



**Universidad**  
**Zaragoza**

# Trabajo Fin de Grado

## Introducción a las teorías de Gran Unificación

Autor

Juan Ignacio Ocaña Parral

Directora

Siannah Peñaranda Rivas

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
2022/2023

# Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>1</b>
<b>2. Modelo Estándar.</b>	<b>2</b>
2.1. QED en el SM. Lagrangiano. Grupo de renormalización. . . . .	3
2.2. Interacción electrodébil. Relación entre constantes y observables. . . . .	7
2.2.1. Unificación de los acoplos <i>gauge</i> . . . . .	8
2.3. QCD en el SM. . . . .	10
2.4. Constantes de acoplo y unificación. . . . .	13
<b>3. Modelos de Gran Unificación.</b>	<b>15</b>
3.1. SUSY. . . . .	16
3.1.1. Lagrangiano Supersimétrico. . . . .	20
<b>4. Conclusiones.</b>	<b>24</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>25</b>
<b>A. Anexo A</b>	<b>26</b>
A.1. Grupo de simetría $U(1)$ . . . . .	26
A.2. Invariancia del lagrangiano de QED bajo transformaciones del grupo $U(1)$ . . .	26
A.3. Dependencia de las constantes $b_i$ . . . . .	27
A.4. Obtención de las ecuaciones del grupo de renormalización. . . . .	28
A.5. Comprobación de la ruptura de simetría asociada a los bosones gauge. . . . .	29
A.6. Desarrollo de las derivadas covariantes en el modelo EW. . . . .	30
A.7. Lagrangiano EW en función de los bosones físicos. . . . .	30
A.8. Desarrollo de la derivada covariante, parte de $W_\mu^3$ y $B_\mu$ . . . . .	31
A.9. Grupo de simetría $SU(3)$ . . . . .	32
A.10. Solución a los problemas observados al tratar con quarks. . . . .	33
A.11. Simetría global del lagrangiano de $\mathcal{L}_l$ . . . . .	34
A.12. Transformación del término $G_\mu^a$ para garantizar invariancia. . . . .	34
A.13. Término cinético del gluón. . . . .	36
<b>B. Anexo B</b>	<b>37</b>
B.1. Álgebra de Lie. . . . .	37
B.2. Correcciones a la masa del Higgs. . . . .	37

B.3. Quiralidad. . . . .	38
--------------------------	----

# Capítulo 1

## Introducción.

Uno de los objetivos mas ansiados por la física teórica es el desarrollo de una teoría que permita entender y unificar las cuatro interacciones fundamentales observadas en el universo: la gravitacional, la nuclear fuerte, la nuclear débil y la electromagnética.

En este sentido, el Modelo Estándar ha sido históricamente la teoría que ha marcado el camino a seguir. Su formulación ha permitido explicar el contenido de materia del Universo y sus interacciones, incluyendo la interacción electromagnética, la nuclear fuerte y la nuclear débil, y sus predicciones se han comprobado en los experimentos de altas energías con gran precisión. A pesar de esto, este modelo presenta también una serie de problemas que hacen pensar que podría no ser la teoría definitiva. Entre ellos se encuentran que no predice un candidato para la materia oscura del Universo, el problema de las jerarquías y la incapacidad de unificar las cuatro interacciones fundamentales; solo unifica dos de ellas, la débil y la electromagnética. Centrándonos en el último de estos problemas, se han planteado nuevas teorías que partiendo de las bases sentadas por el Modelo Estándar permitan lograr la unificación y solucionar los problemas subyacentes a este. Una de las más relevantes es SUSY (del inglés "*Supersymmetry*"), que propone una solución a estos problemas a través de la inclusión de simetrías extras en el modelo. El objetivo principal de este trabajo fin de grado es comprender y desarrollar estas teorías de unificación de las interacciones.

El trabajo que se va a desarrollar se divide en tres capítulos. En el primero se incluye una descripción del Modelo Estándar, detallando las teorías utilizadas para el estudio de cada interacción y obteniendo los lagrangianos correspondientes. A partir de estos lagrangianos, estudiamos las constantes de acoplo características de cada interacción, haciendo énfasis en la evolución de las mismas con la escala a través de las ecuaciones del grupo de renormalización. El capítulo finaliza con la presentación de los resultados obtenidos y la discusión acerca de la unificación de las interacciones. En el segundo capítulo se incluye una descripción de una teoría de gran unificación, SUSY, se discute la solución que propone la misma a los problemas presentados por el Modelo Estándar, y se presenta el lagrangiano de interacción característico de esta teoría. El capítulo finaliza de forma similar al primero, con la presentación de las ecuaciones del grupo de renormalización para cada interacción, el estudio de la evolución de las mismas con la escala, y la discusión acerca de la unificación en este modelo. A continuación, se incluyen las conclusiones del trabajo. En los anexos se incluyen cálculos detallados y explicaciones complementarias a los capítulos del trabajo.

# Capítulo 2

## Modelo Estándar.

El Modelo Estándar (SM - del inglés *Standard Model*) es una teoría cuántica de campos, considerada actualmente la teoría más aceptada para la descripción de la estructura y comportamiento de la materia a nivel subatómico. Este modelo explica las interacciones entre las partículas elementales constituyentes de la materia, a las que llamamos fermiones, mediante el intercambio de otras partículas, los bosones. En el modelo están incluidas tres las cuatro interacciones fundamentales, nuclear fuerte, nuclear débil y electromagnética, con el bonus de unificar las dos últimas interacciones en la denominada *teoría electrodébil*. Dado que se va a ahondar en estas interacciones, es conveniente introducir los fermiones y bosones que componen las partículas presentes en el SM:

- Fermiones. Como se ha comentado, son las partículas constituyentes de la materia ordinaria y se caracterizan por un espín semientero de valor  $1/2$ . Se pueden dividir a su vez en dos subgrupos, siendo estos leptones y quarks. Los leptones son el electrón, el muón y el tau, que tienen carga  $-1$  y se diferencian en sus masas; y sus neutrinos asociados, con masas despreciables (cero en el marco del SM). Por otro lado, los quarks componen los hadrones y son un total de 6, *up*, *down*, *charm*, *strange*, *top* y *bottom*, todos ellos presentan una propiedad conocida como carga de color, que se explicará más adelante. Respecto a estos últimos, a cada uno de ellos se le asocia un sabor, de modo que en el SM se habla de 6 sabores, uno para cada quark. Cabe recalcar que, según el postulado de simetrización, la función de onda física correspondiente a un fermión ha de ser antisimétrica. A modo de ilustración, para un sistema de dos fermiones, se cumple  $\psi(1, 2) = -\psi(2, 1)$ .
- Bosones. Partículas mediadoras o responsables de las interacciones. El SM agrupa un total de 5 bosones, todos ellos poseen espín 1: el fotón, el gluón, el Z, el  $W^+$  y  $W^-$ . Destacar que tanto el fotón como el gluón, partículas neutras, poseen masa nula y los  $W^\pm$  son cargados y tienen masa no nula. Cabe recalcar que además tenemos el bosón de *Higgs*, partícula que aparece al introducir el Mecanismo de Higgs para generar las masas de las partículas en el SM. Por último, al contrario que para los fermiones las funciones de onda de los bosones han de ser simétricas bajo intercambio.

El modelo cuenta además con un amplio respaldo experimental, pues se han encontrado todas las partículas predichas por el mismo, se han comprobado experimentalmente

sus predicciones, y ha demostrado ser una gran herramienta para la predicción del comportamiento de nuestro mundo [1].

En lo matemático, el modelo está basado en los grupos de simetría  $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ . A lo largo del capítulo se van a obtener las expresiones predichas por este modelo, presentando el Lagrangiano que describe las interacciones y prestando especial interés a las constantes de acoplo correspondientes a las interacciones fuerte, débil y electromagnética.

## 2.1. QED en el SM. Lagrangiano. Grupo de renormalización.

La primera interacción a desarrollar es la electromagnética, la cual viene descrita en el SM por la electrodinámica cuántica (QED, del inglés *Quantum Electrodynamics*), y está caracterizada por el grupo de simetría  $U(1)$  (ver anexo A.1 para más detalles). En esta teoría tenemos la interacción entre fermiones a través del intercambio de fotones como partícula mediadora. Para obtener el lagrangiano correspondiente a la misma, se parte del Lagrangiano del campo de Dirac [2]:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi, \quad (2.1)$$

con  $\psi$  el campo del fermión,  $m$  su masa y  $\gamma^\mu$  las matrices de Dirac. Este lagrangiano ha de ser invariante bajo transformaciones del grupo de simetría  $U(1)$ , las cuales vienen dadas por [3]:

$$\psi \longrightarrow \psi' = U(\theta)\psi = e^{i\theta Q}\psi, \quad (2.2)$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^*(\theta) = \bar{\psi} e^{-i\theta Q}, \quad (2.3)$$

donde  $\theta$  es un parámetro característico de la transformación y  $Q$  es el generador del grupo de simetría. No obstante, estas transformaciones corresponden con transformaciones globales, pues el parámetro  $\theta$  es una constante; no depende de las coordenadas espacio-temporales. Bajo estas transformaciones el Lagrangiano de Dirac satisface la condición de invariancia. Sin embargo, al considerar transformaciones locales (aquellas en las que los valores de  $\theta$  dependen de las coordenadas), la simetría se rompe pues la derivada parcial conduce a:

$$\partial_\mu \psi' = e^{i\theta(x)Q} \partial_\mu \psi + (\partial_\mu e^{i\theta(x)Q}) \psi, \quad (2.4)$$

$$\partial_\mu \psi' = e^{i\theta(x)Q} \partial_\mu \psi + iQ(\partial_\mu \theta(x)) e^{i\theta(x)Q} \psi, \quad (2.5)$$

y, por tanto, el lagrangiano toma la forma:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + Q\psi\gamma^\mu(\partial_\mu \theta(x))\bar{\psi}. \quad (2.6)$$

Para que el Lagrangiano de Dirac mantenga la invariancia es preciso sustituir la derivada parcial por una derivada covariante, que se define como [4]:

$$\partial_\mu \longrightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu + i e Q A_\mu. \quad (2.7)$$

El término  $A_\mu$  introducido hace referencia al campo del fotón, campo con espín 1 que transforma como:

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \quad (2.8)$$

Al realizar este cambio es posible reescribir finalmente el Lagrangiano de Dirac como:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.9)$$

No obstante, el lagrangiano anterior aún no está completo, pues carece del término correspondiente al campo libre del fotón. Este término viene dado en función del tensor del campo electromagnético ( $F^{\mu\nu}$ ) en la forma  $-\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ . Tras la inclusión de este, el Lagrangiano final para la QED es:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.10)$$

Este lagrangiano tiene varias cosas a comentar. En primer lugar, es posible escribirlo gracias a la formulación covariante de las ecuaciones de Maxwell, pues permiten obtener la expresión de tensor electromagnético  $F^{\mu\nu}$  y el término de interacción. En segundo lugar, este lagrangiano se ha construido de modo que muestre invariancia bajo transformaciones de fase locales (ver anexo A.2 para la demostración). La interpretación física de esta simetría es que, dado que las transformaciones de fase descritas por el grupo  $U(1)$  representan desplazamientos y rotaciones en los campos, es decir, se pueden asociar a la elección de distintos sistemas de referencia, no pueden afectar a las interacciones, de lo contrario se observarían comportamientos diferentes en función del sistema elegido.

En cuanto a los términos del lagrangiano, el primero de ellos corresponde con el término libre para los fermiones; incluyendo un término cinético y uno de masa, el segundo el término libre para los fotones y el tercero, y más relevante para el objetivo que se persigue, establece la interacción entre fermiones y fotones, siendo el lagrangiano de interacción definido como:

$$\mathcal{L}_{int} = eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = j^\mu A_\mu. \quad (2.11)$$

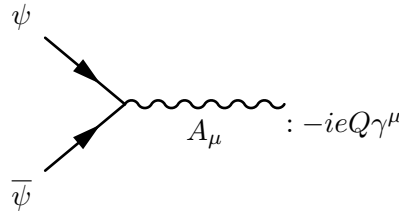


Figura 2.1: Diagrama de Feynman de la interacción de dos campos fermiónicos y el campo del fotón.

Este lagrangiano corresponde al mínimo acoplo posible con invariancia *gauge*. En la figura 2.1 se presenta el diagrama de Feynman correspondiente. En cada uno de los vértices de

interacción se encuentran dos líneas fermiónicas y una línea correspondiente al fotón, siendo la constante de acoplo  $-ieQ\gamma^\mu$ . La interacción electromagnética descrita por este lagrangiano viene determinada fundamentalmente por la constante de acoplo electromagnética  $e$ , que en unidades naturales está relacionada con la constante de estructura fina  $\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi^2}$ , cuyo valor a bajas energías está dado por  $\frac{1}{137}$ . La pequeñez de este valor del acoplo electromagnético nos hace posible realizar una expansión perturbativa en potencias del parámetro  $\alpha_{EM}$  y describir así los procesos físicos asociados. La contribución de orden más bajo en esta expansión correspondería con la amplitud de dispersión (*scattering*).

Claramente, un vértice de interacción aislado no representa un proceso físico. Si se toma como ejemplo uno de los diagramas de interacción para electrón y positrón, y se denota como  $p$  y  $p'$  a los momentos de las líneas fermiónicas y  $k$  al momento asociado al fotón, en los vértices se ha de cumplir que  $p' = \pm p \pm k$ , lo cual implica que  $p'^2 = p^2 + k^2 \pm 2pk$ . Si asumimos entonces que el polo se encuentra en la masa física (lo cual se denomina *on-shell*), tendríamos que:

$$p^2 = p'^2 = m_e^2, \quad k^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \cdot k = 0. \quad (2.12)$$

Por tanto, obtenemos un momento del fotón nulo, concluyendo que el proceso no existe. Para considerar un proceso físico real necesitamos considerar que el vértice de la interacción este incluido en un diagrama más grande con varios vértices, considerando partículas virtuales que no deben cumplir la relación anterior, es decir, el polo no se encuentra en la masa física o, como es conocido, están *off-shell*. Este es el caso que se da en un proceso de *scattering*, como hemos mencionado antes.

Ejemplos de este tipo de diagramas, con dos vértices de interacción, se presentan en la figura 2.2.

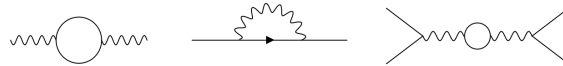


Figura 2.2: Diagramas de feynman con más de un vértice.

Como se ha explicado, necesitamos entonces realizar cálculos considerando una expansión perturbativa, lo cual nos lleva a calcular la matriz  $S$  o matriz de dispersión, definida en forma de integral funcional con una fuente externa. Cuando realizamos estos cálculos perturbativos aparecen integrales que pueden ser divergentes, como es el caso del cálculo de diagramas con lazos como los que se muestran en la figura 2.2. Para dar sentido a tales expresiones se introduce el denominado procedimiento de renormalización que permite reabsorber las divergencias que aparecen. Con este procedimiento sustraemos las divergencias de manera que equivaldría al cambio o redefinición de los parámetros que aparecen en el lagrangiano inicial.



Es en este contexto donde se introducen las ecuaciones del grupo de renormalización, que permiten afrontar el tratamiento de las divergencias que aparecen en teoría de perturbaciones para muy altas energías (divergencias ultravioletas) en QED o para muy bajas energías (divergencias infrarrojas). De hecho, el origen de estos problemas de divergencias radica en la gran diferencia entre las escalas de energía utilizadas: las masas de las partículas y el momento transferido que aparece en las integrales. Los métodos del grupo de renormalización están basados en un principio de invariancia que afirma que los observables físicos son independientes de la escala de renormalización, lo cual es fundamental cuando estamos realizando los cálculos teóricos. Las ecuaciones que se obtienen como consecuencia de la invariancia bajo renormalización se denominan ecuaciones del grupo de renormalización (RGE - del inglés *Renormalization Group Equations*”).

Existen diferentes métodos de renormalización, que no trataremos en este trabajo. Nos restringimos a presentar las expresiones de las ecuaciones del grupo de renormalización como sigue. Si consideramos uno de los diagramas a un lazo (*one-loop*) mostrados en la figura 2.2, tendríamos asociadas integrales divergentes y tales divergencias se pueden reabsorber suponiendo una evolución logarítmica de las constantes con la escala  $Q$ . Esta idea de la evolución logarítmica, impone que los acoplos  $g_i$  con  $i = 1, 2, 3$ ; donde cada  $g$  correspondería a una interacción <sup>1</sup>, han de cumplir [5]:

$$\frac{d}{d \log Q} g_i(Q) = -\frac{b_i}{(4\pi)^2} g_i^3, \quad (2.13)$$

siendo las  $b_i$  constantes que dependen del grupo de simetría *gauge*. En el caso general de  $SU(N)$ , vienen dadas según lo expuesto en el anexo A.3:

$$b_i = \left( \frac{11}{3}N - \frac{1}{3}n_f - \frac{1}{6}n_s \right), \quad (2.14)$$

siendo  $N$  la dimensión del grupo,  $n_f$  el número de familias de fermiones, y  $n_s$  el número de escalares complejos que se acoplan a los bosones de *gauge*.

Cuando resolvemos (2.13), obtenemos la evolución de las constantes de acoplamiento con la escala de energía. Detalles de la resolución de las mismas se recogen en el anexo A.4. La dependencia de las constantes de acoplo  $g_i$  está dada por:

$$g_i^2(Q) = \frac{g_i^2(\mu)}{1 + (b_i/8\pi^2) \log(\frac{Q}{\mu})}. \quad (2.15)$$

Expresando la igualdad anterior en función de las constantes  $\alpha_i = g_i^2/4\pi$ , podemos escribir:

$$\frac{1}{\alpha_i(Q)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu)} + \frac{b_i}{2\pi} \ln\left(\frac{Q}{\mu}\right), \quad (2.16)$$

donde los valores de  $\alpha_i$  hacen referencia a las constantes de acoplamiento de cada interacción, los términos  $b_j$  son constantes que dependen del modelo en que se esté trabajando; pues se

---

<sup>1</sup>Las divergencias no solo aparecen en QED, sino también en otras interacciones fundamentales incluidas en el SM.

obtienen de los grupos de simetría,  $\mu$  es la escala de energía que posteriormente fijaremos a un valor concreto según el modelo o el proceso bajo estudio y  $Q$  es la variable independiente con la que corre la constante de acoplo asociada a la escala de energía elegida. En este trabajo fijaremos posteriormente la escala de energía a la masa del bosón  $Z$  en el SM. Las constantes  $b_i$  que aparecen en la expresión anterior se estudiarán mas adelante.

Particularizando la expresión anterior para el caso que se trata (QED) la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{\alpha_{EM}(Q)} = \frac{1}{\alpha_j(\mu)} + \frac{b_1}{2\pi} \ln\left(\frac{Q}{\mu}\right). \quad (2.17)$$

El precio a pagar por haber efectuado estas correcciones, que corresponden a realizar perturbaciones, es que la constante característica de la interacción que se ha obtenido ya no toma un valor fijo, sino que varía con la escala de energía.

## 2.2. Interacción electrodébil. Relación entre constantes y observables.

Antes de introducir la interacción electrodébil, es importante contextualizar brevemente la interacción nuclear débil. Esta interacción entre fermiones está mediada por los bosones  $Z$  y  $W^\pm$ , que resultan ser bosones masivos. Debido a este carácter masivo de las partículas mediadoras, la interacción resulta ser de muy corto alcance. Posee dos números cuánticos adicionales con sus propias reglas de conservación, el isospín débil y la hipercarga débil [2]. Esta interacción débil, aparece fundamentalmente en las desintegraciones beta, y presenta ciertas similitudes con respecto a la interacción electromagnética.

La interacción electrodébil hace referencia pues a la interacción unificada del electromagnetismo y la fuerza nuclear débil. Siguiendo la unificación electrodébil, lo que se consigue es la expresión de un lagrangiano en el que aparecen de forma conjunta las expresiones correspondientes a ambas interacciones, tal que podemos relacionar las constantes de acoplo características de las mismas, logrando que estas coincidan para un cierto valor de la energía.

Cabe señalar que para dotar de masa a los bosones  $Z$  y  $W^\pm$  se hace necesario además implementar la ruptura espontánea de la simetría a través del mecanismo de Higgs. De esta forma, los bosones  $Z$  y  $W^\pm$  adquieren masa, dejando al fotón con masa nula [6]. El grupo de simetría asociado a la interacción electrodébil es  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  [7], donde los subíndices hacen referencia a la quiralidad y la hipercarga, respectivamente. En lo siguiente se construye el lagrangiano de la interacción electrodébil, incluyendo el potencial de Higgs y mencionando la ruptura de simetría asociada.

### 2.2.1. Unificación de los acoplos *gauge*.

Para desarrollar el lagrangiano, se comienza considerando un doblete de isospín típico del grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$  [7]:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Este doblete ha de cumplir varias condiciones, ha de tener isospín débil 1/2, y la carga eléctrica del doblete ha de tener hipercarga  $Y=+1$ . Con este doblete, se propone el potencial que romperá espontáneamente la simetría:

$$V(\phi) = \mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (2.19)$$

Con esto, es posible escribir un lagrangiano para el campo escalar:

$$\mathcal{L}_{scalar} = (D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) - V(\phi), \quad (2.20)$$

siendo  $D^\mu$  la derivada covariante que necesitamos introducir para respetar la invariancia asociada al grupo  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , que viene dada por:

$$D_\mu = \delta_\mu + ig\frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}YB_\mu. \quad (2.21)$$

En esta expresión aparecen los campos  $\vec{W}_\mu$  y  $B_\mu$ , que darán lugar a los bosones de *gauge* físicos como se verá mas adelante. Dicho esto, el siguiente paso es la elección de un vacío, que tomamos  $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$  y  $\phi_3 = v$ .

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + h \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Se tiene pues un vacío neutro, ya que su isospín es  $I = \frac{1}{2}$  y  $I_3 = -\frac{1}{2}$ , y dado que se ha tomado hipercarga  $Y=+1$  usando la fórmula de Gell-Mann–Nishijima,  $Q = T_3 + \frac{Y}{2}$ , se llega a que  $Q = 0$ . Con esta elección de vacío, se produce la ruptura de simetrías de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ , pero mantiene  $U(1)_{EM}$  invariante, dejando al fotón sin masa. Los detalles de esta ruptura de la simetría se muestran en el anexo A.5.

Con estos ingredientes podemos desarrollar el lagrangiano dado en (2.20). Para ello, se desarrollan las expresiones de  $D_\mu \phi$  y  $(D_\mu \phi)^\dagger$ , lo cual se recoge en el anexo A.6. Finalmente, obtenemos la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_{scalar} = \frac{1}{8}v^2[g^2(W_1^2 + W_2^2) + (-gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2] - V(\phi). \quad (2.23)$$

Es importante mencionar que dado que lo que se persigue en este trabajo es obtener el valor de las constantes de acoplo, y estudiar posteriormente su evolución con la escala de energía, no es necesario desarrollar la expresión del término del potencial,  $V(\phi)$ , en

el lagrangiano. Del desarrollo del potencial obtenemos la masa del bosón de Higgs y la autointeracciones, que no son objetivo de estudio para nosotros.

Por otro lado, notemos que la expresión (2.23) está escrita en términos de los campos  $\vec{W}$  y  $B$ , y necesitamos reescribir el lagrangiano en función de los campos físicos,  $W^\pm$ ,  $Z$  y fotón. El cálculo detallado para obtener este lagrangiano está recogido en el anexo A.7. Se obtiene por tanto la siguiente expresión:

$$\mathcal{L}_{scalar} = \frac{1}{8}v^2[g^2(W^+)^2 + g^2(W^-)^2 + (g^2 + g'^2)Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2]. \quad (2.24)$$

Este resultado nos muestra las constantes de acoplamiento que aparecen en las interacciones: los bosones  $W^\pm$  se caracterizan por una constante de acoplo  $g$  y en el término del bosón  $Z$  aparecen las constantes  $g$  y  $g'$ . Estas dos constantes son parámetros libres de la teoría. No obstante, es posible establecer relaciones entre ellas que nos conducirán a tener la unificación en la teoría electrodébil.

Por una parte, podemos interpretar que cuando pasamos de los campos no físicos a los campos físicos lo que estamos haciendo es rotar el plano original de los bosones vectoriales  $W_3$  y  $B_\mu$ , produciendo como resultado los bosones  $A_\mu$  y  $Z_\mu$ <sup>2</sup>. Con esta idea en mente, introducimos ahora el concepto del ángulo de *Weinberg*, que nos caracteriza la mezcla entre los campos de  $W_3$  y  $B_\mu$  para dar  $Z$  y el fotón y permite relacionar el valor de las constantes  $g$  y  $g'$  por medio de la expresión:

$$\sin \theta_W = \frac{g'}{\sqrt{g^2 + (g')^2}} \quad , \quad \cos \theta_W = \frac{g}{\sqrt{g^2 + (g')^2}}. \quad (2.25)$$

Por otra, teniendo en cuenta el desarrollo de la derivada covariante y el lagrangiano obtenido para el caso de QED, se concluye que:

$$\frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = e. \quad (2.26)$$

Por tanto, es posible obtener una relación entre las constantes de acoplamiento características de las interacciones electromagnética y débil a través del ángulo de Weinberg, que viene dada por:

$$e = g \sin(\theta_W) = g \cos(\theta_W). \quad (2.27)$$

Este resultado es pues fundamental, y una vez obtenido, y dado que en lo que se está interesado es en teorías de gran unificación, se escribe el valor de la constante que caracteriza la interacción electromagnética como:

$$\alpha_{EM} = \frac{e^2}{4\pi} = \frac{g^2 \sin^2(\theta_W)}{4\pi}. \quad (2.28)$$

---

<sup>2</sup>El desarrollo de la expresión de la derivada covariante en función de los campos físicos se incluye en el anexo A.8

Tenemos pues dos interacciones unificadas, la interacción electromagnética y la débil. Nótese que las constante  $g$  y  $g'$  están relacionadas por las expresiones anteriores.

Con este resultado, del mismo modo que ocurría para el caso de QED, podemos introducir las ecuaciones del grupo de renormalización cuando realizamos cálculos en teoría de perturbaciones y queremos reabsorber las divergencias que nos aparecen. En este caso las constantes de acoplamiento son  $g$  y  $g'$ , y a partir de éstas, retomando las expresiones del apartado anterior, es posible calcular los valores de  $\alpha_j(Q)$ .

Tomando como escala de energía  $Q = M_Z$  y sabiendo que la masa del bosón  $Z$  es de 91.188 GeV, se tiene que  $\alpha_{EM}(M_Z) = 1/127,9 \pm 0,9$  y que  $\sin^2(\theta_W) = 0,2314 \pm 0,003$  [1]. Por tanto, obtenemos:

$$g^2 = \frac{4\pi\alpha_{EM}(M_Z)}{\sin^2(\theta_W)} = 0,427, \quad (2.29)$$

$$(g')^2 = \frac{4\pi\alpha_{EM}(M_Z)}{\cos^2(\theta_W)} = 0,127. \quad (2.30)$$

De esta forma, podríamos ahora determinar la evolución de las constantes de los acoplos electromagnético; que se denota a partir de ahora como  $\alpha_1$  ( $\alpha_1 \equiv \alpha_{EM}$ ) y débil ( $\alpha_2$ ) con la escala de energía, utilizando la expresión genérica (2.16). Para ello necesitamos determinar los valores de las constantes  $b_i$  que se introdujeron anteriormente <sup>3</sup>, que serían:

$$b_1 = -\frac{4}{3}n_f - \frac{1}{10}n_H = -4,1, \quad (2.31)$$

$$b_2 = \frac{22}{3} - \frac{4}{3}n_f - \frac{1}{6}n_h = 3,167, \quad (2.32)$$

donde  $n_f$  es el número de familias de fermiones, que para el caso del SM es 3, y  $n_H$  el número de multipletes de Higgs, 1 para el SM. Sustituyendo finalmente estos valores calculados en las ecuaciones del grupo de renormalización se obtienen las dependencias de las constantes de acoplo con la energía para las interacciones débil y electromagnética en el SM:

$$(\alpha_1)^{-1}(Q) = 58,98 - 0,65 \ln\left(\frac{Q}{M_z}\right) = 61,92 - 1,5 \log(Q), \quad (2.33)$$

$$(\alpha_2)^{-1}(Q) = 29,60 + 0,5 \ln\left(\frac{Q}{M_z}\right) = 27,325 + 0,5 \log(Q). \quad (2.34)$$

Nos faltaría por realizar este estudio para el caso de la cromodinámica cuántica (QCD-del inglés "Quantum Chromodynamics"), que se incluye en la sección siguiente.

### 2.3. QCD en el SM.

La última interacción incluida en el SM es la nuclear fuerte, presente en los núcleos atómicos y responsable de la estabilidad de los mismos. Por caracterizarla brevemente, se trata de una interacción de muy corto alcance, del orden de  $10^{-15}$ m. Esta interacción se trata

---

<sup>3</sup>Detalles están dados en el anexo A.4.

con el formalismo de la cromodinámica cuántica y está basado en el grupo de simetría  $SU(3)$  (detallado en el anexo A.9). Físicamente, se entiende la interacción fuerte como el intercambio de carga de color entre quarks (fermiones), mediada por gluones. Estas ideas se introducen por Gell-Mann y Fritzsch como resultado de la violación del principio de exclusión de Pauli y de la obtención de funciones de onda que no cumplían la simetría esperada, como se muestra en el anexo A.10 para el caso del  $\Omega^-$ .

Nuestro objetivo es obtener un lagrangiano, del que se extraer el término de interacción que caracteriza al vértice. Para ello se comienza estableciendo el lagrangiano para un único sabor, el cual se puede obtener como [8]:

$$\mathcal{L}_0 = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q \quad (2.35)$$

siendo  $q$  el campo asociado a los quarks,

$$q \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Este lagrangiano presenta simetría bajo transformaciones en  $SU(3)$  (ver anexo A.11). No obstante, para el desarrollo del lagrangiano se han de considerar transformaciones locales. Esto implica que si se tenía una matriz  $U$  que representaba una rotación global, para el desarrollo de una teoría *gauge* local, se expresa esa matriz de transformación como:

$$U = e^{ig_s \alpha_a(x) T_a}, \quad (2.37)$$

siendo  $T_a$  los generadores del grupo de simetría y  $\alpha_a(x)$  los parámetros de la transformación, que dependen de las coordenadas. La expresión de una transformación local de los campos ha de ser:

$$q \rightarrow Uq = (1 + ig_s \alpha_a(x) T_a)q \quad (2.38)$$

$$\bar{q} \rightarrow \bar{q}U^\dagger = \bar{q}(1 - ig_s \alpha_a T_a). \quad (2.39)$$

Lo que se busca pues es obtener un lagrangiano característico que exprese la interacción entre quarks que presente invariancia frente a este tipo de transformaciones de *gauge* locales. La condición de invariancia *gauge* implica que se ha de cumplir que (demostrado en el anexo A.12):

$$G_\mu^a \rightarrow G_\mu^a + \partial_\mu \alpha_a - g_s \alpha_b f_{abc} G_\mu^c, \quad (2.40)$$

siendo  $G_\mu^a$  una combinación de los 8 generadores del grupo  $SU(3)$ ,  $f_{abc}$  el tensor de Levi-Civita y  $g_s$  la constante que caracteriza la interacción fuerte mediada por gluones. Dado que se ha denotado a  $g_s$  como la constante del acoplo, y se ha tomado una transformación arbitraria con una colección de los generadores cualquiera, el hecho de que esta aparezca en la transformación *gauge* implica que esta ha de ser independiente del sabor. Es decir, todas las interacciones

fuertes se van a caracterizar por el mismo valor de la constante  $g_s$ . Otra consecuencia importante a extraer de la expresión anterior es que se observa como el campo del gluón se mezcla entre colores diferentes, luego el gluón ha de tener carga de color. Visto esto, el lagrangiano que se obtiene para esta interacción con invariancia *gauge* viene dado por:

$$\mathcal{L} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + g_s \bar{q} T_a G_\mu^a \gamma^\mu q. \quad (2.41)$$

No obstante, el lagrangiano aún no está completo, pues falta el término cinético del gluón, la partícula mediadora. Se busca pues un término similar al obtenido para el caso del QED con el tensor electromagnético, este viene dado por <sup>4</sup>:

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c. \quad (2.42)$$

Luego el Lagrangiano completo toma la forma:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)q + g_s \bar{q} T_a G_\mu^a \gamma^\mu q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}. \quad (2.43)$$

Este Lagrangiano presenta invariancia *gauge* bajo el grupo  $SU(3)$ , garantizando que las interacciones que describe son las mismas en cualquier sistema de referencia inercial. En cuanto a sus términos, el primero de ellos constituye el término libre para los quarks; incluyendo término cinético y término de masas, y el tercero para los gluones. Al igual que en QED el término más relevante para lo que se pretende estudiar en este trabajo es el segundo, que establece como son las interacciones entre quarks por el intercambio de gluones. De aquí que se escriba el lagrangiano de interacción que describe el mínimo acoplo posible que garantiza invariancia *gauge* como:

$$\mathcal{L}_{int} = g_s \bar{q} T_a G_\mu^a \gamma^\mu q. \quad (2.44)$$

A partir de este lagrangiano es sencillo identificar el valor de la constante de acoplo con  $g_s$ . Esta se determina experimentalmente, y permite obtener el valor de  $\alpha_3(M_z)$  de acuerdo con lo siguiente:

$$\alpha_3^{-1}(Q = M_z) = g_s^{-1} = 8,47 \pm 0,22. \quad (2.45)$$

No obstante, con el objetivo de absorber las divergencias que aparecen en un cálculo perturbativo (tal y como se ha explicado en los casos anteriores) es necesario introducir las ecuaciones del grupo de renormalización, dadas en (2.16). Calculamos entonces el valor de  $b_3$ :

$$b_3 = 11 - \frac{4}{3}n_f = 7, \quad (2.46)$$

y sustituyendo en (2.16) nos queda:

$$\alpha_3^{-1} = 8,47 + \frac{7}{2\pi} \ln\left(\frac{Q}{M_z}\right) = 3,44 + 2,57 \log(Q). \quad (2.47)$$

---

<sup>4</sup>Cálculos incluidos en el anexo A.13.

## 2.4. Constantes de acoplo y unificación.

En las secciones anteriores hemos presentado las interacciones presentes en el SM, mostrando la unificación de las interacciones débil y electromagnética, y presentando la interacción fuerte. Así mismo, hemos obtenido las constantes de acoplo para cada una de estas y cómo evolucionan con la energía del sistema. En concreto, se ha comprobado que la dependencia de las mismas con la energía está condicionada por el valor de los parámetros  $b_i$ . Estos parámetros dependen del modelo que se escoja. Para el caso del SM (ver ecuaciones (2.31), (2.32) y (2.46)) sus valores son:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 22/3 \\ 11 \end{pmatrix} - n_f \begin{pmatrix} 4/3 \\ 4/3 \\ 4/3 \end{pmatrix} - n_H \begin{pmatrix} 1/10 \\ 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -41/10 \\ 19/6 \\ 7 \end{pmatrix}. \quad (2.48)$$

Con esta elección de parámetros, y las ecuaciones del grupo de renormalización obtenidas para cada interacción, que se recogen a continuación en una notación compacta,

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_2^{-1} \\ \alpha_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61,9 \\ 27,3 \\ 3,4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1,5 \\ 0,5 \\ 2,6 \end{pmatrix} \log(Q), \quad (2.49)$$

podemos estudiar la evolución de estas constantes con la escala de energía y verificar si existe o no la unificación en el caso del SM. Los resultados se muestran en la figura 2.3.

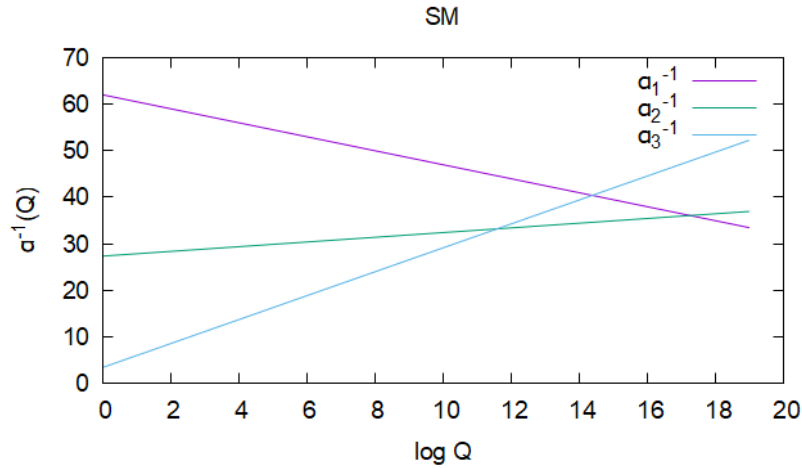


Figura 2.3: Evolución de  $\alpha_i^{-1}$  con el logaritmo de la energía.

Se habla de unificación de los acoplos *gauge* a una cierta escala de energía si existe algún valor de esta para el cual las tres constantes de acoplo converjan en un mismo punto. Como se observa, para el caso del SM, esto no ocurre para ninguna escala de energía, luego la unificación de todas las interacciones no es posible en este modelo. Claramente, este era el resultado esperado desde la discusión que hemos presentado a lo largo de los capítulos anteriores. Tal y como hemos discutido previamente, en el SM tenemos la unificación de solo



dos interacciones, la electromagnética y la débil, y este resultado se ve plasmado en esta figura.

En el SM desarrollamos dos teorías diferentes para explicar las tres interacciones, la teoría electrodébil como teoría unificada y la cromodinámica cuántica. Cada una de las interacciones está caracterizada por un grupo de simetría. Es por esto por lo que la alternativa que se propone a continuación, parte de la idea de estar fundamentada en un único grupo de simetría, cuya ruptura de simetría permita obtener el SM.

Este problema de la unificación no es el único que ha conllevado a que el SM se descarte en la actualidad como la teoría del todo definitiva, pues este presenta varios problemas adicionales. El primero de ellos es el conocido como el problema de la jerarquía, fundamentado en la diferencia de escalas de energía presentes en el universo. El segundo problema a destacar es el llamado problema C-P (carga y paridad). C hace referencia a la conjugación de la carga y P al cambio en las direcciones de todas las coordenadas espaciales. Teóricamente, al combinar estas dos simetrías se espera encontrar que las antipartículas se comportan como partículas y se *refleje el espacio*. Esta simetría no se conserva en los experimentos realizados [1]. Si se entendiera el porqué sería posible explicar la asimetría entre materia y antimateria observada en nuestro universo. Relacionado con esto, otras dos incógnitas que deja abiertas el SM son acerca de qué partícula es la responsable de la existencia de la materia oscura y la energía oscura, pues el SM no propone ningún candidato a materia oscura. Por último, el SM tampoco incluye ninguna explicación de la interacción gravitatoria, que no está incluida en el modelo.

# Capítulo 3

## Modelos de Gran Unificación.

Evidenciada la incapacidad de lograr la unificación a través del SM, se plantean varias alternativas para solucionar los problemas que exhibe. Es posible categorizarlas en dos grupos [9]:

- Teorías basadas en QFT (del inglés "Quantum Field Theory"). Este grupo de teorías se puede dividir en dos subgrupos, pues hay dos formas principales de buscar solución a los problemas presentes en el SM. El eje común de ambos es que parten del álgebra y conceptos establecidos por la QFT. El primero de ellos agrupa aquellas teorías que buscan la solución a los citados problemas mediante la inclusión de nuevas partículas e interacciones, proponiendo candidatos a materia oscura e incluso incluyendo en su desarrollo la interacción gravitatoria (esto último sin mucho éxito). El segundo de estos subgrupos, corresponde con aquellas que proponen la inclusión de nuevas simetrías. Los máximos exponentes en este grupo son las llamadas teorías GUTs (del inglés "Grand Unified Theory") y las basadas en supersimetría, SUSY (del inglés "Supersymmetry").
- Teorías beyond QFT. Proponen un acercamiento diferente, buscando alternativas a las propuestas por QFT. El máximo exponente es la teoría de cuerdas, y están motivadas principalmente por la incapacidad de las teorías del primer grupo para llevar a cabo una correcta cuantización de la gravedad.

Se centra la atención en el primer grupo de teorías BSM (del inglés "Beyond the Standard Model"). Se ha comentado que una de las soluciones que se propone en este grupo, es la inclusión de nuevas simetrías. Esta inclusión de nuevas simetrías, constituye la base de la teoría de SUSY GUT (del inglés "Supersymmetric Grand Unified Theories") que se pretende desarrollar en este trabajo. Existen diferentes formas en que se puede llevar a cabo este proceso de adición de simetrías [9], aunque nos centraremos solo en una de ellas, la inclusión de supersimetría. Esta consiste en la adición de una nueva simetría externa o espacio-temporal. La mayor virtud de esta teoría, es que permite solucionar el problema de la jerarquía. Además de esto, si se combina con las ideas propuestas por las teorías de GUTs, consigue lograr la unificación de las tres constantes de acoplo a la escala GUT mencionada anteriormente, y ofrece candidatos a materia oscura. Nos centramos en lo siguiente es esta propuesta, teorías SUSY. En concreto, trataremos el caso de la extensión supersimétrica minimal del SM, denominada MSSM (del inglés "Minimal Supersymmetric Standard Model").

### 3.1. SUSY.

Esta fue desarrollada a lo largo de la década de 1970, y encuentra como referentes a varios físicos teóricos como Julius Wess y Burno Zumino, y como se ha comentado, permite solucionar un buen número de los problemas presentados por el SM. La idea de SUSY surge a partir del estudio de las interacciones fuertes, que conllevaron el descubrimiento de los hadrones y su organización en multipletes de  $SU(3)_f$  [9]. A raíz de esto, y sumado a la idea de ampliar el grupo de simetría se plantea la creación de multipletes que incluyan partículas de diferentes espines. Estos multipletes, serán los característicos del grupo de simetría, y reciben también el nombre de supercampos. Las partículas recogidas en estos multipletes no estarían pues limitadas a las recogidas en el SM, sino que se abre la posibilidad a la existencia de un mayor número de estas. SUSY está basada en una simetría que relaciona bosones y fermiones.

Explicada la idea, la cuestión es ahora como llevarla a cabo de forma que no entre en contradicción con el conocido como *No-go Theorem* propuesto por Mandula en 1967. Este teorema establece que, cuando se trata con teorías cuánticas de campos, las únicas simetrías posibles son las de Lie clásicas (anexo B.1), correspondientes a traslaciones y rotaciones (transformaciones de Poincaré), así como aquellas que forman un álgebra de Lie semisimple. Esto implica que no es posible establecer simetrías internas entre partículas fermiónicas y bosónicas, luego no es posible obtener un grupo conjunto que incluya las transformaciones de Poincaré x interna, cuyo grupo representante propuesto es  $SU(5)$ . De ser posible, se obtendrían acoplos nulos, es decir, no existirían interacciones.

El teorema de *No-go* parece pues excluir totalmente la idea de SUSY, no obstante, este teorema está basado en el axioma de los generadores bosónicos. Este considera que los conmutadores de los generadores de simetría bosónicos han de ser funciones lineales de los generadores, su estructura debe ser por tanto cerrada bajo conmutación (el conmutador de dos elementos del grupo ha de pertenecer al grupo) [10]. El teorema incluye únicamente generadores bosónicos, pero no habla sobre generadores fermiónicos. Estos generadores serían los análogos a los bosónicos pero para fermiones, es decir, generarían las simetrías para estos.

Estos generadores fermiónicos han de conectar los multipletes del SM, expandiendo el álgebra de Poincaré de forma no trivial. Se van a denotar como  $Q$ , y la condición anterior implica que la actuación de los mismos sobre campos bosónicos y fermiónicos ha de cumplir [9]:

$$Q|\text{bosón}\rangle \propto |\text{fermión}\rangle \quad Q|\text{fermión}\rangle \propto |\text{bosón}\rangle. \quad (3.1)$$

La introducción de estos generadores  $Q$ , precisa de una generalización del álgebra de Lie. En esta generalización se cumple que si  $O_a$  es un operador, entonces:

$$O_a O_b - (-1)^{\nu_a \nu_b} O_b O_a = i C_{ab}^c O_c. \quad (3.2)$$

Siendo  $\nu_a = 0$  si  $O_a$  es un generador bosónico y  $\nu_a = 1$  si es un generador fermiónico. En el caso de SUSY, los generadores bosónicos son los generadores de Poincaré  $P^\mu$  y  $M^{\mu\nu}$  (tensor métrico) y los generadores fermiónicos  $Q_\alpha^A, \bar{Q}_\alpha^A$ .  $A$  puede tomar valores entre 1 y  $N$ , en este caso se va a desarrollar lo que se conoce como SUSY simple (MSSM), que posee  $N=1$ , valores superiores de  $A$  corresponden a teorías de SUSY extendidas. Esta definición de los generadores conlleva una serie de relaciones de conmutación que se pueden demostrar, pero en las cuales no se va a hacer énfasis pues se escapan del objetivo del trabajo. Del desarrollo de este álgebra es posible extraer algunas conclusiones interesantes sobre como se llevan a cabo las traslaciones de fermiones, ya que bajo este nuevo álgebra descrita, la aplicación consecutiva de generaciones fermiónicos sobre un campo bosónico da lugar a una traslación:

$$Q_\alpha|F\rangle = |B\rangle \quad \bar{Q}_\beta|B\rangle = |F\rangle \quad \Rightarrow \quad Q\bar{Q}|B\rangle \rightarrow |B'\rangle. \quad (3.3)$$

Tratada la idea subyacente detrás de SUSY, es hora de estudiar los multipletes que pone en juego este acercamiento. Dado que el modelo supersimétrico está basado en el grupo de transformaciones de Poincaré mas internas, y que ha de contener las partículas e interacciones observadas en el SM, se le puede asociar un grupo de simetría:

$$SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \times N. \quad (3.4)$$

Y en el caso que se trata, MSSM, se tiene  $N=1$ . Ahora se han de organizar las partículas en los correspondientes supermultipletes de este grupo de simetría. Estos supermultipletes se pueden dividir en dos tipos:

- Supermultipletes quirales: Contienen un fermión *left-handed* (anexo B.3, para más detalles sobre quiralidad, y el motivo de la elección de los fermiones y escalares que forman estos supermultipletes) y un escalar complejo
- Supermultipletes *gauge*: Contienen a los bosones de espín 1 recogidos en el SM y a sus fermiones asociados de espín 1/2

Un supermultiplete se puede representar por tanto, tomando como  $p^\mu$  el momento, como:

$$|p^\mu, \pm\lambda\rangle, \quad |p^\mu, \pm(\lambda - \frac{1}{2})\rangle \quad (3.5)$$

Estos estados representan al bosón y fermión y a sus conjugados en carga y paridad. Se presentan en primer lugar las partículas que ocupan los supermultipletes quirales. Estos son los fermiones de espín 1/2 del SM y sus escalares supersimétricos asociados, más el *Higgs* y el Higgsino [11]

Nombres		espín 0	espín 1/2
squarks y quarks (3 familias)	Q	$\tilde{u}_L \tilde{d}_L$	$u_L d_L$
	U	$\tilde{u}_R^*$	$u_L^c$
	D	$\tilde{d}_R^*$	$d_L^c$
sleptones y leptones	L	$\tilde{\nu}_L \tilde{l}_L^-$	$\nu l_L^-$
	R	$\tilde{l}_R^+$	$l_R^+$
Higgs, higgsino	H2	$H_2^+ H_2^0$	$\tilde{H}_2^+ \tilde{H}_2^0$
	H1	$H_1^0 H_1^-$	$\tilde{H}_1^0 \tilde{H}_1^-$

Tabla 3.1: Tabla de supermultipletes quirales. Se presentan con una tilde, las partículas supersimétricas, y sin ella las presentes en el SM. Las partículas con espín 0 corresponden a escalares complejos, mientras que las de espín semientero a las componentes de los espinores de Weyl *left-handed*.

En la tabla se encuentran los fermiones del SM, leptones y quarks, y sus fermiones escalares o sfermiones asociados, los squarks y sleptones. Se presenta también la quiralidad de las partículas, asociando R a *right handed* y L a *left handed*. Se comprueba como quarks y fermiones son *left handed*, mientras que entre las partículas añadidas en SUSY, se encuentran tanto *right handed* como *left handed*. Por otro lado, en SUSY, si se quiere dar masa tanto a los quarks como squarks, el *Higgs* necesita dos dobletes [11].

Vistos los supermultipletes quirales, se muestran los supermultipletes *gauge* [11]:

Nombres	espín 1/2	espín 1
gluino, gluón	$\tilde{g}$	g
winos, bosón W	$\tilde{W}^\pm \tilde{W}^0$	$W^\pm W^0$
bino, bosón B	$\tilde{B}^0$	$B^0$

Tabla 3.2: Tabla de supermultipletes de *gauge*.

En SUSY, los bosones propios del SM, aparecen acompañados de fermiones de espín 1/2 que reciben el nombre de *gauginos*. El gluón tiene asociado el gluino; los bosones  $W^\pm$  y  $W^0$  tienen asociados los *winos*; y por último, el bosón B tiene asociado el bino. Algo a remarcar aquí, es que como se vió en la parte de la unificación EW el bosón B, no corresponde a un campo físico, sin embargo en SUSY es conveniente el uso de estos bosones *gauge* ya que los autovalores que permiten obtener la masa de las partículas (como se muestra a continuación para el neutralino), aparecen como combinaciones de los mostrados en la tabla anterior.

Si se tiene en cuenta que cada partícula del SM tiene asociada su compañera supersimétrica (cada quark un squark, cada leptón su slepton, etc.) al tratar con SUSY se duplica el espectro de partículas del SM. Esto es clave para la resolución de dos de los problemas que motivaron en parte la introducción de SUSY: La materia oscura y la solución al problema de la jerarquía.

En cuanto a la materia oscura, se han propuesto una serie de partículas como

candidatos [12]:

- Neutralino. Se obtiene a través de una combinación lineal de los gauginos electrodébiles, el fotino ( $\bar{B}$ ) y el gluino ( $\bar{W}^0$ ) y los Higgsinos neutros. En base de autoestados de *gauge*, se puede representar como  $\phi(\bar{B}, \bar{W}^0, \bar{H}_d^0, \bar{H}_u^0)$ . En base al Lagrangiano supersimétrico que se obtendrá a continuación, se espera que esta partícula no presente interacción fuerte.
- Otros candidatos. Adicionalmente se han propuesto candidatos alternativos como el sneutrino  $\bar{\nu}$  tanto el *right-handed* como *left-handed*. No obstante, estos presentan una serie de problemas relacionados con los acoplos con el Higgs y otros bosones del SM.

De todos ellos, el neutralino es en el que hay depositadas mayores esperanzas como candidato a materia oscura en SUSY. De todas formas, es importante recalcar el hecho de que actualmente, no se tiene confirmación experimental de la existencia de ninguno de estos candidatos.

Dejando la materia oscura y centrando la atención ahora en el problema de la jerarquía, veamos que soluciones aporta esta teoría de SUSY. Para ello, se va a comenzar explicando un poco más en profundidad el mencionado problema de la jerarquía.

Recapitulando lo visto, se mencionó que el problema de la jerarquía, hace referencia a la gran diferencia observada entre la escala de energía correspondiente a la escala de Plank y las interacciones que toman lugar en el SM. Como consecuencia, se observa que al realizar teoría de perturbaciones para obtener las correcciones a la masa del *Higgs* se obtienen valores de la corrección muy superiores a la propia masa de este. Esto no ocurre para el caso de los fermiones y los bosones de *gauge* ya que las correcciones de estos son proporcionales a sus masas. La pregunta ahora es porque ocurre esto para el caso del Higgs y como SUSY es capaz de solucionar este problema.

La divergencia en las correcciones al Higgs es consecuencia de que la corrección a su masa tiene un término que corresponde con la escala de energía de nueva física, 10 TeV. Ya que si se calcula empleando teorías de perturbaciones (ver anexo B.2) se obtiene un valor de [13]:

$$\delta m_H^2 = \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} [6\lambda + \frac{1}{4}(9g^2 + 3g'^2) - y_t^2]. \quad (3.6)$$

Luego teniendo en cuenta que la masa del Higgs es de 125 GeV [1] se da entonces que  $\delta m_H^2 \gg m_H^2$ . SUSY resuelve este problema de forma relativamente sencilla, ya que como en SUSY se hace corresponder al boson de *Higgs* un fermión supersimétrico, el Higgsino, las correcciones en la masa del Higgsino modifican también la masa del *Higgs*, puesto que el mecanismo que propone SUSY para dar lugar a la masa es a través del multiplete formado por estos. Esto provoca la cancelación del término que depende de la escala de energía de nueva física, responsable de la divergencia, de modo que se soluciona el problema.

En cuanto a las diferencias de energías, las nuevas partículas presentes en SUSY, tienen masas situadas entre las correspondientes al SM y las de la escala de Plank, asimismo pueden dar lugar a nuevas interacciones cuyas energías se encuentren en este rango, solucionando también este problema.

### 3.1.1. Lagrangiano Supersimétrico.

Se tiene por tanto una solución a dos de los grandes problemas del SM, no obstante queda todavía en el aire el problema de la unificación de los acoplos *gauge*. Para ello se va a definir el Lagrangiano supersimétrico que agrupa las interacciones de SUSY, y que permitirá obtener las constantes de acoplo y las correspondientes  $b_i$  en las ecuaciones del grupo de renormalización.

Se ha comenazar considerando las tres interacciones posibles recogidas en SUSY. La primera de ellas es debida al superpotencial, y viene dada según [11]

$$W = \epsilon_{ij}[h_l \hat{H}_1^i \hat{L}^j \hat{R} + h_d \hat{H}_1^i \hat{Q}^j \hat{D} + h_u \hat{H}_2^j \hat{Q}^i \hat{U} - \mu \hat{H}_1^i \hat{H}_2^j]. \quad (3.7)$$

En este superpotencial,  $\hat{H}_1^i$  hace referencia al supercampo del higgs y el higgsino;  $\hat{L}^j$  y  $\hat{R}$  a los supercampos asociados a los leptones y sleptones respectivamente;  $\hat{Q}^j$ ,  $\hat{D}$  y  $\hat{U}$  hacen referencia a los supercampos asociados a los quarks y squarks. Por otro lado, los términos  $h_l$ ,  $h_d$  y  $h_u$  son los términos asociados a la interacción entre los fermiones,  $\mu$  el parámetro de masa del *higgsino* y  $\epsilon_{ij}$  el tensor totalmente antisimétrico. Este superpotencial toma partido en dos grupos de interacciones. El primero de ellos corresponde con las interacciones de Yukawa, al cual se le puede asociar un potencial  $V_{Yukawa}$  obtenido a partir de la ecuación anterior al sustituir dos de los supercampos fermiónicos por sus campos fermiónicos y el tercero por la componente escalar de estos, y cuya expresión es:

$$\begin{aligned} V_{Yukawa} = & \epsilon_{ij}[h_l H_1^i L^j R + h_d H_1^i Q^j D + h_u H_2^j Q^i U - \mu H_1^i H_2^j] \\ & + \epsilon_{ij}[h_l \tilde{H}_1^i \tilde{L}^j \tilde{R} + h_d \tilde{H}_1^i \tilde{Q}^j \tilde{D} + h_u \tilde{H}_2^j \tilde{Q}^i \tilde{U}] \\ & + \epsilon_{ij}[h_l \tilde{H}_1^i \tilde{L}^j R + h_d \tilde{H}_1^i \tilde{Q}^j D + h_u \tilde{H}_2^j \tilde{Q}^i U]. \end{aligned} \quad (3.8)$$

El segundo grupo de interacciones, bajo el nombre de  $V_W$  se extraen de la derivada del superpotencial con respecto a las componenetes escalares de los supercampos. Esto es:

$$V_W = \sum_i \left| \frac{\partial W(\phi_i)}{\partial \phi_i} \right|^2. \quad (3.9)$$

El segundo tipo de interacciones recogidas son las relacionadas con la simetría *gauge*. Estas pueden subdivirse en las siguientes:

- Las interacciones *gauge* presentes en el SM, dadas en función de las constantes  $g$ ,  $g'$  y  $g_s$  asociadas a los grupos  $U(1)$ ,  $SU(2)$  y  $SU(3)$  respectivamente.

- Las interacciones del *gaugino*, dadas por:

$$V_{\tilde{G}\psi\tilde{\psi}} = i\sqrt{2}g_a\phi_k\tilde{\kappa}^a(T^a)_{kl}\tilde{\psi}_l + h.c. \quad (3.10)$$

Siendo  $\phi$  y  $\psi$  las componentes de spin 0 y 1/2 del supercampo,  $T^a$  el generador de simetría,  $\kappa^a$  el campo del gaugino y  $g_a$  su constante de acoplo.

- El término asociado a la derivada covariante (D-term), relacionado con la estructura de la teoría:

$$V_D = \frac{1}{2} \sum g^a \phi_i^* (T^a)_{ij} \phi_j. \quad (3.11)$$

Siendo de nuevo  $\phi_i$  la componente escalar de los supercampos.

Teniendo en cuenta la totalidad de estos términos, ya es posible establecer un lagrangiano que solucione el problema de la jerarquía, y recoja las interacciones entre las nuevas partículas. No obstante, este lagrangiano presenta un problema, pues si se tiene en cuenta lo desarrollado en las dos primeras expresiones (3.7) y (3.8) se observa que tanto el quark top como el squark top interactúan de la misma manera con el supercampo de Higgs. Como resultado, se espera pues que las masas de estas dos partículas sean idénticas. Y dado que no se tiene evidencia experimental de ninguna de las partículas supersimétricas, se concluye pues que, si SUSY existe, su simetría ha de estar rota. El Lagrangiano de SUSY ha de reproducir pues este comportamiento, para lo cual se añade un término conocido como Soft-SUSY-breaking, que viene dado según [11]:

$$V_{soft}^I = \epsilon_{ij} [h_l A_l H_1^i \tilde{L}^j \tilde{R} + h_d A_d H_1^i \tilde{Q}^j \tilde{D} + h_u A_u H_2^i \tilde{Q}^j \tilde{U}]. \quad (3.12)$$

Con todo esto, es posible establecer el Lagrangiano completo para SUSY a través de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{MSSM} = & \mathcal{L}_{Kinetic} + \mathcal{L}_{Gauge} - V_{Yukawa} - V_W - V_{\tilde{G}\psi\tilde{\psi}} - V_D - V_{Soft}^I \\ & - m_1^2 H_1^\dagger H_1 - m_2^2 H_2^\dagger H_2 - m_{12}^2 (H_1^\dagger H_2^\dagger + H_1 H_2) \\ & - \frac{1}{2} m_{\tilde{g}} \psi_{\tilde{g}}^a \psi_{\tilde{g}}^a - \frac{1}{2} M_2 \tilde{w}_i \tilde{w}_i - \frac{1}{2} M_1 \tilde{B}^0 \tilde{B}^0 \\ & - M_{\tilde{l}_L}^2 \tilde{L}^* \tilde{L} - M_{\tilde{l}_R}^2 \tilde{R}^* \tilde{R} - M_{\tilde{Q}_L}^2 \tilde{Q}^* \tilde{Q} - M_{\tilde{d}_R}^2 \tilde{D}^* \tilde{D} - M_{\tilde{u}_R}^2 \tilde{U}^* \tilde{U}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Los términos  $\mathcal{L}_{Kinetic}$  y  $\mathcal{L}_{Gauge}$  son conocidos, pues provienen del SM, el primero de ellas representa la cinética de los campos fermiónicos y bosónicos, mientras que el segundo establece las interacciones *gauge*. Estas tres interacciones son las que se han desarrollado en el capítulo anterior, y corresponden a la nuclear fuerte y la electrodébil. Por otro lado los términos de  $V_{Yukawa}$ ,  $V_W$ ,  $V_{\tilde{G}\psi\tilde{\psi}}$ ,  $V_D$ , y  $V_{Soft}^I$  son los que se han discutido en esta sección y corresponden por tanto a las interacciones causadas por las nuevas partículas. Por último, el resto de términos representan las masas de las diferentes partículas, tanto los bosones *gauge*,



como los fermiones, quarks, sleptones y squarks como consecuencia de su interacción con el multiplete de *Higgs*.

Se observa pues como cada interacción no está caracterizada por un único acoplo, sino que aparecen varios. Esto produce que las constantes de acoplo de cada una de ellas se redefinan, teniendo en cuenta que ahora estas vienen condicionadas por los supercampos de *gauge*. No obstante, a pesar de estas redefiniciones, siguen existiendo las divergencias al igual que ocurría para en el SM. Como consecuencia, es necesario incluir de nuevo las ecuaciones del grupo de renormalización pero adaptadas para SUSY. Su expresión sigue siendo la misma a la presentada anteriormente, pero cambian los valores de las constantes  $b_i$ , que se pueden escribir de acuerdo con la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} - n_f \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - n_H \begin{pmatrix} 3/10 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -33/5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Recordemos que para calcular sus valores se ha usado que en modelos de SUSY se consideran dos dobletes de Higgs  $n_H = 2$  y tres familias de leptones  $n_f = 3$ . Con esto, si se escriben de nuevo las ecuaciones del grupo de renormalización, dadas explícitamente en (2.16), se obtienen las siguientes tres dependencias:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^{-1} \\ \alpha_2^{-1} \\ \alpha_3^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 63,72 \\ 30,32 \\ 6,32 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,42 \\ 0,37 \\ 1,10 \end{pmatrix} \log(Q). \quad (3.15)$$

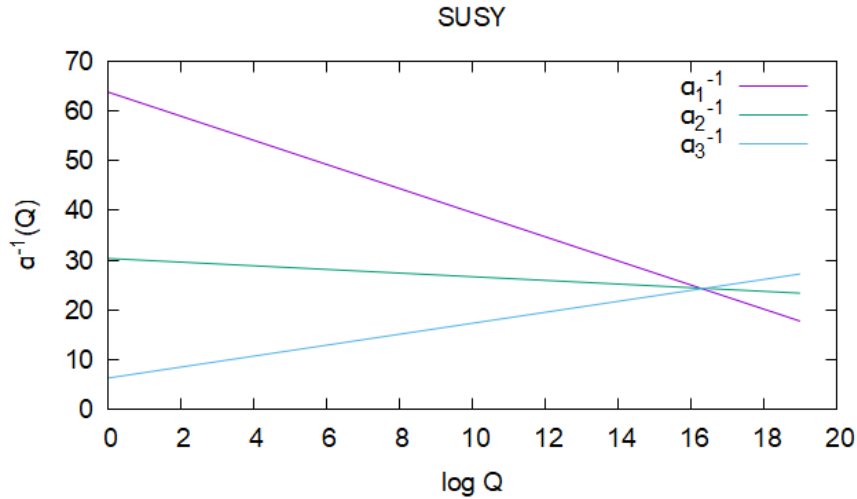


Figura 3.1: Evolución de  $\alpha_i^{-1}$  con el logaritmo de la energía.

Los resultados de la dependencia de las constantes de acoplo con la escala de energía  $Q$  se presentan en la figura 3.1. A diferencia de lo observado para el caso del SM, aquí si que observamos un punto de intersección común para las tres constantes de acoplo. Esta

intersección tiene lugar a la llamada escala de la gran unificación y se comprueba que corresponde a  $10^{16}$  GeV. SUSY por tanto resuelve el problema de la unificación.

Este logro está estrechamente relacionado con el grupo de simetría que se ha usado, el álgebra se desarrolla a través del producto de las transformaciones de Poincaré y las internas, basándose en los generadores férmionicos.

A pesar del enorme éxito como teoría unificada, SUSY también tiene otros inconvenientes. Uno de ellos es el hecho del gran número de parámetros arbitrarios en la teoría, aproximadamente 120, la gran mayoría asociados al desconocimiento sobre como tiene lugar la ruptura de la simetría. Estos parámetros condicionan las masas de las diferentes partículas supersimétricas, las interacciones entre las mismas, la ruptura de simetría del modelo, etc.

Sin embargo el mayor problema de esta teoría, es que hasta el momento no se tiene confirmación experimental de ninguna de las partículas predichas. Los motivos de esto pueden ser variados. Por ejemplo, como se ha comentado, la teoría presenta un gran número de parámetros arbitrarios que condicionan en buena medida los valores de las masas de las nuevas partículas predichas por este modelo, de modo que es complicado descartar partículas, ya que sus masas y acoplos no están unívocamente determinados. El hecho de que no se haya encontrado experimentalmente ningún indicio de este modelo impone cotas sobre las masas de las partículas SUSY y/o los parámetros libres en el modelo [1]. No obstante, aún se sigue investigando en el entorno de este modelo de la física más allá del SM.

# Capítulo 4

## Conclusiones.

A lo largo de este trabajo se ha desarrollado el SM, con especial énfasis en sus interacciones y los acoplos que preciden cada una de las interacciones incluidas; la interacción electromagnética, la nuclear débil y la nuclear fuerte. A partir de estos acoplos se han obtenido las ecuaciones del grupo de renormalización y se ha mostrado la dependencia de las constantes con la energía. Se ha comprobado como, exitosamente, el SM unifica las interacciones débil y electromagnética. Sin embargo, hemos encontrado que las tres constantes de acoplamiento que caracterizan sus interacciones no coinciden para ningún valor de la energía y, por tanto concluimos que, según lo predicho por el modelo, no tenemos la unificación de las tres interacciones mencionadas.

Con el objetivo de tener una teoría unificada, se ha estudiado una de las teorías alternativas, SUSY GUT, en concreto se ha escogido centrar la discusión en la variante simplificada de SUSY, el MSSM. Se ha descrito la forma en la que esta teoría introduce nuevas partículas así como las soluciones a los problemas de la jerarquía y materia oscura que presenta el SM. Para finalizar, se han caracterizado los acoplos, y a través de las ecuaciones del grupo de renormalización se ha obtenido la unificación de los acoplos a una escala de energía de  $10^{16}$  GeV. No obstante, a pesar del éxito como teoría de unificación de las interacciones fundamentales, esta teoría presenta también sus inconvenientes que se han mencionado en este trabajo.

Claramente, en el marco de la física de partículas existen aún muchas preguntas abiertas, y aunque el SM es sin duda un modelo muy exitoso y comprobado experimentalmente, no podemos descartar la existencia de algún modelo de Nueva Física que nos podría ofrecer respuestas a estas preguntas.

# Bibliografía

- [1] P. A. Zyla et al. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2020(8):083C01, 2020.
- [2] W. Hulsbergen M. Merk, I. Van Vulpen. Particle Physics 1. Lecture notes for the first year master course on the electroweak part of the Standard Model. *Nikhef*, pages 107–127, 129–132, 2017.
- [3] D. Restrepo. El Lagrangiano del Modelo Estándar. *Lectures*, pages 7–72, 2020.
- [4] M. J. Herrero. The Standard model. *NATO Sci. Ser. C*, 534:1–59, 1999.
- [5] M. E. Peskin. Beyond the standard model. hep-ph/9705479. *SLAC-PUB-7479*, pages 17–18, 1997.
- [6] A. Pich. The Standard model of electroweak interactions. In *2006 European School of High-Energy Physics*, pages 1–49, 2007.
- [7] I. Van Vulpen. The standard model higgs boson. In *Part of the Lecture Particle Physics II, UvA Particle Physics Master*, pages 15–19, 2013.
- [8] G. Altarelli. Collider Physics within the Standard Model. *Lecture Notes in Physics 937*, pages 27–96, 2017.
- [9] B.C. Allanach. Beyond the Standard Model. *BSM lectures*, pages 1–32, 2019.
- [10] R.F Streater I.T. Grodsky. No-Go Theorem. *Phys. Rev. Lett.* 20, 695, 1968.
- [11] A. A. Quintana. Effective Theories and Monte-Carlo Simulations: SUSY Phenomenology at the Large Hadron Collider. PhD Thesis. pages 6–9, 2014.
- [12] L. Covi. R. Catena. SUSY dark matter(s). *Eur. Phys. J. C*, 74:2703, 2014.
- [13] S. Peñaranda. Physics Beyond Standard Model. Notas para el Master en física del Universo. 2022.

# Anexos A

## Anexo A

Presentamos en este anexo algunos detalles que complementan lo presentado en el el Capítulo 2.

### A.1. Grupo de simetría $U(1)$ .

Se introducen aquí detalles sobre el grupo de simetría  $U(1)$ .

El grupo de simetría  $U(1)$  representa las rotaciones de un eje complejo. Sus elementos son por tanto números complejos de módulo unidad que pueden ser representados por [3]:

$$U(\theta) = e^{i\theta(x)Q}. \quad (\text{A.1})$$

Estas transformaciones pueden ser de carácter local o global, en función de si el parámetro  $\theta$  es función o no de las coordenadas. Y es el generador de los elementos del grupo, que habitualmente se escoge real. Cuando se habla de transformaciones de fase locales del grupo  $U(1)$  se hace referencia a transformaciones como las siguientes:

$$\psi \longrightarrow \psi' = U(\theta) \psi = e^{i\theta Q} \psi; \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} U^*(\theta) = \bar{\psi} e^{-i\theta Q}. \quad (\text{A.3})$$

Este tipo de transformaciones mantienen invariante el producto escalar.

### A.2. Invariancia del lagrangiano de QED bajo transformaciones del grupo $U(1)$ .

Se incluye la demostración de la invariancia del lagrangiano bajo transformaciones del grupo  $U(1)$ .

Se está interesado en transformaciones locales. Bajo estas transformaciones, los campos fermiónicos y del fotón se modifican de acuerdo a las siguientes expresiones:

$$A_\mu \longrightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x), \quad (\text{A.4})$$

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{i\theta(x)Q} \psi, \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{\psi} \longrightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\theta(x)Q}. \quad (\text{A.6})$$

El lagrangiano que se obtiene tras esta transformación es pues:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}'(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi' - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A'_\mu. \quad (\text{A.7})$$

Desarrollando la expresión anterior, y omitiendo la dependencia del parámetro  $\theta$  con las coordenadas ( $\theta(x) \equiv \theta$ ):

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}e^{-i\theta Q}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)e^{i\theta Q}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta). \quad (\text{A.8})$$

Descomponiendo el paréntesis del primer miembro en dos sumandos:

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}e^{-i\theta Q}i\gamma^\mu \partial_\mu(e^{i\theta Q}\psi) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi(A_\mu - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta). \quad (\text{A.9})$$

Donde se han cancelado las exponenciales en el término de la masa. Hecho esto, desarrollando la derivada del producto  $\partial_\mu(e^{i\theta Q}\psi)$  y reorganizando los términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & \bar{\psi}e^{-i\theta Q}i\gamma^\mu \partial_\mu\psi e^{i\theta Q} - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - eQ\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi A_\mu \\ & + \bar{\psi}e^{-i\theta Q}i\gamma^\mu\psi(iQe^{i\theta Q}\partial_\mu\theta) + eQ\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi\frac{1}{e}\partial_\mu\theta. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Es sencillo notar, como al conmutar las exponenciales con el resto de términos del lagrangiano, puesto que el generador  $Q$  es un número complejo de módulo 1, la primera línea coincide con el lagrangiano original. Además, multiplicando y reordenando los términos de la segunda línea, se llega:

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} - Q\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi\partial_\mu\theta + Q\bar{\psi}e^{-i\theta Q}\gamma^\mu e^{i\theta Q}\psi\partial_\mu\theta = \mathcal{L}. \quad (\text{A.11})$$

Luego efectivamente, se comprueba la invariancia bajo este tipo de transformaciones. Esta se da también para transformaciones globales.

### A.3. Dependencia de las constantes $b_i$ .

Se obtiene la dependencia de las constantes  $b_i$ , y su relación con el grupo de simetría que se trata.

Se busca obtener los valores de las constantes  $b_i$  que se presentan en el trabajo. Estos términos son resultado de las contribuciones de los bosones de *gauge* del grupo de simetría en que se esté trabajando, de las representaciones de los fermiones de Weyl, y de las contribuciones de escalares complejos. Vayamos término a término, el primero de ellos viene dado según:

$$b_i = \frac{11}{3}C_2(G_i), \quad (\text{A.12})$$

siendo  $C_2$  el operador de casimir cuadrático del grupo de *gauge*  $G_i$ . Este operador de Casimir se puede poner en función de los generadores de la representación adjunta del grupo de la siguiente manera:

$$\mathcal{I}C_2(G_i) = \sum_A T_a^2. \quad (\text{A.13})$$

De este modo, se cumple que para el grupo de simetría  $SU(N)$  viene dado según:

$$b_i = \frac{11}{3}C_2(G_i) = \frac{11}{3}N. \quad (\text{A.14})$$

Para el caso particular de  $U(1)$  se tiene  $C_2 = 0$ .

La contribución de cada representación de los fermiones de Weyl se puede computar como:

$$b_i = -\frac{2}{3}T_R, \quad (\text{A.15})$$

con  $T_R$  el índice de Dyhkin de la representación a la que pertenecen los fermiones, esto es:

$$T_r(T_R^a T_R^b) = T_R \partial^{ab}, \quad (\text{A.16})$$

Este índice toma el valor  $T_R = \frac{1}{2}$  para la representación fundamental de  $SU(N)$ , y  $T_R = Y^2$  para  $U(1)_Y$  siendo  $Y$  la hipercarga. Dado que se introducirán estas mismas ecuaciones cuando se trata con SUSY, es importante mencionar que en este caso  $T_R = N$ . Por último lugar, las contribuciones de los escalares complejos vienen dados asimismo en función de los índices de Dyhkin como:

$$b_i = -\frac{1}{3}T_R. \quad (\text{A.17})$$

Por tanto, la suma de las tres contribuciones lleva a la expresión:

$$b_i = \frac{11}{3}C_2(G_i) - \frac{2}{3}T_R n_f - \frac{1}{3}T_R. \quad (\text{A.18})$$

Teniendo en cuenta lo mencionado sobre el operador de casimir del primer término, que el segundo hay que multiplicarlo por el número de partículas del modelo que se considere, y lo mismo para el tercero con el número de escalares, se obtienen las ecuaciones presentadas.

#### A.4. Obtención de las ecuaciones del grupo de renormalización.

Se desarrolla la expresión 2.13, para obtener la dependencias de  $g_i(Q)$ . Para ello se parte de la ecuación:

$$\frac{d}{d \log Q} g_i(Q) = -\frac{b_i}{(4\pi)^2} g_i^3 \quad (\text{A.19})$$

Para resolver la ecuación, se lleva a cabo el cambio de variable  $t = \log Q$  y teniendo en cuenta que  $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$  se puede escribir:

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{d \frac{g_i^2}{4\pi}}{dt} = \frac{2g_i}{4\pi} \frac{dg_i}{dt} = \frac{2g_i}{4\pi} \left( -\frac{b_i}{(4\pi)^2} g_i^3 \right). \quad (\text{A.20})$$

Luego es sencillo notar que:

$$-\frac{b_i}{(2\pi)} \alpha_i^2 = \frac{d\alpha_i}{dt} \quad (\text{A.21})$$

Para resolverla, se usa el hecho de que cuando se trata con *1-loop* los coeficientes  $b_i$  son independientes de  $\alpha$ . Teniendo en cuenta este hecho y despejando términos de la expresión anterior, se llega a:

$$-\frac{1}{\alpha_i^2} \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{b}{2\pi}, \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{1}{\alpha_i(Q)} - \frac{1}{\alpha(\mu)} = \frac{b_i}{2\pi} (t(Q) - t(\mu)). \quad (\text{A.23})$$

Deshaciendo el cambio de variable  $t = \log Q$ , se obtienen las ecuaciones del grupo de renormalización:

$$\frac{1}{\alpha_i(Q)} = \frac{1}{\alpha_i(\mu)} + \frac{b}{2\pi} \ln \frac{Q}{\mu}. \quad (\text{A.24})$$

Es sencillo notar como si se recuerda la relación  $\alpha_i = \frac{g_i^2}{4\pi}$ , la ecuación anterior es equivalente a:

$$g_i^2(Q) = \frac{g_i^2(\mu)}{1 + (b_i/8\pi^2) \log(\frac{Q}{\mu})}. \quad (\text{A.25})$$

Como se quería obtener

## A.5. Comprobación de la ruptura de simetría asociada a los bosones gauge.

Correspondiendo con el apartado 2 del Capítulo 2, se presenta la demostración de que la elección de vacío, rompe la simetría bajo transformaciones de  $SU(2)_L \times U(1)_Y$ .

Para comprobar la ruptura de la simetría, calculamos la acción de los generadores de los grupos de simetría  $SU(2)$  y  $U(1)$ . Denotando como  $\tau_i$  con  $i=1,2,3$  a los propios de  $SU(2)$  y recordando que estos vienen dados por las matrices de Pauli:

$$\tau_1 \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.26})$$

$$\tau_2 \phi_0 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v+h \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.27})$$

$$\tau_3 \phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.28})$$

Se comprueba por tanto la ruptura de simetría de  $SU(2)$ . Para  $U(1)$  se tiene lo siguiente:

$$Y \phi_0 = Y_{\phi_0} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} \neq 0. \quad (\text{A.29})$$

Donde este resultado se justifica por el hecho de que para las transformaciones de  $U(1)$  el parámetro  $Y_{\phi_0}$  corresponde con un número complejo de módulo 1.



Este resultado implica por tanto que los bosones  $W_1$ ,  $W_2$ ,  $W_3$  y  $B$  considerados adquieren masa a través de este mecanismo de Higgs. El hecho de que el fotón permanezca sin masa a pesar de este hecho es debido a que se obtiene como una combinación de los campos  $B$  y  $W_3$ , esta combinación mantiene la simetría, pues:

$$Q\phi_0 = \frac{1}{2}(\tau_3 + Y)\phi_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.30})$$

## A.6. Desarrollo de las derivadas covariantes en el modelo EW.

Se expone aquí el desarrollo del término  $(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$ .

La expresión de este término, considerando el vacío, viene dada por:

$$D_\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}[\delta_\mu + ig\frac{1}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}YB_\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ v+h \end{pmatrix}. \quad (\text{A.31})$$

Dado que para llevar a cabo la unificación electrodébil, solo es necesario tener en cuenta los términos que produzcan las masas de los bosones gauge, y estos son proporcionales a  $v^2$ . Es posible desarrollar la derivada centrando la atención exclusivamente en esos términos:

$$D_\mu\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}[ig\frac{1}{2} + \vec{\tau} \cdot \vec{W}_\mu + ig'\frac{1}{2}YB_\mu] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (\text{A.32})$$

$$D_\mu\phi = \frac{i}{8}[g(\begin{pmatrix} 0 & W_1 \\ W_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -iW_2 \\ iW_2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} W_3 & 0 \\ 0 & -W_3 \end{pmatrix}) + g' \begin{pmatrix} Y_{\phi_0}B_\mu & 0 \\ 0 & Y_{\phi_0}B_\mu \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

$$D_\mu\phi = \frac{iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_1 - iW_2) \\ -gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.34})$$

A partir de aquí, es posible obtener el valor de  $(D^\mu\phi)^\dagger$  conjugando la expresión anterior:

$$(D^\mu\phi)^\dagger = -\frac{iv}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} g(W_1 + iW_2) \\ -gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu \end{pmatrix}. \quad (\text{A.35})$$

Luego el término  $(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi)$  viene finalmente dado por:

$$(D^\mu\phi)^\dagger(D_\mu\phi) = \frac{1}{8}v^2[g^2(W_1^2 + W_2^2) + (-gW_3 + g'Y_{\phi_0}B_\mu)^2]. \quad (\text{A.36})$$

## A.7. Lagrangiano EW en función de los bosones físicos.

Se presenta el desarrollo necesario para reescribir la parte escalar del lagrangiano en función de los bosones  $W^\pm$  y  $B_\mu$ , correspondiente al paratdo 2 del Capítulo 2.

Cuando se discute la interacción de las corrientes cargadas en  $SU(2)$  se obtienen relaciones entre los bosones físicos y  $W_1$ ,  $W_2$  [7]. Esto permite establecer las siguientes relaciones:

$$\frac{1}{2}(\tau_1 W_1 + \tau_2 W_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tau_+ W^+ + \tau_- W^-) \quad (\text{A.37})$$

Teniendo en cuenta ahora la expresión de la derivada covariante:

$$(D^\mu \phi)^\dagger (D_\mu \phi) = \frac{1}{8} v^2 [g^2 (W_1^2 + W_2^2) + (-gW_3 + g'Y_{\phi_0} B_\mu)^2] \quad (\text{A.38})$$

Es posible escribir:

$$g^2 (W_1^2 + W_2^2) = g^2 (W^{+2} + W^{-2}) \quad (\text{A.39})$$

Se tiene ya pues uno de los términos en función de los bosones físicos  $W^\pm$ . En cuanto a los valores de  $W_3$  y  $B_\mu$  atendiendo al segundo de los términos, es posible expresarlo como:

$$(-gW_3 + g'Y_{\phi_0} B_\mu)^2 = (W_3, B_\mu) \begin{pmatrix} g^2 & -gg'Y_{\phi_0} \\ -gg'Y_{\phi_0} & g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = (W_3, B_\mu) A_{W_3, B_\mu} \begin{pmatrix} W_3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Si se recuerda el hecho de que se ha tomado el valor de la hipercarga  $Y_{\phi_0} = 1$ , la matriz anterior se puede diagonalizar encontrando los valores  $\lambda$  que cumplen:

$$|A_{W_3, B_\mu} - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} g^2 - \lambda & -gg' \\ -gg' & g'^2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - g'^2 - g^2) = 0 \quad (\text{A.41})$$

Se obtienen por tanto los autovalores  $\lambda = 0$  y  $\lambda = g^2 + g'^2$ . Los autovectores correspondientes, normalizados son:

$$\lambda = 0 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g' \\ g \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'W_3 + gW_\mu) = A_\mu \quad (\text{A.42})$$

$$\lambda = g^2 + g'^2 \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \begin{pmatrix} g \\ -g' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (gW_3 - g'W_\mu) = Z_\mu \quad (\text{A.43})$$

Y comparando con los términos de la derivada covariante:

$$(-gW_3 + g'Y_{\phi_0} B_\mu)^2 = (g^2 + g'^2) Z_\mu^2 + 0 \cdot A_\mu^2 \quad (\text{A.44})$$

Se tiene ya pues la derivada covariante expresada en función de los campos, por lo que puede ser insertada en el lagrangiano, obteniéndolo en función de los bosones físicos.

## A.8. Desarrollo de la derivada covariante, parte de $W_\mu^3$ y $B_\mu$ .

Desarrollo de la derivada covariante centrada en  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$  para obtener las relaciones entre acoplos.

La derivada covariante en teoría electroweak, viene dada según:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu + ig \vec{Z} \vec{W}_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu + ig(\tau_1 W_1 + \tau_2 W_2 + \tau_3 W_3) \quad (\text{A.45})$$

Si se centra la atención en los términos relativos a  $W_\mu^3$  y  $B_\mu$ :

$$D_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu + ig\tau_3 W_3 \quad (\text{A.46})$$

Teniendo en cuenta los resultados del anexo anterior donde se establecen las relaciones entre los bosones  $W_i$ ,  $B_\mu$  y los bosones físicos se obtiene que:

$$gg'W_\mu^3 - g'^2 B_\mu = g'Z_\mu \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (\text{A.47})$$

$$gg'W_\mu^3 + g'^2 B_\mu = gA_\mu \sqrt{g^2 + g'^2} \quad (\text{A.48})$$

Por lo tanto, restando las dos ecuaciones anteriores:

$$(g^2 + g'^2)B_\mu = \sqrt{g^2 + g'^2}(gA_\mu - g'Z_\mu) \quad (\text{A.49})$$

Luego se obtiene:

$$B_\mu = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(gA_\mu - g'Z_\mu) \quad (\text{A.50})$$

Por otro lado, si en lugar de restar las dos ecuaciones se adicionan se llega procediendo idénticamente a que:

$$W_\mu^3 = \frac{1}{\sqrt{g^2 + g'^2}}(g'A_\mu + gZ_\mu) \quad (\text{A.51})$$

Por tanto es posible escribir la derivada covariante como:

$$D_\mu = \partial_\mu + ig' \frac{Y}{2} B_\mu + ig\tau_3 W_3 = \partial_\mu + i \frac{g'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \frac{Y}{2} (gA_\mu - g'Z_\mu) + \frac{g\tau_3}{\sqrt{g^2 + g'^2}} (g'A_\mu + gZ_\mu) \quad (\text{A.52})$$

Reagrupando términos se llega directamente al valor buscado:

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu \frac{gg'}{\sqrt{g'^2 + g^2}} (T_3 + \frac{Y}{2}) + iZ_\mu \frac{1}{\sqrt{g'^2 + g^2}} (g^2 T_3 - g'^2 \frac{Y}{2}) \quad (\text{A.53})$$

Como se pretendía comprobar.

## A.9. Grupo de simetría SU(3).

Detalles adicionales sobre el grupo de simetría SU(3).

El grupo de simetría SU(3), empleado en el desarrollo de la QCD está compuesto por el conjunto de matrices especiales ( $\det(U) = 1$ ) y unitarias ( $U^\dagger = U$ ), sobre el cuerpo complejo  $\mathbb{C}$ . Admiten por lo tanto el desarrollo:

$$U = e^{iH} \text{ siendo } H \text{ hermítica} \quad (\text{A.54})$$

Dado que el grupo está compuesto por matrices especiales, la traza de la matriz H ha de ser nula. Esto confiere a este grupo de simetría un total de 8 grados de libertad, de modo

que es posible expresar estas matrices  $H$  como una combinación lineal de los 8 generadores del grupo  $SU(3)$ , denotados como  $T_a$ . Esto es:

$$H = \sum_{a=0}^8 \alpha_a T_a = \alpha_a T_a \quad (A.55)$$

Siendo estos generadores:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## A.10. Solución a los problemas observados al tratar con quarks.

Violación del postulado de simetrización y solución introduciendo la carga de color.

Se va a ejemplificar la necesidad de introducir la carga de color para evitar contradecir principios fundamentales al tratar o descomponer partículas en quarks. El  $\Omega^-$  se trata de una partícula de spin  $\frac{3}{2}$ , cuya última componente viene dada según  $S_z = \frac{3}{2}$ . Se espera una función de onda antisimétrica, por ser un fermión. Haciendo uso de que es posible escribir las funciones de onda como producto de la parte de spin, por la parte espacial, y por la parte de sabor, se tiene:

$$\Omega^- = \phi_{espacial} \phi_{spin} \phi_{sabor} \quad (A.56)$$

La parte de spin es una función simétrica, pues como  $S_z = \frac{3}{2}$ , los tres quarks de spin  $1/2$  han de estar orientados hacia arriba. La parte espacial es también simétrica pues para este hadrón se tiene que  $l=0$ . Por último, la función de onda de sabor, al tratarse de tres quarks, también es simétrica. Se obtiene pues una función de onda simétrica que va en contra de lo esperado para una partícula compuesta por tres fermiones. Además de esto, la expresión anterior viola el principio de exclusión de Pauli, pues itúa 3 quarks en el mismo estado.

La solución esta, como se ha anticipado en la introducción de la carga de color. Esto provoca que ahora un quark ya no sea único sino que pueda tener tres valores de esta carga de color  $i_G, i_R, i_B$ . Con esto se soluciona el problema del principio de exclusión. Junto a esta solución propuesta, como se ha comentado en el trabajo por Gell-Mann y Fritzsche, se alade un antisimetrizador  $\epsilon_{RGB}$  obteniendo finalmente una función de onda antisimétrica. De aquí la importancia del color.

### A.11. Simetría global del lagrangiano de $\mathcal{L}_l$ .

Comprobación de la invariancia del lagrangiano bajo transformaciones del grupo SU(3).

Para una transformación entre dos sabores q y q' dada por la matriz U perteneciente a SU(3) se tiene que:

$$q \rightarrow q' = Uq\bar{q} \rightarrow \bar{q}' = \bar{q}U^\dagger = \bar{q}U^{-1} \quad (\text{A.57})$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}'_l = \bar{q}U^{-1}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)Uq = \bar{q}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)q = \mathcal{L}_l \quad (\text{A.58})$$

Luego se comprueba la existencia de simetría global.

### A.12. Transformación del término $G_\mu^a$ para garantizar invariancia.

Demostración de que la invariancia gauge requiere la introducción del término  $G_\mu^a$  y que tranforme como:  $G_\mu^a \longrightarrow G_\mu'^a = G_\mu^a + \delta G_\mu^a = G_\mu^a + \partial_\mu\alpha_c - g_s\alpha_b f_{abc}G_\mu^a$

Se considera pues una transformación local entre sabores de la forma:

$$q = Uq = e^{ig_s\alpha_a T_a}q \approx (1 + ig_s\alpha_a T_a)q \quad (\text{A.59})$$

El objetivo es encontrar la condición que se ha de cumplir para que se mantenga la invariancia. Si se calcula el efecto de estas transformaciones sobre el término de la derivada, se obtiene:

$$\partial_\mu q' = \partial_\mu(q + ig_s\alpha_a T_a q) = \partial_\mu q + ig_s\alpha_a T_a \partial_\mu q + ig_s(\partial_\mu\alpha_a)T_a q \quad (\text{A.60})$$

Donde se ha usado la derivada del producto para obtener los dos últimos términos, pues tanto q como  $\alpha_a$  dependen de las coordenadas. Agrupando la expresión anterior, se llega a:

$$\partial_\mu q' = (1 + ig_s\alpha_a T_a)\partial_\mu q + ig_s(\partial_\mu\alpha_a)T_a q \quad (\text{A.61})$$

Es sencillo notar como aparece un término extra, que elimina toda posibilidad de invariancia del lagrangiano. Para solucionar esto, se sustituye la derivada parcial ordinaria por una derivada covariante. Esta tiene como expresión:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a \quad (\text{A.62})$$

Es aquí donde aparece por primera vez el término  $G_\mu^a$ . Es sencillo ver la correspondencia entre este y la derivada parcial del término  $\alpha_a$ . Visto esto, se va a obtener ahora el término correspondiente a la actuación de la derivada covariante sobre el nuevo sabor, esto es:

$$D_\mu q' = [\partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a + \delta G_\mu^a](1 + ig_s T_a \alpha_a)q = \quad (\text{A.63})$$

$$= (1 + ig_s T_a \alpha_a)\partial_\mu q + ig_s \partial_\mu \alpha_a T_a q - ig_s T_a G_\mu^a (1 + ig_s \alpha_b T_b)q - ig_s T_a \delta G_\mu^a (1 + ig_s \alpha_a T_a)q \quad (\text{A.64})$$

Agrupando la expresión anterior, y despreciando los términos cuyo orden es de  $\alpha_a G_\mu^a$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} D_\mu q' &= (1 + ig_s T_a \alpha_a)(\partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a)q + (1 + ig_s T_a \alpha_a)(iT_b G_\mu^b)q - ig_s T_a (1 + ig_s \alpha_b T_b)G_\mu^a q \\ &\quad - ig_s T_a \delta G_\mu^a q + ig_s T_a q \partial_\mu \alpha_a \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

Simplificando la expresión anterior, se llega a:

$$D_\mu q' = (1 + ig_s T_a \alpha_a)D_\mu q - g_s^2 \alpha_b [T_b, T_a]G_\mu^a q - ig_s T_a \delta G_\mu^a q + ig_s T_a q \partial_\mu \alpha_a \quad (\text{A.66})$$

Y utilizando las relaciones de conmutación de los generadores de SU(3), se llega finalmente a que:

$$D_\mu q' = (1 + ig_s T_a \alpha_a)D_\mu q - g_s^2 \alpha_b [T_b, T_a]G_\mu^a q - ig_s T_a \delta G_\mu^a q + ig_s T_a q \partial_\mu \alpha_a \quad (\text{A.67})$$

Luego como para que se tenga simetría se ha de cumplir que  $D_\mu q' = (1 + ig_s \alpha_a T_a)D_\mu q$ , los últimos tres términos anteriores han de igualarse a 0. Usando el hecho de que, en representación fundamental los generadores de SU(3) cumplen que  $\text{tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ , multiplicando la ecuación anterior por un tercer generador  $T_d$  y tomando la traza, se llega finalmente a que:

$$0 = -g_s^2 \alpha_b f_{abc} \text{Tr}(T_d T_c)G_\mu^a + g_s \text{Tr}(T_d T_a)\partial_\mu \alpha_a - g_s \text{Tr}(T_d T_a)\delta G_\mu^a \quad (\text{A.68})$$

$$0 = -g_s^2 \alpha_b f_{bad}G_\mu^a + g_s \partial_\mu \alpha_d - g_s \delta G_\mu^a \quad (\text{A.69})$$

Renombrando índices y haciendo uso de que se cumple que  $f_{bca} = f_{abc}$  se obtiene finalmente:

$$\delta G_\mu^c = \partial_\mu \alpha_c - g_s \alpha_b f_{abc} G_\mu^a \quad (\text{A.70})$$

Luego es sencillo notar, que la invariancia bajo las mencionadas transformaciones de sabor implica que:

$$G_\mu^a \longrightarrow G_\mu'^a = G_\mu^a + \delta G_\mu^c = G_\mu^a + \partial_\mu \alpha_c - g_s \alpha_b f_{abc} G_\mu^a \quad (\text{A.71})$$

Como se pretendía demostrar.

### A.13. Término cinético del gluón.

Obtención del término cinético del gluón para completar el lagrangiano.

La derivada covariante, viene dada en SU(3) por:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a \quad (\text{A.72})$$

Si se considera ahora el conmutador de dos de estas derivadas:

$$[D_\mu, D_\nu] \psi = [\partial_\mu - ig_s T_a G_\mu^a, \partial_\nu - ig_s T_a G_\nu^a] \psi \quad (\text{A.73})$$

$$= -ig_s [\partial_\mu, T_b G_\nu^b] + [T_a G_\mu^a, \partial_\nu] \psi - g_s^2 [T_a, T_b] G_\mu^a G_\nu^b \psi \quad (\text{A.74})$$

$$= -ig_s T_b \partial_\mu G_\nu^b - T_a \partial_\nu G_\mu^a \psi - g_s^2 i f_{abc} T_c G_\mu^a G_\nu^b \psi \quad (\text{A.75})$$

$$= -ig_s T_a \partial_\mu G_\nu^a - T_a \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{bca} T_a G_\mu^b G_\nu^c \psi \quad (\text{A.76})$$

$$= -ig_s T_a G_{\mu\nu}^a \psi \quad (\text{A.77})$$

Donde, tras ciclar los índices, se ha definido:

$$G_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f_{abc} G_\mu^b G_\nu^c \quad (\text{A.78})$$

A partir de aquí se identifica el término cinético del gluón con  $-\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu}$ , siendo este invariante gauge.

Si se desarrolla, es posible observar las interacciones entre los campos del gluón, luego desarrollando:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G_a^{\mu\nu} = \\ & = -\frac{1}{4} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - \frac{g_s}{2} (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu - \frac{g_s^2}{4} (f_{abc} f_{adc} G_\mu^b G_\nu^c G_d^\mu G_e^\nu) \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

A diferencia de lo visto en QED, en este caso se observan un mayor número de interacciones entre los campos del gluón.

# Anexos B

## Anexo B

### B.1. Algebra de Lie.

Más detalles sobre los grupos de Lie, presentes cuando se trata con supersimetría.

Para tratar el álgebra de Lie, se comienza definiendo lo que se conoce como grupo. Se entiende pues como grupo a un conjunto de elementos, no necesariamente numerable, con una ley de composición interna que satisface las propiedades asociativa, existencia de un elemento neutro (que se denota  $e$ ) y existencia de un elemento inverso.

Se dice pues que un grupo es de Lie, si sus elementos, que se van a denotar como  $g_i$  dependen de forma continua y diferenciable de un conjunto de parámetros reales  $\theta_a$  ( $a = 1, \dots, N$ ) siendo  $N$  la dimensión del grupo.

A un grupo de Lie es posible asignarle una representación, denotada como  $R$ , que asigna a cada elemento del grupo un operador lineal, denotado como  $D_R(g)$ . Este ha de cumplir que:

$$D_R(e) = \mathbb{I} \quad (B.1)$$

$$D_R(g_i \cdot g_j) = D_R(g_i) \cdot D_R(g_j) \quad (B.2)$$

Es posible entonces definir los mencionados generadores del grupo de Lie, en una representación  $R$  como:

$$T_R^a = i \left. \frac{\partial D_R}{\partial \theta_a} \right|_{\theta=0} \quad (B.3)$$

Una transformación arbitraria del grupo de Lie queda pues expresada como:

$$D_R = e^{-i\theta_a T_R^a} \quad (B.4)$$

Son este tipo de traslaciones las permitidas según el teorema de no-go

### B.2. Correcciones a la masa del Higgs.

Obtención de forma cualitativa de la primera corrección a la masa del *Higgs*.



Para obtener la primera corrección a la masa del Higgs, se parte del término de masa del campo de *Higgs*, el cual viene dado según [5]:

$$\Delta\mathcal{L} = -\mu^2\phi^\dagger\phi. \quad (\text{B.5})$$

Sin entrar en detalles, este término respeta todas las simetrías impuestas en el SM, sin importar el valor de  $\mu$ . Como se comenta en el trabajo,  $\mu$  corresponde con una escala de energía arbitraria, que es posible fijar, teniendo en cuenta el objetivo que se persigue como  $\mu^2 = 0$ . En este supuesto, el término de masa viene dado exclusivamente por correcciones radiativas. Estas correcciones se pueden visualizar en el siguiente diagrama de Feynman:

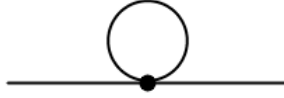


Figura B.1: Diagrama más simple capaz de generar el término de masa del *Higgs*.

Un proceso representado por un diagrama como el anterior, aporta una contribución a la masa del Higgs dada por [5]:

$$-im^2 = -i\lambda \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{i}{k^2}, \quad (\text{B.6})$$

donde se ha tomado  $\mu^2 = m^2$ . Formalmente, este término es similar al mostrado en la expresión (2.14), y al igual que este, la integral es divergente. Este carácter divergente se recoge en el parámetro  $\Lambda$ , que permite expresar la igualdad anterior como:

$$-im^2 = -i\frac{\lambda}{16\pi^2}\Lambda^2 \quad (\text{B.7})$$

Esta corrección es positiva y divergente y produce el llamado problema de la jerarquía que se menciona.  $\Lambda$  se toma a la escala de energía de nueva física, cortando la divergencia, estas modificaciones llevan a la expresión mostrada en la parte en que se trata el problema de la jerarquía y su solución en SUSY.

### B.3. Quiralidad.

Explicación de la quiralidad y su importancia en modelos de supersimetría.

La quiralidad se define a través de los operadores de proyección quirales:

$$P_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5), \quad P_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5). \quad (\text{B.8})$$

El primero corresponde a orientación *left-handed* y el segundo a *right-handed*. Estos operadores de quiralidad han de cumplir:

$$P_L^2 = P_L, \quad P_R^2 = P_R, \quad P_L P_R = P_R P_L = 0, \quad P_L + P_R = \mathcal{I}. \quad (\text{B.9})$$

A partir de aquí, se definen las componentes *left handed* y *right handed*, presentes en las tablas como:

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \psi_R = P_R \psi. \quad (\text{B.10})$$

A estas representaciones se les conoce como espinores de Weyl. Las ecuaciones de onda de los fermiones tienen soluciones con diferentes helicidades, correspondientes a modos *left handed* y *right handed*. Este valor de la helicidad determina como interactúan estos fermiones. Por poner un ejemplo, la interacción débil, solo se da sobre fermiones left-handed, mientras que la electromagnética sobre right-handed.

Es por esto por lo que en la tabla donde se presentan las partículas de supersimetría se ha hecho énfasis en la quiralidad de las mismas, pues al haber un mayor número de partículas e interacciones, la elección de las componentes quirales es clave para que se reproduzca lo observado.