

Anexos

Anexos A

Materiales Básicos

Los materiales básicos son aquellos con *BSDF* sencilla de calcular y cuya combinación da lugar a la gran mayoría del resto de materiales, estando entre ellos el referente al objetivo de este estudio.

Como materiales básicos nos encontramos el material difuso, el material conductor (especular) y el material dieléctrico (reflexión y refracción), diferenciándose como se ha comentado previamente en el comportamiento de la luz cuando incide sobre dicho material.

Los materiales de origen difuso son aquellos que reflejan la luz a partes iguales por toda la hemiesfera tal y resuelven el factor f_r con la ecuación A.1 siendo k_d el coeficiente difuso que indica la cantidad de luz reflejada por el material difuso y π la hemiesfera sobre la que se trazan todos los rayos de salida.

$$f_r = \frac{k_d}{\pi} \quad (\text{A.1})$$

En la Figura A.1 se ilustra el comportamiento de un material difuso y un ejemplo del mismo.

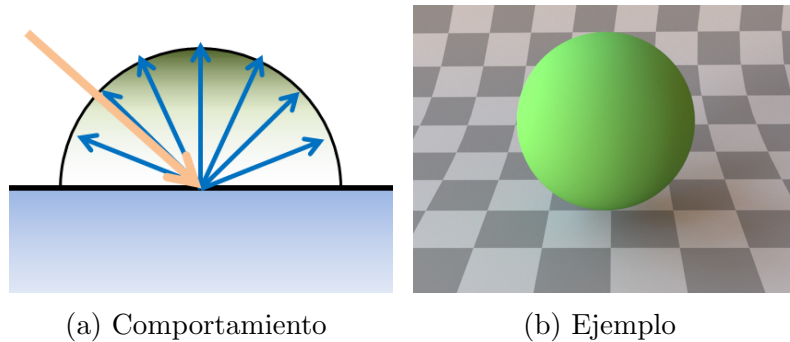


Figura A.1: Material difuso; comportamiento de la luz al intersectar con él y ejemplo

Los materiales conductores (especulares) son aquellos que reflejan la luz de manera perfecta, es decir, el ángulo del rayo de salida es el espejo (con respecto a la normal de la geometría) al ángulo del rayo de entrada, siguiendo la siguiente ecuación:

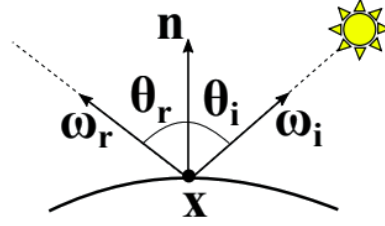


Figura A.2: Ilustración de reflexión perfecta

$$\theta_r = \theta_i \quad (\text{A.2})$$

Este tipo de materiales resuelven el factor f_r con la ecuación A.3 siendo δ una función con valor uno para un parámetro de entrada específico y 0 para todos los demas; y $w_i \cdot n$ un factor encargado de anular el factor idéntico en la *Ecuación de Render* pues la dirección a la fuente de luz carece de importancia en estos materiales ya que el rayo saliente solo tiene una dirección posible.

$$f_r = \frac{\delta_r(w_i)}{w_i \cdot n} \quad (\text{A.3})$$

En la Figura A.3 se muestra a mano izquierda el comportamiento de la capa y a mano derecha un ejemplo de la misma.

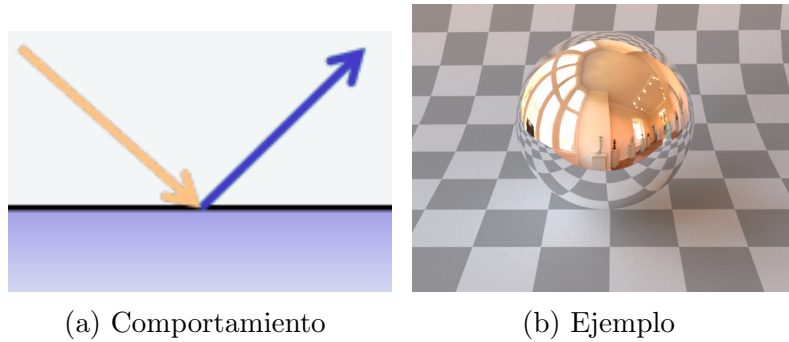


Figura A.3: Material especular; comportamiento de la luz al intersectar con él y ejemplo

Acabando con los 3 materiales básicos se encuentran aquellos denominados dieléctricos, esto es, que parte de la luz se ve reflejada y otra parte se ve refractada -transmitida- como sucede por ejemplo en las esferas de cristal.

Al propagarse la luz por dos medios separados por una capa de material dieléctrico hay que tener en cuenta el llamado índice de refracción, que se define como el cociente de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en el medio sobre el que se quiera calcular ($n = \frac{c}{v}$) y cuyo uso es necesario para el cálculo del ángulo con el que el rayo se ve refractado.

Concretamente el uso de estos índices de refracción se encuentra en la *Ley de Snell*; ley que dados sendos índices de refracción pertenecientes a dos medios y el ángulo de

entrada, posibilita el cálculo del ángulo con el que el rayo se ve refractado. Siendo n el índice de refracción del medio indicado por su subíndice y θ los ángulos, se tiene que dada la imagen A.4 los cálculos de los ángulos vía *Ley de Snell* quedarían como en la ecuación A.4.

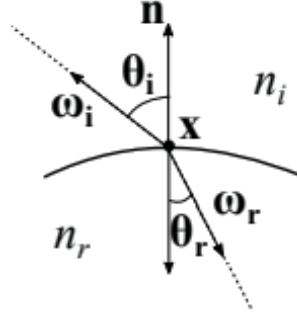


Figura A.4: Refracción perfecta (no existe en la realidad)

$$n_i \sin \theta_i = n_r \sin \theta_r \quad (\text{A.4})$$

En este tipo de material dieléctrico no basta con propagar los rayos de luz de la manera que indican las ecuaciones, sino que también hay que tener en cuenta la conservación de energía de forma más específica, es decir, la suma de energía del rayo reflejado y refractado ha de ser igual a la del rayo incidente y en ningún caso puede llegar a superarla. Es por ello que hay que usar las ecuaciones de *Fresnel*, las cuales relacionan las amplitudes de las ondas (cantidad de energía) reflejadas y refractadas en función de la amplitud de la onda (cantidad de energía) incidente. Antes de exponer dichas ecuaciones hay que saber qué es la luz s-polarizada y la p-polarizada:

- s-polarizada: la onda se propaga perpendicularmente, es decir, cambia de plano al perpendicular.
- p-polarizada: la onda se propaga paralelamente, es decir, se mantiene en el mismo plano.

Con esto en mente, y siguiendo la nomenclatura de la imagen A.4, a continuación se establecen las ecuaciones siendo r el coeficiente de amplitud reflejado y t el refractado -transmitido-, y con los subíndices indicando si es p-polarizado o s-polarizado:

$$r_s = \frac{n_i \cos \theta_i - n_r \cos \theta_r}{n_i \cos \theta_i + n_r \cos \theta_r}$$

$$t_s = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_i + n_r \cos \theta_r}$$

$$r_p = \frac{n_r \cos \theta_i - n_i \cos \theta_r}{n_i \cos \theta_r + n_r \cos \theta_i}$$

$$t_p = \frac{2n_i \cos \theta_i}{n_i \cos \theta_r + n_r \cos \theta_i} \quad (\text{A.5})$$

Para la resolución del factor f_r en materiales dieléctricos se usa la ecuación A.6 donde el primer sumando representa la parte especular multiplicada por su coeficiente especular calculado con las ecuaciones de *Fresnel* (A.5) y el segundo la parte transmitida multiplicada por el coeficiente de transmisión calculado igualmente por las ecuaciones de *Fresnel* (A.5). Estos coeficientes se calculan con *Fresnel* (A.5) de manera que $k_s = \frac{r_s + r_t}{2}$ y $k_t = \frac{t_s + t_t}{2}$ pues se asume misma cantidad de energía p-polarizada y s-polarizada.

$$f_r = k_s(w_i) \frac{\delta_r(w_i)}{w_i \cdot n} + k_t(w_i) \frac{\delta_t(w_i)}{w_i \cdot n} \quad (\text{A.6})$$

A continuación en la Figura A.5 se ilustra el comportamiento de un material dieléctrico y a su derecha el ejemplo de uno con un índice de refracción interno igual al del diamante (2.419):

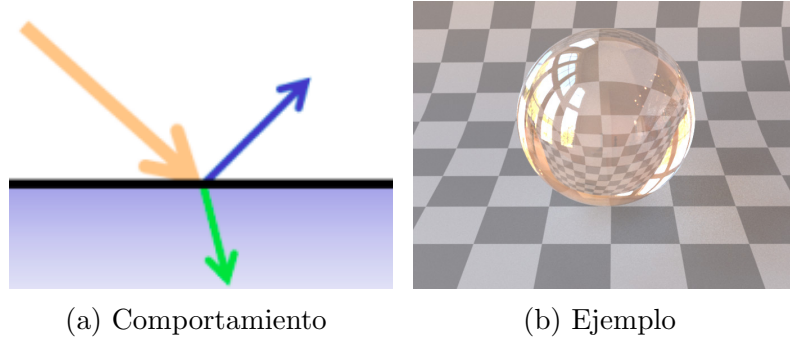


Figura A.5: Material dieléctrico; comportamiento de la luz al intersectar con él y ejemplo

Anexos B

Coloración y Características Estructurales en Serpientes

B.1. Características Generales

Las serpientes poseen diferentes características tanto a nivel macro-estructural como a nivel micro-estructural, cuyas propiedades están dotadas de un interés notable para este estudio [5, 6].

Hablando de la macro-estructura de las serpientes nos encontramos que estas, al contrario que una gran cantidad de seres vivos, poseen escamas con patrones estructurales de gran interés. En primer lugar hay que centrarse en la división más genérica por capas, la epidermis y la dermis. La primera de ellas es la capa exterior de la escama y por tanto la que impacta directamente con el medio, por lo que es más robusta; la segunda de ellas es por ende la interna y en la que se encuentran los vasos capilares y diversas glándulas. Dado que lo que interesa en este trabajo es el modelado de apariencia, es importante el estudio más a fondo de la capa exterior, es decir, la epidermis. Para un modelado de apariencia correcto es necesario el conocimiento de dos aspectos fundamentales sobre esta capa; el primero de ellos aborda el patrón que siguen las escamas, pues este difiere dependiendo de especies variando tanto la forma como la unión entre las mismas; el segundo se basa en la división en subcapas de la epidermis que nombradas de exterior a interior se obtiene: capa *Oberhäutchen*, capa β -layer, capa *mesos-layer*, capa α -layer, capa *lacunar tissue* y por ultimo capa *clear layer* tal y como se presenta en la Figura B.1. Como se ve, la capa *Oberhäutchen* es la exterior por lo que la micro-estructura se va a estudiar sobre ella.

Con esta división establecida es de fundamental interés llevar a cabo un estudio tanto a nivel macro-estructural como micro-estructural de la especie *Xenopeltis Unicolor* desde la cual se va a generar un modelo de apariencia, por lo que en la siguiente sub-sección se estudia senda estructura.

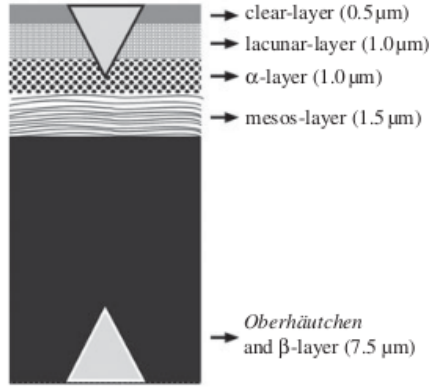


Figura B.1: Diagrama de las capas de la epidermis en serpientes [6]

B.2. *Xenopeltis Unicolor*

La serpiente *Xenopeltis Unicolor* es la especie sujeta a estudio y cuya apariencia se quiere modelar. Para dicho fin es importante conocer tanto su macro-estructura, para un correcto modelado de su patrón de escamas, como su micro-estructura para un modelado preciso de los colores iridiscentes obtenidos [14].

El estudio de la macro-estructura se centra en el patrón que siguen las escamas. Este estudio ha sido principalmente de origen visual, y las conclusiones obtenidas son que tal y como se puede ver en la Figura B.2 las escamas vistas en sí mismas poseen formas hexagonales con ligeras irregularidades (no son hexágonos regulares), mientras que vistas en conjunto se puede observar que estas forman un patrón simple; filas perfectamente encajadas de sendos hexágonos los cuales no llegan a tocarse entre ellos por mínimas separaciones.

Con la macro-estructura establecida ya se tiene el patrón de escamas a seguir durante la modelación, por lo que ahora es el turno del estudio de la micro-estructura, de gran importancia para la coloración de la serpiente.

La iridiscencia mostrada a la derecha de la Figura B.2 se obtiene gracias a la micro-estructura que posee la serpiente *Xenopeltis Unicolor*. Esta micro-estructura se basa en la existencia de iridóforos en la capa superior de las escamas del reptil (recordemos denominada *Oberhäutchen*); estos iridóforos constan de pequeñas láminas cristalinas que reflejan y refractan la luz, dando lugar a que las ondas de luz interfieran y por ende se modifiquen creando estos colores tan llamativos que se pueden llegar a ver. Si se tiene en cuenta lo mencionado en la sección de *Coloración estructural* 2.1, se ve que la descripción de los iridóforos encaja con la obtenida en la referente a *Interferencia de Capa Fina*.

Cabe destacar que debajo de estos denominados iridóforos se encuentra una capa de pigmentos oscura que otorga ese color ennegrecido a las escamas cuando la iridiscencia es menor o nula. Cuando la luz penetra por esta capa lo hace por un espacio reducido hasta incidir sobre el fondo de la misma, momento en el cual la luz rebota y comienza su camino a la superficie. Durante el camino por esta capa la luz sufre la denominada absorción, es decir, pierde energía. Se tiene pues aquí que esta capa de pigmentos oscura se puede dividir en dos, una superficial que modele la absorción y una segunda interior que modele el fondo de la misma y sea la encargada de aportar el color natural de la serpiente.



Figura B.2: Sección aumentada de la Figura 1.1

Anexos C

Interferencia de Capa Fina

Interferencia de Ondas

Para entender este fenómeno, es necesario saber lo que es la interferencia de ondas, por qué se produce y qué genera. La interferencia de ondas sucede cuando un par de ondas se encuentran por el espacio, esto hace que ambas se superpongan generando una onda resultante formada por la suma de ambas superpuestas, por lo que es necesario tener en cuenta tanto la amplitud de sendas ondas como la fase en la que se encuentran.

En primer lugar existe la interferencia de ondas destructiva, esta se da cuando ambas ondas tienen la misma amplitud pero están en contra fase tal y como se puede ver en la imagen C.1. El resultado es la anulación de la ondas, es decir, la amplitud de la onda resultante es cero. Vease que si no tuviesen la misma amplitud la onda no se destruiría hasta el punto de anularse.

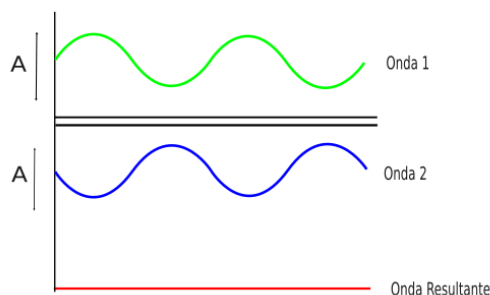


Figura C.1: Ondas en contrafase creando una interferencia destructiva

Por otro lado existen las ondas constructivas, dadas cuando ambas ondas superpuestas se encuentran en la misma fase tal y como se puede ver en la imagen C.2. Lo que sucede en este tipo de interferencia es que al estar en fase la suma de las ondas hace que la resultante obtenga un aumento de amplitud siendo este la suma de ambas.

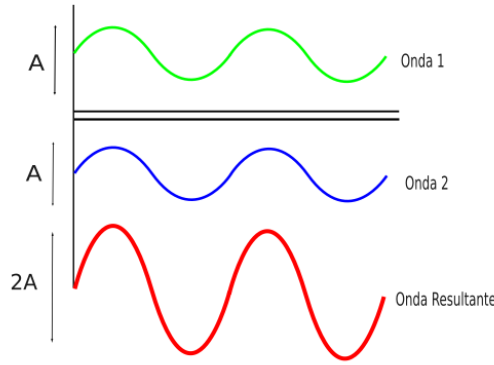


Figura C.2: Ondas en fase creando una interferencia constructiva

Para poder llevar a cabo los cálculos de interferencia de ondas es necesario formularlas. Una onda es matemáticamente representada por la ecuación C.1 donde A es la amplitud de onda, w es la frecuencia angular, t es el instante de tiempo y ϕ la fase de la onda.

$$y(t) = Ae^{i(wt+\phi)} \quad (\text{C.1})$$

Esta representación de números complejos no es tan habitual pero tiene una explicación. Dada la imagen C.3, si se establece z como el número complejo $z = b + ia$ se puede calcular por trigonometría básica que $b = r \cos \theta$ y $a = r \sin \theta$. Lo que implica que si se sustituyen a y b en la ecuación del número complejo quedaría $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$. Por tanto, dada la fórmula de *Euler* (C.2) se tiene que $z = re^{i\theta}$, fórmula en la que se basa la representación de ondas vista en la ecuación C.1.

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta \quad (\text{C.2})$$

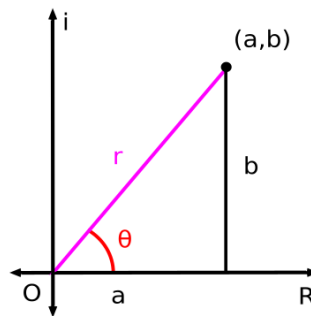


Figura C.3: Representación gráfica de un número complejo

Dada esta formulación, el cálculo de la onda resultante por la superposición de otras dos se puede calcular como la suma de dos ondas representadas con la fórmula C.1.

Con la interferencia de ondas establecida, se puede ver que los rebotes dentro de la capa que genera la *Interferencia de Capa Fina* van a hacer que la amplitud de onda cambie y por tanto la cantidad de energía que esta posee. Como se ha comentado anteriormente este cálculo de interferencia se lleva a cabo con ondas de misma longitud de onda, lo que quiere decir que se calcula para cada color con el que se quiera renderizar la imagen en cuestión, teniendo en este caso el sistema RGB se calcula entonces la cantidad de energía restante para cada color; va a ser esto lo que produzca esos patrones de colores.

Interferencia de Capa Fina

Una vez se ha explicado qué es la interferencia de ondas, se va a ver cómo se produce en *Interferencia de Capa Fina*. Vease que lo que se quiere obtener es la amplitud para cada canal del espectro RGB, pues esto dará la cantidad de energía restante en cada color.

Establezcamos que se tienen 3 materiales numerados; el material 0 es el material externo; el 1 corresponde al material intermedio; y por último el 2 corresponde al material interno. Con esta numeración, se va a establecer una nomenclatura necesaria:

- δ : representa la profundidad de la capa en cuestión.
- n : representa el índice de refracción de la capa en cuestión (cabe destacar que dos capas consecutivas han de diferir en este parámetro).
- θ : representa el ángulo de incidencia del rayo por capa.

Sabiendo que por la *Ley de Snell* (A.4) se pueden calcular los ángulos θ_k de incidencia en cada capa, estos no van a suponer un problema pues su cálculo va a ser constante. También se tiene que por las ecuaciones de *Fresnel* (A.5) se puede calcular la amplitud de onda resultante reflejada y refractada -transmitida- por lo que se puede calcular de manera constante la cantidad de energía en cada caso. Para relacionar las ecuaciones de *Fresnel* (A.5) con cada medio en cuestión, se va a establecer que $r_{i|j}$ es el coeficiente de amplitud reflejado del medio i al j con la polarización requerida y lo mismo pero referente a la refracción con $t_{i|j}$.

Como caso base de interferencia de ondas se encuentra el que se muestra en la Figura C.4 en el que la onda incidente refracta del medio 0 al 1, refleja del medio 1 al

2 y seguidamente del 1 al 0 y concluye refractandose del medio 1 al 2. En resumen se puede ver 4 puntos de intersección con las capas, en dos de ellos se refracta (primero y último) y en los dos restantes se refleja (segundo y tercero). Por las ecuaciones de *Fresnel* en cada punto la energía se ve dividida entre la reflejada y la refractada por lo que el cálculo de la energía en una intersección dada es el producto de las ecuaciones de *Fresnel* siguiendo el mismo camino que la onda en cuestión, lo cual se resuelve en la siguiente ecuación:

$$t_{0|1} r_{1|2} r_{0|1} t_{1|2} = t_{0|1} t_{1|2} r_{1|0} r_{1|2}$$

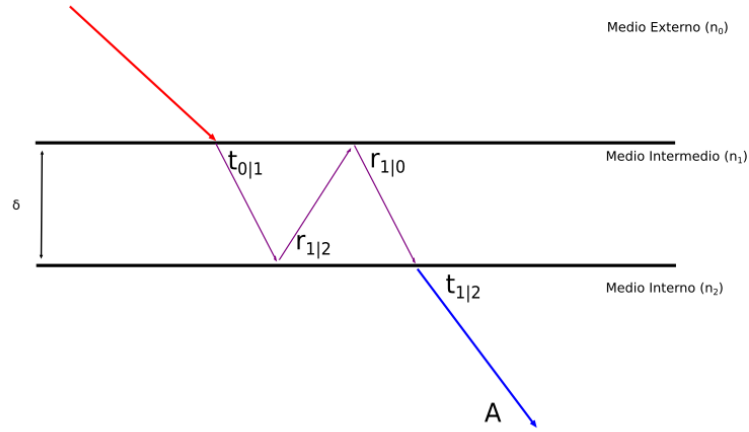


Figura C.4: Interferencia de capa fina caso base

Por tanto denotando A_k como la amplitud de la onda k transmitida al medio interno, se puede ver que el número de refracciones que ocurren durante su camino son siempre dos, la de entrada al medio intermedio y la de entrada al medio interno; mientras que el número de reflexiones varía dependiendo de la k de manera que en $k+1$ hay únicamente dos más que en k una del medio 1 al 2 y otra del medio 1 al 0 sucediéndose siempre el mismo patrón como se puede ver en la Figura C.5. Al sucederse dos reflexiones más y estas ser entre los mismos medios se tiene que $A_{k+1} = A_k * r_{1|0} * r_{1|2}$, desembocando esto en la siguiente ecuación para k rebotes:

$$A_k = t_{0|1} t_{1|2} r_{1|0}^k r_{1|2}^k$$

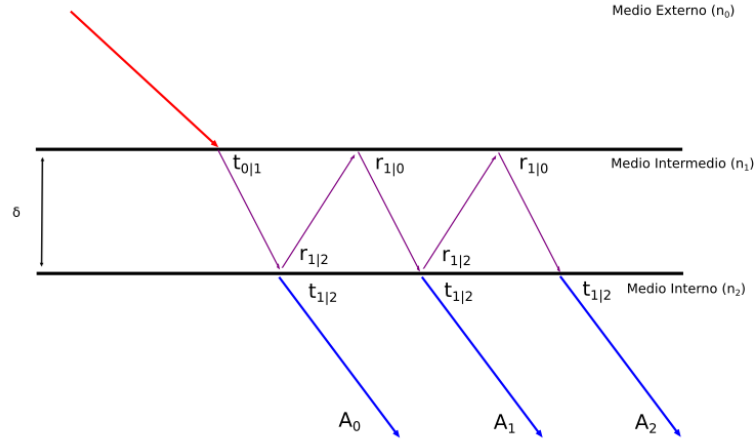


Figura C.5: Interferencia de capa fina caso general

Con esto se tiene el resultado de la amplitud refractada. Además, como se ha comentado en la sección referente a interferencia de ondas (ver en C) la fase en la que se encuentren ambas ondas al superponerse es importante. Si se tiene en cuenta que k es la k -ésima onda transmitida y se denota ϕ_k como su fase, la siguiente fórmula C.3 da el resultado de la fase en la que se encuentra dicha onda.

$$\phi_k = k \left[\frac{2\pi}{\lambda} (2n_1 \delta \cos \theta_1) + \Delta \right] \quad (C.3)$$

En la fórmula C.3 cada símbolo es constante dependiendo de la capa en la que se sitúa y significa:

- λ : longitud de onda, constante pues previamente comentado que se realiza para cada color del espectro RGB de manera individual.
- Δ : cantidad de cambio de fase en reflexión. Teniendo en cuenta que el índice de refracción es una medida de la densidad de un medio, se puede calcular esta constante con ello.

$$\Delta_{i|j} = \begin{cases} 0 & \text{si } n_i > n_j, \\ \pi & \text{si } n_i < n_j, \end{cases}$$

Y por tanto al ser reflejada dos veces antes de ser transmitida se tiene la ecuación:

$$\Delta = \Delta_{1|0} + \Delta_{1|2}$$

- 1 : el subíndice 1 de las capas implica que se tiene en cuenta la capa intermedia, desde la que pasan a la interior.

Como las ondas transmitidas se encuentran en un medio diferente al de incidencia hay que tener en cuenta el ratio de índices de refracción debido a la diferencia de los

mismos y el ratio de cosenos debido al cambio de ángulo de la luz refractada para la conservación de energía tal y como se muestra en la siguiente ecuación:

$$\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_0} \quad (C.4)$$

Una vez se tiene el cálculo de la amplitud, de la fase y del ratio de conservación de energía, el resultado final es la ecuación siguiente en la que el primer factor corresponde al ratio de conservación y el segundo calcula la interferencia de ondas para k rebotes siguiendo la formulación vista de las ondas:

$$I_T = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} A_k e^{i\phi^k} \right|^2$$

Que simplificada se queda en:

$$I_T = \left(\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_0 \cos \theta_0} \right) \frac{|t_{0|1} t_{1|2}|^2}{|r_{1|0} r_{1|2}|^2 - 2r_{1|0} r_{1|2} \cos \phi + 1} \quad (C.5)$$

Y como hay que tener en cuenta la conservación de energía se tiene:

$$I_T + I_R = 1 \quad (C.6)$$

Una vez resuelto esto se ha resuelto el problema tratado, concretamente se han obtenido los coeficientes de refracción -transmisión- I_T y reflexión I_R representados en la Figura C.6, es decir, la cantidad de luz reflejada y refractada -transmitida-, más concretamente la amplitud de la onda reflejada o refractada -transmitida- con respecto a la incidente.

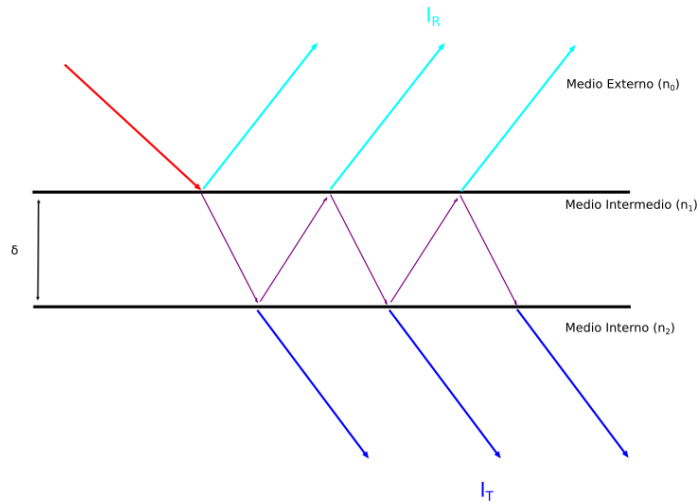


Figura C.6: Interferencia de capa fina con el resultado de sus ondas reflejadas y transmitidas

Anexos D

Path Tracing y Position-Free Monte Carlo

D.1. Path Tracing

Este método de simulación del transporte de luz es el usado durante el trabajo, lo cual quiere decir que todas las imágenes obtenidas lo han sido gracias al uso de *Path Tracing*, por lo que es importante tener unos conocimientos básicos sobre ello [7].

Definición de Path

Path Tracing es una técnica basada en trazado de rayos, anteriormente comentado en la sección 2.3. La gran característica de este tipo de simulación es que se simula un solo camino del rayo denominado *path*, obteniendo en cada intersección una dirección aleatoria de salida que corresponda con el material en cuestión hasta que se encuentre una fuente de luz o se absorba por completo. En la Figura D.3 se ve el ejemplo de un *path*.

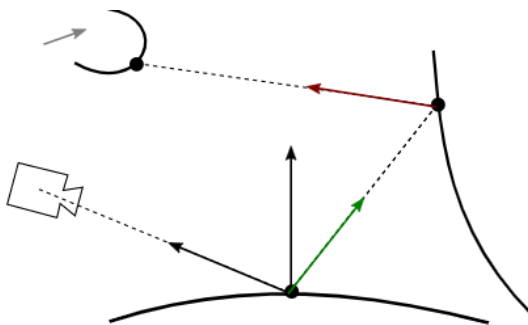


Figura D.1: Ejemplo de un *Path*; se puede ver como este sigue un solo camino rebotando en los materiales sin dividirse en todos los posibles rayos hasta una última intersección

D.1.1. Path Integral

Para la resolución de todo el conjunto de *paths* que se trazan en una imagen en el algoritmo *Path Tracing*, se va a denotar un *path* con sus k puntos de intersección de la manera $\bar{x} = (x_0, \dots, x_k)$, siendo x_n cada punto de intersección, por lo que en resumen viene definido por un conjunto de segmentos. Con ello, la ecuación de la resolución de la radiancia en *Path Tracing* queda de la manera que se ve en la ecuación D.1, donde I es la radiancia resultante, Ω es el conjunto de *paths*, f es la contribución del *path* en cuestión y μ es la medida del producto de las areas de intersección de cada una de sendo *path*.

$$I = \int_{\Omega} f(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (D.1)$$

La contribución de cada *path* denotada con f en la ecuación anterior (D.1) viene dada por la resolución de la *Ecuación de Render* (2.1) para cada *path*. Por tanto, la resolución del factor f para un único *path* viene dada por la expresión D.2 donde $L_e(x_k)$ es la luz emitida por el último objeto intersectado que será siempre una fuente de luz o la absorción completa y por tanto cero; y el productorio indica la resolución recursiva del *path* siendo que el factor L_i de la *Ecuación de Render* (2.1) viene dado por la contribución de la siguiente intersección del *path*, por lo que se van acumulando multiplicaciones hasta llegar al objeto emisor de luz o a la absorción.

$$f(\bar{x}) = L_e(x_k) * \left(\prod_{j=1}^{k-1} f_r(x, w_{ij}, w_{oj}) * |n_j \cdot w_{ij}| \right) \quad (D.2)$$

D.1.2. Monte Carlo

La integral denominada *Path Integral* (D.1) introducida anteriormente es una integral cuyo rango está en Ω , es decir, todos los posibles *paths* en la imagen. La resolución de tal integral es de una magnitud cuantiosa por lo que su resolución ha de basarse en una técnica de resolución de integrales numéricas de manera aproximada.

Monte Carlo es una técnica aproximación de expresiones matemáticas complejas como por ejemplo la integral nombrada. Este método se basa en la obtención de puntos a evaluar aleatorios denominados muestras para la resolución de dichas integrales con el fin de obtener de esa manera la resolución aproximada. Vease que la resolución de la integral de la Figura D.2a aplicando el método de *Monte Carlo* se vería resuelta de la manera vista en la Figura D.2b. Por tanto, la resolución de una integral por el método de *Monte Carlo* viene dada por la Fórmula D.3 donde N el número de muestras utilizadas y $prob(x_i)$ es la función de distribución de probabilidad usada para la obtención de muestras también denominada *pdf* (*probability density function*).

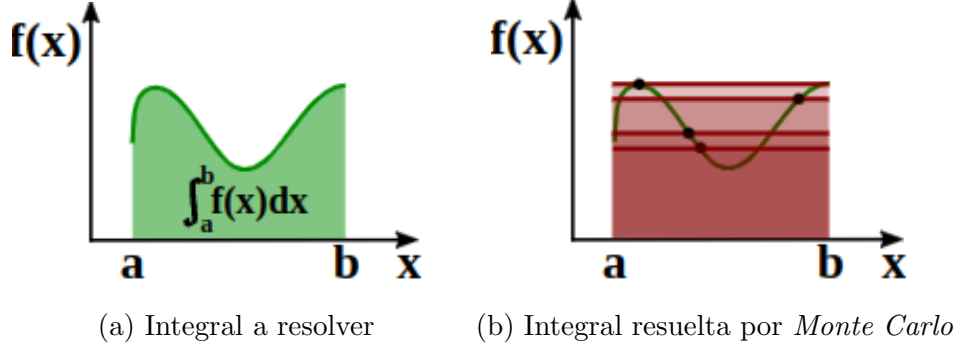


Figura D.2: Ejemplo de uso del método *Monte Carlo* para la resolución de una integral

$$\int_V f(x) \approx I = \frac{1}{N} * \sum_{i=1}^N \frac{f(x_i)}{prob(x_i)} \quad (D.3)$$

Dada la *Ley de los Grandes Números* [17] que afirma que dado un número infinito de muestras, un ensayo aproximado obtiene el valor correcto, se tiene que el método de *Monte Carlo* converge dado el límite D.4.

$$\lim_{x \rightarrow \inf} I = \int_V f(x) \quad (D.4)$$

D.1.3. Path Tracing

Para la resolución de *Path Tracing* basta con resolver la *Path Integral* aplicando *Monte Carlo* de manera que el conjunto de muestras N es el número de *paths* muestreados y la función de distribución de probabilidad *pdf* es la usada para obtener cada *path*.

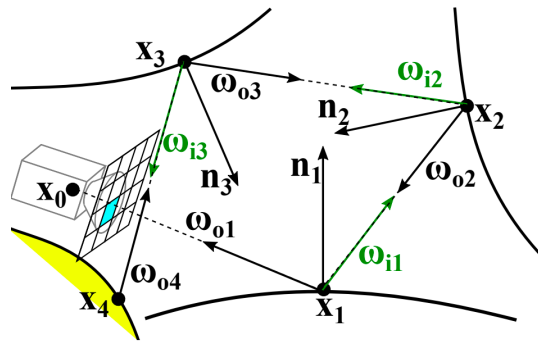


Figura D.3: Ejemplo de la resolución de un *path* con *Path Tracing*

Vease que para la Figura D.3 que ejemplifica el recorrido de un *path*, dada la *Path Integral* y la aproximación por *Monte Carlo* la resolución de la raciancia L_o vendría dada por la ecuación D.5 donde $prob(w_{i1})$ es la anteriormente mencionada *pdf* usada por *Monte Carlo*. La ausencia de integral se debe a que se está siguiendo un solo camino.

$$L_o(x_1, w_{o1}) = \frac{L_i(x_1, w_{i1})f_r(x, w_{i1}, w_{o1})|n_1 \cdot w_{i1}|}{prob(w_{i1})} \quad (D.5)$$

Siendo que el factor $L_i(x_1, w_{i1})$ es la cantidad de luz que recibe el punto x_1 desde la dirección w_{i1} esta se va a resolver aplicando la *Ecuación de Render* recursivamente de manera que se simula que el observador ahora se encuentra en el punto x_1 , quedando pues la resolución de $L_i(x_1, w_{i1})$ como en la ecuación D.6.

$$L_i(x_1, w_{o2}) = \frac{L_i(x_2, w_{i2})f_r(x, w_{i2}, w_{o2})|n_2 \cdot w_{i2}|}{prob(w_{i2})} \quad (D.6)$$

Esta recursividad seguiría hasta encontrarse una fuente de luz o producirse absorción, donde el factor L_i quedaría resuelto por la ecuación D.7.

$$L_i(x_4, w_{o4}) = L_e(x_4, w_{o4}) \quad (D.7)$$

D.1.4. Luz Directa e Indirecta

Para el correcto cálculo de la radiancia en un punto hay que tener en cuenta las dos divisiones de tipos de luz, la luz indirecta y la luz directa.

La luz indirecta es aquella que viene dada por la resultante de calcular la radiancia del siguiente punto de intersección del *path*, es decir, es la que viene calculada por la *Path Integral* (D.1) pues se calcula de manera recursiva hasta haber alcanzado la fuente de luz. Para que tal cálculo sea posible es necesario llevar a cabo un **muestreo** de la *BSDF* es decir, un cálculo del rayo de salida con respecto al de entrada teniendo en cuenta el tipo de material sobre el que se ha intersectado. Es gracias a este cálculo del rayo de salida que se va a poder continuar el *path* y por ende seguir intersectando hasta el momento de intersectar con una fuente de luz y que se pueda resolver la *Path Integral*, por lo que el muestreo de la *BSDF* es esencial. En la Figura D.4a se puede ver un ejemplo de luz indirecta.

Por otro lado, la luz directa es aquella que solo tarda un rebote en llegar al observador, por lo que la unión entre el punto de intersección y la fuente de luz ha de carecer de objetos entre la misma. Tal iluminación puede darse en dos ocasiones, aleatoriamente o de manera intencionada, siendo esta última la denominada **evaluación** de una *BSDF*. Esto quiere decir que en ocasiones, cuando la fuente de luz es muy difícil de encontrar de manera aleatoria es necesario encontrarla de manera intencionada o la imagen no se verá iluminada, por lo que se lleva a cabo la evaluación de la *BSDF* que se basa en que en cada intersección, posteriormente

a haberse muestreado la $BSDF$ en tal punto, se le añade a la radiancia indirecta la incidente de luz directa correspondiente a la distancia entre fuente de luz e intersección por la *Ley de los Cuadrados Inversos* la cual divide la radiancia de la luz directa entre la distancia al cuadrado. En la Figura D.4b se puede ver un ejemplo de luz directa.

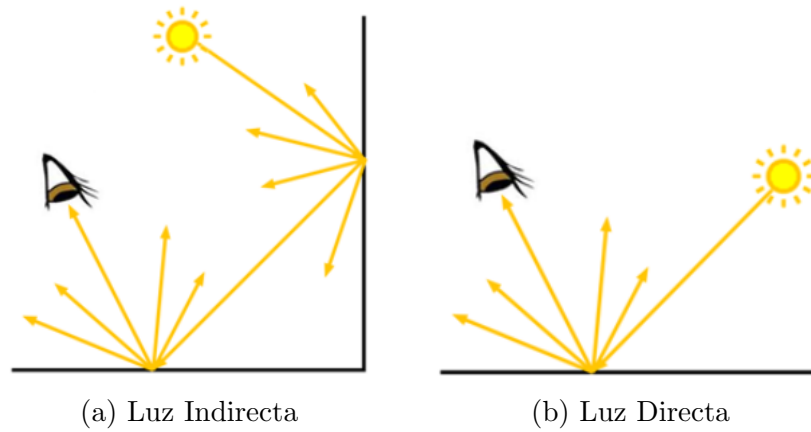


Figura D.4: Ejemplos de tipos de luz

D.2. Position-Free Monte Carlo

En la Sección 2.4.1 se hace referencia a los materiales multicapa y a que existen diferentes formas de simular el transporte de la luz por ellos. *Position-Free Monte Carlo* [9] es un método de simulación del transporte de la luz en materiales multicapa, modelando desde las intersecciones con las capas hasta el camino que sigue la luz entre ellas.

Concretamente este método trata de evaluar una $BSDF$ (obtener el factor f_r de la *Ecuación de Render*, vease 2.1) aplicando la técnica *Path Tracing* (D.1) dentro del propio modelo multicapa para simular el paso de la luz por las capas intersectando tanto con las propias capas como con el medio entre las mismas. La diferencia con *Path Tracing* tradicional es que la *Path Integral* usada es *position-free* es decir, se asume que aunque los puntos se encuentren en lugares diferentes con respecto al eje x la variación en tal eje va a ser tan pequeña que se asume inexistente, en conclusión, no importa la posición en el eje x pues se asume en todas las intersecciones del *path* la misma. Esto hace que la definición de *path* cambie y esta venga dada en vez de por puntos de intersección por vértices formados por pares de profundidad y dirección. La profundidad denotada con $z \in [0, 1]$ indica la profundidad de la capa en la que se encuentra la intersección mientras que la dirección denotada con d denota la dirección

de salida de la luz entre vértices. Esto implica que la definición de un *path* viene dada por $\bar{x} = d_0, z_1, d_1, \dots, z_k, d_k$. En la Figura D.5 se encuentra el ejemplo de un *path* que evalúa una *BSDF* mediante *Position-Free Monte Carlo*.

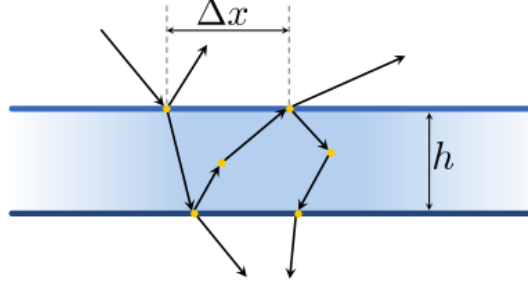


Figura D.5: Imagen ejemplo de la asunción de mismo punto de salida y entrada Δx ; también muestra el camino simulado -*path*- seguido por un rayo, siendo las estrellas los puntos de cálculo del color y las flechas el camino que sigue [9]

Finalmente se tiene que la evaluación queda resuelta pues con la ecuación D.8 donde (w_i, w_o) indica que se está evaluando la *BSDF* con tales rayos de incidencia y de salida.

$$f_r(w_i, w_o) = \int_{\Omega(w_i, w_o)} f(\bar{x}) d\mu(\bar{x}) \quad (\text{D.8})$$