Productos Tensoriales.
Extensiones fielmente planas.

Diego Ferrer Castillo
Trabajo de fin de grado de Matemáticas
Universidad de Zaragoza

Director del trabajo: Alberto Elduque Palomo
14 de junio de 2023

Resumen

El descenso fielmente plano es una técnica de la geometría algebraica que permite extraer conclusiones sobre objetos relacionados por un morfismo fielmente plano. En este caso, los morfismos serán homomorfismos de anillos y los objetos serán módulos sobre dichos anillos, aunque se puede realizar de forma similar para objetos con un mayor número de operaciones como son las álgebras, o aquellas que preserven estructuras adicionales. De hecho, el descenso fielmente plano fue originalmente demostrado por Alexander Grothendieck para esquemas, un contexto aún más general.

Un módulo es la generalización de la noción de espacio vectorial donde el cuerpo de escalares es sustituido por un anillo. Aunque pueda parecer un pequeño cambio, esto provoca que los módulos sean mucho más difíciles de manejar que los espacios vectoriales, ya que, por ejemplo, un módulo puede no tener una base, lo que hace que gran parte de los resultados del álgebra lineal sobre espacios vectoriales no puedan aplicarse siempre. También generalizan a los propios grupos abelianos, que son simplemente módulos sobre el anillo de los números enteros. Los módulos son una de las nociones centrales del ágebra conmutativa y del álgebra homológica. Además, se utilizan ampliamente en otras ramas como la topología algebraica y la geometría algebraica. Aunque su estudio puede no ser demasiado profundo en los grados de Matemáticas, los módulos desempeñan un papel crucial en dichas áreas.

Así, la idea se reduce a lo siguiente: dado un módulo sobre un anillo, pasar a un módulo sobre un anillo más grande, esto es, extender los escalares, extraer las conclusiones pertinetes y, por último, bajar o “descender” al anillo inicial. La primera parte: subir a un módulo sobre un anillo mayor, no es algo nuevo para aquellos que hayan cursado una titulación en Matemáticas; esta idea es la base de la Teoría de Galois, solo que esta se restringe a extensiones de cuerpos. Sin embargo, todo cuerpo es también un módulo y, en particular, un espacio vectorial. De hecho, todo esto es algo que se utiliza con mucha frecuencia, por ejemplo, partiendo de una matriz sobre los reales, podemos calcular sus valores propios, que pueden ser números complejos y, por lo tanto, no pertenecen a nuestro cuerpo de partida, pero, a partir de estos valores propios, podemos obtener vectores propios cuyas componentes sean números reales.

Un ejemplo adicional, de carácter más general, es la demostración de que toda matriz simétrica sobre los reales tiene valores propios reales: sea A una matriz sobre los reales tal que $A = A^t$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ un valor propio de A, es decir, $Ax = \lambda x$ y, trasponiendo, $\bar{x}^t A^t = \bar{\lambda}\bar{x}^t$. Juntándolo todo:

$$\bar{x}^t A x = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{x}^t(Ax) & = \bar{x}^t(\lambda x) & = \lambda ||x||^2 \\ (\bar{x}^t A)x & = \bar{\lambda}\bar{x}^t x & = \bar{\lambda}||x||^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

y, por lo tanto, λ pertenece a los reales.

En estos ejemplos se puede ver cómo subimos a un cuerpo más grande y, posteriormente, se desciende nuevamente al cuerpo original. Por lo general, subir es mucho más sencillo que descender: es fácil encontrar un anillo más grande, pero resulta complicado determinar si ese módulo puede descender a otro. No obstante, es necesario conocer cómo ascender para llegar a saber cómo descender. La forma de ascender, recordar que no es más que extender los escalares, es mediante el producto tensorial: un nuevo módulo creado a partir de dos -aunque pueden ser el mismo-, que se caracteriza por el hecho de que las aplicaciones bilineales (lineales en dos componentes) desde el producto directo de esos dos módulos en cualquier otro, factoriza

mediante una aplicación lineal en el producto tensorial. De alguna manera, el producto tensorial deshace la bilinealidad y la transforma en linealidad. Intuitivamente, es pedir, en el producto directo, que la suma en una componente se distribuya como la suma de dos pares, manteniendo la otra componente fija, y, la multiplicación por un escalar en cada componente se corresponda con multiplicar el par:

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$
$$rm \otimes n = r(m \otimes n) = m \otimes rn$$

El producto tensorial se puede realizar con más de dos módulos. En ese caso, en lugar de aplicaciones bilineales, deshará aplicaciones multilineales en tantas componentes como módulos haya en una única aplicación lineal. La complejidad del producto tensorial radica en su construcción, exceptuando casos en los que los módulos admitan base, donde se simplifica, calcular productos tensoriales es, en general, una ardua tarea y, por ello, se suele trabajar con la propiedad que cumplen en vez de con su propia construcción. En particular, el caso de productos tensoriales de espacios vectoriales es relativamente simple. De hecho, suele enseñarse en los primeros cursos de los grados de Física.

Ahora podemos expresar qué quiere decir subir o ascender un módulo sobre un anillo R a otro anillo S. Para ello, basta con realizar el producto tensorial del nuevo anillo S con el módulo, obteniendo así un módulo sobre el nuevo anillo llamado "extensión de escalares de R a S". De la misma forma, un módulo sobre un anillo S desciende a otro anillo R si ocurre al revés, esto es, si el módulo es el resultado de realizar el producto tensorial entre un módulo sobre R y el propio S, en otras palabras, si el módulo original es una extensión de escalares de R a S. Tanto ascender como descender producen un cambio del anillo que actúa en el módulo.

La otra definición central es la de extensión fielmente plana. Estas extensiones u homomorfismos de anillos son las que posibilitan la caracterización de los módulos que descienden. En particular, cuando se dan este tipo de extensiones, el homomorfismo de anillos es siempre inyectivo, por lo que concuerda con la idea de pasar a un anillo más grande. Si la extensión no es fielmente plana, no tenemos forma de saber si el módulo sobre el anillo grande puede descender al otro anillo, al menos no en general. Para llegar a esta definición, se requiere algo de teoría de categorías: una generalización de diversas estructuras matemáticas en una sola y de forma abstracta, mediante el uso de objetos y morfismos. También se necesitan nociones de sucesiones exactas de módulos, que no son más que una forma relativamente cómoda y elegante de hablar sobre núcleos, imágenes, aplicaciones inyectivas, sobreyectivas e isomorfismos de módulos.

Finalmente, el descenso fielmente plano nos proporciona una caracterización de los módulos que pueden descender cuando la extensión es fielmente plana. Estos son los que admiten un denominado "dato de descenso": una aplicación que es un isomorfismo entre dos productos tensoriales simétricos y que, al permutarla adecuadamente, conmuta. En definitiva, que se comporte bien con distintas estructuras de módulos en un determinado producto tensorial, el resultado de tensorizar el propio módulo y S. Más aún, el teorema final nos da una equivalencia -de categorías- entre los módulos que descienden y aquellos que admiten dato de descenso, en el caso de que la extensión sea fielmente plana. Así, para determinar si un módulo desciende bajo una extensión fielmente plana dada, solo es necesario verificar si admite un dato de descenso. De la misma forma, si un módulo desciende, entonces admite dato de descenso.

La base para el descenso fielmente plano comienza con un complejo de cadenas cosimplicial del álgebra homológica, conocido como complejo de Amitsur, introducido por Shimshon Avraham Amitsur en 1959, a partir del cual, Alexander Grothendieck, en 1960, tan solo un año más tarde, probó que era una sucesión exacta cuando la extensión era fielmente plana. En ese mismo seminario, utilizando el anterior resultado, Grothendieck presentó una elegante demostración de la equivalencia antes mencionanda en un contexto más general, dando así lugar al descenso fielmente plano, que generalizaría todos los descensos utilizados hasta esa fecha, incluido el descenso de Galois, utilizado para extensiones de cuerpos de Galois.

La memoria está organizada de la siguiente manera:

- En el primer capítulo se introducen las definiciones de módulo sobre un anillo y homomorfismo de módulos. El capítulo continúa con el estudio de estructuras básicas creadas a partir de uno o varios módulos y/o homomorfismos como son el núcleo e imagen de un homomorfismo, isomorfismo, el módulo cociente, producto directo, suma directa, sistema generador y base. Además, se presenta un resultado fundamental conocido como el primer teorema de la isomorfía.

- El segundo abarca tanto categorías como sucesiones exactas. Comienza con las definiciones de categoría, funtor y equivalencia de categorías. Seguidamente se introduce el primero de los dos funtores importantes sobre la categoría de módulos, el funtor Hom. Se presenta la definición de sucesión exacta y se explora cómo interactúa con diversos funtores, en especial con el funtor Hom.

- El tercer capítulo corresponde al producto tensorial. En él se definen aplicaciones multilineales y el producto tensorial de módulos para, a continuación, explorar las propiedades del mismo. Luego se define la noción de extensión de escalares, se presenta el segundo funtor importante y se estudia la relación que este funtor tiene con el funtor Hom. Finalmente se da la definición de módulo plano y fielmente plano, así como la caracterización de cada uno de ellos. Gran parte de estos primeros capítulos está basada en [1] y, en menor medida, en [2].

- En el último capítulo se aborda el estudio del descenso fielmente plano. Se comieza dando la definición de extensión fielmente plana y se presentan una serie de resultados auxiliares necesarios para demostrar el último teorema, entre los cuales destaca el Lema de Amitsur-Grothendieck. Finalmente, el teorema final, originalmente probado en [3], establece la relación en forma de equivalencia de categorías entre los módulos que admiten dato de descenso y los módulos que descienden cuando la extensión es fielmente plana. El enfoque de este capítulo es el mismo que se da en [4].

Summary

Faithfully flat descent is a technique in algebraic geometry that allows us to draw conclusions about objects related by a faithfully flat morphism. In this case, the morphisms will be ring homomorphisms, and the objects will be modules over those rings, although it can be similarly applied to objects with a larger number of operations, such as algebras, or those that preserve additional structures. In fact, faithfully flat descent was originally proven by Alexander Grothendieck for schemes, an even more general context.

A module is a generalization of the notion of vector space in which the field of scalars is replaced by a ring. It may seem like a small change, but this causes the modules to be much more difficult to handle than vector spaces since, for example, a module may not have a basis, which makes that a significant portion of linear algebra's results over vector spaces cannot always apply to all modules. Modules also generalize abelian groups themselves, which are just modules over the ring of integers. Modules are one of the central notions of commutative algebra and homological algebra. In addition, they are used widely in other fields such as algebraic geometry and algebraic topology. Even though its study can be not too deep in Mathematics degrees, modules perform a crucial role in these areas.

Thus, the idea can be summarized to the following: given a module over a ring, pass to a module over a larger ring, that is, extend the scalars, draw conclusions and, finally, "descend" to the original ring. The first part, going up to a module over a larger ring is not something new for those who have pursued a degree in mathematics; this idea is the basis of Galois theory, except that it is restricted to field extensions. But fields are also modules and, in particular, vector spaces. In fact, all of this is something frequently used. For example, starting from a matrix over the real numbers, we can compute its eigenvalues, which can be complex numbers and, therefore, they do not belong to our starting field. However, from them, we can obtain eigenvectors whose components are real numbers.

Another more general and additional example is the proof that every symmetric matrix over the real numbers has real eigenvalues: let A be a matrix over the real numbers such that $A = A^t$ and $\lambda \in \mathbb{C}$ an eigenvalue of A, this, $Ax = \lambda x$ and, transposing, $\bar{x}^t A^t = \bar{\lambda}\bar{x}^t$. Gluing all:

$$\bar{x}^t A x = \left\{ \begin{array}{lll} \bar{x}^t(Ax) & = \bar{x}^t(\lambda x) & = \lambda ||x||^2 \\ (\bar{x}^t A)x & = \bar{\lambda}\bar{x}^t x & = \bar{\lambda}||x||^2 \end{array} \right\} \Longrightarrow \lambda = \bar{\lambda}$$

and, as a consequence, λ belongs to the real numbers.

In these examples, it can be seen how we go up to a larger field and then, how we descend back to the original field. Generally, going up is much simpler than descending: it is easy to find a larger ring, but it is complicated to determine if that module can descend to another one. Nevertheless, it is necessary to understand how to ascend in order to know how to descend. The way to ascend, remembering that it is nothing more than extending the scalars, is through tensor product: a new module created from two modules (although they can be the same), which is characterized by the fact that bilinear maps (linear in two components) from the direct product of those two modules to any other module factorize through a linear map in the tensor product. Somehow, it undoes bilinearity and turns it into linearity. Intuitively, it is asking, in the direct product, for the addition in one component to distribute as the sum of two pairs, where the

other component ramains fixed, and scale in each component corresponds to scale all the pair:

$$(m + m') \otimes n = m \otimes n + m' \otimes n$$
$$rm \otimes n = r(m \otimes n) = m \otimes rn$$

It is possible to do the tensor product of more than two modules. In that case, instead of bilinear maps, it will undo multilinear maps in as many components as there are modules in a single linear map. The difficulty of the tensor product lies in its construction. Excepting cases where the modules admit a basis, which simplifies tensor product calculations, computing tensor products is generally a challenging task and, therefore, it is often worked with the properties they satisfy rather than their actual construction. In particular, the case of tensor products of vector spaces is relatively simple and is often covered in Physics degrees's early courses.

Now, we can express what it means to go up or ascend a module over a ring R to another ring S. To do this, it is simply needed to take the tensor product of the new ring S with the module, obtaining a module over the new ring called "the extension of scalars from R to S" . Likewise, a module over a ring S descends to another ring R if the opposite happens. That is, if the module is the result of taking the tensor product between a module over R and S itself. In other words, if the original module is a scalar extension from R to S. Both, ascending and descending, involve a change in the ring acting on the module.

The other central definition is faithfully flat extension. These extensions or ring homomorphisms are what allow modules that descend's characterization. In particular, when one of these extensions happens, the ring homomorphism is always injective, aligning with the idea of moving to a larger ring. If the extension is not faithfully flat, we have no way of knowing if the module over the larger ring can descend to the other ring, at least not in general. To arrive at this definition, some category theory is required: it is a generalization of various mathematical structures into a single and abstract framework, using objects and morphisms. Exact sequences are also needed. They are a relatively convenient and elegant way of discussing kernels, images, injective and surjective maps, and module isomorphisms.

Finally, faithfully flat descent gives us a characterization of the modules that can descend when the extension is faithfully flat. These those that admit a so-called descent datum: an application that is an isomorpshism between two symmetric tensor products and, when suitably permuted, commutes. In other words, it behaves well with different module structures in a given tensor product, tensoring by S the module. Moreover, the final theorem provides us with an equivalence (of categories) among the descending modules and those that admit a descent datum, if the extension is faithfully flat. Thus, to determine if a module descends for a given faithfully flat extension, it is enough to check if it admits a descent datum. Similarly, if a module descends, then it admits a descent datum.

The base for faithfully flat descent begins with a cosimplicial chain complex in homological algebra, known as Amitsur complex, introduced by Shimshon Avraham Amitsur in 1959. Based on this, Alexander Grothendieck, just one year later in 1960, proved that it was an exact sequence when the extension was faithfully flat. In that same seminar, using the previous result, Grothendieck provided an smart proof of the aforementioned equivalence in a more general context, giving thus rise to faithfully flat descent, which would generalize all descents used up to that point, including Galois descent, used for Galois field extensions.

The memory is organized as follows:

- In the first chapter, the definitions of module over a ring and module homomorphism are introduced. The chapter continues with the study of basic structures created from one or several modules and/or homomorphisms, such as the kernel and image of a homomorphism, isomorphism, quotient module, direct product, direct sum, generating system and basis. Additionally, a fundamental result known as the firs isomorphism theorem is discussed.

- The second chapter covers both categories and exact sequences. It starts with category, functor and category equivalence's definitions. Subsequently, the first of the two important functors on the category of modules, the Hom functor, is introduced. The definition of an exact sequence is presentend as well as it is discussed its interaction with different functors, specially the Hom functor.

- The third chapter corresponds to tensor product. In this chapter, multilinear maps and tensor product of modules are defined, followed by an exploration of their properties. The notion of scalar extension is then introduced, along with the second important functor and its relationship with the Hom functor. Finally, the definitions of flat and faithfully flat modules are provided, as well as their respective characterization. Much of this early chapters material is based in [1] and, to a lesser extent, inn [2].

- In the last chapter, faithfully flat descent is studied. Firstly, the definition of faithfully flat extension is provided, along with a series of auxiliary results to prove the final theorem, among which Amitsur-Grothendicek's Lemma stands out. Finally, the last theorem, originally proven in [3], establishes a relationship, an equivalence of categories, between modules that admit descent datum and modules that descend, when the extension is faithfully flat. The approach in this chapter follow the same framework as the one presented in [4].

Índice general

Resumen III

Summary VII

1. Módulos 1

2. Categorías y Sucesiones Exactas 5

3. Producto Tensorial 11

4. Descenso Fielmente Plano 19

Bibliografía 27

Capítulo 1

Módulos

Definición 1.1. *Sea R un anillo unitario y conmutativo. Un R-módulo M a izquierda es un grupo abeliano con una operación externa*

$$\begin{array}{ccc} R \times M & \longrightarrow & M \\ (x, m) & \longmapsto & x \cdot m := xm \end{array}$$

cumpliendo:

I. $(x+y)m = xm + ym \qquad \forall x, y \in R \quad \forall m \in M$

II. $x(m+n) = xm + xn \qquad \forall x \in R \quad \forall m, n \in M$

III. $(xy)m = x(ym) \qquad \forall x, y \in R \quad \forall m \in M$

IV. $1m = m \qquad \forall m \in M$

De una forma simililar definimos R-módulo a derecha. Diremos que M es un R-módulo si es un R-módulo a izquierda.

Dado que tan solo vamos a trabajar con anillos unitarios y conmutativos, al escribir "anillo", nos referiremos a un anillo conmutativo y unitario.

Definición 1.2. *Sean M y N R-módulos, un homomorfismo de R-módulos o aplicación R-lineal es un homomorfismo de grupos que respeta la estructura de R-módulo, es decir, un homomorfismo de grupos $f : M \longrightarrow N$ que cumple $f(xm) = xf(m)$ $\forall x \in R$ y $\forall m \in M$.*

Lo llamaremos monomorfismo si es inyectivo y epimorfismo si es sobreyectivo. Si es una biyección, diremos que es un isomorfismo. En ese caso M es isomorfo a N: $M \cong N$. Denotaremos por $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ al conjunto de todas las aplicaciones R-lineales de M en N. Es fácil comprobar que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ es también un R-módulo con las operaciones naturales. (Véase Proposición 2.10).

Ejemplos 1.3.

1. *Todo anillo A es un A-módulo tomando la multiplicación en A.*
2. *Dado que los cuerpos son también anillos, todo espacio vectorial sobre un cuerpo K es un K-módulo.*
3. *Todo grupo abeliano M es un $\mathbb{Z}$-módulo con: $n \cdot m = m + ... + m$ (n veces).*
4. *Todo ideal I de un anillo R es un R-módulo.*

Ejemplo 1.4. *Sean R y A dos anillos, $\varphi : R \longrightarrow A$ un homomorfismo de anillos y M un A-módulo. Entonces M es también un R-módulo vía φ con la siguiente estructura: $r \cdot m = \varphi(r)m$. En particular, A es un anillo y un R-módulo. Diremos que A es una R-álgebra.*

Definición 1.5. *Sea M un R-módulo. Un submódulo de M es un subgrupo M' de M que es también un R-módulo. Es decir, un subgrupo M' tal que $xm \in M'$ $\forall m \in M'$ y $\forall x \in R$. Escribiremos $M' \leq M$ para indicar que M' es un submódulo de M.*

Ejemplos 1.6.

1. *Los submódulos de un anillo A visto como A-módulo son precisamente sus ideales.*
2. *En el caso de un espacio vectorial, los submódulos coinciden con los subespacios.*
3. *Todo subgrupo es un submódulo (viendo el grupo como un $\mathbb{Z}$-módulo).*
4. *Si I es un ideal de R, los submódulos de I como R-módulo son los ideales de R contenidos en I.*
5. *El módulo trivial, 0, es submódulo de cualquier otro módulo.*

Proposición 1.7. *Sean M, N R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ un homomorfismo de módulos. Entonces:*

- *El núcleo de f, $\operatorname{Ker} f := \{m \in M \mid f(m) = 0\}$, es un submódulo de M.*
- *La imagen de f, $\operatorname{Im} f := \{f(m) \mid m \in M\}$, es un submódulo de N.*
- *f es inyectiva si y solo si $\operatorname{Ker} f = 0$*

Demostración. Tanto $\operatorname{Im} f$ como $\operatorname{Ker} f$ son subgrupos de M y N respectivamente. Sea $m \in \operatorname{Ker} f$, entonces $\forall r \in R$ se tiene que $f(rm) = rf(m) = r \cdot 0 = 0$ por ser f homomorfismo, es decir, $rm \in \operatorname{Ker} f$ $\forall r \in R$. De la misma forma si $n \in \operatorname{Im} f$, $\exists z \in M$ tal que $f(z) = n$ por lo que $f(rz) = rf(z) = rn \in \operatorname{Im} f$ $\forall r \in R$. Para el tercer apartado notar que

$$f(x) = f(y) \Longleftrightarrow f(x) - f(y) = f(x - y) = 0 \Longleftrightarrow x - y \in \operatorname{Ker} f$$

Por lo tanto, si $\operatorname{Ker} f = 0$, $f(x) = f(y) \Longrightarrow x - y = 0 \Longrightarrow x = y$. Por el otro lado, si f es inyectiva y $x \in \operatorname{Ker} f$ tenemos que $f(x) = f(0) = 0$ y $x = 0$, luego, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$. $\square$

Definición 1.8. *Sea M un R-módulo y N un submódulo de M. La relación $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in N$ es una relación de equivalencia. El módulo cociente de M sobre N, M/N, es el conjunto de las clases de equivalencia por la anterior relación en M. Denotaremos a la clase de equivalencia de $m \in M$ por $m + N = \{m + n \mid n \in N\}$ y $\pi : M \longrightarrow M/N$ a la proyección canónica: la aplicación que manda cada elemento a su clase de equivalencia en el módulo cociente. Así $M/N = \{m + N \mid m \in M\} = \pi(M)$.*

Demostración. Solo hay que probar que es una relación de equivalencia. Como $0 \in N$ por ser submódulo, $x - x = 0 \in N$. Si $x - y \in N$, entonces $y - x \in N$ también por ser $y - x$ el opuesto de $x - y$ y N subgrupo. Para la transitividad, si $x - y \in N$ e $y - z \in N$ se tiene que $x - z = (x - y) + (y - z) \in N$. $\square$

Proposición 1.9. *Sea M un R-módulo y N un submódulo de M. El conjunto M/N es también un R-módulo.*

Demostración. M/N es un grupo abeliano con $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$. La operación externa queda definida de la siguiente manera: $r \cdot (m + N) = rm + N$. Si $x + N = y + N$, tenemos $x - y \in N$ y por lo tanto $r(x - y) = rx - ry \in N$, es decir, $rx + N = ry + N$ y la operación está bien definida sobre el módulo cociente. Con esta operación externa es inmediato comprobar que M/N es un R-módulo. $\square$

Lema 1.10. *Sean M y N dos R-módulos y $M' \leq M$. Para toda aplicación $f : M \longrightarrow N$ R-lineal tal que $M' \subset \operatorname{Ker} f$, existe una única aplicación $\bar{f}$ haciendo que el siguiente diagrama conmute:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & N \\ M/M' \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Definimos $\bar{f} : M/M' \longrightarrow N$ como $\bar{f}(m + M') = f(m)$. Si $x + M' = y + M'$ entonces $x - y \in M' \subset \operatorname{Ker} f$. Esto implica que $0 = f(x-y) = f(x) - f(y)$ y $f(x) = f(y)$, luego, $\bar{f}(x + M') = f(x) = f(y) = \bar{f}(y + M')$ por lo que la aplicación está bien definida.

Veamos ahora que esta aplicación es R-lineal.

$$\bar{f}(r \cdot (m + M')) = \bar{f}(rm + M') = f(rm) = rf(m) = r \cdot \bar{f}(m + M') \quad \forall r \in R \ \forall m \in M$$

$$\bar{f}((x+M')+(y+M')) = \bar{f}(x+y+M') = f(x+y) = f(x)+f(y) = \bar{f}(x+M')+\bar{f}(y+M') \ \forall x, y \in M$$

Por lo que $\bar{f}$ es un homomorfismo de R-módulos. Si existiera otra aplicación que hiciera conmutar el diagrama, llamémosla φ, tendríamos que $f = \varphi \circ \pi$ y para cada $m \in M$ $f(m) = \varphi(m + M') = \bar{f}(m + M')$. □

Teorema 1.11 (Primer Teorema de Isomorfía)**.** *Sean M, N dos R-módulos y $f : M \longrightarrow N$ una aplicación R-lineal. Existe una única aplicación R-lineal $\bar{f} : M/\operatorname{Ker} f \longrightarrow \operatorname{Im} f$ tal que el siguiente diagrama conmuta y $\bar{f}$ es un isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \operatorname{Im} f \\ M/\operatorname{Ker} f \arrow[ur, "\bar{f}"'] & \end{tikzcd}$$

Se cumple $M/\operatorname{Ker} f \cong \operatorname{Im} f$.

Demostración. La demostración se basa en aplicar el lema anterior para el caso $M' = \operatorname{Ker} f$, $N = \operatorname{Im} f$ y la aplicación $f' : M \longrightarrow \operatorname{Im} f$ dada por $f'(x) = f(x) \ \forall x \in M$. Tan solo falta ver que $\bar{f}$ es un isomorfismo. $0 = \bar{f}(m + \operatorname{Ker} f) = f'(m) = f(m) \Longrightarrow m \in \operatorname{Ker} f$ y, por lo tanto, $m + \operatorname{Ker} f = 0_{M/\operatorname{Ker} f}$, luego, $\operatorname{Ker} \bar{f} = 0$ y $\bar{f}$ es inyectiva.

Sea ahora $n \in \operatorname{Im} f$. Existe m tal que $f(m) = n$, por ello $\bar{f}(m + \operatorname{Ker} f) = f(m) = n$ y $\bar{f}$ es también sobreyectiva.

Juntando todo, $\bar{f}$ es un isomorfismo. □

Definición 1.12. *Sean Λ y $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de R-módulos. Se define su producto directo*

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \left\{ f : \Lambda \longrightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \mid f(\lambda) \in M_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \right\}$$

Es un R-módulo con las siguientes operaciones:

$$(f + g)(\lambda) = f(\lambda) + g(\lambda); \qquad (rf)(\lambda) = r(f(\lambda))$$

$\forall r \in R, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ f, g \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$.

También se define su suma directa $\bigoplus_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda = \{f \in \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda \mid f(\lambda) = 0$ para casi todo $\lambda\} \leq \prod_{\lambda \in \Lambda} M_\alpha$. Donde para casi todo significa en todo $\lambda \in \Lambda$ excepto en un subconjunto finito.

En el caso de ser $\Lambda = \{\lambda_1, ..., \lambda_k, ...\}$ *un conjunto contable; se identifica cada aplicación del producto directo, denotado por* $M_{\lambda_1} \times ... \times M_{\lambda_k} \times ...$ *con la tupla* $(f(\lambda_1).., f(\lambda_k), ...) := (..., m_\alpha, ...)$ *donde* $f(\alpha) = m_\alpha \in M_\alpha$. *La suma se traduce en sumar componente a componente y la multiplicación por un escalar en multiplicar todas las componentes. En este mismo caso denotaremos a la suma directa por* $M_{\lambda_1} \oplus ... \oplus M_{\lambda_k} \oplus ...$

Aunque Λ *no sea un conjunto contable, en ocasiones usaremos la notación* $(..., m_\lambda, ...)$ *o* $(m_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *para denotar los elementos de* $\oplus_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda$.

Definición 1.13. *Sea* M *un* R*-módulo.* $A \subset M$ *es un sistema generador de* M *si todo elemento de* M *se puede expresar como combinación lineal finita de elementos en* A. *Esto es,*

$$M = \Big\{ \sum_{a\in A} r_a a \,|\, r_a \in R \Big\} = \sum_{a\in A} Ra$$

Es equivalente a que el siguiente homomorfismo de R*-módulos*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{a\in A} R & \longrightarrow & M \\ f & \longmapsto & \sum_{a\in A} f(a)\cdot a \end{array}$$

sea un epimorfismo.

Si A *es un sistema generador de* M, *diremos que* M *está generado por* A.

Si además A *es un conjunto finito,* M *está finitamente generado por* A.

Definición 1.14. *Sea* M R*-módulo y* A *un sistema generador de* M. A *es una base de* M *si la combinación lineal es única para cada* $m \in M$. *Es equivalente a que el siguiente homomorfismo de* R*-módulos*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{a\in A} R & \longrightarrow & M \\ f & \longmapsto & \sum_{a\in A} f(a)\cdot a \end{array}$$

sea un isomorfismo. Un R*-módulo* M *se dice libre si admite una base, es decir, si es isomorfo a una suma directa de copias de* R, $M \cong \oplus_{i\in I} R$.

Ejemplos 1.15. *1. Los espacios vectoriales son módulos libres.*

2. $R^n = \prod_{i=1}^{n} R$, *con* R *anillo, es un módulo libre.*

Capítulo 2

Categorías y Sucesiones Exactas

Definición 2.1. *Una categoría es una colección de objetos y flechas o morfismos. Más formalmente, una categoría* $\mathfrak{C}$ *consta de:*

1. *Una clase* $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *de objetos.*
2. *Para cada* X, $Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, *un conjunto* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ *cuyos elementos se denominan morfismos.*
3. *Una ley de composición para cualesquiera* $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,Z) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

   que es asociativa: $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$ *y, para cada* $X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, *existe un elemento* $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X)$ *tal que* $id_X \circ g = g$ *y* $f \circ id_X = f$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ *llamado identidad en* X.

   Dada una categoría $\mathfrak{C}$ *podemos construir la categoría opuesta* $\mathfrak{C}^{op}$ *cambiando la dirección de las flechas:* $\mathrm{Ob}(\mathfrak{C}) = \mathrm{Ob}(\mathfrak{C}^{op})$ *y* $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$.

Ejemplos 2.2.
1. *La categoría* **Set** *cuyos objetos son conjuntos y sus morfismos aplicaciones.*
2. *La categoría* **Top** *tiene como objetos espacios topológicos y como morfismos aplicaciones continuas.*
3. *Un grafo es una categoría tomando como objetos sus vértices y como morfismos los caminos que unen dos vértices.*
4. *Finalmente, para un anillo* R, *la categoría* $_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$. *Sus objetos son* R*-módulos y sus morfismos son aplicaciones* R*-lineales.*

Definición 2.3. *Diremos que dos objetos* X, Y *de una categoría* $\mathfrak{C}$ *son isomorfos, lo denotaremos por* $X \cong Y$, *si existen morfismos* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y,X)$ *tal que* $f \circ g = id_Y$, $g \circ f = id_X$.

Observación 2.4. *Esto concuerda con la definición que hemos dado previamente de isomorfismos de* R*-módulos, esto es, en la categoría* $_RMod$, *ya que, si existen dos aplicaciones* R*-lineales tales que al componer resultan la identidad, ambas son biyectivas. De la misma forma, si existe una aplicación* R*-lineal y biyectiva, su inversa es también* R*-lineal.*

Definición 2.5. *Sean $\mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ categorías. Un funtor F de $\mathfrak{C}$ a $\mathfrak{D}$ denotado como $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ consta de:*

1. *Un objeto* $F(X) \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}) \quad \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$
2. *Un morfismo* $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(X), F(Y)),\ \forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *y* $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$ *tal que*
   - $F(id_X) = id_{F(X)} \quad \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$
   - $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f) \quad \forall X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *y* $\forall f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y),\ g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$

Ejemplos 2.6.

1. *El funtor de olvido, por ejemplo, de la categoría* **Top**, *llamémoslo* U_{Top} : **Top** $\longrightarrow$ **Set** *envía cada espacio topológico al mismo conjunto desprovisto de su topología y a cada aplicación continua a la misma aplicación entre conjuntos.*
2. *El grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$ es un funtor entre la categoría de espacios topológicos con un punto distinguido y la categoría de grupos.*
3. *Un homomorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow A$ induce un funtor $\varphi_* : {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$. Ver 1.4.*

Definición 2.7. *Un funtor $F : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ entre dos categorías $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ es una equivalencia de categorías si:*

- $\forall Z \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}),\ \exists X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ *tal que* $Z \cong F(X)$
- $\forall X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, *la aplicación inducida*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(F(X), F(Y)) \\ f & \longmapsto & F(f) \end{array}$$

es una biyección.

$\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son entonces categorías equivalentes.

Ejemplo 2.8. *Si dos categorías son equivalentes, son esencialmente la misma. Por ejemplo, sea K un cuerpo, podemos escoger la categoría $\mathbf{Vec_K}$ cuyos objetos son K-espacios vectoriales y como morfismos tiene a las aplicaciones K-lineales. Por otra parte, consideramos la categoría $\mathfrak{C}$ con objetos los conjuntos de la forma K^n $n > 0$ y morfismos también las aplicaciones K-lineales.*

Definimos el funtor

$$\begin{array}{rrcl} F : & \mathfrak{C} & \longrightarrow & \mathbf{Vec_K} \\ & K^n & \longmapsto & K^n \\ & (f : K^n \to K^m) & \longmapsto & (f : K^n \to K^m) \end{array}$$

Como todo K-espacio vectorial es isomorfo a K^n para algún n, se tiene que F es una equivalencia de categorías.

Proposición 2.9. *Sea $\mathfrak{C}$ una categoría. Cada $T \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ define un funtor $R_T : \mathfrak{C} \longrightarrow$ **Sets** como sigue: $R_T(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X)\ \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ y para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$*

$$\begin{array}{rrcl} R_T(f) := f_* : & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, Y) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

*De la misma forma podemos definir otro funtor $L_T : \mathfrak{C}^{op} \longrightarrow$ **Sets** tal que $L_T(X) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, T)\ \forall X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$ y para $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, X)$*

$$\begin{array}{rrcl} L_T(f) := f^* : & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, T) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, T) \\ & g & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

Demostración. Sea $f : X \longrightarrow Y$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X)$ con $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$. Entonces $R_T(f)(g) = f_*(g) = f \circ g : T \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$, luego, $f_*(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, Y)$ y la aplicación está bien definida.

$$id_{X*}(g) = id_X \circ g = g \quad \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X)$$

y por lo tanto $id_{X*} = id_{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T,X)}$.

Finalmente, sean $f \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X, Y)$, $h \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(Y, Z)$

$$(h \circ f)_*(g) = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g) = h \circ (f_*(g)) = h_*(f_*(g)) = (h_* \circ f_*)(g) \quad \forall g \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(T, X)$$

y tenemos que $(h \circ f)_* = h_* \circ f_*$

Con una comprobación similar se llega a que L_T es también un funtor. □

Proposición 2.10. *Sea R un anillo unitario.* $\mathrm{Hom}_R(M, -) : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ *es un funtor. Actúa como* $\mathrm{Hom}_R(M, -)(N) = \mathrm{Hom}_R(M, N)\, \forall N$ *R-módulo y sobre un homomorfismo $f : N' \longrightarrow N$ de R-módulos de la siguiente forma:*

$$\begin{array}{rccc} f_* := \mathrm{Hom}_R(M, -)(f) : & \mathrm{Hom}_R(M, N') & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M, N) \\ & g & \longmapsto & f \circ g \end{array}$$

Demostración. Tan solo será necesario comprobar que preserva la estructura de R-módulo y la R-linealidad de las aplicaciones. Las demás propiedades son la proposición anterior.

En $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ definimos las operaciones $(f + g)(m) = f(m) + g(m) \in N$ y $(r \cdot f)(m) = r(f(m)) \in N\ \forall m \in M$. Con estas operaciones es fácil comprobar que $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ es un R-módulo.

Falta ver que si $f \in \mathrm{Hom}_R(N', N)$ es R-lineal, entonces f_* es también R-lineal.

$$f_*(g + h)(x) = f \circ (g + h)(x) = f(g(x) + h(x)) = f(g(x)) + f(h(x)) = (f_*(g) + f_*(h))(x)$$

$$f_*(rg)(x) = f(rg(x)) = rf(g(x)) = rf_*(g)(x)$$

$\forall h, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N')$, $r \in R$ y $x \in M$.

Así f_* es R-lineal, esto quiere decir que $\mathrm{Hom}_R(M, -)$ transforma morfismos en morfismos y por lo tanto es un funtor definido en la categoría de R-módulos. □

Definición 2.11. *Una sucesión de R-módulos*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

se dice exacta en M_i si $\mathrm{Im}\, f_{i-1} = \mathrm{Ker}\, f_i$. Si es exacta en todos sus módulos diremos que la sucesión es exacta. Una sucesión exacta corta es una sucesión exacta de R-módulos de la siguiente forma

$$0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$$

Las sucesiones exactas pueden definirse en cualquier categoría en la que exista un objeto cero, ya que entonces puede definirse el núcleo de una aplicación.

Observación 2.12.

- $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M$ *exacta es equivalente a que f sea inyectiva.*
- $N \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ *exacta es equivalente a que f sea sobreyectiva.*

En el primer caso, la condición es $\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Im}\, 0 = 0$. Para el segundo es $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, 0 = M$.

Observación 2.13. *Todo sucesión exacta puede ser dividida en sucesiones exactas cortas para cada i. Dada una sucesión exacta de R-módulos*

$$... \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow ...$$

Podemos dividirla de la siguiente forma en sucesiones exactas cortas:

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_i \xrightarrow{\mathfrak{i}} M_i \xrightarrow{f_i} \operatorname{Im} f_i \longrightarrow 0$$

Lema 2.14. *Una sucesión $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ de R-módulos es exacta si y solo si $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, N') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(X, N)$ es exacta $\forall X$ R-módulo.*

Una sucesión $N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ de R-módulos es exacta si y solo si $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(N, X) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_R(M, X) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_R(N', X)$ es exacta $\forall X$ R-módulo.

Demostración. Sea $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ una sucesión exacta de R-módulos.

Considerar $\lambda \in \operatorname{Hom}_R(X, N')$ tal que $f_*(\lambda) = f \circ \lambda = 0$. Aplicándolo a cada $x \in X$, obtenemos que $\lambda(x) \in \operatorname{Ker} f = 0$ $\forall x \in X$, por lo que $\lambda = 0$. Es decir, $\operatorname{Ker} f_* = 0$ y f_* es inyectiva.

Además, $g \circ f = 0$ y aplicando el funtor

$$0 = 0 \circ h = 0_*(h) = (g \circ f)_*(h) = (g_* \circ f_*)(h) \quad \forall h \in \operatorname{Hom}_R(X, N')$$

Hemos visto $\operatorname{Im} f_* \subset \operatorname{Ker} g_*$.

Sea ahora $h \in \operatorname{Ker} g_* \leq \operatorname{Hom}_R(X, M)$, es decir, $g_*(h)(x) = g(h(x)) = 0$ $\forall x \in X \Longrightarrow \operatorname{Im} h \subset \operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} f$. Podemos escoger ahora para cada $x \in X$, un único $\alpha_x \in N'$, por ser f inyectiva, tal que $h(x) = f(\alpha_x)$ y definir una aplicación:

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & X & \longrightarrow & N' \\ & x & \longmapsto & \alpha_x \end{array}$$

veamos que es un homomorfismo de R-módulos. Sean $x, y \in X$, entonces

$$f(\alpha_{x+y}) = h(x+y) = h(x) + h(y) = f(\alpha_x) + f(\alpha_y) = f(\alpha_x + \alpha_y)$$

Por ser f inyectiva, $\alpha(x+y) = \alpha(x) + \alpha(y)$.

$$f(\alpha_{rx}) = h(rx) = rh(x) = rf(\alpha_x) = f(r\alpha_x)$$

Luego, $\alpha(rx) = r\alpha(x)$, por lo que $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(X, N')$ y $h = f \circ \alpha = f_*(\alpha) \in \operatorname{Im} f_*$. Así $\operatorname{Ker} g_* \subset \operatorname{Im} f_*$ y tenemos la igualdad.

Para la otra implicación, partimos de que

$$0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(X, N') \xrightarrow{f_*} \operatorname{Hom}_R(X, M) \xrightarrow{g_*} \operatorname{Hom}_R(X, N)$$

es exacta $\forall X$ R-módulo.

Tomar $X = \operatorname{Ker} f$ e $\mathfrak{i} : \operatorname{Ker} f \longrightarrow N'$ la inlcusión. Tenemos que $f_*(\mathfrak{i}) = f \circ \mathfrak{i} = 0$ y por ser f_* inyectiva, $\mathfrak{i} = 0$, es decir, $\operatorname{Ker} f = 0$.

Ahora, $X = N'$ y la identidad, $id_{N'} \in \operatorname{Hom}_R(N', N')$ y por ser la sucesión exacta, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$. Aplicándolo a la identidad, $(g \circ f)_*(id_{N'}) = g \circ f \circ id_{N'} = g \circ f = 0$ y por lo tanto $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} g$.

Por último, $X = \operatorname{Ker} g$, $\mathfrak{i} : \operatorname{Ker} g \longrightarrow M$ la inclusión. Al componer $g \circ \mathfrak{i} = g_*(\mathfrak{i}) = 0$ e $\mathfrak{i} \in \operatorname{Ker} g_* = \operatorname{Im} f_*$. Esto es, $\mathfrak{i} = f_*(\psi) = f \circ \psi$ con $\psi \in \operatorname{Hom}_R(\operatorname{Ker} g, N')$. Ahora, $\operatorname{Ker} g = \operatorname{Im} \mathfrak{i} = \operatorname{Im} (f \circ \psi) \subset \operatorname{Im} f$.

La segunda parte del Lema se prueba de modo análogo. $\square$

Definición 2.15. *Un funtor* $F : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ *es*

a) Exacto a iquierda si $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$ *exacta* $\Longrightarrow$ $0 \longrightarrow F(N') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N)$ *es también exacta. Con* N, N' *y* M *R-módulos.*

b) Exacto a derecha si $N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ *exacta* $\Longrightarrow$ $F(N') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N) \longrightarrow 0$ *es también exacta. Con* N, N' *y* M *R-módulos.*

c) Exacto si es exacto a iquierda y a derecha.

Corolario 2.16. *El funtor* $\mathrm{Hom}_R(X, -)$ *es exacto a izquierda* $\forall R$ *anillo y* X *R-módulo.*

Lema 2.17. *Sea* $F : {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{B}}\mathbf{Mod}$ *un funtor. Son equivalentes:*

1. *F es exacto.*
2. $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N' \longrightarrow 0$ *exacta* $\Longrightarrow$ $0 \longrightarrow F(N') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(N') \longrightarrow 0$ *también es exacta. Es decir, F preserva sucesiones exactas cortas.*
3. $\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$ *exacta* $\Longrightarrow$ $\ldots \longrightarrow F(M_{i-1}) \xrightarrow{F(f_{i-1})} F(M_i) \xrightarrow{F(f_i)} F(M_{i+1}) \longrightarrow \ldots$ *también es exacta. Es decir, F preserva sucesiones exactas.*
4. *F es exacto a derecha y para todo* $f : N \longrightarrow M$ *monomorfismo entre R-módulos,* $F(f) : F(N) \longrightarrow F(M)$ *es también inyectiva.*
5. *F es exacto a izquierda y para todo* $f : M \longrightarrow N'$ *epimorfismo entre R-módulos,* $F(f) : F(M) \longrightarrow F(N')$ *es también sobreyectiva.*

Demostración. Observar primero que *3* implica todas las demás y también que *4*$\Longrightarrow$*2*, *5*$\Longrightarrow$*2* y *1*$\Longrightarrow$*2*.

Veamos para terminar que *2*$\Longrightarrow$*3*: considerar el siguiente diagrama conmutativo para cualquier M_i R-módulo de una sucesión exacta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& \mathrm{Ker}\, f_{i-1} \arrow[dr, "\mathfrak{i}"] & & & & \mathrm{Im}\, f_i \arrow[ur] \arrow[dr, "\mathfrak{i}"] & & & \\
\ldots \arrow[rr] & & M_{i-1} \arrow[rr, "f_{i-1}"] \arrow[dr, "\bar{f}_{i-1}"'] & & M_i \arrow[ur, "\bar{f}_i"] \arrow[rr, "f_i"] & & M_{i+1} \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"] & & \ldots \\
& & & \mathrm{Im}\, f_{i-1} \arrow[ur, "\mathfrak{i}"'] \arrow[dr] & & & & M_{i+1}/\,\mathrm{Im}\, f_i \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

Donde las tres sucesiones cortas diagonales son exactas y, la horizontal, también lo es por hipótesis. Las aplicaciones $\bar{f}_i$ están definidas como $\bar{f}_i(x) = f_i(x)$.

Al aplicar el funtor F las diagonales cortas siguen siendo exactas por *2*.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[dr] & & & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
& F(\mathrm{Ker}\, f_{i-1}) \arrow[dr, "F(\mathfrak{i})"] & & & & F(\mathrm{Im}\, f_i) \arrow[ur] \arrow[dr, "F(\mathfrak{i})"] & & & \\
\ldots \arrow[rr] & & F(M_{i-1}) \arrow[rr, "F(f_{i-1})"] \arrow[dr, "F(\bar{f}_{i-1})"'] & & F(M_i) \arrow[ur, "F(\bar{f}_i)"] \arrow[rr, "F(f_i)"] & & F(M_{i+1}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi"] & & \ldots \\
& & & F(\mathrm{Im}\, f_{i-1}) \arrow[ur, "F(\mathfrak{i})"'] \arrow[dr] & & & & F(M_{i+1}/\,\mathrm{Im}\, f_i) \arrow[dr] & \\
& & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}$$

De este diagrama se deduce:

$$\operatorname{Im} F(f_{i-1}) = \operatorname{Im}(F(\mathfrak{i}) \circ F(\bar{f}_{i-1})) \overset{(1)}{=} \operatorname{Im} F(\mathfrak{i}) \overset{(2)}{=} \operatorname{Ker} F(\bar{f}_i) \overset{(3)}{=} \operatorname{Ker}(F(\mathfrak{i}) \circ F(\bar{f}_i)) = \operatorname{Ker} F(f_i)$$

(1) se cumple por ser $F(\bar{f}_{i-1})$ sobreyectiva. (2) por ser la sucesión diagonal central una sucesión exacta corta. (3) por ser $F(\mathfrak{i})$ inyectiva.

Así, la sucesión de R-módulos $\ldots \longrightarrow F(M_{i-1}) \longrightarrow F(M_i) \longrightarrow F(M_{i+1}) \longrightarrow \ldots$ es exacta en $F(M_i)$. □

Definición 2.18. *Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ dos categorías. Dos funtores $L : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $R : \mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ se dicen adjuntos si para todo $C \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{C})$, $D \in \operatorname{Ob}(\mathfrak{D})$ se cumple:*

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(L(C), D) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, R(D))$$

donde $\cong$ significa una biyección "funtorial". Formalmente, que el siguiente diagrama conmute para cualquier $C, C' \in \operatorname{Ob}\mathfrak{C}$; $D, D' \in \operatorname{Ob}\mathfrak{D}$; $f \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, C')$ y $g \in \operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(D, D')$

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(L(C'), D) \arrow[r, "L(f)^*"] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(L(C), D) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\cong"'] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{D}}(L(C), D') \arrow[d, "\cong"'] \\
\operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C', R(D)) \arrow[r, "f^*"] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, R(D)) \arrow[r, "R(g)_*"] & \operatorname{Hom}_{\mathfrak{C}}(C, R(D'))
\end{tikzcd}$$

Diremos entonces que L es adjunto a izquierda y R adjunto a derecha.

Proposición 2.19. *Sean A, B anillos y $L : {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{B}}\mathbf{Mod}$, $R : {}_{\mathbf{B}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{A}}\mathbf{Mod}$ dos funtores adjuntos (L adjunto a izquierda). Entonces L es exacto a derecha y R exacto a izquierda.*

Demostración. Partimos de una sucesión $N' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \longrightarrow 0$ exacta de A-módulos. Aplicando la proposición 2.14, la sucesión $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_A(N, X) \xrightarrow{f^*} \operatorname{Hom}_A(M, X) \xrightarrow{g^*} \operatorname{Hom}_A(N', X)$ es exacta para todo X A-módulo. Debido a que son adjuntos, el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_A(N, R(Y)) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\cong"', "\alpha"] & \operatorname{Hom}_A(M, R(Y)) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "\cong"', "\beta"] & \operatorname{Hom}_A(N', R(Y)) \arrow[d, "\cong"', "\gamma"] \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Hom}_B(L(N), Y) \arrow[r, "L(g)^*"] & \operatorname{Hom}_B(L(M), Y) \arrow[r, "L(f)^*"] & \operatorname{Hom}_B(L(N'), Y)
\end{tikzcd}$$

$\forall Y$ B-módulo. Las flechas verticales son isomorfismos por lo que la sucesión de abajo es también exacta: dado que el diagrama conmuta, $L(g)^* = \beta \circ g^* \circ \alpha^{-1}$, por lo que es inyectiva. De la misma forma, $L(f)^* \circ L(g)^* = \gamma \circ f^* \circ g^* \circ \alpha^{-1} = 0$. Por último, si $x \in \operatorname{Ker} L(f)^*$, entonces $y = \beta^{-1}(x) \in \operatorname{Ker} f^* = \operatorname{Im} g^*$, por conmutar el diagrama y ser γ isomorfismo. Existe un único $z \in \operatorname{Hom}_A(N, R(Y))$ tal que $g^*(z) = y$. Se cumple $L(g)^*(\alpha(z)) = \beta \circ g^*(z) = \beta(y) = x$, es decir, $x \in \operatorname{Im} L(g)^*$ e $\operatorname{Im} L(g)^* = \operatorname{Ker} L(f)^*$.

Aplicando otra vez 2.14 llegamos a que la sucesión $L(N') \xrightarrow{L(f)} L(M) \xrightarrow{L(g)} L(N) \longrightarrow 0$ es exacta y, por lo tanto, L es exacto a derecha. Con un razonamiento análogo concluimos que R es exacto a izquierda. □

Capítulo 3

Producto Tensorial

Definición 3.1. *Sean $M_1, ..., M_k, P, M, N$ R-módulos. Una aplicación $g : M_1 \times ... \times M_k \longrightarrow P$ es R-lineal en M_l si la aplicación*

$$\begin{array}{rccl} g_{m_1,...,m_{l-1},m_{l+1},...,m_k} : & M_l & \longrightarrow & P \\ & x & \longmapsto & g(m_1, ..., m_{l-1}, x, m_{l+1}, ..., m_k) \end{array}$$

es R-lineal $\forall m_1 \in M_1, ..., \forall m_k \in M_k$. A una aplicación R-lineal en cada M_i con $1 \leq i \leq k$ la denominamos multilineal o (k, R)-lineal.

Una aplicación $b : M \times N \longrightarrow P$ se dirá R-bilineal si es $(2, R)$-lineal. Es decir, si las aplicaciones

$$\begin{array}{rccl} b_m : & N & \longrightarrow & P \\ & n & \longmapsto & b(m, n) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} b_n : & M & \longrightarrow & P \\ & m & \longmapsto & b(m, n) \end{array}$$

son R-lineales $\forall m \in M$, $\forall n \in N$.

Observación 3.2. *Sean $M_1, ..., M_k, P$ R-módulos y una aplicación $g : M_1 \times ... \times M_k \longrightarrow P$. La R-linealidad de g en M_l es equivalente a que las aplicaciones*

$$\begin{array}{rccl} g_{m_l} : & M_1 \times ... \times M_{l-1} \times M_{l+1} \times ... \times M_k & \longrightarrow & P \\ & (m_1, ..., m_{l-1}, m_{l+1}, ..., m_k) & \longmapsto & g(m_1, ..., m_{l-1}, m_l, m_{l+1}, ..., m_k) \end{array}$$

cumplan las siguientes condiciones:

- $g_{m_l + m_l'} = g_{m_l} + g_{m_l'}$
- $g_{r m_l} = r g_{m_l}$

Teorema 3.3. *Sean M, N R-módulos. Existe un par (T, u), donde T es R-módulo y $u : M \times N \longrightarrow T$ una aplicación R-bilineal cuya imagen es un sistema generador de T, cumpliendo la siguiente propiedad:*

Dado un R-módulo P y una aplicación R-bilineal $g : M \times N \longrightarrow P$; existe una única aplicación f R-lineal, haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & P \\ T \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si (T, u) y (T', u') son dos pares que cumplen esta propiedad, existe un isomorfismo $j : T \longrightarrow T'$ tal que $u' = j \circ u$.

Al único T salvo isomorfismo se le denomina producto tensorial de M y N. Se le donota como $T = M \otimes_R N$.

Demostración. Sea F el módulo libre generado por $M \times N$,

$$F = \Big\{ \sum_{(x,y)\in X\times Y} r_{(x,y)}(x,y) \,|\, r_{(x,y)} \in R,\, r_{(x,y)} = 0 \text{ excepto en un número finito} \Big\} \cong \bigoplus_{(x,y)\in M\times N} R$$

Sea ahora $S \leq F$ el submódulo generado por los elementos

$$\begin{array}{c} (x+x',y)-(x,y)-(x',y) \\ (x,y+y')-(x,y)-(x,y') \\ (rx,y)-r(x,y) \\ (x,ry)-r(x,y) \end{array}$$

entonces $T = F/S$. Escribiremos $x\otimes_R y := (x,y)+S$ y definimos $u : M\times N \longrightarrow T$, la proyección canónica, como $u((x,y)) = (x,y)+S = x\otimes_R y$, que es claramente bilineal y, por la construcción de T, todos sus elementos son combinaciones R-lineales finitas de otros de la forma $x\otimes_R y$, con $x \in M,\ y \in N$, es decir, la imagen de u genera T. Por otro lado, $g : M\times N \longrightarrow P$ se extiende a una aplicación R-lineal $g' : F \longrightarrow P$, donde, por ser g bilineal, g' se anula sobre los generadores de S. Esto es, $S \subset \operatorname{Ker} g$ y por el lema 1.10 existe una única aplicación R-lineal $f = \bar{g'}$ que hace conmutar al diagrama.

Sean dos pares (T,u) y (T',u') tales que cumplan la propiedad anterior. Aplicando esa misma propiedad en el caso $P = T$, $g = u$ y $P = T'$, $g = u'$ obtenemos los siguientes diagramas conmutativos:

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "u"'] & T' \\ T \arrow[ur, "j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u'"'] & T \\ T' \arrow[ur, "j'"'] & \end{tikzcd}$$

siendo $u' = j\circ u$ y $u = j'\circ u'$ y, sustituyendo, $j\circ j'\circ u' = u'$, $\ j'\circ j\circ u = u$.

Así,

$$\begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & T \\ T \arrow[ur, "j'\circ j"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M\times N \arrow[r, "u"] \arrow[d, "u"'] & T \\ T \arrow[ur, "id_T"'] & \end{tikzcd}$$

ambos diagramas conmutan. La unicidad de la propiedad que verifica (T,u) implica: $j'\circ j = id_T$ y análogamente $j\circ j' = id_{T'}$, por lo que j es un isomorfismo. □

Proposición 3.4. *Sean $M_1,...,M_k$ R-módulos. Existe un par (T,u), donde T es un R-módulo y $u : M_1\times ...\times M_k \longrightarrow T$ una aplicación R-multilineal cuya imagen genera T, cumpliendo la siguiente propiedad:*

Dado un R-módulo P y una aplicación R-multilineal $g : M_1\times ...\times M_k \longrightarrow P$; existe una única aplicación, f, R-lineal haciendo que el siguiente diagrama conmute:

$$\begin{tikzcd} M_1\times ...\times M_k \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u"'] & P \\ T \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Además, si (T,u) y (T',u') son dos pares que cumplen esta propiedad: existe un isomorfismo $j : T \longrightarrow T'$ tal que $u' = j\circ u$.

Al único T salvo isomorfismo se le denomina producto tensorial de $M_1,...,M_k$. Se le donota por $T = M_1\otimes_R ...\otimes_R M_k$.

Demostración. Es posible realizar una demostración directa igual a la demostración anterior, tan solo modificando el submódulo S. Otra opción es utilizar el teorema anterior inductivamente. Suponer que se cumple para $k-1$ R-módulos:

Sea $g : M_1 \times ... \times M_k \longrightarrow P$ una aplicación (R,k)-lineal. La aplicación $g_{m_k} : M_1 \times ... \times M_{k-1} \longrightarrow P$ dada por $g_{m_k}(m_1, ..., m_{k-1}) = g(m_1, ..., m_{k-1}, m_k)$ con $m_i \in M_i$, $1 \leq i \leq k$ es $(R, k-1)$-lineal, por lo que tenemos el siguiente diagrama con el par (T_{k-1}, u_{k-1}), siendo $T_{k-1} = M_1 \otimes ... \otimes M_{k-1}$

$$\begin{tikzcd} M_1 \times ... \times M_{k-1} \arrow[r, "g_{m_k}"] \arrow[d, "u_{k-1}"'] & P \\ T_{k-1} \arrow[ur, "f_{m_k}"'] & \end{tikzcd}$$

donde f_{m_k} es lineal para cada m_k. Además cumple:

$$f_{m_k+m'_k} \circ u_{k-1} = g_{m_k+m'_k} = g_{m_k} + g_{m'_k} = (f_{m_k} + f_{m'_k}) \circ u_{k-1}$$

$$f_{rm_k} \circ u_{k-1} = g_{rm_k} = rg_{m_k} = r(f_{m_k} \circ u_{k-1})$$

Considerar la aplicación $f' : T_{k-1} \times M_k \longrightarrow P$ dada por $f'(t_{k-1}, m_k) = f_{m_k}(t_{k-1})$, que es claramente lineal en la primera componente y se cumple: $g = f' \circ (u_{k-1} \times id_{M_k})$. Además, sea $z \in T_{k-1}$, esto es, $z = \sum_{i=1}^{n}(m_i^i \otimes_R ... \otimes_R m_{k-1}^i) = \sum_{i=1}^{n} u_{k-1}(m_1^i, ..., m_{k-1}^i)$ y tenemos por las igualdades anteriores:

$$f'(z, m_3 + m'_3) = f_{m_3+m'_3}\left(\sum_{i=1}^{n} u_{k-1}(m_1^i, ..., m_{k-1}^i)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_{m_3+m'_3} \circ u_{k-1}(m_1^i, ..., m_{k-1}^i) =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} f_{m_3} \circ u_{k-1}(m_1^i, ..., m_{k-1}^i) + \sum_{i=1}^{n} f_{m'_3} \circ u_{k-1}(m_1^i, ..., m_{k-1}^i) = f'(z, m_3) + f'(z, m'_3)$$

De la misma forma se comprueba $f'(z, rm_3) = rf(z, m_3)$ y, por lo tanto, f' es bilineal. Entonces, existe un par (T, u') y una aplicación R-lineal $f : T \longrightarrow P$ tal que $f' = f \circ u'$, luego, $g = f \circ u' \circ (u_{k-1} \times id_{M_k})$. El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M_1 \times ... \times M_{k-1} \times M_k \arrow[r, "g"] \arrow[d, "u_{k-1} \times id_{M_k}"'] & P \\ T_{k-1} \times M_k \arrow[ur, "f'"] \arrow[d, "u'"'] & \\ T \arrow[uur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Tomando $u = u' \circ (u_{k-1} \times id_{M_k})$ se sigue el resultado escogiendo el par (T, u).

La demostración de la unicidad es idéntica a la del teorema anterior. □

Ejemplo 3.5. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$*:*

Los elementos de este producto tensorial son sumas finitas de elementos de la forma $r((z + n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} q)$ *con* $r \in R$, $z \in \mathbb{Z}$ *y* $q \in \mathbb{Q}$. *Pero:*

$$(z + n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} q = (z + n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{nq}{n} = n((z + n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{q}{n}) = (nz + n\mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{q}{n} = 0 \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{q}{n} = 0$$

Debido a esto, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} = 0$.

Proposición 3.6. *Sean M, N, P y Q R-módulos. Dos aplicaciones R-lineales $f : M \longrightarrow P$ y $g : N \longrightarrow Q$ inducen una aplicación R-lineal*

$$\begin{array}{rrcl} f \otimes_R g : & M \otimes_R N & \longrightarrow & P \otimes_R Q \\ & m \otimes_R n & \longmapsto & f(m) \otimes_R g(n) \end{array}$$

Demostración. Considerar la aplicación

$$\begin{array}{rrcl} f \times g : & M \times N & \longrightarrow & P \otimes Q \\ & (m, n) & \longmapsto & f(m) \otimes g(n) \end{array}$$

Vamos a comprobar que es bilineal:

$$\begin{aligned} (f \times g)_m(n + n') = f(m) \otimes_R g(n + n') &= f(m) \otimes_R g(n) + f(m) \otimes_R g(n') = \\ &= (f \times g)_m(n) + (f \times g)_m(n') \\ (f \times g)_m(rn) = f(m) \otimes_R g(rn) &= r(f(m) \otimes_R g(n)) = r(f \times g)_m(n) \end{aligned}$$

$(f \times g)_m$ es R-lineal.

$$\begin{aligned} (f \times g)_n(m + m') = f(m + m') \otimes_R g(n+) &= f(m) \otimes_R g(n) + f(m') \otimes_R g(n) = \\ &= (f \times g)_n(m) + (f \times g)_n(m') \\ (f \times g)_n(rm) = f(rm) \otimes_R g(n) &= r(f(m) \otimes_R g(n)) = r(f \times g)_n(m) \end{aligned}$$

$(f \times g)_n$ es también R-lineal.

Entonces, existe una única aplicación $f \otimes_R g : M \otimes_R N \longrightarrow P \otimes_R Q$ R-lineal tal que

$$(f \otimes_R g)(m \otimes n) = (f \times g)(m, n) = f(m) \otimes g(n)$$

□

Proposición 3.7. *Sean Λ, $\{M_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una familia de R-módulos y M, N, P también R-módulos:*

- *Existe un isomorfismo $b_1 : M \otimes_R N \longrightarrow N \otimes_R M$ tal que $b_1(m \otimes_R n) = n \otimes_R m$.*
- *Existe un isomorfismo $b_2 : (M \otimes_R N) \otimes_R P \longrightarrow M \otimes_R (N \otimes_R P)$ tal que $b_2((m \otimes_R n) \otimes_R p) = m \otimes_R (n \otimes_R p)$.*
- *Existe un isomorfismo $b_3 : R \otimes_R M \longrightarrow M$ tal que $b_3(r \otimes_R m) = rm$.*
- *Existe un isomorfismo $b_4 : (\bigoplus_\lambda M_\lambda) \otimes_R N \longrightarrow \bigoplus_\lambda (M_\lambda \otimes_R N)$ tal que $b_4((..., m_\lambda, ...) \otimes_R n) = (..., m_\lambda \otimes_R n, ...)$.*

Demostración. Al igual que en la proposición anterior, existen aplicaciones del producto directo (de los dos módulos que aparecen en el producto tensorial) al módulo de llegada que son bilineales. Por las propiedades del producto tensorial, existe una única aplicación R-lineal para cada una de ellas (b_2 hay que realizar este procedimiento dos veces).

Observamos que $b_1 \circ b_1 = 1$, $b_2^{-1}(m \otimes_R (n \otimes_R p)) = (m \otimes_R n) \otimes_R p$ se deduce del anterior razonamiento.

$b_3^{-1}(m) = 1 \otimes_R m$ ya que $(b_3 \circ b_3^{-1})(m) = b_3(1 \otimes_R m) = m$ y $(b_3^{-1} \circ b_3)(r \otimes_R m) = b_3^{-1}(rm) = 1 \otimes_R rm = r \otimes_R m$.

Por último, b_4^{-1} basta darla sobre elementos de la forma $(..., 0, m_\lambda \otimes_R n, 0, ...)$ (todo 0 excepto en la posición λ) y definirla sobre los demás como la suma de las imágenes de su descomposición en estos elementos Así $b_4^{-1}((..., 0, m_\lambda \otimes_R n, 0, ...)) = (..., 0, m_\lambda, 0, ...) \otimes_R n$.

$$(b_4 \circ b_4^{-1})\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(...,0,m_\lambda \otimes_R n_\lambda,0,...)\Big) = b_4\Big(\sum_{\lambda\in\Lambda}(...,0,m_\lambda,0,...)\otimes_R n_\lambda\Big) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(...,0,m_\lambda \otimes_R n_\lambda,0,...)$$

$$(b_4^{-1}\circ b_4)((...,m_{\lambda,...})\otimes_R n) = b_4^{-1}((...,m_\lambda \otimes_R n,...)) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(...,0,m_\lambda,0,...)\otimes_R n = (...,m_{\lambda,...})\otimes_R n$$

□

Proposición 3.8. *Sea M un R-módulo y A una R-álgebra vía $\varphi : R \longrightarrow A$. El R-módulo $A\otimes_R M$ es también un A-módulo con la operación $a\cdot(b\otimes m) = ab\otimes m$ $\forall a\in A$. Lo llamaremos extensión de escalares de R a A en M. En el caso $M = A$ hay que tener especial cuidado, ya que existen dos estructuras de A-módulo correspondientes a multiplicar en la derecha o en la izquierda.*

Demostración. Solo hay que comprobar que $a(b\otimes m + b'\otimes m') = ab\otimes m + ab'\otimes m'$ $\forall a,b,b'\in A,\ m,m'\in M$. Las demás condiciones son inmediatas a partir de esta y del hecho de que se cumplen para elementos de la forma $b\otimes m$, que generan $A\otimes_R M$.

Sea $a\in A$, definimos la aplicación que realiza la multiplicación por a en A,

$$\begin{array}{rccc} h_a: & A & \longrightarrow & A \\ & b & \longmapsto & ab \end{array}$$

que es un homomorfismo de anillos y de R-módulos ya que $h_a(rb) = a(rb) = r(ab) = rh_a(b)$. Ahora, tomamos la aplicación

$$\begin{array}{rccc} h_a\otimes id_M: & A\otimes_R M & \longrightarrow & A\otimes_R M \\ & b\otimes m & \longmapsto & ab\otimes m \end{array}$$

que es precisamente la multiplicación por $a\in A$ que habíamos definido. Sabemos que es R-lineal por ser h_a e id_M R-lineales. Así,

$$\begin{aligned} a(b\otimes m + b'\otimes m) &= (h_a\otimes id_M)(b\otimes m + b'\otimes m) = \\ = (h_a\otimes id_M)(b\otimes m) + (h_a\otimes id_M)(b'\otimes m) &= a(b\otimes m) + a(b'\otimes m) \end{aligned}$$

□

Ejemplo 3.9. *De los isomorfismos de la proposición 3.7 obtenemos que si $\varphi : R\longrightarrow A$ es una R-álgebra, la extensión de escalares de R a A en R^n es $A\otimes_R R^n \cong A^n$. Además, $A\otimes_R M(m\times n, R)\cong M(m\times n, A)$, también se cumple con el R-módulo de las matrices con coeficientes en R.*

Un caso muy común es $A = \mathbb{C}$ y $R = \mathbb{R}$, donde tenemos $\mathfrak{i} : \mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ la inclusión. Por ejemplo, para pasar de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}^n$ basta con realizar $\mathbb{C}\otimes\mathbb{R}^n\cong\mathbb{C}^n$.

Lema 3.10. *Sean M, N y P R-módulos. Entonces,*

$$\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R N, P) \overset{\Phi}{\cong} Bil_R(M\times N, P) \overset{\Psi}{\cong} \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(N,P))$$

siendo $Bil_R(M\times N, P)$ el conjunto de las aplicaciones R-bilineales de $M\times N$ en P.

Demostración. Sea $g : M \times N \longrightarrow P$ una aplicación R-bilineal. Entonces, definimos la aplicación $\Psi(g)(m) = g_m$, que es R-lineal $\forall m \in M$.

Por el otro lado, si $\lambda : M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N, P)$, la aplicación $\Psi^{-1}(\lambda)(m, n) = \lambda(m)(n)$ es una aplicación R-bilineal definida en $M \times N$.

Al componer,

$$(\Psi \circ \Psi^{-1})(\lambda)(m) = \Psi^{-1}(\lambda)_m = \lambda(m)$$

$$(\Psi^{-1} \circ \Psi)(g)(m, n) = \Psi(g)(m)(n) = g_m(n) = g(m, n)$$

Ahora, dada una aplicación R-lineal $f : M \otimes_R N \longrightarrow P$, definimos $\Phi(f) = (f \circ u)$, donde u es la aplicación canónica $u : M \times N \longrightarrow M \otimes_R N$. Para la inversa, sea $g : M \times N \longrightarrow P$ bilineal, entonces existe una única aplicación R-lineal $f : M \otimes_R N \longrightarrow P$ tal que $g = f \circ u$. Escogemos $\Phi^{-1}(g) = f$.

Si partimos de una aplicación R-lineal $f : M \otimes_R N \longrightarrow P$, $\Phi(f) = (f \circ u)$ y al aplicar $\Phi^{-1}(\Phi(f))$ obtenemos una aplicación R-lineal h tal que $\Phi(f) = (h \circ u)$. Debido a que f lo cumple y a la unicidad de la aplicación, se tiene que $\Phi^{-1}(\Phi(f)) = f$. Para finalizar, sea $g : M \times N \longrightarrow P$ R-bilineal. $\Phi(\Phi^{-1}(g)) = \Phi(f) = (f \circ u) = g$ ya que f cumple $g = f \circ u$.

□

Definición 3.11. *Sean N un R-módulo. Se define el funtor $- \otimes_R N : {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod} \longrightarrow {}_{\mathbf{R}}\mathbf{Mod}$ dado por:*

- $(- \otimes_R N)(M) = M \otimes_R N \quad \forall M$ *R-módulo.*
- $(- \otimes_R N)(f) = f \otimes id_N \quad \forall f : M \longrightarrow P$ *R-lineal.*

Dado que la composición afecta a las componentes por separado y al tensorizar la identidad obtenemos la identidad, se verifica que es un funtor. De la misma forma podemos definir el funtor $N \otimes_R -$, esencialmente, son el mismo ya que $N \otimes_R M \cong M \otimes_R N$ por la proposición 3.7.

Proposición 3.12. *El funtor* $\mathrm{Hom}_R(N, -)$ *es adjunto a derecha del funtor $- \otimes_R N$ $\forall N$ R-módulo.*

Demostración. Las biyecciones vienen dadas por el lema anterior. Fácilmente se verifica también el diagrama de la definición 2.18. □

Corolario 3.13. *Sea M un R-módulo. El funtor $M \otimes_R -$ es exacto a derecha. Por lo tanto, si $N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos, la sucesión $M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ es también exacta.*

Demostración. Por la proposición anterior $- \otimes_R M$ es adjunto a izquierda de $\mathrm{Hom}_R(N, -)$. Esto implica que $- \otimes_R M$ es exacto a derecha por 2.19. Finalmente, $N \otimes_R M \cong M \otimes_R N$ y podemos intercambiar las componentes. □

Ejemplo 3.14. *El funtor $M \otimes_R -$ no es siempre exacto a izquierda. Por ejemplo, podemos tomar la sucesión exacta $0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ y tensorizar por $\mathbb{Z}_n$. Así, tenemos $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Por 3.7, $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$ y por 3.5, $\mathbb{Z}_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \cong 0$, llegando a la sucesión $0 \longrightarrow \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0$, que no es exacta.*

Definición 3.15. *Un R-módulo M es plano si el funtor $M \otimes_R -$ es exacto. Un homomorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow A$ es plano si A es un R-módulo plano: en ese caso se dirá que A es una R-álgebra plana.*

Dado que el funtor $M \otimes_R -$ es siempre exacto a derecha, M es plano si y solo si $M \otimes_R -$ es exacto a izquierda.

Proposición 3.16. *Sea M un R-módulo. Son equivalentes:*

1. *M es plano.*
2. *Para cada homomorfismo $f : N' \longrightarrow N$ inyectivo, el homomorfismo $id_M \otimes f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ es también inyectivo.*
3. *La aplicación $id_M \otimes f : M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N$ es inyectiva para toda inyección $f : N' \longrightarrow N$ entre módulos finitamente generados.*

Demostración. 1)$\Longleftrightarrow$2) es el lema 2.17. *2) $\Longrightarrow$ 3)* es obvio.

3)$\Longrightarrow$ 2) Sea $f : N' \longrightarrow N$ inyectiva e $y = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i \in \operatorname{Ker}(id_M \otimes f)$, esto es, $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes f(x_i) = 0$, y, por lo tanto, $\sum_{i=1}^{n} (m_i, f(x_i)) \in S$, donde S es el submódulo por el que se cocienta el módulo libre generado por $M \times N'$ para obtener $M \otimes_R N'$. Considerar ahora el submódulo $N'_0 \leq M$ generado por los x_i. De lo anterior, $\sum_{i=1}^{n} (m_i, f(x_i)) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j s_j$ con $\alpha_j \in R$ y $s_j \in S$, donde podemos escoger los s_j tal que sean de la forma descrita en el Teorema 3.2, los elementos generadores de S.

Definimos $N_0 \leq N$, el submódulo generado por $f(N'_0)$ y las N-componentes de los s_j. Si s_j es de la forma $(x, y + y') - (x, y) - (x, y')$, añadimos y e y'. En otro caso hay una única N-componente.

Podemos considerar $M \otimes_R N_0 = F_0/S_0$, donde F_0 es el módulo libre generado por $M \times N_0$ y S_0 el submódulo de F_0 generado por los elementos de la forma anterior. Ahora, los $s_j \in S_0$ ya que las N-componentes pertencen a N_0 y en la componente de M no cambia nada. De aquí se deduce que $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes f(x_i) = 0$ también en $M \otimes N_0$.

El siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} N'_0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, hook, "\mathfrak{i}"] & N_0 \arrow[d, hook, "\mathfrak{i}"] \\ N' \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

con $f'(x) = f(x) \in N_0$, siendo f' un monomorfismo entre R-módulos finitamente generados. Por lo tanto, el siguiente diagrama también conmuta y, en particular, para $y = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i$

$$\begin{tikzcd} M \otimes_R N'_0 \arrow[r, "id_M \otimes f'"] \arrow[d, "id_M \otimes \mathfrak{i}"] & M \otimes N_0 \arrow[d, "id_M \otimes \mathfrak{i}"] \\ M \otimes_R N' \arrow[r, "id_M \otimes f"] & M \otimes_R N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i \arrow[r, "id_M \otimes f'"] \arrow[d, "id_M \otimes \mathfrak{i}"] & \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes f(x_i) = 0 \arrow[d, "id_M \otimes \mathfrak{i}"] \\ \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i \arrow[r, "id_M \otimes f"] & 0 \end{tikzcd}$$

Donde, por *3)*, $id_M \otimes f'$ es inyectiva, por lo que $\sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i = 0$ en $M \otimes_R N'_0$, pero su imagen por $id_M \otimes \mathfrak{i}$ es precisamente y, lo que implica $y = 0$ en $M \otimes_R N'$. Así, $\operatorname{Ker} id_M \otimes f = 0$ y la aplicación es inyectiva. □

Observación 3.17. *El hecho de que preserve monomorfismos nos asegura que, si tenemos $B \leq A$ un submódulo de un R-módulo A, podemos identificar $M \otimes_R B$ con un submódulo de $M \otimes_R A$, es decir, $M \otimes_R B \leq M \otimes_R A$.*

Lema 3.18. *Sean $M, N_1, N_2, B \leq A$ R-módulos y $f : N_1 \longrightarrow N_2$ R-lineal. Se verifica:*

1. $\operatorname{Im}(id_M \otimes f) = (id_M \otimes \mathfrak{i})(M \otimes_R \operatorname{Im} f)$
2. $(id_M \otimes \mathfrak{i})(M \otimes_R \operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker}(id_M \otimes f)$

Si, además, M es plano:

3. $M \otimes_R \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker}(id_M \otimes f)$
4. $(M \otimes_R A)/(M \otimes_R B) \cong M \otimes_R (A/B)$

Demostración. *1)* Es claro que $\operatorname{Im}(id_M \otimes f) \subset (id_M \otimes \mathfrak{i})(M \otimes_R \operatorname{Im} f)$. Los elementos de $M \otimes_R \operatorname{Im} f$ son combinaciones R-lineales de $m \otimes x$ con $m \in M,\ x \in \operatorname{Im} f$. Por esto último $\exists y \in N_1$ tal que $f(y) = x$ y por lo tanto $(id_M \otimes \mathfrak{i})(m \otimes x) = (id_M \otimes f)(m \otimes y)$.

2) Sea $z = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes x_i \in M \otimes_R \operatorname{Ker} f$. Aplicando $id_M \otimes f$:

$$(id_M \otimes f) \circ (id_M \otimes \mathfrak{i})(z) = (id_M \otimes (f \circ \mathfrak{i}))(z) = \sum_{i=1}^{n} (id_M \otimes f)(m_i \otimes x_i) = \sum_{i=1}^{n} m_i \otimes 0 = 0$$

y por lo tanto $(id_M \otimes \mathfrak{i})(M \otimes_R \operatorname{Ker} f) \subset \operatorname{Ker}(id_M \otimes f)$.

3) Sea ahora la sucesión exacta $0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f \xrightarrow{\mathfrak{i}} N_1 \xrightarrow{f} N_2$. Al tensorizar, la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R \operatorname{Ker} f \xrightarrow{id_M \otimes \mathfrak{i}} M \otimes_R N_1 \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R N_2$ es exacta por ser M plano, luego, $\operatorname{Ker}(id_M \otimes f) = \operatorname{Im}(id_M \otimes \mathfrak{i}) \overset{1)}{=} (id_M \otimes \mathfrak{i})(M \otimes_R \operatorname{Im} \mathfrak{i}) = M \otimes_R \operatorname{Ker} f$, viéndolo como submódulo de $M \otimes_R N_1$, aunque estrictamente sea la imagen de $id_M \otimes \mathfrak{i}$.

4) Primero notar que el primer cociente está bien definido porque M es plano. Considerar la aplicación $(id_M \otimes \pi) : M \otimes_R A \longrightarrow M \otimes_R (A/B)$ siendo $\pi : A \longrightarrow A/B$ la proyección canónica. Ahora, por *3)*, $\operatorname{Ker}(id_M \otimes \pi) = M \otimes_R \operatorname{Ker} \pi = M \otimes B$ y *1)*, $\operatorname{Im}(id_M \otimes \pi) = M \otimes_R \operatorname{Im} \pi = M \otimes_R (A/B)$. Utilizando el primer teorema de la isomorfía se obtiene el isomorfismo. □

Definición 3.19. *Un R-módulo M es fielmente plano si cualquier sucesión de R-módulos*

$$\ldots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f} Mi \xrightarrow{g} M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

es exacta si y solo si la sucesión

$$\ldots \longrightarrow M \otimes_R M_{i-1} \xrightarrow{id_M \otimes f} M \otimes_R Mi \xrightarrow{id_M \otimes g} M \otimes_R M_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

es exacta.

Un homomorfismo de anillos $\varphi : R \longrightarrow A$ es fielmente plano si A es un R-módulo fielmente plano: en ese caso se dirá que A es una R-álgebra fielmente plana.

Proposición 3.20. *Sea M un R-módulo plano. M es fielmente plano si y solo si $M \otimes_R N \neq 0 \ \ \forall N \neq 0$ R-módulo.*

Demostración. Si M es fielmente plano y N es un R-módulo tal que $M \otimes_R N = 0$, la sucesión $M \otimes_R N \xrightarrow{0} M \otimes_R N \longrightarrow 0$ es exacta y, por lo tanto, también es exacta la sucesión $N \xrightarrow{0} N \longrightarrow 0$, esto es, $N = 0$.

Recíprocamente, sea una sucesión de R-módulos $\ldots \longrightarrow N_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} N_i \xrightarrow{f_i} N_{i+1} \longrightarrow \ldots$ tal que $\ldots \longrightarrow N_{i-1} \xrightarrow{id_M \otimes f_{i-1}} M \otimes_R N_i \xrightarrow{id_M \otimes f_i} M \otimes_R N_{i+1} \longrightarrow \ldots$ es una sucesión exacta. Entonces, utilizando el lema 3.18:

$$0 = (\operatorname{Ker}(id_M \otimes f_i))/(\operatorname{Im}(id_M \otimes f_{i-1})) = (M \otimes_R \operatorname{Ker} f_i)/(M \otimes_R \operatorname{Im} f_{i-1}) \cong M \otimes_R (\operatorname{Ker} f_i / \operatorname{Im} f_{i-1})$$

que, por hipótesis, implica $\operatorname{Ker} f_i / \operatorname{Im} f_{i-1} = 0$, es decir, $\operatorname{Ker} f_i = \operatorname{Im} f_{i-1}$. □

Capítulo 4

Descenso Fielmente Plano

Sean R, S anillos y $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Bajo estas condiciones, S es un R-módulo vía φ y dado N R-módulo, $S \otimes_R N$ es un S-módulo llamado extensión de escalares de R a S (ver definición 3.8). Lo denotaremos como $S \otimes_{R,\varphi} N$ para remarcar la estructura de S como R-módulo.

Ahora, si tenemos un S módulo M: ¿es este una extensión de escalares de R a S? Es decir, estamos preguntando si, dado un S-módulo M, existe un R-módulo N tal que $M \cong S \otimes_{R,\varphi} N$. Diremos en caso afirmativo que M desciende a R.

Así, nos interesa caracterizar los S-módulos que descienden a R.

Ejemplo 4.1. *Sea F un S-módulo libre y $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos. Entonces F desciende a R. Sea $\{v_i\}_{i \in I}$ una base de F.*

$$S \otimes_R (\oplus_{i \in I} R) \cong \oplus_{i \in I}(S \otimes_R R) \cong \oplus_{i \in I} S \cong F$$

Notación 4.2. *$N_1, ..., N_m, Q_1, ..., Q_m$ R-módulos, $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos y $\psi : N_1 \otimes_R ... \otimes_R N_m \longrightarrow Q_1 \otimes_R ... \otimes_R Q_m$ homomorfismo de R-módulos. Denotaremos por ϵ_i y ψ_i a los homomorfismos*

$$\begin{array}{rrcl} \epsilon_i : & N_1 \otimes_R ... \otimes_R N_m & \longrightarrow & N_1 \otimes_R ... \otimes_R N_{i-1} \otimes_R S \otimes_R N_i \otimes_R ... \otimes_R N_m \\ & x_1 \otimes ... \otimes x_m & \longmapsto & x_1 \otimes ... \otimes x_{i-1} \otimes 1 \otimes x_i \otimes ... \otimes x_m \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} \psi_i : & N_1 \otimes_R ... \otimes_R N_{i-1} \otimes_R S \otimes_R N_i \otimes_R ... \otimes_R N_m & \longrightarrow & Q_1 \otimes_R ... \otimes_R Q_{i-1} \otimes_R S \otimes_R Q_i \otimes_R ... \otimes_R Q_m \\ & x_1 \otimes ... \otimes x_{i-1} \otimes s \otimes x_i \otimes ... \otimes x_m & \longmapsto & \sum y_1 \otimes ... \otimes y_{i-1} \otimes s \otimes y_i \otimes ... \otimes y_m \end{array}$$

con $\psi(x_1 \otimes ... \otimes x_m) = \sum y_1 \otimes ... \otimes y_m$. Ambas se extienden R-linealmente a un homomorfismo de R-módulos. Notar entonces que

$$\psi_i(x_1 \otimes ... \otimes x_{i-1} \otimes s \otimes x_i \otimes ... \otimes x_m) = s \cdot \epsilon_i(\psi(x_1 \otimes ... \otimes x_m))$$

Es claro que ϵ_i es R-lineal por ser $f : N_1 \times ... \times N_m \longrightarrow Q_1 \otimes_R ... \otimes_R Q_{i-1} \otimes_R S \otimes_R Q_i \otimes_R ... \otimes_R Q_m$ con $f(x_1, ..., x_m) = \epsilon_i(x_1 \otimes ... \otimes x_m)$ R-multilineal.

Igualmente, la aplicación $g : N_1 \otimes_R ... \otimes_R N_m \times S \longrightarrow Q_1 \otimes_R ... \otimes_R Q_{i-1} \otimes_R S \otimes_R Q_i \otimes_R ... \otimes_R Q_m$ dada por $g(x_1 \otimes ... \otimes x_n, s) = s \cdot \epsilon_i(\psi(x_1 \otimes ... \otimes x_m))$ es R-bilineal y por lo tanto induce una aplicación R-lineal en el producto tensorial, donde, reorganizando el orden de los módulos, obtenemos el homomorfismo ψ_i.

Lema 4.3. *Si tenemos el siguiente diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & C \arrow[d, "h"] \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "\gamma"'] & Y \arrow[r, "\delta"'] & Z \end{tikzcd}$$

siendo las filas sucesiones exactas de R-módulos y h, g isomorfismos; entonces f es también un isomorfismo.

Demostración. Si $a \in \operatorname{Ker} f$, $\gamma \circ f(a) = g \circ \alpha(a) = 0$ y como g es isomorfismo, se sigue $\alpha(a) = 0$. A su vez α es inyectiva por la exactitud de la fila, luego, $a = 0$.

Sea ahora $x \in X$, $\gamma(x) \in Y$ y podemos escoger $g^{-1}(\gamma(x)) = b \in B$, que es único por ser g isomorfismo. Notar que $g(b) = \gamma(x) \in \operatorname{Im} \gamma = \operatorname{Ker} \delta$, es decir, $\delta \circ g(b) = h \circ \beta(b) = 0$. Como antes, h isomorfismo implica $\beta(b) = 0$ y $b \in \operatorname{Ker} \beta = \operatorname{Im} \alpha$, por lo que existe $a \in A$ tal que $\alpha(a) = b$. Para terminar, $\gamma \circ f(a) = g \circ \alpha(a) = g(b) = \gamma(x)$ y por ser γ inyectiva $f(a) = x$. □

Definición 4.4. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ un homomorfismo de anillos fielmente plano, esto es, S es un R-módulo fielmente plano vía φ. Decimos entonces que la extensión S/R es fielmente plana.*

Lema 4.5 (Amitsur-Grothendieck)**.** *Sea S/R una extensión fielmente plana y N un R-módulo. La sucesión*

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow N & \xrightarrow{\epsilon_1} & S \otimes_R N & \xrightarrow{\epsilon_1 - \epsilon_2} & S \otimes_R S \otimes_R N \\ x & \longmapsto & 1 \otimes x & & \\ & & s \otimes x & \longmapsto & 1 \otimes s \otimes x - s \otimes 1 \otimes x \end{array}$$

es exacta y por lo tanto $N \cong \operatorname{Im} \epsilon_1 = \operatorname{Ker}(\epsilon_1 - \epsilon_2) = \{z \in S \otimes_R N \mid \epsilon_1(z) = \epsilon_2(z)\}$.

Demostración. Por ser S/R fielmente plana, la sucesión es exacta si y solo si la sucesión

$$\begin{array}{ccccc} 0 \longrightarrow S \otimes_R N & \xrightarrow{id_S \otimes \epsilon_1} & S \otimes_R S \otimes_R N & \xrightarrow{id_S \otimes (\epsilon_1 - \epsilon_2)} & S \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R N \\ s \otimes x & \longmapsto & s \otimes 1 \otimes x & & \\ & & s \otimes t \otimes x & \longmapsto & s \otimes 1 \otimes t \otimes x - s \otimes t \otimes 1 \otimes x \end{array}$$

es exacta. Observar que $id_S \otimes \epsilon_1 = \epsilon_2$ e $id_S \otimes (\epsilon_1 - \epsilon_2) = \epsilon_2 - \epsilon_3$. Considerar el homomorfismo de R-módulos

$$\begin{array}{rccc} \lambda : & S \otimes_R S \otimes_R N & \longrightarrow & S \otimes_R N \\ & s_1 \otimes s_2 \otimes n & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes n \end{array}$$

Entonces, $\forall s \in S,\ \forall x \in N$

$$\lambda \circ \epsilon_2(s \otimes x) = \lambda(s \otimes 1 \otimes x) = s \otimes x$$

por lo tanto $\lambda \circ \epsilon_2 = id_{S \otimes_R N}$ y $\epsilon_2 = id_S \otimes \epsilon_1$ es inyectiva.

Falta ver la exactitud en $S \otimes_R S \otimes_R N$: Sea $z = \sum_{i=1}^n s_i \otimes t_i \otimes n_i \in \operatorname{Ker}(\epsilon_2 - \epsilon_3)$, se cumple

$$\epsilon_2(z) = \sum_{i=1}^n s_i \otimes 1 \otimes t_i \otimes n_i = \sum_{i=1}^n s_i \otimes t_i \otimes 1 \otimes n_i = \epsilon_3(z)$$

Sea ahora

$$\begin{array}{rccc} \delta : & S \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R N & \longrightarrow & S \otimes_R S \otimes_R N \\ & s_1 \otimes s_2 \otimes s_3 \otimes x & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes s_3 \otimes x \end{array}$$

que es un homomorfismo de R-módulos. Utilizando esta aplicación y la igualdad anterior:

$$z = \sum_{i=1}^n s_i \otimes t_i \otimes n_i = \delta(\sum_{i=1}^n s_i \otimes 1 \otimes t_i \otimes n_i) = \delta(\sum_{i=1}^n s_i \otimes t_i \otimes 1 \otimes n_i) = \sum_{i=1}^n s_i t_i \otimes 1 \otimes n_i = \epsilon_2(\sum_{i=1}^n s_i t_i \otimes n_i)$$

Luego, $z \in \operatorname{Im} \epsilon_2$ y $\operatorname{Ker}(\epsilon_2 - \epsilon_3) \subset \operatorname{Im} \epsilon_2$

Para el otro contenido, basta ver que la composición es 0.

$$s \otimes x \overset{\epsilon_2}{\longmapsto} s \otimes 1 \otimes x \overset{\epsilon_2 - \epsilon_3}{\longmapsto} s \otimes 1 \otimes 1 \otimes x - s \otimes 1 \otimes 1 \otimes x = 0$$

Así, $\operatorname{Ker}(\epsilon_1 - \epsilon_2) = \operatorname{Im} \epsilon_2$ y la sucesión es exacta. Esto implica que la original es también exacta. □

Corolario 4.6. *Si S/R es una extensión fielmente plana vía $\varphi : R \longrightarrow S$, φ es inyectiva.*

Demostración. Aplicando el lema anterior escogiendo R como R-módulo, la sucesión $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\epsilon_1} S \otimes_R R \overset{b_3}{\cong} S$ es exacta y, por lo tanto, la aplicación $b_3 \circ \epsilon_1$ es inyectiva. Ahora, $\forall r \in R$

$$b_3 \circ \epsilon_1(r) = b_3(1 \otimes r) = r \cdot 1 = \varphi(r)$$

$\varphi = b_3 \circ \epsilon_1$ es inyectiva. □

Proposición 4.7. *Con las condiciones de la introducción; $\varphi : R \longrightarrow S$ homomorfismo de anillos, $S \otimes_R S$ es también un anillo. Por lo tanto, las aplicaciones*

$$\epsilon_1 : S \longrightarrow S \otimes_R S \qquad \epsilon_2 : S \longrightarrow S \otimes_R S$$

son homomorfismos de anillos.

Dado un S-módulo M, podemos construir dos $S \otimes_R S$-módulos distintos

$$(S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_1} M \qquad (S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_2} M$$

Además, $S \otimes_R M$ es un $S \otimes_R S$-módulo. De hecho, también hay dos estructuras distintas. Denotaremos por $S \otimes_R M$ al $S \otimes_R S$-módulo con la operación $(s_1 \otimes s_2)(s \otimes m) = s_1 s \otimes s_2 m$ y por $M \otimes_R S$ si la operación es $(s_1 \otimes s_2)(m \otimes s) = s_1 m \otimes s_2 s$.

Demostración. $S \otimes_R S$ es un anillo: la aplicación

$$\begin{array}{rcl} S \times S \times S \times S & \longrightarrow & S \otimes_R S \\ (s_1, s_2, s_3, s_4) & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes s_3 s_4 \end{array}$$

es R-multilineal, luego,

$$\begin{array}{rcl} (S \otimes_R S) \times (S \otimes_R S) & \longrightarrow & S \otimes_R S \\ (s_1 \otimes s_2, s_3 \otimes s_4) & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes s_3 s_4 \end{array}$$

es R-bilineal. Tomando como unidad $1 \otimes 1$ y la anterior multiplicación $S \otimes_R S$ es un anillo.

La segunda parte consiste en aplicar la proposición 3.8 para ϵ_1 y ϵ_2.

Finalmente, la aplicación

$$\begin{array}{rcl} S \times S \times S \times M & \longrightarrow & S \otimes_R M \\ (s_1, s_2, s_3, m) & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes s_3 m \end{array}$$

es R-multilineal, luego,

$$\begin{array}{rcl} S \otimes_R S \times S \otimes_R M & \longrightarrow & S \otimes_R S \\ (s_1 \otimes s_2, s_3 \otimes m) & \longmapsto & s_1 s_2 \otimes s_3 m \end{array}$$

es R-bilineal y es precisamente la multiplicación por escalares. Efectivamente al multiplicar por $1 \otimes 1$ obtenemos el mismo elemento y la última condición se verifica fácilmente también. □

Lema 4.8. *Existen isomorfismos de $(S \otimes_R S)$-módulos*

- $(S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_1} M \cong S \otimes_R M$
- $(S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_2} M \cong M \otimes_R S$

Demostración. Considerar la aplicación R-bilineal en las dos primeras componentes:

$$\begin{array}{rcl} (S \times S) \times M & \longrightarrow & S \otimes_R M \\ ((s_1, s_2), m) & \longmapsto & s_1 \otimes s_2 m \end{array}$$

Existe entonces una aplicación R-lineal en la primera componente y S-lineal en la segunda con la multiplicación $t(s \otimes m) = s \otimes tm \ \forall t \in S,\ s \otimes m \in S \otimes_R M$:

$$\begin{array}{rcl} (S \otimes_R S) \times M & \longrightarrow & S \otimes_R M \\ (s_1 \otimes s_2, m) & \longmapsto & s_1 \otimes s_2 m \end{array}$$

En la primera componente es también S-lineal, donde $S \otimes_R S$ es S-módulo vía ϵ_1, esto es, $t(s_1 \otimes s_2) = s_1 \otimes ts_2 \ \ \forall t, s_1, s_2 \in S$. Luego, es S-bilineal, por lo que existe una aplicación S-lineal

$$\begin{array}{rrcl} f: & (S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_1} M & \longrightarrow & S \otimes_R M \\ & (s_1 \otimes s_2) \otimes m & \longmapsto & s_1 \otimes s_2 m \end{array}$$

donde ϵ_1 aparece por la estructura que le hemos dado de S-módulo a $S \otimes_R S$ (para el segundo isomorfismo, la estructura de S-módulo es la contraria, por lo que aparecerá ϵ_2).

Falta ver que es $(S \otimes_R S)$-lineal. Sean $(s_1 \otimes s_2) \otimes m \in (S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_1} M$ y $t_1 \otimes t_2 \in S \otimes_R S$

$$\begin{aligned} f((t_1 \otimes t_2)((s_1 \otimes s_2) \otimes m)) &= f((t_1 s_1 \otimes_R t_2 s_2) \otimes m) = t_1 s_1 \otimes t_2 s_2 m = \\ &= (t_1 \otimes t_2)(s_1 \otimes s_2 m) = (t_1 \otimes t_2) f((s_1 \otimes s_2) \otimes m) \end{aligned}$$

Para finalizar, sea

$$\begin{array}{rrcl} g: & S \otimes_R M & \longrightarrow & (S \otimes_R S) \otimes_{S,\epsilon_1} M \\ & s \otimes m & \longmapsto & (s \otimes 1) \otimes m \end{array}$$

$$g \circ f((s_1 \otimes s_2) \otimes m) = g(s_1 \otimes s_2 m) = s_1 \otimes 1 \otimes s_2 m = s_2((s_1 \otimes 1) \otimes m) = (s_1 \otimes s_2) \otimes m$$

$$f \circ g(s_1 \otimes m) = f(s_1 \otimes 1) \otimes m) = s_1 \otimes m$$

Por lo que f es un isomorfismo. Para el segundo basta realizar el mismo procedimiento simplemente cambiando el subíndice de las ϵ. □

Ejemplo 4.9. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ homomorfismo de anillos y $M = S \otimes_R N$ con N R-módulo, por lo que M es S-módulo (extensión de escalares) y $S \otimes_R M$, $M \otimes_R S$ son $S \otimes_R S$-módulos. Tomamos la aplicación:*

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & S \otimes_R M & \longrightarrow & M \otimes_R S \\ & s_1 \otimes (s_2 \otimes n) & \longmapsto & (s_1 \otimes n) \otimes s_2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} &\Phi((t_1 \otimes t_2)(s_1 \otimes (s_2 \otimes n))) = \Phi((t_1 s_1) \otimes (t_2 s_2 \otimes n)) = (t_1 s_1 \otimes n) \otimes t_2 s_2 = \\ &= (t_1 \otimes t_2)((s_1 \otimes n) \otimes s_2) = (t_1 \otimes t_2)\Phi(s_1 \otimes (s_2 \otimes n)) \end{aligned}$$

que es un homomorfismo de $S \otimes_R S$-módulos. De forma similar se define su inversa y se comprueba que es también $S \otimes_R S$-lineal, luego, es un isomorfismo. La aplicación Φ es también llamada g canónica: g_{can}.

Podemos considerar ahora las aplicaciones $(g_{can})_1$, $(g_{can})_2$ y $(g_{can})_3$:

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R S \otimes_R M \arrow[rr, "(g_{can})_2"] \arrow[dr, "(g_{can})_1"'] & & M \otimes_R S \otimes_R S \\ & S \otimes_R M \otimes_R S \arrow[ur, "(g_{can})_3"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} s_1 \otimes s_2 \otimes (s_3 \otimes n) \arrow[rr, mapsto, "(g_{can})_2"] \arrow[dr, mapsto, "(g_{can})_1"'] & & (s_1 \otimes n) \otimes s_2 \otimes s_3 \\ & s_1 \otimes (s_2 \otimes n) \otimes s_3 \arrow[ur, mapsto, "(g_{can})_3"'] & \end{tikzcd}$$

Se tiene $(g_{can})_2 = (g_{can})_3 \circ (g_{can})_1$

Definición 4.10. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ homomorfismo de anillos y M S-módulo. Se llama dato de descenso de M a todo isomorfismo de $S \otimes_R S$-módulos $g : S \otimes_R M \longrightarrow M \otimes_R S$ que verifique $g_2 = g_3 \circ g_1$.*

Definición 4.11. *Sea $\varphi : R \longrightarrow S$ homomorfismo de anillos. Definimos la categoría ${}_{S/R}Mod$ cuyos objetos son las duplas (M, g) con M S-módulo y g dato de descenso. Los morfismos son*

$$\psi \in \operatorname{Hom}_{S/R}((M,g),(M',g')) \Longleftrightarrow \psi \in \operatorname{Hom}_S(M,M') \text{ y el siguiente diagrama conmuta}$$

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "id\otimes\psi"'] & M \otimes_R S \arrow[d, "\psi\otimes id"] \\
S \otimes_R M' \arrow[r, "g'"'] & M' \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

Teorema 4.12 (Grothendieck)**.** *Sea S/R una extensión fielmente plana. El funtor*

$$\begin{array}{llll}
F: & {}_RMod & \longrightarrow & {}_{S/R}Mod \\
 & N & \longmapsto & (S \otimes_R N, g_{can}) \\
 & (\alpha : N \to N') & \longmapsto & (id_s \otimes \alpha : S \otimes_R N \to S \otimes_R N')
\end{array}$$

está bien definido y es una equivalencia de categorías.

Demostración. Para morfismos

Bien definido: $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(N, N')$.

Sabemos que $id_S \otimes \alpha$ está bien definida y es homomorfismo de S-módulos. Falta ver que el diagrama anterior conmuta:

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R (S \otimes_R N) \arrow[r, "g_{can}"] \arrow[d, "id_S\otimes(id_S\otimes\alpha)"'] & (S \otimes_R N) \otimes_R S \arrow[d, "(id_S\otimes\alpha)\otimes id_S"] \\
S \otimes_R (S \otimes_R N') \arrow[r, "g'_{can}"'] & (S \otimes_R N') \otimes_R S
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
s_1 \otimes (s_2 \otimes n) \arrow[r, "g_{can}"] \arrow[d, "id_S\otimes(id_S\otimes\alpha)"'] & (s_1 \otimes n) \otimes s_2 \arrow[d, "(id_S\otimes\alpha)\otimes id_S"] \\
s_1 \otimes (s_2 \otimes \alpha(n)) \arrow[r, "g'_{can}"'] & (s_1 \otimes \alpha(n)) \otimes s_2
\end{tikzcd}$$

y por lo tanto, el funtor está bien definido sobre los morfismos.

Inyectividad: Sea $\alpha \in \operatorname{Hom}_R(N, N')$ tal que $id_S \otimes \alpha = 0$. Entonces, la sucesión $S \otimes_R N \xrightarrow{id_S\otimes\alpha} S \otimes_R N' \xrightarrow{id_S\otimes id_{N'}} S \otimes_R N'$ es exacta y como S es un R-módulo fielmente plano, la sucesión $N \xrightarrow{\alpha} N' \xrightarrow{id_{N'}} N'$ es también exacta, es decir, $\alpha = 0$.

Sobreyectividad: Sea $\eta \in \operatorname{Hom}_{S/R}((S \otimes_R N, g_{can}), (S \otimes_R N', g'_{can}))$. Entonces η es un homomorfismo de S-módulos tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R (S \otimes_R N) \arrow[r, "g_{can}"] \arrow[d, "id_S\otimes\eta"'] & (S \otimes_R N) \otimes_R S \arrow[d, "\eta\otimes id_S"] \\
S \otimes_R (S \otimes_R N') \arrow[r, "g'_{can}"'] & (S \otimes_R N') \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

Sea $\eta(1 \otimes x) = \sum_{i=1}^n s_i \otimes y_i$.

$$(\eta \otimes id_S) \circ g_{can}(1 \otimes (1 \otimes x)) = (\eta \otimes id_S)((1 \otimes x) \otimes 1) = \sum_{i=1}^n (s_i \otimes y_i) \otimes 1$$

$$g'_{can} \circ (id_S \otimes \eta)(1 \otimes (1 \otimes x)) = g'_{can}(\sum_{i=1}^{n} 1 \otimes (s_i \otimes y_i)) = \sum_{i=1}^{n} (1 \otimes y_i) \otimes s_i$$

Es decir, $\sum_{i=1}^{n}(s_i \otimes y_i) \otimes 1 = \sum_{i=1}^{n}(1 \otimes y_i) \otimes s_i$.

Utilizando los isomorfismos de la proposición 3.7 (en particular b_2 y después b_1), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes 1 \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes s_i \otimes y_i$$

y por lo tanto,

$$\epsilon_2(\eta(1 \otimes x)) = \epsilon_2 \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes y_i \right) = \sum_{i=1}^{n} s_i \otimes 1 \otimes y_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \otimes s_i \otimes y_i = \epsilon_1 \left(\sum_{i=1}^{n} s_i \otimes y_i \right) = \epsilon_1(\eta(1 \otimes x))$$

Así pues, $\eta(1 \otimes x) \in \operatorname{Ker}(\epsilon_1 - \epsilon_2) = \operatorname{Im} \epsilon_1$ por el lema 4.5, siendo ϵ_1 inyectiva.

Esto implica que $\forall x \in N, \exists! x' \in N'$ tal que $\eta(1 \otimes x) = 1 \otimes x'$.

Definimos

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & N & \longrightarrow & N' \\ & x & \longmapsto & x' \end{array}$$

Se cumple $\forall x, z \in N,\ r \in R$:

$$\eta(1 \otimes (x + z)) = \eta(1 \otimes x + 1 \otimes z) = (1 \otimes \alpha(x)) + (1 \otimes \alpha(z)) = 1 \otimes (\alpha(x) + \alpha(z))$$

$$\eta(1 \otimes rx) = \eta(\varphi(r) \otimes x) = \varphi(r)(\eta(1 \otimes x)) = \varphi(r)(1 \otimes \alpha(x)) = \varphi(r) \otimes \alpha(x) = 1 \otimes r\alpha(x)$$

luego, $\alpha(x + z) = \alpha(x) + \alpha(z)$, $\alpha(rx) = r\alpha(x)$ y α es un homomorfismo de R-módulos.

Finalmente, $\eta(s \otimes x) = s\eta(1 \otimes x) = s(1 \otimes \alpha(x)) = s \otimes \alpha(x)$, por lo que $\eta = id_S \otimes \alpha$.

$\underline{(M, g) \cong (S \otimes_R N, g_{can})}$:

Sea (M, g) un objeto de ${}_{\mathbf{S/R}}\mathbf{Mod}$, $g : S \otimes_R M \xrightarrow{\cong} M \otimes_R S$ y

$$N := \{x \in M \mid g(1 \otimes x) = x \otimes 1\}$$

Si $x, y \in N$, entonces

$$g(1 \otimes (x + y)) = g(1 \otimes x + 1 \otimes y) = g(1 \otimes x) + g(1 \otimes y) = x \otimes 1 + y \otimes 1 = (x + y) \otimes 1$$

$$g(1 \otimes rx) = g((1 \otimes \varphi(r))(1 \otimes x)) = (1 \otimes \varphi(r))(g(1 \otimes x)) = (1 \otimes \varphi(r))(x \otimes 1) = (x \otimes \varphi(r)) = rx \otimes 1$$

por lo que N es un R-submódulo de M (no S-submódulo).

Sea ahora el homomorfismo de S-módulos

$$\begin{array}{rccc} \eta : & S \otimes_R N & \longrightarrow & M \\ & s \otimes n & \longmapsto & sn \end{array}$$

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R (S \otimes_R N) \arrow[r, "g_{can}"] \arrow[d, "id_S \otimes \eta"'] & (S \otimes_R N) \otimes_R S \arrow[d, "\eta \otimes id_S"] \\ S \otimes_R M \arrow[r, "g"] & M \otimes_R S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \otimes (1 \otimes x) \arrow[r, "g_{can}"] \arrow[d, "id_S \otimes \eta"'] & (1 \otimes x) \otimes 1 \arrow[d, "\eta \otimes id_S"] \\ 1 \otimes x \arrow[r, "g"] & x \otimes 1 \end{tikzcd}$$

Como todas las aplicaciones del diagrama son $S \otimes_R S$-lineales, basta escribir cada elemento generador $s_1 \otimes (s_2 \otimes x) \in S \otimes_R (S \otimes_R S)$ como $s_1 \otimes (s_2 \otimes x) = (s_1 \otimes s_2)(1 \otimes (1 \otimes x))$ y el diagrama conmuta. Por consiguiente, η es un morfismo de ${}_{\mathbf{S/R}}\mathbf{Mod}$.

Para ver que es un isomorfismo, utilizaremos el Lema 4.3 al siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & S \otimes_R N \arrow[r, "id_S \otimes \mathfrak{i}"] \arrow[d, "\eta"'] & S \otimes_R M \arrow[r, "g_1 \circ \epsilon_2 - \epsilon_3"] \arrow[d, "g"] & S \otimes_R M \otimes_R S \arrow[d, "g_3"] \\ 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "\epsilon_2"] & M \otimes_R S \arrow[r, "\epsilon_2 - \epsilon_3"] & M \otimes_R S \otimes_R S \end{tikzcd}$$

Sean $s \in S,\ x \in N$,

$$\begin{aligned} g \circ (id_S \otimes \mathfrak{i})(s \otimes x) =& g(s \otimes x) = g((s \otimes 1)(1 \otimes x)) = (s \otimes 1)g(1 \otimes x) \overset{x \in N}{=} (s \otimes 1)(x \otimes 1) = \\ =& sx \otimes 1 = \epsilon_2(sx) = \epsilon_2 \circ \eta(s \otimes x) \end{aligned}$$

Sean ahora $s \in S,\ y \in M$ y $g(s \otimes y) = \sum_{i=1}^n y_i \otimes s_i$. Por un lado,

$$(\epsilon_2 - \epsilon_3) \circ g(s \otimes y) = \sum_{i=1}^n y_i \otimes 1 \otimes s_i - \sum_{i=1}^n y_i \otimes s_i \otimes 1$$

Por otro lado, recordar que g es dato de descenso y, por lo tanto, $g_3 \circ g_1 = g_2$,

$$\begin{aligned} g_3 \circ (g_1 \circ \epsilon_2 - \epsilon_3)(s \otimes y) =& g_3 \circ g_1(s \otimes 1 \otimes y) - g_3(s \otimes y \otimes 1) = g_2(s \otimes 1 \otimes y) - g_3(s \otimes y \otimes 1) = \\ =& \sum_{i=1}^n y_i \otimes 1 \otimes s_i - \sum_{i=1}^n y_i \otimes s_i \otimes 1 \end{aligned}$$

Así, el diagrama conmuta.

Las aplicaciones g y g_3 son isomorfismos de $S \otimes_R S$-módulos, pero también de R-módulos, precisamente porque $g(r(s \otimes n)) = (\varphi(r) \otimes 1)g(s \otimes n) = rg(s \otimes n)\ \forall r \in R,\ n \in N,\ s \in S$. La sucesión de abajo es exacta por el Lema 4.5 (de hecho es la sucesión exacta que resulta al tensorizar la original en el lema). Falta ver que la sucesión de arriba es exacta:

Notar que, en primer lugar, la inclusión es inyectiva y, por ser S un R-módulo plano, $id_S \otimes \mathfrak{i}$ es también inyectiva. Además,

$$(g_1 \circ \epsilon_2 - \epsilon_3)(s \otimes x) = g_1(s \otimes 1 \otimes y) - s \otimes y \otimes 1 = s \otimes g(1 \otimes y) - s \otimes y \otimes 1 = s \otimes (g(1 \otimes y) - y \otimes 1)$$

Esto es, $g_1 \circ \epsilon_2 - \epsilon_3 = id_S \otimes h$, donde

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \longrightarrow & M \otimes_R S \\ & y & \longmapsto & g(1 \otimes y) - y \otimes 1 \end{array}$$

En particular, $\operatorname{Ker} h = N$. Por el Lema 3.18; $\operatorname{Ker}(g_1 \circ \epsilon_2 - \epsilon_3) = \operatorname{Ker}(id_S \otimes h) = S \otimes \operatorname{Ker} h = S \otimes N = \operatorname{Im}(id_S \otimes \mathfrak{i})$ y la sucesión de arriba es también exacta.

Ahora sí, aplicando el Lema 4.3, η es un isomorfismo de R-módulos, es decir, es una biyección, pero también es S-lineal, por lo que es un isomorfismo de S-módulos que, además, respeta la estructura de dato de descenso, luego, un isomorfismo en la categoría ${}_{\mathbf{S/R}}\mathbf{Mod}$. □

Bibliografía

[1] Andrea Garuti, M. Commutative algebra lecture notes. Università degli Studi di Padova, `https://www.math.unipd.it/~mgaruti/CA/50sNak.pdf`, 2017.

[2] Atiyah, M. F., and MacDonald, I. G. *Introduction to commutative algebra.* Addison Wesley Publishing Company, 1994.

[3] Grothendieck, A. Technique de descente et théorèmes d'existence en géométrie algébrique. i. généralités. descente par morphismes fidèlement plats. In *Séminaire N. Bourbaki* (1960), no. 5.

[4] Knus, M. A., and Ojanguren, M. *Theorie de la descente et algebres d'Azumaya.* Springer, 1974.