q(z)$ en la vecindad del infinito se caracteriza por sendos exponentes \tilde{K}_1 , \tilde{K}_2 dados en (2.15), (2.16) tales que

$$p(z) = O\left(z^{\tilde{K}_1 - 2}\right), \quad (z \rightarrow \infty), \quad \tilde{K}_1 = -\infty, \quad (2.156)$$

$$q(z) = O\left(z^{\tilde{K}_2 - 4}\right), \quad (z \rightarrow \infty), \quad \tilde{K}_2 = 2N + 4, \quad (2.157)$$

a partir de los cuales se define el rango de Poincaré H_∞ de la singularidad en el infinito de la ecuación canónica mediante (2.21):

$$H_\infty = \max \{1, -\infty, N + 2\} - 1 = N + 1, \quad (N = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.158)$$

2.4.3. Soluciones analíticas y formales de la ecuación canónica

La ecuación canónica admite soluciones analíticas de la forma (2.44) definidas por series de potencias de z cuyos exponentes crecen según la sucesión natural a partir de un valor característico ρ :

$$u_\eta(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho}, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad c_{0,\eta} = 1, \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.159)$$

para dos valores de ρ que distinguimos mediante la condición

$$\Re(\rho_1) \geq \Re(\rho_2). \quad (2.160)$$

Los exponentes (ρ_1, ρ_2) son las soluciones de la ecuación característica que resulta de sustituir en la ecuación canónica a $u(z)$ y $u''(z)$ por la serie del segundo miembro de (2.159) y su derivada segunda respectivamente:

$$\rho^2 - \rho - g_{-2} = 0, \quad (2.161)$$

donde g_{-2} depende de l y $\tilde{\nu}$ (véase la nota 13, expresiones (2.356), (2.358) y (2.360)). Además de los exponentes característicos, de la sustitución se obtiene la recurrencia de orden $2N+2$ verificada por los coeficientes $c_n \equiv c_{n,\eta}$ en la serie (2.159):

$$\begin{aligned} n(n+2\rho-1)c_n - \sum_{j=-1}^{2N} g_j c_{n-j-2} &= 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \\ c_0 &= 1, \quad c_n = 0 \quad (n = -1, -2, -3, \dots) \end{aligned} \quad (2.162)$$

donde ρ toma uno u otro de los valores ρ_1, ρ_2 dados en (2.161).

La teoría de Frobenius acerca de las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden establece que la existencia de un sistema fundamental de soluciones analíticas de la forma (2.159) en la vecindad de una singularidad regular localizada en $z = 0$, depende de la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ entre los exponentes que caracterizan el comportamiento de tales soluciones cuando $z \rightarrow 0$. Si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ no es igual a un número entero, existen dos soluciones independientes de la ecuación canónica definidas mediante las series de potencias (2.159). Si la diferencia $\rho_1 - \rho_2$ es igual a un número entero, solamente la existencia de una solución de la forma (2.159) es segura, la que corresponde al exponente ρ_1 , cuyo comportamiento en el origen es regular: denominamos $u_1(z) \equiv u_{\text{reg}}(z)$ a esta solución siguiendo el convenio (2.160). Además existe otra solución independiente de la primera que en general es irregular en el origen porque contiene un término logarítmico o porque la parte real de su exponente característico ρ_2 es de signo negativo:

$$u_2(z) \equiv u_{\text{irr}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,2} z^{n+\rho_2} + \mathcal{C} u_{\text{reg}}(z) \ln z, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.163)$$

siendo \mathcal{C} una constante compleja.

Las soluciones de la ecuación canónica que tienen interés en las aplicaciones físicas son desde luego las que presentan un comportamiento regular en ambos puntos singulares $z = 0$ y $z = \infty$: son las soluciones completamente regulares de la ecuación. Estas soluciones se representan en la vecindad del origen mediante series

$$u_{\text{reg}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{n,1} z^{n+\rho_1}, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (c_{0,1} = 1), \quad (2.164)$$

tales que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} u_{\text{reg}}(z) = 0. \quad (2.165)$$

En resumidas cuentas, la condición de regularidad en el origen excluye a todas aquellas soluciones de la ecuación canónica (2.147), (2.148) que contienen términos logarítmicos o que dependen de series (2.159) cuyo exponente

característico ρ verifica $\Re(\rho) < 0$. La condición de regularidad en el infinito excluye a las soluciones que no verifican la condición (2.165), tengan o no término logarítmico.

La recurrencia (2.162) ha sido resuelta analíticamente cuando la ecuación radial de Schrödinger (2.145) incorpora algunos potenciales particulares, como el potencial hidrogenoide ($\tilde{\nu} = -1$), el potencial cuadrático ($\tilde{\nu} = 2$, $A_{-1} = A_1 = 0$) o el potencial lineal ($\tilde{\nu} = 1$, $A_{-1} = 0$), este último cuando $l = 0$. La relación de este problema de recurrencias lineales con el problema global de las ecuaciones diferenciales lineales quedó en evidencia a raíz de los trabajos de M. Kohno [39]. Kohno estableció que la resolución del problema global en una ecuación diferencial lineal de orden arbitrario equivale a obtener la forma asintótica cuando $n \rightarrow +\infty$ de la función c_n definida por la recurrencia (2.162). En casi todos los casos, la ausencia de una solución analítica de la recurrencia complica seriamente la resolución del problema global por el método de Kohno.

Además del sistema fundamental de soluciones analíticas $\{u_{\text{reg}}(z), u_{\text{irr}}(z)\}$ i.e. $\{u_1(z), u_2(z)\}$, existe otro sistema fundamental de soluciones de la ecuación canónica, dadas en (2.46), que representamos mediante $\{u_{a,1}(z), u_{a,2}(z)\}$; estas soluciones reciben el nombre de *soluciones formales o asintóticas de clase (a)* porque de ellas conocemos solamente sus formas asintóticas respecto a la singularidad irregular del infinito:

$$\begin{aligned} u_{a,k}(z) &\sim \exp(\chi_{a,k}(z)) \mathcal{S}_{a,k}(z), & (z \rightarrow \infty), \\ \mathcal{S}_{a,k}(z) &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^k z^{-s+\mu_k}, & (a_0^k \neq 0), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.166)$$

donde para cada $k = 1, 2$ $\chi_{a,k}(z)$ es el polinomio de grado $N + 1$ igual al rango de la singularidad del infinito

$$\chi_{a,k}(z) = \sum_{p=1}^{N+1} \frac{\alpha_p^k}{p} z^p. \quad (2.167)$$

La función

$$\xi_{a,k}(z) = \chi_{a,k}(z) + \mu_k \ln z \quad (2.168)$$

permite expresar de manera más sencilla las formas asintóticas (2.166) de las soluciones formales:

$$u_{a,k}(z) \sim \exp(\xi_{a,k}(z)) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^k z^{-s}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (a_0^k \neq 0), \quad (2.169)$$

y en el polinomio $\chi_k(z)$ el parámetro α_{N+1}^k es representado por algunos autores mediante el símbolo

$$\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^k, \quad (2.170)$$

que nosotros utilizamos a lo largo del trabajo. Además, a fin de agilizar la notación, en vez del exponente μ_k introducimos, para cada $k = 1, 2$, el parámetro $\alpha_0^{(k)}$

$$\mu_k = \alpha_0^{(k)} - N/2. \quad (2.171)$$

Los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, N+1$) y coeficientes $a_s^{(k)}$ se determinan sustituyendo el segundo miembro de (2.166) y su segunda derivada en la ecuación canónica (2.147), (2.148) y teniendo en cuenta las formas polinómicas de $\chi_{a,k}(z)$, $\chi'_{a,k}(z)$, $\chi''_{a,k}(z)$. Así encontramos que los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ se obtienen resolviendo sucesivamente el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N+1-p} \alpha_{N+1-j}^{(k)} \alpha_{p+j}^{(k)} - g_{N-1+p} &= 0, \\ (p = N+1, N, N-1, \dots, 2, 1, 0), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.172)$$

de manera que verifican las relaciones de antisimetría

$$\alpha_p^{(1)} = -\alpha_p^{(2)}, \quad (p = 0, 1, \dots, N+1). \quad (2.173)$$

Los coeficientes $a_s^{(k)} \equiv a_s$ son soluciones de la recurrencia de orden $N+1$

$$\begin{aligned} -2\alpha_{N+1} s a_s + \sum_{j=0}^{N-1} [\tilde{\alpha}_{j-1} - 2\alpha_{j+1} (s - N + j)] a_{s-N+j} + \\ + [\tilde{\alpha}_{-2} + (s - N - 1) (s - 2\alpha_0)] a_{s-N-1} &= 0, \\ (s = 1, 2, 3, \dots), \quad (a_0 \neq 0), \end{aligned} \quad (2.174)$$

donde el sumatorio de índice j es nulo cuando $N = 0$; los parámetros $\tilde{\alpha}_j \equiv \tilde{\alpha}_j^{(k)}$ ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, N-2$) dependen de N , α_p , g_j :

$$\tilde{\alpha}_{-2} = -g_{-2} + (\alpha_0 - N/2) (\alpha_0 - N/2 - 1), \quad (2.175)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_j = -g_j - (N - j - 1) \alpha_{j+2} + \sum_{\sigma=0}^{j+2} \alpha_\sigma \alpha_{j+2-\sigma}, \\ (j = -1, 0, 1, 2, \dots, N-2). \end{aligned} \quad (2.176)$$

El comportamiento asintótico de las soluciones formales $u_{a,k}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ sobre un rayo $\arg z$ dado, depende obviamente del signo de la parte real del término $\alpha_{N+1}^{(k)} z^{N+1}/(N+1)$ que domina el exponente $\chi_{a,k}(z)$ en las formas asintóticas (2.166). De este modo, solamente la solución formal que verifica la condición

$$\Re(\alpha_{N+1}^{(k)} z^{N+1}) < 0, \quad (2.177)$$

tiene un comportamiento regular, decreciendo exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$, y convenimos en denominarla $u_{a,1}(z)$; la otra solución formal crece exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$ y la denominamos $u_{a,2}(z)$. Los parámetros $\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k$ ($k = 1, 2$) son no nulos porque son las dos raíces cuadradas del parámetro $g_{2N} \neq 0$ de la ecuación canónica:

$$\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k = (g_{2N})^{1/2} \neq 0, \quad (k = 1, 2), \quad (2.178)$$

según se deduce de la ecuación (2.172) correspondiente a $p = N + 1$. En las aplicaciones físicas del modelo, además de (2.178) se verifica que

$$\Re(\alpha_{N+1}^{(k)}) = \Re(\lambda_k) \neq 0, \quad (k = 1, 2), \quad (2.179)$$

de manera que la condición (2.177) y su contraria caracterizan respectivamente a las soluciones formales regular e irregular en el infinito. Nosotros admitimos en lo sucesivo que se verifica la condición (2.179).

2.4.4. Fórmulas de conexión, sectores de validez y rayos de Stokes

En la ecuación canónica (2.147), (2.148), el problema global o problema de conexión planteado en la sección 2.2 consiste en obtener las constantes $T_{k,p_k}^{\text{reg}}, T_{k,p_k}^{\text{irr}}$, denominadas *factores de conexión*, que definen en cada sector S_{k,p_k} del z -plano complejo la relación algebraica lineal entre el sistema fundamental de soluciones analíticas $\{u_{\text{reg}}, u_{\text{irr}}\}$ y el sistema fundamental de soluciones formales $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ de la ecuación, es decir,

$$\begin{aligned} u_{\text{reg}}(z) &= T_{1,p_1}^{\text{reg}} u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{\text{reg}} u_{a,2}(z), \\ u_{\text{irr}}(z) &= T_{1,p_1}^{\text{irr}} u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{\text{irr}} u_{a,2}(z), \\ (z \in S(p_1, p_2)), \quad (p_1, p_2 \in \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (2.180)$$

Las ecuaciones (2.180) son las *fórmulas de conexión* y los sectores $S(p_1, p_2)$ son los *sectores de validez de las fórmulas de conexión*; éstos son a su vez intersecciones no vacías de los sectores S_{k,p_k} o *sectores de validez de los factores de conexión* correspondientes a $k = 1, 2$, es decir,

$$S(p_1, p_2) = S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}, \quad (p_1, p_2 \in \mathbf{Z}), \quad (2.181)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{k,p_k} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}; \left| \arg(\lambda_k z^{N+1}) - 2\pi p_k \right| < \pi \right\}, \\ (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.182)$$

siendo $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)}$ (cfr. (2.170)); a partir de (2.182) se obtienen los rayos \vec{S}_{k,p_k} del z -plano complejo, denominados *rayos de Stokes*, que separan a los

sectores adyacentes S_{k,p_k} y S_{k,p_k+1} ,

$$\phi_{k,p_k} \equiv \arg(\vec{s}_{k,p_k}) = \frac{(2p_k + 1)\pi - \arg(\lambda_k)}{N + 1},$$

$$(p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (2.183)$$

y las amplitudes angulares $\Delta\phi_{k,p_k}$ de los sectores S_{k,p_k}

$$\Delta\phi_{k,p_k} = \frac{2\pi}{N + 1}, \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2). \quad (2.184)$$

Los factores de conexión dependen de los parámetros g_j ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, 2N$) de la ecuación canónica y de los sectores S_{k,p_k} . Cuando los valores de esos factores son conocidos, las fórmulas de conexión (2.180) constituyen las *soluciones globales*, mediante las cuales se obtienen valores muy precisos de las soluciones de la ecuación en el rango completo de valores de z contenidos en los sectores $S(p_1, p_2)$.

Según hemos indicado, en las aplicaciones físicas interesan de modo particular las *soluciones globales completamente regulares* de la ecuación canónica, caracterizadas por su comportamiento regular en los dos puntos singulares $z = 0$ y $z = \infty$. Representadas en la base $\{u_{\text{reg}}, u_{\text{irr}}\}$ de las soluciones analíticas, son funciones proporcionales a $u_{\text{reg}}(z)$ para acreditar la regularidad en el origen; además, la regularidad en el infinito exige que en la primera de las fórmulas de conexión (2.180) se anule la contribución divergente de la solución formal $u_{a,2}(z)$ irregular en el infinito, dando como resultado una solución analítica $u_{\text{reg}}(z)$ regular en el origen conectada con una solución formal $u_{a,1}(z)$ regular en el infinito. En consecuencia, debe anularse el factor T_{2,p_2}^{reg} que conecta a $u_{\text{reg}}(z)$ con $u_{a,2}(z)$ verificándose la denominada *condición de cuantización*

$$T_{2,p_2}^{\text{reg}}(g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, \dots, g_{2N}) = 0, \quad (p_2 \in \mathbf{Z}), \quad (2.185)$$

en algún sector S_{2,p_2} cuya intersección con algún sector S_{1,p_1} dé lugar a un sector $S(p_1, p_2)$ no vacío tal que contenga al rayo $\arg z$ de interés en el problema físico, usualmente el semieje real positivo $\arg z = 0$.

La condición (2.185) es satisfecha solamente por ciertos juegos de valores numéricos de los parámetros g_j ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, 2N$) que dependen de los parámetros l, m, A_j, E de la ecuación radial (2.145). No obstante, en la mayoría de las aplicaciones físicas, todos los parámetros de la ecuación radial a excepción de la energía E toman valores numéricos que se ajustan en base a consideraciones empíricas y teóricas, de manera que la ecuación representa un problema de valores propios que tiene a la energía como único parámetro espectral. El conjunto de valores numéricos de E que verifican la condición de cuantización es el *espectro de energías*; a esos valores propios corresponden soluciones globales completamente regulares de la ecuación canónica, las cuales representan a los estados físicamente aceptables que predice el modelo

en el sistema cuántico objeto de análisis.

Otro aspecto fundamental del problema de conexión también considerado en la sección 2.2 es que los factores T_{k,p_k} no solo dependen de los parámetros de la ecuación diferencial, también dependen de ciertos sectores de validez en el z -plano complejo definidos en (2.182) porque, a diferencia de las soluciones analíticas $\{u_{\text{reg}}, u_{\text{irr}}\}$, las soluciones formales $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ se caracterizan por sus formas asintóticas cuando $|z| \rightarrow +\infty$ en un rayo $\arg z$ arbitrario dado. Entonces, cuando $\arg z$ cambia de modo continuo, las soluciones formales $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$, una u otra o bien ambas, cambian al atravesar ciertos rayos, denominados *rayos de Stokes*, de manera que en el nuevo sector al otro lado de cada rayo, las nuevas soluciones formales tengan las mismas formas asintóticas (2.166) que en los otros sectores. El cambio sectorial de las soluciones formales a uno y otro lado de cada rayo de Stokes modifica en consecuencia de manera brusca los valores numéricos de los factores de conexión que representan la relación algebraica lineal entre ambos sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación canónica: este cambio brusco de los factores de conexión al atravesar los rayos de Stokes recibe el nombre de *fenómeno de Stokes*. Los valores de los factores de conexión en cada uno de sus rayos de Stokes se definen entonces iguales a la semisuma de los valores que toma el factor correspondiente en los dos sectores adyacentes separados por cada rayo, es decir

$$T_k(\vec{\mathfrak{S}}_{k,p_k}) = \frac{1}{2} (T_{k,p_k} + T_{k,p_k+1}), \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (2.186)$$

representa el valor del factor de conexión T_k^{reg} , o de T_k^{irr} en su caso, en el rayo de Stokes $\vec{\mathfrak{S}}_{k,p_k}$ que separa a los sectores adyacentes S_{k,p_k} y S_{k,p_k+1} .

En la mayoría de las aplicaciones físicas, la variable independiente z es real no negativa, los parámetros g_j ($j = -2, -1, 0, 1, \dots, 2N$) son reales y en particular g_{2N} es positivo, de manera que en las formas asintóticas (2.166) de las soluciones formales $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$, el parámetro $\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k$ toma valores iguales a las dos raíces cuadradas positiva y negativa de g_{2N} (cfr. (2.178)). Habida cuenta del convenio de notación introducido en (2.177), se tiene en esos casos

$$\begin{cases} \lambda_1 \equiv \alpha_{N+1}^{(1)} = -\sqrt{g_{2N}} < 0, \\ \lambda_2 \equiv \alpha_{N+1}^{(2)} = +\sqrt{g_{2N}} > 0, \end{cases} \quad (2.187)$$

es decir,

$$\begin{cases} \arg(\lambda_1) = \arg(\alpha_{N+1}^{(1)}) = \pm\pi, \\ \arg(\lambda_2) = \arg(\alpha_{N+1}^{(2)}) = 0. \end{cases} \quad (2.188)$$

Tomando por ejemplo $\arg(\lambda_1) = +\pi$ y haciendo $k = 1, p_1 = 0$ en (2.183) obtenemos

$$\phi_{1,0} \equiv \arg(\vec{\mathfrak{S}}_{1,0}) = 0, \quad (2.189)$$

es decir, el semieje real positivo $\arg z = 0$ es un rayo de Stokes en el cual cambia bruscamente el valor del factor de conexión T_1 ; los sectores separados por este rayo se obtienen haciendo sucesivamente $p_1 = 0$ y $p_1 = 1$ en (2.182):

$$\begin{cases} S_{1,0} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}; -\frac{2\pi}{N+1} < \arg z < 0 \right\}, \\ S_{1,1} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}; 0 < \arg z < \frac{2\pi}{N+1} \right\}. \end{cases} \quad (2.190)$$

Tomando ahora $k = 2$ y haciendo sucesivamente $p_2 = -1$, $p_2 = 0$ en (2.183) obtenemos los rayos de Stokes

$$\begin{cases} \phi_{2,-1} \equiv \arg(\vec{\mathbf{s}}_{2,-1}) = -\frac{\pi}{N+1}, \\ \phi_{2,0} \equiv \arg(\vec{\mathbf{s}}_{2,0}) = \frac{\pi}{N+1}, \end{cases} \quad (2.191)$$

en los cuales cambia bruscamente el valor del factor de conexión T_2 ; estos rayos delimitan el sector

$$S_{2,0} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}; -\frac{\pi}{N+1} < \arg z < \frac{\pi}{N+1} \right\}, \quad (2.192)$$

cuya bisectriz es el semieje real positivo. Por consiguiente, en la mayoría de las situaciones que tienen interés en las aplicaciones físicas, el semieje real positivo es un rayo de Stokes de las fórmulas de conexión (2.180) al atravesar el cual se produce un cambio brusco del factor de conexión T_1 , no de T_2 . En estos casos, siguiendo la prescripción (2.186), se define

$$T_1(\arg z = 0) = \frac{1}{2} (T_1^+ + T_1^-), \quad (2.193)$$

siendo

$$T_1^+ \equiv T_{1,0} \quad T_1^- \equiv T_{1,1} \quad (2.194)$$

los valores de T_1 en los sectores adyacentes $S_{1,0}$ y $S_{1,1}$ respectivamente. En las figuras 2.3 y 2.4 representamos los sectores de validez y rayos de Stokes de los factores de conexión en la primera hoja de Riemann del z -plano cuando $N = 2$.

2.4.5. Cálculo de los factores de conexión

El procedimiento elegido por nosotros para obtener los factores T_k parte de la idea siguiente: T_1 y T_2 son las soluciones del sistema lineal de ecuaciones formado por la primera fórmula de conexión (2.180) y su primera derivada respecto a z :

$$\begin{cases} u_{\text{reg}}(z) = T_1 u_{a,1}(z) + T_2 u_{a,2}(z), \\ u'_{\text{reg}}(z) = T_1 u'_{a,1}(z) + T_2 u'_{a,2}(z). \end{cases} \quad (2.195)$$

La teoría algebraica de estos sistemas de ecuaciones establece que las soluciones se expresan mediante la regla de Cramer

$$T_1 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,2}]}{\mathcal{W}[u_{a,1}, u_{a,2}]}, \quad T_2 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,1}]}{\mathcal{W}[u_{a,2}, u_{a,1}]}, \quad (2.196)$$

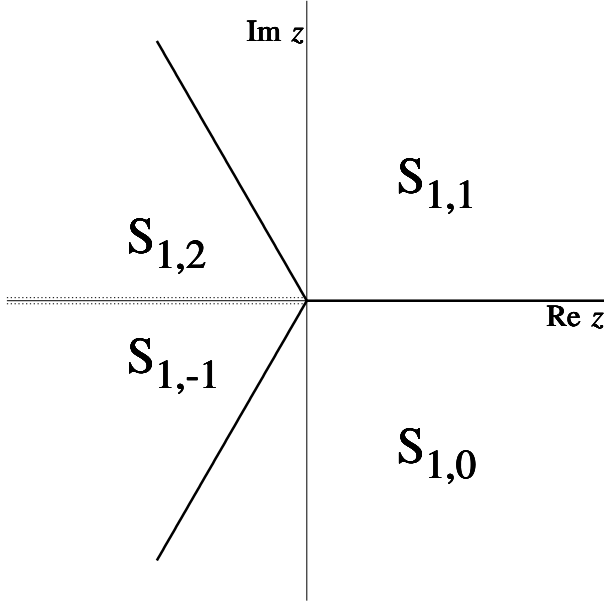


Figura 2.3: Sectores de validez S_{1,p_1} ($p_1 = -1, 0, 1, 2$) de los factores de conexión T_{1,p_1} en el caso $N = 2$ cuando el parámetro asintótico principal λ_1 es real negativo: $S_{1,-1}$: $-4\pi/3 < \arg(z) < -2\pi/3$, $S_{1,0}$: $-2\pi/3 < \arg(z) < 0$, $S_{1,1}$: $0 < \arg(z) < 2\pi/3$, $S_{1,2}$: $2\pi/3 < \arg(z) < 4\pi/3$. Los sectores cubren la primera hoja de Riemann y los rayos de Stokes que los separan corresponden a valores $-2\pi/3, 0, 2\pi/3$ de $\arg z$. La mitad de cada sector $S_{1,-1}$, $S_{1,2}$ pertenece a las hojas inferior y superior respectivamente.

donde, para todo par ordenado (u, v) de funciones derivables en una región del z -plano complejo,

$$\mathcal{W}[u, v] \equiv uv' - u'v = -\mathcal{W}[v, u] \quad (2.197)$$

representa al Wronskiano de las funciones (u, v) . De este modo, el problema global se resuelve mediante el cálculo de los Wronskianos que aparecen en los numeradores y denominadores de (2.196). Los valores de estos Wronskianos son constantes, al no haber en la ecuación canónica I término en la primera derivada.

Los Wronskianos en los denominadores de (2.196) son además constantes no nulas porque $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación canónica (2.147), es decir, se verifica la condición

$$\mathcal{W}[u_{a,1}, u_{a,2}] = -\mathcal{W}[u_{a,2}, u_{a,1}] \neq 0, \quad (2.198)$$

que asegura la compatibilidad del sistema (2.195). La *condición de cuantización* (2.185) se reescribe ahora teniendo en cuenta la expresión (2.196) del factor T_2 :

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,1}] = 0. \quad (2.199)$$

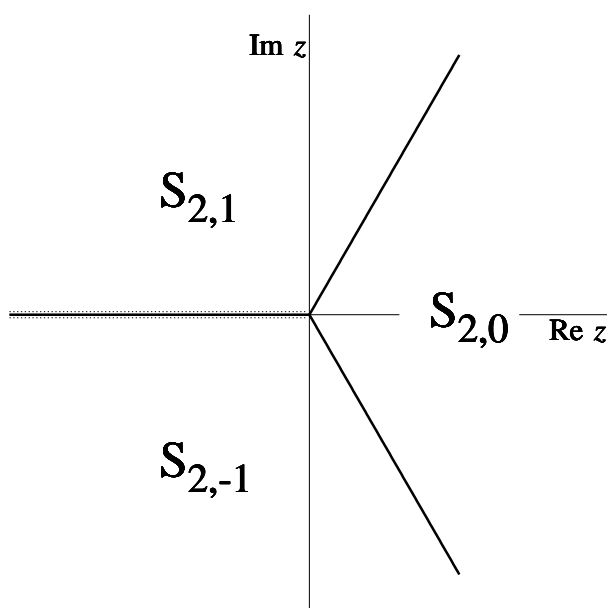


Figura 2.4: Sectores de validez S_{2,p_2} ($p_2 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{2,p_2} en el caso $N = 2$ cuando λ_2 es real positivo: $S_{2,-1}$: $-\pi < \arg(z) < -\pi/3$, $S_{2,0}$: $-\pi/3 < \arg(z) < \pi/3$, $S_{2,1}$: $\pi/3 < \arg(z) < \pi$. Los tres sectores cubren la primera hoja de Riemann y los rayos de Stokes que los separan corresponden a valores $-\pi/3, \pi/3$, de $\arg z$.

Los Wronskianos en los denominadores de (2.196) se obtienen sustituyendo las formas asintóticas (2.166) de $u_{a,1}(z)$, $u_{a,2}(z)$ y sus derivadas en la expresión general (2.197); las expansiones resultantes contienen solamente potencias de z de exponentes no positivos, de manera que los Wronskianos son iguales a los términos en z^0 :

$$\mathcal{W}[u_{a,1}, u_{a,2}] = 2 \alpha_{N+1}^{(2)} a_0^{(1)} a_0^{(2)} \equiv 2 \lambda_2 a_0^{(1)} a_0^{(2)}, \quad (2.200)$$

siendo $\mathcal{W}[u_{a,2}, u_{a,1}]$ el opuesto de $\mathcal{W}[u_{a,1}, u_{a,2}]$.

Es posible obtener desarrollos formales de los Wronskianos de $(u_{\text{reg}}, u_{a,k})$ ($k = 1, 2$) en los numeradores de (2.196) directamente, sustituyendo las expansiones (2.164) de $u_{\text{reg}}(z)$, (2.166) de $u_{a,k}(z)$ y las expansiones de sus derivadas en la expresión general (2.197). Sin embargo, la determinación de los valores de tales Wronskianos a partir de aquellos desarrollos no es un problema tan sencillo como en el caso de los Wronskianos (2.200) de las soluciones formales $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ porque, a diferencia de éstos, los desarrollos formales de $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]$ contienen potencias de z de exponentes enteros positivos y negativos.

Para determinar los valores de $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]$ ($k = 1, 2$) introducimos las *funciones auxiliares* $v_{\text{reg},k}(z)$, $v_{a,k}(z)$ mediante sendas relaciones con $u_{\text{reg}}(z)$,

$u_{a,k}(z)$:

$$v_{\text{reg},k}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}\right) u_{\text{reg}}(z), \quad (k = 1, 2), \quad (2.201)$$

$$v_{a,k}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}\right) u_{a,k}(z), \quad (k = 1, 2), \quad (2.202)$$

donde $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)}$.

La relación entre el Wronskiano de las funciones auxiliares

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] = v_{\text{reg},k} v'_{a,k} - v'_{\text{reg},k} v_{a,k}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.203)$$

y el Wronskiano de $(u_{\text{reg}}, u_{a,k})$ desempeña un papel fundamental en nuestro método de cálculo de los factores de conexión T_k ; la relación entre ambos Wronskianos se obtiene reemplazando (2.201), (2.202) y sus derivadas en el segundo miembro de (2.203) (véase la nota 14):

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}], \quad (k = 1, 2), \quad (2.204)$$

donde $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]$ es constante para cada $k = 1, 2$, toda vez que $u_{\text{reg}}, u_{a,k}$ son soluciones de la ecuación canónica (2.147), (2.148).

La etapa inicial de nuestro método consiste en obtener un primer desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares en potencias de la variable independiente z , y comprende varias fases. En primer lugar, obtenemos la forma asintótica de $v_{a,k}(z)$ sustituyendo en (2.202) la forma asintótica (2.166) de $u_{a,k}(z)$ y teniendo en cuenta la forma polinómica (2.167) de $\chi_{a,k}(z)$:

$$v_{a,k}(z) \sim \exp\left(\hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) \mathcal{S}_{a,k}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (k = 1, 2), \quad (2.205)$$

siendo

$$\hat{\zeta}_{a,k}(z) = \zeta_{a,k}(z) + \frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.206)$$

$$\zeta_{a,k}(z) = \chi_{a,k}(z) - \frac{\alpha_{N+1}^{(k)}}{N+1} z^{N+1} = \sum_{p=1}^N \frac{\alpha_p^{(k)}}{p} z^p, \quad (k = 1, 2), \quad (2.207)$$

donde el sumatorio en (2.207) es nulo cuando $N = 0$.

En segundo lugar, obtenemos una expresión asintótica del Wronskiano de las funciones auxiliares en términos de una única función $w_{\text{reg},k}$ sustituyendo en la forma exacta (2.203) del Wronskiano las expresiones (2.201) de $v_{\text{reg},k}(z)$, (2.205) de $v_{a,k}(z)$ y sus derivadas (véase la nota 15):

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] \sim & \left(2\hat{\zeta}'_{a,k}(z) w_{\text{reg}}(z) - w'_{\text{reg},k}(z)\right) \mathcal{S}_{a,k}(z) + \\ & + w_{\text{reg},k}(z) \mathcal{S}'_{a,k}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.208)$$

donde

$$w_{\text{reg},k}(z) = \exp\left(\hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) v_{\text{reg},k}(z), \quad (k = 1, 2), \quad (2.209)$$

es decir, habida cuenta de (2.201),

$$w_{\text{reg},k}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) u_{\text{reg}}(z), \quad (k = 1, 2). \quad (2.210)$$

En tercer lugar, obtenemos un desarrollo de $w_{\text{reg},k}(z)$ en potencias ascendentes de z . La ecuación diferencial verificada por esta función es una herramienta adecuada para llegar a tal desarrollo y se obtiene introduciendo en la ecuación canónica (2.147), (2.148) el cambio funcional inspirado en (2.210)

$$\begin{aligned} u &\longrightarrow w, \\ u(z) &= \exp\left(\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1} - \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) w(z), \\ &\quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.211)$$

que transforma a la ecuación canónica en

$$w'' + \left(\sum_{j=0}^N \hat{\rho}_{a,j}^{(k)} z^j\right) w' + \left(\sum_{j=-2}^{2N} \hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} z^j\right) w = 0, \quad (k = 1, 2), \quad (2.212)$$

donde para cada $k = 1, 2$ los parámetros $\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)}$ son funciones de los parámetros g_j de la ecuación canónica (2.147), (2.148) y de los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ que caracterizan el comportamiento asintótico de sus soluciones formales (2.166), (2.167) (véase la nota 16).

Introduciendo en la ecuación (2.212) el desarrollo

$$w_{\text{reg},k}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^{(k)} z^{n+\nu_k}, \quad (b_0^{(k)} \neq 0), \quad (k = 1, 2), \quad (2.213)$$

encontramos los valores del exponente ν_k

$$\nu_k = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4g_{-2}}\right), \quad (k = 1, 2), \quad (2.214)$$

entre los cuales distinguimos adoptando el criterio de asignación de los índices $k = 1, 2$

$$\Re(\nu_1) \geq 0, \quad (2.215)$$

de manera que (ν_1, ν_2) coinciden respectivamente con (ρ_1, ρ_2) (cfr. (2.161)). Obtenemos asimismo para cada $k = 1, 2$ la recurrencia de orden $2N + 2$

verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$:

$$\begin{aligned} n(n+2\nu_k-1)b_n^{(k)} + \sum_{j=0}^N [\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}(n-j-1+\nu_k) + \hat{\varepsilon}_{a,j-1}^{(k)}] b_{n-j-1}^{(k)} + \\ + \sum_{j=N+1}^{2N+1} \hat{\varepsilon}_{a,j-1}^{(k)} b_{n-j-1}^{(k)} = 0, \quad (n=0,1,2,\dots), \quad (b_0^{(k)} \neq 0). \end{aligned} \quad (2.216)$$

Finalmente sustituimos en la expresión asintótica (2.208) la forma polinómica de $\zeta'_{a,k}(z)$ obtenida de (2.206), (2.207), el desarrollo (2.213) de $w_{reg,k}(z)$ y el de su derivada, así como la expansión (2.166) de $\mathcal{S}_{a,k}(z)$ y la de su derivada $\mathcal{S}'_{a,k}(z)$; el cálculo subsiguiente da como resultado un desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares en potencias ascendentes y descendentes de z :

$$\mathcal{W}[v_{reg,k}, v_{a,k}] \sim \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} z^{\hat{n}+\nu_k+\mu_k-1}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (k=1,2), \quad (2.217)$$

cuyos coeficientes $\gamma_{a,\hat{n}}^{(k)}$ se expresan mediante series

$$\gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\omega}_{a,j}^{(\hat{n},k)}, \quad (\hat{n}=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (k=1,2), \quad (2.218)$$

donde para cada $k=1,2$ y para todo $N=0,1,2,\dots$ se tiene

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_{a,j}^{(\hat{n},k)} \equiv a_j^{(k)} \left(-(\hat{n}+2j+\nu_k-\mu_k) b_{\hat{n}+j}^{(k)} + \sum_{p=1}^N 2\alpha_p^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)} + \lambda_k b_{\hat{n}-N-1+j}^{(k)} \right), \\ (\hat{n}=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (j=0,1,2,\dots) \end{aligned} \quad (2.219)$$

siendo nulo el sumatorio de índice p cuando $N=0$.

La validez de nuestro método de cálculo de los factores de conexión depende de la convergencia de las series (2.218), cuyos términos generales se dan en (2.219). A fin de simplificar el estudio de la convergencia de tales series, introducimos para cada $k=1,2$ las series parciales

$$\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)}, \quad (p=0,1,\dots,N+1), \quad (\hat{n}=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.220)$$

$$Q_{\hat{n}}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} j a_j^{(k)} b_{\hat{n}+j}^{(k)}, \quad (\hat{n}=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (2.221)$$

en función de las cuales reescribimos la expresión (2.218)

$$\begin{aligned} \gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} = -2Q_{\hat{n}}^{(a,k)} - (\hat{n}+\nu_k-\mu_k) \Omega_{\hat{n},0}^{(a,k)} + 2 \sum_{p=1}^N \alpha_p^{(k)} \Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} + \lambda_k \Omega_{\hat{n},N+1}^{(a,k)}, \\ (\hat{n}=0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad (k=1,2), \end{aligned} \quad (2.222)$$

de manera que la convergencia de las series que definen a $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$ asegura la convergencia de las series (2.218) que definen a $\gamma_{a,\hat{n}}^k$. Este problema será investigado con detalle en el apéndice A.

La segunda etapa de nuestro método consiste en obtener un desarrollo formal, en potencias ascendentes y descendentes de z , del segundo miembro de la relación exacta (2.204), y comparar tal desarrollo con el segundo miembro de (2.217). A tal fin, la función exponencial en el segundo miembro de (2.204) se desarrolla en serie exponencial de Heaviside (cfr. (2.111), (2.112))

$$\exp(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (|\arg(t)| < \pi),$$

$$(t, \delta \in \mathbf{C}), \quad (2.223)$$

cuyo carácter asintótico demostró Barnes [8]. Esta serie desempeña un papel fundamental en el tratamiento del problema de conexión que hace F. Naundorf [43], el cual inspira nuestro método.

Dado un valor de $N = 0, 1, 2, \dots$, el cambio de la variable t por la variable independiente z de la ecuación canónica

$$t \longrightarrow z, \quad t = -\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.224)$$

hace depender a z de la raíz de índice $(N+1)$ de t . Debido al carácter multivaluado de esta función, para cada $k = 1, 2$ introducimos los $N+1$ desarrollos formales de Heaviside en la variable z

$$\mathcal{E}_{a,L}^k(z) \equiv \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(-\lambda_k z^{N+1}/(N+1)\right)^{n+\delta_L^{(a,k)}}}{\Gamma(n+1+\delta_L^k)}, \quad \left|\arg\left(-\lambda_k z^{N+1}\right)\right| < \pi,$$

$$(z, \delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}), \quad (L = 0, 1, \dots, N). \quad (2.225)$$

Las expresiones (2.196) de los factores de conexión admiten la notación abreviada

$$T_{\tilde{k}} = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]}{\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}]}, \quad (z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.226)$$

donde (cfr. (2.182))

$$S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} = \left\{ z \in \mathbf{C}; \left| \arg\left(\lambda_{\tilde{k}} z^{N+1}\right) - 2\pi p_{\tilde{k}} \right| < \pi \right\}, \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}),$$

$$(2.227)$$

siendo

$$\tilde{k} \equiv k + (-1)^{k-1}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.228)$$

de manera que $\tilde{k} = 2$ si $k = 1$ y $\tilde{k} = 1$ si $k = 2$; de este modo, las relaciones de antisimetría (2.173) se reescriben

$$\alpha_p^{\tilde{k}} = -\alpha_p^k, \quad (p = 0, 1, \dots, N+1), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.229)$$

Entonces, habida cuenta de (2.229) y (2.178), en (2.225) se tiene

$$\left| \arg \left(-\lambda_k z^{N+1} \right) \right| = \left| \arg \left(\lambda_{\tilde{k}} z^{N+1} \right) \right|, \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.230)$$

y en consecuencia el sector de validez de los desarrollos formales (2.225) coincide con $S_{\tilde{k},0}^-$. Además, teniendo en cuenta el carácter asintótico de tales desarrollos, encontramos que en $S_{\tilde{k},0}^-$ se verifican las $N+1$ relaciones asintóticas

$$\exp \left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1} \right) \sim \mathcal{E}_{a,L}^k(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0}^- \subset \mathbf{C}), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.231)$$

Consideremos el segundo desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares en el sector

$$S_{\tilde{k},0}^- = \left\{ z \in \mathbf{C}; \left| \arg \left(\lambda_{\tilde{k}} z^{N+1} \right) \right| < \pi \right\}, \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.232)$$

que se obtiene a partir de (2.225) y (2.231). Aunque estas expresiones no son válidas fuera del sector $S_{\tilde{k},0}^-$, se extienden sin dificultad a cualquier sector $S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}}^-$ mediante un cambio de la variable independiente z (véase la nota 17).

Una consecuencia inmediata de (2.231) es que para cada $k = 1, 2$ y $p_k \in \mathbf{Z}$, dado un conjunto de $N+1$ constantes complejas no nulas

$$\left\{ \beta_{a,L}^k; L = 0, 1, \dots, N \right\}, \quad (k = 1, 2), \quad (2.233)$$

la combinación lineal de los desarrollos (2.225) definida en cada sector $S_{\tilde{k}}^-$ por esas constantes, i.e.

$$\Lambda_{a,N}^k(z) \equiv \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^k \mathcal{E}_{a,L}^k(z), \quad (z \in S_{\tilde{k},0}^- \subset \mathbf{C}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.234)$$

es proporcional asintóticamente a la exponencial en el primer miembro de (2.231), es decir,

$$\Lambda_{a,N}^k(z) \sim \exp \left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1} \right) \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^k, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0}^- \subset \mathbf{C}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.235)$$

Comparando (2.234), (2.235) con (2.204) encontramos que si las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$ verifican

$$\sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} = \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}], \quad (k = 1, 2), \quad (2.236)$$

entonces el Wronskiano de las funciones auxiliares en el primer miembro de (2.204) verifica la relación asintótica

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] &\sim \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0} \subset \mathbf{C}), \\ &(k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \end{aligned} \quad (2.237)$$

El cálculo de los Wronskianos $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]$ en los numeradores de las expresiones (2.226) de los factores $T_{\tilde{k}}$ se reduce en (2.236) al problema de encontrar los valores de las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$. Para obtener esas constantes, así como las $\delta_L^{(a,k)}$ y la relación entre índices \hat{n} , n , sustituimos en el segundo miembro de (2.237) los desarrollos formales (2.225): el resultado es un nuevo desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares $v_{\text{reg},k}$, $v_{a,k}$ en potencias ascendentes y descendentes de la variable z :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] &\sim \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^N \left(\frac{\beta_{a,L}^{(k)}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(a,k)})} \right) \left(\frac{-\lambda_k}{N+1} \right)^{n+\delta_L^{(a,k)}} z^{(N+1)(n+\delta_L^{(a,k)})}, \\ &(z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0} \subset \mathbf{C}), \\ &(\delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \end{aligned} \quad (2.238)$$

Este desarrollo se compara con el primer desarrollo (2.217) (véase la nota 18), dando lugar a las expresiones de las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$

$$\begin{aligned} \beta_{a,L}^{(k)} &\equiv \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}}, \quad (n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \\ &(L = 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (2.239)$$

donde n toma cualquier valor entero y \hat{n}_L , $\delta_L^{(a,k)}$ se dan en (2.242), (2.243) para cada $L = 0, 1, \dots, N$.

2.5. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GLOBAL POR EL MÉTODO DE LOS WRONSKIANOS (II). ECUACIÓN

Conocidas las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$, los Wronskianos en los numeradores de (2.226) se obtienen aplicando (2.236), de donde resulta la forma explícita de la condición de cuantización (2.199):

$$\sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(1)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(a,1)})}{(-\lambda_1/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,1)}}} = 0, \quad (n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}). \quad (2.240)$$

Asimismo, teniendo en cuenta las expresiones (2.200) de los Wronskianos en los denominadores de (2.226), se obtienen las fórmulas explícitas de los factores de conexión para la solución regular u_{reg} en un sector $S_{\tilde{k},0}$

$$T_{\tilde{k}} \equiv T_{\tilde{k},0} = \frac{1}{2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})}} \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}}, \quad (n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1), \quad (2.241)$$

donde

$$\hat{n} = \hat{n}_L = (N+1)n + L + 1, \quad (n, \hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (L=0,1,\dots,N), \quad (2.242)$$

$$\delta_L^{(a,k)} = \frac{\nu_k + \mu_k + L}{N+1}, \quad (k=1,2), \quad (L=0,1,\dots,N). \quad (2.243)$$

2.5. Resolución del problema global por el método de los Wronskianos (II). Ecuación con dos puntos singulares irregulares

En esta sección nuestro interés se centra en elaborar una versión más general del método de los Wronskianos que sea aplicable a una ecuación de Schrödinger con dos puntos singulares en el origen y el infinito, ambos irregulares. Este caso se plantea cuando el potencial de la ecuación de Schrödinger consiste en una suma de potencias de r con términos más singulares en el origen que el término coulombiano A_{-1}/r al que denominamos *potencial suma de potencias*. Para esta clase de potenciales no existen en la vecindad del origen soluciones analíticas de la ecuación diferencial como las consideradas en la sección precedente. En vez de ellas, existe un sistema de soluciones multiplicativas de Floquet (2.101) representadas por series de potencias cuyos exponentes difieren en números enteros positivos y negativos de sendos exponentes característicos, en general complejos. En lo que respecta a las soluciones formales, además del sistema (2.103) de soluciones formales de Thomé en la vecindad del infinito (soluciones formales de clase (a)), dadas por series asintóticas de potencias descendentes que representan desarrollos

asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$, existe un segundo sistema de soluciones de Thomé en la vecindad del origen (soluciones formales de clase (b)) dadas por series de potencias ascendentes de la variable independiente que representan desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow 0$ donde z^{-1} desempeña un papel semejante al de la variable z en (2.103). El problema es ahora conectar las soluciones multiplicativas con uno y otro sistema de soluciones de Thomé de la ecuación diferencial aplicando sucesivamente el método de los Wronskianos a las fórmulas de conexión de clases (a) y (b) entre las soluciones multiplicativas y las soluciones formales de clases (a) y (b) respectivamente.

2.5.1. Ecuación canónica

Consideramos la ecuación radial de Schrödinger (2.145) con un potencial suma de potencias de grado mínimo $\tilde{\mu} < -1$ y grado máximo $\tilde{\nu} \geq \tilde{\mu}$

$$V(r) = \sum_{j=\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}} \tilde{A}_j r^j, \quad (\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu}), \quad (\tilde{A}_{\tilde{\mu}} \neq 0), \quad (\tilde{A}_{\tilde{\nu}} \neq 0), \quad (2.244)$$

de manera que al incorporar el término centrífugo $l(l+1)\hbar^2/2mr^2$ se obtiene el potencial efectivo

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}. \quad (2.245)$$

La ecuación radial de Schrödinger (2.145) con el potencial efectivo (2.245) se conecta mediante cambios adecuados de variables y parámetros con una ecuación diferencial lineal de segundo orden cuyas variables y parámetros son adimensionales (véase la nota 19). La ecuación transformada es la ecuación canónica correspondiente a la ecuación de Schrödinger con un potencial suma de potencias, a la que por brevedad denominamos *ecuación canónica (II)*:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - g(z) u = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (2.246)$$

siendo ahora

$$g(z) = \sum_{j=2M}^{2N} g_j z^j, \quad (g_{2M} \neq 0), \quad (g_{2N} \neq 0), \quad (2.247)$$

donde los coeficientes g_j son funciones de los parámetros de la ecuación radial \tilde{A}_j , l , E y del parámetro κ , con dimensiones de longitud, de proporcionalidad entre la variable independiente radial r y la variable independiente adimensional z de la ecuación canónica (véase la nota 19).

La ecuación canónica (2.147), (2.148), donde el origen es una singularidad regular y el infinito una singularidad irregular, corresponde al valor

particular $M = -1$ en la ecuación canónica actual (2.246), (2.247). Procediendo como en la sección 2.4 (cfr. (2.151) a (2.158)) establecemos (ver nota 19) que los rangos de las singularidades en el infinito y en el origen de la ecuación canónica (II) son $N + 1$ y $-M - 1$ respectivamente ($N = 0, 1, 2, \dots$), ($M = -1, -2, -3, \dots$). Nuestro interés se centra ahora en los valores $M = -2, -3, -4, \dots$ para los cuales ambas singularidades son irregulares y la ecuación canónica responde a la forma general de una ecuación diferencial lineal de segundo orden (cfr. (2.149))

$$u''(z) + p(z)u'(z) + q(z)u(z) = 0, \quad (2.248)$$

donde en vez de (2.150) ahora se tiene

$$p(z) = 0, \quad q(z) = -g(z) = -\sum_{j=2M}^{2N} g_j z^j. \quad (2.249)$$

2.5.2. Soluciones multiplicativas y formales de la ecuación canónica

Excepto para conjuntos particulares de valores de los parámetros g_j , la ecuación canónica (2.246), (2.247) admite dos soluciones independientes de la forma (2.101)

$$u_\eta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho_\eta}, \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.250)$$

para valores adecuados de $\rho_\eta \in \mathbf{C}$. Estas funciones, cuyas expansiones guardan semejanza con las series de Laurent que representan a las funciones analíticas en una vecindad anular del origen, reciben el nombre de *soluciones multiplicativas* de la ecuación canónica, i.e. soluciones que resultan multiplicadas por un factor constante λ_η cuando se realiza un circuito completo en el z -plano complejo en sentido antihorario alrededor de la singularidad $z = 0$.

La sustitución de (2.250) y su segunda derivada en la ecuación canónica (2.246), (2.247) nos lleva a establecer la recurrencia verificada por los coeficientes $c_n \equiv c_{n,\eta}$ para cada $\eta = 1, 2$:

$$(n + \rho)(n + \rho - 1)c_n + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2} = 0, \\ (n \in \mathbf{Z}), \quad (g_{2M} \neq 0), \quad (g_{2N} \neq 0). \quad (2.251)$$

En el caso actual, donde $M = -2, -3, -4, \dots$ y la singularidad del origen es irregular, la determinación de los exponentes ρ_1, ρ_2 y de los coeficientes $c_{n,1}, c_{n,2}$ en las expansiones (2.250) de las soluciones multiplicativas es un problema más complicado que el correspondiente a las expansiones (2.159)

de las soluciones analíticas en el caso $M = -1$, cuando la singularidad del origen es regular. Consideramos este problema en el apéndice B.

Además de las soluciones multiplicativas (2.250), la ecuación canónica (II) (2.246) admite dos sistemas fundamentales de soluciones formales. En el primero, las soluciones $u_{a,k}(z)$ ($k = 1, 2$) están representadas por desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$ y nos referimos a ellas como *soluciones formales de clase (a)*. En el segundo sistema, las soluciones $u_{b,\tau}(z)$ ($\tau = 3, 4$) están representadas por desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow 0$ y nos referimos a ellas como *soluciones formales de clase (b)*.

El sistema fundamental de soluciones formales de clase (a) se caracteriza por formas asintóticas cuando $z \rightarrow \infty$ semejantes a las formas asintóticas (2.166) que caracterizan a las soluciones formales de la ecuación canónica (I) (2.147), (2.148) en el problema de conexión regular-irregular (caso $M = -1$) estudiado en la sección precedente:

$$\begin{aligned} u_{a,k}(z) &\sim \exp(\chi_{a,k}(z)) \mathcal{S}_{a,k}(z), & (z \rightarrow \infty), \\ \mathcal{S}_{a,k}(z) &= \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{(k)} z^{-s+\mu_k}, & (a_0^{(k)} \neq 0), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.252)$$

donde para cada $N = 0, 1, 2, \dots$ y $k = 1, 2$,

$$\chi_{a,k}(z) = \sum_{p=1}^{N+1} \frac{\alpha_p^{(k)}}{p} z^p, \quad (\alpha_{N+1}^{(k)} \neq 0), \quad (2.253)$$

es un polinomio en z cuyo grado $N + 1$ coincide con el rango de Poincaré de la singularidad en el infinito de la ecuación canónica. En lugar de $\alpha_{N+1}^{(k)}$, μ_k pueden utilizarse los parámetros λ_k , $\alpha_0^{(k)}$

$$\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)}, \quad \alpha_0^{(k)} \equiv \mu_k + \frac{N}{2}. \quad (2.254)$$

Introduciendo la función

$$\xi_{a,k}(z) = \chi_{a,k}(z) + \mu_k \ln z = \chi_{a,k}(z) + \left(\alpha_0^{(k)} - \frac{N}{2} \right) \ln z, \quad (2.255)$$

las formas asintóticas (2.252) adquieren la expresión

$$u_{a,k}(z) \sim \exp(\xi_{a,k}(z)) \sum_{s=0}^{+\infty} a_s^{(k)} z^{-s}, \quad (z \rightarrow \infty). \quad (2.256)$$

Los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ ($p = 0, 1, \dots, N + 1$) y los coeficientes $a_s^{(k)}$ se determinan, como en el caso $M = -1$, sustituyendo el segundo miembro de (2.252) y su segunda derivada en la ecuación canónica (2.246), (2.247), y teniendo en cuenta las formas polinómicas de $\chi_{a,k}(z)$ y de sus derivadas $\chi'_{a,k}(z)$,

$\chi''_{a,k}(z)$. Los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ son entonces, para cada $k = 1, 2$, las soluciones del sistema recurrente de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{N+1-p} \alpha_{N+1-j}^{(k)} \alpha_{p+j}^{(k)} - g_{N-1+p} = 0, \quad (p = N+1, N, \dots, 2, 1, 0), \quad (2.257)$$

de donde se obtienen las relaciones de antisimetría

$$\alpha_p^{(1)} = -\alpha_p^{(2)}, \quad (p = 0, 1, \dots, N+1). \quad (2.258)$$

Los coeficientes $a_s^{(k)}$ verifican la recurrencia de orden $N - 2M - 1$

$$\begin{aligned} -2\alpha_{N+1}^{(k)} s a_s^{(k)} + \sum_{j=0}^{N-1} [\tilde{\alpha}_{j-1}^{(k)} - 2\alpha_{j+1}^{(k)}(s - N + j)] a_{s+j-N}^{(k)} + \\ + [\tilde{\alpha}_{-2}^{(k)} + (s - N - 1)(s - 2\alpha_0^{(k)})] a_{s-N-1}^{(k)} + \\ + \sum_{j=2M+1}^{-2} -g_{j-1} a_{s+j-N}^{(k)} = 0, \\ (s = 1, 2, 3, \dots), \quad (a_0^{(k)} \neq 0), \quad (2.259) \end{aligned}$$

donde los sumatorios de índice j se anulan cuando el índice superior es menor que el índice inferior, es decir, cuando $N = 0$ en el primer sumatorio y $M = -1$ en el segundo sumatorio. Para este valor de M la recurrencia (2.259) adopta la forma (2.174). Los parámetros $\tilde{\alpha}_j^{(k)}$ son las funciones de $\alpha_j^{(k)}$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{-2}^{(k)} &= -g_{-2} + (\alpha_0^{(k)} - N/2) (\alpha_0^{(k)} - N/2 - 1), \\ \tilde{\alpha}_j^{(k)} &= -g_j - (N - j - 1) \alpha_{j+2}^{(k)} + \sum_{\sigma=0}^{j+2} \alpha_\sigma^{(k)} \alpha_{j+2-\sigma}^{(k)}, \\ &(j = -1, 0, 1, \dots, N-2). \quad (2.260) \end{aligned}$$

El comportamiento asintótico de las soluciones formales de clase (a) cuando $z \rightarrow \infty$ sobre un rayo $\arg(z)$ dado es semejante al de las soluciones formales (2.166) del problema de conexión regular-irregular. El comportamiento asintótico de $u_{a,k}(z)$ depende como entonces del signo de la parte real del término $\alpha_{N+1}^{(k)} z^{N+1}/(N+1) \equiv \lambda_k z^{N+1}/(N+1)$ sobre el rayo considerado. Este término domina el exponente $\chi_{a,k}(z)$ en las formas asintóticas (2.252) características de estas soluciones, de manera que la solución formal de clase (a) que verifica la condición

$$\Re(\alpha_{N+1}^{(k)} z^{N+1}) = \Re(\lambda_k z^{N+1}) < 0 \quad (2.261)$$

tiene un comportamiento regular, decreciendo exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$. Siguiendo el criterio establecido en el caso $M = -1$, convenimos en

denominar $u_{a,1}(z)$ a la solución formal de clase (a) que verifica la condición (2.261) sobre el rayo considerado. La otra solución formal de clase (a), i.e. $u_{a,2}(z)$, es irregular porque verifica la condición contraria a (2.261), creciendo exponencialmente cuando $z \rightarrow \infty$ sobre aquellos rayos en los que $u_{a,1}(z)$ decrece, toda vez que en el sistema recurrente (2.257) la ecuación de orden $p = N + 1$ expresa que $\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k$ es igual a la raíz cuadrada del parámetro no nulo g_{2N} :

$$\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k = (g_{2N})^{1/2}. \quad (2.262)$$

Las soluciones formales de clase (b) de la ecuación canónica (2.246), (2.247) se caracterizan por unas formas asintóticas cuando $z \rightarrow 0$ que, respecto de la variable inversa z^{-1} , son semejantes a las formas asintóticas de las soluciones formales de clase (a) cuando $z \rightarrow \infty$:

$$u_{b,\tau}(z) \sim \exp(\chi_{b,\tau}(z)) \mathcal{S}_{b,\tau}(z), \quad (z \rightarrow 0),$$

$$\mathcal{S}_{b,\tau}(z) = \sum_{s=0}^{+\infty} \hat{a}_s^{(\tau)} z^{s+\mu_\tau}, \quad (\hat{a}_0^{(\tau)} \neq 0), \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.263)$$

donde, para cada $M = -2, -3, -4, \dots$ y $\tau = 3, 4$,

$$\chi_{b,\tau}(z) = \sum_{q=1}^{-M-1} \frac{\beta_q^{(\tau)}}{q} z^{-q}, \quad (2.264)$$

es un polinomio en z^{-1} cuyo grado $Q = -M - 1$ coincide con el rango de Poincaré de la singularidad del origen. Si introducimos la función

$$\xi_{b,\tau}(z) = \chi_{b,\tau}(z) + \mu_\tau \ln z, \quad (2.265)$$

donde en vez de μ_τ puede utilizarse el parámetro $\beta_0^{(\tau)}$ dado por

$$\beta_0^{(\tau)} = -\mu_\tau - \frac{M}{2}, \quad (2.266)$$

las formas asintóticas (2.263) se expresan

$$u_{b,\tau}(z) \sim \exp(\xi_{b,\tau}(z)) \sum_{s=0}^{+\infty} \hat{a}_s^{(\tau)} z^s, \quad (z \rightarrow 0), \quad (\hat{a}_0^{(\tau)} \neq 0). \quad (2.267)$$

Los parámetros $\beta_q^{(\tau)}$ ($q = 0, 1, \dots, -M - 1$) y los coeficientes $\hat{a}_s^{(\tau)}$ se determinan sustituyendo el segundo miembro de (2.263) y su segunda derivada en la ecuación canónica (2.246), (2.247) y teniendo en cuenta las formas

polinómicas de $\chi_{b,\tau}(z)$ y de sus derivadas $\chi'_{b,\tau}(z)$, $\chi''_{b,\tau}(z)$. De este modo encontramos que para cada $\tau = 3, 4$ los parámetros β_q^τ son las soluciones del sistema recurrente de ecuaciones

$$\sum_{j=0}^{-M-1-q} \beta_{-M-1-j}^\tau \beta_{j+q}^\tau - g_{M-1-q} = 0, \quad (q = -M-1, -M-2, \dots, 2, 1, 0), \quad (2.268)$$

de donde se obtienen las relaciones de antisimetría

$$\beta_q^3 = -\beta_q^4, \quad (q = 0, 1, \dots, -M-1). \quad (2.269)$$

Los coeficientes \hat{a}_s^τ verifican a su vez la recurrencia de orden $2N - M + 1$

$$\begin{aligned} & -2\beta_{-M-1}^\tau s \hat{a}_s^\tau + \sum_{j=M+1}^{-2} [\tilde{\beta}_{j-1}^\tau - 2\beta_{-j-1}^\tau (s + M - j)] \hat{a}_{s+M-j}^\tau + \\ & + [\tilde{\beta}_{-2}^\tau + (s + M + 1)(s - 2\beta_0^\tau)] \hat{a}_{s+M+1}^\tau + \sum_{j=0}^{2N+1} -g_{j-1} \hat{a}_{s+M-j}^\tau = 0, \\ & (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (\hat{a}_0^\tau \neq 0), \quad (2.270) \end{aligned}$$

cuyo primer sumatorio, donde $M + 1 \leq j \leq -2$, es nulo para todo $M \geq -2$, y donde los parámetros $\tilde{\beta}_j^\tau$ son las funciones de β_j^τ

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{-2}^\tau & \equiv -g_{-2} + (\beta_0^\tau + M/2) (\beta_0^\tau + M/2 + 1), \\ \tilde{\beta}_j^\tau & \equiv -g_j + (M - j - 1) \beta_{-j-2}^\tau + \sum_{\sigma=0}^{-j-2} \beta_\sigma^\tau \beta_{-j-2-\sigma}^\tau, \\ & (j = -3, -4, \dots, M + 1, M). \quad (2.271) \end{aligned}$$

El comportamiento asintótico de las soluciones formales de clase (b) $u_{b,\tau}(z)$ cuando $z \rightarrow 0$ sobre un rayo $\arg(z)$ dado, depende del signo que toma en el rayo considerado la parte real del término $\beta_{-M-1}^\tau z^{M+1}/(-M-1)$ que domina el exponente $\chi_{b,\tau}(z)$ en las formas asintóticas (2.263) características de esas soluciones. En particular, la solución formal de clase (b) que verifica sobre un rayo dado la condición

$$\Re(\beta_{-M-1}^\tau z^{M+1}) < 0, \quad (2.272)$$

tiene un comportamiento regular en el origen, decreciendo exponencialmente cuando $z \rightarrow 0$, y convenimos en denominarla $u_{b,3}(z)$. La otra solución formal de clase (b), i.e. $u_{b,4}(z)$, crece exponencialmente cuando $z \rightarrow 0$ sobre el mismo rayo, haciéndose infinita en el origen, toda vez que la primera ecuación del sistema (2.268) correspondiente a $q = -M - 1$

$$(\beta_{-M-1}^\tau)^2 = g_{2M}, \quad (2.273)$$

tiene como consecuencia la relación de antisimetría (2.269) correspondiente a $q = Q \equiv -M - 1$:

$$\beta_{-M-1}^{(3)} = -\beta_{-M-1}^{(4)}, \quad (2.274)$$

para todo $M = -2, -3, -4, \dots$

2.5.3. Fórmulas de conexión, sectores de validez y rayos de Stokes

La existencia de dos sistemas fundamentales (a) y (b) de soluciones formales da lugar a dos sistemas de soluciones globales de la ecuación canónica. El sistema (a) de soluciones globales está formado por las soluciones multiplicativas $u_\eta(z)$ ($\eta = 1, 2$) dadas en (2.250) y sus formas asintóticas de clase (a) $\tilde{u}_{a,\eta}(z)$ cuando $z \rightarrow \infty$ en aquellos sectores del z-plano complejo delimitados por rayos de Stokes sobre los cuales las soluciones formales de clase (a) $u_{a,k}(z)$ ($k = 1, 2$) (cfr. (2.252)) cambian de manera brusca. El sistema (b) de soluciones globales está formado por las soluciones multiplicativas $u_\eta(z)$ y sus formas asintóticas de clase (b) $\tilde{u}_{b,\eta}(z)$ cuando $z \rightarrow 0$ en aquellos sectores del z-plano complejo delimitados por rayos de Stokes sobre los cuales las soluciones formales de clase (b) $u_{b,\tau}(z)$ ($\tau = 3, 4$) (cfr. (2.263)) cambian de manera brusca.

Las formas asintóticas de clase (a) $\tilde{u}_{a,\eta}(z)$ se obtienen, análogamente a las (2.180) del caso regular-irregular, reemplazando las soluciones formales de clase (a) $u_{a,k}(z)$ por sus formas asintóticas (2.252), (2.253) en las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_1(z) &= T_{1,p_1}^{(1)} u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{(1)} u_{a,2}(z), \\ u_2(z) &= T_{1,p_1}^{(2)} u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{(2)} u_{a,2}(z), \\ &\quad (z \in S(p_1, p_2)), \end{aligned} \quad (2.275)$$

que expresan en cada sector de validez $S(p_1, p_2)$ la relación algebraica lineal entre las soluciones multiplicativas y las soluciones formales de clase (a). Denominamos *fórmulas de conexión de clase (a)* a las ecuaciones (2.275) y *factores de conexión de clase (a)* a las constantes multiplicativas T_{k,p_k} que definen en cada sector S_{k,p_k} la relación lineal entre ambos sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación canónica. Los sectores de validez $S(p_1, p_2)$ de las fórmulas de conexión de clase (a) son entonces las intersecciones no vacías de los sectores de validez S_{k,p_k} de los factores de conexión $T_{k,p_k}^{(\eta)}$, es decir,

$$S(p_1, p_2) = S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}, \quad (p_1, p_2 \in \mathbf{Z}), \quad (2.276)$$

siendo

$$\begin{aligned} S_{k,p_k} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}, \left| \arg \left(\lambda_k z^{N+1} \right) - 2\pi p_k \right| < \pi \right\}, \\ (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.277)$$

donde $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)}$.

Las formas asintóticas de clase (b) $\tilde{u}_{b,\eta}(z)$ se obtienen reemplazando las soluciones formales de clase (b) $u_{b,\tau}(z)$ por sus formas asintóticas (2.263), (2.264) en las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_1(z) &= T_{3,p_3}^{(1)} u_{b,3}(z) + T_{4,p_4}^{(1)} u_{b,4}(z), \\ u_2(z) &= T_{3,p_3}^{(2)} u_{b,3}(z) + T_{4,p_4}^{(2)} u_{b,4}(z), \\ &\quad (z \in S(p_3, p_4)), \end{aligned} \quad (2.278)$$

que expresan en cada sector de validez $S(p_3, p_4)$ la relación algebraica lineal entre las soluciones multiplicativas y las soluciones formales de clase (b). Denominamos *fórmulas de conexión de clase (b)* a las ecuaciones (2.278) y *factores de conexión de clase (b)* a las constantes multiplicativas $T_{\tau,p_\tau}^{(\eta)}$ que definen en cada sector S_{τ,p_τ} la relación lineal entre ambos sistemas fundamentales de soluciones de la ecuación canónica. Los sectores de validez $S(p_3, p_4)$ de las fórmulas de conexión de clase (b) son entonces las intersecciones no vacías de los sectores de validez S_{τ,p_τ} de los factores de conexión $T_{\tau,p_\tau}^{(\eta)}$, es decir,

$$S(p_3, p_4) = S_{3,p_3} \cap S_{4,p_4}, \quad (p_3, p_4 \in \mathbf{Z}), \quad (2.279)$$

siendo

$$S_{\tau,p_\tau} \equiv \left\{ z \in \mathbf{C}, \left| \arg(\lambda_\tau z^{M+1}) - 2\pi p_\tau \right| < \pi \right\}, \quad (p_\tau \in \mathbf{Z}), \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.280)$$

donde $\lambda_\tau \equiv \beta_{-M-1}^{(\tau)}$.

Los rayos de Stokes \vec{s}_{k,p_k} que separan los sectores adyacentes S_{k,p_k} y $S_{k,p_{k+1}}$ tienen por argumentos (véase la nota 20)

$$\phi_{k,p_k} \equiv \arg(\vec{s}_{k,p_k}) = \frac{(2p_k + 1)\pi - \arg(\lambda_k)}{N + 1}, \quad (2.281)$$

y las amplitudes angulares de los sectores S_{k,p_k} son

$$\Delta\phi_{k,p_k} = \frac{2\pi}{N + 1}. \quad (2.282)$$

Los rayos de Stokes \vec{s}_{τ,p_τ} que separan los sectores adyacentes S_{τ,p_τ} y $S_{\tau,p_{\tau+1}}$ tienen argumentos

$$\phi_{\tau,p_\tau} \equiv \arg(\vec{s}_{\tau,p_\tau}) = \frac{(2p_\tau + 1)\pi - \arg(\beta_{-M-1}^{(\tau)})}{M + 1}, \quad (2.283)$$

y las amplitudes angulares de los sectores S_{τ,p_τ} son

$$\Delta\phi_{\tau,p_\tau} = \frac{2\pi}{-M - 1}. \quad (2.284)$$

Los valores de los factores de conexión en cada rayo de Stokes se definen como la semisuma de los valores que toma el factor correspondiente en los dos sectores adyacentes separados por el rayo:

$$\begin{aligned} T_k^\eta(\vec{\mathfrak{s}}_{k,p_k}) &= \frac{1}{2} (T_{k,p_k}^\eta + T_{k,p_k+1}^\eta), \\ T_\tau^\eta(\vec{\mathfrak{s}}_{\tau,p_\tau}) &= \frac{1}{2} (T_{\tau,p_\tau}^\eta + T_{\tau,p_\tau+1}^\eta). \end{aligned} \quad (2.285)$$

En la mayoría de las aplicaciones físicas, la variable independiente z en la ecuación canónica es real no negativa, los parámetros g_j ($j = 2M, 2M + 1, \dots, 2N$) son reales y en particular g_{2M}, g_{2N} , son positivos. Entonces, a consecuencia de (2.257) y (2.258), se tienen ahora las expresiones, semejantes a las obtenidas en el problema de conexión regular-irregular (cfr. (2.187), (2.188)),

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\equiv \alpha_{N+1}^{(1)} = -\sqrt{g_{2N}} < 0, \\ \lambda_2 &\equiv \alpha_{N+1}^{(2)} = +\sqrt{g_{2N}} > 0, \end{aligned} \quad (2.286)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \arg(\lambda_1) &= \arg(\alpha_{N+1}^{(1)}) = \pi, \\ \arg(\lambda_2) &= \arg(\alpha_{N+1}^{(2)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.287)$$

Asimismo, a consecuencia de (2.268) y (2.269), se tiene:

$$\begin{aligned} \lambda_3 &\equiv \beta_{-M-1}^{(3)} = -\sqrt{g_{2M}} < 0, \\ \lambda_4 &\equiv \beta_{-M-1}^{(4)} = +\sqrt{g_{2M}} > 0, \end{aligned} \quad (2.288)$$

es decir,

$$\begin{aligned} \arg(\lambda_3) &= \arg(\beta_{-M-1}^{(3)}) = \pi, \\ \arg(\lambda_4) &= \arg(\beta_{-M-1}^{(4)}) = 0. \end{aligned} \quad (2.289)$$

En estas condiciones, el semieje real positivo es un rayo de Stokes en las fórmulas de conexión de clase (a) (2.275), atravesando el cual se produce un cambio brusco del factor de conexión T_{1,p_1}^η (figura 2.5), aunque no de T_{2,p_2}^η , porque habida cuenta de (2.277), (2.281) y de la primera expresión (2.285), se tiene:

$$\begin{aligned} \phi_{1,0} &= \arg(\vec{\mathfrak{s}}_{1,0}) = 0, \\ \phi_{2,p_2} &= \arg(\vec{\mathfrak{s}}_{2,p_2}) \neq 0, \quad \forall p_2 \in \mathbf{Z}. \end{aligned} \quad (2.290)$$

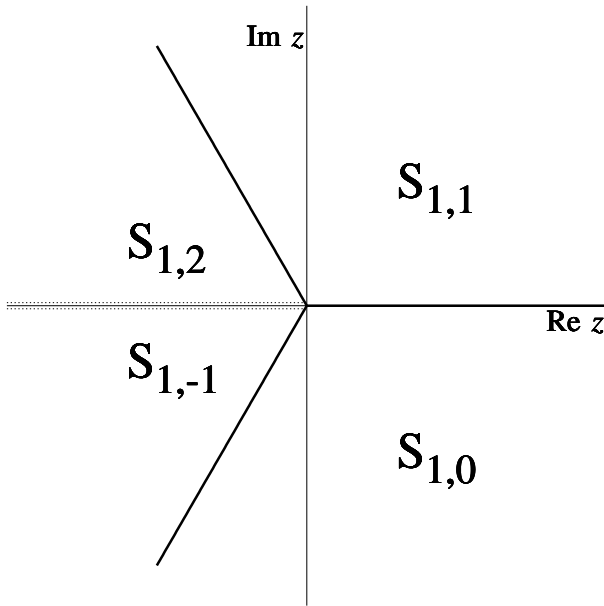


Figura 2.5: Sectores de validez S_{1,p_1} ($p_1 = -1, 0, 1, 2$) de los factores de conexión T_{1,p_1} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_1 es real negativo: $S_{1,-1}$: $-4\pi/3 < \arg(z) < -2\pi/3$, $S_{1,0}$: $-2\pi/3 < \arg(z) < 0$, $S_{1,1}$: $0 < \arg(z) < 2\pi/3$, $S_{1,2}$: $2\pi/3 < \arg(z) < 4\pi/3$. Los sectores $S_{1,0}$, $S_{1,1}$ y la mitad de $S_{1,-1}$, $S_{1,2}$ cubren la primera hoja de Riemann. La mitad de $S_{1,-1}$ y de $S_{1,2}$ pertenecen a las hojas inferior y superior respectivamente. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -2\pi/3, 0, 2\pi/3$. Aunque representan casos diferentes, esta figura coincide con la 2.3.

La figura 2.6 muestra, en el mismo caso de la figura 2.5, los rayos de Stokes que separan sectores de validez de T_{2,p_2} en la primera hoja de Riemann.

El valor de T_{1,p_1}^η en el semieje real positivo es por tanto

$$T_1^\eta(\vec{s}_{1,0}) = \frac{1}{2} (T_{1,1}^\eta + T_{1,0}^\eta), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.291)$$

donde $T_{1,1}^\eta$, $T_{1,0}^\eta$ son los valores de T_1^η en los sectores adyacentes $S_{1,1}$ y $S_{1,0}$ respectivamente. Asimismo, habida cuenta de (2.280), (2.283) y de la segunda expresión (2.285) se tiene

$$\begin{aligned} \phi_{3,0} &= \arg(\vec{s}_{3,0}) = 0, \\ \phi_{4,p_4} &= \arg(\vec{s}_{4,p_4}) \neq 0, \quad \forall p_4 \in \mathbf{Z}, \end{aligned} \quad (2.292)$$

luego el semieje real positivo es también un rayo de Stokes en las fórmulas de conexión de clase (b) (2.278), atravesando el cual se produce un cambio brusco del factor de conexión T_{3,p_3}^η (figura 2.7) y no de T_{4,p_4} .

La figura 2.8 muestra, en el mismo caso de la figura 2.7, los rayos de Stokes que separan sectores de validez de T_{4,p_4} en la primera hoja de Riemann.

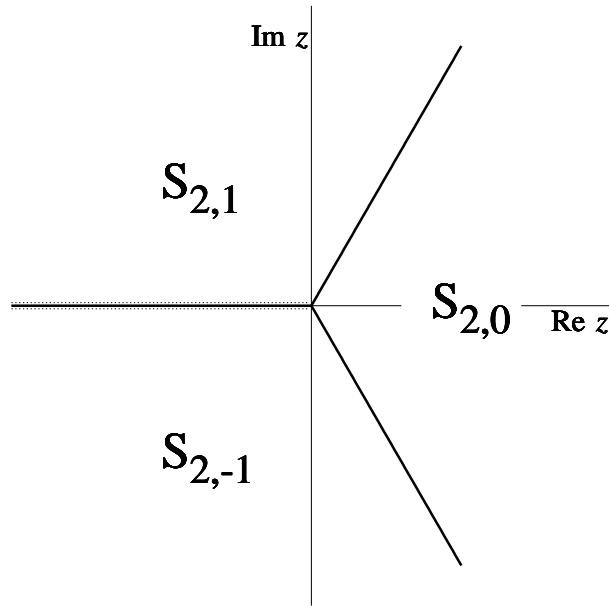


Figura 2.6: Sectores de validez S_{2,p_2} ($p_2 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{2,p_2} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_2 es real positivo: $S_{2,-1}$: $-\pi < \arg(z) < -\pi/3$, $S_{2,0}$: $-\pi/3 < \arg(z) < \pi/3$, $S_{2,1}$: $\pi/3 < \arg(z) < \pi$. Los tres sectores $S_{2,-1}$, $S_{2,0}$ y $S_{2,1}$, cubren exactamente la primera hoja de Riemann. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -\pi/3, \pi/3$. Aunque representan casos diferentes, esta figura coincide con la 2.4.

El valor de $T_{3,p_3}^{(\eta)}$ en el semieje real positivo es por tanto

$$T_3^{(\eta)}(\vec{s}_{3,0}) = \frac{1}{2} (T_{3,0}^{(\eta)} + T_{3,1}^{(\eta)}), \quad (\eta = 1, 2), \quad (2.293)$$

donde $T_{3,0}^{(\eta)}, T_{3,1}^{(\eta)}$ son los valores de $T_3^{(\eta)}$ en los sectores adyacentes $S_{3,0}$ y $S_{3,1}$ respectivamente.

En las secciones precedentes hemos convenido en denominar $u_{a,1}(z)$, $u_{a,2}(z)$ a las soluciones formales de clase (a) regular e irregular respectivamente cuando $z \rightarrow \infty$. Asimismo, convenimos en que $u_{b,3}(z)$, $u_{b,4}(z)$ representan a las soluciones formales de clase (b) regular e irregular respectivamente cuando $z \rightarrow 0$. A fin de que $u_{b,3}(z)$ pueda representar estados físicos, la regularidad en el origen no es suficiente, siendo exigible un comportamiento regular cuando $z \rightarrow \infty$, propiedad que puede expresarse mediante los factores de conexión en la forma que indicamos seguidamente.

Como toda solución de la ecuación canónica, $u_{b,3}(z)$ es igual a una combinación lineal del sistema fundamental de soluciones formales de clase (a) $\{u_{a,1}(z), u_{a,2}(z)\}$. Entonces, el comportamiento asintótico de $u_{b,3}(z)$ es regular en el infinito solo si en esa combinación lineal es nulo el coeficiente

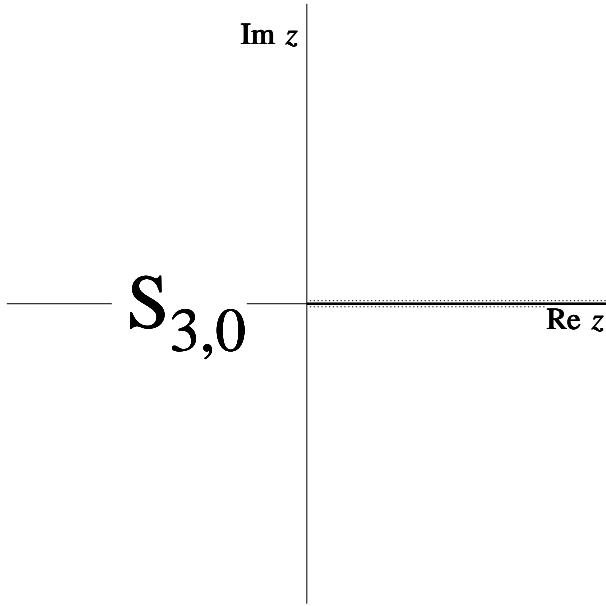


Figura 2.7: Sectores de validez S_{3,p_3} ($p_3 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{3,p_3} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_3 es real negativo: $S_{3,1}$: $-2\pi < \arg(z) < 0$, $S_{3,0}$: $0 < \arg(z) < 2\pi$, $S_{3,-1}$: $2\pi < \arg(z) < 4\pi$. Los sectores $S_{3,0}$ y $S_{3,-1}$ cubren la mitad positiva de la primera hoja de Riemann y toda la hoja superior, $S_{3,1}$ cubre la mitad negativa de la primera hoja de Riemann y mitad de la hoja inferior. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = 0, 2\pi$.

de la solución irregular $u_{a,2}(z)$. Este coeficiente es igual a cierta función del parámetro E de energía en la ecuación de Schrödinger y los ceros de esta función son por tanto los valores de la energía físicamente admisibles, en otras palabras, son los valores del parámetro E que constituyen el *espectro de energías de Schrödinger* correspondiente al potencial suma de potencias (2.244).

La expresión de $u_{b,3}(z)$ en combinación lineal de $\{u_{a,1}(z), u_{a,2}(z)\}$ es (véase la nota 21)

$$u_{b,3}(z) = \left(\frac{T_{1,p_1}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{4,p_4}^{(1)} T_{1,p_1}^{(2)}}{D_3} \right) u_{a,1}(z) + \left(\frac{T_{2,p_2}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{4,p_4}^{(1)} T_{2,p_2}^{(2)}}{D_3} \right) u_{a,2}(z),$$

$$(z \in S(p_1, p_2) \cap S(p_3, p_4)), \quad (p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbf{Z}), \quad (2.294)$$

donde

$$D_3 \equiv T_{3,p_3}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{3,p_3}^{(2)} T_{4,p_4}^{(1)} \neq 0, \quad (2.295)$$

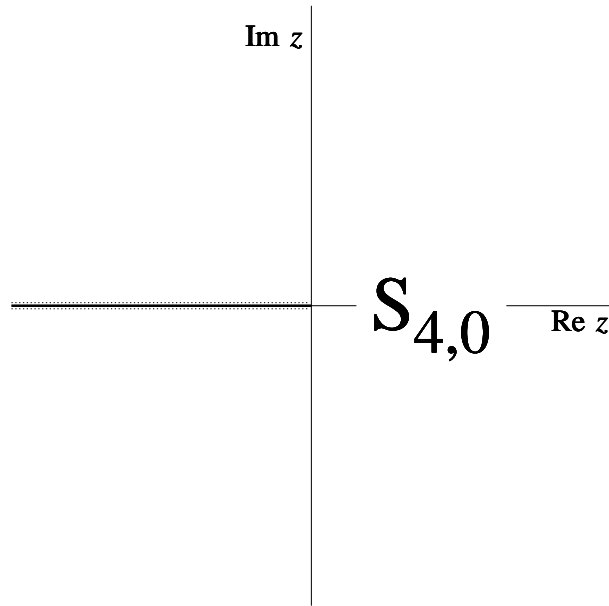


Figura 2.8: Sectores de validez S_{4,p_4} ($p_4 = -1, 0, 1$) de los factores de conexión T_{4,p_4} cuando $M = -2$, $N = 2$ y el parámetro asintótico principal λ_4 es real positivo: $S_{4,1}$: $-3\pi < \arg(z) < -\pi$, $S_{4,0}$: $-\pi < \arg(z) < \pi$, $S_{4,-1}$: $\pi < \arg(z) < 3\pi$. Cada sector cubre una hoja de Riemann completa, correspondiendo la primera a $S_{4,0}$. Los rayos de Stokes que separan estos sectores corresponden a $\arg(z) = -\pi, \pi$.

para enteros p_1, p_2, p_3, p_4 tales que la intersección del sector $S(p_1, p_2)$ con $S(p_3, p_4)$ es no vacía.

El espectro de energías es entonces el conjunto de raíces de la ecuación que expresa la nulidad del coeficiente de $u_{a,2}(z)$ en (2.294):

$$T_{2,p_2}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{4,p_4}^{(1)} T_{2,p_2}^{(2)} = 0. \quad (2.296)$$

2.5.4. Cálculo de los factores de conexión

El método de cálculo de los factores de conexión $T_{k,p_k}^{(n)}$ en las fórmulas (2.180) que describimos en la sección 2.4 resuelve el problema global de la ecuación canónica (I) (2.147), (2.148), la cual tiene en $z = 0$ una singularidad regular y en $z = \infty$ una singularidad irregular. El método, que utiliza las propiedades de la serie exponencial de Heaviside, se fundamenta en la comparación de dos expresiones del desarrollo asintótico de los Wronskianos de las funciones auxiliares introducidas en (2.201), (2.202).

En esta subsección extendemos el método de los Wronskianos al cálculo de los factores de conexión de clases (a) y (b) que intervienen en el problema

global de la ecuación canónica (II) (2.246), (2.247), la cual presenta singularidades irregulares en $z = 0$ y en $z = \infty$.

Consideramos en primer lugar, para cada $\eta = 1, 2$, el sistema de ecuaciones definido por la fórmula de conexión de clase (a) (2.275) y su primera derivada en un sector $S(p_1, p_2)$ dado por (2.276), (2.277):

$$\begin{aligned} u_\eta(z) &= T_{1,p_1}^{(\eta)} u_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{(\eta)} u_{a,2}(z), \\ u'_\eta(z) &= T_{1,p_1}^{(\eta)} u'_{a,1}(z) + T_{2,p_2}^{(\eta)} u'_{a,2}(z). \end{aligned} \quad (2.297)$$

Las expresiones de los factores de conexión de clase (a) como cocientes de Wronskianos se obtienen aplicando la regla de Cramer al sistema (2.297):

$$\begin{aligned} T_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}^{(\eta)} &= \frac{\mathcal{W}[u_\eta, u_{a,k}]}{\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}]}, \quad (z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}), \\ &(k = 1, 2), \quad (\eta = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.298)$$

donde \tilde{k} es la función de k introducida en (2.228), de manera que $\tilde{k} = 2$ si $k = 1$ y $\tilde{k} = 1$ si $k = 2$, y $S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$ viene dado por (2.227). Asimismo, $\mathcal{W}[u, v]$ representa al Wronskiano del par ordenado de funciones (u, v) introducido en (2.197). El sistema (2.297) es compatible, toda vez que $\{u_{a,1}, u_{a,2}\}$ constituyen un sistema fundamental de soluciones de la ecuación canónica, verificándose en consecuencia

$$\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}] \neq 0, \quad (2.299)$$

para cada $k = 1, 2$.

Los Wronskianos $\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}]$ en los denominadores de (2.298) se obtienen de manera semejante al problema de conexión regular-irregular, sustituyendo en la expresión funcional del Wronskiano las formas asintóticas de $u_{a,k}$, $u_{a,\tilde{k}}$ dadas en (2.252) y sus derivadas:

$$\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}] \equiv u_{a,\tilde{k}} u'_{a,k} - u'_{a,\tilde{k}} u_{a,k} = 2\alpha_{N+1}^{(k)} a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})} \equiv 2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})}. \quad (2.300)$$

Los Wronskianos en los numeradores de las expresiones (2.298) se determinan siguiendo un proceso semejante al que hemos descrito en el problema de conexión regular-irregular. Como paso previo introducimos, para cada $\eta = 1, 2$, las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} v_{\eta,k}(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}\right) u_\eta(z), \quad (k = 1, 2), \\ v_{a,k}(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}\right) u_{a,k}(z), \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.301)$$

La relación entre los Wronskianos de $(v_{\eta,k}, v_{a,k})$ y de $(u_{\eta}, u_{a,k})$ para cada $k = 1, 2$ se obtiene reemplazando (2.301) y sus derivadas en el segundo miembro de la expresión

$$\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] = v_{\eta,k} v'_{a,k} - v'_{\eta,k} v_{a,k}, \quad (2.302)$$

el cálculo se realiza de modo semejante al caso regular-irregular (véase la nota 14) dando como resultado

$$\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}\right) \mathcal{W}[u_{\eta}, u_{a,k}], \quad (2.303)$$

donde $\mathcal{W}[u_{\eta}, u_{a,k}]$ es igual a una constante, toda vez que u_{η} y $u_{a,k}$ son soluciones de la misma ecuación diferencial (2.246) cuyo término en la primera derivada es nulo.

Los Wronskianos $\mathcal{W}[u_{\eta}, u_{a,k}]$ se determinan, como en el caso regular-irregular considerado en la sección 2.4, obteniendo y comparando dos desarrollos formales de los Wronskianos de las funciones auxiliares $\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}]$. El primer desarrollo se obtiene sustituyendo en los segundos miembros de (2.301) las expresiones (2.250) de $u_{\eta}(z)$ y (2.252) de $u_{a,k}(z)$ y reemplazando las formas funcionales resultantes de $v_{\eta,k}$, $v_{a,k}$ y sus derivadas en la forma exacta (2.302) del Wronskiano (véanse las notas 22, 23):

$$\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] \sim \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} z^{\hat{n}+\nu_k+\mu_k-1}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.304)$$

siendo para cada $k = 1, 2$

$$\gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} = -2Q_{\hat{n}}^{(a,k)} - (\hat{n} + \nu_k - \mu_k) \Omega_{\hat{n},0}^{(a,k)} + 2 \sum_{p=1}^N \alpha_p^{(k)} \Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} + \lambda_k \Omega_{\hat{n},N+1}^{(a,k)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (2.305)$$

donde

$$\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N+1), \quad (2.306)$$

$$Q_{\hat{n}}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} j a_j^{(k)} b_{\hat{n}+j}^{(k)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (2.307)$$

son series de cuya convergencia depende la validez de nuestro método de cálculo de los factores de conexión (véase el apéndice A).

Consideramos seguidamente el segundo desarrollo formal del Wronskiano $\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}]$ que utiliza la serie exponencial de Heaviside introducida en (2.111), (2.112), i.e.

$$\exp(t) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t^{n+\delta}}{\Gamma(n+1+\delta)}, \quad (t \rightarrow \infty), \quad (|\arg(t)| < \pi),$$

$$(t, \delta \in \mathbf{C}), \quad (2.308)$$

con la finalidad de obtener un desarrollo de la exponencial en el segundo miembro de (2.303). De modo semejante al caso regular-irregular descrito en la sección 2.4, dado un valor de $N = 0, 1, 2, \dots$, el cambio de variable

$$t \longrightarrow z, \quad t = -\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}, \quad (2.309)$$

en el que z depende de la raíz $(N+1)$ -ésima de t , hace necesario introducir para cada $k = 1, 2$ los $(N+1)$ desarrollos de Heaviside

$$\mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(-\lambda_k z^{N+1}/(N+1)\right)^{n+\delta_L^{(a,k)}}}{\Gamma\left(n+1+\delta_L^{(a,k)}\right)}, \quad (L = 0, 1, \dots, N),$$

$$(z, \delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}), \quad \left|\arg\left(-\lambda_k z^{N+1}\right)\right| < \pi. \quad (2.310)$$

donde la condición $\left|\arg\left(-\lambda_k z^{N+1}\right)\right| < \pi$ caracteriza al sector de validez $S_{\tilde{k},0}$ de los factores $T_{\tilde{k}}^{(n)}$ dado en (2.227). Por consiguiente, habida cuenta de (2.308) y (2.310), en este sector del z -plano complejo se verifican, para cada $k = 1, 2$, las $N+1$ relaciones asintóticas análogas a las (2.231) del caso regular-irregular

$$\exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}\right) \sim \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0} \subset \mathbf{C}),$$

$$(L = 0, 1, \dots, N). \quad (2.311)$$

El segundo desarrollo formal de $\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}]$ se obtiene ahora bajo la forma de una combinación lineal de los $N+1$ desarrollos de Heaviside (2.310) semejante a la (2.238) del caso regular-irregular

$$\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] \sim \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^N \left(\frac{\beta_{a,L}^{(k)}}{\Gamma\left(n+1+\delta_L^{(a,k)}\right)} \right) \left(\frac{-\lambda_k}{N+1} \right)^{n+\delta_L^{(a,k)}} z^{(N+1)(n+\delta_L^{(a,k)})},$$

$$(z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k},0} \subset \mathbf{C}), \quad (\delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}), \quad (2.312)$$

donde las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$ verifican para cada $k = 1, 2$

$$\sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} = \mathcal{W}[u_\eta, u_{a,k}]. \quad (2.313)$$

Comparando el segundo desarrollo formal (2.312) del Wronskiano de las funciones auxiliares de clase (a) con el primer desarrollo (2.304), obtenemos expresiones de \hat{n} , $\delta_L^{(a,k)}$, $\beta_{a,L}^{(k)}$ semejantes a las obtenidas en el estudio del problema de conexión regular-irregular (véase la nota 18):

$$\hat{n} \equiv \hat{n}_L = (N+1)n + L + 1, \quad (n, \hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (2.314)$$

$$\delta_L^{(a,k)} = \frac{\nu_k + \mu_k + L}{N+1}, \quad (k = 1, 2), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (2.315)$$

$$\beta_{a,L}^{(k)} = \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}}, \quad (L = 0, 1, \dots, N),$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2). \quad (2.316)$$

Llevando (??), (2.316) a (2.313) obtenemos los Wronskianos en los numeradores de (2.298) para cada $\eta, k = 1, 2$:

$$\mathcal{W}[u_\eta, u_{a,k}] = \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}},$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (2.317)$$

que junto a los Wronskianos de los denominadores dados en (2.300) dan como resultado fórmulas explícitas de los factores de conexión de clase (a):

$$T_{\bar{k},0}^\eta = \frac{1}{2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\bar{k})}} \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}},$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}). \quad (2.318)$$

La extensión de los desarrollos formales (2.310), de las relaciones asintóticas (2.311), del desarrollo (2.312) y de las fórmulas de los factores de conexión (2.318) a todo sector $S_{\bar{k},p_{\bar{k}}}$ se realiza mediante el cambio de variable introducido en (2.393), (2.394) con resultados semejantes a (2.399), (2.400), (ver la nota 17) y (2.415), (2.419) (ver la nota 18).

El proceso de cálculo de los factores de conexión de clase (b) T_{τ,p_τ}^η no difiere en lo esencial del que nos ha llevado a obtener fórmulas de los factores de conexión de clase (a) T_{k,p_k}^η . Las fórmulas de conexión de clase (b)

introducidas en (2.278) constituyen ahora el punto de partida del proceso de cálculo de los factores T_{τ, p_τ}^η por el método asintótico de los Wronskianos.

Para cada $\eta = 1, 2$, consideramos el sistema lineal de ecuaciones constituido por la fórmula de conexión de clase (b) y su primera derivada (cfr. (2.278), (2.279)):

$$\begin{aligned} u_\eta(z) &= T_{3, p_3}^\eta u_{b,3}(z) + T_{4, p_4}^\eta u_{b,4}(z), \\ u'_\eta(z) &= T_{3, p_3}^\eta u'_{b,3}(z) + T_{4, p_4}^\eta u'_{b,4}(z), \\ &(z \in S(p_3, p_4)), \quad (p_3, p_4 \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.319)$$

Aplicando la regla de Cramer obtenemos expresiones de los factores de conexión de clase (b) como cocientes de Wronskianos:

$$\begin{aligned} T_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}^\eta &= \frac{\mathcal{W}[u_\eta, u_{b,\tau}]}{\mathcal{W}[u_{b,\tilde{\tau}}, u_{b,\tau}]}, \quad (z \in S_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}), \\ &(\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \quad (p_{\tilde{\tau}} \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.320)$$

donde $\tilde{\tau}$ es la función de τ

$$\tilde{\tau} = \tau + (-1)^{\tau-1}, \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.321)$$

de manera que $\tilde{\tau} = 4$ cuando $\tau = 3$ y $\tilde{\tau} = 3$ cuando $\tau = 4$.

La compatibilidad del sistema (2.319), i.e.

$$\mathcal{W}[u_{b,\tilde{\tau}}, u_{b,\tau}] \neq 0, \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.322)$$

está asegurada al constituir $\{u_{b,3}, u_{b,4}\}$ un sistema fundamental de soluciones de la ecuación canónica.

Los Wronskianos en los denominadores de (2.320) se obtienen de manera análoga a los Wronskianos de clase (a) en los denominadores de (2.298), dando como resultado, para cada $\tau = 3, 4$,

$$\mathcal{W}[u_{b,\tilde{\tau}}, u_{b,\tau}] \equiv u_{b,\tilde{\tau}} u'_{b,\tau} - u'_{b,\tilde{\tau}} u_{b,\tau} = 2\beta_{-M-1}^{\tilde{\tau}} \hat{a}_0^\tau \hat{a}_0^{\tilde{\tau}} \equiv 2\lambda_{\tilde{\tau}} \hat{a}_0^\tau \hat{a}_0^{\tilde{\tau}}, \quad (2.323)$$

donde

$$\lambda_\tau \equiv \beta_{-M-1}^\tau = -\beta_{-M-1}^{\tilde{\tau}} \equiv \lambda_{\tilde{\tau}}. \quad (2.324)$$

El cálculo de los Wronskianos en los numeradores de (2.320) se inicia introduciendo, para cada $\eta = 1, 2$, $\tau = 3, 4$ las funciones auxiliares de clase (b)

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\eta,\tau}(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_\tau}{2(-M-1)} z^{M+1}\right) u_\eta(z), \\ \hat{v}_{b,\tau}(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_\tau}{2(-M-1)} z^{M+1}\right) u_{b,\tau}(z), \end{aligned} \quad (2.325)$$

y encontrando la relación entre los Wronskianos de $(\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau})$ y de $(u_\eta, u_{b,\tau})$ a partir de (2.325) y de la expresión general (2.197) de $\mathcal{W}[u, v]$. El cálculo se simplifica introduciendo la variable \tilde{z}

$$\tilde{z} = z^{-1}, \quad (2.326)$$

de manera que $\tilde{z} \rightarrow \infty$ cuando $z \rightarrow 0$. Definiendo para todo $M = -2, -3, -4, \dots$

$$\tilde{M} \equiv -M - 2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.327)$$

y poniendo para cada $\tau = 3, 4$

$$\beta_{-M-1}^{(\tau)} \equiv \lambda_\tau = \beta_{\tilde{M}+1}^{(\tau)}, \quad (2.328)$$

las expresiones (2.325) se reescriben

$$\begin{aligned} \hat{v}_{\eta,\tau}(\tilde{z}) &= \exp\left(-\frac{\lambda_\tau}{2(\tilde{M}+1)} \tilde{z}^{\tilde{M}+1}\right) u_\eta(\tilde{z}), \\ \hat{v}_{b,\tau}(\tilde{z}) &= \exp\left(-\frac{\lambda_\tau}{2(\tilde{M}+1)} \tilde{z}^{\tilde{M}+1}\right) u_{b,\tau}(\tilde{z}), \end{aligned} \quad (2.329)$$

obteniéndose la relación entre Wronskianos en función de \tilde{z} (véase la nota 14)

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau}] &= \exp\left(-\frac{\lambda_\tau}{\tilde{M}+1} \tilde{z}^{\tilde{M}+1}\right) \mathcal{W}[u_\eta, u_{b,\tau}], \\ (\tilde{M} = 0, 1, 2, \dots), \quad (\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \end{aligned} \quad (2.330)$$

donde $\mathcal{W}[u_\eta, u_{b,\tau}]$ es igual a una constante, toda vez que u_η y $u_{b,\tau}$ son soluciones de la ecuación canónica (2.246), (2.247) cuyo término en la primera derivada es nulo. La función $u_{b,\tau}$ se conoce por su forma asintótica (2.263), (2.264) cuando $z \rightarrow 0$, es decir, cuando $\tilde{z} \rightarrow \infty$. De este modo, la expresión (2.330) es análoga formalmente a la expresión (2.303) que relaciona al Wronskiano $\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}]$ de las funciones auxiliares de clase (a) con el Wronskiano $\mathcal{W}[u_\eta, u_{a,k}]$ de las soluciones multiplicativas u_η y formales de clase (a) $u_{a,k}$.

En el cálculo de los factores de conexión de clase (b), la relación (2.330) desempeña un papel fundamental semejante al que corresponde a la relación (2.303) en el cálculo de los factores de conexión de clase (a), al permitirnos comparar dos desarrollos formales del Wronskiano de las funciones auxiliares. El primer desarrollo de $\mathcal{W}[\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau}]$ se obtiene sustituyendo en la forma exacta del Wronskiano en el primer miembro de (2.330) las formas funcionales (2.329) de $\hat{v}_{\eta,\tau}$, $\hat{v}_{b,\tau}$ y las que resultan de cambiar z por \tilde{z}^{-1} en la forma asintótica (2.263), (2.264) de $u_{b,\tau}(z)$. Así, el proceso se desarrolla en términos

semejantes al caso de las funciones auxiliares de clase (a) dadas en (2.301), recuperándose la variable z al finalizar el cálculo con el resultado

$$\mathcal{W}[\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau}] \sim \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{b,\hat{n}}^{(\tau)} z^{\hat{n}+\mu_\tau+\nu_\tau-1}, \quad (z \rightarrow 0), \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.331)$$

donde para cada $\tau = 3, 4$,

$$\begin{aligned} \gamma_{b,\hat{n}}^{(\tau)} = 2Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)} - (\hat{n} + \nu_\tau - \mu_\tau) \Omega_{\hat{n},-M-1}^{(b,\tau)} - 2 \sum_{q=1}^{-M-2} \beta_{-M-1-q}^{(\tau)} \Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)} - \\ - \lambda_\tau \Omega_{\hat{n},0}^{(b,\tau)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.332)$$

$$\begin{aligned} \Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)} \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-M-1-q-j}^{(\tau)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \\ (q = 0, 1, \dots, -M-1), \end{aligned} \quad (2.333)$$

$$Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)} \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} j \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-j}^{(\tau)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (2.334)$$

siendo $\beta_q^{(\tau)}$ los parámetros del factor exponencial, μ_τ el exponente característico y $\hat{a}_j^{(\tau)}$ los coeficientes de la serie formal en el desarrollo (2.263) que verifican la recurrencia (2.270). Asimismo, para cada $\tau = 3, 4$,

$$\nu_\tau = \rho_{\tau-2}, \quad (2.335)$$

es el exponente característico y $\hat{b}_n^{(\tau)}$ los coeficientes en el desarrollo formal

$$\hat{w}_{\eta,\tau}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{b}_n^{(\tau)} z^{n+\nu_\tau}, \quad (\hat{b}_0^{(\tau)} \neq 0), \quad (2.336)$$

de la función auxiliar

$$\begin{aligned} \hat{w}_{\eta,\tau}(z) = \exp(\hat{\zeta}_{b,\tau}(z)) \hat{v}_{\eta,\tau}(z) = \\ = \exp\left(\hat{\zeta}_{b,\tau}(z) - \frac{\lambda_\tau}{2(-M-1)} z^{M+1}\right) u_\eta(z), \end{aligned} \quad (2.337)$$

$$\hat{\zeta}_{b,\tau}(z) = \sum_{q=1}^{-M-2} \frac{\beta_q^{(\tau)}}{q} z^{-q} + \frac{\lambda_\tau}{2(-M-1)} z^{M+1}, \quad (2.338)$$

que verifica la ecuación diferencial

$$\hat{w}'' + \left(\sum_{j=M}^{-2} \hat{\rho}_{b,j}^{(\tau)} z^j \right) \hat{w}' + \left(\sum_{j=2M}^{2N} \hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)} z^j \right) \hat{w} = 0, \quad (2.339)$$

donde $\hat{\rho}_{b,j}^{(\tau)}$, $\hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)}$ son funciones conocidas de g_j , $\beta_q^{(\tau)}$ (véase la nota 24) y los coeficientes $\hat{b}_n^{(\tau)}$ verifican la recurrencia de orden $2N - 2M$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2M+2}^M \hat{\varepsilon}_{b,j-2}^{(\tau)} \hat{b}_{n-j}^{(\tau)} + \sum_{j=M+1}^{-1} \left[\hat{\rho}_{b,j-1}^{(\tau)} (n + \nu_\tau - j) + \hat{\varepsilon}_{b,j-2}^{(\tau)} \right] \hat{b}_{n-j}^{(\tau)} + \\ & + \left[(n + \nu_\tau)(n + \nu_\tau - 1) + \hat{\varepsilon}_{b,-2}^{(\tau)} \right] \hat{b}_n^{(\tau)} + \sum_{j=1}^{2N+2} \hat{\varepsilon}_{b,j-2}^{(\tau)} \hat{b}_{n-j}^{(\tau)} = 0, \end{aligned} \quad (n \in \mathbf{Z}). \quad (2.340)$$

El segundo desarrollo del Wronskiano de las funciones auxiliares de clase (b) se obtiene ahora sustituyendo la exponencial en el segundo miembro de (2.330) por una combinación lineal de $\tilde{M} + 1 = -M - 1$ desarrollos de Heaviside (2.308) análoga a (2.312), que expresamos en función de la variable \tilde{z} introducida en (2.326). El cálculo subsiguiente en la variable \tilde{z} es semejante al del Wronskiano de las funciones auxiliares de clase (a) y su resultado, una vez recuperada la variable original z , es

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau}] & \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^{-M-2} \left(\frac{\beta_{b,L}^{(\tau)}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(b,\tau)})} \right) \times \\ & \times \left(\frac{-\lambda_\tau}{-M-1} \right)^{n+\delta_L^{(b,\tau)}} z^{(M+1)(n+\delta_L^{(b,\tau)})}, \quad (z \rightarrow 0), \\ & (z \in S_{\tilde{\tau},0} \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}), \\ & (\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \end{aligned} \quad (2.341)$$

donde $\beta_{b,L}^{(\tau)}$ son los coeficientes constantes en la combinación lineal de desarrollos de Heaviside; los sectores $S_{\tilde{\tau},0}$ vienen dados por (2.280) cambiando τ por $\tilde{\tau}$, haciendo $p_\tau = 0$ y teniendo en cuenta la relación de antisimetría (2.324).

El desarrollo (2.341) se compara con el primer desarrollo (2.331) obteniendo, para cada $\tau = 3, 4$, formas explícitas de las constantes $\beta_{b,L}^{(\tau)}$ en función de los coeficientes $\gamma_{b,\hat{n}}^{(\tau)}$ de las potencias de z en el primer desarrollo:

$$\beta_{b,L}^{(\tau)} \equiv \frac{\gamma_{b,\hat{n}}^{(\tau)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(b,\tau)})}{(\lambda_{\tilde{\tau}}/(M+1))^{n+\delta_L^{(b,\tau)}}}, \quad (L = 0, 1, \dots, -M-2), \quad (n, \hat{n} \in \mathbf{Z}). \quad (2.342)$$

El Wronskiano de las funciones u_η , $u_{b,\tau}$ que aparece en el numerador de la expresión (2.320) de los factores de conexión de clase (b), depende de las

constantes $\beta_{b,L}^{(\tau)}$ de forma semejante a la que se tiene en (2.313) en el caso de los factores de clase (a):

$$\mathcal{W}[u_\eta, u_{b,\tau}] = \sum_{L=0}^{-M-2} \beta_{b,L}^{(\tau)}, \quad (\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4). \quad (2.343)$$

Las fórmulas de los factores de conexión de clase (b) se obtienen ahora poniendo (2.342) en el segundo miembro de (2.343), sustituyendo la expresión resultante en el numerador de (2.320) con $p_{\tilde{\tau}} = 0$ y la expresión (2.323) en el denominador:

$$T_{\tilde{\tau}}^{(\eta)} = \frac{-1}{2\lambda_\tau \hat{a}_0^{(\tau)} \hat{a}_0^{(\tilde{\tau})}} \sum_{L=0}^{-M-2} \frac{\gamma_{b,\hat{n}}^{(\tau)} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(b,\tau)})}{(-\lambda_\tau / (-M-1))^{n+\delta_L^{(b,\tau)}}},$$

$$(n, \hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \quad (\tilde{\tau} = 4, 3), \quad (2.344)$$

donde $T_{\tilde{\tau}}^{(\eta)} = T_{\tilde{\tau},0}^{(\eta)}$ y para cada $M = -2, -3, -4, \dots$

$$\hat{n} \equiv \hat{n}_L = (M+1)n + L + 1, \quad (n, \hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (2.345)$$

$$\delta_L^{(b,\tau)} = \frac{\mu_\tau + \nu_\tau + L}{M+1}, \quad (L = 0, 1, \dots, -M-2). \quad (2.346)$$

La extensión a cualquier sector $S_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}$ de (2.341), (2.342), (2.344) se realiza de la forma señalada en el caso de los factores de conexión de clase (a), obteniendo (para los detalles, véanse las notas 17 y 18)

$$\mathcal{W}[\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau}] \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^{-M-2} \left(\frac{\beta_{b,L}^{(\tau,p_\tau)} \omega_{-M-1}^{-p_{\tilde{\tau}}(-M-1)\delta_L^{(b,\tau)}}}{\Gamma(n+1 + \delta_L^{(b,\tau)})} \right) \times$$

$$\times \left(\frac{-2\hat{\lambda}_\tau}{-M-1} \right)^{n+\delta_L^{(b,\tau)}} z^{(M+1)(n+\delta_L^{(b,\tau)})}, \quad (z \rightarrow 0),$$

$$(z \in S_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}} \subset \mathbf{C} \setminus \{0\}), \quad (p_\tau, p_{\tilde{\tau}} \in \mathbf{Z}),$$

$$(\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \quad (2.347)$$

donde

$$\beta_{b,L}^{(\tau,p_\tau)} = \beta_{b,L}^{(\tau,0)} \omega_{-M-1}^{p_{\tilde{\tau}}(-M-1)\delta_L^{(b,\tau)}}, \quad (L = 0, 1, \dots, -M-2),$$

$$(p_\tau, p_{\tilde{\tau}} \in \mathbf{Z}), \quad (2.348)$$

son ahora los coeficientes constantes en la combinación lineal de desarrollos de Heaviside que reemplazan a $\beta_{b,L}^{(\tau)}$ en (2.343). Los sectores $S_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}$ vienen dados por (2.280) cambiando τ por $\tilde{\tau}$, p_τ por $p_{\tilde{\tau}}$ y teniendo en cuenta la

relación de antisimetría (2.324). Poniendo (2.348) en el segundo miembro de (2.343), sustituyendo la expresión resultante en el numerador de (2.320) y (2.323) en el denominador, se obtiene la extensión a cualquier sector $S_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}$ de las fórmulas (2.344) de los factores de conexión:

$$T_{\tilde{\tau}, p_{\tilde{\tau}}}^{(\eta)} = \frac{-1}{2\lambda_{\tilde{\tau}} \hat{a}_0^{(\tilde{\tau})} \hat{a}_0^{(\tilde{\tau})}} \sum_{L=0}^{-M-2} \frac{\gamma_{b, \hat{n}}^{(\tilde{\tau})} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(b, \tilde{\tau})}) \omega_{-M-1}^{p_{\tilde{\tau}}(-M-1)\delta_L^{(b, \tilde{\tau})}}}{\left(-2\hat{\lambda}_{\tilde{\tau}}/(-M-1)\right)^{n+\delta_L^{(b, \tilde{\tau})}}},$$

$$(n, \hat{n}, p_{\tilde{\tau}} \in \mathbf{Z}), \quad (\eta = 1, 2), \quad (\tau = 3, 4), \quad (\tilde{\tau} = 4, 3), \quad (2.349)$$

2.6. Notas

Nota 12. Siempre existe al menos una solución de (2.100) de la forma (2.101). Para ciertos valores de b_{-2r} , solo existe una solución de la forma (2.101); la otra solución independiente contiene términos logarítmicos que divergen en el infinito. Nosotros estamos interesados en aquellas soluciones cuyo comportamiento es regular en ambos puntos singulares. En consecuencia, nuestra discusión se limita a las soluciones de la forma (2.101), descartando aquellas que presentan términos logarítmicos.

Nota 13. Describimos a renglón seguido la secuencia de cambios de las variables y parámetros que transforman a la ecuación radial (2.145) en la ecuación canónica I (2.147), (2.148).

En primer lugar, introducimos una variable adimensional x proporcional a la variable radial r

$$\begin{cases} r \longrightarrow x, & r = \kappa x, \\ R(r) \longrightarrow y(x), & R(r) = y(\kappa^{-1} r), \end{cases} \quad (2.350)$$

donde el parámetro κ puede elegirse de maneras diferentes a condición de que tenga dimensiones de longitud; por ejemplo, dado que $A_{\tilde{\nu}} \neq 0$ es posible tomar

$$\kappa = \left(\frac{\hbar^2}{2mA_{\tilde{\nu}}} \right)^{1/(\tilde{\nu}+2)}. \quad (2.351)$$

El parámetro κ y la variable x podrían ser en general complejos; no obstante, en la mayoría de las aplicaciones físicas κ es real y positivo, de manera que en tales casos la variable adimensional x recorre el semieje real no negativo del plano complejo.

El cambio de variable (2.350) transforma a la ecuación radial (2.145) en la ecuación de variables y parámetros adimensionales

$$y''(x) + \left(\sum_{j=-2}^G C_j x^j \right) y(x) = 0, \quad (C_G \neq 0), \quad (2.352)$$

donde

$$G = \begin{cases} \tilde{\nu} + 1 = 0, & \text{si } \tilde{\nu} = -1, \\ \tilde{\nu}, & \text{si } \tilde{\nu} = 0, 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (2.353)$$

representa el grado del polinomio en el factor de la variable dependiente y en (2.352). La relación entre los parámetros A_j de la ecuación radial y los parámetros C_j de la ecuación adimensional es

$$\begin{cases} C_0 = -2m(A_0 - E) \kappa^2 / \hbar^2, \\ C_j = -2mA_j \kappa^{j+2} / \hbar^2, \end{cases} \quad (j = -2, -1), \quad (j = 1, 2, \dots, \tilde{\nu}). \quad (2.354)$$

La ecuación (2.352) ya tiene forma adimensional pero todavía no es adecuada para estudiar el problema global porque cuando el grado G es impar, lo cual sucede si $\tilde{\nu} = 1, 3, 5, 7, \dots$, sus soluciones formales dependen de expansiones asintóticas que contienen potencias de la variable x de exponentes semienteros, y esas soluciones no se conectan fácilmente a las soluciones analíticas definidas por series de potencias de x de exponentes enteros.

En estos casos impares, es conveniente introducir una nueva variable independiente adimensional $z = x^{1/2}$ de manera que las soluciones formales de la ecuación transformada dependan de series asintóticas cuyos términos contienen solamente potencias de z de exponentes enteros. De este modo, sea el grado G par o impar, el problema global se formula en una única ecuación adimensional (2.147), de variable independiente y parámetros complejos, a la cual denominamos *ecuación canónica I* o ecuación canónica correspondiente a (2.145). Las relaciones entre las variables y parámetros de la ecuación canónica I y las variables y parámetros de la ecuación radial (2.145) son las siguientes.

a) Si $\tilde{\nu} = -1$, tenemos

$$z = r/\kappa, \quad u(z) = R(\kappa z), \quad N = 0, \quad (2.355)$$

$$g_{-2} = l(l+1), \quad g_{-1} = \frac{2mA_{-1}\kappa}{\hbar^2}, \quad g_0 = \frac{2m(-E)\kappa^2}{\hbar^2}. \quad (2.356)$$

b) Si $\tilde{\nu} = 0, 2, 4, 6, \dots$, tenemos

$$z = r/\kappa, \quad u(z) = R(\kappa z), \quad N = \tilde{\nu}/2 = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.357)$$

$$\begin{aligned} g_{-2} &= l(l+1), \quad g_0 = \frac{2m(A_0 - E)\kappa^2}{\hbar^2}, \\ g_j &= \frac{2mA_j \kappa^{j+2}}{\hbar^2}, \quad (j = -1), \quad (j = 1, 2, \dots, 2N). \end{aligned} \quad (2.358)$$

c) Si $\tilde{\nu} = 1, 3, 5, 7, \dots$, tenemos

$$z = (r/\kappa)^{1/2}, \quad u(z) = z^{-1/2} R(\kappa z^2), \quad N = \tilde{\nu} + 1 = 2, 4, 6, 8, \dots, \quad (2.359)$$

$$\begin{aligned} g_{-2} &= (2l + 1/2)(2l + 3/2), & g_2 &= \frac{8m(A_0 - E)\kappa^2}{\hbar^2}, \\ g_j &= \frac{8mA_{j/2-1}\kappa^{j/2+1}}{\hbar^2}, & (j = 0), & (j = 4, 6, 8, \dots, 2N), \\ g_j &= 0, & (j = -1, 1, 3, 5, \dots, 2N - 1). & \end{aligned} \quad (2.360)$$

Por consiguiente, en (2.148) el valor máximo del índice j es $2N = 0$ si $\tilde{\nu} = -1$, $2N = \tilde{\nu}$ si $\tilde{\nu} = 0, 2, 4, 6, \dots$ y $2N = 2\tilde{\nu} + 2$ si $\tilde{\nu} = 1, 3, 5, 7, \dots$.

Nota 14. Las relaciones (2.201), (2.202) entre $(v_{\text{reg},k}, v_{a,k})$ y $(u_{\text{reg}}, u_{a,k})$ en el problema de conexión regular-irregular que describimos en la sección 2.4 son formalmente semejantes a las relaciones (2.301) entre $(v_{\eta,k}, v_{a,k})$ y $(u_{\eta}, u_{a,k})$ que se establecen en el problema de conexión irregular-irregular de clase (a), y a las relaciones (2.325) entre $(\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau})$ y $(u_{\eta}, u_{b,\tau})$ en el problema de conexión irregular-irregular de clase (b) considerados en la sección 2.5. Por consiguiente, la relación entre el Wronskiano de $(v_{\text{reg},k}, v_{a,k})$ y el Wronskiano de $(u_{\text{reg}}, u_{a,k})$ que se presenta en el problema de conexión regular-irregular es formalmente semejante a la relación entre los Wronskianos de $(v_{\eta,k}, v_{a,k})$ y de $(u_{\eta}, u_{a,k})$ que sucede en el problema de conexión irregular-irregular de clase (a) y otro tanto cabe afirmar de la relación entre los Wronskianos de $(\hat{v}_{\eta,\tau}, \hat{v}_{b,\tau})$ y de $(u_{\eta}, u_{b,\tau})$ en el problema de conexión irregular-irregular de clase (b). Estas relaciones pueden obtenerse utilizando una notación unificada a partir de las correspondencias

$$\begin{aligned} z, \quad \tilde{z} &\equiv z^{-1} \longrightarrow z, \\ v_{\text{reg},k}, \quad v_{\eta,k}, \quad \hat{v}_{\eta,\tau} &\longrightarrow v_{\eta}, \\ v_{a,k}, \quad \hat{v}_{b,\tau} &\longrightarrow v_{\text{asy}}, \\ \lambda_k, \quad \lambda_{\tau} &\longrightarrow \lambda, \\ N, \quad \tilde{M} &\longrightarrow G, \\ u_{\text{reg}}, \quad u_{\eta} &\longrightarrow u_{\eta}, \\ u_{a,k}, \quad u_{b,\tau} &\longrightarrow u_{\text{asy}}, \end{aligned} \quad (2.361)$$

de manera que las relaciones (2.201), (2.202) y sus análogas (2.301), (2.325) en el problema de conexión irregular-irregular se escriben

$$v_{\eta}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2(G+1)}z^{G+1}\right)u_{\eta}(z), \quad (2.362)$$

$$v_{\text{asy}}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2(G+1)}z^{G+1}\right)u_{\text{asy}}(z). \quad (2.363)$$

Las primeras derivadas de (2.362) y (2.363) son

$$v'_{\eta}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2(G+1)}z^{G+1}\right)\left(-\frac{\lambda}{2}z^G u_{\eta}(z) + u'_{\eta}(z)\right), \quad (2.364)$$

$$v'_{\text{asy}}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda}{2(G+1)}z^{G+1}\right)\left(-\frac{\lambda}{2}z^G u_{\text{asy}}(z) + u'_{\text{asy}}(z)\right), \quad (2.365)$$

y el Wronskiano de $(v_{\eta}, v_{\text{asy}})$ es por definición

$$\mathcal{W}[v_{\eta}, v_{\text{asy}}] = v_{\eta}v'_{\text{asy}} - v'_{\eta}v_{\text{asy}}. \quad (2.366)$$

Efectuamos el producto $v_{\eta}v'_{\text{asy}}$ reemplazando las expresiones (2.362), (2.365):

$$v_{\eta}v'_{\text{asy}} = \exp\left(-\frac{\lambda}{G+1}z^{G+1}\right)\left(-\frac{\lambda}{2}z^G u_{\eta}u_{\text{asy}} + u_{\eta}u'_{\text{asy}}\right), \quad (2.367)$$

y el producto $-v'_{\eta}v_{\text{asy}}$ reemplazando las expresiones (2.363), (2.364):

$$-v'_{\eta}v_{\text{asy}} = \exp\left(-\frac{\lambda}{G+1}z^{G+1}\right)\left(\frac{\lambda}{2}z^G u_{\eta}u_{\text{asy}} - u'_{\eta}u_{\text{asy}}\right). \quad (2.368)$$

Sustituimos los segundos miembros de (2.367) y (2.368) en el segundo miembro de (2.366) para obtener

$$\mathcal{W}[v_{\eta}, v_{\text{asy}}] = \exp\left(-\frac{\lambda}{G+1}z^{G+1}\right)\left(u_{\eta}u'_{\text{asy}} - u'_{\eta}u_{\text{asy}}\right), \quad (2.369)$$

donde

$$u_{\eta}u'_{\text{asy}} - u'_{\eta}u_{\text{asy}} \equiv \mathcal{W}[u_{\eta}, u_{\text{asy}}] \quad (2.370)$$

es el Wronskiano de $(u_{\eta}, u_{\text{asy}})$. Obtenemos así la deseada relación entre Wronskianos:

$$\mathcal{W}[v_{\eta}, v_{\text{asy}}] = \exp\left(-\frac{\lambda}{G+1}z^{G+1}\right)\mathcal{W}[u_{\eta}, u_{\text{asy}}]. \quad (2.371)$$

Nota 15. La expresión asintótica (2.208) del Wronskiano de las funciones auxiliares en términos de $u_{\text{reg}}(z)$, $\hat{\zeta}_{a,k}(z)$, $\mathcal{S}_{a,k}(z)$ y sus derivadas se obtiene sustituyendo en la forma exacta (2.203) del Wronskiano las expresiones (2.201) de $v_{\text{reg},k}(z)$, (2.205) de $v_{a,k}(z)$ y sus derivadas:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] &\sim \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)}z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right)u_{\text{reg}}(z)\mathcal{S}'_{a,k}(z) + \\ &+ \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)}z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right)\left(\hat{\zeta}'_{a,k}(z) + \frac{\lambda_k z^N}{2}\right)u_{\text{reg}}(z)\mathcal{S}_{a,k}(z) - \\ &- \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)}z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right)u'_{\text{reg}}(z)\mathcal{S}_{a,k}(z), \\ &(z \rightarrow \infty), \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.372)$$

La expresión (2.372) gana en sencillez si introducimos la función

$$w_{\text{reg},k}(z) = \exp\left(\hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) v_{\text{reg},k}(z), \quad (k = 1, 2), \quad (2.373)$$

es decir, habida cuenta de (2.201),

$$w_{\text{reg},k}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) u_{\text{reg}}(z), \quad (k = 1, 2). \quad (2.374)$$

Poniendo (2.374) y su derivada en (2.372) obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] &\sim \left(2\hat{\zeta}'_{a,k}(z) w_{\text{reg},k}(z) - w'_{\text{reg},k}(z)\right) \mathcal{S}_{a,k}(z) + \\ &+ w_{\text{reg},k}(z) \mathcal{S}'_{a,k}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (k = 1, 2). \end{aligned} \quad (2.375)$$

que es (2.208).

Nota 16. Para cada $k = 1, 2$, los parámetros $\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)}$ de la ecuación diferencial (2.212) verificada por $w_{\text{reg},k}(z)$ dependen de los parámetros g_j de la ecuación canónica (2.147), (2.148) y de los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ que caracterizan el comportamiento asintótico de sus soluciones formales (2.166), (2.167) en la forma que indican las expresiones siguientes.

Si $N = 0$ tenemos

$$\hat{\rho}_{a,0}^{(k)} = 0, \quad (2.376)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} = -g_j, \quad (j = -2, -1), \quad (2.377)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,0}^{(k)} = -g_0. \quad (2.378)$$

Si $N = 1$ tenemos

$$\hat{\rho}_{a,0}^{(k)} = -2\alpha_1^{(k)}, \quad (2.379)$$

$$\hat{\rho}_{a,1}^{(k)} = 0, \quad (2.380)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} = -g_j, \quad (j = -2, -1), \quad (2.381)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,0}^{(k)} = -g_0 + \left(\alpha_1^{(k)}\right)^2, \quad (2.382)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,1}^{(k)} = -g_1, \quad (2.383)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,2}^{(k)} = -g_2. \quad (2.384)$$

Si $N = 2, 3, 4, \dots$ tenemos

$$\hat{\rho}_{a,j}^{(k)} = -2\alpha_{j+1}^{(k)}, \quad (j = 0, 1, \dots, N-1), \quad (2.385)$$

$$\hat{\rho}_{a,N}^{(k)} = 0, \quad (2.386)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} = -g_j, \quad (j = -2, -1), \quad (2.387)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} = -g_j + \sum_{\sigma=1}^{j+1} \alpha_{\sigma}^{(k)} \alpha_{j+2-\sigma}^{(k)} - (j+1) \alpha_{j+2}^{(k)},$$

$$(j = 0, 1, \dots, N-2), \quad (2.388)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,N-1}^{(k)} = \sum_{\sigma=1}^N \alpha_{\sigma}^{(k)} \alpha_{N+1-\sigma}^{(k)} - g_{N-1}, \quad (2.389)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} = -g_j + \sum_{\sigma=j+2-N}^N \alpha_{\sigma}^{(k)} \alpha_{j+2-\sigma}^{(k)},$$

$$(j = N, N+1, \dots, 2N-2), \quad (2.390)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,2N-1}^{(k)} = -g_{2N-1}, \quad (2.391)$$

$$\hat{\varepsilon}_{a,2N}^{(k)} = -g_{2N} = -\lambda_k^2. \quad (2.392)$$

Nota 17. Para obtener desarrollos de Heaviside válidos en cualquier sector $S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$, $p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}$, realizamos en (2.225) y (2.231) el cambio de variable

$$z \in S_{\tilde{k},0} \longrightarrow z \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}}, \quad \left(z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} \right),$$

$$(p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.393)$$

donde

$$\omega_{N+1} \equiv \exp(i2\pi/(N+1)), \quad (2.394)$$

de manera que $z \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}} \in S_{\tilde{k},0}$ si $z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$; el cambio de variable transforma a (2.225) en

$$\mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(-\lambda_k z^{N+1} \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)} / (N+1) \right)^{n+\delta_L^{(a,k)}}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(a,k)})},$$

$$\left(z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C} \right), \quad \left(\delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C} \right), \quad (p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}),$$

$$(k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (2.395)$$

y a (2.231) en

$$\exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1} \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)}\right) \sim \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z), \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$\left(z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C} \right), \quad (L = 0, 1, \dots, N),$$

$$(p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.396)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z) &\equiv \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}\left(z\omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}}\right), & (L=0,1,\dots,N), \\ &(p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1) \end{aligned} \quad (2.397)$$

y las potencias de ω_{N+1} en (2.395) y (2.396) se reescriben teniendo en cuenta (2.394)

$$\begin{aligned} \left(\omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)}\right)^{n+\delta_L^{(a,k)}} &= \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a,k)}} = \exp\left(-i2\pi p_{\tilde{k}}\delta_L^{(a,k)}\right), \\ \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)} &= 1, \\ &(n, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1), \quad (L=0,1,\dots,N). \end{aligned} \quad (2.398)$$

De (2.395) y (2.398) obtenemos, habida cuenta de (2.225), los desarrollos formales válidos en todo sector $S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z) &= \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z)\omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a,k)}} = \\ &= \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a,k)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\left(-\lambda_k z^{N+1}/(N+1)\right)^{n+\delta_L^{(a,k)}}}{\Gamma\left(n+1+\delta_L^{(a,k)}\right)}, \\ &(z \in S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}), \quad \left(\delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}\right), \quad (L=0,1,\dots,N), \\ &(p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1). \end{aligned} \quad (2.399)$$

Asimismo, de (2.396) y (2.398) obtenemos las $N+1$ relaciones asintóticas válidas en todo sector $S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}}$

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1}z^{N+1}\right) &\sim \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z) = \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z)\omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a,k)}}, \quad (z \rightarrow \infty), \\ &(z \in S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}), \quad (p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1), \quad (L=0,1,\dots,N). \end{aligned} \quad (2.400)$$

Una consecuencia inmediata de (2.400) es que para cada $k=1,2$ y $p_k \in \mathbf{Z}$, dado un conjunto de $N+1$ constantes complejas no nulas

$$\left\{\beta_{a,L}^{(k,p_k)}; L=0,1,\dots,N\right\}, \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (2.401)$$

la combinación lineal de los desarrollos (2.399), (2.225) definida en cada sector $S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}}$ por esas constantes

$$\begin{aligned} \Lambda_{a,N}^{(k,p_k)}(z) &\equiv \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k,p_k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z), \quad (z \in S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}), \\ &(p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k=1,2), \quad (\tilde{k}=2,1), \end{aligned} \quad (2.402)$$

es proporcional asintóticamente a la exponencial en el primer miembro de (2.400), es decir,

$$\Lambda_{a,N}^{(k,p_k)}(z) \sim \exp\left(-\frac{\lambda_k}{N+1} z^{N+1}\right) \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k,p_k)}, \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$\left(z \in S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}\right), \quad (p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.403)$$

Comparando (2.402), (2.403) con (2.204) encontramos que si las constantes $\beta_{a,L}^{(k,p_k)}$ verifican

$$\sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k,p_k)} = \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}], \quad (p_k \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (2.404)$$

entonces el Wronskiano de las funciones auxiliares en el primer miembro de (2.204) verifica la relación asintótica

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] \sim \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k,p_k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k,p_k)}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad \left(z \in S_{\tilde{k},p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}\right),$$

$$(p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.405)$$

Nota 18. Describimos paso a paso el proceso de cálculo de los Wronskianos $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}]$ en los numeradores de las expresiones (2.226) y por añadidura de los factores $T_{\tilde{k}}$. Para encontrar los valores de las constantes $\beta_{a,L}^{(k)}$ en el primer miembro de (2.236), así como las $\delta_L^{(a,k)}$ y la relación entre índices \hat{n} , n , sustituimos en el segundo miembro de (2.237) los desarrollos formales (2.225): el resultado es un nuevo desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares $v_{\text{reg},k}$, $v_{a,k}$ en potencias ascendentes y descendentes de la variable z :

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] \sim \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} \mathcal{E}_{a,L}^{(k)}(z) =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^N \left(\frac{\beta_{a,L}^{(k)}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(a,k)})} \right) \left(\frac{-\lambda_k}{N+1} \right)^{n+\delta_L^{(a,k)}} z^{(N+1)(n+\delta_L^{(a,k)})},$$

$$(z \rightarrow \infty), \quad \left(z \in S_{\tilde{k},0} \subset \mathbf{C}\right),$$

$$\left(\delta_L^{(a,k)} \in \mathbf{C}\right), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.406)$$

La comparación de este desarrollo con el primer desarrollo (2.217) se realiza identificando en primer lugar los exponentes de las potencias de z , de donde resulta la relación entre índices \hat{n} , n

$$\hat{n} = \hat{n}_L = (N+1)n + L + 1, \quad (n, \hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (2.407)$$

y las constantes $\delta_L^{(a,k)}$

$$\delta_L^{(a,k)} = \frac{\nu_k + \mu_k + L}{N + 1}, \quad (k = 1, 2), \quad (L = 0, 1, \dots, N). \quad (2.408)$$

Por consiguiente, el desarrollo (2.217) equivale a

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_{a,k}] \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^N \gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} z^{(N+1)(n+\delta_L^{(a,k)})}, \quad (z \rightarrow \infty),$$

$$(k = 1, 2), \quad (L = 0, 1, \dots, N). \quad (2.409)$$

Identificando ahora los coeficientes de las potencias de z en (2.406) y (2.409) obtenemos las constantes

$$\beta_{a,L}^{(k,0)} \equiv \beta_{a,L}^{(k)} = \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n + 1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-2\hat{\lambda}_k/(N + 1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}}, \quad (n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}),$$

$$(L = 0, 1, \dots, N), \quad (k = 1, 2), \quad (2.410)$$

donde n toma cualquier valor entero y $\hat{n}_L, \delta_L^{(a,k)}$ se obtienen de (2.407), (2.408) para cada $L = 0, 1, \dots, N$.

Reemplazando (??), (2.410) en (2.236) obtenemos las fórmulas de los Wronskianos en los numeradores de (2.226)

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a,k}] = \sum_{L=0}^N \beta_{a,L}^{(k)} = \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n + 1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N + 1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}},$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (2.411)$$

de las cuales resulta la forma explícita de la *condición de cuantización* (2.199):

$$\sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(1)} \Gamma(n + 1 + \delta_L^{(a,1)})}{(-\lambda_1/(N + 1))^{n+\delta_L^{(a,1)}}} = 0,$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}). \quad (2.412)$$

Los Wronskianos en los denominadores de (2.226), dados en (2.200), se reescriben para cada $N = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathcal{W}[u_{a,\tilde{k}}, u_{a,k}] = -2\lambda_{\tilde{k}} a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})} = 2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})}, \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.413)$$

Reemplazando (2.411) y (2.413) en el numerador y denominador de (2.226) respectivamente, obtenemos las fórmulas explícitas de los factores de conexión para la solución analítica regular $u_{\text{reg}}(z)$ en el sector $S_{\tilde{k},0}$:

$$T_{\tilde{k},0} \equiv T_{\tilde{k}} = \frac{1}{2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})}} \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a,\hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n + 1 + \delta_L^{(a,k)})}{(-\lambda_k/(N + 1))^{n+\delta_L^{(a,k)}}},$$

$$(n, \hat{n}_L \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.414)$$

El cálculo de los factores de conexión $T_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$ en cualquier sector $S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$ sigue un itinerario semejante al que nos ha llevado a determinar los factores $T_{\tilde{k}, 0}$ en el sector $S_{\tilde{k}, 0}$. Los valores de las constantes $\beta_{a, L}^{(k, p_k)}$ en el primer miembro de (2.404) se obtienen (ver nota 17) sustituyendo en el segundo miembro de (2.405) los desarrollos formales (2.399), dando como resultado el desarrollo del Wronskiano de las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\text{reg}, k}, v_{a, k}] &\sim \sum_{L=0}^N \beta_{a, L}^{(k, p_k)} \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a, k)}} \mathcal{E}_{a, L}^{(k)}(z) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{L=0}^N \left(\frac{\beta_{a, L}^{(k, p_k)} \omega_{N+1}^{-p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a, k)}}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(a, k)})} \right) \left(\frac{-2\hat{\lambda}_k}{N+1} \right)^{n+\delta_L^{(a, k)}} z^{(N+1)(n+\delta_L^{(a, k)})}, \\ &\quad (z \rightarrow \infty), \quad (z \in S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} \subset \mathbf{C}), \quad (p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \\ &\quad (\delta_L^{(a, k)} \in \mathbf{C}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \end{aligned} \quad (2.415)$$

Identificando los exponentes de las potencias de z en (2.415) y (2.217) se obtienen expresiones idénticas a (2.407), (2.408), (2.409). Identificando ahora los coeficientes de las potencias de z en (2.415) y (2.409) obtenemos las constantes $\beta_{a, L}^{(k, p_k)}$

$$\begin{aligned} \beta_{a, L}^{(k, p_k)} &= \beta_{a, L}^{(k, 0)} \omega_{N+1}^{p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a, k)}} = \beta_{a, L}^{(k, 0)} \omega_{N+1}^{p_{\tilde{k}}(\nu_k + \mu_k + L)}, \quad (p_k, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \\ &\quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \end{aligned} \quad (2.416)$$

donde $\beta_{a, L}^{(k, 0)} \equiv \beta_{a, L}^{(k)}$ viene dada en (2.410).

Reemplazando (2.416), (2.410) en (2.404) obtenemos las fórmulas de los Wronskianos en los numeradores de (2.226) válidas en cualquier sector $S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_{a, k}] &= \sum_{L=0}^N \beta_{a, L}^{(k, p_k)} = \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a, \hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(a, k)}) \omega_{N+1}^{p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a, k)}}}{(-2\hat{\lambda}_k/(N+1))^{n+\delta_L^{(a, k)}}}, \\ &\quad (n, \hat{n}_L, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1), \end{aligned} \quad (2.417)$$

de donde la *condición de cuantización* (2.199) toma la forma

$$\begin{aligned} \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a, \hat{n}_L}^{(1)} \Gamma(n+1+\delta_L^{(a, 1)}) \omega_{N+1}^{p_2(N+1)\delta_L^{(a, 1)}}}{(-2\hat{\lambda}_1/(N+1))^{n+\delta_L^{(a, 1)}}} &= 0, \\ &\quad (n, \hat{n}_L, p_2 \in \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (2.418)$$

Reemplazando (2.417) y (2.413) en el numerador y denominador de (2.226) respectivamente, obtenemos las fórmulas explícitas de los factores de conexión para la solución analítica regular $u_{\text{reg}}(z)$ en cualquier sector $S_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}}$:

$$T_{\tilde{k}, p_{\tilde{k}}} = \frac{1}{2\lambda_k a_0^{(k)} a_0^{(\tilde{k})}} \sum_{L=0}^N \frac{\gamma_{a, \hat{n}_L}^{(k)} \Gamma(n+1 + \delta_L^{(a,k)}) \omega_{N+1}^{p_{\tilde{k}}(N+1)\delta_L^{(a,k)}}}{\left(-2\hat{\lambda}_k/(N+1)\right)^{n+\delta_L^{(a,k)}}},$$

$$(n, \hat{n}_L, p_{\tilde{k}} \in \mathbf{Z}), \quad (k = 1, 2), \quad (\tilde{k} = 2, 1). \quad (2.419)$$

Nota 19. Consideremos la ecuación radial de Schrödinger (2.139), (2.145) con un potencial polinomial general de grado mínimo $\tilde{\mu} < -1$ y grado máximo $\tilde{\nu} \geq \tilde{\mu}$:

$$V(r) = \sum_{j=\tilde{\mu}}^{\tilde{\nu}} \tilde{A}_j r^j, \quad (\tilde{\mu} \leq \tilde{\nu}), \quad (\tilde{A}_{\tilde{\mu}} \neq 0), \quad (\tilde{A}_{\tilde{\nu}} \neq 0). \quad (2.420)$$

El potencial efectivo correspondiente a (2.420)

$$V_{ef}(r) = V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2}, \quad (2.421)$$

que se obtiene incorporando el término centrífugo $l(l+1)\hbar^2/2mr^2$ al potencial $V(r)$, se escribe en notación homogénea

$$V_{ef}(r) = \sum_{j=\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} A_j r^j, \quad (\hat{\mu} \leq \hat{\nu}), \quad (A_{\hat{\mu}} \neq 0), \quad (A_{\hat{\nu}} \neq 0), \quad (2.422)$$

donde si $l = 0$

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\nu} = \tilde{\nu}, \quad A_j = \tilde{A}_j \quad (j = \hat{\mu}, \hat{\mu} + 1, \dots, \hat{\nu}), \quad (2.423)$$

y si $l \neq 0$, los valores de $\hat{\mu}$, $\hat{\nu}$ y A_j dependen de la situación del exponente -2 del término centrífugo respecto del intervalo $(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$. Por ejemplo, si $l \neq 0$, $\tilde{\mu} \leq -2$ y $\tilde{\nu} \geq 1$, se tiene

$$\hat{\mu} = \tilde{\mu}, \quad \hat{\nu} = \tilde{\nu}, \quad A_{-2} = \tilde{A}_{-2} + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2m},$$

$$A_j = \tilde{A}_j, \quad (j = \hat{\mu}, \hat{\mu} + 1, \dots, \hat{\nu}), \quad (j \neq -2). \quad (2.424)$$

En todo caso, dados los valores numéricos de $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\nu}$, se tiene

$$\hat{\mu} \leq -2, \quad \hat{\nu} \geq -2. \quad (2.425)$$

La ecuación radial de Schrödinger con el potencial polinomial general (2.420) se escribe entonces

$$R''(r) + q(r) R(r) = 0, \quad (0 \leq r < +\infty), \quad (2.426)$$

donde la función $q(r)$ resulta de incorporar al potencial efectivo el término que contiene el parámetro espectral E de energía:

$$q(r) = \frac{2m}{\hbar^2} (E - V_{ef}(r)). \quad (2.427)$$

En notación homogénea,

$$q(r) = \sum_{j=\hat{M}}^{\hat{N}} B_j r^j, \quad (\hat{M} \leq \hat{N}), \quad (B_{\hat{M}} \neq 0), \quad (B_{\hat{N}} \neq 0), \quad (2.428)$$

donde los valores de \hat{M} , \hat{N} y B_j dependen de la situación del exponente 0 del término de energía respecto del intervalo $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$. Por ejemplo, si 0 pertenece al intervalo $(\hat{\mu}, \hat{\nu})$, se tiene:

$$\begin{aligned} \hat{M} = \hat{\mu}, \quad \hat{N} = \hat{\nu}, \quad B_0 = -\frac{2m(A_0 - E)}{\hbar^2}, \\ B_j = -\frac{2mA_j}{\hbar^2}, \quad (j = \hat{M}, \hat{M} + 1, \dots, \hat{N}), \quad (j \neq 0). \end{aligned} \quad (2.429)$$

Consideremos los cambios de variables y parámetros que transforman a la ecuación de Schrödinger con un potencial suma de potencias en la ecuación canónica correspondiente. Si \hat{M} y \hat{N} son pares tenemos:

$$\begin{aligned} r = \kappa z, \quad u(z) = R(\kappa z), \quad g(z) = -\kappa^2 q(\kappa z), \\ M = \frac{\hat{M}}{2}, \quad N = \frac{\hat{N}}{2}, \end{aligned} \quad (2.430)$$

y si \hat{M} o \hat{N} es impar tenemos:

$$\begin{aligned} r = \kappa z^2, \quad u(z) = R(\kappa z^2), \quad g(z) = \frac{3}{4} z^{-2} - (2\kappa z)^2 q(\kappa z^2), \\ M = \hat{M} + 1, \quad N = \hat{N} + 1, \end{aligned} \quad (2.431)$$

siendo κ un parámetro con dimensiones de longitud que puede elegirse como función de algún parámetro de la ecuación radial, por ejemplo,

$$\kappa = \left(-B_{\hat{N}}^{-1}\right)^{1/(\hat{N}+2)}, \quad (2.432)$$

donde si $\hat{\nu} > 0$ se tiene $\hat{N} = \hat{\nu} > 0$ y

$$B_{\hat{N}} = -\frac{2mA_{\hat{N}}}{\hbar^2}, \quad (2.433)$$

y si $\hat{\nu} \leq 0$ se tiene $\hat{N} = 0$ y

$$B_{\hat{N}} = \frac{2m(A_{\hat{N}} - E)}{\hbar^2}. \quad (2.434)$$

Así, en el ejemplo $l \neq 0$, $\tilde{\mu} \leq -2$, $\tilde{\nu} \geq 1$ considerado en (2.424), si $\tilde{\mu}$ y $\tilde{\nu}$ son pares, se tiene:

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{2m(\tilde{A}_0 - E)\kappa^2}{\hbar^2}, & g_{-2} &= l(l+1) + \frac{2m\tilde{A}_{-2}}{\hbar^2}, \\ g_j &= \frac{2m\tilde{A}_j\kappa^{j+2}}{\hbar^2}, & (j &= 2M, 2M+1, \dots, 2N \neq 0, -2), \end{aligned} \quad (2.435)$$

y si $\tilde{\mu}$ o $\tilde{\nu}$ es impar, se tiene:

$$\begin{aligned} g_2 &= \frac{8m(\tilde{A}_0 - E)\kappa^2}{\hbar^2}, & g_{-2} &= \left(2l + \frac{1}{2}\right) \left(2l + \frac{3}{2}\right) + \frac{8m\tilde{A}_{-2}}{\hbar^2}, \\ g_j &= \frac{8m\tilde{A}_{j/2-1}\kappa^{j/2+1}}{\hbar^2}, & (j &= 2M, 2M+2, \dots, 2N \neq 2, -2), \\ g_j &= 0, & (j &= 2M+1, 2M+3, \dots, 2N-1). \end{aligned} \quad (2.436)$$

Análogamente a la ecuación canónica (I), el comportamiento de la función $g(z)$ determina la existencia y tipo de los puntos singulares de la ecuación canónica (II) en el z -plano complejo ampliado. La suma de potencias $g(z)$ permanece acotada para todo valor complejo de z excepto en $z = 0$ para todo $M \leq -2$ y en $z = \infty$ para todo $N \geq 1$, donde se hace infinito. De este modo, al igual que en el caso $M = -1$, también ahora el origen y el infinito son las únicas singularidades de la ecuación canónica.

En la vecindad del origen, el comportamiento del coeficiente funcional $p(z)$ se caracteriza por un exponente K_1 tal que

$$p(z) \sim p_{K_1} z^{-K_1}, \quad (z \rightarrow 0), \quad (2.437)$$

donde

$$K_1 = -\infty, \quad p_{K_1} = 0, \quad (2.438)$$

y el comportamiento del coeficiente $q(z)$ se caracteriza por un exponente K_2 tal que

$$q(z) \sim q_{K_2} z^{-K_2}, \quad (z \rightarrow 0), \quad (2.439)$$

donde

$$K_2 = -2M = 4, 6, 8, \dots, \quad q_{K_2} = -g_{2M} \neq 0. \quad (2.440)$$

Concluimos que para todo $M = -2, -3, -4, \dots$ y todo $N = 0, 1, 2, \dots$, el origen $z = 0$ es un punto singular irregular de la ecuación canónica (2.246), (2.247) cuyo rango de Poincaré es

$$H_0 = \max \{1, K_1, K_2/2\} - 1 = -M - 1 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.441)$$

En la vecindad del infinito, el comportamiento de $p(z)$ depende de un exponente \tilde{K}_1 tal que

$$p(z) \sim \tilde{p}_{\tilde{K}_1} z^{\tilde{K}_1-2}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.442)$$

donde

$$\tilde{K}_1 = -\infty, \quad \tilde{p}_{\tilde{K}_1} = 0, \quad (2.443)$$

y el comportamiento de $q(z)$ depende de un exponente \tilde{K}_2 tal que

$$q(z) \sim \tilde{q}_{\tilde{K}_2} z^{\tilde{K}_2-4}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.444)$$

donde

$$\tilde{K}_2 = 2N + 4 = 4, 6, 8, \dots, \quad \tilde{q}_{\tilde{K}_2} = -g_{2N} \neq 0. \quad (2.445)$$

Concluimos que para todo $M = -2, -3, -4, \dots$ y todo $N = 0, 1, 2, \dots$, el infinito $z = \infty$ es una singularidad irregular de la ecuación canónica (2.246), (2.247) cuyo rango de Poincaré es

$$H_\infty = \max \{1, \tilde{K}_1, \tilde{K}_2/2\} - 1 = N + 1 = 1, 2, 3, \dots \quad (2.446)$$

Nota 20. Las fórmulas (2.281), (2.282), (2.283), (2.284) de los rayos de Stokes y amplitudes angulares de los sectores de validez en las relaciones de conexión (2.275), (2.278) son una consecuencia de las expresiones (2.277), (2.280) de los sectores S_{k,p_k} y S_{τ,p_τ} respectivamente.

En particular, la expresión (2.277) de S_{k,p_k} se reescribe

$$-\pi < \arg(\lambda_k z^{N+1}) - 2\pi p_k < \pi, \quad \forall z \in S_{k,p_k}, \quad (2.447)$$

donde $\arg(\lambda_k z^{N+1}) = \arg(\lambda_k) + (N+1)\arg(z)$, de manera que sumando en (2.447) $2\pi p_k$, restando $\arg(\lambda_k)$ y dividiendo la desigualdad entre $N+1$ se obtiene la expresión equivalente

$$-\frac{\pi}{N+1} + \left(\frac{2\pi p_k - \arg(\lambda_k)}{N+1} \right) < \arg(z) < \frac{\pi}{N+1} + \left(\frac{2\pi p_k - \arg(\lambda_k)}{N+1} \right), \quad \forall z \in S_{k,p_k}. \quad (2.448)$$

La fórmula (2.282) que expresa la amplitud angular $\Delta\phi_{k,p_k}$ del sector de validez S_{k,p_k} se obtiene restando los ángulos que acotan superior e inferiormente a $\arg(z)$ en (2.448).

La fórmula (2.281) del rayo de Stokes ϕ_{k,p_k} que separa los sectores adyacentes S_{k,p_k} , S_{k,p_k+1} se obtiene sumando $2\pi/(N+1)$ en la desigualdad resultante de cambiar p_k por p_k+1 en (2.448):

$$\frac{\pi}{N+1} + \left(\frac{2\pi p_k - \arg(\lambda_k)}{N+1} \right) < \arg(z) < \frac{3\pi}{N+1} + \left(\frac{2\pi p_k - \arg(\lambda_k)}{N+1} \right),$$

$$\forall z \in S_{k,p_k+1}. \quad (2.449)$$

La cota superior de $\arg(z)$ en (2.448) es igual que la cota inferior de $\arg(z)$ en (2.449) y define el argumento del rayo de Stokes ϕ_{k,p_k} , toda vez que

$$\frac{\pi}{N+1} + \left(\frac{2\pi p_k - \arg(\lambda_k)}{N+1} \right) = \frac{(2p_k+1)\pi - \arg(\lambda_k)}{N+1}. \quad (2.450)$$

Consideremos la expresión (2.280) de S_{τ,p_τ} que se reescribe

$$-\pi < \arg(\lambda_\tau z^{M+1}) - 2\pi p_\tau < \pi, \quad \forall z \in S_{\tau,p_\tau}, \quad (2.451)$$

donde $\arg(\lambda_\tau z^{M+1}) = \arg(\lambda_\tau) + (M+1)\arg(z)$, de manera que sumando en (2.451) $2\pi p_\tau$, restando $\arg(\lambda_\tau)$ y dividiendo la desigualdad entre $M+1$ se obtiene la expresión equivalente

$$\frac{\pi}{M+1} + \left(\frac{2\pi p_\tau - \arg(\lambda_\tau)}{M+1} \right) < \arg(z) < -\frac{\pi}{M+1} + \left(\frac{2\pi p_\tau - \arg(\lambda_\tau)}{M+1} \right),$$

$$\forall z \in S_{\tau,p_\tau}, \quad (2.452)$$

donde el signo negativo de $M+1$ para todo $M = -2, -3, \dots$ cambia el sentido de la desigualdad. Restando los ángulos que acotan superior e inferiormente a $\arg(z)$ en (2.452) se obtiene la fórmula (2.284) que expresa la amplitud angular $\Delta\phi_{\tau,p_\tau}$ del sector de validez S_{τ,p_τ} .

La fórmula (2.283) del rayo de Stokes ϕ_{τ,p_τ} que separa los sectores adyacentes S_{τ,p_τ} , $S_{\tau,p_\tau+1}$ se obtiene sumando $2\pi/(M+1)$ en la desigualdad resultante de cambiar p_τ por $p_\tau+1$ en (2.452):

$$\frac{3\pi}{M+1} + \left(\frac{2\pi p_\tau - \arg(\lambda_\tau)}{M+1} \right) < \arg(z) < \frac{\pi}{M+1} + \left(\frac{2\pi p_\tau - \arg(\lambda_\tau)}{M+1} \right),$$

$$\forall z \in S_{\tau,p_\tau+1}. \quad (2.453)$$

La cota superior de $\arg(z)$ en (2.453) coincide con la cota inferior de $\arg(z)$ en (2.452) y define el argumento del rayo de Stokes ϕ_{τ,p_τ} , toda vez que

$$\frac{\pi}{M+1} + \left(\frac{2\pi p_\tau - \arg(\lambda_\tau)}{M+1} \right) = \frac{(2p_\tau+1)\pi - \arg(\lambda_\tau)}{M+1}. \quad (2.454)$$

Nota 21. La expresión de $u_{b,3}(z)$ en combinación lineal de $\{u_{a,1}(z), u_{a,2}(z)\}$ se obtiene del modo siguiente. La primera fórmula de conexión de clase (b) (2.278) se multiplica por el factor de conexión $T_{4,p_4}^{(2)}$ y la segunda por $T_{4,p_4}^{(1)}$:

$$\begin{aligned} T_{4,p_4}^{(2)} u_1(z) &= T_{3,p_3}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} u_{b,3}(z) + T_{4,p_4}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} u_{b,4}(z), \\ T_{4,p_4}^{(1)} u_2(z) &= T_{3,p_3}^{(2)} T_{4,p_4}^{(1)} u_{b,3}(z) + T_{4,p_4}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} u_{b,4}(z), \\ &(z \in S(p_3, p_4)), \quad (p_3, p_4 \in \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (2.455)$$

La compatibilidad del sistema (2.455) está asegurada por la independencia lineal de las soluciones $u_1(z)$, $u_2(z)$ y la regla de Cramer exige en consecuencia que el determinante del sistema sea no nulo:

$$D_3 T_{4,p_4}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} \neq 0, \quad (2.456)$$

es decir,

$$D_3 \equiv T_{3,p_3}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{3,p_3}^{(2)} T_{4,p_4}^{(1)} \neq 0, \quad T_{4,p_4}^{(1)} \neq 0, \quad T_{4,p_4}^{(2)} \neq 0, \\ (p_3, p_4 \in \mathbf{Z}). \quad (2.457)$$

Restando las ecuaciones (2.455) se obtiene $u_{b,3}(z)$ en función de $u_1(z)$, $u_2(z)$:

$$u_{b,3}(z) = \frac{T_{4,p_4}^{(2)}}{D_3} u_1(z) - \frac{T_{4,p_4}^{(1)}}{D_3} u_2(z), \\ (z \in S(p_3, p_4)), \quad (p_3, p_4 \in \mathbf{Z}). \quad (2.458)$$

Sustituyendo en (2.458) las soluciones multiplicativas $u_1(z)$, $u_2(z)$ por sus expresiones (2.275), obtenemos finalmente

$$\begin{aligned} u_{b,3}(z) &= \left(\frac{T_{1,p_1}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{4,p_4}^{(1)} T_{1,p_1}^{(2)}}{D_3} \right) u_{a,1}(z) + \\ &+ \left(\frac{T_{2,p_2}^{(1)} T_{4,p_4}^{(2)} - T_{4,p_4}^{(1)} T_{2,p_2}^{(2)}}{D_3} \right) u_{a,2}(z), \\ &(z \in S(p_1, p_2) \cap S(p_3, p_4)), \quad (p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.459)$$

para enteros p_1, p_2, p_3, p_4 tales que la intersección del sector $S(p_1, p_2)$ con $S(p_3, p_4)$ es no vacía.

Nota 22. A fin de obtener el primer desarrollo del Wronskiano de las funciones auxiliares, las formas funcionales de $v_{\eta,k}$ y $v_{a,k}$ resultantes de sustituir (2.250), (2.252) en los segundos miembros de (2.301), y sus derivadas

$v'_{\eta,k}$, $v'_{a,k}$, se reemplazan en la forma exacta (2.302) del Wronskiano de las funciones auxiliares para obtener la expresión asintótica

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] &\sim \left(2\hat{\zeta}'_{a,k}(z) w_{\eta,k}(z) - w'_{\eta,k}(z) \right) \mathcal{S}_{a,k}(z) + \\ &+ w_{\eta,k}(z) \mathcal{S}'_{a,k}(z), \quad (z \rightarrow \infty), \quad (\eta, k = 1, 2), \end{aligned} \quad (2.460)$$

donde para cada $k = 1, 2$,

$$\hat{\zeta}_{a,k}(z) = \zeta_{a,k}(z) + \frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1}, \quad (2.461)$$

$$\zeta_{a,k}(z) = \chi_{a,k}(z) - \frac{\alpha_{N+1}^{(k)}}{N+1} z^{N+1} = \sum_{p=1}^N \frac{\alpha_p^{(k)}}{p} z^p, \quad (2.462)$$

siendo $\mathcal{S}_{a,k}(z)$ la serie dada en (2.252) y $\chi_{a,k}(z)$ el polinomio de grado $N+1$ dado en (2.253).

Para cada $\eta, k = 1, 2$, la función

$$w_{\eta,k}(z) = \exp\left(\hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) v_{\eta,k}(z), \quad (2.463)$$

es decir,

$$w_{\eta,k}(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) u_{\eta}(z), \quad (2.464)$$

verifica la ecuación diferencial

$$w'' + \left(\sum_{j=0}^N \hat{\rho}_{a,j}^{(k)} z^j \right) w' + \left(\sum_{j=2M}^{2N} \hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)} z^j \right) w = 0, \quad (2.465)$$

que se obtiene introduciendo en la ecuación canónica actual (2.246), (2.247) el cambio funcional inspirado en (2.464)

$$w(z) = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2(N+1)} z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z)\right) u(z). \quad (2.466)$$

En consecuencia, los parámetros $\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)}$ de los coeficientes polinómicos en (2.465) son funciones de los parámetros g_j de la ecuación canónica y de los parámetros $\alpha_p^{(k)}$ que caracterizan el comportamiento asintótico de sus soluciones formales de clase (a) (2.252), (2.253). Las expresiones de $\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)}$ coinciden formalmente con las dadas en la nota 16 para el caso regular-irregular, aunque es necesario señalar la dependencia de M en algunas de ellas (véase la nota 23). De la última en particular se deduce que $\hat{\varepsilon}_{a,2N}^{(k)} = -g_{2N}$ donde $\lambda_k = (g_{2N})^{1/2}$.

La expresión asintótica (2.460) se transforma en el deseado desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares $\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}]$ representando a la función $w_{\eta,k}(z)$, para cada $\eta, k = 1, 2$, mediante la serie

$$w_{\eta,k}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(k)} z^{n+\nu_k}, \quad (b_0^{(k)} \neq 0), \quad (2.467)$$

cuyos coeficientes $b_n^{(k)}$ verifican la recurrencia de orden $2N - 2M$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=2M+2}^{-1} \hat{\varepsilon}_{a,j-2}^{(k)} b_{n-j}^{(k)} + \left[(n + \nu_k)(n + \nu_k - 1) + \hat{\varepsilon}_{a,-2}^{(k)} \right] b_n^{(k)} + \\ & + \sum_{j=1}^{N+1} \left[\hat{\rho}_{a,j-1}^{(k)} (n - j + \nu_k) + \hat{\varepsilon}_{a,j-2}^{(k)} \right] b_{n-j}^{(k)} + \sum_{j=N+2}^{2N+2} \hat{\varepsilon}_{a,j-2}^{(k)} b_{n-j}^{(k)} = 0, \\ & (n \in \mathbf{Z}), \quad (b_0^{(k)} \neq 0) \end{aligned} \quad (2.468)$$

que se obtiene introduciendo (2.467) y sus dos primeras derivadas en (2.465).

Los valores de los exponentes característicos ν_k toman valores tales que (2.464) se verifica sustituyendo en su primer y segundo miembros los desarrollos (2.467) de $w_{\eta,k}(z)$ y (2.250) de $u_{\eta}(z)$ respectivamente, de donde resulta la identidad

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n^{(k)} z^{n+\nu_k} = \exp \left(-\frac{\hat{\lambda}_k}{N+1} z^{N+1} + \hat{\zeta}_{a,k}(z) \right) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho_{\eta}}, \quad (2.469)$$

de la que se deduce

$$\nu_1 = \rho_1, \quad \nu_2 = \rho_2, \quad (2.470)$$

donde ρ_1, ρ_2 son exponentes característicos de las soluciones multiplicativas dados en el apéndice B (véase (B.58)).

El primer desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares se obtiene ahora sustituyendo en la expresión asintótica (2.460) la forma polinómica de $\hat{\zeta}'_{a,k}(z)$ obtenida derivando (2.461), (2.462), así como el desarrollo (2.467) de $w_{\eta,k}(z)$, su derivada $w'_{\eta,k}(z)$ y la expansión (2.252) de $\mathcal{S}_{a,k}(z)$ y su derivada $\mathcal{S}'_{a,k}(z)$:

$$\mathcal{W}[v_{\eta,k}, v_{a,k}] \sim \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} z^{\hat{n}+\nu_k+\mu_k-1}, \quad (z \rightarrow \infty), \quad (2.471)$$

siendo para cada $k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \gamma_{a,\hat{n}}^{(k)} = & -2Q_{\hat{n}}^{(a,k)} - (\hat{n} + \nu_k - \mu_k) \Omega_{\hat{n},0}^{(a,k)} + 2 \sum_{p=1}^N \alpha_p^{(k)} \Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} + \lambda_k \Omega_{\hat{n},N+1}^{(a,k)}, \\ & (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \end{aligned} \quad (2.472)$$

donde

$$\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N + 1), \quad (2.473)$$

$$Q_{\hat{n}}^{(a,k)} = \sum_{j=0}^{+\infty} j a_j^{(k)} b_{\hat{n}+j}^{(k)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (2.474)$$

son series de cuya convergencia depende la validez de nuestro método de cálculo de los factores de conexión (véase el apéndice A).

Nota 23. Las expresiones de los parámetros $\hat{\rho}_{a,j}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}$ en la ecuación diferencial (2.465) coinciden formalmente con las expresiones de los parámetros correspondientes en la ecuación diferencial (2.212) dadas en la nota 16, fórmulas (2.376) a (2.392). Ahora bien, según indicamos en la sección 2.5, la ecuación canónica (2.147), (2.148 de la que depende (2.212) es el caso particular $M = -1$ de la ecuación canónica actual (2.246), (2.247), de la cual depende (2.465). En consecuencia, las expresiones de $\hat{\varepsilon}_{a,j}$, $\hat{\rho}_{a,j}$ en (2.465) dependen de M , aunque solamente en las fórmulas (2.377), (2.381), (2.387) se hace explícita esa dependencia: en vez de $j = -2, -1$, estas expresiones son válidas para $j = 2M, 2M + 1, \dots, -2, -1$.

Nota 24. Dado $M = -2, -3, -4, \dots$, para cada $\tau = 3, 4$ se tiene:

$$\hat{\rho}_{b,M}^{(\tau)} = 0, \quad (2.475)$$

$$\hat{\rho}_{b,j}^{(\tau)} = 2\beta_{-j-1}^{(\tau)}, \quad (j = M + 1, M + 2, \dots, -3, -2), \quad (2.476)$$

para $M = -2$ se tiene:

$$\hat{\varepsilon}_{b,-4}^{(\tau)} = \hat{\eta}_{b,0} - \frac{\lambda_\tau^2}{2} + \left(\frac{\lambda_\tau}{2}\right)^2 - g_{-4} = -g_{-4} = -\lambda_\tau^2, \quad (2.477)$$

$$\hat{\varepsilon}_{b,-3}^{(\tau)} = -g_{-3}, \quad (2.478)$$

$$\hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)} = -g_j, \quad (j = -2, -1, 0, 1, \dots, 2N - 1, 2N), \quad (2.479)$$

y para todo $M = -3, -4, -5, \dots$ se tiene:

$$\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)} = \hat{\eta}_{b,0} - \frac{\lambda_\tau^2}{2} + \left(\frac{\lambda_\tau}{2}\right)^2 - g_{2M} = -g_{2M} = -\lambda_\tau^2, \quad (2.480)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)} &= \hat{\eta}_{b,j-2M} - \lambda_\tau \beta_{M-1-j}^{(\tau)} - g_j, \\ (j &= 2M + 1, 2M + 2, 2M + 3, \dots, M - 3, M - 2), \end{aligned} \quad (2.481)$$

$$\hat{\varepsilon}_{b,M-1}^{(\tau)} = \hat{\eta}_{b,-M-1} - g_{M-1}, \quad (2.482)$$

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)} &= (j+1)\beta_{-j-2}^{(\tau)} + \hat{\eta}_{b,j-2M} - g_j, \\ (j &= M, M+1, M+2, \dots, -5, -4),\end{aligned}\quad (2.483)$$

$$\hat{\varepsilon}_{b,-3}^{(\tau)} = -2\beta_1^{(\tau)} - g_{-3}, \quad (2.484)$$

$$\hat{\varepsilon}_{b,j}^{(\tau)} = -g_j, \quad (j = -2, -1, 0, 1, \dots, 2N-1, 2N). \quad (2.485)$$

Las cantidades $\hat{\eta}_{b,j}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, -2M-4$) vienen dadas por las expresiones

$$\hat{\eta}_{b,0} = \left(\frac{\lambda_\tau}{2}\right)^2 = \frac{g_{2M}}{4}, \quad (2.486)$$

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{b,j} &= \beta_{-M-1-j}^{(\tau)} \lambda_\tau + \sum_{\sigma=1}^{j-1} \beta_{-M-1-\sigma}^{(\tau)} \beta_{-M-1-j+\sigma}^{(\tau)}, \\ (j &= 1, 2, \dots, -M-3, -M-2),\end{aligned}\quad (2.487)$$

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{b,j} &= \sum_{\sigma=0}^{-2M-4-j} \beta_{-2M-3-j-\sigma}^{(\tau)} \beta_{\sigma+1}^{(\tau)} = \sum_{\sigma=M+2+j}^{-M-2} \beta_{-M-1-\sigma}^{(\tau)} \beta_{-M-1-j+\sigma}^{(\tau)}, \\ (j &= -M-1, -M, -M+1, \dots, -2M-5, -2M-4)\end{aligned}\quad (2.488)$$

Capítulo 3

Aplicaciones del método de Naundorf

Uno de los problemas fundamentales del modelo de quarks, que desde hace más de cuarenta años ocupa a investigadores en física teórica, nuclear y de partículas, es el confinamiento de los quarks en los hadrones, esto es, la imposibilidad aparente de observar quarks libres.

A fin de comprender los mecanismos de confinamiento se han propuesto diferentes modelos. Los modelos de saco, "bag models", y los de potencial, "potential models", constituyen intentos pioneros de justificar el confinamiento dentro del marco teórico de la Mecánica Cuántica con resultados satisfactorios. En los primeros, el confinamiento se describe mediante condiciones de contorno en la superficie del saco. En los segundos, el confinamiento es consecuencia de la cola de un potencial que, introducido en la ecuación de onda, tiende hacia infinito cuando la distancia aumenta.

El fenómeno de la libertad asintótica, descubierto en la década de los 70 del siglo XX por Gross, Wilczek y Politzer en una teoría gauge donde los vectores de la interacción fuerte entre quarks son los cuantos del campo no abeliano de Yang-Mills, hizo posible interpretar el modelo de quarks de los hadrones mediante la teoría cuántica de campos, constituyendo desde entonces un argumento poderoso en la formulación de la Cromodinámica cuántica (QCD), considerada hoy como la teoría cuántica de campos fiable de las interacciones fuertes. En época todavía reciente, los métodos de Monte Carlo en retículos, combinados con la teoría quiral de perturbaciones [35], han permitido avances sustanciales en la aplicación de la QCD al cálculo de magnitudes observables, como el espectro fundamental de los hadrones y constantes de desintegración débil. A esta sucesión de logros admirables no se ha incorporado todavía la cuestión fundamental: comprender cómo la QCD explica el mecanismo de confinamiento de los quarks. Ideas como el mecanismo de vórtice centro, monopolos magnéticos, superconductividad dual, calorones, ecuaciones de Dyson-Schwinger, horizonte de Gribov, fun-

cionales de onda del vacío en $2 + 1$ dimensiones, potencial coulombiano de color, modelo de cadena de gluones, etc., constituyen en la actualidad líneas de investigación abiertas cuyo objeto último es comprender la naturaleza genuina del confinamiento.

Nuestra atención se orientó desde el principio hacia los modelos de potencial, en concreto a la búsqueda de un método analítico que, sin perjuicio de la eficiencia numérica, proporcione una representación satisfactoria de los estados y energías de un sistema quark-antiquark pesado ($q\bar{q}$) confinado en un mesón. Este problema se formaliza incorporando a la ecuación de Schrödinger no relativista un potencial confinante que depende de uno o más parámetros. La comparación de los valores teóricos de las energías propias que predice el modelo con las masas observadas de los mesones permite el ajuste de los valores de los parámetros del potencial.

En un trabajo preliminar [25] hemos explorado mediante varios ejemplos la posibilidad de producir confinamiento en sistemas ($q\bar{q}$) mediante *potenciales ópticos*, i. e., potenciales imaginarios puros con diferentes dependencias de la distancia r : parabólico, lineal, escalón, cola parabólica y cola lineal. En casi todos los casos estudiados, la solución del problema es analítica en términos de funciones especiales bien conocidas, funciones de Kummer, Airy, Bessel, Hankel y Whittaker. En el caso de potenciales con término lineal, solamente los estados de onda s ($l = 0$) admiten representación analítica exacta mediante funciones de Airy, habiéndose obtenido de los demás estados una representación asintótica aproximada o bien numérica. El estudio ha puesto de relieve algunos aspectos interesantes de esta clase de potenciales: que los potenciales imaginarios puros son capaces de producir estados confinados cuasiestables de los sistemas ($q\bar{q}$), que la adición de un núcleo real aumenta la longevidad de los estados, que un crecimiento más gradual de la cola con la distancia r implica estados más estables, que la adición de un término real atractivo aumenta el número de estados confinados observables reduciendo las anchuras, y que si la cola imaginaria está presente, hay confinamiento aunque el término real no sea de largo alcance.

3.1. El potencial Coulombiano + lineal

La ecuación de Schrödinger con el potencial "de Cornell" o Coulomb más lineal,

$$V(r) = -\frac{a'}{r} + b + cr, \quad (3.1)$$

cuyo comportamiento a pequeños y grandes valores de la distancia r se justifica por argumentos basados en la Cromodinámica Cuántica [67], ha sido objeto de estudio por diferentes autores interesados en la espectroscopia de mesones y bariones. Referencias a los trabajos originales pueden encontrarse

en [50], [41]. Este problema [26] ha constituido para nosotros un punto de partida conveniente para descubrir las posibilidades del método de Naundorf descrito en la sección 2.3. En general, cuando a' , b , c y el parámetro l de momento cinético orbital toman valores no nulos, la ecuación de Schrödinger provista del potencial de Cornell no es soluble analíticamente en términos de funciones cuyo comportamiento en el intervalo completo de 0 a $+\infty$ es bien conocido. Cuando la resolución analítica no es posible, se han utilizado diferentes métodos para conocer el comportamiento de las soluciones de la ecuación diferencial. En algunos, la ecuación exacta es reemplazada por ecuaciones aproximadas que dependen del rango de valores de r considerado. Otros métodos, que han alcanzado un alto grado de precisión, se basan en la integración numérica de la ecuación diferencial. Por ejemplo, en un trabajo reciente, [17], se aplica el algoritmo de Numerov a la integración numérica de la ecuación de Schrödinger con un potencial Coulomb más lineal, al que se incorporan términos correctores espín-órbita, espín-espín y tensorial, para obtener el espectro de energías de un quarkonio pesado y otras cantidades interesantes, como los cuadrados de las funciones de onda en el origen, sus derivadas para $l \neq 0$, los valores probables de las velocidades de los quarks, radios cuadráticos medios de los estados y razones de transiciones dipolares eléctricas entre resonancias $nS \rightarrow nP_J$.

La ecuación de Schrödinger con el potencial (3.1) es llevada mediante cambios de variables y parámetros a la forma adimensional

$$t^2 \frac{d^2 w}{dt^2} - t \frac{dw}{dt} + (-4t^6 + 4\epsilon t^4 + 4at^2 - 4l(l+1)) w = 0, \quad (3.2)$$

adecuada para aplicar el método de Naundorf, donde la variable independiente t es en general compleja. La ecuación presenta dos únicos puntos singulares, el origen $t = 0$ es regular (rango de Poincaré igual a cero), el infinito $t = \infty$ es irregular (rango de Poincaré igual a 3) y admite soluciones en serie de potencias cuyos exponentes crecen a partir de un exponente característico ρ , i.e.

$$w(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{n+\rho}, \quad c_0 = 1, \quad 0 < |t| < +\infty, \quad (3.3)$$

para los valores de ρ

$$\rho_1 = 2l + 2, \quad \rho_2 = -2l, \quad (3.4)$$

y valores de los coeficientes c_n que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} &((n + \rho)(n + \rho - 2) - 4l(l + 1)) c_n + 4ac_{n-2} + \\ &+ 4\epsilon c_{n-4} - 4c_{n-6} = 0, \quad c_0 = 1, \quad c_{-n} = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3.5)$$

En los problemas físicos, interesa conocer el comportamiento de las soluciones de (3.2) en el eje real positivo $\arg(t) = 0$. Asimismo, para los valores $l = 0, 1, 2, \dots$ relevantes desde el punto de vista físico, solamente la solución que corresponde al valor $\rho = \rho_1 = 2l + 2$ es de la forma (3.3), la otra solución independiente contiene términos logarítmicos y no tiene un comportamiento regular en los puntos singulares, luego no es físicamente aceptable. En consecuencia, limitamos nuestra discusión a las soluciones de la forma (3.3) en el eje real positivo.

Además de (3.3), la ecuación (3.2) admite un segundo sistema fundamental de soluciones, denominadas formales, que vienen dadas por sendos desarrollos asintóticos cuando $t \rightarrow +\infty$ (cfr. (2.103))

$$w_{asy}^{(k)}(t) \approx \exp\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j^{(k)}}{j} t^j\right) t^{\mu^{(k)}} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} t^{-s}, \quad (t \rightarrow +\infty),$$

$$(h_0^{(k)} = 1), \quad (k = 1, 2), \quad (3.6)$$

para valores de los coeficientes en los exponentes

$$\begin{aligned} \lambda_1 \equiv \alpha_3^{(1)} &= -2, & \lambda_2 \equiv \alpha_3^{(2)} &= 2, \\ \alpha_2^{(1)} &= 0, & \alpha_2^{(2)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} &= \varepsilon, & \alpha_1^{(2)} &= -\varepsilon, \\ \mu^{(1)} &= -\frac{1}{2}, & \mu^{(2)} &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

y valores de los coeficientes $h_s^{(k)} \equiv h_s$ tales que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} 2s\alpha_3 h_s &= (\alpha_1^2 + 4a) h_{s-1} + (2\mu - 1 - 2(s-2)) \alpha_1 h_{s-2} + \\ &+ (\mu(\mu-2) - 4l(l+1) + (s-3)(s-1-2\mu)) h_{s-3}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

de manera que $h_s^{(2)} = (-1)^s h_s^{(1)}$ si se elige $h_0^{(2)} = h_0^{(1)} = 1$.

El problema global para la ecuación diferencial (3.2) consiste en encontrar los factores de conexión, i.e. las constantes T_{k,p_k} ($k = 1, 2$, p_k entero) tales que se verifican las relaciones

$$w(t) \approx \sum_{k=1}^2 T_{k,p_k} w_{asy}^{(k)}(t), \quad \arg(t) = 0, \quad (3.9)$$

en sectores

$$S(p_1, p_2) = S_{1,p_1} \cap S_{2,p_2}, \quad (3.10)$$

$$S_{k,p_k} = \left\{ t \in \mathbf{C}; \left| \arg(\lambda_k t^3) - 2\pi p_k \right| < \pi \right\}, \quad (3.11)$$

donde sectores adyacentes S_{k,p_k} , S_{k,p_k+1} están separados por rayos de Stokes

$$\arg(t) = \frac{1}{3} ((2p_k + 1)\pi - \arg(\lambda_k)), \quad (3.12)$$

de modo que el valor de T_{k,p_k} en cada rayo es igual a la semisuma de los valores correspondientes a los dos sectores separados por el rayo,

$$T_{k,p_k} = \frac{1}{2} (T_{k,p_k} + T_{k,p_k+1}). \quad (3.13)$$

El semieje real positivo $\arg(t) = 0$ es un rayo de Stokes en la relación de conexión de $w(t)$ con la solución formal $w_{asy}^{(1)}$ que tiene un comportamiento regular en el infinito. En consecuencia, sobre este rayo se tiene

$$T_1 = \frac{1}{2} (T_{1,0} + T_{1,1}). \quad (3.14)$$

Los valores de T_{k,p_k} obtenidos aplicando a (3.3), (3.6) el método de Naundorf

$$T_{k,p_k} = \sum_{L=0}^2 \exp\left(i2\pi p_k(L + \rho - \mu^{(k)})/3\right) \beta_{k,L}, \quad (3.15)$$

dependen de constantes $\beta_{k,L}$ dadas por

$$\beta_{k,L} = \frac{1}{2} \gamma_L \left(\frac{\lambda_3}{3}\right)^{-(\delta+L)/3}, \quad (3.16)$$

donde γ_L se calculan resolviendo un sistema lineal de tres ecuaciones mediante la regla de Cramer. Las soluciones físicamente aceptables corresponden a los valores reales del parámetro de energía ε para los cuales sobre el rayo $\arg(t) = 0$ la función $w(t)$ tiene un comportamiento regular en ambos puntos singulares. Esta condición se verifica solo si $w(t)$ carece de términos logarítmicos, i.e. es de la forma (3.3) y, cuando $t \rightarrow +\infty$, en (3.9) es nulo el coeficiente de $w_{asy}^{(2)}(t)$, que diverge al crecer t :

$$T_{2,0} = 0, \quad (3.17)$$

es decir,

$$\sum_{L=0}^2 \left(\frac{2}{3}\right)^{-L/3} \gamma_L = 0. \quad (3.18)$$

Las energías propias se obtienen entonces como ceros del determinante de una matriz 4×4 que resulta de reemplazar en (3.18) los valores de γ_L calculados mediante la regla de Cramer.

La ecuación (3.18) se ha utilizado para obtener algunos valores propios de ε en el charmonio y el bottomonio correspondientes a valores de l que varían de modo continuo entre 0 y 4 (trayectorias de Regge), tomando los parámetros del potencial (3.1) valores

$$a' = \frac{4}{3}0,3548, \quad b = -0,5466 \text{ GeV}, \quad c = 0,2079 (GeV)^2, \quad (3.19)$$

expresando r en $(\text{GeV})^{-1}$. Las masas de los quarks "charm" y "bottom" se han tomado respectivamente

$$m_c = 1,632 \text{ GeV}, \quad m_b = 5,015 \text{ GeV}, \quad (3.20)$$

de manera que en la ecuación (3.2) el parámetro a toma los valores

$$a_c = 1,1069, \quad a_b = 2,3395. \quad (3.21)$$

Nuestro estudio pone de manifiesto que el método de Naundorf es adecuado para determinar las energías propias de un sistema $(q\bar{q})$ pesado mediante la ecuación de Schrödinger con un potencial Coulomb más lineal. No se trata de un método completamente analítico, toda vez que los elementos del determinante cuyos ceros dan lugar a las energías propias han de obtenerse numéricamente, pero evita la integración numérica de la ecuación diferencial.

El método permite obtener asimismo los valores de los parámetros del potencial para los cuales se tiene un valor particular del parámetro de energía ε . A tal fin, se introduce el valor numérico de ε en la ecuación de ceros del determinante 4×4 equivalente a (3.18) y se resuelve la ecuación teniendo ahora el parámetro a como incógnita. En particular, la ecuación permite obtener los valores críticos de a , i.e. los valores de a para los cuales $\varepsilon = 0$.

3.2. Efecto Stark esférico en el hidrógeno

El problema de una partícula mecano-cuántica en un potencial central

$$V(r) = -\frac{1}{r} + \lambda r, \quad (3.22)$$

conocido como efecto Stark esférico en el hidrógeno, ha suscitado el interés de muchos investigadores por sus implicaciones físicas y también a causa de su utilidad como piedra de toque de diferentes métodos aproximados [6]. Uno de ellos es el método de Ricatti-Padé, discutido a fondo en [19] y aplicado en [20] y [21] a fin de obtener energías de estados ligados (para $\lambda > 0$) y resonancias (para $\lambda < 0$) en el potencial (3.22). Nosotros hemos aplicado el método de Naundorf para encontrar valores del parámetro de energía E en unidades atómicas ($\hbar = 1$, $m_e = 1$) tales que la función radial reducida $\Psi(r)$, solución de la ecuación de Schrödinger

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} + \left(2E - 2V(r) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right)\Psi(r) = 0, \quad (0 \leq r < +\infty), \quad (3.23)$$

con el potencial (3.22), verifica, para todo $l = 0, 1, 2, \dots$, las condiciones

- (i) Se anula en el origen $r = 0$.
- (ii) Decrece cuando $r \rightarrow +\infty$ en el caso de estados ligados ($\lambda > 0$), o bien representa una onda saliente pura en el caso de resonancias ($\lambda < 0$).

El lector interesado puede consultar en [27] los detalles del proceso que describimos seguidamente en forma de resumen. La ecuación (3.23) tiene dos puntos singulares: el origen $r = 0$ es regular (rango de Poincaré 0) y el infinito $r = +\infty$ es irregular de rango 3/2. El cambio cuadrático de la variable independiente

$$x = r^{1/2}, \quad w(x) = \Psi(x^2), \quad (3.24)$$

transforma a (3.23) en la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 w(x)}{dx^2} - x \frac{dw(x)}{dx} + [-8\lambda^6 + 8Ex^4 + 8x^2 - 4l(l+1)] w(x) = 0, \quad (3.25)$$

conveniente para ser resuelta por el método de Naundorf. La ecuación (3.25) presenta singularidades en $x = 0$, $x = \infty$ cuyos rangos duplican respectivamente a los de $r = 0$, $r = +\infty$ en (3.23).

Análogamente a la ecuación (3.2), la ecuación (3.25) admite una solución en serie de potencias regular en $x = 0$

$$w_{\text{reg}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^{n+\rho}, \quad c_0 = 1, \quad 0 < |x| < +\infty, \quad (3.26)$$

para el valor $\rho = 2l + 2$ del exponente característico y valores de los coeficientes c_n que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} n(n + \rho - 1)c_{2n} + 2c_{2n-2} + 2Ec_{2n-4} - 2\lambda c_{2n-6} &= 0, \\ c_0 = 1, \quad c_{-n} &= 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \end{aligned} \quad (3.27)$$

de manera que $c_n = 0$ para todo valor impar de n .

Además de (3.26), existe un sistema fundamental de soluciones formales $w^{(k)}$ representadas por sendos desarrollos asintóticos

$$w_{\text{asy}} = \exp\left(\sum_{j=1}^3 \frac{\alpha_j^{(3)}}{j} x^j\right) x^{\mu^{(k)}} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} x^{-s}, \quad h_0^{(k)} = 1, \quad k = 1, 2, \quad (3.28)$$

para valores de los coeficientes en los exponentes

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(1)} &= -(8\lambda)^{1/2}, & \alpha_3^{(2)} &= (8\lambda)^{1/2}, \\ \alpha_2^{(1)} &= 0, & \alpha_2^{(2)} &= 0, \\ \alpha_1^{(1)} &= \frac{4E}{(8\lambda)^{1/2}}, & \alpha_1^{(2)} &= -\frac{4E}{(8\lambda)^{1/2}}, \\ \mu^{(1)} &= -\frac{1}{2}, & \mu^{(2)} &= -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

y valores de los coeficientes $h_s^{(k)} \equiv h_s$ en la serie asintótica que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} 2s\alpha_3 h_s &= (\alpha_1^2 + 8) h_{s-1} - 2(s-1)\alpha_1 h_{s-2} + \\ &+ (s+2l-1/2)(s-2l-5/2) h_{s-3}, \quad (s = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (3.30)$$

El método de Naundorf, que permite obtener soluciones físicamente aceptables de (3.25) en el rango completo de valores $0 \leq x < +\infty$, se basa en el cálculo de los factores de conexión entre la solución regular (3.26) y las soluciones formales representadas por (3.28), es decir, de las constantes T_k dependientes de E , λ , l tales que

$$w_{\text{reg}}(x) \approx T_1 w_{\text{asy}}^{(1)}(x) + T_2 w_{\text{asy}}^{(2)}(x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.31)$$

Una consecuencia inmediata de (3.29) es que

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(1)} < 0, \quad \alpha_3^{(2)} > 0 & \quad \text{si } \lambda > 0, \\ \alpha_3^{(1)} = -i\kappa, \quad \alpha_3^{(2)} = i\kappa, \quad \kappa = (8|\lambda|)^{1/2} > 0, & \quad \text{si } \lambda < 0, \end{aligned} \quad (3.32)$$

de modo que si $\lambda > 0$, $w_{\text{asy}}^{(1)}$ decrece exponencialmente y $w_{\text{asy}}^{(2)}$ crece exponencialmente cuando $x \rightarrow +\infty$. Si $\lambda < 0$, ambas soluciones formales presentan un comportamiento oscilatorio cuando $x \rightarrow +\infty$ pero solamente $w_{\text{asy}}^{(1)}$ representa una onda saliente. Entonces, solo $w_{\text{asy}}^{(1)}$ representa una solución físicamente aceptable de (3.25) a grandes valores de x . Por consiguiente, las energías de los estados ligados y resonancias que predice (3.23) son los valores de E que verifican la ecuación

$$T_2(\lambda, l; E) = 0. \quad (3.33)$$

Análogamente al caso estudiado en la sección precedente, el método de Naundorf conduce a una expresión de T_2 del tipo (3.15) con $k = 2$, $p_k = p_2 = 0$, i.e.

$$T_2 = \sum_{L=0}^2 \beta_L, \quad (3.34)$$

donde β_L verifican un sistema lineal de ecuaciones cuyos coeficientes se obtienen como suma de series infinitas cuyos términos dependen de los coeficientes $h_s^{(2)}$ de las series asintóticas en (3.28). La ecuación (3.33), escrita en la forma

$$\sum_{L=0}^2 \beta_L = 0, \quad (3.35)$$

permite obtener las energías propias como ceros del determinante 3×3 que resulta de reemplazar en (3.35) los β_L calculados mediante la regla de Cramer. Hemos empleado esta ecuación para obtener las energías de los tres primeros estados ligados dando a λ los valores enteros positivos comprendidos entre 1 y 10, así como las partes real e imaginaria de las tres primeras resonancias para valores enteros negativos de λ desde -1 hasta -10 . En el primer caso, los valores de la energía crecen con λ y en el segundo caso las partes real e imaginaria de la energía crecen asimismo con λ . La ecuación ha sido resuelta para obtener las partes real e imaginaria de la energía correspondientes a $l = 0$, $l = 1$ y λ tomando valores complejos a lo largo de la línea $|\lambda| = 5$

desde $\arg(\lambda) = 0$ hasta $\arg(\lambda) = -\pi$ en intervalos de longitud $0, 1\pi$. Los valores así obtenidos ponen de manifiesto una correspondencia entre cada estado ligado y cada resonancia. Esta correspondencia sugiere la posibilidad de definir una matriz S para el potencial (3.22), a pesar de su alcance infinito. Los resultados confirman la precisión del método de Ricatti-Padé para obtener las energías del estado ligado y de la resonancia fundamentales. Para estados excitados, la eficiencia del método de Naundorf parece superior a la del método de Ricatti-Padé. No obstante, la lenta convergencia de las series que definen a los coeficientes en el sistema lineal de ecuaciones verificado por β_L y la necesidad de considerar más términos a medida que $|E|$ crece, hacen nuestro método recomendable para λ real negativo, o bien complejo no real, antes que para λ real positivo.

3.3. Osciladores anarmónicos

El método de Naundorf es adecuado para obtener soluciones globales de una clase de ecuaciones diferenciales, que puede aplicarse a la ecuación de Schrödinger con potenciales suma de potencias enteras de la variable independiente, conduciendo a condiciones de cuantización exactas. En particular, el método permite determinar las energías de los estados ligados o "resonancias" en osciladores anarmónicos unidimensionales, como el potencial séxtico que estudiamos en [28],

$$V(x) = \lambda_2 x^2 + \lambda_4 x^4 + \lambda_6 x^6. \quad (3.36)$$

La ecuación de Schrödinger

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + (E - V(x)) w(x) = 0, \quad (3.37)$$

con el potencial (3.36) puede escribirse en la forma canónica (2.100) utilizada por Naundorf

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \left(-\lambda_6 x^8 - \lambda_4 x^6 - \lambda_2 x^4 + E x^2 \right) w(x) = 0, \quad (3.38)$$

la cual tiene en el origen un punto ordinario y en el infinito un punto singular irregular de rango 4. Es sabido que el método de Naundorf puede aplicarse en el caso general, cuando las variables y parámetros de la ecuación diferencial son complejos y ambos puntos singulares son irregulares. No obstante, en aplicaciones físicas como la representada por (3.38), es conveniente tomar el eje real $(-\infty < x < +\infty)$ como recorrido de la variable independiente y elegir de modo conveniente los parámetros del potencial. Entonces, dado que el potencial (3.36) contiene solamente potencias de x de exponente par y que la ecuación (3.38) carece de término en la primera derivada, sus soluciones son

simétricas o antisimétricas bajo la transformación de paridad ($x \rightarrow -x$) y es posible restringir el recorrido de x al semieje real no negativo ($0 \leq x < +\infty$).

La ecuación (3.38) admite dos soluciones independientes de la forma

$$w_j(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n,j} x^{n+\rho_j}, \quad c_{0,j} = 1, \quad j = 1, 2, \quad (3.39)$$

para valores del índice

$$\rho_1 = 0, \quad \rho_2 = 1, \quad (3.40)$$

y coeficientes $c_{n,j}$ que verifican la recurrencia

$$(n + \rho_j)(n + \rho_j - 1)c_{n,j} + E c_{n-2,j} - \lambda_2 c_{n-4,j} - \lambda_4 c_{n-6,j} - \lambda_6 c_{n-8,j} = 0, \quad c_{0,j} = 1, \quad c_{-n,j} = 0, \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.41)$$

Además de (3.39), la ecuación (3.38) admite un sistema fundamental de soluciones formales $w^{(k)}(z)$ definidas por sendos desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$ en el plano complejo,

$$w^{(k)}(z) = \exp\left(\frac{\alpha_4^{(k)}}{4} z^4 + \frac{\alpha_2^{(k)}}{2} z^2\right) z^{\mu^{(k)}} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} z^{-s}, \quad h_0^{(k)} = 1, \quad k = 1, 2, \quad (3.42)$$

siendo

$$\begin{aligned} \alpha_4^{(1)} &= -(\lambda_6)^{1/2}, & \alpha_4^{(2)} &= (\lambda_6)^{1/2}, \\ \alpha_2^{(1)} &= \frac{\lambda_4}{2\alpha_4^{(1)}}, & \alpha_2^{(2)} &= \frac{\lambda_4}{2\alpha_4^{(2)}}, \\ \mu^{(1)} &= -\frac{3}{2} + \frac{\lambda_2 - (\alpha_2^{(1)})^2}{2\alpha_4^{(1)}}, & \mu^{(2)} &= -\frac{3}{2} + \frac{\lambda_2 - (\alpha_2^{(2)})^2}{2\alpha_4^{(2)}}, \end{aligned} \quad (3.43)$$

y coeficientes $h_s^{(k)}$ que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} &2s\alpha_4^{(k)} h_s^{(k)} + \left((2s - 2\mu^{(k)} - 5)\alpha_2^{(k)} - E\right) h_{s-2}^{(k)} + \\ &+ \left(\mu^{(k)}(2s - \mu^{(k)} - 7) - (s - 4)(s - 3)\right) h_{s-4}^{(k)} = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

El problema de conexión para la ecuación diferencial (3.38) consiste en encontrar los coeficientes $T_j^{(k)}$ tales que

$$w_j(x) \approx \sum_{k=1}^2 T_j^{(k)} w^{(k)}(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad j = 1, 2. \quad (3.45)$$

Un caso de interés físico que hemos considerado se tiene cuando $\lambda_6 > 0$, de modo que (3.36) representa un oscilador anarmónico séxtico confinante. A diferencia de las soluciones (3.39), cuyo comportamiento regular en $x = 0$

no depende de los parámetros del potencial (3.36), el comportamiento de las soluciones formales (3.42) cuando $x \rightarrow +\infty$ depende de λ_6 . En particular, cuando $\lambda_6 > 0$, $w^{(1)}(x)$ se amortigua exponencialmente tendiendo a cero y $w^{(2)}(x)$ crece exponencialmente cuando $x \rightarrow +\infty$. Por tanto, los estados ligados, correspondientes a valores de la energía E tales que las funciones de onda se amortiguan cuando $x \rightarrow +\infty$, son tales que en (3.45) se tiene

$$T_j^{(2)}(\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6; E) = 0, \quad (j = 1, 2). \quad (3.46)$$

La aplicación del método de Naundorf a (3.45) no presenta diferencias dignas de mención respecto a los casos estudiados en las secciones precedentes. En concreto, hemos obtenido las energías de los estados ligados más bajos en dos casos particulares del potencial (3.36):

- (i) λ_2 variable, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_6 = 1$,
- (ii) $\lambda_2 = 0$, λ_4 variable, $\lambda_6 = 1$,

poniendo en evidencia la degeneración aproximada de los niveles de energía en el caso del pozo doble, que se presenta cuando $\lambda_2 < 0$ o $\lambda_4 < 0$.

El método de Naundorf también es válido cuando los coeficientes λ_2 , λ_4 , λ_6 en el potencial (3.36) son complejos, por ejemplo cuando

$$\lambda_6 = \exp(-i\theta), \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad (3.47)$$

obteniéndose soluciones $w(x)$ normalizables correspondientes a valores complejos de E que verifican la condición (3.46). Hablando con lasitud, puede decirse que estas soluciones representan "estados ligados evanescentes" con independencia de la magnitud relativa de las partes real e imaginaria de la energía. El límite $\theta = \pi$, i.e. $\lambda_6 = -1$, representa un potencial anarmónico séxtico inestable, que se tiene cuando $\lambda_6 < 0$. En este caso, las dos soluciones formales (3.42) tienen un comportamiento oscilatorio en $x = \pm\infty$ y no hay razón física para exigir la condición (3.46). No obstante, si por continuidad se exige tal condición, las energías resultantes de la misma corresponden a estados no normalizables denominados "resonancias", independientemente de los valores de las partes real e imaginaria de la energía.

Hemos calculado las partes real e imaginaria de las energías de las primeras resonancias en otros dos casos particulares del potencial (3.36):

- (iii) λ_2 variable, $\lambda_4 = 0$, $\lambda_6 = -1$,
- (iv) $\lambda_2 = 0$, λ_4 variable, $\lambda_6 = -1$.

Los resultados obtenidos muestran que cuando $\lambda_2 = \lambda_4 = 0$, se tiene $\Re E = -\Im E$, es decir,

$$\arg(E(0, 0, -1)) = -\frac{\pi}{4}, \quad (3.48)$$

y cuando $\lambda_4 = 0$ se verifica

$$\Im E(\lambda_2, 0, 1) = -\Re E(-\lambda_2, 0, 1), \quad (3.49)$$

de acuerdo con las bien conocidas propiedades de escala

$$E(\lambda_2, \lambda_4, \lambda_6) = \kappa E(\kappa^{-2}\lambda_2, \kappa^{-3}\lambda_4, \kappa^{-4}\lambda_6). \quad (3.50)$$

Asimismo, cuando λ_2 es variable (caso (iii)), se tiene $|\Re E| > |\Im E|$ solo cuando $\lambda_2 > 0$. Otro tanto sucede cuando λ_4 es variable (caso (iv)) y $\lambda_4 > 0$. Por tanto, el término resonancia es tanto más adecuado cuanto λ_2 o λ_4 toman valores positivos crecientes.

El método de Naundorf es especialmente adecuado para describir estados ligados y "resonancias" en potenciales anarmónicos. En principio, la condición (3.46) no establece límites a la precisión con la que pueden determinarse las energías propias: tal precisión depende solamente del número de dígitos arrastrados a lo largo de los cálculos. Ahora bien, en el cálculo numérico de las funciones propias $w_j(x)$, la ecuación (3.39) no es adecuada para grandes valores de $|x|$. Es más conveniente la expresión

$$w_j(x) = \exp\left(\frac{\alpha_4^{(1)}}{4}x^4 + \frac{\alpha_2^{(1)}}{2}x^2\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \gamma_{n,j} x^{n+\rho_j}, \quad (3.51)$$

cuyos coeficientes verifican la recurrencia

$$(n + \rho_j)(n + \rho_j - 1)\gamma_{n,j} + \left(\alpha_2^{(1)}(2n + 2\rho_j - 3) + E\right)\gamma_{n-2,j} + 2\alpha_4^{(1)}(n + \rho_j - 4 - \mu^{(1)})\gamma_{n-4,j} = 0. \quad (3.52)$$

3.4. Potenciales sombrero

La ecuación radial de Schrödinger

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{D-1}{r} \frac{d}{dr} \right) - \frac{l(l+D-2)}{r^2} \right] + V(r)\right) R(r) = ER(r), \quad (3.53)$$

donde $l = 0, 1, 2, \dots$ y r representa la variable radial en un espacio D -dimensional ($D = 1, 2, 3, \dots$), no es soluble analíticamente con potenciales de tipo "sombrero"

$$V_s(r) = a(r^2 - b^2)^2, \quad (3.54)$$

utilizados en modelos de materia condensada [34], [70], de moléculas y de teorías de campos [40], [68], ni con potenciales anarmónicos cuárticos

$$V_q(r) = \lambda_2 r^2 + \lambda_4 r^4, \quad (3.55)$$

equivalentes a (3.54) con la identificación de coeficientes $\lambda_2 = -2ab^2$, $\lambda_4 = a$, y la elección del origen de energías $E_q = E - ab^4$. En [29] hemos estudiado la resolución de (3.53) con el potencial (3.54) o (3.55) aplicando el método

de Naundorf. Mediante cambios de las variables y parámetros la ecuación es llevada a la forma canónica

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(-t^6 + 2\beta t^4 + (\varepsilon_s - \beta^2)t^2 - \nu(\nu - 1) \right) u = 0, \quad (3.56)$$

donde $\arg(t) = \arg(a)/6$, dado que $\arg(r) = 0$. Esta ecuación presenta un punto singular regular (rango de Poincaré 0) en $t = 0$ y un punto singular irregular (rango de Poincaré 3) en $t = \infty$. La solución regular en el origen

$$u(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^{n+\rho}, \quad c_0 = 1, \quad (3.57)$$

donde

$$\rho = \begin{cases} 0, & \text{si } D = 1, \\ \nu, & \text{si } D = 2, 3, \dots, \end{cases} \quad (3.58)$$

es físicamente aceptable si tiene un comportamiento regular cuando $|t| \rightarrow +\infty$ en el rayo $\arg(t) = \arg(a)/6$. El comportamiento de $u(t)$ a grandes valores de t puede expresarse mediante un sistema fundamental de soluciones formales $u^{(k)}(t)$ de la ecuación (3.56), i.e. soluciones dadas por sendos desarrollos asintóticos

$$u^{(k)}(t) \approx u_{\text{asy}}^{(k)}(t), \quad |t| \rightarrow +\infty, \quad \arg(t) = \frac{1}{6} \arg(a), \quad (3.59)$$

donde

$$u_{\text{asy}}^{(k)}(t) = \exp \left((-1)^k \left(\frac{t^3}{3} - \beta t \right) \right) t^{-1} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} t^{-s}, \quad h_0^{(k)} = 1, \quad (k = 1, 2), \quad (3.60)$$

de manera que

$$u(t) \approx \sum_{k=1}^2 T^{(k)} u_{\text{asy}}^{(k)}(t), \quad |t| \rightarrow +\infty, \quad \arg t = \frac{1}{6} \arg(a), \quad (3.61)$$

cuyos coeficientes $T^{(k)}$ son los factores de conexión.

El comportamiento asintótico de las soluciones formales a grandes valores de $|t|$ en el rayo $\arg(t) = \arg(a)/6$ es consecuencia de (3.60) y depende del rango de valores de $\arg(a)$:

$$\begin{aligned} u_{\text{asy}}^{(1)}(t) &\sim \exp \left(-t^3/3 \right), & t \rightarrow \infty, \\ u_{\text{asy}}^{(2)}(t) &\sim \exp \left(t^3/3 \right), & t \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (3.62)$$

En particular, si a es real positivo, dados además los valores de b , D , l , i.e. de β , ν , los valores propios de ε_s , y por tanto de E , son las soluciones de la condición de cuantización exacta

$$T^{(2)}(\beta, \nu, \varepsilon_s) = 0, \quad (3.63)$$

que expresa el comportamiento regular de la solución cuando $|t| \rightarrow +\infty$ en el rayo $\arg(t) = \arg(a)/6$ al anular la contribución del término dominante en (3.61).

El procedimiento de Naundorf permite obtener los factores de conexión $T^{(k)}$ introduciendo en la ecuación (3.56) las series de potencias

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n^{(j)} t^{n+\rho}, \quad (3.64)$$

con ρ dado en (3.58), que son soluciones formales de (3.56) si los coeficientes $c_n^{(j)}$ verifican la recurrencia de orden 6

$$((n+\rho)(n+\rho-1) - \nu(\nu-1)) c_n^{(j)} + (\varepsilon_s - \beta^2) c_{n-2}^{(j)} + 2\beta c_{n-4}^{(j)} - c_{n-6}^{(j)} = 0. \quad (3.65)$$

El procedimiento se fundamenta en la idea de encontrar en el caso actual una base de seis soluciones independientes $\{c_n^{(j)}\}$, ($j = 1, \dots, 6$), de la recurrencia (3.65) tales que

(i) $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n^{(j)} t^n$ es una función entera para todo j .

(ii) Las soluciones formales correspondientes dadas en (3.64) presentan un comportamiento conocido cuando $|t| \rightarrow +\infty$ en el rayo $\arg(t) = \arg(a)/6$.

Entonces, expresando el coeficiente genérico c_n en la expansión (3.57) como una combinación lineal de los $c_n^{(j)}$, es posible reconocer el comportamiento asintótico de la solución representada por (3.57) y determinar los factores de conexión $T^{(k)}$. De las seis soluciones $c_n^{(j)}$, tres conducen a $u(t)$ a tener el mismo comportamiento asintótico que $u_{\text{asy}}^{(1)}$, las otras tres conducen al mismo comportamiento asintótico que $u_{\text{asy}}^{(2)}$, luego es conveniente representarlas $\{c_n^{(k,L)}\}$, $k = 1, 2$, $L = 0, 1, 2$.

Las seis soluciones de la base son los coeficientes de las seis soluciones formales que resultan de (3.60) cuando se desarrolla $\exp((-1)^k(-\beta t))$ en serie de potencias ordinaria y se reemplaza $\exp((-1)^k t^3/3)$ por la serie exponencial de Heaviside correspondiente. De este modo, siguiendo los pasos del método de Naundorf ya descritos, se obtienen formas explícitas de las soluciones $c_n^{(k,L)}$. Los coeficientes c_n en (3.57) son entonces combinación lineal de las seis soluciones $c_n^{(k,L)}$ con adecuados coeficientes $\xi_{k,L}$, los cuales dependen de la solución particular c_n considerada de la recurrencia (3.65), i.e. de las condiciones iniciales impuestas a esta ecuación en diferencias de orden seis. Por tanto, fijando los valores numéricos de seis coeficientes c_n a partir de un índice inicial dado n_0 , se obtiene el sistema lineal de seis ecuaciones e incógnitas $\xi_{k,L}$

$$\sum_{k=1}^2 \sum_{L=0}^2 c_n^{(k,L)} \xi_{k,L} = c_n, \quad n = n_0, n_0 + 1, \dots, n_0 + 5. \quad (3.66)$$

El método de Naundorf expresa entonces los factores de conexión $T^{(k)}$ como sumas de los $\xi_{k,L}$:

$$T^{(k)}(\beta, \nu, \varepsilon_s) = \sum_{L=0}^2 \xi_{k,L}(\beta, \nu, \varepsilon_s), \quad (k = 1, 2), \quad (3.67)$$

y la condición de cuantización (3.63), escrita en la forma

$$\sum_{L=0}^2 \xi_{2,L}(\beta, \nu, \varepsilon_s) = 0, \quad (3.68)$$

puede resolverse para obtener soluciones ε_s a las cuales corresponden, mediante los cambios de parámetros que transforman (3.53) en (3.56), los valores propios de la energía.

En el caso de un potencial sombrero (3.54), cuando $a > 0$ (potencial sombrero derecho D-dimensional), hemos obtenido los niveles de energía ε_s de los primeros estados ligados en función de $\beta^{1/2}$, que se toma como variable independiente, para cinco valores enteros y semienteros $\nu = 0, 1/2, 1, 3/2, 2$. Asimismo, cuando $a < 0$ (potencial sombrero invertido D-dimensional), para los mismos valores de ν , hemos obtenido frente a $\beta^{1/2}$ los valores complejos de ε_s correspondientes a las primeras resonancias.

En el caso del potencial anarmónico cuártico (3.55), para los mismos valores de ν considerados en el potencial sombrero hemos obtenido los valores propios de la energía ε_q en función de β cuando $\arg(\lambda_2) = -\pi$, $\arg(\lambda_4) = 0$ y los valores propios complejos de ε_q cuando $\arg(\lambda_2) = 0$, $\arg(\lambda_4) = -\pi$, correspondiendo las resonancias estrechas a los pequeños valores negativos de la parte imaginaria de la energía.

En el caso $a > 0$ del potencial sombrero y en el caso $\lambda_2 < 0$, $\lambda_4 > 0$ del potencial anarmónico cuártico se observa una ordenación poco usual de los niveles de energía en términos de ν , i.e. de la dimensión D del espacio.

Hemos estudiado asimismo la variación con el parámetro ν de las energías ε_q de los estados más bajos en un potencial anarmónico cuártico isótropo en el que $\lambda_2 = 0$, i.e. $\beta = 0$, verificando que en este potencial, la energía de los estados con los mismos números cuánticos aumenta con ν , es decir, con la dimensión D del espacio. Finalmente, hemos considerado el potencial anarmónico cuártico isótropo cuando $\lambda_4 > 0$ y $\lambda_2 = -8(\hbar^2 \lambda_4^2 / 2m)^{1/3}$, de manera que $\beta = 4$, obteniendo la variación con respecto a ν de las energías ε_q de los primeros estados. Observamos que, cuando la córcova en el origen es bastante pronunciada, algunos niveles $l = 0$ del potencial sombrero correspondiente a $D = 2$ se encuentran por debajo de aquellos que tienen los mismos números cuánticos en el potencial correspondiente a $D = 1$. El efecto es análogo a la degeneración aproximada de los estados pares e impares en pozos dobles simétricos. La córcova de la región central, donde la función de onda de los

estados unidimensionales pares es importante, es la causa de este efecto.

Capítulo 4

Aplicaciones del método de los Wronskianos I. Potenciales polinomiales

El método de los Wronskianos descrito en la sección 2.4 es adecuado para resolver el problema global en ecuaciones diferenciales que presentan una singularidad regular en el origen y una irregular en el infinito. La ecuación de Schrödinger provista de potenciales polinomiales de grado arbitrario o de diferentes tipos de osciladores anarmónicos isótropos pertenece a esta clase de ecuaciones diferenciales.

4.1. Potenciales anarmónicos

Los osciladores anarmónicos cuánticos han sido utilizados en diferentes ramas de la física para simular una gran variedad de situaciones y explicar muchos fenómenos. Asimismo, tras la publicación de los trabajos de Bender y Wu [10], [11], [12], y de Simon y Dicke [57], demostrando la insuficiencia del método perturbativo de Rayleigh-Schrödinger, los potenciales anarmónicos han servido para poner a prueba una amplia variedad de métodos aproximados de solución de la ecuación de Schrödinger. En [30] aplicamos el método de los Wronskianos para obtener, en unidades $\hbar^2/2m = 1$, los valores propios de la energía en la ecuación radial de Schrödinger

$$-\frac{d^2u}{dr^2} + V(r)u(r) = Eu(r), \quad (4.1)$$

con un potencial efectivo anarmónico que incluye términos centrífugos

$$V(r) = \sum_{j=-2}^{2N} A_j r^j, \quad N \geq 2, \quad A_{2N} > 0, \quad (4.2)$$

y todos los parámetros reales. La ecuación (4.1) con el potencial (4.2) presenta dos únicos puntos singulares, el origen es regular (rango igual a cero) y el infinito es irregular (rango igual a $N + 1$). Las soluciones físicamente aceptables de esta ecuación verifican la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |u|^2 dr = 1, \quad (4.3)$$

cuando $-\infty < r < +\infty$ (oscilador unidimensional), o bien,

$$\int_0^{+\infty} |u|^2 dr = 1, \quad (4.4)$$

y la condición $u(0) = 0$ cuando $0 \leq r < +\infty$ (oscilador isótropo D-dimensional, $D > 1$).

La ecuación (4.1) admite dos soluciones independientes en forma de series

$$u(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^{n+\nu}, \quad a_0 \neq 0, \quad (4.5)$$

donde los valores de ν , obtenidos por sustitución de (4.5) en (4.1), son

$$\nu = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 + 4A_{-2}} \right). \quad (4.6)$$

Una al menos de las dos soluciones (4.5), sea u_{reg} , es regular en $r = 0$, la otra puede ser irregular para ciertos valores de A_{-2} y D . Además de (4.5), existe un segundo sistema de soluciones de (4.1), denominadas formales porque vienen representadas por sendos desarrollos asintóticos

$$u^{(k)}(r) \approx \exp \left(\sum_{p=1}^{N+1} \frac{\alpha_p^{(k)}}{p} r^p \right) r^{\mu^{(k)}} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} r^{-s}, \quad h_0 \neq 0, \quad (4.7)$$

donde los valores de $\alpha_p^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ se obtienen sustituyendo (4.7) en (4.1), verificándose en particular que $\alpha_{N+1}^{(1)} = -\alpha_{N+1}^{(2)}$. Una consecuencia inmediata de (4.7) es que el comportamiento asintótico de $u^{(k)}(r)$ cuando $r \rightarrow \infty$ depende del factor $\exp(\alpha_{N+1}^{(k)} r^{N+1} / (N+1))$, de manera que una de las soluciones, sea $u^{(1)}(r)$, decrece exponencialmente mientras $u^{(2)}(r)$ crece exponencialmente cuando $|r|$ aumenta su valor de modo indefinido.

El punto de partida del método de los Wronskianos es la relación de conexión

$$u_{\text{reg}}(r) = T^{(1)} u^{(1)}(r) + T^{(2)} u^{(2)}(r), \quad (4.8)$$

donde los factores de conexión $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, que dependen de los parámetros A_j del potencial (4.2) y de la energía E , se expresan como cocientes de Wronskianos

$$T^{(1)} = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(2)}]}{\mathcal{W}[u^{(1)}, u^{(2)}]}, \quad T^{(2)} = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]}{\mathcal{W}[u^{(2)}, u^{(1)}]}. \quad (4.9)$$

Fijados los valores numéricos de los A_j , los valores físicamente aceptables de la energía son los ceros de $T^{(2)}(E)$, valores de E para los cuales se anula la contribución del término divergente en (4.8), verificándose en ellos la condición de cuantización

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] = 0. \quad (4.10)$$

Nuestro método de cálculo de $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]$ se ha aplicado a dos casos particulares del potencial (4.2), i.e. los osciladores anarmónicos cuártico y séxtico. El oscilador anarmónico cuártico

$$V(r) = A_4 r^4 + A_2 r^2 + A_{-2} r^{-2}, \quad A_4 > 0, \quad (4.11)$$

corresponde al caso $N = 2$ del potencial (4.2), de modo que la singularidad del infinito es de rango $N + 1 = 3$ y los valores de los parámetros en los exponentes de (4.7) son

$$\begin{aligned} \alpha_3^{(1)} &= -\sqrt{A_4}, & \alpha_2^{(1)} &= 0, & \alpha_1^{(1)} &= -\frac{A_2}{2\sqrt{A_4}}, & \mu^{(1)} &= -1, \\ \alpha_3^{(2)} &= +\sqrt{A_4}, & \alpha_2^{(2)} &= 0, & \alpha_1^{(2)} &= +\frac{A_2}{2\sqrt{A_4}}, & \mu^{(2)} &= -1. \end{aligned} \quad (4.12)$$

La sustitución de (4.7) en (4.1) permite obtener asimismo la recurrencia verificada por los coeficientes $h_s^{(k)}$ de las series asintóticas

$$\begin{aligned} 2\alpha_3^{(k)} s h_s^{(k)} &= \left(E + (\alpha_1^{(k)})^2\right) h_{s-1}^{(k)} - 2\alpha_1^{(k)} (s-1) h_{s-2}^{(k)} + \\ &+ ((s-1)(s-2) - A_{-2}) h_{s-3}^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

La idea de nuestro método consiste, como es sabido, en obtener y comparar sendas expresiones formales del Wronskiano en (4.10), que es independiente de r . A tal efecto, en lugar de $u_{\text{reg}}, u^{(1)}$, es conveniente introducir las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} v_{\text{reg}}(r) &= \exp\left(-\frac{\alpha_3^{(1)}}{3} r^3\right) u_{\text{reg}}(r), \\ v^{(1)}(r) &= \exp\left(-\frac{\alpha_3^{(1)}}{3} r^3\right) u^{(1)}(r), \end{aligned} \quad (4.14)$$

cuyo Wronskiano guarda con el de (4.10) la relación

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] = \exp\left(-\frac{2\alpha_3^{(1)}}{3} r^3\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]. \quad (4.15)$$

El primer desarrollo formal de $\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}]$ se obtiene sustituyendo en la segunda identidad (4.14) a $u^{(1)}(r)$ por su desarrollo asintótico (4.7):

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] \approx \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\hat{n}} r^{\hat{n}-1+\nu}, \quad (4.16)$$

donde $\gamma_{\hat{n}}$ vienen dados por series

$$\gamma_{\hat{n}} = \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(1)} \left(2\alpha_1^{(1)} b_{\hat{n}+s} - (2s + \hat{n} + 2 + \nu) b_{\hat{n}+s+1} \right), \quad (4.17)$$

en las cuales b_n son los coeficientes de la expansión

$$w(r) = \exp(\alpha_1^{(1)} r) v_{\text{reg}}(r) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^{n+\nu}, \quad b_0 \neq 0, \quad (4.18)$$

que se determinan mediante la recurrencia

$$n(n-1+2\nu)b_n = 2\alpha_1^{(1)}(n-1+\nu)b_{n-1} - \left(E + (\alpha_1^{(1)})^2 \right) b_{n-2} - 2\alpha_3^{(1)}(n-2+\nu)b_{n-3} + 2A_2 b_{n-4}. \quad (4.19)$$

Un desarrollo formal de la función en el segundo miembro de (4.15) se obtiene mediante la combinación lineal

$$\exp\left(-\frac{2\alpha_3^{(1)}}{3}r^3\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] \approx \beta_1 \mathcal{E}_1 + \beta_2 \mathcal{E}_2 + \beta_3 \mathcal{E}_3, \quad (4.20)$$

donde las funciones \mathcal{E}_1 , \mathcal{E}_2 , \mathcal{E}_3 se representan por sendos desarrollos de Heaviside de la función exponencial en el segundo miembro de (4.15) y β_1 , β_2 , β_3 son constantes tales que

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] = \beta_1 + \beta_2 + \beta_3, \quad (4.21)$$

cuyos valores se obtienen comparando (4.16) con (4.20). Los valores de β_1 , β_2 , β_3 , sustituidos en (4.21), dan la solución explícita del problema:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] &= \frac{\Gamma(n+1+\nu/3)}{((-2/3)\alpha_3^{(1)})^{n+\nu/3}} \gamma_{3n+1} + \\ &+ \frac{\Gamma(n+1+(\nu+1)/3)}{((-2/3)\alpha_3^{(1)})^{n+(\nu+1)/3}} \gamma_{3n+2} + \frac{\Gamma(n+1+(\nu+2)/3)}{((-2/3)\alpha_3^{(1)})^{n+(\nu+2)/3}} \gamma_{3n+3}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

donde el entero n se elige de modo arbitrario, por ejemplo $n > 0$. Llevando (4.22) a (4.10) y utilizando un programa FORTRAN con doble precisión hemos calculado los primeros valores propios E_0 , E_1 , E_2 , E_3 correspondientes al potencial cuártico unidimensional

$$V(r) = r^4 + A_2 r^2, \quad (4.23)$$

para valores de A_2 enteros desde 0 hasta -10 . Los valores de E_0 y E_2 corresponden a estados pares ($\nu = 0$ en (4.6)), los valores de E_1 , E_3 corresponden a estados impares ($\nu = 1$ en (4.6)). Los resultados concuerdan perfectamente con los valores de E_0 y E_1 dados en [7]

El segundo ejemplo de aplicación de nuestro método hace referencia a la ecuación (4.1) con el potencial anarmónico séxtico

$$V(r) = A_6 r^6 + A_4 r^4 + A_2 r^2 + A_{-2} r^{-2}, \quad A_6 > 0, \quad (4.24)$$

correspondiente a $N = 3$ en el potencial general (4.2). En este caso, la ecuación presenta en el origen un punto singular regular y en el infinito una singularidad irregular de rango 4. Los exponentes en los desarrollos asintóticos (4.7) toman ahora los valores

$$\begin{aligned} \alpha_4^{(1)} &= -\sqrt{A_6}, & \alpha_3^{(1)} &= 0, & \alpha_2^{(1)} &= \frac{-A_4}{2\sqrt{A_6}}, & \alpha_1^{(1)} &= 0, \\ \mu^{(1)} &= -\frac{3}{2} - \frac{4A_2A_6 - A_4^2}{8A_6\sqrt{A_6}}, \\ \alpha_4^{(2)} &= +\sqrt{A_6}, & \alpha_3^{(2)} &= 0, & \alpha_2^{(2)} &= \frac{A_4}{2\sqrt{A_6}}, & \alpha_1^{(2)} &= 0, \\ \mu^{(2)} &= -\frac{3}{2} + \frac{4A_2A_6 - A_4^2}{8A_6\sqrt{A_6}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

y los coeficientes $h_s^{(k)}$ en las series asintóticas verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} 2\alpha_4^{(k)} s h_s^{(k)} &= \left(E + \alpha_2^{(k)} (-2s + 5 + 2\mu^{(k)}) \right) h_{s-2}^{(k)} + \\ &+ \left((s - 4 - \mu^{(k)})(s - 3 - \mu^{(k)}) - A_{-2} \right) h_{s-4}^{(k)}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Las funciones auxiliares son ahora

$$\begin{aligned} v_{\text{reg}}(r) &= \exp\left(-\frac{\alpha_4^{(1)}}{4} r^4\right) u_{\text{reg}}(r), \\ v^{(1)}(r) &= \exp\left(-\frac{\alpha_4^{(1)}}{4} r^4\right) u^{(1)}(r), \end{aligned} \quad (4.27)$$

y la relación entre su Wronskiano y el Wronskiano de u_{reg} , $u^{(1)}$ es

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] = \exp\left(-\frac{\alpha_4^{(1)}}{2} r^4\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]. \quad (4.28)$$

El primer desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares es

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] \approx \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{2\hat{n}} r^{2\hat{n}+1+\nu+\mu^{(1)}}, \quad (4.29)$$

donde

$$\gamma_{2\hat{n}} = \sum_{s=0}^{+\infty} h_{2s}^{(1)} \left(2\alpha_2^{(1)} b_{2\hat{n}+2s} - (2\hat{n} + 4s + 2 + \nu - \mu^{(1)}) b_{2\hat{n}+2s+2} \right), \quad (4.30)$$

y b_n son los coeficientes en la expansión

$$w(r) = v_{\text{reg}}(r) \exp\left(\frac{\alpha_2^{(1)}}{2} r^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n r^{n+\nu}, \quad b_0 \neq 0, \quad (4.31)$$

cuyos valores se determinan mediante la recurrencia

$$\begin{aligned} n(n-1+2\nu)b_n &= (-E + \alpha_2^{(1)}(2n-3+2\nu))b_{n-2} + \\ &+ (A_2 - (\alpha_2^{(1)})^2 - \alpha_4^{(1)}(2n-5+2\nu))b_{n-4} + 2A_4 b_{n-6}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

El segundo desarrollo del Wronskiano viene dado por la combinación lineal

$$\exp\left(-\frac{\alpha_4^{(1)}}{2} r^4\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] \approx \beta_1 \mathcal{E}_1 + \beta_2 \mathcal{E}_2, \quad (4.33)$$

donde $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ se representan mediante series exponenciales de Heaviside de la exponencial en el segundo miembro de (4.28) y las constantes β_1, β_2 verifican

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] = \beta_1 + \beta_2. \quad (4.34)$$

Identificando los desarrollos (4.29) y (4.33) se obtienen los valores de β_1, β_2 que, llevados a (4.34), dan como resultado

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] &= \frac{\Gamma(n+1+(1+\nu+\mu^{(1)})/4)}{(-\alpha_4^{(1)}/2)^{n+(1+\nu+\mu^{(1)})/4}} \gamma_{4n} + \\ &+ \frac{\Gamma(n+1+(3+\nu+\mu^{(1)})/4)}{(-\alpha_4^{(1)}/2)^{n+(3+\nu+\mu^{(1)})/4}} \gamma_{4n+2}, \end{aligned} \quad (4.35)$$

donde el entero n se elige de modo arbitrario.

A fin de verificar la validez de nuestro resultado, hemos calculado los valores numéricos de las primeras energías E_0, E_1, E_2, E_3 que anulan al segundo miembro de (4.35) cuando el potencial (4.24) toma la forma particular

$$V(r) = r^6 - (4\hat{s} + 4J - 2)r^2 + \frac{1}{4}(4\hat{s} - 1)(4\hat{s} - 3)r^{-2}, \quad (4.36)$$

considerada por Turbiner [61], Bender y Dunne [9] y Finkel et al. [22] para $\hat{s} = (2 + \sqrt{3})/4$ y diferentes valores de J . En particular, para $J = 1, 2, 3, 4$, los J valores más bajos de la energía coinciden con los valores obtenidos por

Bender y Dunne.

El problema de la determinación de los valores propios de la energía de un oscilador anarmónico unidimensional representado por el potencial

$$V(x) = gx^2 + x^{2N}, \quad N \text{ entero positivo, } N \geq 4, \quad (4.37)$$

ha sido abordado por varios autores [36], [42], [5] por medio de diferentes aproximaciones. En [31] hemos aplicado el método de los Wronskianos para obtener una fórmula de la condición de cuantización que determina las energías propias de este oscilador. La fórmula, consistente en la ecuación de ceros de una función de la energía igual a una combinación lineal finita de funciones gamma, es exacta, salvo por los inevitables cálculos numéricos de las series infinitas que definen a los coeficientes de esta combinación lineal. La ecuación de Schrödinger correspondiente en unidades adecuadas para la variable independiente x y la energía E ,

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + gx^2 + x^{2N} \right) u(x) = Eu(x), \quad (4.38)$$

responde a la forma canónica (2.147), (2.148), siendo ahora

$$g(x) = -E + gx^2 + x^{2N}, \quad (4.39)$$

donde la variable compleja z en (2.147) queda restringida al eje real, de ahí la ausencia del término en x^{-2} . La ecuación (4.38) tiene en el origen un punto ordinario y en el infinito un punto singular irregular cuyo rango de Poincaré es $N+1$. En consecuencia, la ecuación admite dos soluciones independientes, de comportamiento regular en el origen, dadas por

$$u_{\text{reg}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+\nu}, \quad a_0 \neq 0, \quad (4.40)$$

para valores $\nu = 0, \nu = 1$. También existe otro sistema fundamental de soluciones representadas por sus desarrollos asintóticos cuando $x \rightarrow +\infty$,

$$u^{(k)}(x) \approx \exp\left(\frac{\alpha^{(k)}}{N+1}x^{N+1}\right) x^{\mu^{(k)}} \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(k)} x^{-s}, \quad h_0^{(k)} \neq 0, \quad k = 1, 2, \quad (4.41)$$

donde

$$\alpha^{(1)} = -1, \quad \alpha^{(2)} = 1, \quad \mu^{(1)} = \mu^{(2)} \equiv \mu = -N/2, \quad (4.42)$$

y los coeficientes $h_s^{(k)}$ verifican la recurrencia

$$2\alpha^{(k)} s h_s^{(k)} = (s - N/2)(s - N/2 - 1) h_{s-N-1}^{(k)} + E h_{s-N+1}^{(k)} - g h_{s-N+3}^{(k)}. \quad (4.43)$$

En las relaciones de conexión

$$u_{\text{reg}}(x) = T_1 u^{(1)}(x) + T_2 u^{(2)}(x), \quad (4.44)$$

los factores de conexión se expresan como cocientes de Wronskianos

$$T_1 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(2)}]}{\mathcal{W}[u^{(1)}, u^{(2)}]}, \quad T_2 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]}{\mathcal{W}[u^{(2)}, u^{(1)}]}, \quad (4.45)$$

y la condición de cuantización que exige la nulidad de T_2 se expresa

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] = 0. \quad (4.46)$$

A fin de calcular $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]$ introducimos las funciones auxiliares

$$v_{\text{reg}}(x) = \exp\left(\frac{x^{N+1}}{N+1}\right) u_{\text{reg}}(x), \quad (4.47)$$

$$v^{(1)}(x) = \exp\left(\frac{x^{N+1}}{N+1}\right) u^{(1)}(x), \quad (4.48)$$

cuyo Wronskiano guarda con el Wronskiano de $u_{\text{reg}}, u^{(1)}$ la relación

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] = \exp\left(\frac{2x^{N+1}}{N+1}\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]. \quad (4.49)$$

Como en los casos anteriores, nuestro método se basa en comparar dos desarrollos formales del Wronskiano de las funciones auxiliares. El primer desarrollo se obtiene reemplazando en la fórmula exacta

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] = v_{\text{reg}} \frac{dv^{(1)}}{dx} - \frac{dv_{\text{reg}}}{dx} v^{(1)} \quad (4.50)$$

a $v^{(1)}$ por el desarrollo asintótico resultante de (4.41), (4.48),

$$v^{(1)}(x) \approx \sum_{s=0}^{+\infty} h_s^{(1)} x^{-s+\mu}, \quad (4.51)$$

y a v_{reg} por el desarrollo en serie

$$v_{\text{reg}}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{n+\nu}, \quad b_0 \neq 0, \quad (4.52)$$

cuyos coeficientes verifican la recurrencia

$$(n+\nu)(n+\nu-1)b_n = -Eb_{n-2} + gb_{n-4} + 2(n-N/2-1+\nu)b_{n-N-1}. \quad (4.53)$$

La expansión formal del primer miembro en (4.49) así obtenida es

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg}}, v^{(1)}] \approx \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \gamma_j x^{j-1+\nu+\mu}, \quad (4.54)$$

donde los coeficientes γ_j vienen dados por series

$$\gamma_j = \sum_{s=0}^{+\infty} (-2s - j - \nu + \mu) b_{s+j} h_s^{(1)}. \quad (4.55)$$

Un segundo desarrollo del Wronskiano de las funciones auxiliares comparable con (4.54) se obtiene sustituyendo la exponencial en el segundo miembro de (4.49) por una combinación lineal de las $N + 1$ series exponenciales de Heaviside

$$\exp\left(\frac{2x^{N+1}}{N+1}\right) \approx \mathcal{E}_L = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(2x^{N+1}/(N+1))^{n+\delta_L}}{\Gamma(n+1+\delta_L)}, \quad L = 0, 1, \dots, N, \quad (4.56)$$

siendo

$$\delta_L = \frac{\mu + \nu + L}{N+1}, \quad L = 0, 1, \dots, N, \quad (4.57)$$

de manera que el segundo miembro de (4.49) toma la forma asintótica cuando $x \rightarrow +\infty$

$$\exp\left(\frac{2x^{N+1}}{N+1}\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] \approx \sum_{L=0}^N \beta_L \mathcal{E}_L, \quad (4.58)$$

donde las constantes β_L son tales que, a consecuencia de (4.56), (4.58),

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}] = \sum_{L=0}^N \beta_L. \quad (4.59)$$

Llevando (4.54) y (4.58) respectivamente al primer y segundo miembro de (4.49) se obtienen las constantes β_L ,

$$\beta_L = \Gamma(n+1+\delta_L) \left(\frac{N+1}{2}\right)^{n+\delta_L} \gamma_{j_L}, \quad j_L = n(N+1) + 1 + L, \quad (4.60)$$

siendo n un entero tal que j_L es suficientemente grande para asegurar la convergencia de las series en (4.55). Sustituyendo (4.60) en (4.59) se obtiene la forma explícita de la condición de cuantización (4.46):

$$\sum_{L=0}^N \gamma(n+1+\delta_L) \left(\frac{N+1}{2}\right)^{L/(N+1)} \gamma_{j_L} = 0. \quad (4.61)$$

Utilizando esta expresión hemos obtenido los valores propios más bajos E_0, E_1, E_2, E_3 de la energía para diferentes valores de g (desde -20 hasta 20) y valores de $N = 4, 5, 6, 7$ mediante un programa FORTRAN con doble precisión. Nuestro método permite asimismo, al menos en principio, obtener las funciones propias mediante las expresiones (4.47), (4.52). No obstante, la convergencia de la serie en (4.52) es muy lenta para $x \geq 5$ aproximadamente, pudiendo usarse entonces el desarrollo asintótico (4.41). Pero la ventaja de este procedimiento sobre la integración numérica convencional de la ecuación de Schrödinger no está clara, especialmente cuando se ha de calcular la función de onda normalizada para un número grande de puntos.

Nuestro método es aplicable a otros problemas, como los osciladores anarmónicos solubles analíticamente representados por el potencial de Pöschl-Teller, el potencial de Pöschl-Teller modificado y el potencial de Morse. Los detalles pueden consultarse en la citada referencia [31]. En el caso del potencial de Pöschl-Teller,

$$V(x) = \frac{1}{2}V_0 \left(\frac{\kappa(\kappa-1)}{\sin^2(\alpha x)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cos^2(\alpha x)} \right), \quad V_0 = \frac{\hbar^2\alpha^2}{m},$$

$$\kappa, \lambda > 1, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad (4.62)$$

la ecuación de Schrödinger puede llevarse a la forma de una ecuación hipergeométrica [23] que presenta dos puntos singulares regulares $y = 0, y = 1$ en el campo de la nueva variable $0 \leq y = \sin^2(\alpha x) \leq 1$. La expresión de $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u^{(1)}]$ obtenida por nosotros puede explorarse eligiendo por ejemplo $y = 1/2$ y dando valores numéricos a κ y λ , verificando que se anula cuando

$$\frac{k^2}{\alpha^2} = (\kappa + \lambda + 2n)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.63)$$

siendo $k = 2mE/\hbar^2$, tal como predice el resultado analítico de Flügge.

En el caso del potencial de Pöschl-Teller modificado, i.e.

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\alpha^2 \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh^2(\alpha x)}, \quad \lambda > 1, \quad -\infty < x < +\infty, \quad (4.64)$$

la ecuación de Schrödinger puede llevarse de nuevo a la forma de una ecuación hipergeométrica mediante cambios adecuados de las variables independiente y dependiente. La ecuación transformada presenta singularidades regulares en ambos puntos límite del campo de la nueva variable $0 \leq y = 1/\cosh^2(\alpha x) \leq 1$, existiendo dos clases de soluciones que presentan un comportamiento regular en $y = 1$, correspondientes a estados pares e impares. Tomando $y = 1/2$ hemos evaluado nuestra expresión de $\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u]$ para diferentes valores de α y λ , verificando que se anula cuando

$$0 < \frac{\kappa}{\alpha} = \lambda - 1 - 2n \quad \text{para estados pares,}$$

$$0 < \frac{\kappa}{\alpha} = \lambda - 2 - 2n \quad \text{para estados impares,} \quad (4.65)$$

donde $n = 0, 1, 2, \dots$.

La ecuación radial de Schrödinger con el potencial de Morse

$$V(r) = D(\exp(-2\alpha x) - 2\exp(-\alpha x)), \quad x = \frac{r - r_0}{r_0}, \quad \alpha > 0, \quad (4.66)$$

es exactamente soluble para $l = 0$. Mediante el cambio de la variable independiente $y = (2\gamma/\alpha)\exp(-\alpha x)$, la ecuación es llevada a una forma tal que presenta en $y = 0$ un punto singular regular y en $y = \infty$ un punto singular irregular. Ahora bien, la solución física del problema ha de definirse solamente desde $y = 0$, punto que corresponde a $x \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$), hasta $y = y_0 = (2\gamma/\alpha)\exp(\alpha)$, punto ordinario que corresponde a $x = -1$ ($r = 0$). Esta solución ha de ser regular en $y = 0$ y nula en $y = y_0$. Denominamos $u_{\text{reg}}(y)$ a la solución regular en $y = 0$ y $u_{\text{asy}}^{(1)}(y)$, $u_{\text{asy}}^{(2)}(y)$ al sistema de dos soluciones independientes, ambas finitas en $y = y_0$. La solución físicamente aceptable es aquella combinación lineal $u^{(1)}(y)$ de $u_{\text{asy}}^{(1)}(y)$, $u_{\text{asy}}^{(2)}(y)$ que se anula en $y = y_0$. En estas condiciones, nuestro procedimiento exige que el Wronskiano de u_{reg} , $u^{(1)}$ sea nulo en el intervalo $[0, y_0]$, en particular para $y = y_0$, estableciendo así la condición de cuantización

$$u_{\text{reg}}(y_0) = 0, \quad (4.67)$$

donde u_{reg} viene definida por la serie

$$u_{\text{reg}}(y) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n y^{n+\beta/\alpha}, \quad a_0 \neq 0. \quad (4.68)$$

En particular, si en (4.68) se elige $a_0 = 1$, se obtiene

$$u_{\text{reg}}(y) = y^{\beta/\alpha} \exp(-y/2) {}_1F_1(1/2 + \beta/\alpha - \gamma/\alpha, 1 + 2\beta/\alpha; y), \quad (4.69)$$

de modo que la condición de cuantización (4.67) coincide con la dada en [23]. A diferencia de lo que sucede en el potencial (4.37), en los casos de los potenciales (4.62), (4.64) y (4.66) la convergencia numérica de las series de potencias en las formas funcionales de las soluciones de la ecuación de Schrödinger es bastante rápida para asegurar el cálculo de las funciones propias.

4.2. Potenciales polinomiales

Los ejemplos descritos en la sección precedente ponen de manifiesto la viabilidad del método de los Wronskianos para obtener soluciones globales de

la ecuación de Schrödinger con una amplia clase de potenciales polinomiales. Desde luego, en los casos estudiados queda pendiente la prueba de convergencia de las series que definen a los coeficientes del primer desarrollo formal del Wronskiano de las funciones auxiliares $v_{\text{reg}}, v^{(1)}$. En [32] hemos aplicado nuestro método a la resolución de la ecuación de Schrödinger con un potencial polinomial, dando la prueba formal de su convergencia. La ecuación canónica de la cual partimos en este trabajo es

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + g(z)w = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (4.70)$$

donde

$$g(z) = \sum_{s=0}^{2N} g_s z^s, \quad g_{2N} \neq 0. \quad (4.71)$$

A fin de evitar confusión en el uso de símbolos con nuestra ecuación canónica (2.147), (2.148), reescribimos (4.70), (4.71) en la forma

$$-z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \hat{g}(z)u = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (4.72)$$

$$\hat{g}(z) = z^2 g(z) = \sum_{j=0}^{2\hat{N}} \hat{g}_j z^j, \quad \hat{g}_{2\hat{N}} \neq 0, \quad \hat{N} = 1, 2, 3, \dots, \quad (4.73)$$

donde $g(z)$ es la función coeficiente de $u(z)$ en (2.147), de modo que $\hat{N} = N + 1$, $\hat{g}_j = g_{j-2}$ y la función $\hat{g}(z)$ incluye al potencial polinomial con los términos centrífugo y de energía. La ecuación (4.72) presenta dos puntos singulares, el origen regular y el infinito irregular de rango $\hat{N} = N + 1$. En consecuencia, existe un sistema fundamental de soluciones de la ecuación dadas por desarrollos en series de potencias cuyos exponentes crecen a partir de sendos valores ρ_η , $\eta = 1, 2$, una de las cuales, sea u_{reg} , tiene un comportamiento regular en $z = 0$, siendo por este motivo interesante como solución del problema físico:

$$u_{\text{reg}}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^{n+\rho}, \quad (4.74)$$

para valores de ρ , c_n que resultan de sustituir (4.74) en (4.72).

Además de las soluciones en series de potencias de exponentes crecientes, la ecuación (4.72) admite un segundo sistema fundamental de soluciones formales, i.e. dadas por sendos desarrollos asintóticos

$$u_k(z) \approx \exp(\xi_k(z)) \sum_{s=0}^{+\infty} a_{s,k} z^{-s}, \quad a_{0,k} \neq 0, \quad k = 1, 2, \quad (4.75)$$

donde

$$\xi_k(z) = \sum_{p=1}^{\hat{N}} \frac{\alpha_{p,k}}{p} z^p + (\alpha_{0,k} - (\hat{N} - 1)/2) \ln z. \quad (4.76)$$

La sustitución formal de (4.75) en (4.72) permite obtener los exponentes $\alpha_{p,k}$ y los coeficientes $a_{s,k}$. En particular, el coeficiente del término de grado \hat{N} ,

$$(\alpha_{\hat{N}})^2 - \hat{g}_{2\hat{N}} = 0, \quad (4.77)$$

determina el comportamiento de las soluciones formales cuando $|z|$ crece indefinidamente. Los coeficientes $\alpha_{p,k}$ son soluciones particulares de la recurrencia

$$\begin{aligned} 2\alpha_{\hat{N}}sa_s = & \sum_{j=1}^{\hat{N}-1} (\tilde{\alpha}_{j-2} - 2\alpha_j(s - \hat{N} + j))a_{s-\hat{N}+j} + \\ & + (\tilde{\alpha}_{-2} + (s - \hat{N})(s - 2\alpha_0))a_{s-\hat{N}}, \quad a_0 \neq 0, \end{aligned} \quad (4.78)$$

donde $\tilde{\alpha}_j$ son funciones conocidas de \hat{g}_j , \hat{N} y $\alpha_{p,k}$.

La solución u_{reg} puede expresarse mediante cierta combinación lineal de las soluciones formales,

$$u_{\text{reg}}(z) = T_1u_1(z) + T_2u_2(z), \quad (4.79)$$

cuyos coeficientes, los factores de conexión T_1 , T_2 , son las incógnitas a determinar. Nuestro método aplica la regla de Cramer al sistema formado por (4.79) y su primera derivada para obtener los factores de conexión como cocientes de Wronskianos:

$$T_1 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_2]}{\mathcal{W}[u_1, u_2]}, \quad T_2 = \frac{\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_1]}{\mathcal{W}[u_2, u_1]}. \quad (4.80)$$

El cálculo de los Wronskianos en los denominadores de (4.80) se realiza directamente, sustituyendo los desarrollos (4.75) y sus derivadas formales en la forma general

$$\mathcal{W}[u, v] = uv' - u'v = -\mathcal{W}[v, u], \quad (4.81)$$

de donde se obtiene un desarrollo en potencias $z^0, z^{-1}, z^{-2}, \dots$. Dado que u_1, u_2 son soluciones de la ecuación diferencial (4.72), su Wronskiano es independiente de z y su valor es igual que el coeficiente de z^0 en el desarrollo citado, i.e.

$$\mathcal{W}[u_1, u_2] = 2\alpha_{\hat{N},2}a_{0,1}a_{0,2} = \mathcal{W}[u_2, u_1]. \quad (4.82)$$

En vez de calcular directamente los Wronskianos en los numeradores de (4.80), introducimos para cada $k = 1, 2$ las funciones auxiliares

$$\begin{aligned} v_{\text{reg},k}(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2\hat{N}}z^{\hat{N}}\right)u_{\text{reg}}(z), \\ v_k(z) &= \exp\left(-\frac{\lambda_k}{2\hat{N}}z^{\hat{N}}\right)u_k(z), \end{aligned} \quad (4.83)$$

donde $\lambda_k \equiv \alpha_{\hat{N},k}$. Sustituyendo (4.83) y sus derivadas en (4.81) obtenemos la relación entre Wronskianos

$$\mathcal{W}[v_{\text{regk}}, v_k] = \exp\left(-\frac{\lambda_k}{\hat{N}} z^{\hat{N}}\right) \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_k]. \quad (4.84)$$

Un desarrollo formal de $\mathcal{W}[v_{\text{regk}}, v_k]$ se obtiene llevando al segundo miembro de

$$\mathcal{W}[v_{\text{regk}}, v_k] = v_{\text{regk}} v_k' - v_{\text{regk}}' v_k \quad (4.85)$$

la primera expresión (4.83) y la que resulta de reemplazar u_k por (4.75) en la segunda expresión (4.83):

$$\mathcal{W}[v_{\text{regk}}, v_k] \approx \sum_{\hat{n}=-\infty}^{+\infty} \gamma_{\hat{n},k} z^{\hat{n}+\nu_k+\mu_k-1}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.86)$$

donde

$$\mu_k = \alpha_{0,k} - (\hat{N} - 1)/2, \quad \nu_k = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1 + 4\hat{g}_0}), \quad (4.87)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{\hat{n},k} = & \sum_{j=0}^{+\infty} a_{j,k} (-\hat{n} + 2j + \nu_k - \mu_k) b_{\hat{n}+j,k} + \\ & + \sum_{p=1}^{\hat{N}-1} 2\alpha_{p,k} b_{\hat{n}-p+j} + \lambda_k b_{\hat{n}-\hat{N}+j}, \end{aligned} \quad (4.88)$$

y $b_{n,k}$ son los coeficientes de las potencias de z en el desarrollo

$$w_{\text{regk},k}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k} z^{n+\nu_k}, \quad b_{0,k} \neq 0, \quad (4.89)$$

de la función

$$\begin{aligned} w_{\text{regk},k}(z) = \exp\left(\zeta_k(z) + \frac{\lambda_k}{2\hat{N}} z^{\hat{N}}\right) v_{\text{regk},k}(z), \\ \zeta_k(z) = \sum_{p=1}^{\hat{N}-1} \frac{\alpha_{p,k}}{p} z^p, \end{aligned} \quad (4.90)$$

que verifican la recurrencia

$$\begin{aligned} n(n + 2\nu_k - 1)b_{n,k} = & \sum_{j=1}^{\hat{N}-1} 2\alpha_{j,k}(n - j + \nu_k)b_{n-j,k} + \\ & + \sum_{j=1}^{2\hat{N}} -\hat{\varepsilon}_{j-2,k} b_{n-j,k}, \quad b_{0,k} \neq 0, \end{aligned} \quad (4.91)$$

donde $\hat{\varepsilon}_{j,k}$ son funciones conocidas de \hat{g}_j , $\alpha_{p,k}$.

Un segundo desarrollo formal de $\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_k]$ se obtiene a partir del desarrollo exponencial de Heaviside (2.223). En muchos problemas de interés físico, z es real positiva $\arg(z) = 0$, el potencial es confinante ($g_{2\hat{N}} > 0$), $\alpha_{\hat{N},1}$, $\alpha_{\hat{N},2}$ son reales y para fijar ideas elegimos $\alpha_{\hat{N},1} = -\sqrt{g_{2\hat{N}}}$, $\alpha_{\hat{N},2} = +\sqrt{g_{2\hat{N}}}$, de modo que $u_1(z)$ decrece y $u_2(z)$ crece exponencialmente cuando $z \rightarrow +\infty$. En estas condiciones, dado que a la variable t en (2.223) corresponde la potencia $z^{\hat{N}}$ de la variable independiente z en (4.72), el Wronskiano de las funciones auxiliares se expresa mediante una combinación lineal de \hat{N} desarrollos de Heaviside (para $k = 1$), $\mathcal{E}_{L,1}(z)$, $L = 0, 1, \dots, \hat{N} - 1$,

$$\mathcal{W}[v_{\text{reg},k}, v_k] \approx \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \beta_{L,1} \mathcal{E}_{L,1}(z), \quad (4.92)$$

de la exponencial en el segundo miembro de (4.84), siempre que las constantes $\beta_{L,1}$ en esta combinación verifiquen

$$\sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \beta_{L,1} = \mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_1], \quad z \rightarrow +\infty. \quad (4.93)$$

Los valores de $\beta_{L,1}$ se obtienen comparando los segundos miembros de (4.93) (4.86). Sustituyendo los valores así obtenidos en (4.93) se tiene

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_1] = \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \frac{\Gamma(n+1+\delta_{L,1})}{(-\lambda_1/\hat{N})^{n+\delta_{L,1}}} \gamma_{\hat{n}_L,1}, \quad (4.94)$$

donde

$$\hat{n}_L = \hat{N}n + L + 1, \quad \delta_{L,1} = (\nu + \mu_1 + L)/\hat{N}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4.95)$$

Llevando (4.94), (4.82) al numerador y denominador respectivamente de (4.80) se obtiene finalmente la forma explícita del factor de conexión T_2 , cuya anulación expresa la condición de cuantización de los valores de la energía relacionados funcionalmente con el parámetro \hat{g}_2 .

A fin de obtener las funciones de onda que representan estados físicamente estables, se calcula el factor de conexión T_1 . Procediendo como en el caso anterior,

$$\mathcal{W}[u_{\text{reg}}, u_2] = \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \cos(\delta_{L,2}\pi) \frac{\Gamma(n+1+\delta_{L,2})}{(\lambda_2/\hat{N})^{n+\delta_{L,2}}} \gamma_{\hat{n}_L,2}, \quad (4.96)$$

donde

$$\delta_{L,2} = (\nu + \mu_2 + L)/\hat{N}. \quad (4.97)$$

Dado que $\arg(z) = 0$ es un rayo de Stokes para T_1 , se toma

$$T_1 = \frac{1}{2}(T_1^+ + T_1^-). \quad (4.98)$$

A fin de contrastar los resultados de nuestro método con los resultados de otros autores, hemos considerado dos ecuaciones diferenciales cuyas soluciones se expresan mediante funciones bien conocidas. El primer ejemplo es la ecuación

$$-z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + \left(z^2 + \lambda^2 - \frac{1}{4} \right) u = 0, \quad (4.99)$$

correspondiente al caso particular $\hat{N} = 1$ de (4.72). La solución regular en el origen se expresa en términos de funciones de Bessel y el comportamiento asintótico de las soluciones formales corresponde al producto de la función exponencial por funciones hipergeométricas:

$$u_{\text{reg}}(z) = 2^\lambda \Gamma(\lambda + 1) z^{1/2} I_\lambda(z), \quad (4.100)$$

$$u_1(z) \approx \exp(-z) {}_2F_0 \left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} - \lambda; ; -\frac{1}{2z} \right), \quad (4.101)$$

$$u_2(z) \approx \exp(z) {}_2F_0 \left(\frac{1}{2} + \lambda, \frac{1}{2} - \lambda; ; \frac{1}{2z} \right). \quad (4.102)$$

Los factores de conexión de estas soluciones en el rayo $\arg z = 0$ son [16, capítulo 2, ec. (52)]

$$\begin{aligned} T_1 &= -\sin(\pi\lambda) 2^{\lambda-1/2} \pi^{-1/2} \Gamma(\lambda + 1), \\ T_2 &= 2^{\lambda-1/2} \pi^{-1/2} \Gamma(\lambda + 1). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Aplicando nuestro método a la ecuación (4.99) obtenemos los factores de conexión en el rayo $\arg z = 0$:

$$\begin{aligned} T_1 &= -\frac{1}{2} (-1)^n \cos \left(\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \pi \right) \Gamma \left(n + \lambda + \frac{1}{2} \right) \gamma_{n,2}, \\ T_2 &= -\frac{1}{2} \Gamma \left(n + \lambda + \frac{1}{2} \right) \gamma_{n,1}, \end{aligned} \quad (4.104)$$

que comparamos numéricamente con (4.103), dando lugar a una expansión del cociente de funciones gamma

$$\frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1/2 + n)} = -2^{-(\lambda+1/2)} \pi^{1/2} \gamma_{n,1}, \quad (4.105)$$

donde

$$\gamma_{n,1} = - \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,1}(\lambda) \left((n + 2m + \lambda + 1/2) b_{m+n}(\lambda) + b_{m+n-1}(\lambda) \right), \quad (4.106)$$

$$a_{m,1}(\lambda) = \frac{(\lambda + 1/2)_m (1/2 - \lambda)_m}{m!(-2)^m}, \quad (4.107)$$

$$b_{2n}(\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{n!(\lambda + 1)_n}, \quad b_{2n+1}(\lambda) = 0. \quad (4.108)$$

En particular, para $\lambda \neq 0$ y $\Re(\lambda) > -1$ se tiene

$$\left(\frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + 1/2)}\right)^2 = \lambda {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \lambda; 1\right), \quad (4.109)$$

de acuerdo con [2, ecuación (15.1.20)].

Como segundo ejemplo consideramos la ecuación

$$-z^2 \frac{d^2 u}{dz^2} + (z^4 - \varepsilon z^2)u = 0, \quad (4.110)$$

correspondiente al caso $\hat{N} = 2$ de (4.72). Esta ecuación admite la solución regular en el origen

$$u_{\text{reg}}(z) = \exp(-z^2/2) {}_1F_1\left(\frac{1-\varepsilon}{4}; \frac{1}{2}; z^2\right), \quad (4.111)$$

y las soluciones formales

$$u_1(z) \approx \exp(-z^2/2) z^{(\varepsilon-1)/2} {}_2F_0\left(\frac{1-\varepsilon}{4}, \frac{3-\varepsilon}{4}; ; -\frac{1}{z^2}\right), \quad (4.112)$$

$$u_2(z) \approx \exp(z^2/2) z^{(-\varepsilon-1)/2} {}_2F_0\left(\frac{1+\varepsilon}{4}, \frac{3+\varepsilon}{4}; ; \frac{1}{z^2}\right). \quad (4.113)$$

Nuestro método da como resultado los factores que conectan a (4.111) con (4.112), (4.113) en el rayo $\arg z = 0$

$$\begin{aligned} T_1 &= -(-1)^n \cos(\delta_2 \pi) 2^{n+\delta_2-2} \Gamma(n + \delta_2) \gamma_{2n,2}, \\ T_2 &= -2^{n+\delta_1-2} \Gamma(n + \delta_1) \gamma_{2n,1}, \end{aligned} \quad (4.114)$$

donde

$$\delta_1 = (1 + \varepsilon)/4, \quad \delta_2 = (1 - \varepsilon)/4. \quad (4.115)$$

Estos valores se comparan con los valores dados en [16, capítulo 2, ecuación (47)] sobre el rayo $\arg z = 0$, i.e.

$$\begin{aligned} T_1 &= \cos\left(\left(1 - \varepsilon\right)\frac{\pi}{4}\right) \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma((1 + \varepsilon)/4)}, \\ T_2 &= \frac{\pi^{1/2}}{\Gamma((1 - \varepsilon)/4)}, \end{aligned} \quad (4.116)$$

para valores particulares de los parámetros, a fin de verificar la equivalencia de ambas expresiones. La identificación de las expresiones de T_2 da lugar a la expansión del producto de funciones gamma

$$\Gamma\left(n + \frac{1 + \varepsilon}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1 - \varepsilon}{4}\right) = -\frac{\pi^{1/2}}{2^{n-(7-\varepsilon)/4} \gamma_{2n,1}(\varepsilon)}, \quad (4.117)$$

donde

$$\gamma_{2n,1}(\varepsilon) = -\sum_{m=0}^{+\infty} a_{2m,1}(\varepsilon) ((2n + 4m - (\varepsilon - 1)/2) b_{2m+2n}(\varepsilon) + b_{2m+2n-2}(\varepsilon)), \quad (4.118)$$

$$a_{2m,1}(\varepsilon) = (-1)^m \frac{((1 - \varepsilon)/4)_m ((3 - \varepsilon)/4)_m}{m!}, \quad a_{2m+1,1}(\varepsilon) = 0, \quad (4.119)$$

y b_n verifican la recurrencia

$$n(n - 1)b_n(\varepsilon) = -\varepsilon b_{n-2}(\varepsilon) + b_{n-4}(\varepsilon), \quad b_0(\varepsilon) = 1, \quad b_1(\varepsilon) = 0. \quad (4.120)$$

Capítulo 5

Aplicaciones del método de los Wronskianos II. Potenciales suma de potencias

El método de los Wronskianos que exponemos en la sección 2.4 no es adecuado para resolver el problema global en la ecuación de Schrödinger cuando el potencial viene dado por una suma de potencias donde los exponentes de algunos términos toman valores negativos arbitrarios. En estos casos, el coeficiente $g(z)$ asociado con el potencial en la ecuación canónica (2.147) adopta la forma (2.247), con $M = -2, -3, -4, \dots$, en lugar de la forma (2.148), y la ecuación tiene en $z = 0$ y $z = \infty$ dos puntos singulares, ambos irregulares. El método de los Wronskianos, en la forma que describimos en la sección 2.5, permite en estos casos resolver de modo satisfactorio el problema de conexión. En este capítulo presentamos algunas aplicaciones del método de los Wronskianos a ecuaciones diferenciales, estudiadas por diferentes autores [51], [58], que presentan en el origen y el infinito singularidades irregulares.

5.1. La ecuación biconfluyente de Heun

La ecuación biconfluyente de Heun, cuya forma normal es [55]

$$D^2y + B(z)y = 0, \quad D = z \frac{d}{dz}, \quad B(z) = \sum_{p=-2}^2 B_p z^p, \quad (5.1)$$

puede llevarse a la forma

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \sum_{p=-2}^2 A_p z^p w = 0, \quad w(z) = z^{1/2} y(z), \\ A_0 = B_0 + 1/4, \quad A_p = B_p, \quad p \neq 0, \quad A_2 A_{-2} \neq 0, \quad (5.2)$$

exenta de primeras derivadas y adecuada para aplicar nuestro método, toda vez que los Wronskianos de sus soluciones son independientes de z . La ecuación, que tiene en $z = 0$ y $z = \infty$ dos puntos singulares irregulares, ambos de rango 1, admite un sistema fundamental de soluciones multiplicativas de la forma

$$w_j(z) = z^{\nu_j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,j} z^n, \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n,j}|^2 < +\infty, \\ |\Re(\nu_j)| \leq 1/2, \quad j = 1, 2, \quad (5.3)$$

excepto para conjuntos particulares de valores de los parámetros A_j . Además de (5.3), la ecuación (5.2) admite un primer sistema fundamental de soluciones formales (de clase (a)) caracterizadas por sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$,

$$w_k(z) \equiv \exp(\alpha_k z) z^{\mu_k} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,k} z^{-m}, \quad a_{0,k} \neq 0, \quad k = 3, 4, \quad (5.4)$$

y un segundo sistema fundamental de soluciones formales (de clase (b)) definidas por sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow 0$,

$$w_l(z) \equiv \exp(\beta_l z^{-l}) z^{\rho_l} \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,l} z^m, \quad b_{0,l} \neq 0, \quad l = 5, 6. \quad (5.5)$$

Los índices ν_j y coeficientes $c_{n,j}$ en las expansiones (5.3) de las soluciones multiplicativas se determinan sustituyendo (5.3) en (5.2), de donde resulta un sistema infinito de ecuaciones para los $c_{n,j}$,

$$(n + \nu_j)(n + \nu_j - 1)c_{n,j} + \sum_{p=-2}^2 A_p c_{n-p,j} = 0, \\ (n = \dots, -1, 0, 1, \dots), \quad (5.6)$$

que se interpreta como un problema de valores propios no lineal. La solución de este tipo de problema por el método de iteración de Newton, que describimos en el apéndice B, permite obtener en general dos índices ν_1, ν_2 y dos conjuntos de coeficientes $\{c_{n,1}\}, \{c_{n,2}\}$. No obstante, para ciertos conjuntos de valores de A_p solo existe una solución de la forma (5.3), y cualquier otra solución independiente de ésta incluye un factor logarítmico, razón por la cual no describe de modo satisfactorio el comportamiento del sistema físico de interés. Suponemos que los valores de A_p en la ecuación biconfluyente de Heun (5.2) son tales que existen dos soluciones multiplicativas de la forma (5.3). En lo que respecta a las soluciones formales, los exponentes $\alpha_k, \mu_k, \beta_l, \rho_l$ y los coeficientes $a_{m,k}, b_{m,l}$ se obtienen previa sustitución de (5.4), (5.5) en la ecuación diferencial (5.2), dando lugar en el primer caso a los valores

$$\alpha_k = \sqrt{-A_2}, \quad \mu_k = -A_1/2\alpha_k, \\ \beta_l = \sqrt{-A_{-2}}, \quad \rho_l = 1 + A_{-1}/2\beta_l, \quad (5.7)$$

y en el segundo a las recurrencias

$$2\alpha_k m a_{m,k} = (m - \mu_k)(m - \mu_k - 1)a_{m-1,k} + \sum_{p=0}^2 A_{-p} a_{m-1-p,k}, \quad (5.8)$$

$$\beta_l m b_{m,l} = (m + \rho_l - 1)(m + \rho_l - 2)b_{m-1,l} + \sum_{p=0}^2 A_p b_{m-1-p,l}. \quad (5.9)$$

El comportamiento de las soluciones multiplicativas (5.3) en la vecindad del punto singular $z = \infty$ está representado por la fórmula de conexión

$$w_j \approx T_{j,3} w_3 + T_{j,4} w_4, \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2, \quad (5.10)$$

y su comportamiento en la vecindad del punto singular $z = 0$ está representado por la fórmula de conexión

$$w_j \approx T_{j,5} w_5 + T_{j,6} w_6, \quad z \rightarrow 0, \quad j = 1, 2, \quad (5.11)$$

siempre que se conozcan los valores de los coeficientes $T_{j,k}$, $T_{j,l}$ denominados factores de conexión, cuyos valores dependen del sector del z -plano complejo considerado, de manera que toman valores diferentes en diferentes sectores del plano separados por rayos de Stokes. El valor de cada factor de conexión sobre un rayo es igual a la semisuma de los valores que toma en los dos sectores adyacentes separados por el rayo. En el caso actual, los rayos de Stokes que separan sectores adyacentes S_{k,p_k} , S_{k,p_k+1} tienen argumentos

$$\arg z = -\arg \alpha_k \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 3, 4, \quad (5.12)$$

y los que separan sectores S_{l,p_l} , S_{l,p_l+1} tienen argumentos

$$\arg z = \arg \beta_l \pm 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad l = 5, 6, \quad (5.13)$$

siendo sus amplitudes angulares iguales a 2π , de modo que en la hoja de Riemann principal, $-\pi < \arg z \leq \pi$, $T_{j,3}$ cambia su valor cuando z cruza el rayo $\arg z = \pi - \arg \alpha_4$, $T_{j,4}$ cambia su valor cuando z cruza el rayo $\arg z = \pi - \arg \alpha_3$, $T_{j,5}$ cambia su valor cuando z cruza el rayo $\arg z = -\pi + \arg \beta_6$ y $T_{j,6}$ cambia su valor cuando z cruza el rayo $\arg z = -\pi + \arg \beta_5$.

A partir de las fórmulas de conexión (5.10), (5.11) y sus derivadas expresamos los factores de conexión como cocientes de Wronskianos de soluciones de la ecuación diferencial,

$$T_{j,3} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_4]}{\mathcal{W}[w_3, w_4]}, \quad T_{j,4} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_3]}{\mathcal{W}[w_4, w_3]}, \quad (5.14)$$

$$T_{j,5} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_6]}{\mathcal{W}[w_5, w_6]}, \quad T_{j,6} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_5]}{\mathcal{W}[w_6, w_5]}. \quad (5.15)$$

Los Wronskianos en los denominadores de (5.14), (5.15) se calculan directamente reemplazando los desarrollos (5.4), (5.5) y sus derivadas en las formas funcionales exactas,

$$\mathcal{W}[f, g](z) = f(z)g'(z) - f'(z)g(z), \quad (5.16)$$

de los Wronskianos respectivos, obteniendo

$$\mathcal{W}[w_3, w_4] = -\mathcal{W}[w_4, w_3] = 2\alpha_4 a_{0,3} a_{0,4}, \quad (5.17)$$

$$\mathcal{W}[w_5, w_6] = -\mathcal{W}[w_6, w_5] = 2\beta_5 b_{0,5} b_{0,6}. \quad (5.18)$$

El cálculo directo de los Wronskianos en los numeradores de (5.14), (5.15) no es viable porque conduce a desarrollos asintóticos que contienen términos en potencias de z de exponentes positivos y negativos, de los que no pueden obtenerse inmediatamente los valores exactos constantes de tales numeradores. Ahora bien, en cada sector del z -plano complejo limitado por rayos de Stokes, una función analítica dada queda definida unívocamente por su desarrollo asintótico. Entonces, si para cada factor de conexión $T_{j,k}$, $T_{j,l}$ obtenemos dos desarrollos asintóticos de la misma función y uno de ellos contiene como factor común al Wronskiano correspondiente en el numerador de (5.14), (5.15), el valor de este Wronskiano resultará de comparar los coeficientes de las potencias de z afectadas de un mismo exponente en uno y otro desarrollo. A tal fin, introducimos las funciones auxiliares

$$u_{j,k}(z) = w_j(z) \exp(-\alpha_k z/2), \quad u_k(z) = w_k(z) \exp(-\alpha_k z/2), \\ j = 1, 2, \quad k = 3, 4, \quad (5.19)$$

$$v_{j,l}(z) = w_j(z) \exp(-\beta_l/(2z)), \quad v_l(z) = w_l(z) \exp(-\beta_l/(2z)), \\ j = 1, 2, \quad l = 5, 6, \quad (5.20)$$

cuyos Wronskianos guardan con los Wronskianos en los numeradores de (5.14), (5.15) las relaciones

$$\mathcal{W}[u_j, u_k] = \exp(-\alpha_k z) \mathcal{W}[w_j, w_k], \quad j = 1, 2, \quad k = 3, 4, \quad (5.21)$$

$$\mathcal{W}[v_j, v_l] = \exp(-\beta_l/z) \mathcal{W}[w_j, w_l], \quad j = 1, 2, \quad l = 5, 6. \quad (5.22)$$

Los Wronskianos en los primeros miembros de (5.21), (5.22) admiten desarrollos formales que se obtienen a partir de las expansiones (5.4), (5.5) y de las relaciones funcionales (5.19), (5.20):

$$\mathcal{W}[u_j, u_k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_{n,j,k} z^{n+\nu_j+\mu_k}, \quad j = 1, 2, \quad k = 3, 4, \quad (5.23)$$

$$\mathcal{W}[v_j, v_l] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \eta_{n,j,l} z^{n+\nu_j+\rho_l}, \quad j = 1, 2, \quad l = 5, 6, \quad (5.24)$$

donde

$$\gamma_{n,j,k} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,l} [\alpha_k c_{n+m,j} - (n + 2m + 1 + \nu_j - \mu_k) c_{n+m+1,j}], \quad (5.25)$$

$$\eta_{n,j,l} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,l} [-\beta_l c_{n-m+2,j} - (n - 2m + 1 + \nu_j - \rho_l) c_{n-m+1,j}]. \quad (5.26)$$

A fin de que los desarrollos asintóticos de los Wronskianos en los primeros miembros de (5.21), (5.22) sean comparables con los desarrollos asintóticos de los segundos miembros, es necesario que estos últimos vengan dados en potencias de z con los mismos exponentes que (5.23) y (5.24) respectivamente. Esto es posible reemplazando las funciones exponenciales en los segundos miembros de (5.21), (5.22) por los desarrollos de Heaviside (2.308), donde la variable t , definida en la primera hoja de Riemann, $|\arg t| < \pi$, en el caso actual corresponde sucesivamente a $-\alpha_k z$ y $-\beta_l/z$. La condición $|\arg t| < \pi$ impide el uso de los desarrollos (2.308) cuando $\arg z = -\arg \alpha_k$ o $\arg z = \arg \beta_l$, que corresponden a los rayos de Stokes en los que el factor de conexión a calcular cambia su valor. Entonces, el valor asignado al factor de conexión es la semisuma de los valores que toma el factor en los sectores adyacentes separados por el rayo, donde se verifica la condición $|\arg t| < \pi$. De este modo se obtienen los desarrollos asintóticos de los segundos miembros en (5.21), (5.22),

$$\exp(-\alpha_k z) \mathcal{W}[w_j, w_k] \approx \mathcal{W}[w_j, w_k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-\alpha_k)^{n+\delta_k}}{\Gamma(n+1+\delta_k)} z^{n+\delta_k},$$

$$z \rightarrow \infty, \quad |\arg z| < \pi, \quad \arg z \neq -\arg \alpha_k, \quad k = 3, 4, \quad (5.27)$$

$$\exp(-\beta_l/z) \mathcal{W}[w_j, w_l] \approx \mathcal{W}[w_j, w_l] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-\beta_l)^{n+\delta_l}}{\Gamma(n+1+\delta_l)} z^{-(n+\delta_l)},$$

$$z \rightarrow 0, \quad |\arg z| < \pi, \quad \arg z \neq \arg \beta_l, \quad l = 5, 6. \quad (5.28)$$

Comparando (5.23) con (5.27) y (5.24) con (5.28) encontramos que si $\delta_k = \nu_j + \mu_k$ y $\delta_l = -(\nu_j + \rho_l)$,

$$\mathcal{W}[w_j, w_k] = \frac{\Gamma(n+1+\nu_j+\mu_k)}{(-\alpha_k)^{n+\nu_j+\mu_k}} \gamma_{n,j,k}, \quad j = 1, 2, \quad k = 3, 4,$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \arg z \neq -\arg \alpha_k, \quad (5.29)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_l] = \frac{\Gamma(n+1-\nu_j-\rho_l)}{(-\beta_l)^{n-\nu_j-\rho_l}} \eta_{-n,j,l}, \quad j = 1, 2, \quad l = 5, 6,$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \arg z \neq \arg \beta_l, \quad (5.30)$$

Cuando $\arg z = -\arg \alpha_k$, z se encuentra en el rayo de Stokes de w_k ; entonces, tomando en el denominador de (5.29)

$$(-1)^{n+\nu_j+\mu_k} = (-1)^n \exp(\pm i\pi(\nu_j + \mu_k)), \quad (5.31)$$

al efectuar la semisuma de las expresiones resultantes aparece el factor

$$\frac{1}{2}(\exp(i\pi(\nu_j + \mu_k)) + \exp(-i\pi(\nu_j + \mu_k))) = \cos[\pi(\nu_j + \mu_k)], \quad (5.32)$$

de donde

$$\mathcal{W}[w_j, w_k] = (-1)^n \cos[\pi(\nu_j + \mu_k)] \frac{\Gamma(n+1+\nu_j+\mu_k)}{\alpha_k^{n+\nu_j+\mu_k}} \gamma_{n,j,k},$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \arg z = -\arg \alpha_k. \quad (5.33)$$

Cuando $\arg z = \arg \beta_l$, z se encuentra en el rayo de Stokes de w_l ; entonces, tomando en el denominador de (5.30)

$$(-1)^{n-\nu_j-\rho_l} = (-1)^n \exp(\pm i\pi(\nu_j + \rho_l)), \quad (5.34)$$

al efectuar la semisuma de las expresiones resultantes aparece el factor

$$\frac{1}{2}(\exp(i\pi(\nu_j + \rho_l)) + \exp(-i\pi(\nu_j + \rho_l))) = \cos[\pi(\nu_j + \rho_l)], \quad (5.35)$$

de donde

$$\mathcal{W}[w_j, w_l] = (-1)^n \cos[\pi(\nu_j + \rho_l)] \frac{\Gamma(n+1-\nu_j-\rho_l)}{\beta_l^{n-\nu_j-\rho_l}} \eta_{-n,j,l},$$

$$|\arg z| < \pi, \quad \arg z = -\arg \beta_l. \quad (5.36)$$

El cálculo de los factores de conexión $T_{j,k}$ se realiza ahora sustituyendo (5.29), (5.17) en el numerador y denominador respectivamente de (5.14). Análogamente, $T_{j,l}$ se obtienen sustituyendo (5.30), (5.18) en el numerador y denominador respectivamente de (5.15). A efectos del cálculo numérico de los factores de conexión, el entero n en las expresiones precedentes ha de tomarse positivo y tal que

$$(n+\nu)(n+\nu-1) > \sum_{p=-2}^2 |A_p|. \quad (5.37)$$

Como ejemplo de aplicación hemos considerado la ecuación radial reducida de Schrödinger en el semieje real positivo

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{d^2 R}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} R \right) + V(r)R(r) = ER(r), \quad (5.38)$$

de una partícula de masa m , momento angular $l\hbar$ y energía $E = A_2\hbar^2/2mr_0^2$, en un potencial con simetría esférica

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{A_{-2}r_0^2}{r^4} + \frac{A_{-1}r_0}{r^3} + \frac{A_0 + l(l+1)}{r^2} + \frac{A_1r_0^{-1}}{r} \right), \quad (5.39)$$

ecuación que adquiere la forma (5.2) al efectuar el cambio

$$z = r/r_0, \quad w(z) = R(r). \quad (5.40)$$

Cuando los parámetros del potencial toman los valores

$$A_{-2} = -1, \quad A_{-1} = 4/5, \quad A_0 = 31/25, \quad A_1 = 3/5, \quad (5.41)$$

la ecuación (5.38) presenta para $l = 0$ un estado ligado de energía $E = -(1/4)\hbar^2/2mr_0^2$ [46], de modo que (5.2), con los A_p dados en (5.41) y $A_2 = -1/4$, tiene una solución normalizable en el semieje real positivo. Hemos aplicado nuestro método de cálculo de los factores de conexión a la ecuación (5.2) correspondiente a (5.38), para $z \in [0, +\infty)$, con valores fijos (5.41) de los parámetros del potencial y valores cambiantes del parámetro de energía

$$A_2 = -1/10, \quad -1/5, \quad -1/4, \quad -3/10, \quad -2/5, \quad (5.42)$$

obteniendo las partes real e imaginaria de los índices $\nu_1, \nu_2 = -\nu_1$ y de los factores de conexión $T_{j,k}, T_{j,l}$. Asimismo, hemos obtenido los coeficientes ζ_1, ζ_2 de la combinación lineal de soluciones multiplicativas

$$w_{\text{reg}} = \zeta_1 w_1 + \zeta_2 w_2, \quad (5.43)$$

de la que resulta una solución regular en la vecindad de $z = 0$, de modo que

$$w_{\text{reg}}(z) \sim w_5(z), \quad z \rightarrow 0^+, \quad (5.44)$$

y los factores de conexión que relacionan a w_{reg} con w_3, w_4 , es decir,

$$w_{\text{reg}}(z) \approx T_{\text{reg},3} w_3(z) + T_{\text{reg},4} w_4(z), \quad z \rightarrow +\infty. \quad (5.45)$$

En particular, la solución de (5.2) normalizable en $[0, +\infty)$ que se tiene cuando A_p vienen dados por (5.41) y $A_2 = -1/4$,

$$w(z) = z^{3/5} \exp(-z^{-1} - z/2), \quad (5.46)$$

puede escribirse en la forma

$$w(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_n z^{n+3/5}, \quad (5.47)$$

con

$$\begin{aligned}\hat{c}_n &= (-1)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{-m}}{m!(m-n)!}, & n < 0, \\ \hat{c}_n &= (-1)^n \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{-m-n}}{m!(m+n)!}, & n \geq 0.\end{aligned}\quad (5.48)$$

Comparando (5.47) con la solución multiplicativa

$$w_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,1} z^{n-2/5}, \quad (5.49)$$

se tienen los factores de conexión $T_{1,3}$, $T_{1,5}$ de la solución (5.49),

$$T_{1,3} = T_{1,5} = c_{0,1}/\hat{c}_{-1}, \quad (5.50)$$

y tomando $c_{0,1} = 1$,

$$T_{1,3} = T_{1,5} = - \left[\sum_{m=0}^{+\infty} \frac{2^{-m}}{m!(m+1)!} \right]^{-1}, \quad (5.51)$$

valores que coinciden con los de $\Re(T_{1,3})$, $\Re(T_{1,5})$ obtenidos con nuestro procedimiento.

5.2. Osciladores "spiked"

Desde la publicación del trabajo pionero de Klauder [38], hace tres décadas, los osciladores armónicos "spiked", i.e. osciladores armónicos con un término adicional de repulsión singular en el origen

$$\frac{\lambda}{r^\alpha}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0, \quad (5.52)$$

han suscitado el interés de una considerable nómina de autores. En [33] consideramos el problema de la determinación de los niveles de energía y funciones de onda de una partícula ligada en un potencial confinante cuyo comportamiento en el infinito está dominado por un término proporcional a r^n , $n \geq 2$, y que presenta en el origen una singularidad del tipo r^{-m} , $m > 2$. En concreto, aplicamos nuestro método de Wronskianos a la ecuación radial de Schrödinger

$$\left[-\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\mathcal{L}(\mathcal{L}+1)}{r^2} + V(r) \right] R(r) = ER(r), \quad (5.53)$$

con un potencial "spiked" tridimensional general

$$V(r) = \sum_q A(q)r^q, \quad (5.54)$$

donde q recorre un conjunto finito de números enteros negativos y positivos y/o números racionales acotado por sendos valores $q_{\min} < 0$ y $q_{\max} > 0$, de modo que $A(q_{\min})$ y $A(q_{\max})$ son positivos. Mediante un cambio adecuado de variables y parámetros, la ecuación (5.53) se lleva a la forma, en la notación de [33],

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + g(z)w = 0, \quad (5.55)$$

$$g(z) = \sum_{s=-2M}^{2N} g_s z^s, \quad M, N > 0, \quad g_{-2M} > 0, \quad g_{2N} > 0. \quad (5.56)$$

A fin de evitar confusión en el uso de símbolos con nuestra ecuación canónica (2.246), (2.247), reescribimos (5.55), (5.56) en la forma

$$-z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + \hat{g}(z)w = 0, \quad (5.57)$$

$$\hat{g}(z) = z^2 g(z) = \sum_{s=-2\hat{M}}^{2\hat{N}} \hat{g}_s z^s, \quad \hat{M}, \hat{N} > 0, \quad g_{-2\hat{M}} > 0, \quad g_{2\hat{N}} > 0, \quad (5.58)$$

donde $g(z)$ es ahora la función coeficiente de $u(z)$ en (2.246), de modo que $\hat{M} = -M - 1$, $\hat{N} = N + 1$, $\hat{g}_s = g_{s-2}$. El origen y el infinito son entonces las únicas singularidades de (5.57) con rangos \hat{M} y \hat{N} respectivamente.

La ecuación (5.57) admite tres sistemas fundamentales de soluciones:

a) Dos soluciones de Floquet o multiplicativas, w_1 y w_2 , que, excepto para conjuntos de valores particulares de los parámetros \hat{g}_s en (5.58), tienen la forma

$$w_j(z) = z^{\nu_j} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,j} z^n, \quad (5.59)$$

donde

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n,j}|^2 < +\infty, \quad j = 1, 2, \quad (5.60)$$

y $\nu_j, c_{n,j}$ son en general complejos.

b) Dos soluciones formales de Thomé, w_3 y w_4 , (soluciones formales de clase (a)), representadas por sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow \infty$,

$$w_k(z) \approx \exp\left(\sum_{p=1}^{\hat{N}} \frac{\alpha_{p,k}}{p} z^p\right) z^{\mu_k} \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,k} z^{-m}, \quad a_{0,k} \neq 0, \quad k = 3, 4. \quad (5.61)$$

c) Dos soluciones formales de Thomé, w_5 y w_6 , (soluciones formales de clase (b)), representadas por sus desarrollos asintóticos cuando $z \rightarrow 0$,

$$w_l(z) \approx \exp\left(\sum_{q=1}^{\hat{M}} \frac{\beta_{q,l}}{q} z^{-q}\right) z^{\rho_l} \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,l} z^m, \quad b_{0,l} \neq 0, \quad l = 5, 6. \quad (5.62)$$

La sustitución de (5.59) en (5.57) da como resultado el conjunto infinito de ecuaciones homogéneas para los $c_{n,j}$

$$(n + \nu_j)(n + \nu_j - 1)c_{n,j} - \sum_{s=-2\hat{M}}^{2\hat{N}} \hat{g}_s c_{n-s,j} = 0, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad (5.63)$$

que puede interpretarse como un problema no lineal de valores propios donde ν_j es tal que se verifica (5.60). Este problema es soluble por el método de iteración de Newton descrito en el apéndice B. En general, se obtienen dos índices ν_1, ν_2 y dos conjuntos de coeficientes $\{c_{n,1}\}, \{c_{n,2}\}$ correspondientes a estos índices. Ahora bien, para ciertos conjuntos de valores de los parámetros \hat{g}_s , existe solamente una solución de la forma (5.59), de modo que cualquier otra solución independiente de ella contiene potencias de z multiplicadas por su logaritmo. En general, estas soluciones logarítmicas no corresponden al sistema físico de interés y deben descartarse. En consecuencia, nosotros admitimos la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la forma (5.59).

Los exponentes $\alpha_{p,k}, \mu_k$ y los coeficientes $a_{m,k}$ en los desarrollos (5.61) de w_3 y w_4 se obtienen sustituyendo formalmente esos desarrollos en la ecuación diferencial (5.57), de donde resulta que los exponentes son las soluciones del sistema de ecuaciones (ver (2.257)) con los cambios de notación introducidos en (5.57), (5.58), es decir,

$$\sum_{\tau=0}^{\hat{N}-p} \alpha_{\hat{N}-\tau} \alpha_{p+\tau} - \hat{g}_{\hat{N}+p} = 0, \quad p = \hat{N}, \hat{N} - 1, \dots, 1, 0, \quad (5.64)$$

donde

$$\alpha_0 \equiv \alpha_{0,k} = \mu_k + \frac{\hat{N} - 1}{2}, \quad (5.65)$$

verificándose en consecuencia que

$$\alpha_{p,3} = -\alpha_{p,4}, \quad p = 0, 1, \dots, \hat{N}, \quad (5.66)$$

en particular, para $p = 0$, habida cuenta de (5.65),

$$\mu_3 + \mu_4 = -\hat{N} + 1. \quad (5.67)$$

Los coeficientes $a_{m,k} \equiv a_m$ verifican la recurrencia de orden $\hat{N} + 2\hat{M}$ (ver (2.259))

$$2\alpha_{\hat{N}} m a_m = \sum_{\tau=0}^{\hat{N}-2} [\tilde{\alpha}_{\tau-1} - 2\alpha_{\tau+1}(m - \hat{N} + 1 + \tau)] a_{m-\hat{N}+1+\tau} + \\ + [\tilde{\alpha}_{-2} + (m - \hat{N}(m - 2\alpha_0))] a_{m-\hat{N}} + \sum_{\tau=-2\hat{M}-1}^{-2} -\hat{g}_{\tau+1} a_{m-\hat{N}+1+\tau}, \quad (5.68)$$

donde $a_0 \neq 0$,

$$\tilde{\alpha}_{-2} = -\hat{g}_0 + (\alpha_0 - (\hat{N} - 1)/2)(\alpha_0 - (\hat{N} + 1)/2), \\ \tilde{\alpha}_{\tau} = -\hat{g}_{\tau+2} - (\hat{N} - 2 - j)\alpha_{\tau+2} + \sum_{\sigma=0}^{\tau+2} \alpha_{\sigma}\alpha_{\tau+2-\sigma}, \\ \tau = -1, 0, 1, \dots, \hat{N} - 3, \quad (5.69)$$

anulándose los sumatorios cuando el índice superior es menor que el inferior. Asignamos los subíndices 3, 4 a las soluciones formales de clase (a) según el criterio

$$\alpha_{\hat{N},3} = -\sqrt{\hat{g}_{2\hat{N}}}, \quad \alpha_{\hat{N},4} = +\sqrt{\hat{g}_{2\hat{N}}}, \quad (5.70)$$

de modo que en el semieje real positivo $\arg z = 0$ w_3 decrece y w_4 crece exponencialmente cuando $z \rightarrow +\infty$.

Análogamente, en los desarrollos (5.62) de w_5, w_6 , los exponentes $\beta_{q,l} \equiv \beta_q, \rho_l \equiv \rho$ se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones (ver (2.268))

$$\sum_{\tau=0}^{\hat{M}-q} \beta_{\hat{M}-\tau} \beta_{\tau+q} - \hat{g}_{-\hat{M}-q} = 0, \quad q = \hat{M}, \hat{M} - 1, \dots, 1, 0, \quad (5.71)$$

donde

$$\beta_0 \equiv \beta_{0,l} = -\rho_l + \frac{\hat{M} + 1}{2}, \quad (5.72)$$

verificándose en consecuencia que

$$\beta_{q,5} = -\beta_{q,6}, \quad q = 0, 1, \dots, \hat{M}, \quad (5.73)$$

en particular, para $q = 0$, habida cuenta de (5.72), se tiene

$$\beta_{0,5} + \beta_{0,6} = 0, \quad (5.74)$$

de donde

$$\rho_5 + \rho_6 = \hat{M} + 1. \quad (5.75)$$

Los coeficientes $b_{m,j} \equiv b_m$ verifican la recurrencia de orden $2\hat{N} + \hat{M}$

$$2\beta_{\hat{M}} m b_m = \sum_{\tau=-\hat{M}}^{-2} \left[\tilde{\beta}_{\tau-1} - 2\beta_{-\tau-1}(m - \hat{M} - 1 - \tau) \right] b_{m-\hat{M}-1-\tau} + \\ + \left[\tilde{\beta}_{-2} + (m - \hat{M})(s - 2\beta_0) \right] b_{m-\hat{M}} + \sum_{\tau=0}^{2\hat{N}-1} -\hat{g}_{\tau+1} b_{m-\hat{M}-1-\tau}, \quad (5.76)$$

donde $b_0 \neq 0$,

$$\tilde{\beta}_{-2} = -\hat{g}_0 + (\beta_0 - (\hat{M} + 1)/2)(\beta_0 - (\hat{M} - 1)/2), \\ \tilde{\beta}_{\tau} = -\hat{g}_{\tau+2} - (\hat{M} + 2 + \tau)\beta_{-\tau-2} + \sum_{\sigma=0}^{-\tau-2} \beta_{\sigma}\beta_{-\tau-2-\sigma}, \\ \tau = -3, -4, \dots, -\hat{M}, -\hat{M} - 1, \quad (5.77)$$

anulándose los sumatorios cuando el índice superior es menor que el inferior. Asignamos los subíndices 5, 6 a las soluciones formales de clase (b) según el criterio

$$\beta_{\hat{M},5} = -\sqrt{\hat{g}_{-2\hat{M}}}, \quad \beta_{\hat{M},6} = +\sqrt{\hat{g}_{-2\hat{M}}}, \quad (5.78)$$

de modo que en el semieje real positivo ($\arg z = 0$) w_5 decrece y w_6 crece exponencialmente cuando $z \rightarrow 0$.

El comportamiento de las soluciones multiplicativas w_1, w_2 en la vecindad del punto singular $z = \infty$ se conoce cuando pueden calcularse los valores de los factores de conexión $T_{j,k}$ de sus desarrollos asintóticos completos cuando $z \rightarrow \infty$, i.e.

$$w_j(z) \approx T_{j,3}w_3(z) + T_{j,4}w_4(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad j = 1, 2. \quad (5.79)$$

Análogamente, el comportamiento de w_1, w_2 en la vecindad del punto singular $z = 0$ se conoce cuando pueden calcularse los factores de conexión $T_{j,l}$ de sus desarrollos asintóticos completos cuando $z \rightarrow 0$, i.e.

$$w_j(z) \approx T_{j,5}w_5(z) + T_{j,6}w_6(z), \quad z \rightarrow 0, \quad j = 1, 2. \quad (5.80)$$

El factor de conexión que multiplica a cada uno de los desarrollos asintóticos en (5.79) y (5.80) toma valores diferentes en diferentes sectores del z -plano complejo separados por rayos de Stokes de la expansión correspondiente. En cada rayo de Stokes, el valor del factor de conexión es igual a la semisuma de los valores que toma el factor en los dos sectores adyacentes separados por el rayo. En (2.290), (2.292) establecimos que $\arg z = 0$ es un rayo de Stokes de w_4 y w_6 , atravesando el cual se produce un cambio brusco de $T_{j,3}$ y $T_{j,5}$ respectivamente, de modo que los valores de estos factores en el rayo $\arg z = 0$ son iguales respectivamente a las semisumas de los valores

que toman $T_{j,3}, T_{j,5}$ en los sectores adyacentes separados por el semieje real positivo.

Nuestro método de cálculo de los factores de conexión se fundamenta, como es sabido, en la idea de que las fórmulas de conexión (5.79), (5.80) y sus primeras derivadas pueden emplearse para expresar tales factores como cocientes de Wronskianos de pares de soluciones de la ecuación diferencial (5.57). Estos Wronskianos son constantes, i.e. independientes de z , toda vez que (5.57) carece de término en la primera derivada. Así tenemos

$$T_{j,3} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_4]}{\mathcal{W}[w_3, w_4]}, \quad T_{j,4} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_3]}{\mathcal{W}[w_4, w_3]}, \quad j = 1, 2, \quad (5.81)$$

$$T_{j,5} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_6]}{\mathcal{W}[w_5, w_6]}, \quad T_{j,6} = \frac{\mathcal{W}[w_j, w_5]}{\mathcal{W}[w_6, w_5]}, \quad j = 1, 2. \quad (5.82)$$

Los Wronskianos en los denominadores de (5.81), (5.82) se calculan, como en los casos precedentes, por sustitución directa de las formas asintóticas (5.61), (5.62) y sus derivadas en las formas exactas $fg' - f'g$ de los respectivos Wronskianos:

$$\mathcal{W}[w_3, w_4] = -\mathcal{W}[w_4, w_3] = -2\alpha_{\hat{N},3} a_{0,3} a_{0,4}, \quad (5.83)$$

$$\mathcal{W}[w_5, w_6] = -\mathcal{W}[w_6, w_5] = -2\beta_{\hat{M},5} b_{0,3} b_{0,4}. \quad (5.84)$$

El cálculo directo de los Wronskianos en los numeradores de (5.81), (5.82) da lugar, como sucede en (5.14), (5.15), a expresiones que dependen de series infinitas en potencias de z de exponentes positivos y negativos, de las que no es posible obtener analíticamente los valores constantes de tales Wronskianos. El procedimiento elegido por nosotros para resolver el problema de conexión en el caso actual, cuando ambas singularidades de la ecuación diferencial son irregulares, parte de la misma idea desarrollada cuando una de las singularidades es regular (capítulo 4, sección 4.2): encontrar, para cada Wronskiano, dos funciones proporcionales entre sí, de modo que la constante de proporcionalidad sea el Wronskiano en el numerador de (5.81), (5.82) que se desea calcular. Como primer paso, introducimos las funciones auxiliares

$$u_{j,k}(z) = \exp\left(-\frac{\alpha_{\hat{N},k}}{2\hat{N}} z^{\hat{N}}\right) w_j(z), \quad j = 1, 2, \quad k = 3, 4, \quad (5.85)$$

$$u_k(z) = \exp\left(-\frac{\alpha_{\hat{N},k}}{2\hat{N}} z^{\hat{N}}\right) w_k(z), \quad k = 3, 4, \quad (5.86)$$

de las que se obtiene la relación entre Wronskianos

$$\mathcal{W}[u_{j,k}, u_k] = \exp\left(-\frac{\alpha_{\hat{N},k}}{\hat{N}} z^{\hat{N}}\right) \mathcal{W}[w_j, w_k]. \quad (5.87)$$

Sustituyendo los desarrollos (5.59), (5.61) en (5.85), (5.86) se obtiene un desarrollo asintótico del primer miembro de (5.87) cuando $z \rightarrow \infty$

$$\mathcal{W}[u_{j,k}, u_k] \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n^{(j,k)} z^{n+\nu_j+\mu_k}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.88)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(j,k)} = & \sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,k} [\alpha_{\hat{N},k} \hat{c}_{n+m+1-\hat{N},j,k} + 2 \sum_{p=1}^{\hat{N}-1} \alpha_{p,k} \hat{c}_{n+m+1-p,j,k} - \\ & -(n+2m+1+\nu_j-\mu_k) \hat{c}_{n+m+1,j,k}]. \end{aligned} \quad (5.89)$$

siendo $\hat{c}_{n,j,k}$ los coeficientes del desarrollo de Laurent convergente

$$v_{j,k}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_{n,j,k} z^{n+\nu_j}, \quad (5.90)$$

de la función

$$v_{j,k}(z) = \exp \left(\sum_{p=1}^{\hat{N}-1} \frac{\alpha_{p,k}}{p} z^p \right) w_j(z), \quad j = 1, 2, \quad k = 3, 4. \quad (5.91)$$

El valor constante de $\mathcal{W}[w_j, w_k]$ se obtiene encontrando un desarrollo formal de la exponencial en el segundo miembro de (5.87) conteniendo las mismas potencias de z que (5.88). En el caso actual, la serie exponencial de Heaviside (2.223) permite construir \hat{N} desarrollos formales

$$\mathcal{E}_L^{(j,k)}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-\alpha_{\hat{N},k} z^{\hat{N}/\hat{N}})^{n+\delta_L^{(j,k)}}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,k)})}, \quad L = 0, 1, \dots, \hat{N}-1, \quad (5.92)$$

de modo que, dados j y k , para todo conjunto de constantes complejas $\kappa_L^{(j,k)}$ la combinación lineal de los desarrollos (5.92) dada por tales constantes verifica la relación asintótica

$$\sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \kappa_L^{(j,k)} \mathcal{E}_L^{(j,k)}(z) \approx \exp \left(-\frac{\alpha_{\hat{N},k}}{\hat{N}} z^{\hat{N}} \right) \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \kappa_L^{(j,k)}, \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.93)$$

de la cual se deduce, habida cuenta de (5.87), que

$$\mathcal{W}[u_{j,k}, u_k] \approx \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \kappa_L^{(j,k)} \mathcal{E}_L^{(j,k)}(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.94)$$

si se verifica

$$\sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \kappa_L^{(j,k)} = \mathcal{W}[w_j, w_k]. \quad (5.95)$$

El desarrollo (5.94), con $\mathcal{E}_L^{(j,k)}(z)$ dados en (5.92), se compara con el primer desarrollo (5.88), dando como resultado el valor del Wronskiano

$$\mathcal{W}[w_j, w_k] = \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,k)})}{(-\alpha_{\hat{N},k}/\hat{N})^{n+\delta_L^{(j,k)}}} \gamma_{n\hat{N}+L}^{(j,k)}, \quad |\arg(-\alpha_{\hat{N},k}z^{\hat{N}})| < \pi, \quad (5.96)$$

donde

$$\delta_L^{(j,k)} = (\nu_j + \mu_k + L)/\hat{N}. \quad (5.97)$$

En los problemas físicos, $\arg z = 0$ y $\arg(-\alpha_{\hat{N},k}z^{\hat{N}}) = 0$, de modo que

$$\mathcal{W}[w_j, w_3] = \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,3)})}{(|\alpha_{\hat{N},3}|/\hat{N})^{n+\delta_L^{(j,3)}}} \gamma_{n\hat{N}+L}^{(j,3)}, \quad j = 1, 2, \quad (5.98)$$

y $T_{j,4}$ se obtiene sustituyendo (5.98), (5.83) en (5.81). Para calcular $T_{j,3}$ ha de tenerse en cuenta que $\arg z = 0$ es un rayo de Stokes para este factor, luego $|\arg(-\alpha_{\hat{N},4}z^{\hat{N}})| = \pi$, y el desarrollo (5.92) no corresponde necesariamente a $\exp(-\alpha_{\hat{N},k}z^{\hat{N}}/\hat{N})$. En consecuencia, definimos sobre este rayo de Stokes

$$T_{j,3} = \frac{1}{2}(T_{j,3}^+ + T_{j,3}^-), \quad (5.99)$$

donde $T_{j,3}^+$ y $T_{j,3}^-$ son los valores de este factor en los sectores adyacentes separados por el rayo. Es decir, habida cuenta de (5.81), se ha de tomar sobre el rayo $\arg z = 0$

$$\mathcal{W}[w_j, w_4] = \frac{1}{2}(\mathcal{W}[w_j, w_4]^+ + \mathcal{W}[w_j, w_4]^-), \quad (5.100)$$

donde $\mathcal{W}[w_j, w_4]^+$, $\mathcal{W}[w_j, w_4]^-$ son los valores del Wronskiano para $\arg z$ un poco mayor y un poco menor que cero respectivamente. Procediendo como en el caso de la ecuación biconfluyente de Heun, expresiones (5.31) a (5.35), obtenemos, para cada $j = 1, 2$,

$$\mathcal{W}[w_j, w_4] = (-1)^n \sum_{L=0}^{\hat{N}-1} \cos(\delta_L^{(j,4)}\pi) \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,4)})}{(\alpha_{\hat{N},4}/\hat{N})^{n+\delta_L^{(j,4)}}} \gamma_{n\hat{N}+L}^{(j,4)}, \quad (5.101)$$

que llevada junto con (5.83) a (5.81) nos da el valor de $T_{j,3}$ sobre el rayo $\arg z = 0$.

Un procedimiento análogo permite obtener los Wronskianos de w_j , w_l en los numeradores de (5.82). Ahora introducimos las funciones auxiliares

$$u_{j,l}(z) = \exp\left(-\frac{\beta_{\hat{M},l}}{2\hat{M}}z^{-\hat{M}}\right) w_j(z), \quad j = 1, 2, \quad l = 5, 6, \quad (5.102)$$

$$u_l(z) = \exp\left(-\frac{\beta_{\hat{M},l}}{2\hat{M}}z^{-\hat{M}}\right)w_l(z), \quad l = 5, 6, \quad (5.103)$$

dando lugar a la relación entre Wronskianos

$$\mathcal{W}[u_{j,l}, u_l] = \exp\left(-\frac{\beta_{\hat{M},l}}{\hat{M}}z^{-\hat{M}}\right)\mathcal{W}[w_j, w_l], \quad (5.104)$$

La sustitución de (5.59), (5.62) en (5.102), (5.103) respectivamente conduce al desarrollo asintótico cuando $z \rightarrow 0$ del primer miembro en (5.104),

$$\mathcal{W}[u_{j,l}, u_l] \approx \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \gamma_n^{(j,l)} z^{n+\nu_j+\rho_l}, \quad (5.105)$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma_n^{(j,l)} = & \sum_{m=0}^{+\infty} b_{m,l} [-\beta_{\hat{M},l} \hat{c}_{n-m+1+\hat{M},j,l} - 2 \sum_{q=1}^{\hat{M}-1} \beta_{q,l} \hat{c}_{n-m+1+q,j,l} + \\ & + (-n + 2m - 1 - \nu_j + \rho_l) \hat{c}_{n-m+1,j,l}], \end{aligned} \quad (5.106)$$

siendo $\hat{c}_{n,l,j}$ los coeficientes en la expansión de Laurent convergente

$$v_{j,l}(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{c}_{n,j,l} z^{n+\nu_j}, \quad (5.107)$$

de la función

$$v_{j,l}(z) = \exp\left(\sum_{q=1}^{\hat{M}-1} \frac{\beta_{q,l}}{q} z^{-q}\right) w_j(z), \quad j = 1, 2, \quad l = 5, 6. \quad (5.108)$$

La serie exponencial de Heaviside permite construir ahora \hat{M} desarrollos formales de la exponencial en el segundo miembro de (5.104),

$$\mathcal{E}_L^{(j,l)} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-\beta_{\hat{M},l} z^{-\hat{M}} / \hat{M})^{n+\delta_L^{(j,l)}}}{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,L)})}, \quad L = 0, 1, \dots, \hat{M}-1, \quad (5.109)$$

de modo que para todo conjunto de \hat{M} constantes complejas $\kappa_L^{(j,l)}$ tales que

$$\sum_{L=0}^{\hat{M}-1} \kappa_L^{(j,l)} = \mathcal{W}[w_j, w_l], \quad (5.110)$$

se verifica

$$\mathcal{W}[u_{j,l}, u_j] \approx \sum_{L=0}^{\hat{M}-1} \kappa_L^{(j,l)} \mathcal{E}_L^{(j,l)}(z), \quad z \rightarrow 0. \quad (5.111)$$

Poniendo (5.109) en el segundo miembro de (5.111) y comparando el desarrollo resultante con (5.105) se obtienen los Wronskianos en los numeradores de (5.82):

$$\mathcal{W}[w_j, w_l] = \sum_{L=0}^{\hat{M}-1} \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,l)})}{(-\beta_{\hat{M},l}/\hat{M})^{n+\delta_L^{(j,l)}}} \gamma_{-n\hat{M}-L}^{(j,l)}, \quad |\arg(-\beta_{\hat{M},l}z^{-\hat{M}})| < \pi, \quad (5.112)$$

donde

$$\delta_L^{(j,l)} = (-\nu_j - \rho_l + L)/\hat{M}. \quad (5.113)$$

Cuando $\arg z = 0$ se tiene, análogamente a (5.98),

$$\mathcal{W}[w_j, w_5] = \sum_{L=0}^{\hat{M}-1} \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,5)})}{(|\beta_{\hat{M},5}|/\hat{M})^{n+\delta_L^{(j,5)}}} \gamma_{-n\hat{M}-L}^{(j,5)}, \quad j = 1, 2, \quad (5.114)$$

y análogamente a (5.101),

$$\mathcal{W}[w_j, w_6] = \sum_{L=0}^{\hat{M}-1} \cos(\delta_L^{(j,6)}\pi) \frac{\Gamma(n+1+\delta_L^{(j,6)})}{(\beta_{\hat{M},6}/\hat{M})^{n+\delta_L^{(j,6)}}} \gamma_{-n\hat{M}-L}^{(j,6)}, \quad j = 1, 2. \quad (5.115)$$

Los factores de conexión $T_{j,5}$, $T_{j,6}$ sobre el semieje real positivo se obtienen ahora sustituyendo (5.114), (5.115) en los numeradores y (5.84) en los denominadores de (5.82).

El espectro de energías de Schrödinger correspondiente al potencial suma de potencias (5.54) deriva del comportamiento regular, en el origen y el infinito, de las soluciones de (5.57) que representan estados físicamente aceptables.

El comportamiento de las soluciones multiplicativas cuando $z \rightarrow \infty$ viene dado por las fórmulas de conexión de clase (a),

$$\begin{aligned} w_1(z) &\approx T_{1,3}w_3(z) + T_{1,4}w_4(z), & z \rightarrow \infty, \\ w_2(z) &\approx T_{2,3}w_3(z) + T_{2,4}w_4(z), & z \rightarrow \infty, \end{aligned} \quad (5.116)$$

donde w_4 diverge cuando $z \rightarrow \infty$, y su comportamiento cuando $z \rightarrow 0$ viene dado por las fórmulas de conexión de clase (b),

$$\begin{aligned} w_1(z) &\approx T_{1,5}w_5(z) + T_{1,6}w_6(z), & z \rightarrow 0, \\ w_2(z) &\approx T_{2,5}w_5(z) + T_{2,6}w_6(z), & z \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.117)$$

donde w_6 diverge cuando $z \rightarrow 0$. Por consiguiente, cualquier solución de (5.57) que representa estados físicamente aceptables no dependerá de w_4 ni de w_6 . En particular, $w_5(z)$ es regular en el origen y puede elegirse de modo

que también sea regular en el infinito. De (5.117) se obtiene (cfr. (2.294)) w_5 en combinación lineal de w_3, w_4 :

$$w_5(z) \approx \left(\frac{T_{1,3}T_{2,6} - T_{1,6}T_{2,3}}{D_5} \right) w_3(z) + \left(\frac{T_{1,4}T_{2,6} - T_{1,6}T_{2,4}}{D_5} \right) w_4(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.118)$$

siendo (cfr. (2.295))

$$D_5 = T_{1,5}T_{2,6} - T_{2,5}T_{1,6} \neq 0, \quad (5.119)$$

no nulo a causa de la independencia lineal de w_1, w_2 . Para que w_5 represente estados físicos debe anularse el coeficiente de w_4 , de donde resulta la condición de cuantización (cfr. (2.296))

$$T_{1,4}T_{2,6} - T_{1,6}T_{2,4} = 0. \quad (5.120)$$

Dados los parámetros del potencial (5.54) y el momento angular \mathcal{L} , el lado izquierdo de (5.120) es una función de la energía a través de uno de los parámetros \hat{g}_s de (5.58). Los ceros de esta función son la energías propias del oscilador "spiked". Las funciones de onda correspondientes a las energías propias son combinaciones de w_1, w_2 ,

$$w_{\text{fis}}(z) = \hat{\zeta}_1 w_1(z) + \hat{\zeta}_2 w_2(z), \quad (5.121)$$

donde los desarrollos (5.59) de w_1, w_2 se reemplazan en las vecindades del origen y el infinito por los desarrollos asintóticos

$$w_{\text{fis}}(z) \approx (\hat{\zeta}_1 T_{1,5} + \hat{\zeta}_2 T_{2,5}) w_5(z), \quad z \rightarrow 0, \quad (5.122)$$

$$w_{\text{fis}}(z) \approx (\hat{\zeta}_1 T_{1,3} + \hat{\zeta}_2 T_{2,3}) w_3(z), \quad z \rightarrow \infty, \quad (5.123)$$

A partir de estas expresiones pueden normalizarse las funciones de onda.

La validez de nuestro método en el tratamiento de los osciladores "spiked" se ha verificado en algunos casos particulares estudiados por otros autores mediante aproximaciones diferentes, suponiendo que r es una variable adimensional que representa una distancia medida en cierta escala y que E, A_p son la energía y parámetros del potencial en unidades adecuadas.

Como primer ejemplo hemos considerado el potencial

$$V(r) = A_2 r^2 + A_{-4} r^{-4}, \quad A_2 = 1, \quad (5.124)$$

escribiendo la ecuación de Schrödinger (5.53) en términos de las variables independiente y dependiente

$$z = r, \quad w(z) = R(r), \quad (5.125)$$

para que adopte la forma (5.57) con

$$\hat{g}(z) = A_{-4}z^{-2} + l(l+1) - Ez^2 + z^4, \quad (5.126)$$

de modo que son $\hat{M} = 1$, $\hat{N} = 2$ los rangos de las singularidades en el origen e infinito respectivamente.

Los coeficientes $c_n \equiv c_{n,j}$ de las soluciones de Floquet (5.59) verifican la recurrencia

$$A_{-4}c_{n+6} + [\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - (n+4+\nu)(n+3+\nu)]c_{n+4} - Ec_{n+2} + c_n = 0. \quad (5.127)$$

Las soluciones de Thomé (5.61) tienen exponentes

$$\alpha_{2,3} = -\alpha_{2,4} = -1, \quad \alpha_{1,3} = -\alpha_{1,4} = 0, \quad \mu_3 = \frac{-1+E}{2}, \quad \mu_4 = \frac{-1-E}{2}, \quad (5.128)$$

y coeficientes $a_m \equiv a_{m,k}$, $k = 3, 4$, que verifican la recurrencia

$$2\alpha_2 m a_m = [(m-2-\mu)(m-1-\mu) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1)]a_{m-2} - A_{-4}a_{m-4}. \quad (5.129)$$

Las soluciones de Thomé (5.62) tienen exponentes

$$\beta_{1,5} = -\beta_{1,6} = -A_4^{1/2}, \quad \rho_5 = \rho_6 = 1, \quad (5.130)$$

y coeficientes $b_{m,l}$ que verifican la recurrencia

$$2\beta_1 m b_m = [m(m-1) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1)]b_{m-1} + E b_{m-3} - b_{m-5}. \quad (5.131)$$

Las soluciones de Floquet y Thomé quedan determinadas unívocamente eligiendo

$$c_{0,1} = c_{0,2} = 1, \quad a_{0,3} = a_{0,4} = 1, \quad b_{0,5} = b_{0,6} = 1. \quad (5.132)$$

Los Wronskianos en los denominadores de (5.81), (5.82), dados en (5.83), (5.84) respectivamente, son ahora

$$\mathcal{W}[w_3, w_4] = -\mathcal{W}[w_4, w_3] = 2, \quad (5.133)$$

$$\mathcal{W}[w_5, w_6] = -\mathcal{W}[w_6, w_5] = -2A_{-4}^{1/2}. \quad (5.134)$$

Los Wronskianos en los numeradores de (5.81), dados en (5.98), (5.101), son

$$\mathcal{W}[w_j, w_3] = 2^{n+\delta_1^{(j,3)}} \Gamma(n+1+\delta_1^{(j,3)}) \gamma_{2n+1}^{(j,3)}, \quad (5.135)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_4] = (-1)^n \cos(\pi \delta_1^{(j,4)}) 2^{n+\delta_1^{(j,4)}} \Gamma(n+1+\delta_1^{(j,4)}) \gamma_{2n+1}^{(j,4)}, \quad (5.136)$$

y los Wronskianos en los denominadores de (5.82), dados en (5.114), (5.115), son

$$\mathcal{W}[w_j, w_5] = A_{-4}^{(-n+\nu_j+1)/2} \Gamma(n-\nu_j) \gamma_{-n}^{(j,5)}, \quad (5.137)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_6] = (-1)^{n-1} \cos(\pi\nu_j) A_{-4}^{(-n+\nu_j+1)/2} \Gamma(n-\nu_j) \gamma_{-n}^{(j,6)}, \quad (5.138)$$

donde para cada $j = 1, 2$, $k = 3, 4$,

$$\delta_1^{(j,k)} = (\nu_j + \mu_k + 1)/2, \quad k = 3, 4, \quad (5.139)$$

$$\gamma_m^{(j,k)} = \sum_{m=0}^{+\infty} a_{s,k} [\alpha_{2,k} c_{m+s-1,j} - (m+2s+1+\nu_j-\mu_k) c_{m+s+1,j}], \quad (5.140)$$

y para cada $j = 1, 2$, $l = 5, 6$,

$$\gamma_m^{(j,l)} = \sum_{m=0}^{+\infty} b_{s,l} [-\beta_{1,l} c_{m-s+2,j} + (2s-m-\nu_j) c_{m-s+1,j}]. \quad (5.141)$$

Utilizando un programa FORTRAN con doble precisión hemos obtenido, para diferentes valores de A_{-4} desde 0,0001 hasta 100, las energías del estado fundamental del potencial (5.124) y los índices ν_j de las soluciones de Floquet correspondientes. La exactitud de nuestros resultados es comparable a la obtenida por Buendía et al. [14] o Roy [52]. (Debido a la diferente definición del operador de Schrödinger, nuestras energías deben dividirse entre 2 antes de compararlas con las de la tabla 4 de [52].) Cuando aumenta el valor de A_{-4} , se requiere aritmética más precisa para alcanzar la exactitud en los resultados que se obtiene con los valores más pequeños de este parámetro. A fin de evitar la ambigüedad en los valores de los índices, suponemos que éstos varían continuamente con A_{-4} y fijamos su parte entera de modo que $\nu_1 = 0$ y, en consecuencia, $\nu_2 = 1$ para $A_{-4} = 0$, como sucedería para una partícula de momento angular cero. Cuando A_{-4} crece, ν_1 también crece hasta que alcanza el valor 0,5 para $A_{-4} = 0,1305\dots$ y una energía propia $E = 3,6454\dots$. Para estos valores críticos de los parámetros, $\nu_1 = \nu_2$ y solo existe una solución de Floquet de la forma (5.59). Cualquier otra solución independiente de ella contiene términos logarítmicos. En este caso, nuestro procedimiento no es aplicable en la forma descrita, siendo necesario desarrollar la idea básica de otra manera. Si A_{-4} continúa creciendo por encima del valor crítico, la parte real de ν_1 permanece en el valor 0,5 y su parte imaginaria aumenta. Las dos soluciones de Floquet correspondientes son entonces complejas conjugadas una de otra, lo que permite simplificar los cálculos en nuestro procedimiento. Asimismo, a fin de ilustrar la tendencia de los coeficientes de las soluciones de Floquet y Thomé, hemos calculado los más relevantes para dos casos particulares: $A_{-4} = 0,4$ estudiado por Znojil [69] y $A_{-4} = 1$, $l = 2$, considerado por Aguilera-Navarro y Ley Koo [4].

Un segundo ejemplo de oscilador "spiked" resuelto mediante nuestro procedimiento está representado por el potencial

$$V(r) = A_2 r^2 + A_{-4} r^{-4} + A_{-6} r^{-6}, \quad A_2 = 1. \quad (5.142)$$

que es cuasiexactamente soluble para ciertos conjuntos de valores de los parámetros.

Los cambios de variables

$$z = r^2, \quad w(z) = r^{1/2}R(r), \quad (5.143)$$

transforman la ecuación de Schrödinger (5.53) en la ecuación (5.57), donde

$$\hat{g}(z) = \frac{1}{4}(A_{-6}z^{-2} + A_{-4}z^{-1} + \mathcal{L}(\mathcal{L} + 1) - 3/4 - Ez + z^2), \quad (5.144)$$

con singularidades en el origen y el infinito de rangos $\hat{M} = 1$ y $\hat{N} = 1$ respectivamente. Por tanto, la ecuación (5.57) es ahora una ecuación de Heun biconfluyente (5.2). En la sección 5.1 hemos aplicado nuestro método de cálculo de los factores de conexión y espectro de energías a las ecuaciones de esta clase. La recurrencia verificada por los coeficientes $c_n \equiv c_{n,j}$, $j = 1, 2$, de las soluciones de Floquet es (cfr. (5.6))

$$A_{-6}c_{n+4} + A_{-4}c_{n+3} + [\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - 3/4 - 4(n+2+\nu)(n+1+\nu)]c_{n+2} - Ec_{n+1} + c_n = 0. \quad (5.145)$$

Los exponentes de las soluciones de Thomé de clase (a), válidas cuando $z \rightarrow \infty$, son (cfr. (5.4), (5.7))

$$\alpha_{1,3} = -\alpha_{1,4} = -1/2, \quad \mu_3 = E/4, \quad \mu_4 = -E/4, \quad (5.146)$$

y la recurrencia verificada por los coeficientes $a_{m,k} \equiv a_m$, $k = 3, 4$, es (cfr. (5.8))

$$8\alpha_1 m a_m = [4(m-\mu)(m-1-\mu) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) + 3/4]a_{m-1} - A_{-4}a_{m-2} - A_{-6}a_{m-3}. \quad (5.147)$$

Los exponentes de las soluciones de Thomé de clase (b), válidas cuando $z \rightarrow 0$, son (cfr. (5.5), (5.7))

$$\beta_{1,5} = -\beta_{1,6} = -\frac{A_{-6}^{1/2}}{2}, \quad \rho_5 = 1 + \frac{A_{-4}}{4A_{-6}^{1/2}}, \quad \rho_6 = 1 - \frac{A_{-4}}{4A_{-6}^{1/2}}, \quad (5.148)$$

y los coeficientes $b_m \equiv b_{m,l}$, $l = 5, 6$, verifican la recurrencia (cfr. (5.9))

$$8\beta_1 m b_m = [4(m-1+\rho)(m-2+\rho) - \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) + 3/4]b_{m-1} + Eb_{m-2} - b_{m-3}. \quad (5.149)$$

Eligiendo

$$c_{0,1} = c_{0,2} = 1, \quad a_{0,3} = a_{0,4} = 1, \quad b_{0,5} = b_{0,6} = 1, \quad (5.150)$$

evitamos la ambigüedad en la determinación de las soluciones de Floquet y Thomé, así como de sus Wronskianos. Para cada $j = 1, 2$, en los denominadores de (5.81), (5.82), tenemos

$$\mathcal{W}[w_3, w_4] = -\mathcal{W}[w_4, w_3] = 1, \quad (5.151)$$

$$\mathcal{W}[w_5, w_6] = -\mathcal{W}[w_6, w_5] = -A_{-6}^{1/2}. \quad (5.152)$$

y en los numeradores de ambas expresiones se tiene

$$\mathcal{W}[w_j, w_3] = 2^{n+\delta^{(j,3)}} \Gamma(n+1+\delta^{(j,3)}) \gamma_n^{(j,3)}, \quad (5.153)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_4] = (-1)^n \cos(\pi\delta^{(j,4)}) 2^{n+\delta^{(j,4)}} \Gamma(n+1+\delta^{(j,4)}) \gamma_n^{(j,4)}, \quad (5.154)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_5] = (A_{-6}^{1/2}/2)^{-n-\delta^{(j,5)}} \Gamma(n+1+\delta^{(j,5)}) \gamma_{-n}^{(j,5)}, \quad (5.155)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_6] = (-1)^n \cos(\pi\delta^{(j,6)}) (A_{-6}^{1/2}/2)^{-n-\delta^{(j,6)}} \Gamma(n+1+\delta^{(j,6)}) \gamma_{-n}^{(j,6)}, \quad (5.156)$$

siendo

$$\delta^{(j,k)} = \nu_j + \mu_k, \quad k = 3, 4, \quad \delta^{(j,l)} = -\nu_j - \rho_l, \quad l = 5, 6, \quad (5.157)$$

$$\gamma_m^{(j,k)} = \sum_{s=0}^{+\infty} a_{s,k} [\alpha_{1,k} c_{m+s,j} - (2s+m+1+\nu_j-\mu_k) c_{m+s+1,j}], \quad k = 3, 4, \quad (5.158)$$

$$\gamma_m^{(j,l)} = \sum_{s=0}^{+\infty} b_{s,l} [\beta_{1,l} c_{m-s+2,j} + (2s-m-1-\nu_j+\rho_l) c_{m-s+1,j}], \quad l = 5, 6, \quad (5.159)$$

de donde resultan los factores de conexión sustituyendo estas expresiones en (5.81), (5.82) y el espectro de energías sustituyendo los factores de conexión en (5.120). Utilizando este algoritmo hemos obtenido los índices ν_1, ν_2 de las soluciones de Floquet y las energías del estado fundamental correspondientes al potencial (5.142) para diferentes valores de A_{-6} desde 10^{-3} hasta 10 y de $A_{-4} = 0, 1, 10$. Nuestros resultados muestran una concordancia notable con los de Buendía et al. [14], Roy [52] y Saad et al. [53].

El tercer ejemplo elegido por nosotros es el oscilador "spiked" cuyo potencial

$$V(r) = r^2 + \lambda r^{-5/2}, \quad (5.160)$$

presenta una singularidad crítica. La ecuación de Schrödinger provista de este potencial adquiere la forma (5.57) con

$$\hat{g}(z) = 16(\lambda z^{-2} + \mathcal{L}(\mathcal{L}+1) + 15/64 - Ez^8 + z^16), \quad (5.161)$$

a la que se llega mediante los cambios de variables

$$z = r^{1/4}, \quad w(z) = r^{-3/8} R(r). \quad (5.162)$$

La ecuación verificada por w presenta ahora singularidades en el origen y el infinito cuyos respectivos rangos son

$$\hat{M} = 1, \quad \hat{N} = 8. \quad (5.163)$$

En este caso, los coeficientes $c_n \equiv c_{n,j}$, ($j = 1, 2$), en las soluciones de Floquet (5.59) verifican la recurrencia

$$\lambda c_{n+18} + [\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) + 15/64 - (n+16+\nu)(n+15+\nu)/16]c_{n+16} - E c_{n+8} + c_n = 0. \quad (5.164)$$

Los exponentes en las soluciones de Thomé de clase (a) (5.61), válidas cuando $z \rightarrow \infty$, son

$$\begin{aligned} \alpha_{8,3} = -\alpha_{8,4} = -4, \quad \alpha_{7,j} = \alpha_{6,j} = \dots = \alpha_{1,j} = 0, \\ \mu_3 = -7/2 + 2E, \quad \mu_4 = -7/2 - 2E, \end{aligned} \quad (5.165)$$

y sus coeficientes $a_{m,k} \equiv a_m$, ($k = 3, 4$), verifican la recurrencia

$$2\alpha_8 m a_m = [(m-8-\mu)(m-7-\mu) - 16\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - 15/4]a_{m-8} - 16\lambda a_{m-10}. \quad (5.166)$$

Los exponentes en las soluciones de Thomé de clase (b) (5.62), válidas cuando $z \rightarrow 0$, son

$$\beta_{1,5} = -\beta_{1,6} = -4\lambda^{1/2}, \quad \rho_5 = \rho_6 = 1, \quad (5.167)$$

y sus coeficientes $b_{m,l} \equiv b_m$, ($l = 5, 6$), verifican la recurrencia

$$2\beta_1 m b_m = [m(m-1) - 16\mathcal{L}(\mathcal{L}+1) - 15/4]b_{m-1} + 16E b_{m-9} - 16b_{m-17}. \quad (5.168)$$

Eligiendo como en los ejemplos precedentes

$$c_{0,1} = c_{0,2} = 1, \quad a_{0,3} = a_{0,4} = 1, \quad b_{0,5} = b_{0,6} = 1, \quad (5.169)$$

obtenemos para los denominadores en (5.81), (5.82) las expresiones

$$\mathcal{W}[w_3, w_4] = -\mathcal{W}[w_4, w_3] = 8, \quad (5.170)$$

$$\mathcal{W}[w_5, w_6] = -\mathcal{W}[w_6, w_5] = -8\lambda^{1/2}, \quad (5.171)$$

y para los numeradores respectivos, ($j = 1, 2$),

$$\mathcal{W}[w_j, w_3] = \sum_{L=0}^7 2^{n+\delta_L^{(j,3)}} \Gamma(n+1+\delta_L^{(j,3)}) \gamma_{8n+L}^{(j,3)}, \quad (5.172)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_4] = \sum_{L=0}^7 \cos(\pi \delta_L^{(j,4)}) 2^{n+\delta_L^{(j,4)}} \Gamma(n+1+\delta_L^{(j,4)}) \gamma_{8n+L}^{(j,4)}, \quad (5.173)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_5] = (4\lambda^{1/2})^{-n+\nu_j+1} \Gamma(n-\nu_j) \gamma_{-n}^{(j,5)}, \quad (5.174)$$

$$\mathcal{W}[w_j, w_6] = (-1)^{n-1} \cos(\pi \nu_j) (4\lambda^{1/2})^{-n+\nu_j+1} \Gamma(n-\nu_j) \gamma_{-n}^{(j,6)}, \quad (5.175)$$

donde

$$\delta_m^{(j,k)} = (\nu_j + \mu_k + L)/8, \quad (5.176)$$

$$\gamma_m^{(j,k)} = \sum_{s=0}^{+\infty} a_{s,k} [\alpha_{s,k} c_{m+s-7,j} - (2s + m + 1 + \nu_j - \mu_k) c_{m+s+1,j}], \quad (5.177)$$

$$\gamma_m^{(j,l)} = \sum_{s=0}^{+\infty} b_{s,l} [-\beta_{1,l} c_{m-s+2,j} + (2s - m - \nu_j) c_{m-s+1,j}]. \quad (5.178)$$

Utilizando nuestro procedimiento hemos obtenido los índices $\nu_1, \nu_2 = 1 - \nu_1$ de las soluciones de Floquet y las energías del estado fundamental en el potencial (5.160) para diferentes valores de λ , desde 10^{-3} hasta 20, que han sido considerados por varios autores. Nuestros resultados son más exactos que los obtenidos en [3] mediante la integración numérica de la ecuación de Schrödinger, aunque, en doble precisión FORTRAN, no alcanzan la exactitud de los resultados de Buendía et al [14] obtenidos por el método de continuación analítica. No obstante, nuestro método genera valores numéricos cuya exactitud se ve limitada solamente por la precisión de la aritmética utilizada. Asimismo, la representación de las funciones de onda mediante series de Laurent y desarrollos asintóticos es muy adecuada para su normalización y para el cálculo de valores esperados.

Apéndice A

Convergencia de las series Ω y Q

Abordamos en este apéndice el problema de la convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$ que definen a los coeficientes $\gamma_{a,\hat{n}}^{(k)}$ en el desarrollo formal (2.217). De las expresiones (2.220) y (2.221) se desprende que la convergencia de tales series depende del comportamiento cuando $s \rightarrow +\infty$ de los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las formas asintóticas (2.166) de las soluciones formales $u_{a,k}(z)$, así como del comportamiento cuando $n \rightarrow +\infty$ de los coeficientes $b_n^{(k)}$ en el desarrollo (2.213) de $w_{\text{reg},k}(z)$. Los coeficientes $a_s^{(k)}$, $b_n^{(k)}$ verifican las recurrencias (2.174) y (2.216) respectivamente, en las cuales se fundamenta nuestro estudio.

A.1. Un teorema de Perron sobre recurrencias lineales

Definición 20. Sea

$$y_{\tau+m} + p_1(\tau)y_{\tau+m-1} + p_2(\tau)y_{\tau+m-2} + \dots + p_m(\tau)y_{\tau} = 0, \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{A.1})$$

una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden entero positivo $m = 1, 2, 3, \dots$. Diremos que (A.1) es una *recurrencia de Perron-Kreuser (PK)* si los coeficientes $p_j(\tau)$ verifican la propiedad

$$p_j(\tau) = A_j \tau^{K_j} + o(\tau^{K_j}) = A_j \tau^{K_j} (1 + o(1)), \quad (\tau \rightarrow +\infty), \quad (j = 1, 2, \dots, m), \quad (\text{A.2})$$

es decir, denominando $p_0(\tau) = 1$ al coeficiente de $y_{\tau+m}$, se verifica

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \left| \frac{p_j(\tau) - A_j \tau^{K_j}}{\tau^{K_j}} \right| = 0, \quad (j = 0, 1, 2, \dots, m), \quad (\text{A.3})$$

donde (A_j, K_j) ($j = 0, 1, \dots, m$) son los *parámetros asintóticos* de la recurrencia, que verifican

$$\begin{aligned} A_j &\in \mathbf{C}, \quad K_j \in \mathbf{R}, \quad (j = 1, 2, \dots, m), \\ A_0 &= 1, \quad K_0 = 0, \\ K_j &= -\infty \quad \text{si } A_j = 0, \quad (j = 1, 2, \dots, m). \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Definición 21. Dada una recurrencia de Perron-Kreuser de orden $m \geq 1$, sea

$$E_m \equiv \{0, 1, \dots, m\}, \quad (\text{A.5})$$

el conjunto de los $(m + 1)$ primeros números enteros mayores o iguales que cero, y

$$\overline{\mathbf{R}} \equiv \mathbf{R} \cup \{-\infty, +\infty\}, \quad (\text{A.6})$$

el conjunto de los números reales ampliado con $\pm\infty$. Denominamos *conjunto de Puiseux* \mathcal{P}_m de la recurrencia (PK) al subconjunto de $E_m \times \overline{\mathbf{R}}$

$$\mathcal{P}_m \equiv \{P_j(j, K_j); j = 0, 1, \dots, m\}, \quad (\text{A.7})$$

formado por los $(m + 1)$ puntos P_j de coordenadas $(x, y) = (j, K_j)$ en un sistema de coordenadas rectangular del plano ampliado $\mathbf{R}^2 \cup \{\infty\}$. Los puntos

$$P_0(0, 0), \quad P_m(m, K_m), \quad (\text{A.8})$$

pertenecen a \mathcal{P}_m y nos referimos a ellos respectivamente como *puntos inicial y final* del conjunto de Puiseux.

Definición 22. Dada una recurrencia de Perron-Kreuser de orden $m \geq 1$, sea

$$\mathcal{V}_g = \{P_{e_0}, P_{e_1}, \dots, P_{e_g}; e_0 < e_1 < \dots < e_g\} \subset \mathbf{R}^2, \quad (1 \leq g \leq m), \quad (\text{A.9})$$

un subconjunto del conjunto de Puiseux \mathcal{P}_m de la recurrencia, ordenado por las abscisas de sus elementos, que contiene $g + 1$ puntos o *vértices*, ninguno en el infinito. Sea

$$\mathbf{L}_g \equiv \bigcup_{\eta=0}^{g-1} \mathcal{L}_\eta, \quad \mathcal{L}_\eta \equiv \overline{P_{e_\eta} P_{e_{\eta+1}}}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1), \quad (\text{A.10})$$

una línea poligonal de la recurrencia (PK), es decir, una línea poligonal contenida en \mathbf{R}^2 , formada por g *segmentos* \mathcal{L}_η que conectan a los $g + 1$ vértices de \mathcal{V}_g , y sean

$$q_\eta \equiv \frac{K_{e_{\eta+1}} - K_{e_\eta}}{e_{\eta+1} - e_\eta}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1), \quad (\text{A.11})$$

las *pendientes* respectivas de los g segmentos $\mathcal{L}_\eta = \overline{P_{e_\eta} P_{e_{\eta+1}}}$ de la poligonal \mathbf{L}_g . En estas condiciones, denominamos *línea poligonal de Newton-Puiseux* o bien *diagrama de Newton-Puiseux (NP)* de la recurrencia (PK) a toda línea poligonal \mathbf{L} de la recurrencia que verifica las propiedades específicas siguientes:

i) La línea poligonal \mathbf{L} conecta al punto inicial con el punto final del conjunto de Puiseux de la recurrencia, es decir,

$$\begin{aligned} P_{e_0} &= P_0(0, 0), & P_{e_g} &= P_m(m, K_m), \\ e_0 &= 0 < e_1 < e_2 < \dots < e_{g-1} < e_g = m. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

ii) La línea poligonal \mathbf{L} es convexa respecto al sentido ascendente del eje de ordenadas Y , es decir,

$$q_0 > q_1 > q_2 > \dots > q_{g-1}. \quad (\text{A.13})$$

iii) Para todo punto P_j del conjunto de Puiseux \mathcal{P}_m , o bien P_j pertenece a algún segmento $\mathcal{L}_{\eta(j)}$ de la poligonal \mathbf{L} , o bien P_j pertenece a la región cóncava del plano, nunca a la región convexa, definida por \mathbf{L} , es decir,

$$K_j - jq_\eta \leq k_{e_\eta} - e_\eta q_\eta, \quad (j = 0, 1, \dots, m), \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1), \quad (\text{A.14})$$

siendo válida la igualdad para $j = e_\eta$ y $j = e_{\eta+1}$, y la desigualdad para $j < e_\eta$ y $j > e_{\eta+1}$.

Definición 23. Dada una recurrencia de Perron-Kreuser de orden $m \geq 1$, sea \mathcal{P}_m su conjunto de Puiseux y \mathcal{V}_g ($1 \leq g \leq m$) el conjunto de $g+1$ vértices de una línea poligonal \mathbf{L}_g de Newton-Puiseux de la recurrencia, formada por g segmentos $\mathcal{L}_\eta \equiv \overline{P_{e_\eta} P_{e_{\eta+1}}}$, ($\eta = 0, 1, \dots, g - 1$). Denominamos *conjunto de Newton* \mathcal{D}_m^η del segmento \mathcal{L}_η al conjunto de los puntos de \mathcal{P}_m que pertenecen al segmento \mathcal{L}_η , es decir,

$$\mathcal{D}_m^\eta \equiv \mathcal{P}_m \cap \mathcal{L}_\eta, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1), \quad (\text{A.15})$$

de manera que para todo punto $P_{j(\eta)}(j(\eta), K_{j(\eta)}) \in \mathcal{D}_m^\eta$ se verifica

$$e_\eta \leq j(\eta) \leq e_{\eta+1}, \quad \frac{K_{j(\eta)} - K_{e_\eta}}{j(\eta) - e_\eta} = \frac{K_{e_{\eta+1}} - K_{e_\eta}}{e_{\eta+1} - e_\eta}. \quad (\text{A.16})$$

Definición 24. En las condiciones establecidas por las definiciones precedentes, para cada $\eta = 0, 1, \dots, g - 1$, denominamos *conjunto de Kreuser o conjunto de índices* del segmento \mathcal{L}_η al subconjunto ordenado I_m^η del conjunto E_m cuyos elementos son las abscisas $j(\eta)$ de los puntos $P_{j(\eta)}$ del conjunto de Newton \mathcal{D}_m^η correspondiente a \mathcal{L}_η , es decir,

$$I_m^\eta \equiv \left\{ j(\eta) \in E_m; P_{j(\eta)}(j(\eta), K_{j(\eta)}) \in \mathcal{D}_m^\eta \right\}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1), \quad (\text{A.17})$$

de manera que dado $j \in E_m$, j pertenece a $I_m^{(\eta)}$ si y solo si verifica las propiedades (A.16); además, e_η y $e_{\eta+1}$ son respectivamente los elementos mínimo y máximo del conjunto $I_m^{(\eta)}$.

Definición 25. En las condiciones establecidas por las definiciones precedentes, para cada $\eta = 0, 1, \dots, g-1$, denominamos *polinomio característico* del segmento \mathcal{L}_η a la función polinómica de grado $(m - e_\eta)$

$$\mathcal{G}_m^{(\eta)}(z) \equiv \sum_{j(\eta) \in I_m^{(\eta)}} A_{j(\eta)} z^{m-j(\eta)}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g-1). \quad (\text{A.18})$$

Lema 1. En las condiciones dadas por las definiciones precedentes, para cada $\eta = 0, 1, \dots, g-1$ el polinomio característico $\mathcal{G}_m^{(\eta)}(z)$ tiene en $z = 0$ una raíz de multiplicidad $(m - e_{\eta+1})$.

La conclusión se hace evidente si tenemos en cuenta que $\mathcal{G}_m^{(\eta)}(z)$ admite la expresión

$$\mathcal{G}_m^{(\eta)}(z) = \hat{\mathcal{G}}_m^{(\eta)}(z) z^{m-e_{\eta+1}}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g-1), \quad (\text{A.19})$$

donde $\hat{\mathcal{G}}_m^{(\eta)}(z)$ es el polinomio de grado $n_\eta \equiv e_{\eta+1} - e_\eta$

$$\hat{\mathcal{G}}_m^{(\eta)}(z) \equiv A_{e_\eta} z^{e_{\eta+1}-e_\eta} + \sum_{j(\eta) \in \bar{I}_m^{(\eta)}} A_{j(\eta)} z^{e_{\eta+1}-j(\eta)} + A_{e_{\eta+1}}, \quad (\text{A.20})$$

siendo

$$\bar{I}_m^{(\eta)} \equiv I_m^{(\eta)} \setminus \{e_\eta, e_{\eta+1}\}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g-1), \quad (\text{A.21})$$

el conjunto que resulta de prescindir en $I_m^{(\eta)}$ de sus elementos mínimo y máximo.

A fin de que la expresión del teorema de Perron sea lo más clara posible, para cada $\eta = 0, 1, \dots, g-1$ es conveniente agrupar a las $n_\eta \equiv e_{\eta+1} - e_\eta$ raíces del polinomio $\hat{\mathcal{G}}_m^{(\eta)}(z)$ atendiendo a sus diferentes módulos. Sea

$$\hat{d}(\eta) \leq n_\eta, \quad (\text{A.22})$$

el número de módulos diferentes en el conjunto de n_η raíces del polinomio $\hat{\mathcal{G}}_m^{(\eta)}(z)$ y sean tales módulos

$$\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_{\theta(\eta)} < \dots < \sigma_{\hat{d}(\eta)}, \quad (\text{A.23})$$

ordenados de menor a mayor; entonces, si denominamos

$$\hat{v}_{\theta(\eta)}^{(\eta)}, \quad (\theta(\eta) = 1, 2, \dots, \hat{d}(\eta)), \quad (\text{A.24})$$

al número de raíces del polinomio $\hat{\mathcal{G}}_m^\eta(z)$ cuyos módulos son iguales a $\sigma_{\theta(\eta)}$, se verifica la igualdad

$$\sum_{\theta(\eta)=1}^{\hat{d}(\eta)} \hat{\nu}_{\theta(\eta)}^\eta = e_{\eta+1} - e_\eta \equiv n_\eta. \quad (\text{A.25})$$

Teorema 13 (PERRON). Sea

$$\sum_{j=0}^m p_j(\tau) y_{\tau+m-j} = 0, \quad (\tau = 0, 1, 2, \dots), \quad (m \in \mathbf{N}), \quad (\text{A.26})$$

una recurrencia de Perron-Kreuser de orden $m \geq 1$ y parámetros asintóticos (A_j, K_j) ($j = 0, 1, \dots, m$); sea \mathbf{L}_g una línea poligonal de Newton-Puiseux de la recurrencia, formada por $(g + 1)$ vértices $P_{e_\eta}(e_\eta, K_{e_\eta})$ ($\eta = 0, 1, \dots, g$) y g segmentos $\mathcal{L}_\eta \equiv \overline{P_{e_\eta} P_{e_{\eta+1}}}$ ($\eta = 0, 1, \dots, g - 1$), $1 \leq g \leq m$, de pendientes $q_\eta \equiv (K_{e_{\eta+1}} - K_{e_\eta}) / (e_{\eta+1} - e_\eta)$. Para cada $\eta = 0, 1, \dots, g - 1$ sean I_m^η los conjuntos de Kreuser, $\mathcal{G}_m^\eta(z)$ los polinomios característicos correspondientes a los segmentos \mathcal{L}_η , y $\hat{\mathcal{G}}_m^\eta(z)$ los polinomios de grados $n_\eta \equiv e_{\eta+1} - e_\eta$ que resultan de factorizar la potencia $z^{m-e_{\eta+1}}$ en los polinomios característicos respectivos. Sean $\sigma_{\theta(\eta)}$ ($\theta(\eta) = 1, 2, \dots, \hat{d}(\eta)$) los módulos diferentes ordenados de menor a mayor en el conjunto de las n_η raíces de $\hat{\mathcal{G}}_m^\eta(z)$, y sea $\hat{\nu}_{\theta(\eta)}^\eta$ el número de raíces de $\hat{\mathcal{G}}_m^\eta(z)$ cuyos módulos son iguales a $\sigma_{\theta(\eta)}$. En estas condiciones

(\implies) Existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia

$$\mathcal{Y}_m \equiv \left\{ y_\tau^j; j = 1, 2, \dots, m \right\}, \quad (\text{A.27})$$

cuyos elementos pueden agruparse en g clases correspondientes a los g segmentos de la línea poligonal de Newton-Puiseux

$$\left\{ \mathcal{H}_m^\eta \right\}_{\eta=0}^{g-1}, \quad (\text{A.28})$$

tales que

i) Cada clase \mathcal{H}_m^η contiene $n_\eta \equiv e_{\eta+1} - e_\eta$ soluciones linealmente independientes $y_\tau^{\Upsilon(\eta)}$, es decir,

$$\mathcal{H}_m^\eta = \left\{ y_\tau^{\Upsilon(\eta)} \in \mathcal{Y}_m; \Upsilon(\eta) = 1, 2, \dots, n_\eta \right\}, \quad (\eta = 0, 1, \dots, g - 1). \quad (\text{A.29})$$

ii) Para todo $\eta = 0, 1, \dots, g - 1$, la clausura lineal de \mathcal{H}_m^η está formada por soluciones y_τ^η de la recurrencia que son de orden $-q_\eta$, es decir, tales que

$$\liminf_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{y_\tau^\eta} \right|}{\ln(\tau!)} = -q_\eta, \quad (\text{A.30})$$

donde $y_\tau^{(\eta)}$ representa a una solución de la clase $\mathcal{H}_m^{(\eta)}$ o una combinación lineal no nula de soluciones de dicha clase.

iii) Cada clase $\mathcal{H}_m^{(\eta)}$ puede partirse en $\hat{d}(\eta)$ subclases $\mathcal{H}_m^{(\eta,1)}, \mathcal{H}_m^{(\eta,2)}, \dots, \mathcal{H}_m^{(\eta,\hat{d}(\eta))}$ que contienen respectivamente $\hat{\nu}_1^{(\eta)}, \hat{\nu}_2^{(\eta)}, \dots, \hat{\nu}_{\hat{d}(\eta)}^{(\eta)}$ soluciones tales que todas las soluciones de cada subclase y sus combinaciones lineales son de tipo $\sigma_{\theta(\eta)}$, es decir, tales que

$$\limsup_{\tau \rightarrow +\infty} \left(|y_\tau^{(\eta,\theta(\eta))}| (\tau!)^{-q_\eta} \right)^{1/\tau} = \sigma_{\theta(\eta)}, \quad (\text{A.31})$$

de manera que

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}(\eta, \theta(\eta)) > 0 \ni |y_\tau^{(\eta,\theta(\eta))}| < \hat{M} (\sigma_{\theta(\eta)} + \epsilon)^\tau (\tau!)^{q_\eta}, \quad (\tau \geq 0), \quad (\text{A.32})$$

donde $y_\tau^{(\eta,\theta(\eta))}$ representa a una solución de la subclase $\mathcal{H}_m^{(\eta,\theta(\eta))}$ o bien a una combinación lineal no nula de soluciones de dicha subclase.

A.2. Convergencia de las series Ω , Q . Caso regular-irregular

La aplicación del teorema 13 a una recurrencia de Perron-Kreuser particular, como las recurrencias (2.174), (2.216) verificadas por $a_s^{(k)}$ y $b_n^{(k)}$ respectivamente, se realiza en varios pasos:

Primero, escribiendo la recurrencia en la forma canónica (A.1), (A.26), obteniendo a partir de ella sus parámetros asintóticos (A_j, K_j) ($j = 0, 1, 2, \dots, m$), y de éstos el conjunto de Puiseux \mathcal{P}_m .

Segundo, construyendo el diagrama de Newton-Puiseux $[\mathcal{V}_g, \mathbf{L}_g]$ ($1 \leq g \leq m$) con sus vértices $P_{e_\eta} \in \mathcal{V}_g \subset \mathcal{P}_m$ y calculando las pendientes q_η de los segmentos $\mathcal{L}_\eta \in \mathbf{L}_g$ ($\eta = 0, 1, \dots, g-1$).

Tercero, obteniendo los polinomios característicos $\mathcal{G}_m^{(\eta)}(z)$ de los segmentos \mathcal{L}_η y las raíces de cada uno de ellos $z_{\theta(\eta)} = \sigma_{\theta(\eta)} \exp(i \arg(z_{\theta(\eta)}))$ ($\theta(\eta) = 1, 2, \dots, \hat{d}(\eta)$).

Cuarto, aplicando el resultado (A.32) para establecer cotas superiores de las soluciones de la recurrencia.

Estudiemos en primer lugar el comportamiento asintótico de $a_s^{(k)}$ cuando $s \rightarrow +\infty$. Las funciones $a_s^{(k)}$ verifican la recurrencia (2.174) cuya forma canónica escribimos reemplazando en (A.26) la variable independiente genérica τ por s , el orden m por $N+1$, cambiando a continuación

$s \rightarrow s + N + 1$ y dividiendo finalmente todos los términos de la recurrencia entre $-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N + 1)$. Así, para cada $k = 1, 2$ se tiene

$$\sum_{j=0}^{N+1} p_j^{(k)}(s) a_{s+N+1-j}^{(k)} = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \dots), \quad (a_0^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.33})$$

donde

$$p_0^{(k)}(s) = 1, \quad (\text{A.34})$$

$$p_j^{(k)}(s) = \frac{\tilde{\alpha}_{N-j-1}^{(k)} - 2\alpha_{N-j+1}^{(k)}(s + N - j + 1)}{-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N + 1)}, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.35})$$

$$p_{N+1}^{(k)}(s) = \frac{\tilde{\alpha}_{-2}^{(k)} + s(s + N + 1 - 2\alpha_0^{(k)})}{-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N + 1)}, \quad (\text{A.36})$$

donde $\tilde{\alpha}_j^{(k)}$ se dan en (2.175), (2.176).

A partir de (A.34), (A.35) y (A.36) obtenemos el comportamiento asintótico de los coeficientes de la recurrencia; para cada $k = 1, 2$,

$$p_j^{(k)}(s) = A_j^{(k)} s^{K_j} + o(s^{K_j}) = A_j^{(k)} s^{K_j} (1 + o(1)), \quad (s \rightarrow +\infty), \\ (j = 0, 1, \dots, N + 1), \quad (\text{A.37})$$

siendo

$$A_j^{(k)} = \frac{\alpha_{N-j+1}^{(k)}}{\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_j = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, N), \quad (\text{A.38})$$

$$A_{N+1}^{(k)} = -\frac{1}{2\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_{N+1} = 1, \quad (\text{A.39})$$

los parámetros asintóticos de la recurrencia y $\alpha_{N+1}^{(k)} \equiv \lambda_k$ (cfr.(2.170)).

El conjunto de Puiseux de la recurrencia es, de acuerdo con (A.7),

$$\mathcal{P}_{N+1} = \{P_j(j, K_j); j = 0, 1, \dots, N + 1\} = \\ = \{P_j(j, 0); j = 0, 1, \dots, N\} \cup \{P_{N+1}(N + 1, 1)\}. \quad (\text{A.40})$$

El diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia (2.174), (A.33) verificada por $a_s^{(k)}$ consiste en un único ($g = 1$) segmento \mathcal{L}_0 que conecta al vértice inicial $P_0(0, 0)$ con el vértice final $P_{N+1}(N + 1, 1)$ del conjunto de Puiseux, es decir,

$$\mathcal{V}_1 = \{P_{e_0}, P_{e_1}; e_0 = 0, e_1 = N + 1\} = \\ = \{P_0(0, 0), P_{N+1}(N + 1, 1)\}, \quad (\text{A.41})$$

$$\mathbf{L}_1 = \{\mathcal{L}_0\}, \quad \mathcal{L}_0 = \overline{P_0 P_{N+1}}, \quad (\text{A.42})$$

siendo

$$q_0 = \frac{1}{N+1}, \quad (\text{A.43})$$

la pendiente del segmento. A modo de ejemplo, en la figura A.1 representamos el conjunto de Puiseux y el diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia de $a_s^{(k)}$ en el caso particular $M = -1$, $N = 2$.

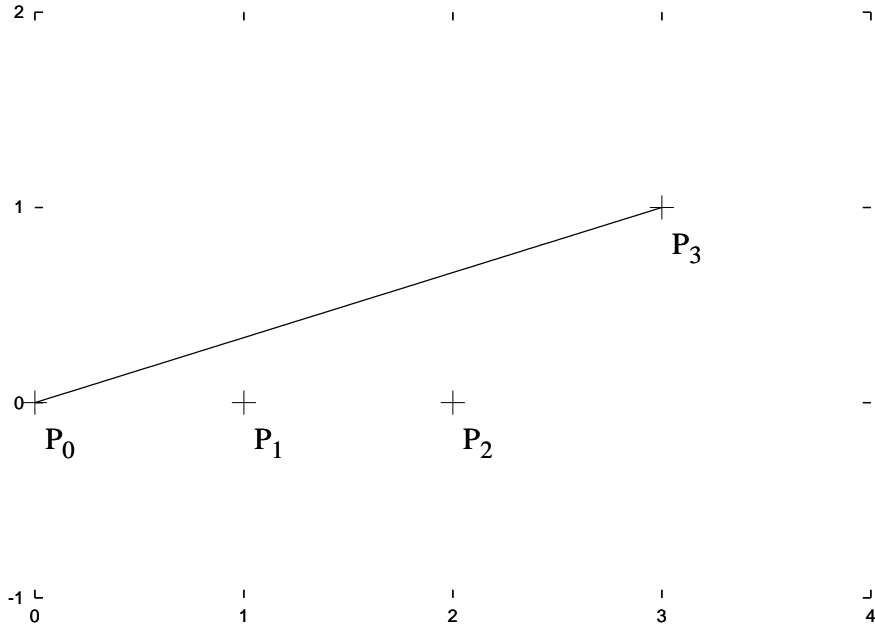


Figura A.1: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow \infty$ de las soluciones formales de la ecuación canónica (2.147). Los parámetros de grado del potencial toman los valores $M = -1$, $N = 2$. La pendiente del segmento es $q_0 = 1/3$.

El conjunto de Kreuser correspondiente al segmento \mathcal{L}_0 está formado por las abscisas de sus dos puntos extremos, únicos puntos de \mathcal{P}_{N+1} que pertenecen a \mathcal{L}_0 :

$$I_{N+1}^{(0)} \equiv I_{N+1} = \{0, N+1\}, \quad (\text{A.44})$$

de manera que el polinomio característico de este único segmento es, para cada $k = 1, 2$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{N+1}^{(k,0)}(z) \equiv \mathcal{G}_{N+1}^{(k)}(z) &= \sum_{j \in I_{N+1}} A_j^{(k)} z^{N+1-j} = A_0^{(k)} z^{N+1} + A_{N+1}^{(k)} = \\ &= z^{N+1} - \frac{1}{2\lambda_k}, \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

donde λ_k ($k = 1, 2$), dados en (2.177) y (2.178), son los parámetros que controlan el comportamiento asintótico de las soluciones formales $u_{a,k}(z)$ de

la ecuación canónica cuando $z \rightarrow \infty$. En la mayoría de las aplicaciones físicas, el parámetro g_{2N} es real positivo y z es una variable real no negativa, luego λ_k son reales: $\lambda_1 < 0$ y $\lambda_2 > 0$.

Las raíces de $\mathcal{G}_{N+1}^k(z)$ son por tanto las $N+1$ raíces complejas de $1/2\lambda_k$, es decir, para cada $k = 1, 2$,

$$z_L^k = \sigma^k \exp(i\varphi_L^k), \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (\text{A.46})$$

donde

$$\sigma^k = \left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)}, \quad \varphi_L^k = \frac{\arg(1/2\lambda_k) + 2\pi L}{N+1}, \quad (L = 0, 1, \dots, N), \quad (\text{A.47})$$

de manera que todas las raíces tienen el mismo módulo, es decir, $\eta = 0$, $\hat{d}(0) = 1$ y $\hat{\nu}_1^0 = N+1$ en (A.22) y (A.24).

En estas condiciones, el teorema de Perron establece que, para cada $k = 1, 2$, existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (2.174), (A.33)

$$\mathcal{Y}_{N+1}^k = \left\{ a_s^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, N+1 \right\}, \quad (\text{A.48})$$

cuyas funciones constituyen una única clase \mathcal{H}_{N+1}^k de soluciones de orden $-q_0 = -1/(N+1)$, i.e. tales que

$$\liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{a_s^k} \right|}{\ln(s!)} = -\frac{1}{N+1}, \quad (\text{A.49})$$

donde a_s^k representa a cualquier combinación lineal no nula de las funciones $a_s^{(k,j)}$, es decir, cualquier solución no nula de la recurrencia. Asimismo, el teorema establece que dentro de la clase \mathcal{H}_{N+1}^k existe una única subclase $\mathcal{H}_{N+1}^{(k,1)}$ de soluciones de tipo σ^k , es decir, tales que dado $k = 1, 2$, para toda solución no nula a_s^k de la recurrencia se verifica

$$\limsup_{s \rightarrow +\infty} \left(\left| a_s^k \right| (s!)^{-1/(N+1)} \right)^{1/s} = \left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} \neq 0, \quad (\text{A.50})$$

y por consiguiente es válida la acotación siguiente de $\left| a_s^k \right|$:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_H^k > 0 \ni \left| a_s^k \right| < \hat{M}_H^k \left(\left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^s (s!)^{1/(N+1)}, \quad (s \geq 0). \quad (\text{A.51})$$

Consideremos en segundo lugar el comportamiento asintótico de $b_n^{(k)}$ cuando $n \rightarrow +\infty$. La forma canónica (A.1), (A.26) de la recurrencia (2.216) verificada por las funciones $b_n^{(k)}$ se obtiene reemplazando la variable independiente genérica τ por n , el orden m por $2N + 2$, cambiando a continuación $n \rightarrow n + 2N + 2$ y dividiendo finalmente todos los términos de la recurrencia entre $(n + 2N + 2)(n + 2N + 2\nu_k + 1)$. Así, para cada $k = 1, 2$ tenemos

$$\sum_{j=0}^{2N+2} \hat{p}_j^{(k)}(n) b_{n+2N+2-j}^{(k)} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (b_0^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.52})$$

donde

$$\hat{p}_0^{(k)}(n) = 1, \quad (\text{A.53})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \frac{\hat{\rho}_{j-1}^{(k)} n + \hat{\rho}_{j-1}^{(k)} (2N + 2 + \nu_k - j) + \hat{\varepsilon}_{j-2}^{(k)}}{(n + 2N + 2)(n + 2N + 1 + 2\nu_k)}, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.54})$$

$$\hat{p}_{N+1}^{(k)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{N-1}^{(k)}}{(n + 2N + 2)(n + 2N + 1 + 2\nu_k)}, \quad (\text{A.55})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{j-2}^{(k)}}{(n + 2N + 2)(n + 2N + 1 + 2\nu_k)}, \quad (j = N + 2, N + 3, \dots, 2N + 2), \quad (\text{A.56})$$

donde $\hat{\rho}_{j-1}^{(k)}$ y $\hat{\varepsilon}_{j-2}^{(k)}$ son funciones conocidas de los parámetros $g_j, \alpha_j^{(k)}$ (véase la nota 16) y ν_k vienen dados por (2.214), (2.215).

El comportamiento asintótico de los coeficientes de la recurrencia se obtiene a partir de las expresiones (A.53) a (A.56):

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \hat{A}_j^{(k)} n^{\hat{K}_j} + o(n^{\hat{K}_j}) = \hat{A}_j^{(k)} n^{\hat{K}_j} (1 + o(1)), \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (j = 0, 1, \dots, 2N + 2), \quad (\text{A.57})$$

siendo

$$\hat{A}_0^{(k)} = 1, \quad \hat{K}_0 = 0, \quad (\text{A.58})$$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \hat{\rho}_{j-1}^{(k)}, \quad \hat{K}_j = -1, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.59})$$

$$(\hat{A}_{N+1}^{(k)}, \hat{K}_{N+1}) = (\hat{\varepsilon}_{N-1}^{(k)}, -2), \quad (\text{A.60})$$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \hat{\varepsilon}_{j-2}^{(k)}, \quad \hat{K}_j = -2, \quad (j = N + 2, \dots, 2N + 2), \quad (\text{A.61})$$

los parámetros asintóticos de la recurrencia.

El conjunto de Puiseux de la recurrencia es, de acuerdo con (A.7),

$$\mathcal{P}_{2N+2} = \{P'_j(j, \hat{K}_j); j = 0, 1, \dots, 2N + 2\}, \quad (\text{A.62})$$

es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{2N+2} = & \{P'_0(0, 0)\} \cup \{P'_j(j, -1); j = 1, 2, \dots, N\} \cup \\ & \cup \{P'_j(j, -2); j = N + 1, N + 2, \dots, 2N + 2\}. \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

El diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia (2.216), (A.52) verificada por $b_n^{(k)}$ consiste en un único segmento ($g = 1$) que conecta al vértice inicial $P'_0(0, 0)$ con el vértice final $P'_{2N+2}(2N+2, -2)$ del conjunto de Puiseux. Es decir,

$$\hat{\mathcal{V}}_1 = \{P'_{e_0}, P'_{e_1}; e_0 = 0, e_1 = 2N + 2\}, \quad (\text{A.64})$$

$$\hat{\mathcal{L}}_1 = \{\hat{\mathcal{L}}_0\}, \quad \hat{\mathcal{L}}_0 = \overline{P'_0 P'_{2N+2}}, \quad (\text{A.65})$$

siendo

$$q'_0 = -\frac{1}{N + 1}, \quad (\text{A.66})$$

la pendiente del segmento $\hat{\mathcal{L}}_0$. Ninguno de los puntos restantes del conjunto de Puiseux, P'_j ($j = 1, 2, \dots, 2N + 1$) pertenece al segmento, quedando todos ellos por debajo de la recta definida por sus puntos inicial y final. Dando continuidad al ejemplo de la figura A.1, en la figura A.2 representamos el conjunto de Puiseux y los diagramas de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por $b_n^{(k)}$ en el caso particular $M = -1$, $N = 2$.

En consecuencia, el conjunto de Kreuser correspondiente al segmento $\hat{\mathcal{L}}_0$ está formado por las abscisas de P'_0, P'_{2N+2} . Es decir, dado $N = 0, 1, 2, \dots$, para cada $k = 1, 2$ se tiene

$$\hat{I}_{2N+2}^{(0)} \equiv \hat{I}'_{2N+2} = \{0, 2N + 2\}, \quad (\text{A.67})$$

y el polinomio característico del segmento $\hat{\mathcal{L}}_0$, dado por

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N+2}^{(k,0)}(z) \equiv \hat{\mathcal{G}}_{2N+2}^{(k)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}'_{2N+2}} \hat{A}_j^{(k)} z^{2N+2-j}, \quad (\text{A.68})$$

es

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N+2}^{(k)}(z) = \hat{A}_0^{(k)} z^{2N+2} + \hat{A}_{2N+2}^{(k)} = z^{2N+2} + \hat{\varepsilon}_{2N}^{(k)}, \quad (\text{A.69})$$

donde $\hat{\varepsilon}_{2N}^{(k)} = -g_{2N} = -\lambda_k^2$. Todas las $2N + 2$ raíces del polinomio $\hat{\mathcal{G}}_{2N+2}^{(k)}(z)$ tienen el mismo módulo, de manera que ahora es $\hat{d}(0) = 1$ y $\hat{\nu}_1^{(0)} = 2N + 2$:

$$\begin{aligned} \hat{z}_L^{(k)} &= \hat{\sigma}^{(k)} \exp(i\hat{\varphi}_L^{(k)}), & (L = 0, 1, \dots, 2N + 1), \\ \hat{\sigma}^{(k)} &= |g_{2N}|^{1/(2N+2)}, & \hat{\varphi}_L^{(k)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L}{2N + 2}. \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

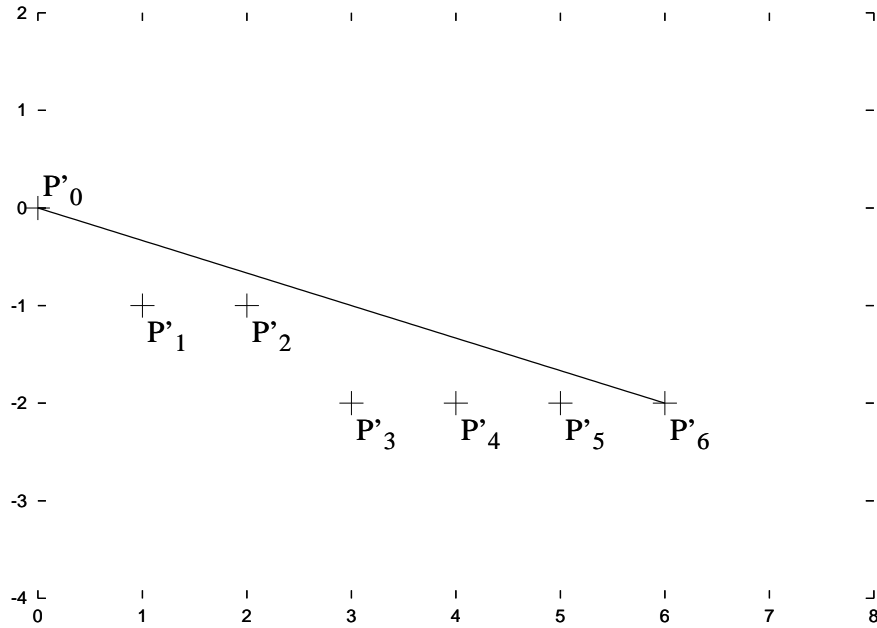


Figura A.2: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$ en la expansión de la función $w_{\text{reg},k}$ cuando los parámetros de grado del potencial en la ecuación canónica (2.147) toman los valores $M = -1$, $N = 2$. La pendiente del segmento es $q'_0 = -1/3$.

En estas condiciones, el teorema de Perron establece que dado $N = 0, 1, 2, \dots$, para cada $k = 1, 2$ existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (A.52)

$$\hat{\mathcal{Y}}_{2N+2}^{(k)} = \left\{ b_n^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, 2N + 2 \right\}, \quad (\text{A.71})$$

cuyas funciones constituyen una única clase $\hat{\mathcal{H}}_{2N+2}^{(k)}$ de soluciones de orden $-q'_0 = 1/(N + 1)$, i.e. tales que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left| \frac{1}{b_n^{(k)}} \right|}{\ln(n!)} = \frac{1}{N + 1}, \quad (\text{A.72})$$

donde $b_n^{(k)}$ representa a cualquier combinación lineal no nula de las funciones $b_n^{(k,j)}$, es decir, cualquier solución de la recurrencia. Además, dentro de la clase $\hat{\mathcal{H}}_{2N+2}^{(k)}$ existe una única subclase $\hat{\mathcal{H}}_{2N+2}^{(k,1)}$ de soluciones de tipo $\hat{\sigma}^{(k)}$, i.e. tales que para toda solución no nula $b_n^{(k)}$ de la recurrencia se verifica

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left(\left| b_n^{(k)} \right| (n!)^{1/(N+1)} \right)^{1/n} = \left(|g_{2N}|^{1/2} \right)^{1/(N+1)} \neq 0, \quad (\text{A.73})$$

de manera que para cada $k = 1, 2$ $|b_n^k|$ verifica la acotación siguiente:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \forall n \geq 0, \quad \exists \hat{M}_B^k > 0 \quad \ni \\ \ni \quad |b_n^k| < \hat{M}_B^k \left((|g_{2N}|^{1/2})^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^n (n!)^{-1/(N+1)}, \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

siendo $|g_{2N}|^{1/2} = |\lambda_k|$, toda vez que (cfr. (2.178))

$$g_{2N} = \left(\alpha_{N+1}^k \right)^2 = \lambda_k^2. \quad (\text{A.75})$$

Los resultados (A.51) y (A.74), que hemos obtenido aplicando el teorema 13 a las recurrencias verificadas por a_j^k y b_n^k respectivamente, se adaptan a las formas particulares de los términos generales de las series (2.220), (2.221) que definen a $\Omega_{\hat{n},p}^k$, $Q_{\hat{n}}^k$ cambiando s por j en la primera y n por $\hat{n} - p + j$ en la segunda. Así establecemos, para cada $k = 1, 2$, las mayoraciones

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \quad \exists \tilde{M}_\Omega^k > 0 \quad \ni \\ \left| a_j^k b_{\hat{n}-p+j}^k \right| < \tilde{M}_\Omega^k \frac{\left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p} \left(\left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} + \tilde{\epsilon} \right)^j}{((\hat{n} - p + j)!/j!)^{1/(N+1)}}, \\ (p = 0, 1, \dots, N + 1), \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (\hat{n} - p + j \geq 0), \end{aligned} \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \quad \exists \tilde{M}_Q^k > 0 \quad \ni \\ \left| j a_j^k b_{\hat{n}+j}^k \right| < \tilde{M}_Q^k \frac{\left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}} j \left(\left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} + \tilde{\epsilon} \right)^j}{((\hat{n} + j)!/j!)^{1/(N+1)}}, \\ (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (\hat{n} + j \geq 0), \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

siendo

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + |2\lambda_k|^{-1/(N+1)} \right). \quad (\text{A.78})$$

Tomando el módulo en las series (2.220), (2.221) y teniendo en cuenta (A.76), (A.77), obtenemos para cada $k = 1, 2$ las mayoraciones siguientes:

$$\begin{aligned} \forall \epsilon > 0, \quad \forall p = 0, 1, \dots, N + 1, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ \forall \hat{n} \in \mathbf{Z} \quad \ni \quad \hat{n} - p + j \geq 0, \quad \exists \tilde{M}_\Omega^k > 0 \quad \ni \\ \left| \Omega_{\hat{n},p}^k \right| < \tilde{M}_\Omega^k \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} + \tilde{\epsilon} \right)^j}{((\hat{n} - p + j)!/j!)^{1/(N+1)}}, \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall j = 0, 1, 2, \dots, \forall \hat{n} \in \mathbf{Z} \ni \hat{n} + j \geq 0, \exists \tilde{M}_Q^{(k)} > 0 \ni$$

$$|Q_{\hat{n}}^{(a,k)}| < \tilde{M}_Q^{(k)} \left(\left(\hat{\beta}_{N+1}^{(k)} \right)^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j \left(\left(\frac{\hat{\beta}_{N+1}^{(k)}}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} + \tilde{\epsilon} \right)^j}{((\hat{n} + j)!/j!)^{1/(N+1)}}, \quad (\text{A.80})$$

donde $\tilde{\epsilon}$ viene dado en (A.78).

La convergencia de las series en los segundos miembros de (A.79) y (A.80) se estudia aplicando el criterio de la razón. Dado $N = 0, 1, 2, \dots$, para todo $\hat{n} \in \mathbf{Z}$ y $k = 1, 2$ sea

$$d_j^{(k)}(\hat{n}, p) \equiv \frac{\left(\left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} + \tilde{\epsilon} \right)^j}{((\hat{n} - p + j)!/j!)^{1/(N+1)}}, \quad (j = 0, 1, 2, \dots)$$

$$(p = 0, 1, \dots, N + 1), \quad (\text{A.81})$$

el término general de la serie en el segundo miembro de (A.79). El término general de la serie en el segundo miembro de (A.80) es entonces igual a $j d_j^{(k)}(\hat{n}, 0)$. Aplicando la ley de recurrencia de la función factorial obtenemos las razones de crecimiento asintótico de ambos términos generales:

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{d_{j+1}^{(k)}(\hat{n}, p)}{d_j^{(k)}(\hat{n}, p)} \right| = \left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)},$$

$$(\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N + 1), \quad (\text{A.82})$$

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{(j+1) d_{j+1}^{(k)}(\hat{n}, 0)}{j d_j^{(k)}(\hat{n}, 0)} \right| = \left(\frac{|\lambda_k|}{2|\lambda_k|} \right)^{1/(N+1)} = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)},$$

$$(\hat{n} \in \mathbf{Z}). \quad (\text{A.83})$$

Por consiguiente, la razón de crecimiento de los términos generales de las series que definen a $\Omega_{\hat{n}, p}^{(k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(k)}$ es, para cada $k = 1, 2$,

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{d_{j+1}^{(k)}(\hat{n}, p)}{d_j^{(k)}(\hat{n}, p)} \right| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{(j+1) d_{j+1}^{(k)}(\hat{n}, 0)}{j d_j^{(k)}(\hat{n}, 0)} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)}, \quad (\text{A.84})$$

y coincide con la razón de crecimiento de la serie geométrica

$$\mathcal{F}_N \equiv \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{j/(N+1)}. \quad (\text{A.85})$$

Además, la condición $\hat{n} - p + j \geq 0$ inherente a (A.76) y (A.77) se verifica para todo $j = 0, 1, 2, \dots$ y para todo $p = 0, 1, \dots, N + 1$ siempre que el valor

entero de \hat{n} sea tal que $\hat{n} - p \geq 0$. Concluimos así que las series $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$ convergen a la misma velocidad que la serie geométrica (A.85) cuando el entero \hat{n} verifica la condición $\hat{n} - p \geq 0$ en el caso de $\Omega_{\hat{n},p}^{(k)}$ y la condición $\hat{n} \geq 0$ en el caso de $Q_{\hat{n}}^{(k)}$.

A.3. Convergencia de las series Ω, Q . Caso irregular-irregular

El procedimiento establecido en la sección precedente para estudiar la convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},p}^{(k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(k)}$ que se presentan en el problema de conexión regular-irregular, se extiende sin cambio sustancial al caso irregular-irregular. El teorema de Perron se aplica a la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las series $\mathcal{S}_{a,k}(z)$ que definen las formas asintóticas (2.252) de las soluciones formales de clase (a) $u_{a,k}(z)$ de la ecuación canónica (2.246), (2.247), así como a la recurrencia verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$ en las series de potencias (2.467) que representan a las funciones $w_{\eta,k}(z)$ definidas en (2.464), obteniéndose el comportamiento asintótico de unos y otros coeficientes.

En uno y otro caso, el estudio de la convergencia de estas series comprende las etapas descritas en el caso regular-irregular:

a) Escribimos las recurrencias verificadas por los coeficientes $a_s^{(k)}$ y $b_n^{(k)}$ en la forma canónica de Perron-Kreuser ((A.1) a(A.4)) y obtenemos el comportamiento asintótico de los coeficientes funcionales de los términos de cada recurrencia.

b) Definimos el conjunto de Puiseux (A.7) de cada recurrencia y construimos el diagrama de Newton-Puiseux correspondiente (A.10).

c) Obtenemos los polinomios característicos (A.18) de los segmentos constituyentes de cada diagrama de Newton-Puiseux y las raíces de cada polinomio.

d) Aplicamos el teorema de Perron (A.26) a (A.32) a fin de obtener sendas mayoraciones de los términos generales de ambas series $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$, $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$ como condición necesaria para establecer su convergencia.

A.3.1. Convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},p}^{(a,k)}$, $Q_{\hat{n}}^{(a,k)}$

Estudiamos el comportamiento asintótico de los coeficientes $a_s^{(k)}$ que verifican la recurrencia (2.259) (el proceso se describe paso a paso en la nota 25). El diagrama de Newton-Puiseux de esta recurrencia consiste en dos ($g = 2$) segmentos $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$: \mathcal{L}_0 conecta el vértice inicial $P_0(0, 0)$ con el punto de ordenada máxima $P_{N+1}(N + 1, 1)$ y \mathcal{L}_1 conecta a P_{N+1} con el vértice final

$P_{N-2M-1}(N - 2M - 1, -1)$:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{P_0 P_{N+1}}, \quad \mathcal{L}_1 = \overline{P_{N+1} P_{N-2M-1}}. \quad (\text{A.86})$$

Las pendientes respectivas de ambos segmentos son por tanto

$$q_0 = \frac{1}{N+1} > 0, \quad q_1 = \frac{1}{M+1} < 0, \quad (\text{A.87})$$

para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$. En la figura A.3 representamos a modo de ejemplo el conjunto de Puiseux y el diagrama de Newton- Puiseux de la recurrencia verificada por $a_s^{(k)}$ en el caso particular $M = -2, N = 2$.

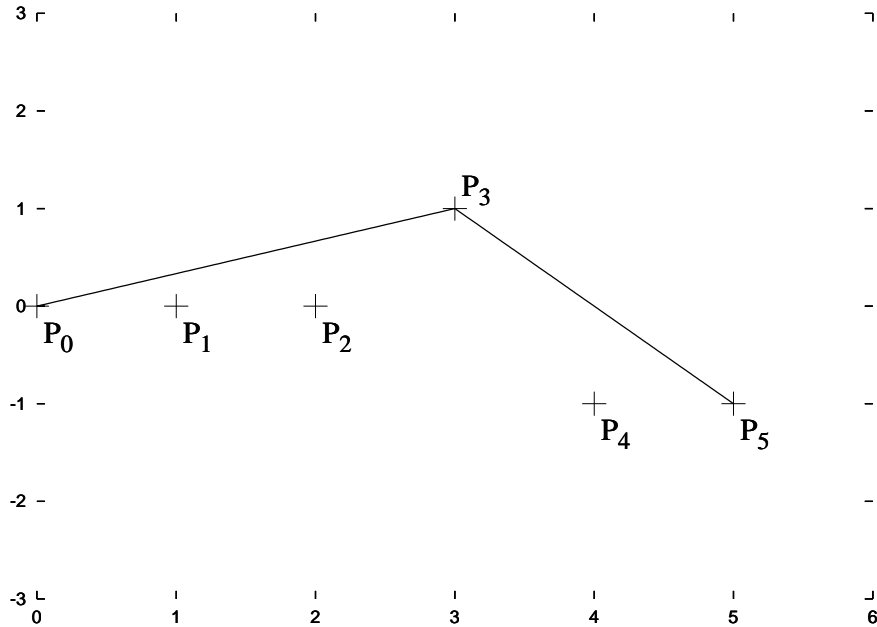


Figura A.3: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $a_s^{(k)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow \infty$ de las soluciones formales de clase (a) de la ecuación canónica (2.246) cuando $M = -2, N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q_0 = 1/3, q_1 = -1$.

En todo caso, el conjunto de Kreuser de cada segmento (cfr. (A.17)), del cual depende el polinomio característico correspondiente, está formado por las abscisas de sus puntos extremos, únicos elementos del conjunto de Puiseux \mathcal{P}_{N-2M-1} que pertenecen al segmento:

$$I_0 = \{0, N + 1\}, \quad I_1 = \{N + 1, N - 2M - 1\}, \quad (\text{A.88})$$

donde simplificamos la notación dada en (A.17) poniendo $I_0 \equiv I_{N-2M-1}^0, I_1 \equiv I_{N-2M-1}^1$.

El polinomio característico del segmento \mathcal{L}_0 es, para cada $k = 1, 2$, habida cuenta de (A.18) y (A.88),

$$\mathcal{G}_{N-2M-1}^{(k,0)}(z) = \sum_{j \in I_0} A_j^{(k)} z^{N-2M-1-j} = z^{-2M-2} \left(z^{N+1} - \frac{1}{2\lambda_k} \right),$$

($k = 1, 2$), (A.89)

cuyas raíces son

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } -2M - 2, \quad (\text{A.90})$$

y las $N + 1$ raíces complejas de $1/2\lambda_k$:

$$z_{L_0}^{(k,0)} = \sigma^{(k,0)} \exp\left(i\varphi_{L_0}^{(k,0)}\right), \quad (L_0 = 0, 1, \dots, N), \quad (\text{A.91})$$

donde

$$\sigma^{(k,0)} = \left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)}, \quad \varphi_{L_0}^{(k,0)} = \frac{\arg(1/2\lambda_k) + 2\pi L_0}{N + 1},$$

($L_0 = 0, 1, \dots, N$). (A.92)

Análogamente, el polinomio característico del segmento \mathcal{L}_1 es

$$\mathcal{G}_{N-2M-1}^{(k,1)}(z) = \sum_{j \in I_1} A_j^{(k)} z^{N-2M-1-j} = -\frac{1}{2\lambda_k} z^{-2M-2} + \frac{g_{2M}}{2\lambda_k}, \quad (\text{A.93})$$

cuyas raíces son las $-2M - 2$ raíces complejas de g_{2M} :

$$z_{L_1}^{(k,1)} = \sigma^{(k,1)} \exp\left(i\varphi_{L_1}^{(k,1)}\right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3), \quad (\text{A.94})$$

donde

$$\sigma^{(k,1)} = |g_{2M}|^{1/(-2M-2)}, \quad \varphi_{L_1}^{(k,1)} = \frac{\arg(g_{2M}) + 2\pi L_1}{-2M - 2},$$

($L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3$). (A.95)

El teorema de Perron establece entonces que para cada $k = 1, 2$, existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (2.259),

$$\mathcal{Y}_{N-2M-1}^{(k)} = \left\{ a_s^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, N - 2M - 1 \right\}, \quad (\text{A.96})$$

cuyas funciones pueden agruparse en $g = 2$ clases correspondientes a cada uno de los dos segmentos \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 de la línea poligonal de Newton-Puiseux, a las que distinguimos mediante el índice $\tilde{\eta} = 0, 1$. Estas funciones verifican

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_A^{(k,\tilde{\eta})} > 0 \ni \left| a_{s,\tilde{\eta}}^{(k,j)} \right| < \hat{M}_A^{(k,\tilde{\eta})} \left(\sigma^{(k,\tilde{\eta})} + \epsilon \right)^s (s!)^{q_{\tilde{\eta}}},$$

($s \geq 0$). (A.97)

Ahora bien, a consecuencia de (A.87) y (A.97), cuando $s \rightarrow +\infty$, las soluciones $a_s^{(k,0)}$ asociadas al segmento \mathcal{L}_0 dominan sobre las $a_s^{(k,1)}$ correspondientes al segmento \mathcal{L}_1 . Por consiguiente, toda solución $a_s^{(k)}$ de la recurrencia verifica la mayoración

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_A^{(k)} > 0 \ni |a_s^{(k)}| < \hat{M}_A^{(k)} \left(\left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^s (s!)^{1/(N+1)},$$

($s \rightarrow +\infty$), (A.98)

siendo $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)} = (g_{2N})^{1/2}$.

Consideramos seguidamente el comportamiento asintótico de los coeficientes $b_n^{(k)}$ que verifican la recurrencia (2.468) (para los detalles véase la nota 25). El diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia (2.468) está formado por $g = 2$ segmentos $\hat{\mathcal{L}}'_0, \hat{\mathcal{L}}'_1$: $\hat{\mathcal{L}}'_0$ conecta el vértice inicial $P'_0(0,0)$ con el vértice de ordenada máxima $P'_{-2M-2}(-2M-2, 2)$, mientras $\hat{\mathcal{L}}'_1$ conecta a P'_{-2M-2} con el vértice final $P'_{2N-2M}(2N-2M, 0)$:

$$\hat{\mathcal{L}}'_0 = \overline{P'_0 P'_{-2M-2}}, \quad \hat{\mathcal{L}}'_1 = \overline{P'_{-2M-2} P'_{2N-2M}}. \quad (\text{A.99})$$

Las pendientes de ambos segmentos son respectivamente

$$q'_0 = \frac{1}{-M-1} > 0, \quad q'_1 = -\frac{1}{N+1} < 0, \quad (\text{A.100})$$

para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$.

En la figura A.4 representamos el conjunto de Puiseux y el diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por $b_n^{(k)}$ en el caso particular $N = 2, M = -2$.

Los conjuntos de Kreuser de uno y otro segmento son:

$$\hat{I}'_0 = \{0, -2M-2\}, \quad \hat{I}'_1 = \{-2M-2, 2N-2M\}, \quad (\text{A.101})$$

donde hemos simplificado de nuevo la notación dada en (A.17) poniendo $\hat{I}'_{2N-2M} \equiv \hat{I}'_0, \hat{I}'_{2N-2M} \equiv \hat{I}'_1$.

El polinomio característico del segmento $\hat{\mathcal{L}}'_0$ es, para cada $k = 1, 2$, habida cuenta de (A.18), (A.101),

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(k,0)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}'_0} \hat{A}_j^{(k)} z^{2N-2M-j} = z^{2N+2} \left(z^{-2M-2} - \frac{1}{g_{2M}} \right), \quad (\text{A.102})$$

cuyas raíces son

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N+2, \quad (\text{A.103})$$

y las $-2M-2$ raíces complejas de $1/g_{2M}$:

$$\hat{z}_{L_1}^{(k,0)} = \hat{\sigma}^{(k,0)} \exp \left(i \hat{\varphi}_{L_1}^{(k,0)} \right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.104})$$

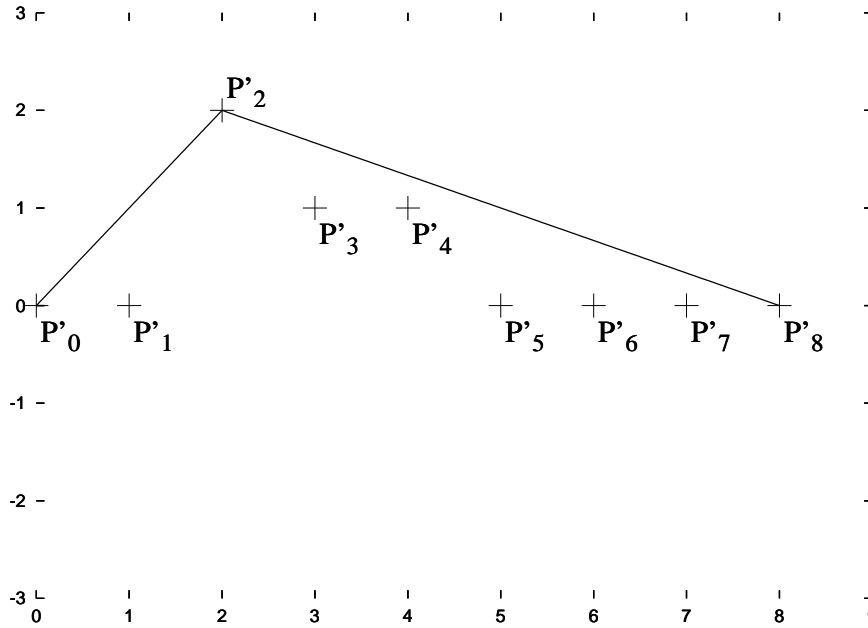


Figura A.4: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $b_n^{(k)}$ en la expansión de la función $w_{\eta,k}(z)$ cuando $M = -2, N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q'_0 = 1, q'_1 = -1/3$.

donde

$$\hat{\sigma}^{(k,0)} = \left| \frac{1}{g_{2M}} \right|^{1/(-2M-2)}, \quad \hat{\varphi}_{L_1}^{(k,0)} = \frac{\arg(1/g_{2M}) + 2\pi L_1}{-2M - 2},$$

($L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3$). (A.105)

El polinomio característico del segmento $\hat{\mathcal{L}}'_1$ es análogamente

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(k,1)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_1} \hat{A}_j^{(k)} z^{2N-2M-j} = -\frac{1}{g_{2M}} (z^{2N+2} - g_{2N}),$$

(A.106)

y sus raíces son las $2N + 2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$\hat{z}_{L_2}^{(k,1)} = \hat{\sigma}^{(k,1)} \exp(i\hat{\varphi}_{L_2}^{(k,1)}), \quad (L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1),$$

(A.107)

donde

$$\hat{\sigma}^{(k,1)} = (|g_{2N}|^{1/2})^{1/(N+1)}, \quad \hat{\varphi}_{L_2}^{(k,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_2}{2N + 2},$$

($L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1$). (A.108)

En estas condiciones, el teorema de Perron establece que para cada $k = 1, 2$, existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (2.468),

$$\hat{\mathcal{Y}}_{2N-2M}^{(k)} = \{b_n^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, 2N - 2M\},$$

(A.109)

cuyas funciones pueden agruparse en $g = 2$ clases, que distinguimos mediante el índice $\tilde{\eta} = 0, 1$, correspondientes a los dos segmentos $\hat{\mathcal{L}}'_0, \hat{\mathcal{L}}'_1$ de la línea poligonal de Newton-Puiseux. Estas funciones verifican

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_B^{(k, \tilde{\eta})} > 0 \ni \left| b_{n, \tilde{\eta}}^{(k, j)} \right| < \hat{M}_B^{(k, \tilde{\eta})} \left(\hat{\sigma}^{(k, \tilde{\eta})} + \epsilon \right)^n (n!)^{\hat{q}_{\tilde{\eta}}}, \quad (|n| \geq 0), \quad (\tilde{\eta} = 0, 1). \quad (\text{A.110})$$

A partir de (A.100), (A.110) se deduce que, cuando n tiende a infinito, solamente las soluciones $b_n^{(k, 1)}$ asociadas al segmento $\hat{\mathcal{L}}'_1$ tienen asegurada la convergencia. Por consiguiente, las soluciones aceptables $b_n^{(k)}$ de la recurrencia (2.468) verifican la mayoración

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_B^{(k)} > 0 \ni \left| b_n^{(k)} \right| < \hat{M}_B^{(k)} \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^n (n!)^{-1/(N+1)}, \quad (n \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.111})$$

siendo $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)} = (g_{2N})^{1/2}$.

Las mayoraciones (A.98) y (A.111) se adaptan a las formas de los términos generales de las series $\Omega_{\hat{n}, p}^{(a, k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(a, k)}$ cambiando s por j en la primera y n por $\hat{n} - p + j$ en la segunda. Así, para cada $k = 1, 2$ se tiene:

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_A^{(k)} > 0 \ni \left| a_j^{(k)} \right| < \hat{M}_A^{(k)} \left(\left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^j (j!)^{1/(N+1)}, \quad (j \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.112})$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_B^{(k)} > 0 \ni \left| b_{\hat{n}-p+j}^{(k)} \right| < \hat{M}_B^{(k)} \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p+j} ((\hat{n} - p + j)!)^{-1/(N+1)}, \quad (j \rightarrow +\infty), \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N+1). \quad (\text{A.113})$$

Combinando (A.112) y (A.113) obtenemos las siguientes mayoraciones de los términos generales de las series $\Omega_{\hat{n}, p}^{(a, k)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(a, k)}$:

$$\forall \epsilon > 0, \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \exists \tilde{M}_\Omega^{(k)} > 0 \ni \left| a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)} \right| < \tilde{M}_\Omega^{(k)} \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p} d_j^{(k)}(\hat{n}, p), \quad (j \rightarrow +\infty), \quad (p = 0, 1, \dots, N+1), \quad (\text{A.114})$$

$$\forall \epsilon > 0, \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \exists \tilde{M}_\Omega^{(k)} > 0 \ni \left| j a_j^{(k)} b_{\hat{n}+j}^{(k)} \right| < \tilde{M}_\Omega^{(k)} \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}} j d_j^{(k)}(\hat{n}, 0), \quad (j \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.115})$$

donde para cada $k = 1, 2$,

$$\tilde{M}_\Omega^k \equiv \max \left\{ \hat{M}_A^k, \hat{M}_B^k \right\}, \quad (\text{A.116})$$

$$\begin{aligned} & \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right) \left(\left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} + \epsilon \right) = \\ & = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)} + \epsilon \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} \right) + \epsilon^2 \sim \\ & \sim \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)}, \quad (j \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (\text{A.117})$$

$$\begin{aligned} d_j^k(\hat{n}, p) & \equiv \frac{\left(\left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)} \right)^j}{\left(\frac{(\hat{n}-p+j)!}{j!} \right)^{1/(N+1)}}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \\ & (p = 0, 1, \dots, N+1). \end{aligned} \quad (\text{A.118})$$

Tomando el módulo de las series en (2.306), (2.307) y aplicando las mayoraciones (A.114), (A.115) respectivamente, obtenemos

$$\begin{aligned} \left| \Omega_{\hat{n}, p}^{(a, k)} \right| & \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left| a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)} \right| < \tilde{M}_\Omega^k \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p} \sum_{j=0}^{+\infty} d_j^k(\hat{n}, p), \\ & (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N+1), \end{aligned} \quad (\text{A.119})$$

$$\begin{aligned} \left| Q_{\hat{n}}^{(a, k)} \right| & \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left| j a_j^{(k)} b_{\hat{n}-p+j}^{(k)} \right| < \tilde{M}_\Omega^k \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^{\hat{n}-p} \sum_{j=0}^{+\infty} j d_j^k(\hat{n}, 0), \\ & (\hat{n} \in \mathbf{Z}). \end{aligned} \quad (\text{A.120})$$

La convergencia de las series en los segundos miembros de (A.119), (A.120) se establece entonces aplicando el criterio de la razón:

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{d_{j+1}^k(\hat{n}, p)}{d_j^k(\hat{n}, p)} \right| & = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{(j+1) d_{j+1}^k(\hat{n}, 0)}{j d_j^k(\hat{n}, 0)} \right| = \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(N+1)}, \\ & (\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (p = 0, 1, \dots, N+1), \end{aligned} \quad (\text{A.121})$$

que coincide con la razón de crecimiento de la serie geométrica (A.85), tal como sucede en el problema de conexión regular-irregular, es decir, cuando en la ecuación canónica la singularidad del origen es regular y la del infinito irregular.

A.3.2. Convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)}$, $Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)}$

La convergencia de las series $\Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)}$ se establece como en los casos precedentes, obteniendo sendas mayoraciones asintóticas de las soluciones de las recurrencias (2.270) y (2.340) verificadas por \hat{a}_s^τ y \hat{b}_n^τ respectivamente.

El conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.270) es (véase la nota 26)

$$\mathcal{P}_{2N-M+1} = \left\{ P_j''(j, K_j''); j = 0, 1, \dots, 2N - M + 1 \right\}, \quad (\text{A.122})$$

el diagrama de Newton-Puiseux correspondiente está formado entonces por dos segmentos

$$\mathcal{L}_0'' = \overline{P_0'' P_{-M-1}''}, \quad \mathcal{L}_1'' = \overline{P_{-M-1}'' P_{2N-M+1}''}, \quad (\text{A.123})$$

cuyos vértices y pendientes respectivas son:

$$P_0''(0, 0), \quad P_{-M-1}''(-M-1, 1), \quad P_{2N-M+1}''(2N-M+1, -1), \quad (\text{A.124})$$

$$q_0'' = \frac{1}{-M-1} > 0, \quad q_1'' = \frac{-1}{N+1} < 0. \quad (\text{A.125})$$

En la figura A.5 representamos el conjunto de Puiseux y el diagrama de Newton-Puiseux correspondientes a la recurrencia verificada por \hat{a}_s^τ en el caso particular $M = -2$, $N = 2$.

Para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$, los conjuntos de Kreuser correspondientes a uno y otro segmento están formados por las abscisas de los puntos de \mathcal{P}_{2N-M+1} que pertenecen a \mathcal{L}_0'' y a \mathcal{L}_1'' respectivamente, es decir,

$$I_0'' = \{0, -M-1\}, \quad I_1'' = \{-M-1, 2N-M+1\}. \quad (\text{A.126})$$

El polinomio característico de \mathcal{L}_0'' es entonces, para cada $\tau = 3, 4$, habida cuenta de (A.18),

$$\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,0)}(z) = \sum_{j \in I_0''} A_j^\tau z^{2N-M+1-j} = z^{2N+2} \left(z^{-M-1} - \frac{1}{2\lambda_\tau} \right), \quad (\text{A.127})$$

donde

$$\lambda_\tau \equiv \beta_{-M-1}^\tau = (g_{2M})^{1/2}. \quad (\text{A.128})$$

Las raíces de $\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,0)}(z)$ son

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N+2, \quad (\text{A.129})$$

y las $-M-1$ raíces complejas de $1/2\lambda_\tau$:

$$z_{L_0}^{(\tau,0)} = \sigma^{(\tau,0)} \exp\left(i\varphi_{L_0}^{(\tau,0)}\right), \quad (L_0 = 0, 1, \dots, -M-2), \quad (\text{A.130})$$

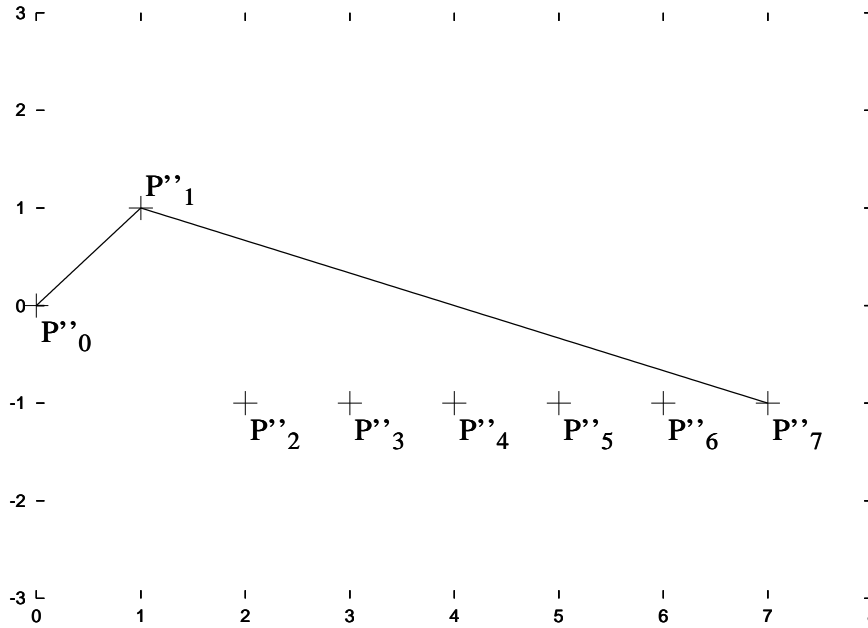


Figura A.5: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $\hat{a}_s^{(\tau)}$ en las expansiones asintóticas cuando $z \rightarrow 0$ de las soluciones formales de clase (b) de la ecuación canónica (2.246). Los valores de los parámetros de grado son $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q''_0 = 1$, $q''_1 = -1/3$.

donde

$$\sigma^{(\tau,0)} = \left| \frac{1}{2\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)}, \quad \varphi_{L_0}^{(\tau,0)} = \frac{\arg(1/2\lambda_\tau) + 2\pi L_0}{-M-1},$$

$$(L_0 = 0, 1, \dots, -M-2). \quad (\text{A.131})$$

Análogamente, el polinomio característico de \mathcal{L}_1'' es

$$\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,1)}(z) = \sum_{j \in I_1'} A_j^{(\tau)} z^{2N-M+1-j} = -\frac{1}{2\lambda_\tau} (z^{2N+2} - g_{2N}), \quad (\text{A.132})$$

donde

$$g_{2N} = (\lambda_k)^2 \equiv (\alpha_{N+1}^k)^2, \quad (k = 1, 2). \quad (\text{A.133})$$

Las raíces de $\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,1)}(z)$ son las $2N+2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$z_{L_1}^{(\tau,1)} = \sigma^{(\tau,1)} \exp(i\varphi_{L_1}^{(\tau,1)}), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, 2N+1), \quad (\text{A.134})$$

donde

$$\sigma^{(\tau,1)} = |g_{2N}|^{1/(2N+2)}, \quad \varphi_{L_1}^{(\tau,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_1}{2N+2},$$

$$(L_1 = 0, 1, \dots, 2N+1). \quad (\text{A.135})$$

Cuando $s \rightarrow +\infty$, las soluciones de la recurrencia (2.270) asociadas a \mathcal{L}_0'' dominan sobre las soluciones dependientes de \mathcal{L}_1'' . En estas condiciones, el teorema de Perron establece que toda solución $\hat{a}_s^{(\tau)}$ de la recurrencia verifica la mayoración siguiente:

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad M_A^{(\tau)} > 0 \quad \ni \\ \ni \quad & \left| \hat{a}_s^{(\tau)} \right| < M_A^{(\tau)} \left(\left| \frac{1}{2\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^s (s!)^{1/(-M-1)}, \\ & (s \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (\text{A.136})$$

El conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.340) verificada por $\hat{b}_n^{(\tau)}$ es (véase la nota 26)

$$\hat{\mathcal{P}}_{2N-2M} = \left\{ P_j'''(j, K_j'''); j = 0, 1, \dots, 2N - 2M \right\}, \quad (\text{A.137})$$

de manera que el diagrama de Newton-Puiseux correspondiente está formado por dos segmentos:

$$\hat{\mathcal{L}}_0''' = \overline{P_0''' P_{-2M-2}'''}, \quad \hat{\mathcal{L}}_1''' = \overline{P_{-2M-2}''' P_{2N-2M}'''}, \quad (\text{A.138})$$

cuyos vértices y pendientes respectivas son:

$$P_0'''(0, 0), \quad P_{-2M-2}'''(-2M - 2, 2), \quad P_{2N-2M}'''(2N - 2M, 0), \quad (\text{A.139})$$

$$\hat{q}_0''' = \frac{1}{-M-1} > 0, \quad \hat{q}_1''' = \frac{-1}{N+1} < 0, \quad (\text{A.140})$$

si se considera el comportamiento de las soluciones de la recurrencia cuando $n \rightarrow +\infty$. Ahora bien, cuando $z \rightarrow 0$, en el desarrollo (2.336) de $\hat{w}_{\eta, \tau}(z)$, cuyos coeficientes $\hat{b}_n^{(\tau)}$ verifican la recurrencia (2.340), dominan los términos correspondientes a los valores negativos del exponente n de la variable independiente z . Por consiguiente, en vez del comportamiento de $\hat{b}_n^{(\tau)}$ cuando $n \rightarrow +\infty$, debe considerarse el comportamiento de estos coeficientes cuando $n \rightarrow -\infty$ invirtiendo la ordenación de los elementos del conjunto de Puiseux (A.137) y, en consecuencia, la orientación de la línea poligonal de Newton-Puiseux, cuyos vértices son ahora $P_{2M-2N}'''(2M - 2N, 0)$, $P_{2M+2}'''(2M + 2, 2)$, $P_0'''(0, 0)$. Los segmentos y pendientes son entonces

$$\tilde{\mathcal{L}}_0''' = \overline{P_{2M-2N}''' P_{2M+2}'''}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_1''' = \overline{P_{2M+2}''' P_0'''}, \quad (\text{A.141})$$

$$\tilde{q}_0''' = -\tilde{q}_1''' = \frac{1}{N+1} > 0, \quad \tilde{q}_1''' = -\tilde{q}_0''' = \frac{1}{M+1} < 0. \quad (\text{A.142})$$

En la figura A.6 representamos el conjunto de Puiseux y el diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por $\hat{b}_n^{(\tau)}$ en el caso particular $N = 2$ y $M = -2$.

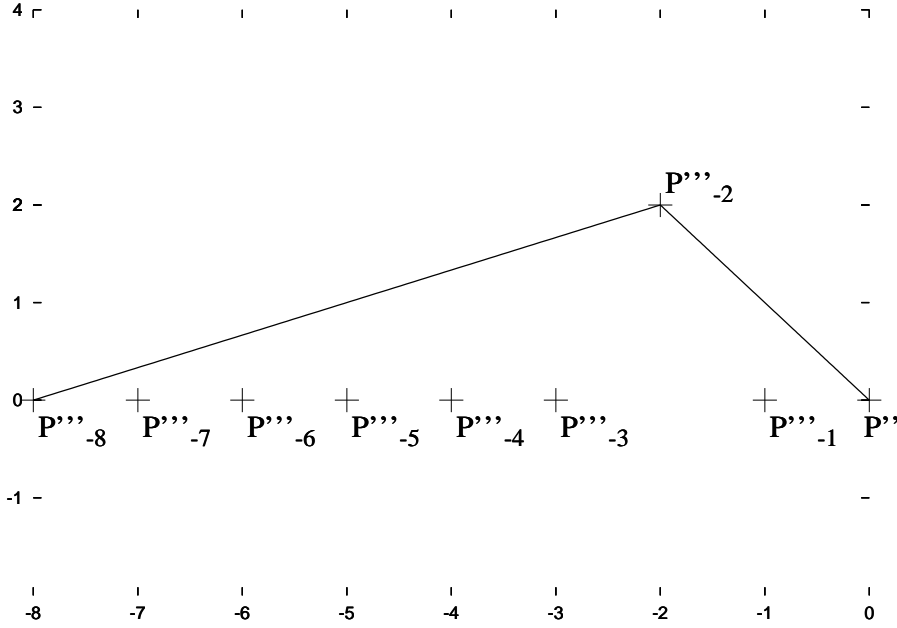


Figura A.6: Diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia verificada por los coeficientes $\hat{\delta}_n^{(\tau)}$ en la expansión de la función $\hat{w}_{\eta,\tau}(z)$ cuando los parámetros de grado del potencial en la ecuación canónica (2.246) toman los valores $M = -2$, $N = 2$. Las pendientes de los segmentos son $q_0'''' = 1/3$, $q_1'''' = -1$.

Los conjuntos de Kreuser correspondientes a $\hat{\mathcal{L}}_0''''$ y $\hat{\mathcal{L}}_1''''$ son

$$\hat{I}_0'''' = \{0, -2M - 2\}, \quad \hat{I}_1'''' = \{-2M - 2, 2N - 2M\}. \quad (\text{A.143})$$

El polinomio característico de $\hat{\mathcal{L}}_0''''$, i.e. de $\tilde{\mathcal{L}}_1''''$ es, habida cuenta de (A.18),

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,0)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_0''''} \hat{A}_j^\tau z^{2N-2M-j} = z^{2N+2} \left(z^{-2M-2} - \frac{1}{(\lambda_\tau)^2} \right), \quad (\text{A.144})$$

donde λ_τ se da en (A.128).

Las raíces de $\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,0)}$ son por tanto

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N + 2, \quad (\text{A.145})$$

y las $-2M - 2$ raíces complejas de $1/(\lambda_\tau)^2 = 1/g_{2M}$:

$$\hat{z}_{L_1}^{(\tau,0)} = \hat{\sigma}^{(\tau,0)} \exp\left(i\hat{\varphi}_{L_1}^{(\tau,0)}\right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3), \quad (\text{A.146})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(\tau,0)} = \left| \frac{1}{\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)}, \quad \hat{\varphi}_{L_1}^{(\tau,0)} = \frac{\arg(1/(\lambda_\tau)^2) + 2\pi L_1}{-2M - 2},$$

$$(L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3). \quad (\text{A.147})$$

De modo semejante obtenemos el polinomio característico de $\hat{\mathcal{L}}_1'''$, i.e. de $\tilde{\mathcal{L}}_0'''$:

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,1)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_1'''} \hat{A}_j^{(\tau)} z^{2N-2M-j} = -\frac{1}{g_{2M}} \left(z^{2N+2} - g_{2N} \right), \quad (\text{A.148})$$

donde $g_{2N} = (\lambda_k)^2$ según se estableció en (A.133).

Las raíces de $\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,1)}(z)$ son las $2N + 2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$\hat{z}_{L_2}^{(\tau,1)} = \hat{\sigma}^{(\tau,1)} \exp \left(i \hat{\varphi}_{L_2}^{(\tau,1)} \right), \quad (L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1), \quad (\text{A.149})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(\tau,1)} = |g_{2N}|^{1/(2N+2)}, \quad \hat{\varphi}_{L_2}^{(\tau,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_2}{2N + 2},$$

$$(L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1). \quad (\text{A.150})$$

Cuando $n \rightarrow -\infty$, solamente las soluciones de la recurrencia (2.340) correspondientes al segmento $\tilde{\mathcal{L}}_1'''$ tienen asegurada la convergencia. En estas condiciones, el teorema de Perron establece que toda solución aceptable $\hat{b}_n^{(\tau)}$ de la recurrencia verifica la mayoración

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M_B^{(\tau)} > 0 \quad \ni$$

$$\ni \left| \hat{b}_n^{(\tau)} \right| < M_B^{(\tau)} \left(\left| \frac{1}{\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^n ((-n)!)^{1/(M+1)},$$

$$(n \rightarrow -\infty). \quad (\text{A.151})$$

Combinando (A.136) con (A.151) obtenemos sendas mayoraciones de los términos generales de las series $\Omega_{\hat{n},q}^{(b,\tau)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(b,\tau)}$ introducidas en (2.333) y (2.334) respectivamente:

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \quad \exists \tilde{M}_\Omega^{(\tau)} > 0 \quad \ni \left| \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-j-M-1-q}^{(\tau)} \right| <$$

$$< \tilde{M}_\Omega^{(\tau)} \left(|\lambda_\tau|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^{-\hat{n}+M+1+q} \hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n} - M - 1, q),$$

$$(j \rightarrow +\infty), \quad (q = 0, 1, \dots, -M - 2), \quad (\text{A.152})$$

$$\forall \epsilon > 0, \quad \forall \hat{n} \in \mathbf{Z}, \quad \exists \tilde{M}_\Omega^{(\tau)} > 0 \quad \ni$$

$$\ni \left| j \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-j}^{(\tau)} \right| < \tilde{M}_\Omega^{(\tau)} \left(|\lambda_\tau|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^{-\hat{n}} j \hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n}, 0),$$

$$(j \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.153})$$

donde

$$\tilde{M}_\Omega^{(\tau)} \equiv \max \left\{ M_A^{(\tau)}, M_B^{(\tau)} \right\}, \quad (\text{A.154})$$

y para todo $q = 0, 1, \dots, -M - 2$, la cantidad

$$\hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n}, q) \equiv \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{1/(-M-1)} \right)^j \left(\frac{j!}{(j - \hat{n} + q)!} \right)^{1/(-M-1)},$$

$$(\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (\text{A.155})$$

verifica

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{\hat{d}_{j+1}^{(\tau)}(\hat{n} - M - 1, q)}{\hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n} - M - 1, q)} \right| = \lim_{j \rightarrow +\infty} \left| \frac{(j+1)\hat{d}_{j+1}^{(\tau)}(\hat{n}, 0)}{j\hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n}, 0)} \right| =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{1/(-M-1)}, \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}). \quad (\text{A.156})$$

Tomando el módulo en las series (2.333), (2.334) obtenemos

$$\left| \Omega_{\hat{n}, q}^{(b, \tau)} \right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left| \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-j-M-1-q}^{(\tau)} \right| <$$

$$< \tilde{M}_{\Omega}^{(\tau)} \left(|\lambda_{\tau}|^{1/(-M-1)} + \varepsilon \right)^{-\hat{n}+M+1+q} \sum_{j=0}^{+\infty} \hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n} - M - 1, q),$$

$$(\hat{n} \in \mathbf{Z}), \quad (q = 0, 1, \dots, -M - 2), \quad (\text{A.157})$$

$$\left| Q_{\hat{n}}^{(b, \tau)} \right| \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \left| j \hat{a}_j^{(\tau)} \hat{b}_{\hat{n}-j}^{(\tau)} \right| <$$

$$< \tilde{M}_{\Omega}^{(\tau)} \left(|\lambda_{\tau}|^{1/(-M-1)} + \varepsilon \right)^{-\hat{n}} \sum_{j=0}^{+\infty} j \hat{d}_j^{(\tau)}(\hat{n}, 0), \quad (\hat{n} \in \mathbf{Z}). \quad (\text{A.158})$$

Las expresiones (A.156), (A.157) y (A.158) ponen de manifiesto que las series $\Omega_{\hat{n}, q}^{(b, \tau)}$ y $Q_{\hat{n}}^{(b, \tau)}$ convergen a la velocidad de la serie geométrica

$$\mathcal{F}_M \equiv \sum_{j=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^{j/(-M-1)}, \quad (\text{A.159})$$

cuya razón de crecimiento es precisamente $\left(\frac{1}{2} \right)^{1/(-M-1)}$. Este resultado, junto con el correspondiente a las soluciones formales de clase (a) dado en (A.119), (A.120), (A.121), constituye la prueba de convergencia de nuestro método cuando el origen y el infinito son ambos puntos singulares irregulares de la ecuación canónica.

A.4. Notas

Nota 25. Describimos paso a paso el proceso que nos lleva a la mayoración (A.98) verificada por las soluciones $a_s^{(k)}$ de la recurrencia (2.259). La forma canónica de Perron-Kreuser (A.1) de esta recurrencia es, para cada $k = 1, 2$,

$$\sum_{j=0}^{N-2M-1} p_j^{(k)}(s) a_{s+N-2M-1-j}^{(k)} = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(a_0^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.160})$$

donde

$$p_0^{(k)}(s) = 1, \quad (\text{A.161})$$

$$p_j^{(k)}(s) = \frac{\tilde{\alpha}_{N-j-1}^{(k)} - 2\alpha_{N-j+1}^{(k)}(s + N - 2M - 1 - j)}{-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N - 2M - 1)},$$

$$(j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.162})$$

$$p_{N+1}^{(k)}(s) = \frac{\tilde{\alpha}_{-2}^{(k)} + (s - 2M - 2)(s + N - 2M - 1 - 2\alpha_0^{(k)})}{-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N - 2M - 1)}, \quad (\text{A.163})$$

$$p_j^{(k)}(s) = \frac{-g_{N-j-1}}{-2\alpha_{N+1}^{(k)}(s + N - 2M - 1)},$$

$$(j = N + 2, N + 3, \dots, N - 2M - 1), \quad (\text{A.164})$$

siendo $\tilde{\alpha}_j^{(k)}$ las funciones de $\alpha_j^{(k)}$ dadas en (2.260).

El comportamiento asintótico de los coeficientes funcionales $p_j^{(k)}(s)$ es por tanto

$$p_0^{(k)}(s) = 1, \quad (\text{A.165})$$

$$p_j^{(k)}(s) = A_j^{(k)} s^{K_j} (1 + o(1)), \quad (s \rightarrow +\infty),$$

$$(j = 1, 2, \dots, N - 2M - 1), \quad (\text{A.166})$$

donde para cada $k = 1, 2$

$$A_0^{(k)} = 1, \quad K_0 = 0, \quad (\text{A.167})$$

$$A_j^{(k)} = \frac{\alpha_{N-j+1}^{(k)}}{\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_j = 0, \quad (\text{si } \alpha_{N-j+1}^{(k)} \neq 0),$$

$$(j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.168})$$

$$A_j^{(k)} = -\frac{\tilde{\alpha}_{N-j-1}^{(k)}}{2\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_j = -1, \quad (\text{si } \alpha_{N-j+1}^{(k)} = 0 \text{ y } \tilde{\alpha}_{N-j-1}^{(k)} \neq 0),$$

$$(j = 1, 2, \dots, N), \quad (\text{A.169})$$

$$A_{N+1}^{(k)} = -\frac{1}{2\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_{N+1} = 1, \quad (\text{A.170})$$

$$A_j^{(k)} = \frac{g_{N-j-1}}{2\alpha_{N+1}^{(k)}}, \quad K_j = -1,$$

$$(j = N + 2, N + 3, \dots, N - 2M - 1), \quad (\text{A.171})$$

y debe tenerse en cuenta que $K_j = -\infty$ para todo j tal que $A_j^{(k)} = 0$.

El conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.259), (A.160) verificada por los $a_s^{(k)}$ es (recordar (A.7))

$$\mathcal{P}_{N-2M-1} = \{P_j(j, K_j); j = 0, 1, \dots, N - 2M - 1\}, \quad (\text{A.172})$$

del cual extraemos los vértices del diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia. El diagrama consiste en dos ($g = 2$) segmentos $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$: \mathcal{L}_0 conecta el vértice inicial $P_0(0, 0)$ con el punto de ordenada máxima $P_{N+1}(N + 1, 1)$ y \mathcal{L}_1 conecta a P_{N+1} con el vértice final $P_{N-2M-1}(N - 2M - 1, -1)$:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{P_0 P_{N+1}}, \quad \mathcal{L}_1 = \overline{P_{N+1} P_{N-2M-1}}, \quad (\text{A.173})$$

cuyas pendientes respectivas son

$$q_0 = \frac{1}{N + 1} > 0, \quad q_1 = \frac{1}{M + 1} < 0, \quad (\text{A.174})$$

para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$.

El conjunto de Kreuser de cada segmento (cfr. (A.17)), del cual depende el polinomio característico correspondiente, está formado por las abscisas de sus puntos extremos, únicos elementos del conjunto de Puiseux \mathcal{P}_{N-2M-1} que pertenecen al segmento:

$$I_0 = \{0, N + 1\}, \quad I_1 = \{N + 1, N - 2M - 1\}, \quad (\text{A.175})$$

donde $I_0 \equiv I_{N-2M-1}^{(0)}$, $I_1 \equiv I_{N-2M-1}^{(1)}$.

El polinomio característico del segmento \mathcal{L}_0 es, para cada $k = 1, 2$, habida cuenta de (A.18) y (A.175),

$$\mathcal{G}_{N-2M-1}^{(k,0)}(z) = \sum_{j \in I_0} A_j^{(k)} z^{N-2M-1-j} = z^{-2M-2} \left(z^{N+1} - \frac{1}{2\lambda_k} \right), \quad (\text{A.176})$$

cuyas raíces son:

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } -2M - 2, \quad (\text{A.177})$$

y las $N + 1$ raíces complejas de $1/2\lambda_k$:

$$z_{L_0}^{(k,0)} = \sigma^{(k,0)} \exp\left(i\varphi_{L_0}^{(k,0)}\right), \quad (L_0 = 0, 1, \dots, N), \quad (\text{A.178})$$

donde

$$\sigma^{(k,0)} = \left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)}, \quad \varphi_{L_0}^{(k,0)} = \frac{\arg(1/2\lambda_k) + 2\pi L_0}{N+1}, \quad (L_0 = 0, 1, \dots, N). \quad (\text{A.179})$$

Análogamente, el polinomio característico del segmento \mathcal{L}_1 es

$$\mathcal{G}_{N-2M-1}^{(k,1)}(z) = \sum_{j \in I_1} A_j^k z^{N-2M-1-j} = -\frac{1}{2\lambda_k} z^{-2M-2} + \frac{g_{2M}}{2\lambda_k}, \quad (\text{A.180})$$

cuyas raíces son las $-2M - 2$ raíces complejas de g_{2M} :

$$z_{L_1}^{(k,1)} = \sigma^{(k,1)} \exp\left(i\varphi_{L_1}^{(k,1)}\right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3), \quad (\text{A.181})$$

donde

$$\sigma^{(k,1)} = |g_{2M}|^{1/(-2M-2)}, \quad \varphi_{L_1}^{(k,1)} = \frac{\arg(g_{2M}) + 2\pi L_1}{-2M-2}, \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3). \quad (\text{A.182})$$

El teorema de Perron establece entonces que para cada $k = 1, 2$, existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (2.259), (A.160)

$$\mathcal{Y}_{N-2M-1}^k = \left\{ a_s^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, N - 2M - 1 \right\}, \quad (\text{A.183})$$

cuyas funciones pueden agruparse en $g = 2$ clases correspondientes a los dos segmentos \mathcal{L}_0 , \mathcal{L}_1 de la línea poligonal de Newton-Puiseux, a las que distinguimos mediante el índice $\tilde{\eta} = 0, 1$. Estas funciones verifican

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_A^{(k,\tilde{\eta})} > 0 \ni \left| a_{s,\tilde{\eta}}^{(k,j)} \right| < \hat{M}_A^{(k,\tilde{\eta})} \left(\sigma^{(k,\tilde{\eta})} + \epsilon \right)^s (s!)^{q_{\tilde{\eta}}}, \quad (s \geq 0). \quad (\text{A.184})$$

Ahora bien, cuando $s \rightarrow +\infty$, las soluciones $a_s^{(k,0)}$ asociadas al segmento \mathcal{L}_0 dominan sobre las $a_s^{(k,1)}$ correspondientes al segmento \mathcal{L}_1 . Por consiguiente, toda solución a_s^k de la recurrencia verifica la mayoración

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_A^k > 0 \ni \left| a_s^k \right| < \hat{M}_A^k \left(\left| \frac{1}{2\lambda_k} \right|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^s (s!)^{1/(N+1)}, \quad (s \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.185})$$

siendo $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^k = (g_{2N})^{1/2}$.

Describimos a continuación el comportamiento asintótico de los coeficientes $b_n^{(k)}$ que verifican la recurrencia (2.468) cuya forma canónica de Perron-Kreuser es, para cada $k = 1, 2$,

$$\sum_{j=0}^{2N-2M} \hat{p}_j^{(k)}(n) b_{n+2N-2M-j}^{(k)} = 0, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (b_0^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.186})$$

donde

$$\hat{p}_0^{(k)}(n) = 1, \quad (\text{A.187})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad (j = 1, 2, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.188})$$

$$\hat{p}_{-2M-2}^{(k)}(n) = \frac{(n+2N+2+\nu_k)(n+2N+1+\nu_k) + \hat{\varepsilon}_{a,-2}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad (\text{A.189})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \frac{\hat{\rho}_{a,j+2M+1}^{(k)}(n+2N-2M+\nu_k-j) + \hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad (j = -2M-1, -2M, \dots, N-2M-2), \quad (\text{A.190})$$

$$\hat{p}_{N-2M-1}^{(k)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,N-1}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad (\text{A.191})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad (j = N-2M, N-2M+1, \dots, 2N-2M), \quad (\text{A.192})$$

siendo $\hat{\rho}_{a,j}^{(k)}$, $\hat{\varepsilon}_{a,j}^{(k)}$ los parámetros en la ecuación diferencial (2.465) (ver notas 16 y 23).

Para cada $k = 1, 2$, el comportamiento asintótico de los coeficientes $\hat{p}_j^{(k)}(n)$ es por tanto

$$\hat{p}_0^{(k)}(n) = 1, \quad (\text{A.193})$$

$$\hat{p}_j^{(k)}(n) = \hat{A}_j^{(k)} n^{\hat{K}_j} (1+o(1)), \quad (|n| \rightarrow +\infty), \quad (j = 1, 2, \dots, 2N-2M), \quad (\text{A.194})$$

donde para cada $k = 1, 2$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_j = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.195})$$

$$\hat{A}_{-2M-2}^{(k)} = \frac{1}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_{-2M-2} = 2, \quad (\text{A.196})$$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \frac{\hat{\rho}_{a,j+2M+1}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_j = 1, \quad (j = -2M - 1, -2M, \dots, N - 2M - 2),$$

$$(\text{si } \hat{\rho}_{a,j+2M+1}^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.197})$$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_j = 0, \quad (j = -2M - 1, -2M, \dots, N - 2M - 2),$$

$$(\text{si } \hat{\rho}_{a,j+2M+1}^{(k)} = 0 \text{ y } \hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)} \neq 0), \quad (\text{A.198})$$

$$\hat{A}_{N-2M-1}^{(k)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,N-1}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_{N-2M-1} = 0, \quad (\text{A.199})$$

$$\hat{A}_j^{(k)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{a,j+2M}^{(k)}}{\hat{\varepsilon}_{a,2M}^{(k)}}, \quad \hat{K}_j = 0, \quad (j = N - 2M, N - 2M + 1, \dots, 2N - 2M), \quad (\text{A.200})$$

y ha de tenerse en cuenta que $\hat{K}_j = -\infty$ para todo j tal que $\hat{A}_j^{(k)} = 0$.

El conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.468), (A.186) verificada por $b_n^{(k)}$ es, de acuerdo con (A.7),

$$\mathcal{P}_{2N-2M} = \{P'_j(j, \hat{K}_j); j = 0, 1, \dots, 2N - 2M\}, \quad (\text{A.201})$$

del cual extraemos el diagrama de Newton-Puiseux formado en este caso por $g = 2$ segmentos $\hat{\mathcal{L}}'_0, \hat{\mathcal{L}}'_1$: $\hat{\mathcal{L}}'_0$ conecta el vértice inicial $P'_0(0, 0)$ con el vértice de ordenada máxima $P'_{-2M-2}(-2M - 2, 2)$, mientras $\hat{\mathcal{L}}'_1$ conecta a P'_{-2M-2} con el vértice final $P'_{2N-2M}(2N - 2M, 0)$:

$$\hat{\mathcal{L}}'_0 = \overline{P'_0 P'_{-2M-2}}, \quad \hat{\mathcal{L}}'_1 = \overline{P'_{-2M-2} P'_{2N-2M}}, \quad (\text{A.202})$$

cuyas pendientes respectivas son

$$q'_0 = \frac{1}{-M - 1} > 0, \quad q'_1 = -\frac{1}{N + 1} < 0, \quad (\text{A.203})$$

para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$.

Los conjuntos de Kreuser de uno y otro segmento son:

$$\hat{I}'_0 = \{0, -2M - 2\}, \quad \hat{I}'_1 = \{-2M - 2, 2N - 2M\}, \quad (\text{A.204})$$

donde hemos simplificado de nuevo la notación dada en (A.17) poniendo $\hat{I}'_{2N-2M} \equiv \hat{I}'_0, \hat{I}'_{2N-2M} \equiv \hat{I}'_1$.

El polinomio característico del segmento $\hat{\mathcal{L}}'_0$ es, para cada $k = 1, 2$, habida cuenta de (A.18), (A.101),

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(k,0)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}'_0} \hat{A}_j^{(k)} z^{2N-2M-j} = z^{2N+2} \left(z^{-2M-2} - \frac{1}{g_{2M}} \right), \quad (\text{A.205})$$

cuyas raíces son

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N + 2, \quad (\text{A.206})$$

y las $-2M - 2$ raíces complejas de $1/g_{2M}$:

$$\hat{z}_{L_1}^{(k,0)} = \hat{\sigma}^{(k,0)} \exp\left(i\hat{\varphi}_{L_1}^{(k,0)}\right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3), \quad (\text{A.207})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(k,0)} = \left| \frac{1}{g_{2M}} \right|^{1/(-2M-2)}, \quad \hat{\varphi}_{L_1}^{(k,0)} = \frac{\arg(1/g_{2M}) + 2\pi L_1}{-2M - 2},$$

$$(L_1 = 0, 1, \dots, -2M - 3). \quad (\text{A.208})$$

El polinomio característico del segmento $\hat{\mathcal{L}}'_1$ es análogamente

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(k,1)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_1} \hat{A}_j^{(k)} z^{2N-2M-j} = -\frac{1}{g_{2M}} \left(z^{2N+2} - g_{2N} \right), \quad (\text{A.209})$$

y sus raíces son las $2N + 2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$\hat{z}_{L_2}^{(k,1)} = \hat{\sigma}^{(k,1)} \exp\left(i\hat{\varphi}_{L_2}^{(k,1)}\right), \quad (L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1), \quad (\text{A.210})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(k,1)} = \left(|g_{2N}|^{1/2} \right)^{1/(N+1)}, \quad \hat{\varphi}_{L_2}^{(k,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_2}{2N + 2},$$

$$(L_2 = 0, 1, \dots, 2N + 1). \quad (\text{A.211})$$

En estas condiciones, el teorema de Perron establece que para cada $k = 1, 2$ existe un sistema fundamental de soluciones de la recurrencia (2.468), (A.186)

$$\hat{\mathcal{Y}}_{2N-2M}^{(k)} = \left\{ b_n^{(k,j)}; j = 1, 2, \dots, 2N - 2M \right\}, \quad (\text{A.212})$$

cuyas funciones pueden agruparse en $g = 2$ clases, que distinguimos mediante el índice $\tilde{\eta} = 0, 1$, correspondientes a los dos segmentos $\hat{\mathcal{L}}'_0, \hat{\mathcal{L}}'_1$ de la línea poligonal de Newton-Puiseux. Estas funciones verifican

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_B^{(k,\tilde{\eta})} > 0 \ni \left| b_{n,\tilde{\eta}}^{(k,j)} \right| < \hat{M}_B^{(k,\tilde{\eta})} \left(\hat{\sigma}^{(k,\tilde{\eta})} + \epsilon \right)^n (n!)^{\hat{q}_{\tilde{\eta}}},$$

$$(|n| \geq 0), \quad (\tilde{\eta} = 0, 1). \quad (\text{A.213})$$

A partir de (A.203), (A.213) se deduce que, cuando n tiende a infinito, solamente las soluciones $b_n^{(k,1)}$ asociadas al segmento $\hat{\mathcal{L}}'_1$ tienen asegurada la convergencia. Por consiguiente, las soluciones aceptables $b_n^{(k)}$ de la recurrencia (2.468) verifican la mayoración

$$\forall \epsilon > 0 \exists \hat{M}_B^{(k)} > 0 \ni \left| b_n^{(k)} \right| < \hat{M}_B^{(k)} \left(|\lambda_k|^{1/(N+1)} + \epsilon \right)^n (n!)^{-1/(N+1)},$$

$$(n \rightarrow +\infty), \quad (\text{A.214})$$

siendo $\lambda_k \equiv \alpha_{N+1}^{(k)} = (g_{2N})^{1/2}$.

Nota 26. Describimos a continuación las etapas sucesivas del proceso que nos lleva a establecer sendas mayoraciones asintóticas de las soluciones $\hat{a}_s^{(\tau)}$ de la recurrencia (2.270) y de las soluciones $\hat{b}_n^{(\tau)}$ de la recurrencia (2.340). El método se basa en la aplicación del teorema de Perron a una y otra recurrencia, siguiendo un recorrido paralelo al que describimos en la nota 25 para las soluciones $a_s^{(k)}$ de (2.259) y $b_n^{(k)}$ de (2.468).

Consideramos en primer lugar la recurrencia (2.270), (2.271) verificada por $\hat{a}_s^{(\tau)}$ cuya forma canónica de Perron-Kreuser es

$$\sum_{j=0}^{2N-M+1} p_j^{(\tau)}(s) \hat{a}_{s+2N-M+1-j}^{(\tau)} = 0, \quad (s = 0, 1, 2, \dots),$$

$$(\hat{a}_0^{(\tau)} \neq 0), \quad (\text{A.215})$$

donde

$$p_0^{(\tau)}(s) = 1, \quad (\text{A.216})$$

$$p_j^{(\tau)}(s) = \frac{\tilde{\beta}_{M-1+j}^{(\tau)} - 2\beta_{-M-1-j}^{(\tau)}(s + 2N - M + 1 - j)}{-2\beta_{-M-1}^{(\tau)}(s + 2N - M + 1)},$$

$$(j = 1, 2, \dots, -M - 2), \quad (\text{A.217})$$

$$p_{-M-1}^{(\tau)}(s) = \frac{\tilde{\beta}_{-2}^{(\tau)} + (s + 2N + 2)(s + 2N - M + 1 - 2\beta_0^{(\tau)})}{-2\beta_{-M-1}^{(\tau)}(s + 2N - M + 1)}, \quad (\text{A.218})$$

$$p_j^{(\tau)}(s) = \frac{-g_{M+j-1}}{-2\beta_{-M-1}^{(\tau)}(s + 2N - M + 1)},$$

$$(j = -M, -M + 1, \dots, 2N - M + 1), \quad (\text{A.219})$$

siendo $\tilde{\beta}_j^{(\tau)}$ las funciones de $\beta_j^{(\tau)}$ dadas en (2.271).

El comportamiento asintótico de los coeficientes funcionales $p_j^{(\tau)}(s)$ cuando $s \rightarrow +\infty$ es por tanto, para cada $\tau = 3, 4$,

$$p_0^{(\tau)}(s) = 1, \quad (\text{A.220})$$

$$p_j^{(\tau)}(s) = A_j^{(\tau)} s^{K_j''} (1 + o(1)), \quad (s \rightarrow +\infty),$$

$$(j = 1, 2, \dots, -M - 2, -M - 1, -M, -M + 1, \dots, 2N - M + 1), \quad (\text{A.221})$$

donde

$$A_j^{(\tau)} = \frac{\beta_{-M-1-j}^{(\tau)}}{\beta_{-M-1}^{(\tau)}}, \quad K_j'' = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, -M-2),$$

$$(si \beta_{-M-1-j}^{(\tau)} \neq 0), \quad (A.222)$$

$$A_j^{(\tau)} = \frac{\tilde{\beta}_{M-1+j}^{(\tau)}}{-2\beta_{-M-1}^{(\tau)}}, \quad K_j'' = -1, \quad (j = 0, 1, \dots, -M-2),$$

$$(si \beta_{-M-1-j}^{(\tau)} = 0 \text{ y } \tilde{\beta}_{M-1+j}^{(\tau)} \neq 0), \quad (A.223)$$

$$A_{-M-1}^{(\tau)} = \frac{1}{-2\beta_{-M-1}^{(\tau)}}, \quad K_{-M-1}'' = 1, \quad (A.224)$$

$$A_j^{(\tau)} = \frac{g_{M+j-1}}{2\beta_{-M-1}^{(\tau)}}, \quad K_j'' = -1, \quad (j = -M, -M+1, \dots, 2N-M+1),$$

$$(si g_{M+j-1} \neq 0), \quad (A.225)$$

donde $K_j'' = -\infty$ para todo j tal que $A_j^{(\tau)} = 0$.

El conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.270), (A.215) es por consiguiente

$$\mathcal{P}_{2N-M+1} = \{P_j''(j, K_j''); j = 0, 1, \dots, 2N-M+1\}, \quad (A.226)$$

del cual obtenemos el diagrama de Newton-Puiseux de la recurrencia, formado por dos segmentos

$$\mathcal{L}_0'' = \overline{P_0'' P_{-M-1}''}, \quad \mathcal{L}_1'' = \overline{P_{-M-1}'' P_{2N-M+1}''}, \quad (A.227)$$

cuyos vértices y pendientes respectivas son:

$$P_0''(0, 0), \quad P_{-M-1}''(-M-1, 1), \quad P_{2N-M+1}''(2N-M+1, -1), \quad (A.228)$$

$$q_0'' = \frac{1}{-M-1} > 0, \quad q_1'' = \frac{-1}{N+1} < 0. \quad (A.229)$$

Para todo $N = 0, 1, 2, \dots$ y todo $M = -2, -3, -4, \dots$, los conjuntos de Kreuser correspondientes a uno y otro segmento están formados por las abscisas de los puntos de \mathcal{P}_{2N-M+1} que pertenecen a \mathcal{L}_0'' y a \mathcal{L}_1'' respectivamente, es decir,

$$I_0'' = \{0, -M-1\}, \quad I_1'' = \{-M-1, 2N-M+1\}. \quad (A.230)$$

El polinomio característico de \mathcal{L}_0'' es entonces, para cada $\tau = 3, 4$, habida cuenta de (A.18),

$$\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,0)}(z) = \sum_{j \in I'_0} A_j^\tau z^{2N-M+1-j} = z^{2N+2} \left(z^{-M-1} - \frac{1}{2\lambda_\tau} \right), \quad (\text{A.231})$$

donde

$$\lambda_\tau \equiv \beta_{-M-1}^{(\tau)} = (g_{2M})^{1/2}. \quad (\text{A.232})$$

Las raíces de $\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,0)}(z)$ son

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N + 2, \quad (\text{A.233})$$

y las $-M - 1$ raíces complejas de $1/2\lambda_\tau$:

$$z_{L_0}^{(\tau,0)} = \sigma^{(\tau,0)} \exp \left(i\varphi_{L_0}^{(\tau,0)} \right), \quad (L_0 = 0, 1, \dots, -M - 2), \quad (\text{A.234})$$

donde

$$\sigma^{(\tau,0)} = \left| \frac{1}{2\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)}, \quad \varphi_{L_0}^{(\tau,0)} = \frac{\arg(1/2\lambda_\tau) + 2\pi L_0}{-M - 1}, \quad (L_0 = 0, 1, \dots, -M - 2). \quad (\text{A.235})$$

Análogamente, el polinomio característico de \mathcal{L}_1'' es

$$\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,1)}(z) = \sum_{j \in I'_1} A_j^\tau z^{2N-M+1-j} = -\frac{1}{2\lambda_\tau} \left(z^{2N+2} - g_{2N} \right), \quad (\text{A.236})$$

donde

$$g_{2N} = (\lambda_k)^2 \equiv \left(\alpha_{N+1}^k \right)^2, \quad (k = 1, 2). \quad (\text{A.237})$$

Las raíces de $\mathcal{G}_{2N-M+1}^{(\tau,1)}(z)$ son las $2N + 2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$z_{L_1}^{(\tau,1)} = \sigma^{(\tau,1)} \exp \left(i\varphi_{L_1}^{(\tau,1)} \right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, 2N + 1), \quad (\text{A.238})$$

donde

$$\sigma^{(\tau,1)} = |g_{2N}|^{1/(2N+2)}, \quad \varphi_{L_1}^{(\tau,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_1}{2N + 2}, \quad (L_1 = 0, 1, \dots, 2N + 1). \quad (\text{A.239})$$

Cuando $s \rightarrow +\infty$, las soluciones de la recurrencia (2.270) asociadas a \mathcal{L}_0'' dominan sobre las soluciones dependientes de \mathcal{L}_1'' . En estas condiciones, el teorema de Perron establece que toda solución $\hat{a}_s^{(\tau)}$ de la recurrencia verifica la mayoración siguiente:

$$\begin{aligned} & \forall \epsilon > 0, \quad \exists \quad M_A^{(\tau)} > 0 \quad \ni \\ & \ni \quad \left| \hat{a}_s^{(\tau)} \right| < M_A^{(\tau)} \left(\left| \frac{1}{2\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^s (s!)^{1/(-M-1)}, \\ & \hspace{15em} (s \rightarrow +\infty). \end{aligned} \quad (\text{A.240})$$

La forma canónica de Perron-Kreuser de la recurrencia (2.340) verificada por $\hat{b}_n^{(\tau)}$ es, para cada $\tau = 3, 4$,

$$\sum_{j=0}^{2N-2M} \hat{p}_j^{(\tau)}(n) \hat{b}_{n+2N-2M-j}^{(\tau)} = 0, \quad (n \in \mathbf{Z}), \quad (\hat{b}_0^{(\tau)} \neq 0), \quad (\text{A.241})$$

donde para cada $\tau = 3, 4$,

$$\hat{p}_0^{(\tau)}(n) = 1, \quad (\text{A.242})$$

$$\hat{p}_j^{(\tau)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad (j = 1, 2, \dots, -M-2), \quad (\text{A.243})$$

$$\hat{p}_j^{(\tau)}(n) = \frac{\hat{\rho}_{b,j+2M+1}^{(\tau)}(n + 2N - 2M + \nu_\tau - j) + \hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad (j = -M-1, -M, -M+1, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.244})$$

$$\hat{p}_{-2M-2}^{(\tau)}(n) = \frac{(n + 2N + 2 + \nu_\tau)(n + 2N + 1 + \nu_\tau) + \hat{\varepsilon}_{b,-2}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad (\text{A.245})$$

$$\hat{p}_j^{(\tau)}(n) = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad (j = -2M-1, -2M, -2M+1, \dots, 2N-2M). \quad (\text{A.246})$$

El comportamiento asintótico de los coeficientes funcionales $\hat{p}_j^{(\tau)}(n)$ cuando $|n| \rightarrow +\infty$ es por tanto, para cada $\tau = 3, 4$,

$$\hat{p}_0^{(\tau)}(n) = 1, \quad (\text{A.247})$$

$$\hat{p}_j^{(\tau)}(n) = \hat{A}_j^{(\tau)} n^{\hat{K}_j^{(\tau)}} (1 + o(1)), \quad (|n| \rightarrow +\infty), \quad (j = 1, 2, \dots, -M-2, -M-1, -M, -M+1, \dots, 2N-2M), \quad (\text{A.248})$$

donde

$$\hat{A}_j^{(\tau)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_j^{(\tau)} = 0, \quad (j = 0, 1, \dots, -M-2), \quad (\text{si } \hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)} \neq 0), \quad (\text{A.249})$$

$$\hat{A}_j^{(\tau)} = \frac{\hat{\rho}_{b,j+2M+1}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_j^{(\tau)} = 1, \quad (\text{si } \hat{\rho}_{b,j+2M+1}^{(\tau)} \neq 0), \quad (j = -M-1, -M, -M+1, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.250})$$

$$\hat{A}_j^{(\tau)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_j''' = 0, \quad (\text{si } \hat{\rho}_{b,j+2M+1}^{(\tau)} = 0 \text{ y } \hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)} \neq 0),$$

$$(j = -M - 1, -M, -M + 1, \dots, -2M - 3), \quad (\text{A.251})$$

$$\hat{A}_{-2M-2}^{(\tau)} = \frac{1}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_{-2M-2}''' = 2, \quad (\text{A.252})$$

$$\hat{A}_j^{(\tau)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_j''' = 0, \quad (\text{si } \hat{\varepsilon}_{b,j+2M}^{(\tau)} \neq 0),$$

$$(j = -2M - 1, -2M, -2M + 1, \dots, 2N - 2M), \quad (\text{A.253})$$

donde $\hat{K}_j''' = -\infty$ para todo j tal que $\hat{A}_j^{(\tau)} = 0$ y en (A.250) tenemos, cuando $j = -M - 1$,

$$\hat{\rho}_{b,M}^{(\tau)} = 0, \quad (\text{A.254})$$

$$\hat{A}_{-M-1}^{(\tau)} = \frac{\hat{\varepsilon}_{b,M-1}^{(\tau)}}{\hat{\varepsilon}_{b,2M}^{(\tau)}}, \quad \hat{K}_{-M-1}''' = 1, \quad (\text{si } \hat{\varepsilon}_{b,M-1}^{(\tau)} \neq 0),$$

$$\hat{A}_{-M-1}^{(\tau)} = 0, \quad \hat{K}_{-M-1}''' = -\infty, \quad (\text{si } \hat{\varepsilon}_{b,M-1}^{(\tau)} = 0), \quad (\text{A.255})$$

toda vez que si $\hat{\rho}_{b,M}^{(\tau)} = 0$, $\hat{A}_{-M-1}^{(\tau)}$ se expresa mediante (A.251) en lugar de (A.250).

A partir del conjunto de Puiseux de la recurrencia (2.340)

$$\hat{\mathcal{P}}_{2N-2M} = \{P_j'''(j, \hat{K}_j'''); j = 0, 1, \dots, 2N - 2M\}, \quad (\text{A.256})$$

obtenemos el diagrama de Newton-Puiseux de esta recurrencia, que está formado por dos segmentos:

$$\hat{\mathcal{L}}_0''' = \overline{P_0''' P_{-2M-2}'''}, \quad \hat{\mathcal{L}}_1''' = \overline{P_{-2M-2}''' P_{2N-2M}'''}, \quad (\text{A.257})$$

cuyos vértices y pendientes respectivas son:

$$P_0'''(0, 0), \quad P_{-2M-2}'''(-2M - 2, 2), \quad P_{2N-2M}'''(2N - 2M, 0), \quad (\text{A.258})$$

$$\hat{q}_0''' = \frac{1}{-M - 1} > 0, \quad \hat{q}_1''' = \frac{-1}{N + 1} < 0, \quad (\text{A.259})$$

si se considera el comportamiento de las soluciones de la recurrencia cuando $n \rightarrow +\infty$. Ahora bien, cuando $z \rightarrow 0$, en el desarrollo (2.336) de $\hat{w}_{\eta,\tau}(z)$, cuyos coeficientes $\hat{b}_n^{(\tau)}$ verifican la recurrencia (2.340), dominan los términos correspondientes a los valores negativos del exponente n de la variable independiente z . Por consiguiente, en vez del comportamiento de $\hat{b}_n^{(\tau)}$ cuando

$n \rightarrow +\infty$, debe considerarse el comportamiento de estos coeficientes cuando $n \rightarrow -\infty$ invirtiendo la ordenación de los elementos del conjunto de Puiseux (A.256) y, en consecuencia, la orientación de la línea poligonal de Newton-Puiseux, cuyos vértices son ahora $P_{2M-2N}'''(2M-2N, 0)$, $P_{2M+2}'''(2M+2, 2)$, $P_0'''(0, 0)$. Los segmentos y pendientes son entonces

$$\tilde{\mathcal{L}}_0''' = \overline{P_{2M-2N}''' P_{2M+2}'''}, \quad \tilde{\mathcal{L}}_1''' = \overline{P_{2M+2}''' P_0'''}, \quad (\text{A.260})$$

$$\tilde{q}_0''' = -\tilde{q}_1''' = \frac{1}{N+1} > 0, \quad \tilde{q}_1''' = -\tilde{q}_0''' = \frac{1}{M+1} < 0. \quad (\text{A.261})$$

Los conjuntos de Kreuser correspondientes a $\hat{\mathcal{L}}_0'''$ y $\hat{\mathcal{L}}_1'''$ son

$$\hat{I}_0''' = \{0, -2M-2\}, \quad \hat{I}_1''' = \{-2M-2, 2N-2M\}. \quad (\text{A.262})$$

El polinomio característico de $\hat{\mathcal{L}}_0'''$, i.e. de $\tilde{\mathcal{L}}_1'''$ es, habida cuenta de (A.18),

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,0)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_0'''} \hat{A}_j^\tau z^{2N-2M-j} = z^{2N+2} \left(z^{-2M-2} - \frac{1}{(\lambda_\tau)^2} \right), \quad (\text{A.263})$$

donde λ_τ se da en (A.232).

Las raíces de $\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,0)}$ son por tanto

$$z = 0 \text{ con multiplicidad } 2N+2, \quad (\text{A.264})$$

y las $-2M-2$ raíces complejas de $1/(\lambda_\tau)^2 = 1/g_{2M}$:

$$\hat{z}_{L_1}^{(\tau,0)} = \hat{\sigma}^{(\tau,0)} \exp\left(i\hat{\varphi}_{L_1}^{(\tau,0)}\right), \quad (L_1 = 0, 1, \dots, -2M-3), \quad (\text{A.265})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(\tau,0)} = \left| \frac{1}{\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)}, \quad \hat{\varphi}_{L_1}^{(\tau,0)} = \frac{\arg(1/(\lambda_\tau)^2) + 2\pi L_1}{-2M-2},$$

$$(L_1 = 0, 1, \dots, -2M-3). \quad (\text{A.266})$$

De modo semejante obtenemos el polinomio característico de $\hat{\mathcal{L}}_1'''$, i.e. de $\tilde{\mathcal{L}}_0'''$:

$$\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,1)}(z) = \sum_{j \in \hat{I}_1'''} \hat{A}_j^\tau z^{2N-2M-j} = -\frac{1}{g_{2M}} \left(z^{2N+2} - g_{2N} \right), \quad (\text{A.267})$$

donde $g_{2N} = (\lambda_k)^2$ según se estableció en (A.237).

Las raíces de $\hat{\mathcal{G}}_{2N-2M}^{(\tau,1)}$ son las $2N+2$ raíces complejas de g_{2N} :

$$\hat{z}_{L_2}^{(\tau,1)} = \hat{\sigma}^{(\tau,1)} \exp\left(i\hat{\varphi}_{L_2}^{(\tau,1)}\right), \quad (L_2 = 0, 1, \dots, 2N+1), \quad (\text{A.268})$$

donde

$$\hat{\sigma}^{(\tau,1)} = |g_{2N}|^{1/(2N+2)}, \quad \hat{\varphi}_{L_2}^{(\tau,1)} = \frac{\arg(g_{2N}) + 2\pi L_2}{2N+2},$$

$$(L_2 = 0, 1, \dots, 2N+1). \quad (\text{A.269})$$

Cuando $n \rightarrow -\infty$, solamente las soluciones de la recurrencia (2.340) correspondientes al segmento $\tilde{\mathcal{L}}_1'''$ tienen asegurada la convergencia. En estas condiciones, el teorema de Perron establece que toda solución aceptable $\hat{b}_n^{(\tau)}$ de la recurrencia verifica la mayoración

$$\forall \epsilon > 0, \quad \exists M_B^{(\tau)} > 0 \quad \ni$$

$$\ni \left| \hat{b}_n^{(\tau)} \right| < M_B^{(\tau)} \left(\left| \frac{1}{\lambda_\tau} \right|^{1/(-M-1)} + \epsilon \right)^n ((-n)!)^{1/(M+1)},$$

$$(n \rightarrow -\infty). \quad (\text{A.270})$$

Apéndice B

Índices de las soluciones multiplicativas en la vecindad de un punto singular irregular

El objeto de este apéndice es describir un método que determine los índices ρ_η y coeficientes $c_{n,\eta}$ ($\eta = 1, 2$) en las soluciones multiplicativas (2.250) de la ecuación canónica (2.246), (2.247) cuando $M = -2, -3, -4, \dots$ y la singularidad en $z = 0$ es irregular. La solución de este problema es más complicada que la del problema correspondiente, resuelto en la subsección 2.4.3, que se presenta en la ecuación canónica cuando $M = -1$ y la singularidad en el origen es regular.

Sabemos que, excepto para conjuntos particulares de valores de los parámetros g_j , la ecuación canónica (2.246)

$$\frac{d^2 u}{dz^2} - g(z)u = 0, \quad (z \in \mathbf{C}), \quad (\text{B.1})$$

donde

$$g(z) = \sum_{j=2M}^{2N} g_j z^j, \quad (g_{2M} \neq 0), \quad (g_{2N} \neq 0), \quad (\text{B.2})$$

admite un sistema fundamental de soluciones multiplicativas de la forma (2.250)

$$u_\eta(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,\eta} z^{n+\rho_\eta}, \quad (z \in \mathbf{C} \setminus \{0\}), \quad (\eta = 1, 2). \quad (\text{B.3})$$

La sustitución de (B.3) en (B.1) da lugar a la recurrencia (2.251), i.e. para cada $\eta = 1, 2$,

$$(n + \rho_\eta)(n + \rho_\eta - 1)c_{n,\eta} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta} = 0, \\ (n \in \mathbf{Z}), \quad (g_{2M} \neq 0), \quad (g_{2N} \neq 0), \quad (\text{B.4})$$

que consiste en un sistema infinito de ecuaciones homogéneas. Este sistema puede interpretarse como un problema no lineal de valor propio ρ_η tal que se verifica la condición

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n,\eta}|^2 < +\infty, \quad (\text{B.5})$$

suficiente para que

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} |c_{n,\eta}| = 0, \quad (\text{B.6})$$

y el sistema infinito (B.4) pueda reducirse por truncadura a un sistema finito donde el índice n toma valores enteros $-\mathcal{M} \leq n \leq \mathcal{N}$, siendo \mathcal{M} y \mathcal{N} enteros positivos suficientemente grandes para que la solución del problema finito sea una buena aproximación de la solución del problema infinito. Otra consecuencia de (B.5) es que los coeficientes $c_{n,\eta}$ pueden elegirse de modo que verifiquen la condición de normalización

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_{n,\eta}|^2 = 1, \quad (\text{B.7})$$

de la que resulta la condición de normalización truncada

$$\sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^* c_{n,\eta} = 1. \quad (\text{B.8})$$

El método de iteración de Newton permite obtener aproximaciones sucesivas de la solución del problema no lineal (B.4) procediendo en un número finito de etapas. A fin de distinguir entre sí las diferentes etapas utilizamos un índice (i) cuyo valor inicial es $i = 0$. La etapa de orden (i) consiste en pasar de una solución aproximada $\{\rho^{(i)}, c_n^{(i)}\}$ a otra $\{\rho^{(i+1)}, c_n^{(i+1)}\}$ resolviendo un sistema finito de ecuaciones que resulta de la linealización de (B.4) y (B.8).

La linealización de (B.4) se realiza siguiendo el procedimiento descrito por Naundorf en [44]. Para cada $\eta = 1, 2$, el miembro a la izquierda en (B.4) es la función

$$f_n(\rho_\eta, \{c_{n,\eta}\}) = (n + \rho_\eta)(n + \rho_\eta - 1)c_{n,\eta} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}, \quad (\text{B.9})$$

que depende linealmente de $\{c_{n,\eta}\}$. Dados $\{\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i)}\}\}$, la fórmula que linealiza su relación con $\{\rho_\eta^{(i+1)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\}\}$ es

$$f_n(\rho_\eta^{(i+1)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\}) \approx f_n(\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\}) + \frac{\partial f_n(\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i)}\})}{\partial \rho_\eta^{(i)}} (\rho_\eta^{(i+1)} - \rho_\eta^{(i)}), \quad (\text{B.10})$$

donde, habida cuenta de (B.9),

$$f_n \left(\rho_\eta^{(i+1)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\} \right) = (n + \rho_\eta^{(i+1)})(n + \rho_\eta^{(i+1)} - 1)c_{n,\eta}^{(i+1)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i+1)}, \quad (\text{B.11})$$

$$f_n \left(\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\} \right) = (n + \rho_\eta^{(i)})(n + \rho_\eta^{(i)} - 1)c_{n,\eta}^{(i+1)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i+1)}, \quad (\text{B.12})$$

$$f_n \left(\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i)}\} \right) = (n + \rho_\eta^{(i)})(n + \rho_\eta^{(i)} - 1)c_{n,\eta}^{(i)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i)}, \quad (\text{B.13})$$

$$\frac{\partial f_n \left(\rho_\eta^{(i)}, \{c_{n,\eta}^{(i)}\} \right)}{\partial \rho_\eta^{(i)}} = (2n - 1 + 2\rho_\eta^{(i)})c_n^{(i)}. \quad (\text{B.14})$$

Reemplazando los segundos miembros de (B.12) y (B.14) en el segundo miembro de (B.10) obtenemos

$$f_n \left(\rho_\eta^{(i+1)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\} \right) \approx (n + \rho_\eta^{(i)})(n + \rho_\eta^{(i)} - 1)c_{n,\eta}^{(i+1)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i+1)} + (2n - 1 + 2\rho_\eta^{(i)})c_{n,\eta}^{(i)}(\rho_\eta^{(i+1)} - \rho_\eta^{(i)}), \quad (\text{B.15})$$

de modo que la aproximación de orden $i + 1$ a la recurrencia (B.4), i.e.

$$f_n \left(\rho_\eta^{(i+1)}, \{c_{n,\eta}^{(i+1)}\} \right) = 0, \quad (\text{B.16})$$

adopta la forma explícita

$$(2n - 1 + 2\rho_\eta^{(i)})c_{n,\eta}^{(i)}(\rho_\eta^{(i+1)} - \rho_\eta^{(i)}) + (n + \rho_\eta^{(i)})(n + \rho_\eta^{(i)} - 1)c_{n,\eta}^{(i+1)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i+1)} = 0, \quad n = -\mathcal{M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mathcal{N}. \quad (\text{B.17})$$

El procedimiento de linealización de Naundorf se aplica también a la condición de normalización truncada (B.8) cuyo primer miembro es la función

$$h \left(\{c_{n,\eta}^*\}, \{c_{n,\eta}\} \right) = \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^* c_{n,\eta}, \quad (\text{B.18})$$

luego en los órdenes i e $i + 1$ se tiene

$$h \left(\{c_{n,\eta}^{(i)*}\}, \{c_{n,\eta}^{(i)}\} \right) = \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i)} = 1, \quad (\text{B.19})$$

$$h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i+1)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i+1)}\right\}\right) = \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i+1)*} c_{n,\eta}^{(i+1)} = 1. \quad (\text{B.20})$$

La ecuación que linealiza el paso de orden (i) es entonces

$$\begin{aligned} h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i+1)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i+1)}\right\}\right) &\approx h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i+1)}\right\}\right) + \\ &+ \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} \frac{\partial h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i)}\right\}\right)}{\partial c_{n,\eta}^{(i)}} \left(c_{n,\eta}^{(i+1)} - c_{n,\eta}^{(i)}\right), \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

donde

$$h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i+1)}\right\}\right) = \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i+1)}, \quad (\text{B.22})$$

$$\frac{\partial h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i)}\right\}\right)}{\partial c_{n,\eta}^{(i)}} = c_{n,\eta}^{(i)*}, \quad (n = -\mathcal{M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mathcal{N}). \quad (\text{B.23})$$

Llevando (B.22), (B.23) al segundo miembro de (B.21),

$$h\left(\left\{c_{n,\eta}^{(i+1)*}\right\}, \left\{c_{n,\eta}^{(i+1)}\right\}\right) \approx \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i+1)} + \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} \left(c_{n,\eta}^{(i+1)} - c_{n,\eta}^{(i)}\right), \quad (\text{B.24})$$

es decir, habida cuenta de (B.19), (B.20),

$$1 \approx 2 \sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i+1)} - 1, \quad (\text{B.25})$$

de donde

$$\sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i+1)} = 1. \quad (\text{B.26})$$

Así, de la linealización de (B.4) y (B.8) resulta el sistema finito de ecuaciones dado por (B.17), (B.26), es decir,

$$\begin{aligned} (2n - 1 + 2\rho_\eta^{(i)})c_{n,\eta}^{(i)}(\rho_\eta^{(i+1)} - \rho_\eta^{(i)}) + (n + \rho_\eta^{(i)})(n + \rho_\eta^{(i)} - 1)c_{n,\eta}^{(i+1)} + \\ + \sum_{j=2\mathcal{M}}^{2\mathcal{N}} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(i+1)} = 0, \quad (n = -\mathcal{M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mathcal{N}), \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

$$\sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} c_{n,\eta}^{(i)*} c_{n,\eta}^{(i+1)} = 1, \quad (\text{B.28})$$

donde $c_{m,\eta}^{(i)} = 0$ para todo $m < -\mathcal{M}$ o $m > \mathcal{N}$, según exige la condición de truncadura. El proceso de iteración se detiene cuando la diferencia

$(|\Delta\rho_\eta|, \{|\Delta c_{n,\eta}|\})$ entre dos soluciones consecutivas es suficientemente pequeña comparada con $(|\rho_\eta|, \{c_{n,\eta}\})$. La estabilidad de la solución así obtenida se verifica introduciéndola como valor inicial en un nuevo proceso de iteración con valores de \mathcal{M} , \mathcal{N} mayores que los utilizados en la iteración precedente.

En todo caso, los valores iniciales $\{\rho_\eta^{(0)}, \{c_{n,\eta}^{(0)}\}\}$ del proceso de iteración de Newton no deben ser muy diferentes a los valores verdaderos que se pretende aproximar. Un método que permite obtener los dos valores iniciales $\rho_1^{(0)}, \rho_2^{(0)}$ de los índices en las soluciones multiplicativas (B.3) de la ecuación canónica tiene su fundamento en la relación sencilla que tales índices guardan con los denominados *exponentes circuitales* λ_1, λ_2 . Dado un sistema fundamental de soluciones $\{u_a(z), u_b(z)\}$ de la ecuación canónica (B.1), no necesariamente iguales a las soluciones multiplicativas $\{u_1(z), u_2(z)\}$, la matriz funcional

$$V(z) = \begin{pmatrix} u_a(z) & u_b(z) \\ u'_a(z) & u'_b(z) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.29})$$

constituye una matriz solución fundamental de la ecuación diferencial vectorial de primer orden

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ g(z) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.30})$$

con $g(z)$ dada en (B.2), que se obtiene a partir de la ecuación canónica introduciendo las variables dependientes $(y_1, y_2) = (u, u')$. Cuando la variable independiente z describe un circuito completo alrededor del punto singular $z = 0$, la matriz $V(z)$ queda transformada en una matriz solución,

$$V^+(z) = V(z e^{i2\pi}), \quad (\text{B.31})$$

que es la prolongación de $V(z)$ mediante un circuito sobre z . Además, dada $V(z)$, existe una matriz \mathcal{C} no singular de constantes complejas, denominada *matriz circuital de $V(z)$ para el punto singular $z = 0$* ,

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.32})$$

de modo que se verifica la *relación circuital*

$$V^+(z) = V(z e^{i2\pi}) = V(z)\mathcal{C}. \quad (\text{B.33})$$

Aunque la matriz circuital depende de la matriz solución fundamental $V(z)$, los valores propios de \mathcal{C} son independientes de $V(z)$ porque todas las matrices circuitales para el mismo punto singular son semejantes y, en

consecuencia, todas ellas poseen el mismo espectro de valores propios. En particular, si los valores propios de \mathcal{C} son diferentes, $V^+(z)$ es también una matriz solución fundamental de (B.30). Los *exponentes circuitales* para el punto singular $z = 0$ de la ecuación canónica (B.1) son precisamente los valores propios λ_1, λ_2 de las matrices circuitales correspondientes a ese punto singular.

Los elementos de \mathcal{C} pueden calcularse integrando numéricamente la ecuación canónica (B.1) sobre el círculo unidad desde $z = \exp(0)$ hasta $z = \exp(i2\pi)$, para dos conjuntos independientes de valores iniciales de $u_a(z), u_b(z)$. La elección más sencilla es desde luego

$$\begin{aligned} u_a(e^0) &= 1, & u'_a(e^0) &= 0, \\ u_b(e^0) &= 0, & u'_b(e^0) &= 1. \end{aligned} \quad (\text{B.34})$$

Poniendo $z = e^0$ en (B.33) y teniendo en cuenta (B.29), (B.32),

$$\begin{pmatrix} u_a(e^{i2\pi}) & u_b(e^{i2\pi}) \\ u'_a(e^{i2\pi}) & u'_b(e^{i2\pi}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_a(e^0) & u_b(e^0) \\ u'_a(e^0) & u'_b(e^0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.35})$$

resultando de (B.34), (B.35) que

$$\begin{aligned} C_{11} &= u_a(e^{i2\pi}), & C_{12} &= u_b(e^{i2\pi}), \\ C_{21} &= u'_a(e^{i2\pi}), & C_{22} &= u'_b(e^{i2\pi}). \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

Los valores propios de \mathcal{C} son las raíces λ_1, λ_2 de su polinomio característico $\det(\mathcal{C} - \lambda I_2)$, (I_2 representa a la matriz identidad de orden 2), cuyo término independiente es $\det \mathcal{C} = \lambda_1 \lambda_2$, verificándose entonces la ecuación

$$\lambda^2 - (C_{11} + C_{22})\lambda + C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21} = 0, \quad (\text{B.37})$$

de donde

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(C_{11} + C_{22} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}C_{21}} \right), \quad (\text{B.38})$$

expresión de la que se obtienen dos valores diferentes de λ excepto para conjuntos de valores de los parámetros g_j en la ecuación canónica tales que $(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}C_{21} = 0$. En este caso, solamente existe una solución multiplicativa de la forma (B.3) y cualquier otra solución independiente de ella contiene términos logarítmicos.

Cuando los valores propios de \mathcal{C} son diferentes, la ecuación vectorial (B.30) posee una matriz solución fundamental $\tilde{V}(z)$ con una estructura particularmente sencilla, i.e.

$$\tilde{V}(z) = \mathcal{Q}(z) \cdot \text{diag}(z^{\rho_1}, z^{\rho_2}), \quad (\text{B.39})$$

donde

$$\rho_\eta = \frac{1}{2\pi i} \ln \lambda_\eta, \quad (\eta = 1, 2), \quad (\text{B.40})$$

siendo

$$\mathcal{Q}(z) = \begin{pmatrix} q_{11}(z) & q_{12}(z) \\ q_{21}(z) & q_{22}(z) \end{pmatrix} \quad (\text{B.41})$$

univaluada en una vecindad de $z = 0$, de modo que a

$$\tilde{V}(z) = \begin{pmatrix} q_{11}(z)z^{\rho_1} & q_{12}(z)z^{\rho_2} \\ q_{21}(z)z^{\rho_1} & q_{22}(z)z^{\rho_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.42})$$

corresponde el sistema fundamental (B.3) de soluciones multiplicativas de la ecuación canónica con índices ρ_1, ρ_2 . Los parámetros ρ_1, ρ_2 aparecen como exponentes de z en toda relación circuital para el punto singular $z = 0$, lo que justifica su denominación.

Los valores iniciales de los índices se obtienen finalmente combinando (B.38) y (B.40):

$$\rho^{(0)} = \frac{1}{2\pi i} \ln \left[\frac{1}{2} \left(C_{11} + C_{22} \pm \sqrt{(C_{11} - C_{22})^2 + 4C_{12}C_{21}} \right) \right], \quad (\text{B.43})$$

para una determinación dada del logaritmo, que puede tomarse exigiendo que

$$|\Re(\rho_\eta)| \leq \frac{1}{2}. \quad (\text{B.44})$$

A partir de (B.36) reescribimos el término independiente del polinomio característico de la matriz circuital \mathcal{C} como Wronskiano de las soluciones $\{u_a, u_b\}$ a las cuales corresponde:

$$\det \mathcal{C} = \lambda_1 \lambda_2 = \mathcal{W} [u_a(e^{i2\pi}), u_b(e^{i2\pi})]. \quad (\text{B.45})$$

Ahora bien, el Wronskiano de $\{u_a(z), u_b(z)\}$ es independiente de z , toda vez que en la ecuación canónica (B.1) falta el término en la primera derivada. Entonces, habida cuenta de (B.34),

$$\det \mathcal{C} = \mathcal{W} [u_a(z), u_b(z)] = \mathcal{W} [u_a(e^0), u_b(e^0)] = 1, \quad (\text{B.46})$$

de donde

$$\det \mathcal{W} [u_a, u_b] = \lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (\text{B.47})$$

Tomando logaritmos en (B.47),

$$\ln \lambda_1 + \ln \lambda_2 = 0, \quad (\text{B.48})$$

es decir, despejando $\ln \lambda_1, \ln \lambda_2$ en (B.40),

$$\rho_1 + \rho_2 = 0 \pmod{1}, \quad (\text{B.49})$$

ecuación que puede utilizarse como verificador en la integración numérica de la ecuación canónica sobre el círculo unidad.

Los valores iniciales $c_{n,\eta}^{(0)}$ pueden obtenerse como soluciones del sistema homogéneo de ecuaciones que resulta de tomar $i = -1$ en (B.27),

$$(2n - 1 + 2\rho_\eta^{(-1)})c_{n,\eta}^{(-1)}(\rho_\eta^{(0)} - \rho_\eta^{(-1)}) + (n + \rho_\eta^{(-1)})(n + \rho_\eta^{(-1)} - 1)c_{n,\eta}^{(0)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(0)} = 0, \quad (n = -\mathcal{M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mathcal{N}), \quad (\text{B.50})$$

es decir, poniendo $\rho_\eta^{(-1)} \approx \rho_\eta^{(0)}$, se tiene para cada $\eta = 1, 2$,

$$(n + \rho_\eta^{(0)})(n + \rho_\eta^{(0)} - 1)c_{n,\eta}^{(0)} + \sum_{j=2M}^{2N} -g_j c_{n-j-2,\eta}^{(0)} = 0, \quad (n = -\mathcal{M}, \dots, -1, 0, 1, \dots, \mathcal{N}), \quad (\text{B.51})$$

junto a la condición de normalización truncada

$$\sum_{n=-\mathcal{M}}^{\mathcal{N}} |c_{n,\eta}^{(0)}|^2 = 1. \quad (\text{B.52})$$

Además del método de iteración de Newton, damos noticia de un segundo método para obtener ρ y c_n cuya eficiencia numérica, pendiente de verificación, tenemos intención de experimentar. Este es el método de Hill de solución de la ecuación diferencial que lleva su nombre (ver [65, p.414 a 417]). El fundamento de este procedimiento consiste en dotar a la recurrencia (B.4) de la forma matricial que corresponde a un sistema lineal de infinitas ecuaciones e incógnitas c_n :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_{mn} c_n = 0, \quad (m, n \in \mathbf{Z}), \quad (\text{B.53})$$

donde para todo $m, n \in \mathbf{Z}$

$$\begin{aligned} A_{mm} &= \frac{\Theta_{0,m}}{m^2 - g_{-2} - 1/4}, \\ A_{mn} &= \frac{\theta_{m-n}}{m^2 - g_{-2} - 1/4}, \quad (n \neq m), \quad (\bar{\nu}_1(m) \leq n \leq \bar{\nu}_2(m)), \\ A_{mn} &= 0, \quad (n \neq m), \quad (n < \bar{\nu}_1(m) \text{ ó } n > \bar{\nu}_2(m)), \end{aligned} \quad (\text{B.54})$$

siendo para cada $M = -2, -3, -4, \dots$ y $N = 0, 1, 2, \dots$ dados:

$$\Theta_{0,m} \equiv (m + \rho)(m + \rho - 1) - g_{-2}, \quad (m \in \mathbf{Z}), \quad (\text{B.55})$$

$$\theta_{m-n} \equiv \begin{cases} -g_{m-n-2} & \text{si } \bar{\nu}_1(m) \leq n \leq \bar{\nu}_2(m), & (m, n \in \mathbf{Z}), \\ 0 & \text{si } n < \bar{\nu}_1(m) \text{ ó } n > \bar{\nu}_2(m), & (m, n \in \mathbf{Z}), \end{cases} \quad (\text{B.56})$$

$$\bar{\nu}_1(m) = m - 2N - 2, \quad \bar{\nu}_2(m) = m - 2M - 2, \quad (m \in \mathbf{Z}). \quad (\text{B.57})$$

Los valores de ρ se obtienen entonces como soluciones de la ecuación trascendente

$$\sin^2 \left[\pi \left(\rho - \frac{1}{2} \right) \right] = \Delta \left(\frac{1}{2} \right) \sin^2 \left(\pi \sqrt{\frac{1}{4} + g_{-2}} \right), \quad (\text{B.58})$$

que expresa la compatibilidad del sistema lineal homogéneo (B.53) cuyo determinante es $\Delta(\rho)$.

Los coeficientes c_n en las expansiones (B.3) de las soluciones multiplicativas se obtienen, hasta un orden $\omega = 1, 2, 3, \dots$ dado, resolviendo el sistema homogéneo de rango $2\omega + 1$ extraído del sistema infinito (B.53) cuyo término central es $A_{00}c_0$ y cuyas incógnitas son c_m ($m = -\omega, -\omega + 1, \dots, -1, 0, 1, \dots, \omega - 1, \omega$), verificándose la proporción

$$\frac{c_{-\omega}}{\Delta_{(-\omega)}} = \frac{c_{-\omega+1}}{\Delta_{(-\omega+1)}} = \dots = \frac{c_0}{\Delta_{(0)}} = \dots = \frac{c_{\omega-1}}{\Delta_{(\omega-1)}} = \frac{c_\omega}{\Delta_{(\omega)}}, \quad (\text{B.59})$$

siendo $\Delta_{(p)}$ ($p = -\omega, -\omega + 1, \dots, \omega$) el cofactor correspondiente al elemento de matriz $A_{\omega p}$ en la matriz $[A_{mn}]_{-\omega \leq m, n \leq \omega}$.

Bibliografía

- [1] J. Abad, F. J. Gómez, J. Sesma, *Numer. Algor.* (2008) 33.
- [2] M. Abramowitz, A. I. Stegun (eds.), *Handbook of mathematical functions*, Dover Pub. Inc., New York 1972.
- [3] V. C. Aguilera-Navarro, G. A. Estévez R. Guardiola, *J. Math. Phys.* (1990) 31.
- [4] V. C. Aguilera-Navarro, E. Ley Koo, *Int. J. Theor. Phys.* (1997) 36.
- [5] P. Amore, A. Aranda, A. De Pace, J. A. López, *Phys. Lett. A* (2004) 329.
- [6] G.A. Arteca, F.M. Fernández, E.A. Castro, *Lecture notes in Chemistry*, Vol. 53, *Large order perturbation theory and summation methods in quantum mechanics*, Springer, Berlin 1990.
- [7] R. Balsa, M. Plo, J. G. Esteve, A. F. Pacheco, *Phys. Rev. D* 28 (1983) 1945.
- [8] E. W. Barnes, On functions defined by simple types of hypergeometric series, *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 20 (1906) 253.
- [9] C. M. Bender, G. V. Dunne, *J. Math. Phys.* 37, (1996) 6.
- [10] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev.* 184 (1969) 1231.
- [11] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. Lett.* 27 (1971) 461.
- [12] C. M. Bender, T. T. Wu, *Phys. Rev. D* 7 (1973) 1620.
- [13] N. Bleistein, R. A. Handelsman, *Asymptotic expansions of integrals*, Dover Pub. Inc., New York 1986.
- [14] E. Buendía, F. J. Gálvez, A. Puertas, *J. Phys. A: Math. Gen.* 28 (1995) 6731.
- [15] N. G. De Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, Dover Pub. Inc., New York 1978.

- [16] R. B. Dingle, *Asymptotic expansions: their derivation and interpretation*, Academic Press, New York 1973.
- [17] J. L. Domenech-Garret, M. A. Sanchís Lozano, *Comp. Phys. Commun.* 180 (2009) 768.
- [18] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover Pub. Inc., New York 1956.
- [19] F.M. Fernández, R. Guardiola, *J. Phys. A* 26 (1993) 7169.
- [20] F.M. Fernández, *Phys. Lett. A* 166 (1992) 173.
- [21] F.M. Fernández, *Phys. Lett. A* 203 (1995) 275.
- [22] F. Finkel, A. González-López, M. A. Rodríguez, *J. Math. Phys.* 37 (1996) 3954.
- [23] S. Flügge, *Practical Quantum Mechanics*, Springer, New York 1974.
- [24] A. Galindo, L. Abellanas, *Métodos matemáticos de la Física*, Zaragoza 1973.
- [25] F. J. Gómez, M. F. Rañada and J. Sesma, *J. Math. Phys.* 27 (1986) 552.
- [26] F. J. Gómez and J. Sesma, *J. Comp. Phys.* 115 (1994) 296.
- [27] F. J. Gómez and J. Sesma, *Phys. Lett. A* 219 (1996) 187.
- [28] F. J. Gómez and J. Sesma, *Phys. Lett. A* 270 (2000) 20.
- [29] F. J. Gómez and J. Sesma, *Phys. Lett. A* 286 (2001) 395.
- [30] F. J. Gómez and J. Sesma, A new strategy to find bound states in anharmonic oscillators, en *Encuentro de Física Fundamental "Alberto Galindo"* (2004) 253.
- [31] F. J. Gómez and J. Sesma, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (2005) 3193.
- [32] F. J. Gómez and J. Sesma, *J. Comp. and Appl. Math.* 207 (2007) 291.
- [33] F. J. Gómez and J. Sesma, *J. Phys. A: Math. Theor.* 43 (2010) 1.
- [34] L. Gil, M.A. Ramos, A. Bringer, U. Buchenau, *Phys. Rev. Lett.* 70 (1993) 182.
- [35] J. Greensite, Some current approaches to the confinement problem, *Acta Physica Polonica B* 40 (2009) 3355.
- [36] R. Guardiola, M. A. Solís, J. Ros, *Nuovo Cimento B* 107 (1992) 713.

- [37] Oliver Heaviside, *Electromagnetic theory* Vol. II 1899.
- [38] J. R. Klauder, *Science* 199 (1978) 735.
- [39] M. Kohno, *Hiroshima Math. J.* 4 (1974) 293.
- [40] V. A. Miransky, *Dynamical Symmetry Breaking in Quantum Field Theories*, World Scientific, Singapore 1993.
- [41] S. N. Mukherjee, R. Nag, S. Sanyal, T. Moril, J. Morishita, M. Tsuge, *Phys. Rep.* 231 (1993) 201.
- [42] A. Nanayakkara, V. Bandara, *Can. J. Phys.* 80 (2002) 959.
- [43] F. Naundorf, *SIAM J. Math. Anal.* 7 (1976) 157.
- [44] F. Naundorf, *ZAMM* 57 (1977) 47.
- [45] F. W. J. Olver, *Asymptotics and Special Functions*, Academic Press, New York 1974.
- [46] S. Özçelik, M. Simsek, *Phys. Lett. A* 152 (1991) 145.
- [47] O. Perron, Über lineare Differenzgleichungen und eine Anwendung auf linear Differentialgleichungen mit Polynomkoeffizienten, *Math. Z.* 72 (1959) 16.
- [48] H. Poincaré, *Acta Math.* 8 (1886) 295.
- [49] J. Rey Pastor y A. De Castro Brzezicki, *Funciones de Bessel, teoría matemática y aplicaciones a la Ciencia y a la Técnica*, Publicaciones del Instituto de Cálculo del Consejo Superior de Investigaciones Científicas, editorial Dossat, Madrid 1958.
- [50] J. M. Richard, *Phys. Rep.* 212 (1992) 1.
- [51] A. Ronveaux (ed.), *Heun's Differential Equations*. Oxford University Press, Oxford 1995.
- [52] A. K. Roy, *Phys. Lett. A* 321 (2004) 231.
- [53] N. Saad, R. L. Hall, Q. D. Katatbeh, *J. Math. Phys.* 46 (2005) 022104.
- [54] L. I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Co., Singapore 1968.
- [55] D. Schmidt, G. Wolf, Double confluent Heun equation. In: A. Ronveaux (ed.), *Heun's Differential Equations*, Oxford University Press, Oxford 1995.

- [56] J. Sesma, Desarrollos asintóticos y problemas de Mecánica Cuántica, en *Algunas cuestiones de Ciencia*, J. Atencia Carrizo (ed.), Prensas Universitarias de Zaragoza, 2007, pp. 519 – 532.
- [57] B. Simon and A. Dicke, *Ann. Phys.* 58 (1970) 76.
- [58] S. Y. Slayyanov and W. Lay, *Special Functions*, a unified theory based on singularities, Oxford University Press, Oxford 2000.
- [59] Th. Stieltjes, *Ann. de l'Éc. Norm. Sup.* 3 (1886) 201.
- [60] G. G. Stokes, *Mathematical and Physical Papers*, Cambridge University Press, Cambridge 1904, reprinted 2009.
- [61] A. Turbiner, *Sov. Phys. JETP* 67 (1988) 230.
- [62] A. V. Turbiner, *Commun. Math. Phys.* 118 (1988) 467.
- [63] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1922, reprinted 1996.
- [64] R. B. White, *Asymptotic analysis of differential equations*, Imperial College Press, London 2005.
- [65] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A course of modern analysis*, Cambridge University Press, Cambridge 1927, reprinted 1996.
- [66] H. S. Wilf, *Mathematics for the Physical Sciences*, Dover Pub. Inc., New York 1978.
- [67] F. J. Yndurain, *The Theory of Quark and Gluon Interactions*, Springer Verlag, Berlin 1993.
- [68] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Oxford University Press, Oxford 1996.
- [69] M. Znojil, *J. Math. Phys.* 30 (1989) 23.
- [70] U. Zürcher, T. Keyes, *Phys. Rev. E* 55 (1997) 6917.