



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

MODELO ESTÁNDAR: FÍSICA DEL SABOR

Autor

Francisco Javier Gómez Fauro

Directores

Siannah Peñaranda Rivas

Jorge Alda Gallo

UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA
FACULTAD DE CIENCIAS
2022/2023

Índice

1. Introducción.	1
2. Interacción electromagnética.	2
2.1. Campo electromagnético clásico. Ecuaciones de Maxwell. Forma covariante. Invariancia gauge.	2
2.2. Cuantización del campo electromagnético libre.	4
2.2.1. Propagador del fotón.	7
2.3. Campo de Dirac.	8
2.4. Electrodinámica Cuántica.	9
3. Modelo Estándar.	10
3.1. QED en el SM.	10
3.2. Interacción electrodébil.	12
3.2.1. Interacciones de corrientes cargadas y de corrientes neutras.	13
3.2.2. Física del sabor.	14
3.3. Cromodinámica cuántica.	16
4. Procesos físicos.	18
4.1. Proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	18
4.2. Proceso $b \rightarrow cl\nu$	20
4.2.1. Desintegración de mesones. Resultados experimentales y anomalías en física del sabor.	22
5. Conclusiones	24
Bibliografía	25
A. Desarrollos matemáticos correspondientes al Capítulo 2.	26
A.1. Interpretación de los vectores de polarización.	26
A.2. Cuantización del campo electromagnético libre.	26
A.3. Obtención del propagador del fotón.	28
A.4. Obtención de la ecuación de Dirac.	29
B. Desarrollos matemáticos correspondientes al Capítulo 3.	32
B.1. Obtención Lagrangiano de la interacción débil.	32

B.2. Obtención Lagrangiano de la QCD.	33
B.3. Transformación local del gluón.	35
C. Cálculos analíticos del Capítulo 4.	37
C.1. Cálculo de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$	37
C.2. Cálculo de la anchura a media altura del proceso $b \rightarrow c\bar{l}\nu$	40
D. Reglas de Feynman.	44
D.1. Reglas de Feynman para la QED.	44
D.2. Reglas de Feynman Interacción Electrodébil.	45
E. Valores numéricos usados en los cálculos.	47
E.1. Masas de las partículas.	47
E.2. Otras constantes.	47

Capítulo 1

Introducción.

El Modelo Estándar (SM - del inglés *"Standard Model"*) es una teoría cuántica de campos que consigue explicar, a través de una serie de simetrías, tres de las interacciones fundamentales de la naturaleza, la interacción fuerte, el electromagnetismo y la interacción débil, unificando estas dos últimas en una sola, la interacción electrodébil.

Este modelo ha sido confirmado experimentalmente con gran precisión en los experimentos de altas energías, siendo la última de sus evidencias el descubrimiento de la partícula de Higgs. Sin embargo, existen algunas medidas experimentales recientes que muestran desviaciones respecto a las predicciones del SM, como son los procesos que involucran el intercambio de sabor de los quarks c y b , $\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)} - l^- \bar{\nu}_l$ y $\bar{B}_c^- \rightarrow J/\psi l^- \bar{\nu}_l$, entre otros.

Nuestro objetivo en este trabajo es el estudio de dichos procesos, para los cuáles vamos a ver el desarrollo de la teoría del SM. En el Capítulo 2, veremos cómo se llega a la Electrodinámica Cuántica (QED - del inglés *"Quantum Electrodynamics"*) partiendo desde el electromagnetismo clásico, pasando por cuantizar el campo electromagnético libre y viendo el desarrollo de la ecuación de Dirac. Después, en el Capítulo 3 veremos el SM, comprobando primeramente cómo podemos encontrar la QED simplemente imponiendo invariancia *gauge*. A continuación nos detendremos en el estudio de la teoría electrodébil, acabando el capítulo con una breve introducción a la Cromodinámica Cuántica (QCD - del inglés *"Quantum Chromodynamics"*). En el Capítulo 4, emplearemos todo lo aprendido para estudiar un proceso regido por la QED, así como varios de los procesos de la teoría electrodébil en los que encontramos discrepancias con las predicciones del SM, lo que constituye el resultado principal de este Trabajo de Fin de Grado. Finalmente, en el Capítulo 5 se exponen las conclusiones obtenidas. Como material suplementario, en los Anexos A y B se detallan los desarrollos matemáticos necesarios para estudiar el electromagnetismo y el SM respectivamente, en el Anexo C se encuentran los cálculos analíticos empleados en los procesos físicos estudiados, en el Anexo D se resumen las reglas de Feynman que intervienen en los diagramas que hemos estudiado, y en el Anexo E incluimos los valores numéricos que introducimos en los programas para obtener nuestros resultados.

Capítulo 2

Interacción electromagnética.

En este capítulo presentamos la electrodinámica; la formulación dinámica del campo electromagnético, que incluye una de las interacciones fundamentales entre partículas; la interacción electromagnética. Partiremos del campo electromagnético libre, obtendremos las ecuaciones de Maxwell en forma covariante e introduciremos la invariancia *gauge*. A continuación discutiremos el proceso de cuantización, terminando con la introducción del Lagrangiano de la electrodinámica para fermiones y presentando la teoría de la QED.

2.1. Campo electromagnético clásico. Ecuaciones de Maxwell. Forma covariante. Invariancia gauge.

Para introducirnos al formalismo de la teoría covariante, que implica invariancia Lorentz de las ecuaciones, vamos a partir de las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético clásico, las cuales podemos agrupar en ecuaciones homogéneas y no homogéneas,

$$\vec{\nabla} \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}, \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \rho, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (2.2)$$

donde \vec{B} es el campo magnético, \vec{E} el campo eléctrico, c la velocidad de la luz, $\vec{\nabla}$ se define como $\vec{\nabla} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ y ρ es la densidad de carga eléctrica (fuente escalar del campo \vec{E}), mientras que \vec{j} es la densidad de corriente eléctrica (fuente vectorial del campo \vec{B}). En total, 8 ecuaciones que involucran las componentes del campo eléctrico y magnético. Podemos ahora introducir el campo escalar φ y el potencial vector \vec{A} ,

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.3)$$

Estas cantidades las podemos agrupar en un vector de cuatro componentes (cuadrivector) que denominaremos potencial, $A^\mu \equiv (\varphi, \vec{A})$. Sin embargo, no están determinadas de manera única. Si tomamos una función al menos dos veces derivable arbitraria, $f(\vec{x}, t)$, tenemos,

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{A} \rightarrow \vec{A}' = \vec{A} - \vec{\nabla} f, \quad (2.4)$$

o empleando la notación covariante,

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu f, \quad (2.5)$$

donde $\partial^\mu \equiv \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla} \right)$.

Estas transformaciones mantienen invariantes los campos \vec{B} y \vec{E} y se conocen como transformación de *gauge* de segunda especie. Las mismas corresponden con una transformación global que actúa sobre todos los puntos del espacio que estamos empleando, y que se puede ver que coincide con $U(1)$.

Así pues, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell en función de φ y \vec{A} . Las ecuaciones homogéneas (2.1) se cumplen directamente, mientras que las ecuaciones no homogéneas (2.2) pasan a reescribirse como,

$$\square \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \rho, \quad \square \vec{A} + \vec{\nabla} \left(\frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) = \frac{1}{c} \vec{j}, \quad (2.6)$$

donde $\square \equiv \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ es el operador de D'Alambert. Notar que estas ecuaciones no son invariantes Lorentz (debido al segundo término de éstas), por lo que introducir A^μ no nos ha llevado a una teoría covariante. Así pues, vamos a definir un nuevo tensor que nos permitirá escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante. Lo denominaremos Tensor de Campo Electromagnético y viene dado por,

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}, \quad (2.7)$$

donde $x^\mu = (ct, -\vec{x})$. Tomando unidades naturales, es decir $\hbar = c = 1$, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell homogéneas (2.1) como,

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0, \quad (2.8)$$

y las ecuaciones no homogéneas (2.2) como,

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = j^\mu, \quad (2.9)$$

donde $j^\mu \equiv (\rho, \vec{j})$ es el cuadrivector densidad de carga-corriente. Es inmediato ver que el tensor de campo electromagnético es invariante bajo las transformaciones *gauge* (2.5) ya que,

$$F'^{\mu\nu} = \partial^\mu A'^\nu - \partial^\nu A'^\mu = \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu \partial^\nu f - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu \partial^\mu f = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (2.10)$$

y por tanto las ecuaciones del campo electromagnético (EM) en forma covariante (2.8)-(2.9) son también invariantes bajo transformaciones *gauge*. De esta forma hemos conseguido escribir de manera covariante las ecuaciones de Maxwell.

Si quisiéramos utilizar una formulación Lagrangiana, partiríamos de la densidad Lagrangiana definida como,

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - j^\mu A_\mu, \quad (2.11)$$

donde el primer término describe la dinámica del campo electromagnético libre y el segundo corresponde con la corriente de interacción entre el campo A_μ y el operador de campo asociado

a las fuentes externas. A partir de esta densidad Lagrangiana, obtenemos las ecuaciones (2.9) utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Finalmente, necesitaríamos cuantizar la teoría del campo electromagnético. Antes de intentar cuantizar, vamos a estudiar los grados de libertad del sistema. Desde el principio, tenemos un total de 8 ecuaciones para 6 parámetros, las componentes de los campos \vec{E} y \vec{B} , de manera que nos quedan dos grados de libertad independientes. Esto implica que en el potencial A^μ , que pasaremos a denominar campo del fotón, tenemos 4 componentes de las cuales dos de ellas son independientes. Por otro lado, conocemos que el fotón tiene dos estados físicos distintos, sus dos estados de polarización. La discordancia entre el número de componentes del campo del fotón y el número de estados físicos se denomina *Invariancia gauge*, que viene dada por la simetría *gauge* de la teoría de Maxwell. Una forma de solucionarlo es imponer condiciones adicionales sobre el campo A_μ que restringen el número de sus componentes independientes. Llamaremos a este proceso fijar el *gauge*. Hay diferentes condiciones que podemos imponer, por ejemplo: *i*). $\partial_\mu A^\mu = 0$, denominado *gauge* de Lorenz y que asegura la invariancia Lorentz, *ii*). $\vec{\nabla} \vec{A} = 0$, denominado *gauge* de Coulomb, etc..

Como hemos mencionado antes, al escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, tenemos una interacción entre el campo del fotón y fuentes externas. Si estas fuentes son los electrones, necesitamos describir cómo se comportan éstos, así como cualquier otro fermión, tema del que nos ocupamos en la sección 2.3.

2.2. Cuantización del campo electromagnético libre.

Hasta ahora no hemos cuantizado ninguno de los campos, simplemente los hemos tratado de manera clásica hasta llegar a una expresión covariante de los mismos. Procedemos pues a cuantizar el campo electromagnético. Para ello, se puede ver que la densidad Lagrangiana definida en (2.11) no es adecuada para cuantizar de manera canónica, pues uno de los momentos canónicos es nulo y además, no existe el propagador asociado.

Para solucionar esto tenemos que tener en cuenta que hay una invariancia *gauge* de la que ya hemos hablado anteriormente. Vamos a tomar el *gauge* de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$) de manera que procederemos a fijar el *gauge*.

Primeramente, vamos a modificar la densidad Lagrangiana de Maxwell (2.11) introduciendo la definición del tensor electromagnético, obteniendo,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) + \frac{1}{2}(\partial_\mu A^\mu)^2 - j^\mu A_\mu. \quad (2.12)$$

Se puede ver que esta densidad soluciona el problema del momento canónico nulo, sin embargo, no hemos hecho ningún cambio que solucione la existencia del propagador. Para

ello vamos a añadir el término que nos va a permitir fijar el *gauge*. Este término es,

$$\mathcal{L}_{GF} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (2.13)$$

donde ξ es un parámetro que nos permitirá elegir el *gauge*. De esta forma, obtenemos,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left[(\partial_\mu A_\nu)(\partial^\mu A^\nu) - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) (\partial_\mu A^\mu)^2 \right] - j^\mu A_\mu. \quad (2.14)$$

Podemos recuperar las ecuaciones de Maxwell tomando las ecuaciones de Euler-Lagrange, pero incluyendo el parámetro ξ ,

$$\square A^\nu - \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) = j^\nu, \quad (2.15)$$

de manera que no hemos cambiado las ecuaciones, sino que hemos transformado A_μ , pero respetando el *gauge* de Lorenz. Notar que ahora los momentos canónicos no son nulos,

$$\Pi^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\mu)} = -\dot{A}^\mu + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) g^{\mu 0} (\partial_\nu A^\nu), \quad (2.16)$$

donde $g^{\mu 0}$ es la componente $\mu, 0$ de la métrica del espacio de Minkowski, $g^{\mu\nu}$. Sin embargo, no podemos realizar la cuantización canónica directamente. Si promovemos A^μ al carácter de operador, este tiene que cumplir la siguiente relación de commutación,

$$[\partial^\mu A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = i\partial^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \neq 0, \quad (2.17)$$

donde $\delta^3(\vec{x} - \vec{y})$ es la delta de Dirac en tres dimensiones centrada en \vec{y} . Sin embargo, al emplear el *gauge* de Lorenz, esta relación no puede imponerse, pues uno de los términos del conmutador es nulo.

Así, vamos a emplear otra manera para llegar a la cuantización del campo electromagnético. Comenzamos considerando que no hay fuentes externas, es decir, $j^\mu = 0$. Ahora, vamos a ver cómo es la solución de la ecuación realizando una expansión de A^μ como un conjunto completo de soluciones de la ecuación, es decir, vamos a estudiar el espacio de Fock asociado. Separamos A^μ en modos de frecuencia positiva y negativa, $A^\mu(\vec{x}) = A^{\mu+}(\vec{x}) + A^{\mu-}(\vec{x})$, donde

$$\begin{aligned} A^{\mu+}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sum_{r=0}^3 \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}, \\ A^{\mu-}(\vec{x}) &= \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sum_{r=0}^3 \epsilon_r^{*\mu}(\vec{k}) a_r^\dagger(\vec{k}) e^{ik_\mu x^\mu}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde ϵ_r^μ representa un conjunto de cuadrivectores linealmente independientes que definen la polarización para cada una de las componentes de \vec{k} (cuatro estados posibles para cada una); k_μ es el cuadrivector número de ondas, $\omega_k \equiv |\vec{k}|$ y $a_r(\vec{k})$ y $a_r^\dagger(\vec{k})$ son los operadores de aniquilación y creación de fotones asociados al espacio de Fock, respectivamente. Notar

que $\epsilon_r^\mu(\vec{k})$ ha de cumplir ciertas restricciones a la hora de transformarse pues tiene cuatro componentes, pero sólo existen dos estados físicos de polarización del fotón, por lo que cumplen las siguientes relaciones de ortogonalidad y completitud,

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r^\mu \epsilon_{s\mu}^* &= -\zeta_r \delta_{rs} \quad r, s = 0, 1, 2, 3 \\ \sum_{r=0}^3 \zeta_r \epsilon_r^\mu \epsilon_r^{*\nu} &= -g^{\mu\nu} \end{aligned} \right\} \text{con} \quad \begin{aligned} \zeta_0 &= -1 \\ \zeta_1 &= \zeta_2 = \zeta_3 = 1 \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde δ_{rs} es la delta de Kroenecker.

Ahora vamos a realizar una cuantización covariante. Para ello, vamos a imponer unas relaciones de commutación para A_μ y Π^ν ,

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.20)$$

$$[A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)] = [\Pi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = 0, \quad (2.21)$$

que en términos de los operadores creación y aniquilación serían,

$$[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (2.22)$$

$$[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = [a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = 0, \quad (2.23)$$

donde aparece un signo negativo en el commutador de a_0 con a_0^\dagger . Esto conlleva a la existencia de probabilidades negativas por lo que surge un problema. Éste se soluciona al relajar la condición del *gauge* de Lorenz empleando la solución de Gupta y Bleuler, por la que para conectar esta teoría cuántica con la teoría clásica del electromagnetismo basta con imponer que un estado $|\psi\rangle$ cumpla,

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\psi\rangle = 0. \quad (2.24)$$

Esta condición nos lleva a la eliminación de los estados de polarización escalar y longitudinal que son estados no físicos del sistema. Estos estados han sido definidos en el anexo A.1. De esta manera ya hemos obtenido la cuantización del campo.

Ahora podemos ver que el Hamiltoniano del sistema estaría dado por,

$$H = \int d^3\vec{k} \omega_k \left[\sum_{r=1}^3 a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) \right]. \quad (2.25)$$

Esta ecuación nos muestra que el valor esperado del Hamiltoniano depende únicamente de los estados de polarización transversal, es decir, los estados no físicos no son relevantes. Por tanto, no tenemos el problema de probabilidades negativas que hemos mencionado.

Así pues, podemos crear el espacio de Fock del fotón. Definimos un estado como la suma de los estados transversales y la combinación de los estados escalares y longitudinales,

$$|\psi\rangle = |\psi_T\rangle + |\psi_{SL}\rangle, \quad (2.26)$$

de manera que la parte transversa solo contiene fotones transversales. Sea $|0\rangle$ el estado de vacío,

$$|\psi_T\rangle \propto a_1^\dagger(\vec{k}_1) a_2^\dagger(\vec{k}_2) |0\rangle, \quad (2.27)$$

mientras que en la parte escalar y longitudinal tenemos,

$$|\psi_{SL}\rangle \propto \left(a_3^\dagger(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k}) \right) |0\rangle. \quad (2.28)$$

Podemos ver que dependiendo del valor de $|\psi_{SL}\rangle$ tenemos varios estados posibles que corresponden al mismo estado físico. De esta forma hemos creado una interpretación cuántica del campo electromagnético libre. Un desarrollo más completo de la cuantización del campo electromagnético se presenta en el anexo A.2.

2.2.1. Propagador del fotón.

Otra forma de ver la cuantización de la teoría es comprobar la existencia del propagador. Los cálculos detallados para obtener la expresión para el propagador del fotón ($D^{\mu\nu}(k^\sigma)$), así como la notación empleada, se presentan en el anexo A.3. Éste nos queda,

$$D^{\mu\nu}(k^\sigma) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(k^\sigma) \epsilon_r^\nu(k^\sigma) + \frac{(k^\mu - (k \cdot n)n^\mu)(k^\nu - (k \cdot n)n^\nu)}{(k \cdot n)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right], \quad (2.29)$$

donde podemos identificar distintas contribuciones. La primera de ellas contiene únicamente las polarizaciones transversales y la podemos entender como un intercambio de fotones reales. Los siguientes dos términos los podemos escribir como la suma de dos contribuciones,

$$D_C^{\mu\nu}(k^\sigma) = \frac{k^2}{k^2 + i\varepsilon} \frac{n^\mu n^\nu}{(k \cdot n)^2 - k^2}, \quad (2.30)$$

$$D_R^{\mu\nu}(k^\sigma) = \frac{k^\mu k^\nu - (k \cdot n)(n^\mu k^\nu + k^\mu n^\nu)}{(k^2 + i\varepsilon) [(k \cdot n)^2 - k^2]}. \quad (2.31)$$

Para darle significado físico, vamos a estudiar un proceso de dispersión que involucre el fotón como una partícula intermedia. El elemento de matriz de esta interacción lo podemos escribir en forma integral como,

$$\int d^4x^\rho \int d^4y^\sigma j_i^\mu(x^\rho) D_{\mu\nu}(x^\rho - y^\sigma) j_2^\nu(y^\sigma), \quad (2.32)$$

siendo j_1^μ y j_2^ν dos densidades de corriente que interactúan vía el campo del fotón. Tomando $\varepsilon \rightarrow 0$ podemos escribir $D_C^{\mu\nu}(k^\lambda)$ como,

$$D_C^{\mu\nu}(x^\alpha) = \frac{n^\mu n^\nu}{(2\pi)^4} \int \frac{d^3\vec{k} e^{i\vec{k}\vec{x}}}{|\vec{k}|^2} \int dk^0 e^{-ik^0 x^0} = \frac{n^\mu n^\nu}{4\pi |\vec{x}|} \delta(x^0). \quad (2.33)$$

Así pues, tenemos una contribución de la forma,

$$\int d^4x^\rho \int d^4y^\sigma \frac{j_1^0(x^\rho) j_2^0(y^\sigma)}{4\pi |\vec{x} - \vec{y}|} \delta(x^0 - y^0). \quad (2.34)$$

La expresión tiene una dependencia con $1/r$ en el denominador y con $\delta(x^0)$ que son características de un potencial de Coulomb instantáneo, pero en este caso es entre dos densidades de corriente.

Finalmente, vamos a ver la interpretación física de $D_R^{\mu\nu}(k^\lambda)$. Para empezar, (2.32) en el espacio de momentos pasa a ser,

$$D_R^{\mu\nu} = \int \frac{d^4 k^\alpha}{(2\pi)^4} j_1^\mu(-k^\alpha) D_{\mu\nu}(k^\alpha) j_2^\nu(k^\alpha). \quad (2.35)$$

Puesto que las corrientes son conservadas, en el espacio de momentos, los términos de la forma $k_\nu J^\nu$ se anulan, por tanto, como todos los términos de $D_R^{\mu\nu}$ multiplicados por las corrientes tienen esa forma, su contribución al elemento de matriz de interacción es nula. Por ende, el propagador del fotón nos describe únicamente el intercambio de fotones transversos y la interacción de Coulomb instantánea entre cargas. Las reglas de Feynman asociadas al fotón se pueden encontrar en el anexo D.1.

2.3. Campo de Dirac.

Para describir el comportamiento de fermiones libres vamos a introducir la ecuación de Dirac,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0, \quad (2.36)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac, m la masa de la partícula y ψ es el campo fermiónico. Tanto la definición de estas matrices, como el desarrollo para obtener la ecuación de Dirac se incluyen en el anexo A.4.

La densidad Lagrangiana asociada a la ecuación de Dirac viene dada por

$$\mathcal{L}_D = \psi^\dagger \gamma^0 (i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = \bar{\psi} (i\cancel{\partial} - m)\psi, \quad (2.37)$$

donde hemos introducido la notación $\cancel{\partial} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ y definimos $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$, con ψ^\dagger el adjunto del campo ψ . Si aplicamos las ecuaciones de Euler-Lagrange a esta densidad recuperaremos la ecuación (2.36).

Como queremos que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones de Lorentz vamos a ayudarnos de la representación quiral. El grupo de Lorentz ortocrono propio es isomorfo al grupo $SU(2) \otimes SU(2)$ ya que toda representación irreducible del grupo de Lorentz la podemos escribir como el producto de las representaciones espinoriales. Estas son dos componentes, los espinores de Weyl, ψ_L y ψ_R , que se tratan de los campos levógiro y dextrógiro. Podemos escribir un espinor de Dirac de cuatro componentes en la representación quiral como,

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

Similar a lo que hemos hecho en la sección anterior, podemos obtener las soluciones de la ecuación de Dirac como una descomposición de Fourier,

$$\psi(x) = \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\psi)^3 \sqrt{2E_p}} \left(u(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} + v(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} \right), \quad (2.39)$$

donde E_p es la energía correspondiente al momento \vec{p} , $u(\vec{p})$ y $v(\vec{p})$ son los espines de Dirac básicos y donde podemos definir dos componentes del campo ψ^+ y ψ^- que satisfacen las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \psi^+ &\simeq u(\vec{p}) e^{-i\vec{p}\vec{x}} \Rightarrow (\not{p} - m) u(\vec{p}) = 0, \\ \psi^- &\simeq v(\vec{p}) e^{i\vec{p}\vec{x}} \Rightarrow (\not{p} - m) v(\vec{p}) = 0, \end{aligned} \quad (2.40)$$

de manera que $u(\vec{p})$ representa soluciones con estados de energía positiva, es decir, partículas y $v(\vec{p})$ con estados de energía negativa, antipartículas.

Tras cuantizar el campo $\psi(x)$, podemos ver que $u^s(\vec{p})$ y $v^s(\vec{p})$ siguen las siguientes relaciones de completitud,

$$\sum_{S_i, S_j} u(p)^{S_i} \bar{u}^{S_j}(p) = p^\mu \gamma_\mu + m = \not{p} + m, \quad (2.41)$$

$$\sum_{S_i, S_j} v(p)^{S_i} \bar{v}^{S_j}(p) = p^\mu \gamma_\mu - m = \not{p} - m. \quad (2.42)$$

2.4. Electrodinámica Cuántica.

Una vez hemos visto cómo cuantizamos el campo electromagnético podemos escribir la densidad Lagrangiana de la QED. Añadiendo a la densidad del electromagnetismo (2.11) el término de Dirac para fermiones libres (2.37) e identificando $j^\mu \equiv e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ debido a ser el acople mínimo, obtenemos,

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.43)$$

El primer término es el Lagrangiano de Dirac (2.37), es decir, el correspondiente a los fermiones libres. El segundo corresponde al Lagrangiano de Maxwell, que describe los fotones libres. El último es el término de interacción,

$$\mathcal{L}_{int} = -e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (2.44)$$

Este término nos describe las interacciones entre los fotones (A_μ) y los fermiones (ψ). Siguiendo la estructura de este término vamos a poder estudiar las reglas de Feynman para la QED. Un resumen de las mismas se presenta en el anexo D.1.

Capítulo 3

Modelo Estándar.

En este capítulo vamos a presentar el SM, así como las distintas interacciones que éste engloba, concentrándonos en el estudio de la Física del Sabor.

El SM es una teoría *gauge* basada en el grupo de simetría $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ que describe las interacciones electromagnética y débil (unificadas en la teoría electrodébil), así como la interacción fuerte [1]. Estas interacciones se describen mediante el intercambio de campos *gauge* de espín 1. Estos bosones de *gauge* responsables o portadores de las interacciones son 8 gluones, los bosones W^\pm y Z y el fotón. Este modelo contiene en su estructura el contenido de materia del Universo, siendo además las partículas elementales de la materia los fermiones, agrupados en seis quarks y seis leptones, que están organizados en tres familias o generaciones que solamente se diferencian por su masa y sabor,

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

donde se tiene,

$$\begin{bmatrix} \nu_l & q_u \\ l^- & q_d \end{bmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \nu_l \\ l^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} q_u \\ q_d \end{pmatrix}_L, \quad l_R^-, \quad q_{uR}, \quad q_{dR}, \quad (3.2)$$

y donde además cada quark aparece en tres colores diferentes. Los subíndices L y R representan la componente levógiro y dextrógiro de los campos. Con esto podemos ver que los campos levógiros son dobletes bajo $SU(2)_L$ mientras que los campos dextrógiros son singletes. Además, el SM no contempla el caso de neutrinos dextrógiros.

Este modelo ha sido confirmado experimentalmente con gran precisión, y se han medido las masas de todas sus partículas constituyentes [2]. Sin embargo, para dotar de masa a los bosones *gauge* que la tengan así como a los fermiones se necesita la Ruptura Espontánea de la Simetría (SSB por sus siglas en inglés *Spontaneous Symmetry Breaking*) $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_{em}$. Esto se realiza mediante el mecanismo de Higgs, que introduce una partícula escalar al modelo, el llamado Bosón de Higgs.

3.1. QED en el SM.

En esta sección trataremos la QED en el contexto del SM. En la última sección del capítulo anterior presentamos el Lagrangiano de QED, uno de cuyos términos correspondía

con el Lagrangiano libre de Dirac que escribiremos como,

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x), \quad (3.3)$$

Este Lagrangiano es invariante bajo una transformación global $U(1)$,

$$\psi(x) \longrightarrow \psi'(x) \equiv e^{iQ\theta}\psi(x), \quad (3.4)$$

donde $Q\theta$ es una constante real, parámetro de la transformación. Sin embargo, bajo transformaciones locales, es decir, tomando $\theta = \theta(x)$, el Lagrangiano deja de ser invariante debido a que,

$$\partial_\mu\psi(x) \longrightarrow e^{iQ\theta}(\partial_\mu + iQ\partial_\mu\theta)\psi(x). \quad (3.5)$$

El principio de invariancia *gauge* nos indica que el requerimiento de que la invariancia $U(1)$ debería mantenerse localmente. Esto sólo es posible añadiendo términos nuevos al Lagrangiano para poder eliminar $\partial_\mu\theta$. Esto se arregla introduciendo un campo de espín 1, $A_\mu(x)$, que transforma según,

$$A_\mu(x) \longrightarrow A'_\mu(x) \equiv A_\mu(x) - \frac{1}{e}\partial_\mu\theta, \quad (3.6)$$

con e el módulo de la carga del electrón, y se define la derivada covariante como,

$$D_\mu\psi(x) \equiv [\partial_\mu + ieQA_\mu(x)]\psi(x), \quad (3.7)$$

de manera que realizando la transformación local,

$$D_\mu\psi(x) \longrightarrow (D_\mu\psi)'(x) = e^{iQ\theta(x)}D_\mu\psi(x). \quad (3.8)$$

De esta forma el Lagrangiano modificado queda,

$$\mathcal{L} \equiv i\bar{\psi}(x)\gamma^\mu D_\mu\psi(x) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) = \mathcal{L}_0 - eQ A_\mu(x)\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x), \quad (3.9)$$

que es invariante bajo transformaciones locales $U(1)$, que llamaremos $U(1)_{em}$.

Nótese que el principio de invariancia *gauge* ha generado una interacción entre el campo A_μ y los fermiones de Dirac $\psi(x)$, que es precisamente el vértice de interacción de QED que teníamos en (2.44). De esta forma, podemos identificar ese bosón A_μ con el fotón, tal y como hemos visto en el capítulo anterior.

Si queremos que A_μ sea un verdadero campo propagador de la interacción, tenemos que añadir un término cinético invariante *gauge*, de la forma,

$$\mathcal{L}_{kin} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (3.10)$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor electromagnético, definido en (2.7). Notar que un término de masa para el fotón está prohibido. Éste, que tendría la forma $\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu$, violaría el principio de invariancia local, por lo que el campo del fotón no tiene masa. Del Lagrangiano total, suma de (3.9) y (3.10), podemos obtener las ecuaciones de Maxwell (2.9), luego simplemente imponiendo la invariancia *gauge* $U(1)$ al Lagrangiano libre de Dirac hemos recuperado la QED. Las reglas de Feynman de QED se presentan en el anexo D.1.

3.2. Interacción electrodébil.

En el SM la interacción nuclear débil se logra unificar con la interacción electromagnética, en lo que se denomina teoría electrodébil. Ciertos experimentos de baja energía, así como de dispersión de neutrinos, demostraron que sólo los fermiones levógiros (y antifermiones dextrógiros) participan en las interacciones débiles. Los bosones W^\pm y Z fueron introducidos y predichos previos a su descubrimiento como las partículas encargadas de mediar la interacción.

Ahora vamos a construir una teoría cuántica de campos que describa la interacción electrodébil. Como vimos en la introducción a este capítulo, cada generación estaba formada por dos dobletes levógiros, el correspondiente a los leptones y el correspondiente a los quarks, y tres singletes dextrógiros. Esto es debido a que los bosones W^\pm se acoplan a estos dobletes fermiónicos. Es por esto que queremos una representación de dobletes, de manera que el grupo más simple es $SU(2)$. Como además, queremos añadir la interacción electromagnética, necesitamos del grupo $U(1)$. Por tanto vamos a considerar el grupo,

$$G = SU(2)_L \otimes U(1)_Y,$$

donde la L viene de Levógiro (o “left-handed” en inglés) y la Y está relacionada con la Hipercarga, ya que no podemos identificarlo directamente con el electromagnetismo. Este grupo lo denominaremos el grupo electrodébil.

Por simplicidad, vamos a trabajar con una única familia de quarks y vamos a introducir la notación

$$\psi_1(x) = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \psi_2(x) = u_R, \quad \psi_3(x) = d_R, \quad (3.11)$$

que será también válida para el sector fermiónico haciendo los cambios $u \rightarrow \nu$ y $d \rightarrow l^-$. Similar a la QED, vamos a introducir las derivadas covariantes,

$$\begin{aligned} D_\mu \psi_1(x) &\equiv \left[\partial_\mu + ig \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i(x) + ig' y_1 B_\mu(x) \right] \psi_1(x), \\ D_\mu \psi_2(x) &\equiv [\partial_\mu + ig' y_2 B_\mu(x)] \psi_2(x), \\ D_\mu \psi_3(x) &\equiv [\partial_\mu + ig' y_3 B_\mu(x)] \psi_3(x), \end{aligned} \quad (3.12)$$

donde σ_i son las matrices de Pauli y g , g' y y_i constantes. Además, hemos introducido 4 bosones *gauge* (B_μ y W_μ^i con $i=1,2,3$), uno por cada parámetro que aparece al realizar una transformación local del grupo electrodébil. De esta forma podemos llegar al Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^3 i \bar{\psi}_j(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_j(x). \quad (3.13)$$

Como hemos incluído nuevos campos vectoriales, tenemos que adicionar el término de propagación de los campos o término cinético, que debe ser invariante gauge. Para ello

definimos los tensores,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ \widetilde{W}_{\mu\nu} &\equiv -\frac{i}{g} \left[(\partial_\mu + ig\widetilde{W}_\mu), (\partial_\nu + ig\widetilde{W}_\nu) \right] = \partial_\mu \widetilde{W}_\nu - \partial_\nu \widetilde{W}_\mu + ig \left[\widetilde{W}_\mu, \widetilde{W}_\nu \right], \\ \widetilde{W}_{\mu\nu} &\equiv \frac{\sigma_i}{2} W_{\mu\nu}^i \text{ con } W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k. \end{aligned} \quad (3.14)$$

El Lagrangiano sería,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}. \quad (3.15)$$

El primer término es el Lagrangiano de Maxwell para el campo B_μ , mientras que el término libre de los campos no-Abelianos está dado por el Lagrangiano de Yang-Mills, que incluye el término cinético y las interacciones a 3 y 4 bosones. Notar que no tenemos términos de masa en el Lagrangiano ni de bosones ni de fermiones, pues la simetría *gauge* nos lo prohíbe. En el caso de los fermiones es debido a que para construir un término de masas necesitamos mezclar los campos levógiros y dextrógiros, que rompe la simetría debido a que tenemos una combinación de dobletes y singletes que no es invariante bajo $SU(2)_L$. De esta manera, todas las partículas que hemos descrito hasta ahora en nuestro modelo no tienen masa. Un desarrollo más extenso de la obtención de estos Lagrangianos se puede ver en el anexo B.1.

3.2.1. Interacciones de corrientes cargadas y de corrientes neutras.

Vamos ahora a ver los términos de interacción del Lagrangiano (3.13) entre bosones y campos fermiónicos,

$$\mathcal{L}_{int} = -g\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \widetilde{W}_\mu \psi_1 - g' B_\mu \sum_j y_j \bar{\psi}_j \gamma^\mu \psi_j, \quad (3.16)$$

donde aparece un término que contiene la matriz $SU(2)_L$, que podemos escribir como,

$$\widetilde{W}_\mu = \frac{\sigma_i}{2} W_\mu^i = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & -W_\mu^3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} W_\mu^3 & \sqrt{2}W_\mu^\dagger \\ \sqrt{2}W_\mu & -W_\mu^3 \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

donde hemos definido $W_\mu \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 + iW_\mu^2)$ y $W_\mu^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(W_\mu^1 - iW_\mu^2)$, que dan lugar a las corrientes cargadas. Para una familia de quarks y de leptones se tiene entonces,

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^\dagger [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d + \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l] + h.c. \right\}, \quad (3.18)$$

donde hemos introducido el proyector sobre los estados levógiros, $P_L = \frac{1-\gamma_5}{2}$, con $\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. A partir de este término, podemos ver la interacción entre corrientes cargadas, sin embargo, no se describe la dinámica de las mismas, pues tanto los bosones *gauge* como los fermiones no tienen masa. Para poder incluir esa masa, como ya se ha mencionado, necesitaremos del mecanismo de Higgs.

Ahora vamos a estudiar el resto de términos que aparecen en (3.16). Queremos identificar las interacciones que aparecen del W_μ^3 y del B_μ con el bosón Z y el fotón (A_μ). Sin embargo, el

bosón B_μ no puede identificarse directamente con A_μ , pues requeriría que $y_1 = y_2 = y_3$, ya que el fotón se acopla igual a campos levógiros y dextrógiros, y a la vez $g'y_j = eQ_j$, donde Q_j varía para cada j , por lo que no puede ocurrir. Así pues, vamos a suponer que el fotón y bosón Z son una combinación lineal de los bosones B_μ y W_μ^3 ,

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (3.19)$$

con θ_W el ángulo de Weinberg.

Notar que el bosón Z todavía no tiene masa, debido a la simetría *gauge*. Así, en términos de A_μ y Z_μ , el Lagrangiano de corrientes neutras es,

$$\mathcal{L}_{NC} = - \sum_j \bar{\psi}_j \left\{ A_\mu \left[g \frac{\sigma_3}{2} \sin \theta_W + g'y_j \cos \theta_W \right] + Z_\mu \left[g \frac{\sigma_3}{2} \cos \theta_W - g'y_j \sin \theta_W \right] \right\} \psi_j. \quad (3.20)$$

Para recuperar la QED debemos imponer,

$$g \sin \theta_W = g' \cos \theta_W, \quad Y = Q - T_3, \quad (3.21)$$

donde $T_3 = \sigma_3/2$ y Q denota el operador carga electromagnética,

$$Q_1 \equiv \begin{pmatrix} Q_{u/\nu} & 0 \\ 0 & Q_{d/l} \end{pmatrix}, \quad Q_2 \equiv Q_{u/\nu}, \quad Q_3 \equiv Q_{d/l}. \quad (3.22)$$

Esto fija los valores de las hipercargas (y_i) que han de tener tanto quarks como leptones, siendo estas, para los quarks, $y_1 = \frac{1}{6}$, $y_2 = \frac{2}{3}$ e $y_3 = -\frac{1}{3}$; y para los leptones, $y_1 = -\frac{1}{2}$, $y_2 = 0$ e $y_3 = -1$.

A partir de los términos de interacción tanto de corrientes cargadas como neutras podemos obtener las reglas de Feynman relacionadas con estos. Éstas se pueden encontrar en el anexo D.2.

3.2.2. Física del sabor.

Para dar masa a las partículas, gracias al teorema de Goldstone, introducimos un doblete de campos complejos escalares $\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^{(+)}(x) \\ \phi^{(0)}(x) \end{pmatrix} = e^{i \frac{\sigma_i}{2} \theta^i(x)} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix}$. Necesitamos de una ruptura espontánea de la simetría *gauge*, que se basa en seleccionar como estado fundamental el estado de vacío del doblete escalar, de manera que la simetría del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se rompe en $U(1)_{em}$. Esto se hace de manera que agregamos a nuestro modelo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ el Lagrangiano escalar,

$$\mathcal{L}_S = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - h(\phi^\dagger \phi)^2, \quad (3.23)$$

donde $h > 0$, $\mu^2 < 0$ y tomando $\theta^i = 0$, que se denomina el *gauge* unitario. Tenemos que,

$$(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu H \partial^\mu H + (v + H)^2 \left\{ \frac{g^2}{4} W_\mu^\dagger W_\mu + \frac{g^2}{8 \cos^2 \theta_W} Z_\mu Z^\mu \right\}. \quad (3.24)$$

Aquí hemos introducido el bosón de espín 0 $H(x)$, que denominamos bosón de Higgs y v representa el valor esperado del vacío $v = \sqrt{2} |\langle 0 | \phi^{(0)} | 0 \rangle|$.

De esta forma nos han aparecido términos cuadráticos en W^\pm y en Z , por lo que podemos identificar las masas de estos como $M_Z \cos \theta_W = M_W = \frac{1}{2} v g$.

Para darle masa a los fermiones vamos a añadir un término de acople entre los campos escalares y los fermiones. Para ello vamos a suponer un número N_G de generaciones de fermiones y denotaremos ν'_j, l'_j, u'_j y d'_j a los miembros de la familia j con $j = 1, \dots, N_G$. El Lagrangiano de Yukawa más general tiene la forma,

$$\mathcal{L}_Y = - \sum_{j,k} \left\{ (\bar{u}'_j, \bar{d}'_j)_L \left[c_{jk}^{(d)} \phi d'_{kR} + c_{jk}^{(u)} \phi^\dagger u'_{kR} \right] + (\bar{\nu}'_j, \bar{l}'_j)_L c_{jk}^{(l)} \phi l'_{kR} \right\} + h.c., \quad (3.25)$$

donde $c_{jk}^{(d)}$, $c_{jk}^{(u)}$ y $c_{jk}^{(l)}$ son constantes arbitrarias en principio y el segundo término el \mathcal{C} -conjugado del campo escalar $\phi^\dagger \equiv i\sigma_2 \phi^*$. Tomando el *gauge* unitario este Lagrangiano de tipo Yukawa nos queda,

$$\mathcal{L}_Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \left\{ \bar{\mathbf{d}}'_L M'_d \mathbf{d}'_R + \bar{\mathbf{u}}'_L M'_u \mathbf{u}'_R + \bar{\mathbf{l}}'_L M'_l \mathbf{l}'_R + h.c. \right\}, \quad (3.26)$$

donde \mathbf{d}' , \mathbf{u}' y \mathbf{l}' denotan vectores en el espacio de sabor de N_G componentes, las cuales son respectivamente d'_j, u'_j y l'_j . Por otro lado, M'_d, M'_u y M'_l son las matrices de masa y vienen dadas por,

$$(M'_d)_{ij} = c_{ij}^{(d)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (M'_u)_{ij} = c_{ij}^{(u)} \frac{v}{\sqrt{2}}, \quad (M'_l)_{ij} = c_{ij}^{(l)} \frac{v}{\sqrt{2}}. \quad (3.27)$$

La diagonalización de estas matrices nos dará como resultado los autoestados de masas d_j, u_j y l_j , que son combinaciones lineales de los autoestados débiles, d'_j, u'_j y l'_j .

Podemos descomponer la matriz $M'_d = H_d U_d$ donde H_d es una matriz hermítica definida positiva tal que, $H_d \equiv \sqrt{M'_d M'_d^\dagger}$; y U_d es una matriz unitaria. Esta descomposición es única, debido a que $\det(M'_d) \neq 0$. Ahora podemos diagonalizar la matriz hermítica gracias a una matriz unitaria S_d , de manera que $H_d = S_d^\dagger \mathcal{M}_d S_d U_d$, donde \mathcal{M}_d es una matriz diagonal, hermítica y definida positiva. Podemos realizar una descomposición similar en las otras dos matrices, obteniendo $M'_u = S_u^\dagger \mathcal{M}_u S_u U_u$ y $M'_l = S_l^\dagger \mathcal{M}_l S_l U_l$.

Las diagonales de las matrices contienen los valores de las masas del correspondiente fermión de cada generación. Así pues, tomando $N_G = 3$ se tiene $\mathcal{M}_d = \text{diag}(m_d, m_s, m_b)$, $\mathcal{M}_u = \text{diag}(m_u, m_c, m_t)$ y $\mathcal{M}_l = \text{diag}(m_e, m_\mu, m_\tau)$.

Ahora, podemos simplificar el Lagrangiano (3.26), obteniendo,

$$\mathcal{L}_Y = - \left(1 + \frac{H}{v} \right) \{ \bar{\mathbf{d}}_L \mathcal{M}_d \mathbf{d}_R + \bar{\mathbf{u}}_L \mathcal{M}_u \mathbf{u}_R + \bar{\mathbf{l}}_L \mathcal{M}_l \mathbf{l}_R \}, \quad (3.28)$$

donde los autoestados de masa vienen definidos por,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_L &\equiv S_d \mathbf{d}'_L, & \mathbf{u}_L &\equiv S_u \mathbf{u}'_L, & \mathbf{l}_L &\equiv S_l \mathbf{l}'_L, \\ \mathbf{d}_R &\equiv S_d U_d \mathbf{d}'_R, & \mathbf{u}_R &\equiv S_u U_u \mathbf{u}'_R, & \mathbf{l}_R &\equiv S_l U_l \mathbf{l}'_R. \end{aligned}$$

Podemos ver directamente que $\bar{\mathbf{f}}_L \mathbf{f}'_L = \bar{\mathbf{f}}_L \mathbf{f}_L$ y también, $\bar{\mathbf{f}}_R \mathbf{f}'_R = \bar{\mathbf{f}}_R \mathbf{f}_R$, por lo que el Lagrangiano de la interacción de corriente neutras (3.20) no cambia y por tanto no hay intercambio de sabor en este tipo de interacción.

Si suponemos que los neutrinos tienen masa nula, podemos redefinir el sabor del neutrino de manera que eliminamos la mezcla de sabor en el sector leptónico, $\bar{\nu}'_L \mathbf{l}'_L = \bar{\nu}'_L S_l^\dagger \mathbf{l}_L \equiv \bar{\nu}_L \mathbf{l}_L$, de manera que tenemos conservación del sabor leptónico. Cabe destacar que ha habido observaciones experimentales de oscilaciones de neutrinos y conocemos que las masas de los neutrinos son pequeñas pero no nulas.

Finalmente, podemos ver qué ocurre en interacciones con dos quarks de distintos sabores, donde, $\bar{\mathbf{u}}'_L \mathbf{d}'_L = \bar{\mathbf{u}}_L S_u S_d^\dagger \mathbf{d}_L \equiv \bar{\mathbf{u}}_L V \mathbf{d}_L$. Como en general $S_u \neq S_d$, tenemos que si escribimos los autoestados débiles en función de los de masa, aparece una matriz $N_G \times N_G$ que mezcla dichos estados en la interacción de corrientes cargadas, V . Si escribimos (3.18) de forma general para las tres generaciones conocidas, tenemos,

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{2\sqrt{2}} \left\{ W_\mu^\dagger \left[\sum_{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{ij} d_j + \sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l \right] + h.c. \right\}. \quad (3.29)$$

Una matriz $N_G \times N_G$ unitaria tiene N_G^2 parámetros reales, $N_G(N_G - 1)/2$ módulos y $N_G(N_G + 1)/2$ fases. En el caso de V , podemos tomar $u_i \rightarrow e^{i\phi_i} u_i$ y $d_j \rightarrow e^{i\theta_j} d_j$ de manera que $V_{ij} \rightarrow V_{ij} e^{i(\theta_j - \phi_i)}$, dejando $2N_G - 1$ fases no observables, por lo que nos quedan $(N_G - 1)(N_G - 2)/2$ fases.

Para el caso que nos ocupa, $N_G = 3$, esta matriz V se denomina Matriz CKM (por Cabibbo-Kobayashi-Maskawa) y viene dada por tres ángulos y una fase. En el *Particle Data Group* [2] se emplea la siguiente representación,

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{13}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{13}} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

donde $c_{ij} \equiv \cos \theta_{ij}$ y $s_{ij} \equiv \sin \theta_{ij}$ con i y j referentes a las generaciones ($i, j = 1, 2, 3$), y δ_{13} , la fase. Los ángulos θ_{ij} se pueden tomar todos en el primer cuadrante. Los valores de estos ángulos han sido determinados de manera experimental, de manera que conocemos el módulo de las distintas componentes de la matriz CKM.

3.3. Cromodinámica cuántica.

El SM incluye una serie de partículas y sus correspondientes antipartículas que asumimos que forman los mesones y los bariones, los quarks. También vimos que se tratan de partículas de espín 1/2 que tienen carga eléctrica fraccionaria y que pueden interactuar con los bosones responsables de la interacción débil cambiando su sabor. A parte de estas características, para que se cumpla la estadística de Fermi-Dirac, hemos de introducir un nuevo número cuántico,

el color. A cada quark le asignamos uno de los tres posibles colores, rojo, verde y azul. Los bariones son estados ligados de quarks con distintos colores, mientras que los mesones se tratan de estados con un quark y un anti-quark del mismo color.

Vamos a identificar el color como la carga asociada a la interacción fuerte y procedemos a construir una teoría cuántica de campos entorno a ello. Imponemos dos propiedades. La primera de ellas, se trata de la libertad asintótica, por la cual la interacción fuerte se debilita en los estados cuyas distancias tienden a cero. La segunda se trata de la Hipótesis de Confinamiento. Esta propiedad indica que para evitar la existencia de estados con color no nulo, necesitamos que todos los estados asintóticos no tengan color, es decir, sean singletes bajo rotaciones en el espacio de color. Esta hipótesis implica la no existencia de quarks libres.

De manera equivalente a la QED y a la interacción electrodébil, podemos obtener el Lagrangiano correspondiente a la QCD, teniendo en cuenta que estamos trabajando con transformaciones de un grupo no-Abeliano, $SU(3)_C$. El desarrollo correspondiente a la obtención del mismo así como la notación empleada se encuentra en los anexos B.2-B.3, obteniendo el siguiente Lagrangiano,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f(i\gamma^\mu D_\mu - m_f)q_f, \quad (3.31)$$

que es invariante bajo transformaciones $SU(3)_C$ locales. Similar a la QED, no podemos incluir un término de masa para los gluones ($\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}m^2G_a^\mu G_\mu^a$) debido a que éste no es invariante gauge $SU(3)_C$ local.

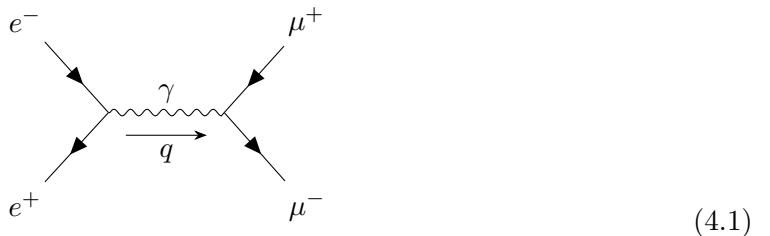
Capítulo 4

Procesos físicos.

Tras haber visto todo el formalismo, en este capítulo vamos a estudiar dos procesos de interacción físicos. En el primero de ellos, vamos a estudiar un proceso en el que sólo actúan los mecanismos de la QED, mientras que en el segundo proceso veremos cómo lo hacen aquellos de la interacción electrodébil.

4.1. Proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

Queremos estudiar la sección eficaz del proceso de interacción entre dos electrones, $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$, que representamos en la figura siguiente:



Para ello, vamos a designar p_{e1} al momento del electrón entrante, p_{e2} al del positrón entrante, $p_{\mu 1}$ al momento del muón saliente y $p_{\mu 2}$ al del antimuón saliente.

Así pues, la sección eficaz viene dada para procesos donde las partículas iniciales tienen la misma masa, por unidad de ángulo sólido, como,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}|^2, \quad (4.2)$$

donde E_{cm} es la energía del centro de masas, $|\vec{k}|$ es el módulo de las componentes espaciales del momento del muón y \mathcal{M} se trata del elemento matriz correspondiente al proceso, que viene dado por,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_{e2} \cdot p_{\mu 1})(p_{e1} \cdot p_{\mu 2}) + (p_{e2} \cdot p_{\mu 2})(p_{e1} \cdot p_{\mu 1}) + m_\mu^2(p_{e2} \cdot p_{e1}) + m_e^2(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) + 2m_e^2m_\mu^2]. \quad (4.3)$$

Colocándonos en el centro de masas (CDM) podemos calcular los distintos productos escalares, obteniendo finalmente que la sección eficaz por unidad de ángulo sólido viene dada

por,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}} \left[(1 + \cos^2 \theta) + \frac{16m_\mu^2 m_e^2}{E_{cm}^4} \cos^2 \theta + \frac{4(m_\mu^2 + m_e^2)}{E_{cm}^2} (1 - \cos^2 \theta) \right]. \quad (4.4)$$

Integrando en el diferencial de ángulo sólido e introduciendo la constante de estructura fina α , la sección eficaz en función de los valores de la energía del centro de masas vienen dados por,

$$\sigma = \frac{\pi\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}} \left[\frac{8}{3} + \frac{32m_\mu^2 m_e^2}{3E_{cm}^4} + \frac{16(m_\mu^2 + m_e^2)}{3E_{cm}^2} \right]. \quad (4.5)$$

Para que el proceso exista, el término de dentro de la raíz ha de ser positivo, por lo que se ha de cumplir que $E_{cm} > 2m_\mu$. El cálculo completo de la sección eficaz se encuentra en el anexo C.1.

Para hacernos una mejor idea del comportamiento de la sección eficaz en función de la energía del centro de masas la representamos gráficamente en la figura 4.1. Esta figura ha sido obtenida mediante un programa en `python`, haciendo uso del paquete `Matplotlib` [3]. En ella podemos observar que la función es no nula para valores superiores a $2m_\mu \approx 210$ MeV. A partir de ahí, la función comienza a crecer hasta llegar a un máximo en torno a 250 MeV. A partir de este punto comienza a decrecer, tendiendo a 0 cuando la energía del centro de masas tiende a infinito.

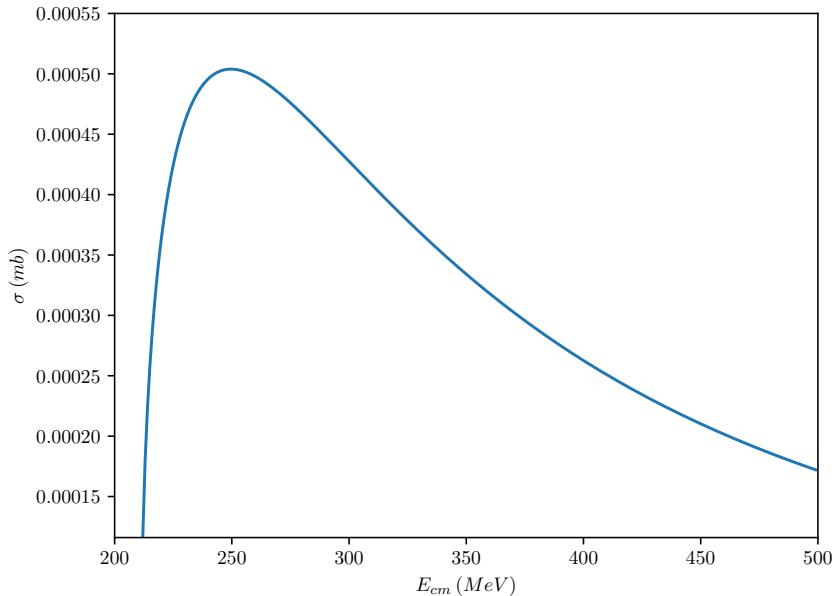
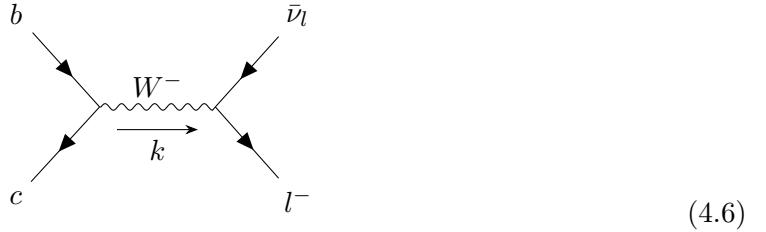


Figura 4.1: Representación de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ en función de la energía del centro de masas.

4.2. Proceso $b \rightarrow cl\nu$.

Visto ya un proceso de la QED vamos a pasar a estudiar un proceso mediado por la interacción electrodébil. Queremos estudiar el proceso por el cual un quark b se desintegra en un quark c . Para ello vamos a tomar la desintegración del mesón $\bar{B}^0(\equiv b\bar{d})$ en los mesones D^+ o $D^{*+}(\equiv c\bar{d})$ o del mesón $B_c^-(\equiv b\bar{c})$ en $J/\psi(\equiv c\bar{c})$, además de un leptón y el correspondiente antineutrino, ya que en la naturaleza no podemos encontrar los quarks aislados. Sin embargo, para realizar un estudio de manera teórica tomaremos el proceso de desintegración con los quarks, como se muestra en la siguiente figura:



donde definimos k como el momento del bosón W^- , p_b al del quark b , p_c al del quark c , p_l al del lepton saliente y p_ν al momento del neutrino.

En este caso, como se trata de un proceso de desintegración, tenemos que la anchura a media altura (FWHM) de la desintegración viene dada, de manera diferencial por,

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_\nu) \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3 2E_l} \frac{d^3 \vec{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu}, \quad (4.7)$$

con E_i la energía de la partícula correspondiente. El elemento matriz que obtenemos es,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{(k^2 - m_W^2)} (p_c \cdot p_l) (p_b \cdot p_\nu). \quad (4.8)$$

con V_{cb} el elemento de la matriz CKM que relaciona el quark c con el b .

De nuevo, colocándonos en el sistema CDM, podemos calcular los productos escalares hasta reducir la expresión obteniendo,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2m_W^2} (m_b E_\nu) (m_b^2 - 2m_b E_\nu - m_c^2 - m_l^2). \quad (4.9)$$

De esta forma, reduciendo el diferencial de la anchura de la desintegración todo lo posible e integrando obtenemos,

$$\frac{d\Gamma}{dE_l} = \frac{32G_F^2 |V_{cb}|^2}{2(4\pi)^3} \left[(m_b^2 - m_c^2 - m_l^2) \frac{1}{2} (E_\nu^{+2} - E_\nu^{-2}) - \frac{2}{3} m_b (E_\nu^{+3} - E_\nu^{-3}) \right], \quad (4.10)$$

donde,

$$E_\nu^\pm = \frac{\frac{1}{2}(m_b^2 - m_c^2 + m_l^2) - m_b E_l}{m_b - E_l \mp \sqrt{E_l^2 - m_l^2}}. \quad (4.11)$$

El cálculo exhaustivo para llegar a esta expresión se puede ver en el anexo C.2. Ahora la integral en E_l la vamos a realizar de manera numérica empleando el paquete SciPy [4]. Para

ello primero vamos a estudiar la función que queremos integrar. De manera directa, podemos ver que la integral se anulará cuando $E_\nu^+ = E_\nu^-$ o cuando $E_\nu^+ = E_\nu^- = 0$. Podemos ver que la primera condición se cumple cuando $E_l = m_l$. La segunda se da si $E_l = \frac{m_b^2 - m_c^2 + m_l^2}{2m_b}$, lo cual corresponde a la emisión de un quark c en reposo.

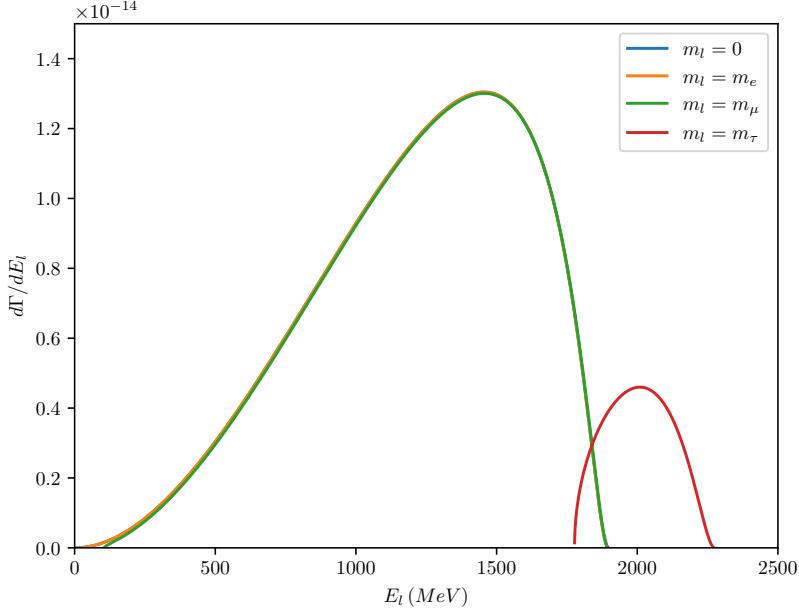


Figura 4.2: Representación de la anchura a media altura por diferencial de la energía del lepton (4.10) para las distintas masas de los leptones, así como masa nula.

Ahora, en la figura (4.2), podemos observar el comportamiento para las distintas masas leptónicas. Se observa que para las masas del electrón y del muón, así como para masa nula, el comportamiento de la función es el mismo. Sin embargo, éste varía en gran medida para el tauón, puesto que la masa de éste no es despreciable con respecto a las masas del resto de partículas que intervienen en el proceso.

Una vez estudiada la forma de la función, procedemos a integrarla, tal y como dijimos anteriormente. Los valores de las masas y otras constantes proporcionadas al programa se pueden encontrar en el anexo E. Además, necesitamos conocer los valores de dichas anchuras obtenidos para el SM, así como experimentalmente. En el Particle Data Group [2], se nos proporciona el tiempo de vida de los mesones \bar{B}^0 y B_c^- , así como los “*Branching-Ratios*” (BR) de cada uno de sus canales de desintegración. Podemos obtener la anchura de la desintegración según,

$$\Gamma_i = \frac{\hbar}{\tau} \text{BR}_i, \quad (4.12)$$

donde i representa el canal de desintegración que estemos estudiando, τ el tiempo de vida de la partícula y \hbar la constante de Plank.

En la tabla (4.1) tenemos los valores que hemos obtenido para las anchuras de

desintegración para las diferentes masas de los leptones (ignorando el caso $m_l = 0$), así como los correspondientes valores de las medidas experimentales.

Leptón	Γ_l calculado ($\times 10^{-12}$ MeV)	BR experimental	Γ_l experimental ($\times 10^{-12}$ MeV)
e^-	$12,41 \pm 0,04$	$2,24 \pm 0,09 \%$	$9,7 \pm 0,4$
μ^-	$12,320 \pm 0,025$	$2,24 \pm 0,09 \%$	$9,7 \pm 0,4$
τ^-	$1,590 \pm 0,026$	$1,05 \pm 0,23 \%$	$4,5 \pm 1,0$

Tabla 4.1: Anchuras de desintegración calculadas de manera numérica, utilizando las cinemática de los quarks, junto con las anchuras obtenidas de manera experimental para los distintos canales $\bar{B}^0 \rightarrow D^- l^- \bar{\nu}$

A simple vista podemos ver que los valores no coinciden, como cabría esperar pues el proceso experimental no involucra únicamente a los quarks, pero podemos ver ciertas tendencias.

Por un lado en el caso de los electrones y muones es esperado que ambos se comporten de forma similar y por ende obtenemos anchuras de desintegración similares. Las anchuras calculadas son mayores que las experimentales, en concreto se separan $\sim 6\sigma$.

Por otro lado, tenemos el caso del tauón, en el que cómo cabría esperar obtenemos anchuras menores que las correspondientes a los procesos anteriores, debido al menor espacio de fases disponible. En este caso, el valor teórico obtenido se acerca más al experimental, alejándose tan sólo $\sim 3\sigma$.

4.2.1. Desintegración de mesones. Resultados experimentales y anomalías en física del sabor.

Como ya hemos hablado anteriormente, el proceso real no ocurre con quarks aislados, pues debido a la Hipótesis de Confinamiento no podemos tener dichos estados. Sin embargo, los datos experimentales que hemos tomado se trataban de los procesos reales que ocurren en la naturaleza. Estos procesos han sido estudiados en diversos experimentos: BaBar (USA), Belle (Japón) y en el detector LHCb situado en LHC (CERN, Suiza). El análisis estadístico conjunto de estos resultados se encuentra en [5].

Vamos a estudiar tres procesos mesónicos: $\bar{B}^0 \rightarrow D^+ l^- \bar{\nu}_l$, $\bar{B}^0 \rightarrow D^{*+} l^- \bar{\nu}_l$, y $B_c^- \rightarrow J/\psi l^- \bar{\nu}_l$. Si quisiéramos realizar un cálculo teórico buscando una predicción más exacta, necesitaríamos de mecanismos relacionados con QCD. En su lugar, vamos a realizar una aproximación, que si bien no es correcta, nos debería acercar más al resultado experimental. Esta aproximación se basa en sustituir las masas de los quarks por las de sus correspondientes mesones, de manera que estamos un paso más cerca de describir los procesos reales, estudiando la cinemática de los mesones. En nuestro cálculo numérico obtenemos las anchuras de desintegración, sin embargo, para minimizar las incertidumbres teóricas, las magnitudes que

se reportan experimentalmente son cocientes de razones de desintegración,

$$R_{D^{(*)}} = \frac{\text{BR}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{[\text{BR}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} \mu^- \bar{\nu}_\mu) + \text{BR}(\bar{B}^0 \rightarrow D^{(*)+} e^- \bar{\nu}_e)]/2}, \quad (4.13)$$

$$R_{J/\psi} = \frac{\text{BR}(B_c^- \rightarrow J/\psi \tau^- \bar{\nu}_\tau)}{\text{BR}(B_c^- \rightarrow J/\psi \mu^- \bar{\nu}_\mu)}. \quad (4.14)$$

Por tanto, vamos a estudiar directamente estas magnitudes. En la tabla (4.2) podemos encontrar tanto nuestros valores aproximados, calculados numéricamente, como los valores que predice el SM y los datos obtenidos experimentalmente.

Cociente	Resultado	Predicción SM	Experimental
R_D	$0,237 \pm 0,003$	$0,298 \pm 0,004$ [5]	$0,356 \pm 0,029$ [5]
R_{D^*}	$0,209 \pm 0,003$	$0,254 \pm 0,005$ [5]	$0,284 \pm 0,013$ [5]
$R_{J/\psi}$	$0,198 \pm 0,004$	$0,2582 \pm 0,0038$ [6]	$0,71 \pm 0,17 \pm 0,18$ [7]

Tabla 4.2: Comparación en las distintas razones leptónicas para procesos $b \rightarrow cl\nu$ de los valores calculados con las predicciones del SM y las mediciones experimentales.

En todos los procesos analizados vemos que nuestros resultados siguen la misma tendencia que los que se tienen en el SM, es decir, R_D es mayor que R_{D^*} y este último es similar a $R_{J/\psi}$. Aunque los valores numéricos difieran ligeramente, esto nos demuestra que hemos considerado una buena aproximación.

Por otra parte, las medidas experimentales muestran una clara desviación con respecto a los valores teóricos. La discrepancia de nuestros resultados para el cociente de las razones de desintegración es $R_D \sim 4,1\sigma$, $R_{D^*} \sim 5,8\sigma$, y $R_{J/\psi} \sim 2\sigma$. Este último resultado se debe a la gran incertidumbre en la medida experimental, tanto sistemática como estadística.

Estas desviaciones de nuestros cálculos con respecto a las medidas experimentales van en la misma dirección de la comparativa de dichas medidas con la predicción del SM. Para $R_{J/\psi}$, podemos ver en [7], que la medida experimental discrepa $1,8\sigma$, mientras que en [5] vemos que los cocientes de desintegración R_D y R_{D^*} se desvían de la predicción $1,98\sigma$ y $2,15\sigma$ respectivamente. Podemos obtener un valor conjunto de estas dos últimas, teniendo en cuenta las correlaciones entre ambos cocientes, de en torno a $3,2\sigma$.

El hecho de que tenemos una desviación respecto a las predicciones del SM es un resultado de gran relevancia fenomenológica. Cabe destacar que las diferencias entre el numerador y el denominador de los cocientes, desde un punto de vista teórico, son únicamente el cambio de la masa del leptón, pues el bosón mediador de la interacción, W^- , se acopla igual a todos los leptones como vemos en la ecuación (3.29). De ser confirmada dicha discrepancia, se abriría el camino a Nueva Física, ya que sería indicativo de la existencia de una partícula o interacción que se acoplaría de manera diferente con los leptones pesados.

Capítulo 5

Conclusiones

Como hemos visto, el Modelo Estándar de la física de partículas elementales es una teoría cuántica de campos que describe las interacciones electromagnética, débil y fuerte, así como el contenido de materia del universo. Esta teoría está experimentalmente confirmada con gran precisión en los experimentos de física de altas energías. Sin embargo, existen procesos en los que se han encontrado ciertas discrepancias con respecto a las predicciones de este modelo, como por ejemplo en procesos relacionados con la física de sabor, que han marcado el interés central este trabajo.

En primer lugar, nos hemos centrado en el estudio de la Electrodinámica Cuántica dentro del marco del Modelo Estándar, así como de la interacción débil, las cuales hemos visto que se unifican en la teoría electrodébil. Para ello se han adquirido los conocimientos necesarios para poder estudiar una teoría cuántica de campos partiendo de las bases del electromagnetismo y conceptos básicos de teoría de grupos. Vimos también de la necesidad del mecanismo de Higgs para dar masa a las partículas y cómo debido a ello, en las interacciones de corrientes cargadas aparece una constante, la matriz CKM, que nos da las diferentes intensidades de acople entre los diferentes quarks.

Todo esto lo hemos hecho como preparación para conseguir el objetivo fundamental de este trabajo, estudiar el proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ y el proceso por el cual un quark b se desintegra en un quark c ; $b \rightarrow c l \nu$. Para éste último, primero partimos del estudio de la cinemática de quarks, para acabar estudiando, dentro de una cierta aproximación, algunos de los procesos en los que la medida experimental actual tiene una mayor desviación con respecto a las predicciones del Modelo Estándar; en concreto los cocientes de razones de desintegración R_D , R_{D^*} y $R_{J/\psi}$. Para ello hemos empleado programas que nos han ayudado a realizar los cálculos numéricos necesarios, **Scipy** [4] y **Matplotlib** [3].

Finalmente, hemos comparado las predicciones obtenidas para estos observables con nuestros cálculos con las que nos proporciona el Modelo Estándar, así como sus desviaciones con respecto a las medidas experimentales y posibles consecuencias. De confirmarse estas desviaciones estaríamos hablando de la posibilidad de encontrar Nueva Física más allá del Modelo Estándar.

Bibliografía

- [1] A. Pich. The Standard model of electroweak interactions. In *2006 European School of High-Energy Physics*, pages 1–49, 2007.
- [2] R. L. et al. Workman. Review of Particle Physics. *PTEP*, 2022:083C01, 2022.
- [3] J. D. Hunter. Matplotlib: A 2d graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3):90–95, 2007.
- [4] P. Virtanen, R. Gommers, T. E. Oliphant, et al. SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. *Nature Methods*, 17:261–272, 2020.
- [5] Y. S. Amhis et al. Averages of b-hadron, c-hadron, and τ -lepton properties as of 2021. *Phys. Rev. D*, 107(5):052008, 2023. Resultados actualizados en https://hflav-eos.web.cern.ch/hflav-eos/semi/winter23_prel/html/RDsDsstar/RDRDs.html.
- [6] J. Harrison, C. T. H. Davies, and A. Lytle. $R(J/\psi)$ and $B_c^- \rightarrow J/\psi \ell^- \bar{\nu}_\ell$ Lepton Flavor Universality Violating Observables from Lattice QCD. *Phys. Rev. Lett.*, 125(22):222003, 2020.
- [7] R. Aaij et al. Measurement of the ratio of branching fractions $\mathcal{B}(B_c^+ \rightarrow J/\psi \tau^+ \nu_\tau) / \mathcal{B}(B_c^+ \rightarrow J/\psi \mu^+ \nu_\mu)$. *Phys. Rev. Lett.*, 120(12):121801, 2018.

Anexos A

Desarrollos matemáticos correspondientes al Capítulo 2.

A.1. Interpretación de los vectores de polarización.

Vamos a ver ahora una interpretación de dichos vectores. Vamos a escoger una forma específica de éstos. En un sistema de referencia dado,

$$\epsilon_0^\mu(\vec{k}) = n^\mu \equiv (1, 0, 0, 0) \equiv \text{polarización escalar}, \quad (\text{A.1})$$

$$\epsilon_r^\mu(\vec{k}) \equiv (0, \epsilon_r(\vec{k})), \quad r = 1, 2, 3 \quad (\text{A.2})$$

donde escogemos que $\epsilon_1(\vec{k})$ y $\epsilon_2(\vec{k})$, que llamaremos vectores de polarización transversal, mutuamente ortogonales y, a su vez, ortogonales a \vec{k} , es decir,

$$\vec{k} \cdot \epsilon_r(\vec{k}) = 0, \quad r = 1, 2 \quad (\text{A.3})$$

$$\epsilon_r(\vec{k}) \cdot \epsilon_s(\vec{k}) = \delta_{rs}, \quad r, s = 1, 2 \quad (\text{A.4})$$

de manera que $\epsilon_3(\vec{k})$, que llamaremos vector de polarización longitudinal, viene dado por,

$$\epsilon_3^\mu(\vec{k}) = \frac{k^\nu - (k \cdot n)n^\mu}{\sqrt{(k \cdot n)^2 - k^2}}. \quad (\text{A.5})$$

Así, se cumple que $\epsilon_{3\mu}n^\mu = 0$. Esta elección de los vectores corresponde con la polarización lineal, pues para la polarización circular se necesitan de vectores de polarización complejos. Notar que los dos estados de polarización físicos son los transversales, pues son los estados que puede experimentar un fotón, mientras que los estados longitudinal y escalar no tienen significado físico.

A.2. Cuantización del campo electromagnético libre.

Vamos a partir de la imposición de unas relaciones de commutación para A_μ y Π^ν ,

$$[A_\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = i\delta_\mu^\nu \delta^3(\vec{x} - \vec{y}), \quad (\text{A.6})$$

$$[A_\mu(\vec{x}, t), A_\nu(\vec{y}, t)] = [\Pi^\mu(\vec{x}, t), \Pi^\nu(\vec{y}, t)] = 0, \quad (\text{A.7})$$

que en términos de los operadores creación y aniquilación serían,

$$[a_r(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = \zeta_r \delta_{rs} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \quad (\text{A.8})$$

$$[a_r(\vec{k}), a_s(\vec{k}')] = [a_r^\dagger(\vec{k}), a_s^\dagger(\vec{k}')] = 0, \quad (\text{A.9})$$

donde el conmutador de a_0 con a_0^\dagger tendría un signo negativo que no debería aparecer. Este signo está ligado a la normalización escogida para los vectores de polarización en (2.19). Estudiamos en lo siguiente sus implicaciones.

Vamos a construir el álgebra de Fock asociada. Para ello, sobre el vacío $|0\rangle$, que asumiremos normalizado, esto es $\langle 0|0\rangle = 1$, el operador aniquilación actúa como,

$$a_r(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \forall r, \vec{k}. \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado, el operador creación actúa sobre el vacío creando un fotón de momento \vec{k} y polarización ϵ_r que representaremos como $|1_{\vec{k},r}\rangle$,

$$|1_{\vec{k},r}\rangle \equiv \sqrt{2\omega_k}a_r^\dagger(\vec{k})|0\rangle. \quad (\text{A.11})$$

Ahora, si consideramos el estado con vector de polarización ϵ_0 y buscamos la normalización del estado encontramos,

$$\begin{aligned} \langle 1_{\vec{k},0} | 1_{\vec{k}',0} \rangle &\propto \langle 0 | a_0(\vec{k})a_0^\dagger(\vec{k}') | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [a_0(\vec{k}), a_0^\dagger(\vec{k}')] + a_0^\dagger(\vec{k}')a_0(\vec{k}) | 0 \rangle \\ &= \langle 0 | [a_0(\vec{k}), a_0^\dagger(\vec{k}')] | 0 \rangle = -\delta^3(\vec{k} - \vec{k}'), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

donde hemos utilizado la relación de conmutación (2.22) y la actuación del operador aniquilación sobre el espacio de vacío (A.10). De esta forma llegamos a que el estado tiene una norma negativa, que en términos de la mecánica cuántica está relacionado con la probabilidad de existencia de la partícula, por lo que no puede haber normas negativas.

Hasta ahora, hemos estado suponiendo que imponíamos que se cumple el *gauge* de Lorenz ($\partial_\mu A^\mu = 0$), sin embargo, durante todo este desarrollo no lo hemos aplicado. Además, seguimos teniendo el problema de tener tan solo 2 estados de polarización reales, frente a los cuatro estados de polarización distintos que tenemos en nuestra teoría. La solución fue propuesta por Gupta y Bleuler quienes demostraron que para que haya una conexión entre la teoría cuántica que estamos construyendo y la teoría clásica del electromagnetismo basta con imponer una condición más suave. Sea $|\psi\rangle$ un estado físico se ha de cumplir que,

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\psi\rangle = 0, \quad (\text{A.13})$$

por lo que sean dos estados físicos cualesquiera $|\psi\rangle$ y $|\psi'\rangle$ tenemos que el siguiente elemento de matriz entre dichos estados se anula,

$$\langle \psi' | \partial_\mu A^\mu | \psi \rangle = 0. \quad (\text{A.14})$$

Veamos qué implica esto físicamente. Primero, podemos ver,

$$\partial_\mu A^{\mu+} = -i \int \frac{d^3 \vec{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} \sum_{r=0}^3 k_\mu \epsilon_r^\mu(\vec{k}) a_r(\vec{k}) e^{-ik_\mu x^\mu}, \quad (\text{A.15})$$

que al ser invariante Lorentz podemos estudiar en cualquier sistema de referencia. En concreto, vamos a tomar el sistema tal que \vec{k} se encuentra en la dirección del eje z ,

$$k^\mu = (\omega_k, 0, 0, \omega_k) \Rightarrow k_\mu = (\omega_k, 0, 0, -\omega_k), \quad (\text{A.16})$$

de manera que si sustituimos en la integral nos queda,

$$\partial_\mu A^{\mu+} = -i \int \frac{d^3 \vec{k} \omega_k}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega_k}} [a_0(\vec{k}) - a_3(\vec{k})] e^{-ik_\mu x^\mu}. \quad (\text{A.17})$$

Luego si aplicamos (A.13) obtenemos,

$$\partial_\mu A^{\mu+} |\psi\rangle = 0 \Rightarrow [a_0(\vec{k}) - a_3(\vec{k})] |\psi\rangle \Rightarrow a_0(\vec{k}) |\psi\rangle = a_3(\vec{k}) |\psi\rangle, \quad \forall \vec{k}, \quad (\text{A.18})$$

lo cual implica,

$$\langle \psi | \partial_\mu A^{\mu-} = 0 \Rightarrow \langle \psi | a_0^\dagger(\vec{k}) = \langle \psi | a_3^\dagger(\vec{k}), \quad (\text{A.19})$$

de manera que con esto eliminamos todos los estados de polarización escalares y longitudinales (no físicos).

Así pues, vamos a ver el Hamiltoniano del sistema. Comenzamos tomando el *gauge* de Feynman-'t Hooft que toma $\xi = 1$ en el Lagrangiano (2.14). Si además, imponemos $j^\mu = 0$, tenemos que el momento canónico es $\Pi^\mu = -\dot{A}^\mu$. Así, el Hamiltoniano es,

$$H = \int d^3 \vec{x} N \left[\Pi^\mu(x^\nu) \dot{A}_\mu(x^\nu) - \mathcal{L}(x^\nu) \right], \quad (\text{A.20})$$

donde N es el número de fotones. Si realizamos la descomposición de Fourier de los campos A^μ dadas en (2.18) tenemos que el Hamiltoniano pasa a ser,

$$\begin{aligned} H &= \int d^3 \vec{k} \omega_k \sum_{r=0}^3 \zeta_r a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \\ &= \int d^3 \vec{k} \omega_k \left[\sum_{r=1}^3 a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) \right], \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

por lo que el valor esperado del Hamiltoniano entre los estados físicos $|\psi'\rangle$ y $|\psi\rangle$ queda,

$$\begin{aligned} \langle \psi' | H | \psi \rangle &= \int d^3 \vec{k} \omega_k \left\langle \psi' \left| \left[\sum_{r=1}^3 a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) - a_0^\dagger(\vec{k}) a_0(\vec{k}) \right] \right| \psi \right\rangle \\ &= \int d^3 \vec{k} \omega_k \left\langle \psi' \left| \sum_{r=1}^2 a_r^\dagger(\vec{k}) a_r(\vec{k}) \right| \psi \right\rangle. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

A.3. Obtención del propagador del fotón.

Queremos buscar el propagador asociado al fotón. Para ello, vamos a escribir la ecuación (2.15) como,

$$\left[g^{\nu\mu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\nu \partial^\mu \right] A_\mu = j^\nu. \quad (\text{A.23})$$

Ahora vamos a buscar las soluciones de esta ecuación. Para ello, vamos a utilizar el método de la función de Green. Así pues definimos la función de Green, que identificaremos con el propagador como,

$$\left[g^{\nu\mu} \square - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) \partial^\nu \partial^\mu \right] D_{\mu\lambda}(x^\sigma - y^\rho) = g_\lambda^\nu \delta^4(x^\sigma - y^\rho), \quad (\text{A.24})$$

de manera que realizando la transformada de Fourier obtenemos,

$$- \left[g^{\nu\mu} k^2 - \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) k^\nu k^\mu \right] D_{\mu\lambda}(k^\sigma) = g_\lambda^\nu. \quad (\text{A.25})$$

Ahora vamos a suponer que el propagador tiene la forma,

$$D_{\mu\lambda}(k^\sigma) = a g_{\mu\lambda} + b k_\mu k_\lambda, \quad (\text{A.26})$$

luego la ecuación queda como,

$$g_\lambda^\nu = -a k^2 g_\lambda^\nu + \left[a \left(1 - \frac{1}{\xi} \right) - \frac{1}{\xi} b k^2 \right] k^\nu k_\lambda. \quad (\text{A.27})$$

Esta ecuación tiene solución si tomamos,

$$a = -\frac{1}{k^2} \quad ; \quad b = \frac{1 - \xi}{k^4}. \quad (\text{A.28})$$

Sin embargo, con esto tenemos un problema al escribir el propagador en el espacio de coordenadas que se resuelve añadiendo un valor complejo en el denominador. Se define pues el propagador de Feynman como,

$$D_{\mu\lambda} = -\frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\lambda} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right]. \quad (\text{A.29})$$

Ahora vamos a ver cómo el propagador depende de los distintos estados de polarización. Al no ser una cantidad física medible éste dependerá de los cuatro estados, no tan solo de los físicos. Tomando el *gauge* de Feynman-'t Hooft ($\xi = 1$) tenemos,

$$D^{\mu\nu}(k^\sigma) = -\frac{g^{\mu\nu}}{k^2 + i\varepsilon} = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \sum_{r=0}^3 \zeta_r \epsilon_r^\mu \epsilon_r^{*\mu}, \quad (\text{A.30})$$

donde hemos utilizado la propiedad (2.19). Tomando las definiciones de polarización escalar (A.1) y longitudinal (A.5), el propagador tiene la forma,

$$D^{\mu\nu}(k^\sigma) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \left[\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(k^\sigma) \epsilon_r^\nu(k^\sigma) + \frac{(k^\mu - (k \cdot n)n^\mu)(k^\nu - (k \cdot n)n^\nu)}{(k \cdot n)^2 - k^2} - n^\mu n^\nu \right]. \quad (\text{A.31})$$

A.4. Obtención de la ecuación de Dirac.

Puesto que a partir de la ecuación de Klein-Gordon se llegaban a densidad de probabilidad negativa para sus campos, Dirac intentó buscar una ecuación lineal en $\frac{\partial}{\partial t}$ y en $\vec{\nabla}$. En general, esta ecuación tendría que tener una forma tal que,

$$H\psi = (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)\psi, \quad (\text{A.32})$$

donde α_i con $i = 1, 2, 3$ y β son los coeficientes por determinar, ψ sería el espinor o campo de Dirac que veremos que se trata de un cuadrivector, m la masa del fermión, \vec{p} su momento y H la energía del sistema (o Hamiltoniano).

Queremos que la partícula cumpla con la relación de energía-momento relativista, por lo que hemos de imponer, en unidades naturales,

$$E^2 - p^2 = m^2, \quad (\text{A.33})$$

y por tanto,

$$H^2\psi = (p^2 + m^2)\psi = (\vec{\alpha}\vec{p} + \beta m)^2\psi, \quad (\text{A.34})$$

lo que nos lleva a las siguientes relaciones entre los distintos valores de las α_i y β ,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^2 = \beta^2 &= 1 \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \\ \alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i &= \alpha_i\beta + \beta\alpha_i = 0 \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3; \quad i \neq j \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.35})$$

Si queremos que la solución no sea trivial, α_i y β han de tratarse de matrices, cuya dimensión más baja posible es una matriz cuadrada de dimensión 4. Por ende, el campo ψ ha de ser un vector columna de cuatro componentes. La elección de dichas matrices no es única, pero la más usada, la representación de Dirac-Pauli, es tal que,

$$\beta \equiv \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \equiv \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.36})$$

donde σ_i son las matrices de Pauli y \mathbb{I} la matriz cuadrada identidad de dimensión 2. Si multiplicamos (A.32) por la matriz β e identificando $H \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$ y $\vec{p} \rightarrow -i\vec{\nabla}$ tenemos,

$$i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\beta\vec{\alpha}\vec{\nabla}\psi + m\psi, \quad (\text{A.37})$$

que introduciendo las matrices de Dirac $\gamma^\mu \equiv (\beta, \beta\vec{\alpha})$ podemos reescribirlo como,

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (\text{A.38})$$

Esta es la ecuación de Dirac en forma covariante.

Cabe destacar que hasta aquí hemos escrito todo en la representación de Dirac, sin embargo, no es la única. Una representación interesante es la representación de Weyl, en la cual identificamos

$$\beta \equiv \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_i \equiv \begin{pmatrix} -\sigma_i & 0 \\ 0 & \sigma_i \end{pmatrix} \quad \text{con } i = 1, 2, 3 \quad (\text{A.39})$$

La ventaja de esta representación es la sencillez con la que se obtienen las proyecciones quirales del campo de Dirac pues podemos escribir,

$$\psi_D = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

donde $\psi_{L,R}$ son espinores de dos componentes que se identifican con las proyecciones levógira y dextrógiro respectivamente.

Además, la representación de Weyl nos ayuda para la representación irreducible del grupo de Lorentz ortocrono propio, \mathcal{L}_\uparrow^+ . Podemos etiquetar estas como (j_1, j_2) , de manera que la dimensión total es $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$. En la representación espinorial del grupo \mathcal{L}_\uparrow^+ , podemos escribir su representación fundamental como el producto tensorial de las representaciones espinoriales $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$, de dimensión 2. Estas representaciones se tratan de los espinores de Weyl, de manera que $\psi_L \in (\frac{1}{2}, 0)$ y $\psi_R \in (0, \frac{1}{2})$.

Los espinores de Weyl cumplen las ecuaciones de Weyl, que tienen la forma,

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0, \quad (\text{A.41})$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = 0, \quad (\text{A.42})$$

donde $\sigma^\mu = (\mathbb{I}, \vec{\sigma})$ y $\bar{\sigma} = (\mathbb{I}, -\vec{\sigma})$. Aquí los espinores de Weyl representan partículas de masa nula y espín 1/2. Podemos ver que además se tratan de autoestados de la helicidad. Ésta se define como la proyección del espín en la dirección del momento,

$$h = \hat{p} \vec{S} = \frac{1}{2} \hat{p} \vec{\sigma}, \quad (\text{A.43})$$

de manera que, tomando por ejemplo $\psi_L = u_L e^{\pm i\vec{p}\vec{x}}$, que es una solución de onda plana,

$$\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = 0 \Rightarrow (\partial_0 - \sigma^i \partial_i) \psi_L = 0 \Rightarrow \mp(E + \vec{\sigma} \vec{p}) u_L = 0 \Rightarrow \vec{\sigma} \hat{p} E u_L = -E u_L \Rightarrow h = -\frac{1}{2} \quad (\text{A.44})$$

Si la masa es distinta de 0, los espinores de Weyl dejan de ser autoestados de la helicidad, por lo que la quiralidad deja ser equivalente a la helicidad. En este caso, los espinores de Weyl cumplen las ecuaciones de Dirac de manera que se encuentran acoplados,

$$i\bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi_L = m\psi_R, \quad (\text{A.45})$$

$$i\sigma^\mu \partial_\mu \psi_R = m\psi_L. \quad (\text{A.46})$$

De esta manera si tomamos (A.40) con las matrices de Dirac que tomen la forma (A.39), recuperamos la ecuación de Dirac (2.36).

Anexos B

Desarrollos matemáticos correspondientes al Capítulo 3.

B.1. Obtención Lagrangiano de la interacción débil.

Similar a la QED vamos a considerar el Lagrangiano libre,

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{j=1}^3 i\bar{\psi}_j(x)\gamma^\mu\partial_\mu\psi_j(x), \quad (\text{B.1})$$

donde hemos de notar que no aparecen términos de masas para los fermiones. No hemos incluído estos términos pues mezclaría campos levógiros y dextrógiros $m\bar{\psi}\psi = m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L)$, lo que rompe nuestras consideraciones de simetría, ya que tenemos una combinación de singletes y dobletes que no es invariante bajo $SU(2)_L$. El Lagrangiano (B.1) es invariante bajo una transformación electrodébil global,

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\longrightarrow \psi'_1(x) \equiv e^{iy_1\beta}U_L\psi_1(x), \\ \psi_2(x) &\longrightarrow \psi'_2(x) \equiv e^{iy_2\beta}\psi_2(x), \\ \psi_3(x) &\longrightarrow \psi'_3(x) \equiv e^{iy_3\beta}\psi_3(x), \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

donde la matriz de la transformación $SU(2)_L$, que se trata de un grupo no-Abeliano, es,

$$U_L = e^{i\frac{\sigma_i}{2}\alpha^i}, \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \quad (\text{B.3})$$

siendo σ_i las matrices de Pauli, que son los generadores de la representación fundamental del grupo y que sólo actúan sobre ψ_1 , es decir, sobre el doblete. β y α^i son cuatro constantes. Los parámetros y_i se llaman hipercargas, ya que la transformación $U(1)_Y$ es análoga a la correspondiente de la QED.

Vamos ahora a requerir que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones locales *gauge* $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, es decir $\alpha^i = \alpha^i(x)$ y $\beta = \beta(x)$. Tal y como hicimos en la QED, vamos a cambiar las derivadas por derivadas covariantes. Como tenemos cuatro parámetros *gauge*, necesitamos cuatro bosones *gauge* diferentes,

$$\begin{aligned} D_\mu\psi_1(x) &\equiv \left[\partial_\mu + ig\widetilde{W}_\mu(x) + ig'y_1B_\mu(x) \right] \psi_1(x), \\ D_\mu\psi_2(x) &\equiv \left[\partial_\mu + ig'y_2B_\mu(x) \right] \psi_2(x), \\ D_\mu\psi_3(x) &\equiv \left[\partial_\mu + ig'y_3B_\mu(x) \right] \psi_3(x), \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

donde g y g' son dos constantes de acople y hemos definido el campo matriz de $SU(2)$,

$$\widetilde{W}_\mu(x) = \frac{\sigma_i}{2}W_\mu^i(x). \quad (\text{B.5})$$

Queremos que $D_\mu \psi_j(x)$ transforme igual que los campos $\psi_j(x)$, lo que nos fija cómo se han de transformar los campos *gauge*,

$$\begin{aligned} B_\mu(x) &\longrightarrow B_\mu'(x) \equiv B_\mu(x) - \frac{1}{g'} \partial_\mu \beta(x), \\ \widetilde{W}_\mu(x) &\longrightarrow \widetilde{W}'_\mu(x) \equiv U_L(x) \widetilde{W}_\mu U_L^\dagger(x) + \frac{i}{g} \partial_\mu U_L U_L^\dagger(x). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

De esta forma B_μ transforma de manera similar al fotón de la QED y \widetilde{W}_μ transforma según $SU(2)$. Cabe destacar que, por el momento, las hipercargas son parámetros arbitrarios, por lo que los acoplos entre B_μ y ψ_j son libres y su intensidad puede variar, pero veremos más adelante cómo quedan fijadas. Sin embargo, como en $SU(2)$ las relaciones de conmutación no son lineales, esto no pasa para W_μ^i , por lo que la magnitud del acople es la misma.

Así pues, el Lagrangiano,

$$\mathcal{L} = \sum_{j=1}^3 i\bar{\psi}_j(x) \gamma^\mu D_\mu \psi_j(x), \quad (\text{B.7})$$

es invariante bajo transformaciones locales del grupo electrodébil. Para construir un término cinético para los bosones *gauge*, vamos a introducir unos tensores de una forma similar a la del tensor electromagnético de la QED,

$$\begin{aligned} B_{\mu\nu} &\equiv \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu, \\ \widetilde{W}_{\mu\nu} &\equiv -\frac{i}{g} \left[(\partial_\mu + ig\widetilde{W}_\mu), (\partial_\nu + ig\widetilde{W}_\nu) \right] = \partial_\mu \widetilde{W}_\nu - \partial_\nu \widetilde{W}_\mu + ig \left[\widetilde{W}_\mu, \widetilde{W}_\nu \right], \\ \widetilde{W}_{\mu\nu} &\equiv \frac{\sigma_i}{2} W_{\mu\nu}^i \quad \text{con} \quad W_{\mu\nu}^i = \partial_\mu W_\nu^i - \partial_\nu W_\mu^i - g\varepsilon^{ijk} W_\mu^j W_\nu^k, \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

de manera que tenemos que $B_{\mu\nu}$ es invariante bajo transformaciones de G , mientras que $\widetilde{W}_{\mu\nu}$ transforma de forma covariante ($\widetilde{W}_{\mu\nu} \rightarrow U_L \widetilde{W}_{\mu\nu} U_L^\dagger$). De esta forma el Lagrangiano cinético viene dado por,

$$\mathcal{L}_{Kin} = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}. \quad (\text{B.9})$$

De nuevo, la simetría *gauge* prohíbe la existencia de un término cinético para los bosones, por lo que las partículas que describimos hasta ahora no tienen masa.

B.2. Obtención Lagrangiano de la QCD.

Queremos construir una teoría cuántica de campos. Para ello, vamos a denotar q_f^α al campo de un quark con sabor $f = (u, d, c, s, t, b)$ y color α . Para simplificar la notación, vamos a tomar una notación vectorial en el espacio de color, $q_f \equiv (q_f^1, q_f^2, q_f^3)$. El Lagrangiano libre de Dirac, viene pues dado por,

$$\mathcal{L}_0 = \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) q_f, \quad (\text{B.10})$$

que es invariante bajo transformaciones globales $SU(3)_C$ en el espacio de color,

$$q_f^\alpha \longrightarrow (q_f^\alpha)' \equiv U_\beta^\alpha q_f^\beta, \quad UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}, \quad \det(U) = 1, \quad (\text{B.11})$$

donde $U \in SU(3)$. Esta matriz de rotación puede escribirse como,

$$U = e^{i \frac{\lambda^a}{2} \theta_a}, \quad (\text{B.12})$$

en donde $\frac{1}{2}\lambda^a$ ($a = 1, 2, \dots, 8$) son las matrices generadores de la representación fundamental de $SU(3)$ y θ_a son parámetros arbitrarios.

Las matrices λ_a tienen traza nula, podemos denominar $T_a = \frac{\lambda_a}{2}$ y cumplen las siguientes relaciones de commutación,

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c, \quad (\text{B.13})$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura de $SU(3)$ que son reales y totalmente antisimétricas.

Como hemos hecho para los casos anteriores, vamos a exigir que el Lagrangiano sea invariante bajo transformaciones locales de $SU(3)_C$, es decir $\theta_a = \theta_a(x)$. Para satisfacer esto, de manera similar a A_μ en la QED, vamos a introducir una serie de campos *gauge* para transformar la derivada en derivada covariante, ya que es la parte que nos da problemas. Estos campos corresponderán a 8 bosones *gauge*, pues tenemos 8 parámetros distintos, y los denominaremos gluones. Se denotan como $G_a^\mu(x)$, por lo que definimos,

$$D^\mu q_f \equiv [\partial^\mu + ig_s T_a G_a^\mu(x)] q_f \equiv [\partial^\mu + ig_s G^\mu(x)] q_f \quad (\text{B.14})$$

donde hemos introducido la matriz compacta $[G^\mu(x)] \equiv T^a G_a^\mu(x)$ y donde g_s es la constante de acople de la interacción fuerte.

Queremos que $D^\mu q_f$ transforme igual que q_f , lo que fija las propiedades de la transformación del campo *gauge*,

$$D^\mu \longrightarrow (D^\mu)' \equiv UD^\mu U^\dagger, \quad (\text{B.15})$$

y por tanto, bajo una transformación infinitesimal $\delta\theta_a$ se tiene

$$q_f^\alpha \longrightarrow (q_f^\alpha)' = q_f^\alpha + i(T^a)_{\alpha\beta} \delta\theta_a q_f^\beta, \quad G_a^\mu \longrightarrow (G_a^\mu)' = G_a^\mu - \frac{1}{g_s} \partial^\mu (\delta\theta_a) - f^{abc} \delta\theta_b G_c^\mu. \quad (\text{B.16})$$

El cómo se llega a la transformación del campo del gluón se puede ver en el anexo (B.3). Notar que si comparamos con la transformación del campo del fotón en la QED (3.6), aquí aparece un término extra debido a que $SU(3)$ es un grupo no-Abeliano. Además, al contrario que en la QED, g_s es única, no dependiente del tipo del fermión.

Para construir un término cinético para los campos de los gluones, introducimos los siguientes tensores,

$$G^{\mu\nu}(x) \equiv -\frac{i}{g_s} [D^\mu, D^\nu] = \partial^\mu G^\nu - \partial^\nu G^\mu + ig_s [G^\mu, G^\nu] \equiv T^a G_a^{\mu\nu}(x), \quad (\text{B.17})$$

$$G_a^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu - g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \quad (\text{B.18})$$

Luego bajo una transformación *gauge* $SU(3)_C$,

$$G^{\mu\nu} \longrightarrow (G^{\mu\nu})' = U G^{\mu\nu} U^\dagger \quad (\text{B.19})$$

y la traza $\text{Tr}(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) = \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a$ permanece invariante. Tomando la normalización apropiada del término cinético, el Lagrangiano invariante local $SU(3)_C$ de la QCD queda,

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a + \sum_f \bar{q}_f (i\gamma^\mu D_\mu - m_f) q_f. \quad (\text{B.20})$$

B.3. Transformación local del gluón.

Sea un gluón G_μ^a y un vector de color $q_f = (q_f^1, q_f^2, q_f^3)$ donde $(1, 2, 3)$ son los posibles colores y $f = u, d, c, s, t, b$ el sabor del quark. Vamos ahora a tomar una transformación local $SU(3)_C$ en el espacio de color, de manera que conocemos cómo cambia q_f pero no G_μ^a ,

$$G_a^\mu(x) \longrightarrow G_a^\mu(x) + \delta G_a^\mu(x), \quad q_f(x) \longrightarrow q_f(x) + iT^a \delta \theta_a(x) q_f(x). \quad (\text{B.21})$$

La derivada covariante, definida como $D^\mu = \partial^\mu + ig_s T^a G_a^\mu$, actuando sobre un vector de color transformará como,

$$\begin{aligned} D^\mu q_f &\longrightarrow (D^\mu q_f)' = [\partial^\mu + ig_s T^a (G_a^\mu + \delta G_a^\mu)] (1 + iT^a \delta \theta_a) q_f \\ &= (1 + iT^a \delta \theta_a) \partial^\mu q_f + iT^a q_f \partial^\mu (\delta \theta_a) + ig_s T^b G_b^\mu (1 + iT^a \delta \theta_a) q_f + \\ &\quad + ig_s T^a \delta G_a^\mu (1 + iT^b \delta \theta_b) q_f. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Ahora, puesto que las matrices T^a no comutan, vamos a sumar y restar el término $(1 + iT^a \delta \theta_a) ig_s T^b G_b^\mu q_f$, despreciando los términos de segundo orden obtenemos,

$$\begin{aligned} D^\mu q_f &\longrightarrow (1 + iT^a \delta \theta_a) (\partial^\mu + ig_s T^a G_a^\mu) q_f + iT^a q_f \partial^\mu (\delta \theta_a) + ig_s T^a \delta G_a^\mu q_f + \\ &\quad + ig_s T^b G_b^\mu (1 + iT^a \delta \theta_a) q_f - (1 + iT^a \delta \theta_a) ig_s T^b G_b^\mu q_f \\ &= (1 + iT^a \delta \theta_a) D^\mu q_f + iT^a q_f \partial^\mu (\delta \theta_a) + ig_s T^a \delta G_a^\mu q_f + g_s \delta \theta_a [T^a, T_b] G_b^\mu q_f. \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

Conocemos la relación de commutación de las matrices T^a , dado en (B.13). Además, estas matrices tienen la siguiente relación con la traza,

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (\text{B.24})$$

Ahora, queremos que $D^\mu q_f$ transforme como q_f , por tanto si imponemos esto se ha de cumplir,

$$0 = iT^a q_f \partial^\mu (\delta \theta_a) + ig_s T^a \delta G_a^\mu q_f + g_s f^{abc} \delta \theta_a G_b^\mu T_c, \quad (\text{B.25})$$

que multiplicando por T_d y tomando las trazas nos queda,

$$\begin{aligned} 0 &= i\text{Tr}(T^d T^a) q_f \partial^\mu (\delta \theta_a) + ig_s \text{Tr}(T^d T^a) \delta G_a^\mu q_f + g_s f^{abc} \delta \theta_a G_b^\mu \text{Tr}(T^d T_c) \\ &= i\partial^\mu (\delta \theta_d) + g_s \delta G_d^\mu + g_s f^{abd} \delta \theta_a G_b^\mu. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

Despejando δG_d^μ , realizando una permutación cíclica de los índices en f^{abd} y renombrando $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$ y $d \rightarrow a$ obtenemos,

$$\delta G_a^\mu = -\frac{1}{g_s} \partial(\delta\theta_a) - f^{abc} \delta\theta_b G_c^\mu. \quad (\text{B.27})$$

Anexos C

Cálculos analíticos del Capítulo 4.

C.1. Cálculo de la sección eficaz del proceso $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$.

La sección eficaz de manera teórica viene dada para procesos donde las partículas iniciales tienen la misma masa, por unidad de ángulo sólido, como,

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \Omega} = \frac{1}{2E_{cm}^2} \frac{|\vec{k}|}{16\pi^2 E_{cm}} |\mathcal{M}|^2, \quad (\text{C.1})$$

donde E_{cm} es la energía del centro de masas, $|\vec{k}|$ es el módulo de las componentes espaciales del momento del muón y \mathcal{M} se trata del elemento matriz correspondiente al proceso.

Conocemos que el elemento matriz viene dado por,

$$i\mathcal{M} = \langle \psi_{ini} | D_{\mu\nu}(q) | \psi_{final} \rangle, \quad (\text{C.2})$$

por lo que leyendo el diagrama de Feynman empleando D tenemos,

$$i\mathcal{M} = \bar{v}(p_{e2}) (ieQ\gamma^\mu) u(p_{e1}) \left(-\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(p_{\mu1}) (ieQ\gamma^\nu) v(p_{\mu2}). \quad (\text{C.3})$$

Ahora para calcular $|\mathcal{M}|^2$, necesitamos conocer el complejo conjugado del elemento matriz,

$$-i\mathcal{M}^* = \bar{v}(p_{\mu2}) (-ieQ\gamma^\nu) u(p_{\mu1}) \left(\frac{ig_{\mu\nu}}{q^2} \right) \bar{u}(p_{e1}) (-ieQ\gamma^\mu) v(p_{e2}), \quad (\text{C.4})$$

donde tanto para electrones como para muones $|Q| = 1$ Luego, realizando suma sobre espines finales y promedio sobre iniciales, obtenemos,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{1}{4} \sum_{S_{e1}, S_{e2}, S_{\mu1}, S_{\mu2}} \frac{e^4}{q^4} \bar{v}(p_{e2}) \gamma^\mu u(p_{e1}) \bar{u}(p_{\mu1}) \gamma_\mu v(p_{\mu2}) \\ &\quad \cdot \bar{v}(p_{\mu2}) \gamma_\nu u(p_{\mu1}) \bar{u}(p_{e1}) \gamma^\nu v(p_{e1}). \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Ahora reorganizamos los términos para poder realizar más adelante la suma de espines,

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{e^4}{4q^4} \sum_{S_{e1}, S_{e2}, S_{\mu1}, S_{\mu2}} [\bar{v}(p_{e2}) \gamma^\mu u(p_{e1}) \bar{u}(p_{e1}) \gamma^\nu v(p_{e1})] \\ &\quad \cdot [\bar{u}(p_{\mu1}) \gamma_\mu v(p_{\mu2}) \cdot \bar{v}(p_{\mu2}) \gamma_\nu u(p_{\mu1})]. \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

Utilizando las relaciones para los espinores u y v (2.42) encontramos,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{4q^4} \text{Tr} \left[(\not{p}_{e2} - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_{e1} + m_e) \gamma^\nu \right] \text{Tr} \left[(\not{p}_{\mu1} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_{\mu2} - m_\mu) \gamma_\nu \right]. \quad (\text{C.7})$$

Vamos ahora a realizar el cálculo de cada una de las trazas. Comencemos con la concerniente a los electrones,

$$\begin{aligned}\text{Tr} \left[(\not{p}_{e2} - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_{e1} + m_e) \gamma^\nu \right] &= \text{Tr} \left[\not{p}_{e2} \gamma^\mu \not{p}_{e1} \gamma^\nu \right] + m_e \text{Tr} \left[\not{p}_{e2} \gamma^\mu \gamma^\nu \right] \\ &\quad - m_e \text{Tr} \left[\gamma^\mu \not{p}_{e1} \gamma^\nu \right] - m_e^2 \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \right].\end{aligned}\quad (\text{C.8})$$

Ahora, vamos a calcular el valor de estas trazas. Para ello, vamos a emplear las siguientes propiedades de las matrices de Dirac,

$$\text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \right] = 0, \quad \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \right] = 4g^{\mu\nu}, \quad (\text{C.9})$$

$$\text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\beta \right] = 4 \left(g^{\mu\nu} g^{\alpha\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} + g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \right). \quad (\text{C.10})$$

Así pues, las trazas nos quedan,

$$\begin{aligned}\text{Tr} \left[\not{p}_{e2} \gamma^\mu \not{p}_{e1} \gamma^\nu \right] &= p_{e2\alpha} p_{e1\beta} \text{Tr} \left[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \right] = 4p_{e2\alpha} p_{e1\beta} \left(g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} - g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\mu\beta} \right), \\ &= 4 \left(p_{e2}^\mu p_{e1}^\nu - (p_{e2} \cdot p_{e1}) g^{\mu\nu} + p_{e2}^\nu p_{e1}^\mu \right), \\ \text{Tr} \left[\not{p}_{e2} \gamma^\mu \gamma^\nu \right] &= p_{e2\alpha} \text{Tr} \left[\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\nu \right] = 0 = \text{Tr} \left[\gamma^\mu \not{p}_{e1} \gamma^\nu \right] = p_{e1\beta} \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \right], \\ \text{Tr} \left[\gamma^\mu \gamma^\nu \right] &= 4g^{\mu\nu},\end{aligned}$$

por lo que finalmente obtenemos,

$$\text{Tr} \left[(\not{p}_{e2} - m_e) \gamma^\mu (\not{p}_{e1} + m_e) \gamma^\nu \right] = 4 \left[p_{e2}^\mu p_{e1}^\nu - (p_{e2} \cdot p_{e1}) g^{\mu\nu} + p_{e2}^\nu p_{e1}^\mu - m_e^2 g^{\mu\nu} \right] \quad (\text{C.11})$$

De manera similar podemos obtener el valor de la traza correspondiente a los muones,

$$\begin{aligned}\text{Tr} \left[(\not{p}_{\mu 1} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_{\mu 2} - m_\mu) \gamma_\nu \right] &= \text{Tr} \left[\not{p}_{\mu 1} \gamma_\mu \not{p}_{\mu 2} \gamma_\nu \right] - m_\mu \text{Tr} \left[\not{p}_{\mu 1} \gamma_\mu \gamma_\nu \right] \\ &\quad + m_\mu \text{Tr} \left[\gamma_\mu \not{p}_{\mu 2} \gamma_\nu \right] - m_\mu^2 \text{Tr} \left[\gamma_\mu \gamma_\nu \right],\end{aligned}\quad (\text{C.12})$$

que empleando de nuevo las relaciones (C.9) obtenemos,

$$\text{Tr} \left[(\not{p}_{\mu 1} + m_\mu) \gamma_\mu (\not{p}_{\mu 2} - m_\mu) \gamma_\nu \right] = 4 \left[p_{\mu 1\mu} p_{\mu 2\nu} - (p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) g_{\mu\nu} + p_{\mu 1\nu} p_{\mu 2\mu} - m_\mu^2 g_{\mu\nu} \right]. \quad (\text{C.13})$$

Ahora ya podemos calcular el elemento matriz al realizar la multiplicación de las dos trazas,

$$\begin{aligned}|\mathcal{M}|^2 &= \frac{16e^4}{4q^4} \left\{ (p_{e2} \cdot p_{\mu 1})(p_{e1} \cdot p_{\mu 2}) - (p_{e2} \cdot p_{e1})(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) \right. \\ &\quad + (p_{e2} \cdot p_{\mu 2})(p_{e1} \cdot p_{\mu 1}) - m_\mu^2 (p_{e2} \cdot p_{e1}) \\ &\quad - (p_{e2} \cdot p_{e1}) \left[(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) - 4(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) + (p_{\mu 2} \cdot p_{\mu 1}) - 4m_\mu^2 \right] \\ &\quad + (p_{e2} \cdot p_{\mu 2})(p_{e1} \cdot p_{\mu 1}) - (p_{e1} \cdot p_{e2})(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) \\ &\quad + (p_{e2} \cdot p_{\mu 1})(p_{e1} \cdot p_{\mu 2}) - m_\mu^2 (p_{e1} \cdot p_{e2}) \\ &\quad \left. - m_e^2 \left[(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) - 4(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) + (p_{\mu 2} \cdot p_{\mu 1}) - 4m_\mu^2 \right] \right\},\end{aligned}\quad (\text{C.14})$$

lo cual podemos simplificar hasta obtener,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{8e^4}{q^4} [(p_{e2} \cdot p_{\mu 1})(p_{e1} \cdot p_{\mu 2}) + (p_{e2} \cdot p_{\mu 2})(p_{e1} \cdot p_{\mu 1}) + m_e^2(p_{e2} \cdot p_{e1}) + m_e^2(p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) + 2m_e^2m_{\mu}^2]. \quad (C.15)$$

Una vez obtenido el elemento matriz en función de los productos de los momentos hemos de calcular dichos productos. Para ello, vamos a colocarnos en el sistema CDM. Como vemos en la figura (C.1), los momentos de las distintas partículas las podemos escribir como,

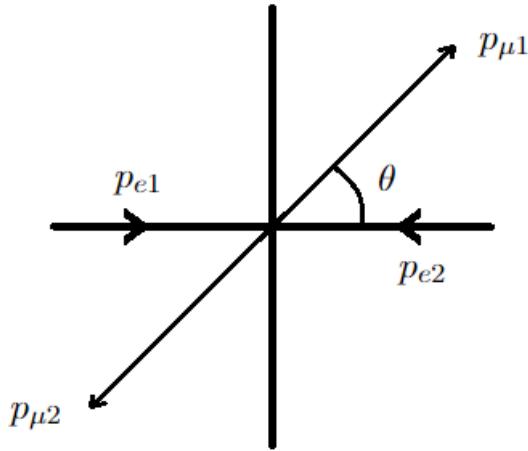


Figura C.1: Momentos de las partículas iniciales y finales vistas desde el sistema centro de masas.

$$\left. \begin{aligned} p_{e1} &= (E, p_e, 0, 0) \\ p_{e2} &= (E, -p_e, 0, 0) \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} p_{\mu 1} &= (E, p_{\mu} \cos \theta, p_{\mu} \sin \theta, 0) \\ p_{\mu 2} &= (E, -p_{\mu} \cos \theta, -p_{\mu} \sin \theta, 0) \end{aligned} \right\} \quad (C.16)$$

Con esto podemos calcular de manera directa el valor del momento del fotón, así como los productos de los dos primeros términos del elemento matriz. El momento del fotón viene dado por,

$$q = p_{e1} + p_{e2} = (2E, 0, 0, 0) \Rightarrow q^2 = 4E^2. \quad (C.17)$$

Ahora los productos los podemos escribir como,

$$\left. \begin{aligned} (p_{e1} \cdot p_{\mu 2}) &= E^2 + p_e p_{\mu} \cos \theta \\ (p_{e2} \cdot p_{\mu 1}) &= E^2 + p_e p_{\mu} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad \left. \begin{aligned} (p_{e1} \cdot p_{\mu 1}) &= E^2 - p_e p_{\mu} \cos \theta \\ (p_{e2} \cdot p_{\mu 2}) &= E^2 - p_e p_{\mu} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (C.18)$$

Ahora para calcular los términos que acompañan a las masas vamos a emplear,

$$\left. \begin{aligned} (p_{e1} + p_{e2})^2 &= p_{e1}^2 + p_{e2}^2 + 2(p_{e1} \cdot p_{e2}) \\ &= q^2 = 4E^2 \end{aligned} \right\} \quad (C.19)$$

y de manera similar para los muones. Realizando un poco de álgebra encontramos,

$$(p_{e1} \cdot p_{e2}) = 2E^2 - m_e^2 \quad (p_{\mu 1} \cdot p_{\mu 2}) = 2E^2 - m_{\mu}^2 \quad (C.20)$$

Con todo esto y desarrollando las ecuaciones, llegamos a que el elemento de matriz en función de los momentos queda,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{e^4}{E^4} [E^4 + p_e^2 p_\mu^2 \cos^2 \theta + E^2(m_\mu^2 + m_e^2)] \quad (\text{C.21})$$

Ahora si tomamos que $p^2 = E^2 - m^2$ tanto para electrones como para muones en el sistema CDM, podemos reescribir (C.21) como,

$$|\mathcal{M}|^2 = e^4 \left[(1 + \cos^2 \theta) + \frac{m_\mu^2 m_e^2}{E^4} \cos^2 \theta + \frac{m_\mu^2 + m_e^2}{E^2} (1 - \cos^2 \theta) \right] \quad (\text{C.22})$$

Ahora ya podemos calcular la sección eficaz según (4.2). Para ello, vamos a sustituir en ella el valor del elemento matriz, tomando $|\vec{k}| = p_\mu = E \sqrt{1 - \frac{m_\mu^2}{E^2}}$ y $E_{cm} = 2E$, obteniendo,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{64\pi^2 E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}} \left[(1 + \cos^2 \theta) + \frac{16m_\mu^2 m_e^2}{E_{cm}^4} \cos^2 \theta + \frac{4(m_\mu^2 + m_e^2)}{E_{cm}^2} (1 - \cos^2 \theta) \right]. \quad (\text{C.23})$$

Introduciendo la constante de estructura fina, que en unidades naturales se trata de $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e integrando en el diferencial de ángulo sólido se obtiene,

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}} \cdot \\ &\cdot \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta \left[(1 + \cos^2 \theta) \frac{16m_\mu^2 m_e^2}{E_{cm}^4} \cos^2 \theta + \frac{4(m_\mu^2 + m_e^2)}{E_{cm}^2} (1 - \cos^2 \theta) \right] = \quad (\text{C.24}) \\ &= \frac{\pi\alpha^2}{4E_{cm}^2} \sqrt{1 - \frac{4m_\mu^2}{E_{cm}^2}} \left[\frac{8}{3} + \frac{32m_\mu^2 m_e^2}{3E_{cm}^4} + \frac{16(m_\mu^2 + m_e^2)}{3E_{cm}^2} \right]. \end{aligned}$$

Este es el valor de la sección eficaz en función de los valores de la energía del centro de masas.

C.2. Cálculo de la anchura a media altura del proceso $b \rightarrow cl\nu$.

El elemento matriz vienen dado de nuevo según (C.2) de manera que, para este diagrama, se obtiene,

$$\begin{aligned} i\mathcal{M} &= \bar{u}(p_c) \left[\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{cb} \right] \frac{-i}{k^2 - m_W^2} \left[g_{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2 - \xi m_W^2} \right] \\ &\quad \cdot \bar{u}(p_l) \left[\frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma^5) \right] v(p_\nu), \quad (\text{C.25}) \end{aligned}$$

donde m_W es la masa del bosón W^- y V_{cb} el elemento de la matriz CKM correspondiente a este proceso. Tomando el complejo conjugado, el gauge de Feynman-'t Hooft, y sumando

sobre espines finales y promediando sobre iniciales obtenemos,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{1}{4} \sum_{S_b, S_c, S_l, S_\nu} \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2^6 (k^2 - m_W^2)} \bar{u}(p_c) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) u(p_b) \bar{u}(p_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) v(p_\nu) \cdot \bar{v}(p_\nu) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu u(p_l) \bar{u}(p_b) (1 + \gamma^5) \gamma^\nu u(p_c). \quad (\text{C.26})$$

Similar al anterior proceso, reorganizando y utilizando (2.42) se llega a,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2^8 (k^2 - m_W^2)} \text{Tr} \left[(\not{p}_c + m_c) \gamma^\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_b + m_b) (1 + \gamma^5) \gamma^n u \right] \text{Tr} \left[(\not{p}_l + m_l) \gamma_\mu (1 - \gamma^5) (\not{p}_\nu - m_\nu) (1 + \gamma^5) \gamma_\nu \right]. \quad (\text{C.27})$$

Utilizando las relaciones de las matrices de Dirac (C.9), así como las siguientes relaciones con la matriz γ^5 ,

$$\gamma^5 \gamma^5 = \mathbb{I} \quad (\text{C.28})$$

$$\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu \quad (\text{C.29})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^5] = \text{Tr} [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^5] = 0 \quad (\text{C.30})$$

$$\text{Tr} [\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\nu \gamma^5] = -4i \varepsilon^{\alpha \mu \beta \nu} \quad (\text{C.31})$$

donde $\varepsilon^{\alpha \mu \beta \nu}$ se trata del tensor totalmente antisimétrico de Levi-Civita. Podemos escribir el elemento matriz como

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2^2 (k^2 - m_W^2)} \left[p_c^\mu p_b^\nu - (p_b \cdot p_c) g^{\mu\nu} + p_c^\nu p_b^\mu - i p_{c\alpha} p_{b\beta} \varepsilon^{\alpha \mu \beta \nu} \right] \cdot \left[p_{l\mu} p_{\nu\nu} - (p_l \cdot p_\nu) g_{\mu\nu} + p_{l\nu} p_{\nu\mu} - i p_{l\sigma}^\sigma p_{\nu}^\rho \varepsilon_{\sigma \mu \rho \nu} \right]. \quad (\text{C.32})$$

Ahora, si realizamos el producto aparecen diferentes términos multiplicados por el tensor de Levi-Civita. Aquellos en los que éste se encuentre acompañado de los cuatro momentos se anularán, pues, por conservación de momento, $p_b = p_c + p_e + p_\nu$. También aparecen términos en los que el tensor esté multiplicado por una métrica, como por ejemplo, $g_{\mu\nu} \varepsilon^{\alpha \mu \beta \nu} = \varepsilon_\nu^{\alpha \beta \nu}$. Estos términos se anularán por la antisimetría del tensor, obteniendo,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2^2 (k^2 - m_W^2)} \left[2(p_c \cdot p_l) (p_b \cdot p_\nu) + 2(p_c \cdot p_\nu) (p_b \cdot p_l) - p_{c\alpha} p_{b\beta} p_l^\sigma p_\nu^\rho \varepsilon^{\alpha \mu \beta \nu} \varepsilon_{\sigma \mu \rho \nu} \right]. \quad (\text{C.33})$$

Utilizando la antisimetría del tensor de Levi-Civita, así como la propiedad,

$$\varepsilon^{\alpha \beta \mu \nu} \varepsilon_{\alpha \beta \rho \sigma} = -2 (\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu - \delta_\sigma^\mu \delta_\rho^\nu), \quad (\text{C.34})$$

de manera que podemos simplificar hasta obtener,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{(k^2 - m_W^2)} (p_c \cdot p_l) (p_b \cdot p_\nu). \quad (\text{C.35})$$

Ahora, situándonos en el sistema centro de masas, tomando el quark b en reposo, podemos obtener los valores de los productos escalares,

$$\left. \begin{aligned} p_b &= (E_b, 0, 0, 0) \\ p_\nu &= (E_\nu, \vec{p}_\nu) \end{aligned} \right\} \quad p_b \cdot p_\nu = E_b E_\nu = m_b E_\nu, \quad (\text{C.36})$$

y el otro producto lo obtenemos como,

$$(p_c + p_l)^2 = p_c^2 + p_l^2 + 2(p_c \cdot p_l) \Rightarrow p_c \cdot p_l = \frac{1}{2} [(p_c + p_l)^2 - p_c^2 - p_l^2], \quad (\text{C.37})$$

utilizando,

$$p_b = p_c + p_l + p_\nu \Rightarrow p_c + p_l = p_b - p_\nu = (E_b - E_\nu, -\vec{p}_\nu) \quad (\text{C.38})$$

tenemos,

$$p_c \cdot p_l = \frac{1}{2} [(E_b - E_\nu)^2 - E_\nu^2 - m_c^2 - m_l^2] = \frac{1}{2} (m_b^2 - 2m_b E_\nu - m_c^2 - m_l^2). \quad (\text{C.39})$$

Si suponemos que el momento del bosón es mucho menor que la masa del W^- obtenemos que,

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2m_W^2} (m_b E_\nu) (m_b^2 - 2m_b E_\nu - m_c^2 - m_l^2). \quad (\text{C.40})$$

Una vez ya obtenido el elemento matriz en función de las masas pasamos a calcular la anchura a media altura de la desintegración. Para ello, se tiene,

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{2m_b} (2\pi)^4 \delta^4(p_b - p_c - p_l - p_\nu) \frac{d^3 \vec{p}_c}{(2\pi)^3 2E_c} \frac{d^3 \vec{p}_l}{(2\pi)^3 2E_l} \frac{d^3 \vec{p}_\nu}{(2\pi)^3 2E_\nu}. \quad (\text{C.41})$$

Vamos a ver la función delta de Dirac en cuatro dimensiones. En concreto, ésta la podemos escribir como,

$$\delta^4(p_b - p_c - p_l - p_\nu) = \delta(E_b - E_c - E_l - E_\nu) \delta^3(\vec{p}_b - \vec{p}_c - \vec{p}_l - \vec{p}_\nu), \quad (\text{C.42})$$

donde, tomando el sistema CDM, $\vec{p}_b = 0$, $E_b = m_b$, por lo tanto la delta en tres dimensiones nos permite eliminar la integral en \vec{p}_c ya que tenemos $\vec{p}_c = \vec{p}_l + \vec{p}_\nu$. Además, tenemos que la energía del quark c la podemos escribir como $E_c = \sqrt{m_c^2 + |\vec{p}_c|^2} = \sqrt{m_c^2 + |\vec{p}_l + \vec{p}_\nu|^2}$. Si suponemos que \vec{p}_l y \vec{p}_ν tienen sus direcciones formando un ángulo θ se tiene que $|\vec{p}_l + \vec{p}_\nu|^2 = |\vec{p}_l|^2 + |\vec{p}_\nu|^2 + 2|\vec{p}_l||\vec{p}_\nu|\cos\theta$, y por tanto, como $m_\nu = 0$, obtenemos que,

$$E_c = \left(m_c^2 + |\vec{p}_l|^2 + E_\nu^2 + 2|\vec{p}_l|E_\nu \cos\theta \right)^{1/2}. \quad (\text{C.43})$$

Ahora queremos simplificar $d^3 \vec{p}_\nu$. Para ello vamos a derivar con respecto del ángulo la energía del quark c ,

$$\frac{dE_c}{d\theta} = \frac{|\vec{p}_l|E_\nu \sin\theta}{E_c} \Rightarrow \sin\theta d\theta = dE_c \frac{E_c}{E_\nu |\vec{p}_l|}. \quad (\text{C.44})$$

Si desarrollamos ahora $d^3\vec{p}_\nu$ y sustituimos la expresión anterior nos queda,

$$d^3\vec{p}_\nu = E_\nu^2 dE_\nu \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{E_c E_\nu}{|\vec{p}_l|} dE_\nu dE_c d\varphi. \quad (\text{C.45})$$

Podemos ver que la expresión (C.41), integrando en E_c y en ϕ nos queda reducida a,

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(4\pi)^4 m_b} \frac{d^3\vec{p}_l}{E_l |\vec{p}_l|} dE_\nu \int_{E_c^-}^{E_c^+} dE_c \delta(m_b - E_c - E_l - E_\nu), \quad (\text{C.46})$$

donde los límites de la integral los obtenemos de (C.43) cuando el coseno toma los valores ± 1 . Así, si tenemos $E_c^- < m_b - E_l - E_\nu < E_c^+$ la integral vale la unidad, de lo contrario, se anulará. Vamos a suponer que nos encontramos dentro de los límites de la integral de aquí en adelante.

Vamos a continuar ahora viendo cómo desarrollar el valor de $d^3\vec{p}_l$. Puesto que ya hemos integrado en φ y en E_c hemos integrado en todo el ángulo sólido, de manera que $d^3\vec{p}_l = 4\pi |\vec{p}_l|^2 d|\vec{p}_l|$. Tomando diferenciales en $E_l^2 = m_l^2 + |\vec{p}_l|^2$ se tiene $E_l dE_l = |\vec{p}_l| d|\vec{p}_l|$. Por lo tanto obtenemos $d^3\vec{p}_l = 4\pi |\vec{p}_l| E_l dE_l$. Así, la expresión (C.46) queda reducida a,

$$d\Gamma = \frac{|\mathcal{M}|^2}{(4\pi)^3 m_b} dE_l dE_\nu. \quad (\text{C.47})$$

Ahora ya que hemos obtenido todo en función de diferenciales de energías, podemos sustituir el valor del elemento matriz (C.40). Realizando la integral en E_ν tenemos,

$$\frac{d\Gamma}{dE_l} = \frac{g^4 |V_{cb}|^2}{2(4\pi)^3 m_W^4} \int_{E_\nu^-}^{E_\nu^+} E_\nu (m_b^2 - m_c^2 - m_l^2 - 2m_b E_\nu) dE_\nu \quad (\text{C.48})$$

donde los límites de la integral vienen dados por la condición $E_c^- < m_b - E_l - E_\nu < E_c^+$.

Estos límites son,

$$E_\nu^\pm = \frac{\frac{1}{2}(mb^2 - m_c^2 + m_l^2) - m_b E_l}{m_b - E_l \mp \sqrt{E_l^2 - m_l^2}}. \quad (\text{C.49})$$

De esta forma, resolviendo la integral y realizando la sustitución $\frac{g^2}{m_W^2} = \frac{8G_F}{\sqrt{2}}$, donde G_F es la constante de Fermi, obtenemos,

$$\frac{d\Gamma}{dE_l} = \frac{32G_F^2 |V_{cb}|^2}{2(4\pi)^3} \left[(m_b^2 - m_c^2 - m_l^2) \frac{1}{2} (E_\nu^{+2} - E_\nu^{-2}) - \frac{2}{3} m_b (E_\nu^{+3} - E_\nu^{-3}) \right]. \quad (\text{C.50})$$

Anexos D

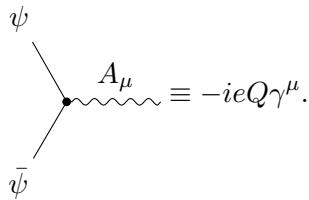
Reglas de Feynman.

D.1. Reglas de Feynman para la QED.

Para este caso partimos del término de interacción de la QED,

$$\mathcal{L}_{int} = -eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu. \quad (\text{D.1})$$

Podemos identificarlo con la cantidad asociada a un vértice de interacción electromagnético,



$$\psi \quad A_\mu \quad \bar{\psi} \quad \text{---} \equiv -ieQ\gamma^\mu. \quad (\text{D.2})$$

Los fotones internos se tratan de fotones mediadores de la interacción, y por tanto van a venir dados por el propagador obtenido en (A.29),

$$\mu \sim \gamma \sim \nu \equiv iD_{\mu\lambda} = -\frac{i}{k^2 + i\varepsilon} \left[g_{\mu\lambda} - (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\lambda}{k^2} \right]. \quad (\text{D.3})$$

Los fotones externos, sin embargo, van a venir dados por el campo del fotón y tendrán una polarización,

$$\overbrace{\quad}^{\substack{A_\mu \\ k}} \equiv \epsilon_\mu(k^\alpha), \quad (\text{D.4})$$

$$\overbrace{\quad}^{\substack{A_\mu \\ k}} \equiv \epsilon_\mu^*(k^\alpha). \quad (\text{D.5})$$

Cuando queremos calcular la sección eficaz de un proceso en el que intervienen fotones externos hemos de sumar únicamente sobre las polarizaciones transversales, obteniendo,

$$\sum_{r=1}^2 \epsilon_r^\mu(k^\alpha) \epsilon_r^\nu(k^\alpha) = -g^{\mu\nu}. \quad (\text{D.6})$$

Se puede ver que ψ puede aniquilar un fermión o crear un antifermión, $\bar{\psi}$ puede crear un fermión o aniquilar un antifermión y finalmente A^μ crea o aniquila un fotón, es decir,

tenemos,

$$\begin{aligned}
 \text{---} \rightarrow \bullet &\equiv \psi^+(p), \\
 \bullet \rightarrow \text{---} &\equiv \bar{\psi}^-(p), \\
 \text{---} \leftarrow \bullet &\equiv \bar{\psi}^+(p), \\
 \bullet \leftarrow \text{---} &\equiv \psi^-(p).
 \end{aligned}$$

Empleando las definiciones (2.40), podemos ver una relación más estrecha con las partículas y antipartículas.

D.2. Reglas de Feynman Interacción Electrodébil.

Similar a cómo hemos hecho en la sección anterior, podemos obtener las reglas de Feynman correspondientes a los términos de interacción en la teoría electrodébil. Si nos fijamos en las corrientes cargadas, partiendo del Lagrangiano (3.29), podemos obtener los siguientes vértices,

$$\bar{\nu}_l \text{---} \bullet \quad \text{---} \rightarrow \bullet \equiv \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5), \quad d_j \text{---} \bullet \quad \text{---} \rightarrow \bullet \equiv \frac{ig}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{ij}, \quad (\text{D.7})$$

donde $i, j = 1, 2, 3$ representa la familia correspondiente.

De la misma manera, tomando el Lagrangiano de las corrientes neutras (3.20) y separando la interacción con el fotón, que sigue las reglas de Feynman vistas en la sección anterior de este anexo, podemos obtener los vértices de interacción para el Z como,

$$\bar{\nu}_l \text{---} \bullet \quad \text{---} \rightarrow \bullet \equiv \frac{ig}{4 \cos \theta_W} \gamma^\mu (1 - \gamma_5), \quad (\text{D.8})$$

$$\bar{f} \text{---} \bullet \quad \text{---} \rightarrow \bullet \equiv \frac{ig}{\cos \theta_W} \gamma^\mu \left[g_L^f \left(\frac{1 - \gamma_5}{2} \right) + g_R^f \left(\frac{1 + \gamma_5}{2} \right) \right]. \quad (\text{D.9})$$

Finalmente, podemos ver que los propagadores correspondientes a los bosones con masa vienen dados por,

$$\mu \xrightarrow[q]{W^\pm} \nu \quad \mu \xrightarrow[q]{Z} \nu \quad (\text{D.10})$$

$$D^{\mu\nu}(q) \equiv \frac{-i}{q^2 - m_X^2} \left[g^{\mu\nu} + (\xi - 1) \frac{k^\mu k^\nu}{q^2 - \xi m_X^2} \right], \quad (\text{D.11})$$

con m_X la masa del bosón W o Z , según corresponda.

Anexos E

Valores numéricos usados en los cálculos.

Todos los valores numéricos han sido obtenidos de la versión más reciente del *Particle Data Group*, [2].

E.1. Masas de las partículas.

Partícula	Masa [MeV]
e	0,51099895000
μ	105,6583755
τ	1776,86
b	4180
c	1270
\bar{B}^0	5279,66
B_c^-	6274,47
D^-	1869,66
D^{*-}	2010,26
J/ψ	3096,900

Tabla E.1: Masas de las partículas empleadas en los cálculos.

E.2. Otras constantes.

α	0,0072973525628
V_{cb}	0,04153
G_F	$1,1663787 \times 10^{-11} \text{ MeV}^{-2}$
τ_{B^0}	$1,519 \times 10^{-12} \text{ s}$
$\tau_{B_c^-}$	$0,510 \times 10^{-12} \text{ s}$
\hbar	$6,582119569 \times 10^{-22} \text{ MeV s}$

Tabla E.2: Otras constantes empleadas en los cálculos.