



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Grado

Uso de Sysquake como herramienta docente del
control automático

Use of Sysquake as an Automatic Control
Teaching Tool

Autor

Einar Vladimir Illanes Vargas

Director

Javier Esteban Escaño

Escuela Universitaria Politécnica La Almunia

Junio 2023



**Escuela Universitaria
Politécnica** - La Almunia
Centro adscrito
Universidad Zaragoza

**ESCUELA UNIVERSITARIA POLITÉCNICA
DE LA ALMUNIA DE DOÑA GODINA (ZARAGOZA)**

MEMORIA

Uso de Sysquake como herramienta docente del
control automático

Use of Sysquake as an Automatic Control
Teaching Tool

424.23.71

Autor: Einar Vladimir Illanes Vargas

Director: Javier Esteban Escaño

Fecha: junio 2023

INDICE DE CONTENIDO BREVE

1. INTRODUCCION	1
2. MARCO TEÓRICO	6
3. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA HERRAMIENTA	46
4. EJEMPLOS DEL USO DE LA HERRAMIENTA	64
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	71
6. OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE	73
7. BIBLIOGRAFÍA	75

INDICE DE CONTENIDO

1. INTRODUCCION	1
1.1. RESUMEN	1
1.2. PALABRAS CLAVE	2
1.3. ABSTRACT	2
1.3.1. <i>Keys words</i>	3
1.4. PROLOGO	3
1.5. OBJETIVOS	4
1.6. ANTECEDENTES	5
2. MARCO TEÓRICO	6
2.1. MODELADO MATEMÁTICO DE LOS SISTEMAS	6
2.1.1. <i>Ecuaciones diferenciales de sistemas físicos</i>	6
2.1.2. <i>Transformada de Laplace</i>	12
2.1.3. <i>La función de transferencia de sistemas lineales</i>	13
2.1.4. <i>Modelos de diagramas de bloque</i>	15
2.1.5. <i>Ejemplo de diseño</i>	16
2.2. SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN.	17
2.2.1. <i>Características</i>	17
2.2.1.1. Sistema de lazo abierto y lazo cerrado	18
2.2.1.2. Sensibilidad de los sistemas de control a variaciones en los parámetros	20
2.2.1.2.1. Amplificador realimentado	20
2.2.1.3. Señales de perturbación	21

2.2.2. Comportamiento	23
2.2.2.1. Señales de entrada de prueba	23
2.2.2.1.1. Señal impulso unitario	23
2.2.2.1.2. Señal escalón unitario	24
2.2.2.1.3. Señal en rampa unitaria	25
2.2.2.2. Comportamiento temporal de los sistemas	26
2.2.2.2.1. Sistemas de primer orden	26
2.2.2.2.2. Sistemas de segundo orden	27
2.2.2.3. Selección de parámetros	30
2.2.2.4. Error en estado estacionario	31
2.2.2.4.1. Error estático de "posición"	32
2.2.2.4.2. Error estático de "velocidad"	33
2.2.2.4.3. Error estático de "aceleración"	33
2.3. ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES CON REALIMENTACIÓN	34
2.3.1. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz	35
2.3.1.1. Primera columna sin ceros	37
2.3.1.2. Un cero en la primera columna	37
2.3.1.3. Toda una fila es cero o una fila constituida por un solo elemento que es cero	38
2.4. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES	39
2.4.1. Condiciones Módulo-Argumento	39
2.4.2. Procedimiento de construcción	41
2.5. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA	43
3. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA HERRAMIENTA	46
3.1. GENERACIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA	46
3.1.1. Señales de entrada usando Matlab	47
3.1.2. Señales de entrada usando Sysquake	53
3.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD	55
3.2.1. Estudio de la estabilidad en Matlab	56
3.2.2. Estudio de la estabilidad en Sysquake	61
4. EJEMPLOS DEL USO DE LA HERRAMIENTA	64
4.1. PARÁMETROS DE FORMA ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA	64
4.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD	67
5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS	71
5.1. TRABAJOS FUTUROS	72
6. OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE	73

INDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Resorte-masa	7
Ilustración 2: Sistema mecánico amortiguador-resorte-masa	9
Ilustración 3: Circuito eléctrico RLC.....	10
Ilustración 4: Gráfica de voltaje de un circuito RLC subamortiguado	11
Ilustración 5: Circuito RC	14
Ilustración 6: Diagrama de bloques.....	15
Ilustración 7: Ejemplo de diagramas de bloque	16
Ilustración 8: Proceso de un sistema con realimentación	18
Ilustración 9: Sistema de lazo abierto	19
Ilustración 10: Sistema de lazo cerrado.....	19
Ilustración 11: Amplificador en lazo abierto	20
Ilustración 12: Amplificador con realimentación negativa.....	21
Ilustración 13: Sistema realimentado con Señal de Perturbación.....	22
Ilustración 14: Escalón unitario	24
Ilustración 15: Señal rampa unitaria.....	25
Ilustración 16: Respuesta temporal de un sistema de primer orden a una entrada escalón.....	26
Ilustración 17: Respuesta temporal de un sistema de primer orden a una entrada rampa	27
Ilustración 18: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=1$	28
Ilustración 19: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=0.6$	28
Ilustración 20: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=0.1$	28
Ilustración 21: Sistema de segundo orden	30
Ilustración 22: Respuesta al escalón unitario del sistema anterior	31
Ilustración 23: Sistema con control realimentado	31
Ilustración 24: Sistema lineal de lazo cerrado	35
Ilustración 25: Control en lazo cerrado	39
Ilustración 26: Asíntotas del lugar de las raíces	42
Ilustración 27: Diagrama de Bode	44
Ilustración 28: Enunciado del primer ejemplo	46
Ilustración 29: Señal de escalón unitario generada por Matlab.....	49
Ilustración 30: Señal de impulso unitario generada por Matlab	49
Ilustración 31: Señal de rampa unitaria generada por Matlab.....	50
Ilustración 32: Escalón unitario sin el comando step	51

Ilustración 33: Impulso unitario sin el comando impulse	52
Ilustración 34: Impulso unitario	53
Ilustración 35: Escalón unitario en Sysquake	54
Ilustración 36: Impulso unitario en Sysquake	54
Ilustración 37: Rampa unitaria en Sysquake	54
Ilustración 38: Enunciado del segundo ejemplo	55
Ilustración 39: Grafica de los polos en Matlab.....	57
Ilustración 40: Graficas según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces en Matlab	58
Ilustración 41: Grafica de los polos en Sysquake	61
Ilustración 42: Graficas según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces en Sysquake	63
Ilustración 43: Ejemplo interactivo de sistema de segundo orden	65
Ilustración 44: Ejemplo interactivo del estudio de estabilidad	67

INDICE DE TABLAS

Tabla 1: Variables through y across para sistemas físicos.....	8
Tabla 2: Ecuaciones diferenciales de almacenamiento inductivo.....	8
Tabla 3: Ecuaciones diferenciales de almacenamiento capacitivo	8
Tabla 4: Ecuaciones diferenciales de disipadores de energía	9
Tabla 5: Pares importantes de transformadas de Laplace	13
Tabla 6: Transformaciones de diagramas de bloques	16
Tabla 7: Relación entre la sobreoscilación y ξ	29
Tabla 8: Tabla de errores en estado estable con entradas y realimentación unitaria	34
Tabla 9: Los valores de cada letra del NIA.....	46

1. INTRODUCCION

1.1. RESUMEN

Vamos a conocer que son los sistemas de control automático, pero para ello, tenemos que entender previamente que es un sistema de control.

Un sistema de control lo podemos encontrar en casi todos los aspectos de nuestra vida. Se puede utilizar para referirse a circunstancias puramente humanas ("lo tengo todo bajo control"), o a una interacción hombre-maquina (conducir un automóvil, se supone que "controlas" el vehículo para no tener un accidente), y finalmente puede hacer alusión únicamente a maquinas (control de temperatura de una casa, velocidad de giro de un motor, etc.). Con esta idea en mente, podemos definir un sistema de control como:

Un conjunto de técnicas y estrategias encargadas de administrar, ordenar, dirigir o regular el comportamiento de una o varias variables que puede ser medidas (*Cap1_control automatico*, 2009)

Sabiendo que son los sistemas de control, podemos definir el sistema de control automático, de una manera más clara, como:

Un conjunto de técnicas que permiten implantar estrategias para mantener condiciones físicas, o cantidades de variables medibles en valores deseados.

Es muy importante la implementación de sistemas de control automático, ya que, permiten reducir los costos asociados a la generación de bienes y servicios. A su vez, mejoran la calidad y los volúmenes de producción de las plantas industriales, lo que permite ahorrar tiempo y optimizar el control de los procesos. Asimismo, aumentan considerablemente la seguridad de los procesos, ya que minimizan la interacción humana con ciertos equipos que implican riesgos laborales.

Sin embargo, también presentan algunas desventajas como:

- Se requieren de equipos computarizados para implementar estos sistemas.
- Personal capacitado para el uso de ciertos elementos.
- En algunos casos, su elevado precio.
- Uso de energía eléctrica en la mayoría de los casos.

(Noguera, 2020)

La metodología de un sistema de control incluye los siguientes pasos: definición del problema, modelado del sistema, diseño del controlador, simulación y análisis, implementación, ajuste y calibración, y monitoreo y mantenimiento. Estos pasos permiten un enfoque sistemático para lograr un diseño y funcionamiento óptimo del sistema de control. Sin embargo, es importante tener en cuenta que la metodología puede variar según el sistema específico y las necesidades del proyecto. Por consiguiente, el estudiante debe conocer y comprender cuales son las principales características del proyecto que se quiera desarrollar.

En este TFG vamos a presentar el diseño y desarrollo en Sysquake, una herramienta software interactiva que permite enseñar/aprender las características de un sistema de control automático. También se han incluido el diseño y la implementación de la herramienta, como ejemplos de uso.

1.2. PALABRAS CLAVE

Sistemas de control automático, Sysquake, Señales de entrada, Estabilidad

1.3. ABSTRACT

Let's understand what automatic control systems are, but for that, we need to first understand what a control system is.

A control system can be found in almost every aspect of our lives. It can refer to purely human circumstances (*I have everything under control"), or to human-machine interaction (driving a car, where you are supposed to "control" the vehicle to avoid accidents), and it can also exclusively refer to machines (controlling the temperature of a house, the rotational speed of a motor, etc.). With this idea in mind, we can define a control system as:

"A set of techniques and strategies responsible for managing, organizing, directing, or regulating the behavior of one or several variables that can be measured." (*Cap1_control automatico*, 2009)

Knowing what control systems are, we can define an automatic control system in a clearer way as:

"A set of techniques that enable the implementation of strategies to maintain physical conditions or measurable variable quantities at desired values."

The implementation of automatic control systems is highly important as they allow for cost reduction associated with the generation of goods and services. Additionally, they improve the quality and production volumes of industrial plants, saving time and optimizing process control. Furthermore, they significantly enhance process safety by minimizing human interaction with equipment that involves occupational risks.

However, they also present some disadvantages, such as:

- The requirement of computerized equipment to implement these systems.
 - The need for trained personnel to operate certain components.
 - In some cases, their high cost.
 - The use of electrical energy in the majority of cases
- (Noguera, 2020)

The methodology of a control system includes the following steps: problem definition, system modeling, controller design, simulation and analysis, implementation, adjustment and calibration, and monitoring and maintenance. These steps allow for a systematic approach to achieve optimal design and operation of the control system. However, it is important to note that the methodology can vary depending on the specific system and project requirements. Therefore, the student should be aware of and understand the main characteristics of the project they want to develop.

In this Bachelor's thesis, we will present the design and development using Sysquake, an interactive software tool that enables teaching/learning of the characteristics of an automatic control system. The design and implementation of the tool have also been included as examples of its use.

1.3.1. Keys words

Automatic control systems, Sysquake, Input signals, Stability

1.4. PROLOGO

Día a día la mayoría de las aplicaciones utilizadas para el ámbito universitario son cada vez más complejas de manejar, lo que conlleva al estudiante a la desesperación y frustración. Es por eso, que muchos de ellos dejan de poner interés en algo que les cuesta entender. Por este motivo, vamos a investigar que software didáctico puede ser usado para ayudar a comprender los problemas de regulación automática y facilitar así la vida al estudiante.

En este trabajo nos vamos a centrar en la rama de la ingeniería, ya que, el programa del que vamos a hablar, Sysquake, está especializado el control y regulación.

Para entender el contexto de este TFG, lo primero es conocer la empresa que lleva a cabo el desarrollo. Calerga Sarl es una empresa privada suiza creada el 11 de diciembre de 2001 por Yves Piguet y Francesco Mondada. Encargada de acoger proyectos privados específicos para actividades en Suiza. Calerga es bien conocido por Sysquake, un software científico con excelentes capacidades de interactividad que ayudan a comprender las matemáticas, la física y la ingeniería y permiten el diseño rápido de sistemas técnicos de alto rendimiento.

Una de las ventajas de Sysquake es que tiene una base de código común con el resto de las aplicaciones de Calerga, lo que garantiza su calidad a través de extensas pruebas en diferentes plataformas de hardware y software. Esto se debe a que comparten una sólida base científica que proviene de la experiencia de sus desarrolladores y la aplicación óptima de las nuevas tecnologías.

El principal objetivo del software es realizar funciones gráficas incluyendo especificaciones de los sistemas dinámicos (como las respuestas de tiempo y frecuencia). Por ello, tiene un intérprete matemático muy rápido y la interfaz gráfica de usuario es muy sencilla e intuitiva. También permite la creación de aplicaciones independientes que se pueden redistribuir libremente, el cual, puede actuar como un servidor y aceptar solicitudes de otras aplicaciones para intercambiar datos y notificarles sobre las acciones del usuario.

(Sysquake, 2023)

1.5. OBJETIVOS

El objetivo de este TFG se pretende hacer una investigación del software Sysquake para implementarla en estudios o practicas universitarias. Para ello se hará un estudio detallado del programa, analizando todos los elementos que los componen. Por consiguiente, se deberá realizar diversas pruebas en el programa de diferentes sectores de trabajo. Las pruebas estarán compuestas de todo tipo de simulaciones, de los cuales deberemos garantizar resultados convenientes a los respectivos ensayos. Por último, llegaremos a una conclusión final:

- Que tan fiable y util es el software para estudiantes universitarios o similares.
- Cuanto te puede ayudar a tu vida academica.

1.6. ANTECEDENTES

En el campo del control automático, el aprendizaje práctico y la comprensión profunda de los conceptos teóricos son fundamentales para formar a ingenieros competentes en este ámbito. Para lograr este objetivo, es esencial contar con herramientas docentes efectivas que permitan a los estudiantes experimentar y visualizar los conceptos y principios del control automático en un entorno práctico y realista.

El profesor Javier Esteban Escaño (2022), de la Universidad Complutense de Madrid y la Universidad Nacional de Educación a Distancia, a través de su tesis "Desarrollo de una herramienta software interactiva en Sysquake para enseñar/aprender las características básicas de las señales PRBS y multiseno usadas en Identificación de Sistemas" (Javier Esteban Escaño, 2022) realiza una investigación en el diseño y características de dos de las señales de excitación más comunes en la identificación de sistemas, las señales binarias pseudo aleatorias de longitud máxima y las señales multiseno.

Dicho trabajo tiene como objetivo ilustrar las características en el dominio del tiempo y la frecuencia de las señales PRBS y multiseno. A la vez que diseña e implementa en Sysquake, una herramienta software interactiva que permita ilustrar los conceptos y decisiones fundamentales de la generación de señales que permiten la identificación de sistemas.

En ese sentido, el docente considera un creciente reconocimiento de la importancia de la identificación de sistemas y las múltiples aplicaciones que tiene en muchos ámbitos de la ciencia.

Este trabajo es pertinente con la investigación aquí planteada, ya que aborda herramientas interactivas para implementarla en estudios o prácticas universitarias. Interesa, en sobremanera, apreciar el diseño de las características que promueven la investigación, el análisis y la obtención de modelos matemáticos de sistemas dinámicos.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. MODELADO MATEMÁTICO DE LOS SISTEMAS

Para comprender y controlar sistemas complejos, hay que obtener modelos matemáticos cuantitativos de ellos. Por tanto, es necesario analizar las relaciones entre las variables del sistema y obtener un modelo matemático. Como los sistemas considerados son de naturaleza dinámica, las ecuaciones descriptivas son generalmente ecuaciones diferenciales. Además, si estas ecuaciones pueden linealizarse, entonces se puede utilizar la transformada de Laplace para simplificar el método de solución. En la práctica, por la complejidad de los sistemas y el desconocimiento de todos los factores relevantes, es necesario introducir hipótesis sobre la operación del sistema. Por tanto, a veces será útil considerar el sistema físico, delinear algunas hipótesis necesarias y linealizar el sistema.

Luego, empleando las leyes físicas que describen el sistema lineal equivalente, se pueden obtener un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales. Finalmente, utilizando herramientas matemáticas, como la transformada de Laplace, se obtiene una solución que describe la operación del sistema

2.1.1. Ecuaciones diferenciales de sistemas físicos

Las ecuaciones diferenciales que describen el funcionamiento dinámico de un sistema físico se obtienen utilizando las leyes físicas del proceso. Este método se aplica igualmente a sistemas mecánicos, eléctricos, de fluidos y termodinámicos. Por ejemplo, el sistema torsional resorte-masa de la Ilustración 1 con un par aplicado $T_a(t)$. Se supone que el resorte no tiene masa. Se desea medir el par $T_s(t)$ transmitido a la masa m . (Esteban Escaño, Javier, 2013)

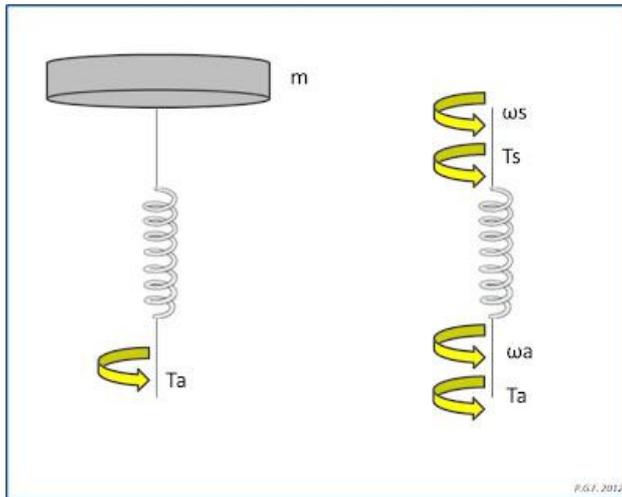


Ilustración 1: Resorte-masa (Automatismos Y Control, 2013)

Como el resorte no tiene masa, la suma de los pares que actúan sobre él deben ser cero.

$$T_a(t) - T_s(t) = 0$$

Lo que implica que:

$$T_a(t) = T_s(t)$$

Se ve de forma inmediata que el par externo $T_a(t)$ aplicado en el extremo del resorte se transmite a través de (fluye) a lo largo del resorte de torsión. Debido a esto se dice que el par es una variable through. De manera análoga, la diferencia en la velocidad angular asociada con el resorte de torsión es

$$w(t) = w_s(t) - w_a(t)$$

Así, la diferencia en la velocidad se mide entre los extremos del resorte y se conoce por ello como variable across. Estos mismos tipos de argumentos se pueden hacer para las variables físicas más comunes (tales como fuerza, corriente, volumen, caudal, etc.). En la Tabla 1 se proporciona un resumen de las variables through y across de los sistemas dinámicos, asociado con diferentes variables en esta sección en el Sistema Internacional de Unidades (SI).

Sistema	Elemento de variable through	Variable through integrada	Elemento variable de across	Variable across integrada
Eléctrico	Corriente, I	Carga, q	Voltaje, V	Flujo magnético, λ
Mecánico traslacional	Fuerza, F	Momento traslacional, P	Velocidad, v	Diferencia desplazamiento, y
Mecánico rotacional	Par, T	Momento angular, h	Velocidad angular, w	Diferencia de desplazamiento angular, θ

Fluido	Caudal de fluido, Q	Volumen, V	Presión, P	Momento de presión, γ
Térmico	Caudal de calor, q	Energía calorífica, H	Temperatura, T	

Tabla 1: Variables through y across para sistemas físicos

En las siguientes tablas(Tabla 2, 3,y 4) se proporciona un resumen de las ecuaciones descriptivas para elementos dinámicos lineales concentrados. Estas ecuaciones son descripciones idealizadas y sólo se aproximan a las condiciones reales (por ejemplo, cuando se usa una aproximación lineal concentrada para un elemento distribuido).

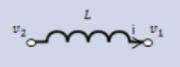
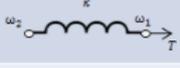
Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia \mathcal{P}	Símbolo
Almacenamiento inductivo	Inductancia eléctrica	$v_{21} = L \frac{di}{dt}$	$E = \frac{1}{2} Li^2$	
L=inductancia	Resorte traslacional	$v_{21} = \frac{1}{k} \frac{dF}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{F^2}{k}$	
1/k=rigidez recíproca de traslación	Resorte rotacional	$\omega_{21} = \frac{1}{k} \frac{dT}{dt}$	$E = \frac{1}{2} \frac{T^2}{k}$	
I=inertancia del fluido	Inercia del fluido	$P_{21} = I \frac{dQ}{dt}$	$E = \frac{1}{2} IQ^2$	

Tabla 2: Ecuaciones diferenciales de almacenamiento inductivo (Automatismos Y Control, 2013)

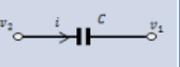
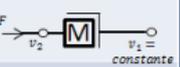
Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia \mathcal{P}	Símbolo
Almacenamiento capacitivo	Capacitancia eléctrica	$i = C \frac{dv_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C v_{21}^2$	
C=capacitancia	Masa traslacional	$F = M \frac{dv_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} M v_2^2$	
M=masa	Masa Rotacional	$T = J \frac{d\omega_2}{dt}$	$E = \frac{1}{2} J \omega_2^2$	
J=momento de inercia	Capacitancia del fluido	$Q = C_f \frac{dP_{21}}{dt}$	$E = \frac{1}{2} C_f P_{21}^2$	
Cf=capacitancia del fluido	Capacitancia térmica	$q = C_f \frac{dT_2}{dt}$	$E = C_f T_2$	
Ct=capacitancia térmica				

Tabla 3: Ecuaciones diferenciales de almacenamiento capacitivo (Automatismos Y Control, 2013)

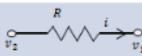
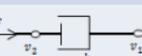
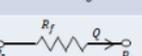
Tipo de elemento	Elemento físico	Ecuación descriptiva	Energía E o potencia \mathcal{P}	Símbolo
Disipadores de energía	Resistencia eléctrica	$i = \frac{1}{R} v_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R} v_{21}^2$	
R=resistencia	Amortiguador traslacional	$F = b v_{21}$	$\mathcal{P} = b v_{21}^2$	
b=fricción viscosa	Amortiguador rotacional	$T = b \omega_{21}$	$\mathcal{P} = b \omega_{21}^2$	
Rf=resistencia del fluido	Resistencia del fluido	$Q = \frac{1}{R_f} P_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_f} P_{21}^2$	
Rt=resistencia térmica	Resistencia térmica	$q = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	$\mathcal{P} = \frac{1}{R_t} \mathcal{T}_{21}$	

Tabla 4: Ecuaciones diferenciales de disipadores de energía (Automatismos Y Control, 2013)

El símbolo $v(t)$ se usa tanto para voltajes en circuitos eléctricos como para velocidad en sistemas mecánicos de traslación y se distingue según el contexto de cada ecuación diferencial. Para sistemas mecánicos se utilizan las leyes de Newton, y para los sistemas eléctricos, las leyes de Kirchhoff.

Por ejemplo, el sencillo sistema mecánico amortiguador-resorte-masa que se muestra en la Ilustración 2(a) se describe por la segunda ley de movimiento de Newton. (Este sistema podría representar, por ejemplo, un amortiguador de automóvil.) En la Ilustración 2(b) se muestra el diagrama de cuerpo libre de la masa M.

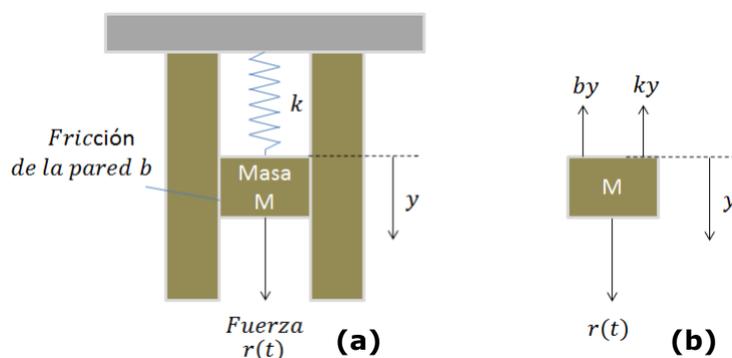


Ilustración 2: Sistema mecánico amortiguador-resorte-masa (Automatismos Y Control, 2013)

En este ejemplo resorte-masa-amortiguador, se modela la fricción de la pared como un rozamiento viscoso; esto es, la fuerza de fricción es linealmente proporcional a la velocidad de la masa. En realidad, la fuerza de fricción se puede comportar de una forma más complicada. Por ejemplo, la fricción de la pared se puede tratar como un rozamiento coulombiano. La fricción de Coulomb, también conocida como fricción seca, es una función no lineal de la velocidad de la masa y posee una discontinuidad alrededor de la velocidad cero. Para una superficie

deslizante bien lubricada, la fricción viscosa resulta apropiada y será utilizada aquí y en los ejemplos subsiguientes de resorte-masa-amortiguador.

Si se suman las fuerzas que actúan sobre M y se utiliza la segunda ley de Newton se obtiene:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky(t) = r(t)$$

donde k es la constante de un resorte ideal y b es la constante de fricción. La ecuación anterior es una ecuación diferencial lineal de segundo orden y de coeficientes constantes. De forma alternativa, se puede describir el circuito eléctrico RLC.

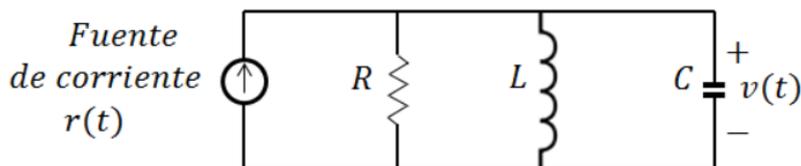


Ilustración 3: Circuito eléctrico RLC (Automatismos Y Control, 2013)

Utilizando la ley de la corriente de Kirchhoff, se obtiene la siguiente ecuación integro-diferencial:

$$\frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t v(t) = r(t)$$

La solución de la ecuación diferencial que describe el proceso puede obtenerse por métodos clásicos, tales como el uso de factores integrantes y el método de coeficientes indeterminados. Por ejemplo, cuando la masa se desplaza inicialmente una distancia $y(t) = y(0)$ y luego se suelta, la respuesta dinámica de un sistema subamortiguado se representa por una ecuación de la forma

$$y(t) = K_1 e^{\alpha_1 t} \text{sen}(\beta_1 t + \theta_1)$$

Una solución similar se obtiene para el voltaje del circuito RLC cuando éste está sujeto a una corriente constante $r(t) = I$. Entonces el voltaje es:

$$y(t) = K_2 e^{\alpha_2 t} \text{sen}(\beta_2 t + \theta_2)$$

En la Ilustración 4 se muestra una curva típica de voltaje de un circuito RLC subamortiguado.

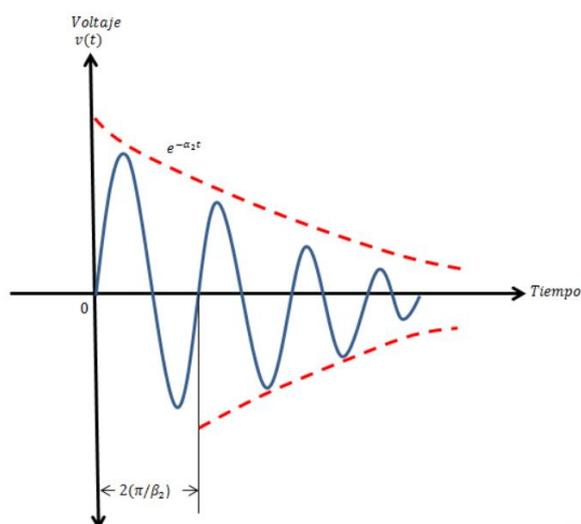


Ilustración 4: Gráfica de voltaje de un circuito RLC subamortiguado (Automatismos Y Control, 2013)

Para revelar aún más la estrecha semejanza entre las ecuaciones diferenciales para los sistemas eléctricos y mecánicos, se reescribe la ecuación anterior:

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky(t) = r(t)$$

En función de la velocidad:

$$y(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

Entonces se obtiene:

$$M \frac{dv(t)}{dt} + bv(t) + k \int_0^t v(t) dt = r(t)$$

Inmediatamente se observa la equivalencia entre las ecuaciones donde la velocidad $v(t)$ y el voltaje $v(t)$ son variables equivalentes, generalmente conocidas como variables análogas, y los sistemas son sistemas análogos. El concepto de sistema análogo es una técnica muy útil y poderosa para el modelado de sistemas. La analogía voltaje-velocidad a menudo conocida como analogía fuerza-corriente, es una analogía natural, ya que establece la equivalencia entre variables through y variables across de los sistemas eléctricos y mecánicos. (Automatismos Y Control, 2013)

2.1.2. Transformada de Laplace

La capacidad de obtener aproximaciones lineales de sistemas físicos permite al analista considerar el uso de la transformación de Laplace. El método de la transformada de Laplace sustituye por ecuaciones algebraicas de resolución relativamente fácil las ecuaciones diferenciales, más difíciles. La solución para la respuesta temporal se obtiene mediante las siguientes operaciones:

- Obtener las ecuaciones diferenciales.
- Obtener la transformada de Laplace de las ecuaciones diferenciales.
- Resolver la transformada algebraica resultante para la variable de interés.

La transformada de Laplace existe para ecuaciones diferenciales lineales para las que la transformación integral converge. Por tanto, a fin de que $f(t)$ sea transformable, es suficiente que

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_1 t} dt < \infty$$

Para algún número real positivo σ_1 . Si la magnitud de $f(t)$ es $|f(t)| < Me^{\alpha t}$ para todo t positivo, la integral convergerá para $\sigma_1 > \alpha$. Por tanto, la región de convergencia viene dada por $\infty > \sigma_1 > \alpha$ y σ_1 , se conoce como la abscisa de convergencia absoluta. Las señales que son físicamente realizables siempre tienen una transformada de Laplace. La transformación de Laplace para una función del tiempo, $f(t)$, es

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = L[f(t)]$$

La transformada inversa de Laplace se escribe como:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{-st} ds$$

Las integrales de transformación se han usado para deducir tablas de transformadas de Laplace que se suelen emplear para la gran mayoría de los problemas. En la Tabla 5 se dan algunos pares importantes de transformadas de Laplace.

TABLE 15.1 Properties of the Laplace transform.			TABLE 15.2 Laplace transform pairs.	
Property	$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
Linearity	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$	$\delta(t)$	1
Scaling	$f(at)$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
Time shift	$f(t-a)u(t-a)$	$e^{-as} F(s)$	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
Frequency shift	$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$	t	$\frac{1}{s^2}$
Time differentiation	$\frac{df}{dt}$	$sF(s) - f(0^-)$	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
	$\frac{d^2 f}{dt^2}$	$s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	$t e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^2}$
	$\frac{d^3 f}{dt^3}$	$s^3 F(s) - s^2 f(0^-) - sf'(0^-) - f''(0^-)$	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
	$\frac{d^n f}{dt^n}$	$s^n F(s) - s^{n-1} f(0^-) - s^{n-2} f'(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
Time integration	$\int_0^t f(t) dt$	$\frac{1}{s} F(s)$	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
Frequency differentiation	$t f(t)$	$-\frac{d}{ds} F(s)$	$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{s \sin \theta + \omega \cos \theta}{s^2 + \omega^2}$
Frequency integration	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^\infty F(s) ds$	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s \cos \theta - \omega \sin \theta}{s^2 + \omega^2}$
Time periodicity	$f(t) = f(t+nT)$	$\frac{F_1(s)}{1 - e^{-sT}}$	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Initial value	$f(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} s F(s)$	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
Final value	$f(\infty)$	$\lim_{s \rightarrow 0} s F(s)$		
Convolution	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(s) F_2(s)$		

Tabla 5: Pares importantes de transformadas de Laplace (Automatismos Y Control, 2013)

Alternativamente, la variable s de Laplace se puede considerar como el operador diferencial, de modo que

$$s \equiv \frac{d}{dt}$$

Entonces se tiene también el operador integral

$$\frac{1}{s} \equiv \int_0^t dt$$

(Modelos matematicos, 2013; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.1.3. La función de transferencia de sistemas lineales

La función de transferencia de un sistema se define como la transformada de Laplace de la variable de salida y la transformada de Laplace de la variable de entrada, suponiendo que todas las condiciones iniciales sean iguales a cero.

La función de transferencia:

- Puede definirse solamente para un sistema lineal y estacionario (parámetro constante), ya que, un sistema no estacionario tiene uno o más parámetros que varían en dicha forma y no puede utilizarse la transformada de Laplace.
- Es una descripción entrada-salida del comportamiento de un sistema.
- No proporciona información acerca de la estructura interna del sistema.
- Depende de las características del sistema y no de la magnitud y tipo de entrada.

Por ejemplo, la función de transferencia del circuito RC mostrado en la siguiente ilustración, se obtiene escribiendo la ecuación de Kirchoff del voltaje.

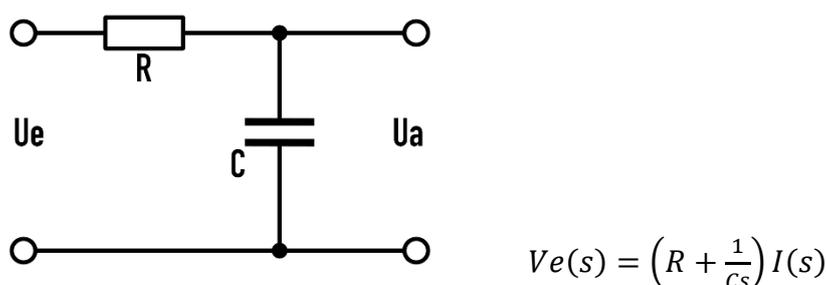


Ilustración 5: Circuito RC («Circuito RC», 2022)

Donde el voltaje de salida es:

$$Va(s) = I(s) \left(\frac{1}{Cs} \right)$$

Despejando la intensidad, en la ecuación del voltaje de entrada y sustituyéndola en la ecuación de voltaje de salida, nos da lo siguiente:

$$Va(s) = \frac{(1/Cs)Ve(s)}{R + 1/Cs}$$

Entonces se obtiene la función de transferencia como la relación $Va(s)/Ve(s)$ (salida/entrada), la cual es:

$$\frac{\text{Salida}}{\text{Entrada}} = G(s) = \frac{Va(s)}{Ve(s)} = \frac{1}{RCs + 1} = \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{\frac{1}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

Donde $\tau = RC$ es la constante de tiempo del circuito. El polo simple de la anterior función es $G(s) = -\frac{1}{\tau}$.

(«Circuito RC», 2022; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.1.4. Modelos de diagramas de bloque

Los sistemas dinámicos que constituyen los sistemas de control automático se representan matemáticamente mediante un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas. Como se ha indicado en las secciones previas, podemos suponer correctamente que la función de transferencia es una relación importante para la ingeniería de control.

La importancia de esta relación causa-efecto se hace evidente por el interés en representar las relaciones de las variables del sistema por medio de diagramas. La representación por diagrama de bloques para las relaciones de los sistemas predomina en la ingeniería de sistemas de control. Los diagramas de bloques consisten en bloques operacionales y unidireccionales que representan la función de transferencia de las variables de interés. En la siguiente ilustración se muestra un ejemplo de cómo es un diagrama de bloques.

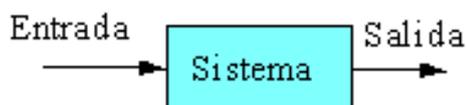


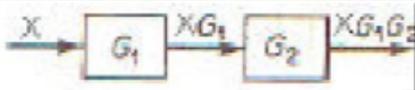
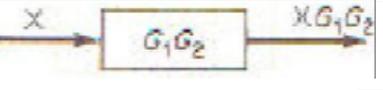
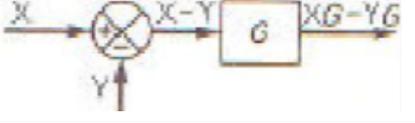
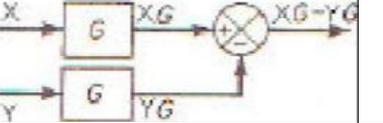
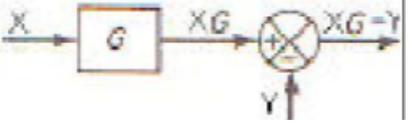
Ilustración 6: Diagrama de bloques (Moncada, 2020)

Si la variable de entrada, de la anterior ilustración, le nombramos $R(s)$ y el de salida $Y(s)$, usando las relaciones de las funciones de transferencia, se puede escribir la ecuación para la variable de salida.

$$Y(s) = G(s)R(s)$$

Siendo $G(s)$ el sistema del diagrama de bloque.

La representación de varios diagramas de bloques de un sistema dado a menudo puede reducirse a un diagrama de bloques simplificado con menos bloques que el original. Por tanto, existe transformaciones de diagramas de bloque, dependiendo de cómo vayan conectadas.

Transformación	Diagrama original	Diagrama equivalente
Combinación de bloques en cascada		
Movimiento de un punto de suma anterior a un bloque		
Movimiento de un punto de suma posterior a un bloque		

Movimiento de un punto separación posterior a un bloque		
Movimiento de un punto separación anterior a un bloque		
Eliminación de un lazo de realimentación		

Tabla 6: Transformaciones de diagramas de bloques (Yumpu.com, 2013)

Cuando dos bloques se conectan en cascada como en el ítem 5 de la anterior tabla, se supone que:

$$\text{Salida} = XG_1G_2$$

Permanece válido. Esto supone que cuando el primer bloque se conecta al segundo bloque, el efecto de carga del primero es despreciable. Desde el punto de vista matemático esta solución es correcta, pero se debe analizar también desde la perspectiva de la compatibilidad de los sistemas que se conectan.

(Esteban Escaño, Javier, 2013; Moncada, 2020; Yumpu.com, 2013)

2.1.5. Ejemplo de diseño

Para el diagrama de bloques mostrado en la siguiente ilustración, calcular las funciones de transferencia $G(s)$ y $H(s)$.

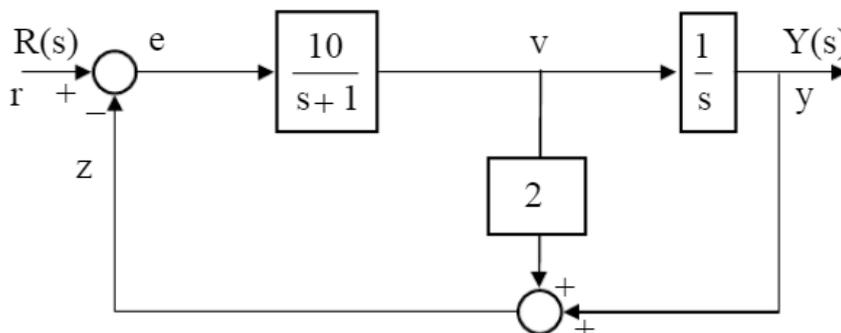
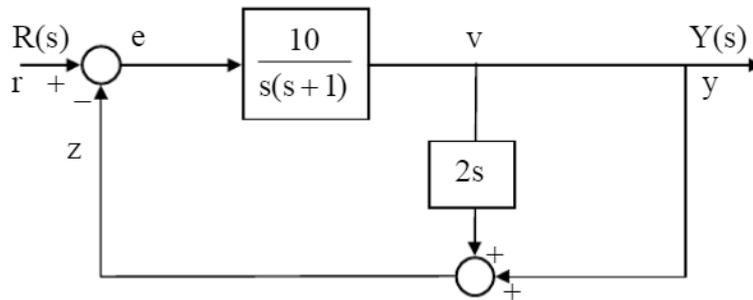


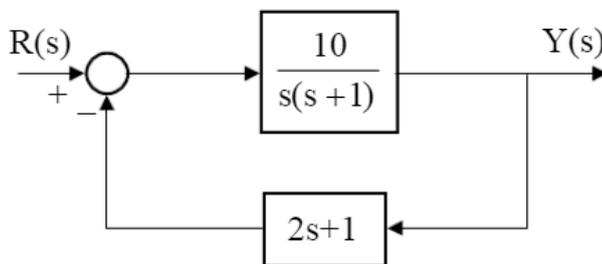
Ilustración 7: Ejemplo de diagramas de bloque (Ejercicios Resueltos Diagrama de Bloques - Problemas de Ingeniería de Sistemas, 2018)

Moviendo el último bloque delante del punto v:



(Ejercicios Resueltos Diagrama de Bloques - Problemas de Ingeniería de Sistemas, 2018)

Uniendo los elementos del sumador:



(Ejercicios Resueltos Diagrama de Bloques - Problemas de Ingeniería de Sistemas, 2018)

Donde la función de transferencia de lazo cerrado será:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{\frac{10}{s(s+1)}}{1 + \frac{10}{s(s+1)}(2s+1)} = \frac{10}{s^2 + 21s + 10}$$

(Ejercicios Resueltos Diagrama de Bloques - Problemas de Ingeniería de Sistemas, 2018)

2.2. SISTEMAS DE CONTROL CON REALIMENTACIÓN.

2.2.1. Características

En este capítulo, vamos a hablar un poco más de las características del sistema de control, tales como la sensibilidad a incertidumbres en el modelo, errores en estado estacionario, características de la respuesta transitoria para señales de prueba de entrada y rechazo a perturbaciones. Se analizará el papel importante de la señal de error del sistema. Esta señal se utiliza para controlar el proceso al utilizar la noción de realimentación. En general, el objetivo es minimizar la señal de error.

También se tratará la sensibilidad de un sistema para cambios en un parámetro, debido a que es deseable minimizar los efectos de la variación de parámetros no deseados. A continuación, se describirá el comportamiento transitorio de un sistema realimentado y se mostrará cómo se puede mejorar fácilmente.

Se desea reducir el efecto de las señales de entrada no deseadas, denominadas perturbaciones, sobre la señal de salida. Se mostrará cómo el diseño de un sistema de control puede reducir el impacto de las señales de perturbación. Por supuesto, los beneficios de un sistema de control vienen con un coste añadido. Se demostrará cómo el coste de utilizar realimentación en un sistema de control está asociado con la selección del dispositivo sensor de realimentación

2.2.1.1. Sistema de lazo abierto y lazo cerrado

Un sistema de control se definió como una interconexión de componentes que forman la configuración de un sistema, que proporcionará una respuesta deseada de éste. Dado que se conoce la respuesta deseada del sistema, se genera una señal proporcional al error entre la respuesta deseada y la real. La utilización de esta señal para controlar el proceso produce una secuencia de operaciones de lazo cerrado que se conoce como sistema de realimentación. Esta secuencia de operaciones de lazo cerrado se muestra en la Ilustración 8. A menudo, se necesita introducir la realimentación con la finalidad de mejorar los sistemas de control. Es interesante el hecho de que esto también suceda en los sistemas de la naturaleza, como los biológicos y fisiológicos; la realimentación es inherente a estos sistemas.

Por ejemplo, el sistema de control humano para el ritmo cardíaco es un sistema de control con realimentación.

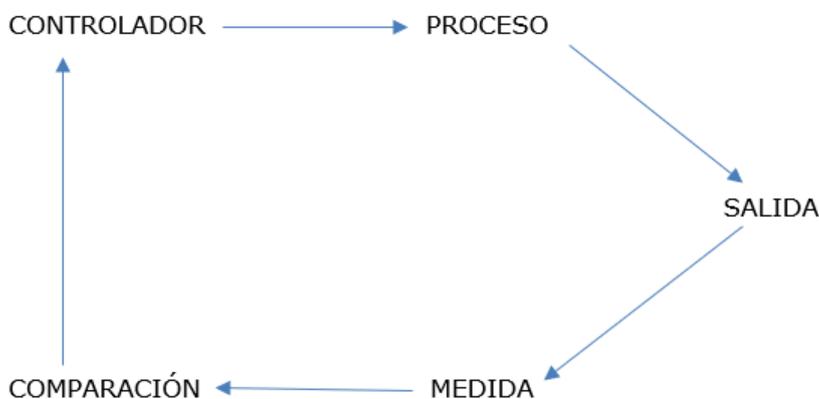


Ilustración 8: Proceso de un sistema con realimentación

En la Ilustración 9 se muestra un sistema sin realimentación, a menudo denominado sistema directo o sistema en lazo abierto. Un sistema en lazo abierto (directo) funciona sin realimentación y genera directamente la salida en respuesta a una señal de entrada.



Ilustración 9: Sistema de lazo abierto

En cambio, la Ilustración 10 muestra un sistema de control con realimentación negativa en lazo cerrado. Un sistema en lazo cerrado utiliza una medida de la señal de salida y una comparación con la salida deseada para generar una señal de error que se aplica al actuador.

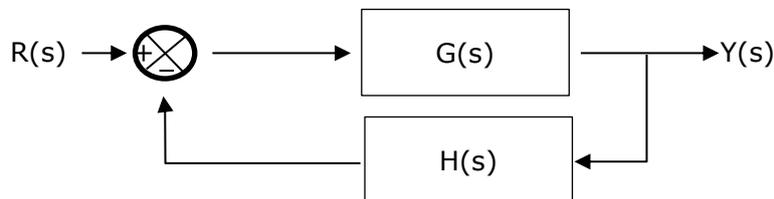


Ilustración 10: Sistema de lazo cerrado

En muchos casos, $H(s)$ es igual a 1 o una constante distinta de 1. La constante representa una conversión de unidades entre la variable de salida y la referencia dada en la entrada del sistema. En primer lugar, se va a considerar la condición de realimentación unitaria con $H(s) = 1$. Entonces

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - Y(s)]$$

Resolviendo para $Y(s)$, se tiene

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)}R(s)$$

La señal de error es

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)}R(s)$$

De este modo, para reducir el error, la magnitud de $[1 + G(s)]$ debe ser mucho mayor que 1 en el intervalo de s considerado.

Ahora se considera el caso donde $H(s) \neq 1$. La salida del sistema en lazo cerrado es

$$Y(s) = G(s)E(s) = G(s)[R(s) - H(s)Y(s)]$$

y por lo tanto,

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + H(s)G(s)}R(s)$$

Por consiguiente, la señal de error queda tal que así:

$$E(s) = \frac{1}{1 + H(s)G(s)} R(s)$$

La señal $E(s)$ proporciona una medida del error, esta medida, es cada vez más precisa cuando las dinámicas de $H(s)$ llegan a ser despreciables, por ello, para reducir dicho error la magnitud del denominador debe ser mucho mayor que la unidad en el intervalo de s considerado. (Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.2.1.2. Sensibilidad de los sistemas de control a variaciones en los parámetros

La sensibilidad de un sistema de control a las variaciones de los parámetros es de primordial importancia. Una ventaja importante de un sistema de control con realimentación de lazo cerrado es su capacidad para reducir la sensibilidad del sistema, ya que, percibe el cambio en la salida debido a los cambios del proceso e intenta corregirlos. Por ello, en el caso de lazo cerrado, si $GH(s) \gg 1$ para todas las frecuencias complejas de interés, se puede utilizar la siguiente ecuación para obtener

$$Y(s) \cong \frac{1}{H(s)} R(s)$$

Por lo tanto, la salida sólo está afectada por $H(s)$, que puede ser una constante. Si $H(s) = 1$, se tiene el resultado deseado; es decir, la salida es igual a la entrada. Sin embargo, antes de utilizar este método para todos los sistemas de control, se debe observar que el requisito de que $GH(s) \gg 1$ puede hacer que la respuesta del sistema sea altamente oscilatoria e incluso inestable. Pero el hecho de que conforme se aumenta la magnitud de la función de transferencia del lazo $G(s)H(s)$ se reduce el efecto de $G(s)$ en la salida, es un concepto por demás útil. Por tanto, la primera ventaja de un sistema con realimentación es que el efecto de la variación de los parámetros del proceso, $G(s)$, se reduce.

2.2.1.2.1. Amplificador realimentado

Un amplificador utilizado en muchas aplicaciones tiene una ganancia $-K_a$, como se muestra en la Ilustración 11.

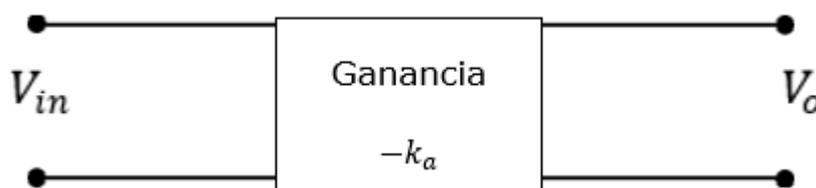


Ilustración 11: Amplificador en lazo abierto

Donde el voltaje de salida es: $V_o = -k_a V_{in}$

A menudo se añade realimentación utilizando un potenciómetro R_p , como se muestra en la siguiente ilustración.

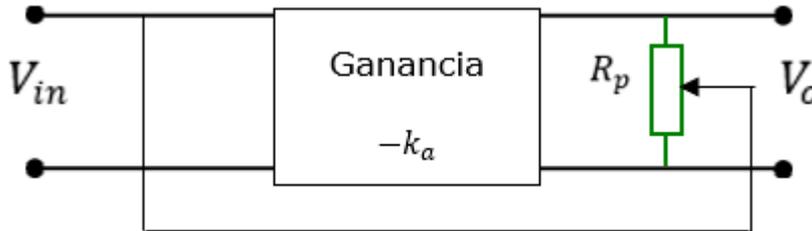


Ilustración 12: Amplificador con realimentación negativa

La función de transferencia del amplificador sin realimentación es

$$T = -k_a$$

y la sensibilidad a cambios en la ganancia del amplificador es

$$S = 1$$

La posición del cursor del potenciómetro R_p , provoca que se realimente una parte de la tensión de salida a la que llamamos β

La función de transferencia de lazo cerrado del amplificador realimentado es

$$T(s) = \frac{-k_a}{1 + k_a \beta}$$

La sensibilidad del amplificador realimentado en lazo cerrado es

$$S = \frac{1}{1 + k_a \beta}$$

(Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.2.1.3. Señales de perturbación

Uno de los efectos más importantes de la realimentación en un sistema de control es el control y eliminación parcial de las señales de perturbación. Una señal de perturbación es una señal de entrada no deseada que afecta a la señal de salida del sistema. Muchos sistemas de control están sujetos a señales extrañas de perturbación que hacen que el sistema proporcione una salida inexacta. Los amplificadores electrónicos tienen ruidos inherentes generados dentro de los circuitos integrados o los transistores; las antenas de radar están expuestas a ráfagas de viento, un vehículo en movimiento está sometido a un rozamiento del terreno e inclinación variables y muchos sistemas generan señales de distorsión no deseadas debido a elementos no lineales.

Los sistemas con realimentación tienen el aspecto beneficioso de que el efecto de distorsión, ruido y perturbaciones no deseadas puede reducirse efectivamente, e incluso eliminarse al cabo de cierto tiempo.

Ejemplos de estas señales son el voltaje de ruido térmico en circuitos electrónicos y el ruido de conmutación en motores eléctricos. Por lo tanto, en el diseño de sistemas de control, se deben dar consideraciones para que el sistema sea insensible al ruido y perturbaciones externas y sensibles a los comandos de entrada.

El efecto de la realimentación sobre el ruido y perturbaciones depende mucho en que parte del sistema ocurren las señales exógenas. No se pueden obtener conclusiones generales, pero en muchas situaciones, la realimentación puede reducir los efectos del ruido y las perturbaciones en el desempeño del sistema. En referencia al sistema de la Ilustración 13, en la que r denota la señal de comando y p es la señal de ruido, en ausencia de realimentación, $H = 0$, la salida y debida a p actuando sola es:

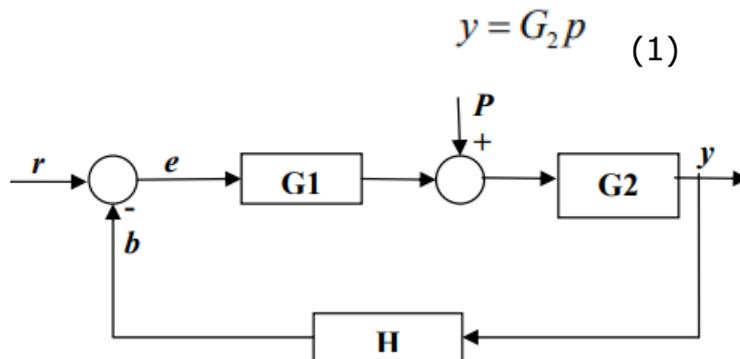


Ilustración 13: Sistema realimentado con Señal de Perturbación. (Berenguer, 2007)

Con la presencia de realimentación, la salida del sistema debido a p actuando sola es:

$$y = \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H} p \quad (2)$$

Al comparar la ecuación (2) con la (1) se observa que la componente de ruido en la salida de la ecuación (2) se reduce por el factor $1 + G_1 G_2 H$ siempre y cuando, éste último sea mayor que la unidad y el sistema permanezca estable.

En conclusión, la realimentación puede reducir el efecto del ruido. Pero la realimentación también tiene efectos sobre el ancho de banda, la impedancia, la respuesta transitoria y la respuesta en frecuencia.

(Berenguer, 2007; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.2.2. Comportamiento

Una de las ventajas de los sistemas realimentados es su capacidad para ajustar la respuesta del sistema. Esta respuesta la podemos dividir en dos tipos:

- Respuesta transitoria: es aquella que se tiene inmediatamente después de que se haya producido un cambio en la entrada.
- Respuesta en régimen permanente: es aquella que queda después de que haya pasado el periodo transitorio.

De forma que en este capítulo se van a estudiar fundamentalmente los cambios que se producen en la respuesta de un sistema frente a los cambios que se generen en su entrada. Siempre desde la perspectiva de los sistemas realimentados.

2.2.2.1. Señales de entrada de prueba

Hemos dicho en la introducción que el análisis de los sistemas en el dominio del tiempo se va a realizar viendo cómo cambia el sistema frente a un cambio en la entrada. Será importante, definir todas las posibles señales de entrada, cuáles van a ser más interesantes y qué información puede aportar cada una de ellas.

2.2.2.1.1. Señal impulso unitario

La primera de las señales que vamos a considerar es la denominada "impulso unitario" que es una señal rectangular que se puede definir como:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde $\varepsilon > 0$. A medida que se aproxima a cero, la función $f(t)$ se aproxima a la función $\delta(t)$, que tiene las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Esta señal, aunque no se puede implementar, ya que supone tener un valor de señal infinito durante un tiempo cercano a cero y que además contenga una cantidad de energía limitada, permite el análisis de ciertas características del sistema. Por ejemplo, una de ellas es el estudio de la estabilidad, ya que, si la entrada que proporcionamos tiene una energía acotada, la salida del sistema partiendo de cero debería volver a cero en algún momento y si no lo hace es porque es inestable.

2.2.2.1.2. Señal escalón unitario

El resto de las señales de prueba que usaremos tienen la forma general

$$r(t) = t^n; \quad n = 0,1,2$$

La transformada de Laplace de este tipo de señal es

$$R(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

Para el valor de $n=0$ obtenemos la señal escalón unitario

$$u(t) = t^0 = 1$$

$$U(s) = \frac{1}{s}$$

Los sistemas reales trabajarán con señales escalón de amplitud diferente a la unitaria, si por ejemplo la amplitud del escalón es a

$$r(t) = at^0 = a \rightarrow R(s) = a \frac{1}{s}$$

Un escalón unitario representa la entrada que se produce en un sistema cuando, estando parado o en estado inicial nulo, lo conectamos y le asignamos una entrada de consigna. Por ejemplo, en un control de temperatura marcamos que la temperatura tiene que ser de 500 °C e iniciamos el sistema, o en un control de velocidad asignamos una velocidad de giro de 100 rad/s.

La Ilustración 14 muestra la respuesta temporal de señal escalón unitario. Hay que hacer notar que antes del instante cero, la señal toma el valor cero.

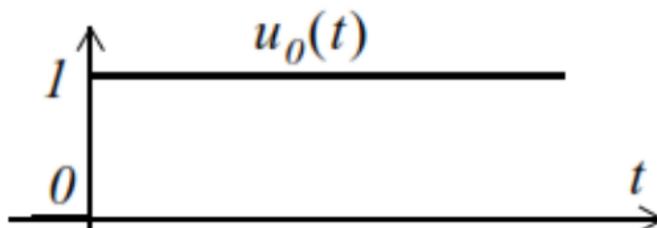


Ilustración 14: Escalón unitario (Juárez, 2010)

Esta señal será de las más importantes a la hora de determinar el comportamiento temporal de un sistema, ya que definirá el error del sistema en régimen permanente a una entrada constante y también la usaremos para ajustar el error en régimen transitorio.

2.2.2.1.3. Señal en rampa unitaria

En este caso la señal utilizada será:

$$u(t) = t^1 = t$$

$$U(s) = \frac{1}{s^2}$$

La forma que tiene la señal es la siguiente:

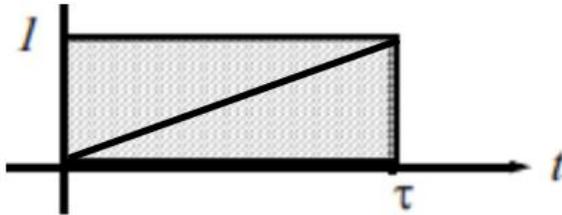


Ilustración 15: Señal rampa unitaria (Juárez, 2010)

Igual que en el caso anterior, la señal podría ser no unitaria y en este caso lo que cambiará será la pendiente de la rampa que en vez de tener un ángulo de 45° tendrá otro valor cualquiera.

La rampa unitaria va a ser interesante para descubrir el comportamiento del sistema ante cambio de la entrada a un ritmo constante. Por ejemplo, tenemos un sistema en que necesitamos que la temperatura cambie entre a y b de forma lineal en un tiempo t, para conseguir un determinado efecto en el horneado de una pieza o queremos controlar la velocidad de un vehículo mantenido constante la aceleración, esto supondrá mantener la velocidad cambiando de forma constante.

El análisis del comportamiento transitorio de un sistema con una señal de este tipo es demasiado complejo para hacerlo de forma analítica, de forma que nos limitaremos al comportamiento en régimen permanente y a la simulación del transitorio con herramientas informáticas.

(Esteban Escaño, Javier, 2013; Juárez, 2010)

2.2.2.2. Comportamiento temporal de los sistemas

La función de transferencia de un sistema proporciona mucha información útil sobre el comportamiento del mismo, en los siguientes apartados vamos a estudiar diferentes funciones de transferencia de varios sistemas de complejidad creciente y vamos a ver la influencia que presentan los polos y ceros de la función de transferencia sobre su comportamiento.

2.2.2.2.1. Sistemas de primer orden

Llamamos sistema de primer orden simple a uno que tiene un único polo, la forma de la función de transferencia será:

$$G(s) = \frac{k}{s + a}$$

El primer objetivo será estudiar respuesta de este sistema frente a las señales de entrada estándar para determinar su comportamiento.

La respuesta temporal del sistema frente a una entrada escalón unitario será:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s + a} \rightarrow Y(s) = \frac{k}{s + a} R(s) = \frac{k}{s + a} \frac{1}{s} \rightarrow y(t) = \frac{k}{a} (1 - e^{-at})$$

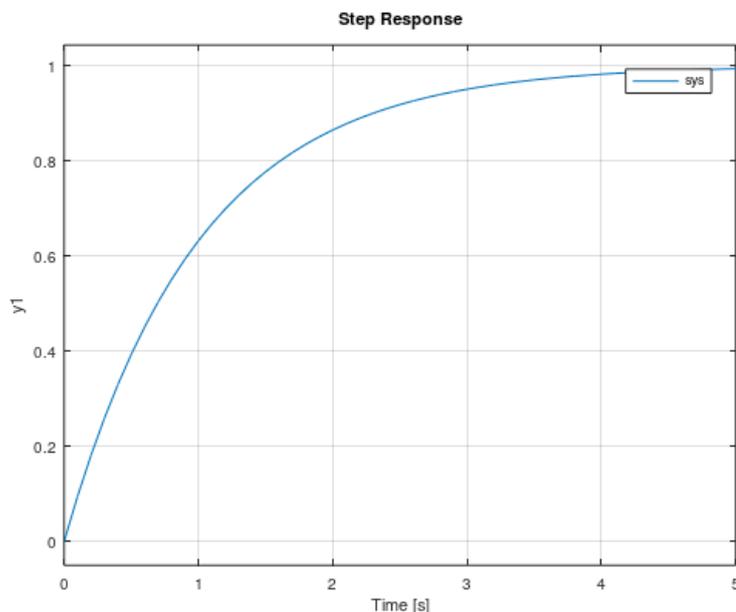


Ilustración 16: Respuesta temporal de un sistema de primer orden a una entrada escalón (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

Para el sistema anterior, el valor régimen permanente será:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{s + a} \frac{1}{s} = \frac{k}{a}$$

Se establece el tiempo de respuesta (t_r) como el tiempo que el sistema tarda en llegar al 98% del valor en régimen permanente.

$$0.98 \frac{k}{a} = \frac{k}{a} (1 - e^{-at_r}) \rightarrow e^{-at_r} = 0.02 \rightarrow at_r = 3.912 \rightarrow t_r \cong \frac{4}{a}$$

Si la señal de prueba que usamos es una señal en rampa unitaria, el comportamiento temporal del sistema será

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k}{s+a} \rightarrow Y(s) = \frac{k}{s+a} R(s) = \frac{k}{s+a} \frac{1}{s^2} \rightarrow y(t) = \frac{k}{a} \left[t - \left(\frac{1 - e^{-at}}{a} \right) \right]$$

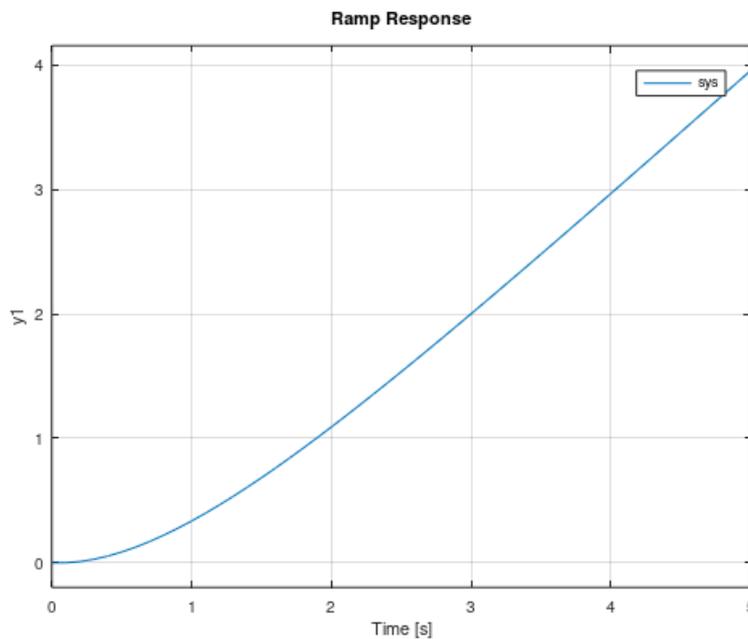


Ilustración 17: Respuesta temporal de un sistema de primer orden a una entrada rampa (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

2.2.2.2.2. Sistemas de segundo orden

El siguiente tipo de sistema que se va a considerar es uno de segundo orden, ósea con dos polos. La salida del lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} R(s)$$

Al valor de ω_n le llamamos frecuencia natural del polo de segundo orden, al valor ξ le denominamos coeficiente de amortiguamiento.

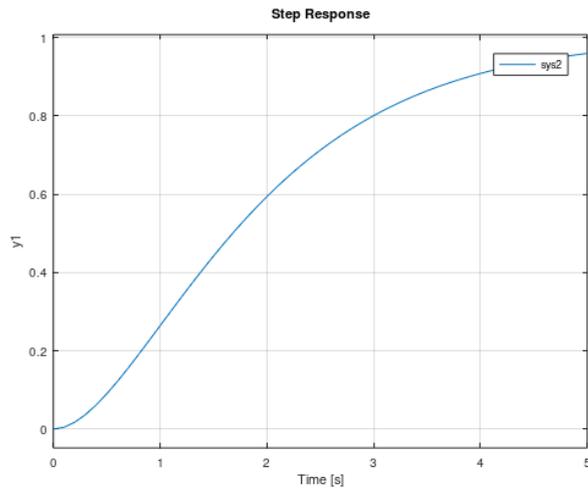


Ilustración 18: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=1$ (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

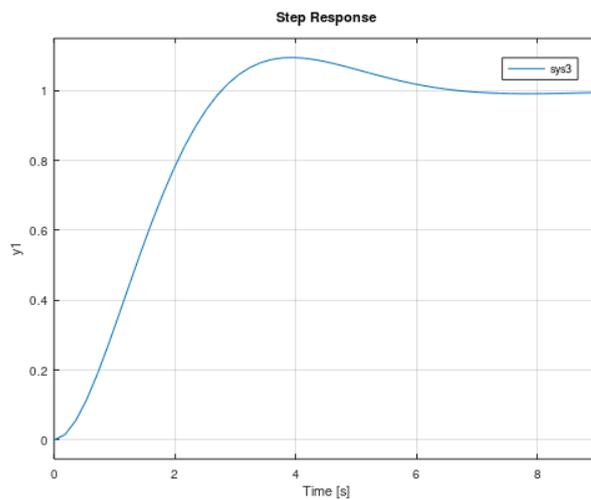


Ilustración 19: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=0.6$ (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

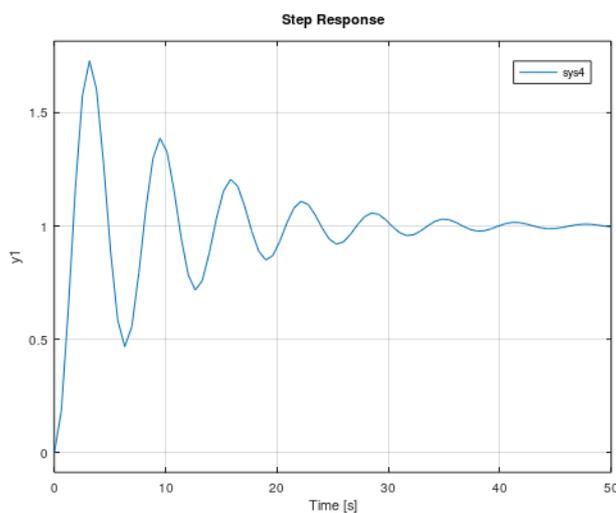


Ilustración 20: Respuesta de un sistema de segundo orden con $\xi=0.1$ (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

En las ilustraciones anteriores se puede apreciar el efecto del parámetro ξ sobre la respuesta del sistema de segundo orden, vemos que afecta sobre todo a dos variables: el tiempo de respuesta y la sobreoscilación.

El parámetro sobreoscilación, podemos definirlo como el porcentaje máximo que toma la salida respecto a su valor final. De las figuras anteriores se aprecia que este parámetro aumenta conforme disminuye el valor de ξ , teniendo que para $\xi = 1$ la sobreoscilación es nula y para $\xi = 0.1$ la sobreoscilación supera el 70%

Los polos de la función de transferencia del sistema de segundo orden:

$$s = \sigma \pm j\omega_d = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

El cálculo del tiempo de respuesta del sistema no es tan sencillo como en el caso del sistema de primer orden, de forma que presentamos únicamente su resultado aproximado.

$$t_r = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

La relación entre la sobreoscilación y el valor de ξ es todavía más compleja, de forma que en la práctica se suelen usar curvas normalizadas o tablas para determinar su valor.

$$S.O. = 100 * e^{-\xi \frac{\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Sobreoscilación	ξ
0%	1
5%	0.7
10%	0.6
20%	0.45
30%	0.36
40%	0.28
50%	0.22
60%	0.16
70%	0.11
80%	0.08

Tabla 7: Relación entre la sobreoscilación y ξ

(Esteban Escaño, Javier, 2013; *Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España*, 2023)

2.2.2.3. Selección de parámetros

En el siguiente sistema, se pretende obtener los valores de k y p para que el sistema cumpla unos requisitos de estado transitorio concretos.

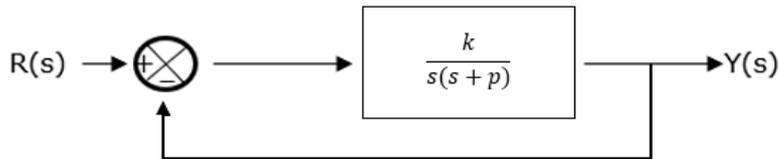


Ilustración 21: Sistema de segundo orden

La función de transferencia del sistema de lazo cerrado será:

$$G(s) = \frac{k}{s(s+p) + k} = \frac{k}{s^2 + ps + k}$$

Vamos a suponer que se desea un sistema con una sobreoscilación menor o igual al 10% y un tiempo de respuesta inferior a 0.5" para una entrada de tipo escalón unitario.

Un sistema de segundo orden normalizado tendrá una función de transferencia de la forma

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde las raíces del citado sistema serán:

$$s = \sigma \pm j\omega_d = \xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1 - \xi^2}$$

El tiempo de respuesta al 2% tomara el valor

$$t_r = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

Teniendo en cuenta la tabla 7, si tomamos como valor de sobreoscilación el 10%, el valor de $\xi = 0.6$, dado que el $t_r \leq 0.5$ ", tenemos $\xi\omega_n \geq 8$, por lo que $\omega_n \geq 13.33$

Por identificación con el sistema propuesto

$$\omega_n^2 = k = 178 ; 2\xi\omega_n = p = 16$$

Podemos ver la respuesta obtenida en la siguiente ilustración, que verifica los supuestos exigidos para el sistema

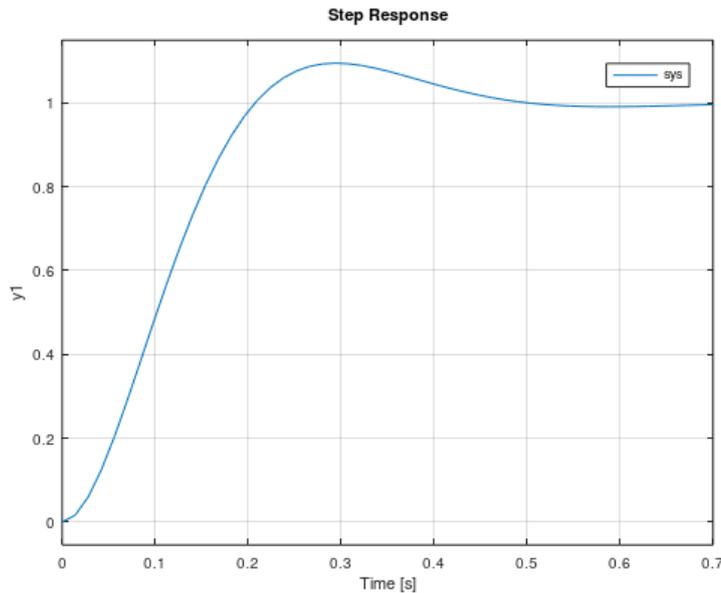


Ilustración 22: Respuesta al escalón unitario del sistema anterior (Gráficas - MATLAB & Simulink - MathWorks España, 2023)

2.2.2.4. Error en estado estacionario

Una de las razones más importantes de utilizar un sistema con realimentación, a pesar de su costo y su complejidad, es la reducción del error del sistema en estado estacionario. La explicación de este suceso se hará con el siguiente ejemplo:

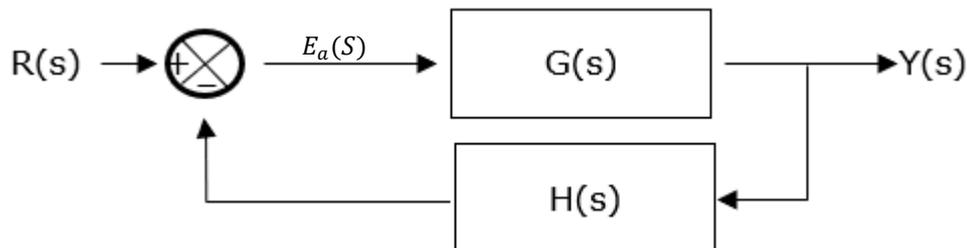


Ilustración 23: Sistema con control realimentado

La señal de actuación, que es una medida del error del sistema, se representa como $E_a(s)$. No obstante, el error real del sistema es $E(s) = R(s) - Y(s)$. A partir de la ilustración anterior obtenemos:

$$E(s) = R(s) - \frac{G(s)}{1 + GH(s)} R(s) = \frac{1 + GH(s) - G(s)}{1 + GH(s)} R(s)$$

El error del sistema es igual a la señal $E_a(s)$ cuando $H(s) = 1$:

$$E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

El error en estado estacionario, cuando $H(s)=1$, es entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} R(s)$$

Gracias a que se ha determinado el error del sistema en estado estacionario para las tres entradas estándar de prueba en un sistema de realimentación unitaria [$H(s)=1$]

Podemos clasificar el error en estado permanente para definir el mérito del sistema de control. Entre mayor sea la ganancia menos error en estado estacionario se tiene

- Constante k_p , de Error Estático de "posición"
- Constante k_v , de Error Estático de "velocidad"
- Constante k_a , de Error Estático de "aceleración"

2.2.2.4.1. Error estático de "posición"

Error en estado estable para una entrada escalón; $R(s)=A/s$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{A}{s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{1 + G(s)} = \frac{A}{1 + G(0)}$$

Se define:

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = G(0)$$

Por lo tanto:

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p}$$

Una vez conocemos la constante de error estático procedemos a encontrar el error

Sistema de **tipo 0** ($n=0$)

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{k \prod (s + z_i)}{s^n \prod (s + p_j)} = K$$

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} = \frac{A}{1 + K}$$

Sistema de **tipo 1** ($n=1$)

$$k_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \frac{k \prod (s + z_i)}{s^n \prod (s + p_j)} = \infty$$

$$e_{ss} = \frac{A}{1 + k_p} = \frac{A}{1 + \infty} = 0 \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

2.2.2.4.2. Error estático de "velocidad"

Error en estado estable para una entrada rampa; $R(s)=A/s^2$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{A}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s + sG(s)} = \frac{A}{sG(s)}$$

Se define:

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG(s)$$

Por lo tanto:

$$e_{ss} = \frac{A}{k_v}$$

Una vez conocemos la constante de error estático procedemos a encontrar el error

Sistema tipo 0

$$e_{ss} = \frac{A}{k_v} = \frac{A}{0} = \infty$$

Sistema tipo 1

$$e_{ss} = \frac{A}{k_v} = \frac{A}{K}$$

Sistema tipo 2 o mayor

$$e_{ss} = \frac{A}{\infty} = 0$$

2.2.2.4.3. Error estático de "aceleración"

Error en estado estable para una entrada parabólica; $R(s)=A/s^3$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + G(s)} \frac{A}{s^3} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{A}{s^2 + s^2G(s)} = \frac{A}{s^2G(s)}$$

Se define:

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2G(s)$$

Por lo tanto:

$$e_{ss} = \frac{A}{k_a}$$

Una vez conocemos la constante de error estático procedemos a encontrar el error

Sistema tipo 0 y tipo 1

$$e_{ss} = \frac{A}{k_a} = \frac{A}{0} = \infty$$

Sistema tipo 2

$$e_{ss} = \frac{A}{k_a} = \frac{A}{K}$$

Sistema tipo 3 o mayor

$$e_{ss} = \frac{A}{\infty} = 0$$

Los sistemas de control se describen frecuentemente en función de su tipo y las constantes de error, k_p, k_v, k_a . Las definiciones para las constantes de error y el error en estado estacionario para las tres entradas de tipo unitario se resumen en la siguiente tabla.

Tipo del sistema	Escalón unitario	Rampa unitaria	Parábola unitaria
0	$e_p = \frac{A}{1 + k_p}$	∞	∞
1	0	$e_v = \frac{A}{k_v}$	∞
2	0	0	$e_a = \frac{A}{k_a}$
3	0	0	0

Tabla 8: Tabla de errores en estado estable con entradas y realimentación unitaria (C, 2019c)

(C, 2019c; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.3. ESTABILIDAD DE SISTEMAS LINEALES CON REALIMENTACIÓN

Un sistema estable se define como aquel que tiene una respuesta limitada. Esto es, se dice que el sistema es estable si estando sujeto a una entrada o perturbación limitada, su respuesta es de magnitud limitada. La estabilidad de un sistema dinámico se define de forma semejante. La respuesta a un desplazamiento, o condición inicial, dará como resultado una respuesta decreciente, neutral o creciente. Específicamente, por la definición de estabilidad se deduce que un sistema lineal es estable si, y solamente si, el valor absoluto de su respuesta a un impulso, $g(t)$, integrada sobre un intervalo finito, es finito. Es decir, según la integral de convolución, para una entrada limitada, se requiere que $\int_0^{\infty} |g(t)| dt$ sea finita. (Esteban Escaño, Javier, 2013)

Por ello, uno de los problemas más importantes que deben ser solucionados en un sistema de control lineal es la estabilidad del mismo.

Por lo tanto, se hace imprescindible conocer, qué condiciones se deben cumplir para que el sistema se vuelva inestable. Y de cumplirse esto (condición no deseada) entonces que se puede hacer para estabilizar el sistema.

Hasta este punto, hemos visto que la estabilidad de un sistema es regida por la ubicación de los polos. Entonces, un sistema será estable si TODOS los polos del sistema se encuentran en el semi-plano izquierdo del plano complejo S.

El sistema lineal en lazo cerrado más común viene representado por la siguiente función de transferencia:

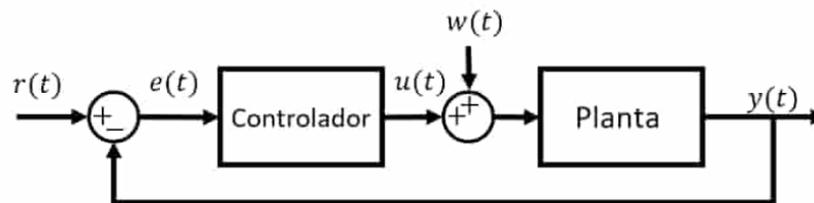


Ilustración 24: Sistema lineal de lazo cerrado (C, 2019b)

$$T(s) = \frac{N(s)}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Lo primero que podemos verificar de la función de transferencia anterior, son los signos de los coeficientes del denominador.

Si el denominador presenta signos intercambiados, ya es un fuerte indicio de que el sistema sea inestable. Sin embargo, debemos cumplir lo siguiente.

T(s) sera estable si:

- D(s) no tiene raíces en el semi-plano derecho
- D(s) no tiene raíces repetidas sobre el eje $j\omega$

T(s) será asintóticamente estable si todas las raíces de D(s) están en el semi-plano izquierdo del plano complejo. (C, 2019b)

2.3.1. Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

El método de la estabilidad de Routh-Hurwitz proporciona una respuesta al problema de la estabilidad considerando la ecuación característica del sistema, que en función de la variable de Laplace se escribe como:

$$\Delta(s) = q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

Con el objetivo de investigar la estabilidad del sistema, es necesario determinar si alguna de las raíces de $q(s)$ está en la parte derecha del plano s . El criterio de Routh-Hurwitz se basa en el ordenamiento de los coeficientes de la ecuación característica en un array o en una lista como la siguiente.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \dots \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \dots \\
 s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 \dots \\
 s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 \dots \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \\
 s^0 & f_1 & &
 \end{array}$$

Donde

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

y así sucesivamente. El criterio de Routh-Hurwitz establece que el número de raíces de $q(s)$ con partes reales positivas es igual al número de cambios de signo de la primera columna del array. Para un sistema estable, este criterio requiere que no haya cambios de signo en la primera columna. Este requisito es tanto necesario como suficiente. Es por ello, que el criterio de Routh-Hurwitz consiste entonces, en observar la primera columna de la tabla, ya que, nos dirá el número de polos o raíces inestables que hay. Donde el número de cambios de signo en la primera columna corresponde al número de polos inestables que posee el sistema

Existen cuatro casos o configuraciones diferentes de la primera columna del array que deben ser consideradas y tratarse independientemente, puesto que requieren modificaciones adecuadas del procedimiento de cálculo del array:

1. ningún elemento en la primera columna es cero.
2. hay un cero en la primera columna, pero otros elementos de la fila que contiene al cero de la primera columna no son iguales a cero.

3. hay un cero en la primera columna y los otros elementos de la fila que contiene al cero también son iguales a cero.

(C, 2019b; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.3.1.1. Primera columna sin ceros

Si partimos de una ecuación de segundo grado

$$q(s) = a_2s^2 + a_1s + a_0$$

El array de Routh será el siguiente:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & 0 \end{array}$$

Donde:

$$b_1 = \frac{a_1a_0 - a_2 \cdot 0}{a_1} = a_0$$

Para un sistema estable de segundo orden el único requisito es que todos los coeficientes sean positivos o que todos sean negativos.

No obstante, si partimos de una ecuación de tercer orden

$$q(s) = a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Y su array de Routh es:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & b_1 & 0 \\ s^0 & c_1 & 0 \end{array}$$

Nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$b_1 = \frac{a_2a_1 - a_3a_0}{a_2} \quad c_1 = \frac{b_1a_0}{b_1} = a_0$$

Sin embargo, para que el sistema de tercer orden sea estable, es necesario y suficiente que los coeficientes sean positivos y $a_2a_1 > a_3a_0$

2.3.1.2. Un cero en la primera columna

Si un elemento del array es cero, éste puede ser reemplazado por un número positivo pequeño, ε , que permite que después de completar el array tienda a cero. Este caso se va a ver mejor en un ejemplo,

Con un polinomio característico:

$$q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 11s + 10$$

El array de Routh es entonces

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 1 & 2 & 11 \\
 s^4 & 2 & 4 & 10 \\
 s^3 & \varepsilon & 6 & 0 \\
 s^2 & c_1 & 10 & 0 \\
 s^1 & d_1 & 0 & 0 \\
 s^0 & 10 & 0 & 0
 \end{array}$$

Donde

$$c_1 = \frac{4\varepsilon - 12}{\varepsilon} = -\frac{12}{\varepsilon} \qquad d_1 = \frac{6c_1 - 10\varepsilon}{c_1} = 6$$

Hay dos cambios de signo debido al resultado de c_1 . Por tanto, el sistema es inestable y dos raíces caen en la parte derecha del plano s .

2.3.1.3. Toda una fila es cero o una fila constituida por un solo elemento que es cero

Esta condición se presenta cuando el polinomio contiene singularidades que se localizan simétricamente respecto al origen del plano s . Nos van a aparecer factores no deseados, los cuales se evitan utilizando un polinomio auxiliar, $U(s)$, que precede inmediatamente al elemento cero en el array de Routh. El orden del polinomio auxiliar siempre es par e indica el número de pares de raíces simétricas.

Como en el primer caso, considerando un sistema de tercer orden:

$$q(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

Donde K es una ganancia de lazo. El array de Routh queda

$$\begin{array}{c|cc}
 s^3 & 1 & 4 \\
 s^2 & 2 & K \\
 s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\
 s^0 & K & 0
 \end{array}$$

Para que sea un sistema estable debe de cumplir lo siguiente:

$$0 < K < 8$$

Cuando $K=8$, se tiene dos raíces en el eje $j\omega$ y un caso de estabilidad marginal. El polinomio auxiliar, $U(s)$, es la ecuación de la fila que precede a la de ceros, en este caso es la fila de s^2 .

$$U(s) = 2s^2 + K = 2s^2 + 8 = 2(s - j\omega)(s + j\omega)$$

Es por ello, que la respuesta del caso marginal es una oscilación inaceptable.

(C, 2019b; Esteban Escaño, Javier, 2013)

2.4. MÉTODO DEL LUGAR DE LAS RAÍCES

El lugar de las raíces es una técnica que permite conocer la posición que ocupan las raíces de la ecuación característica, sobre un plano complejo s , a medida que se varía alguno de los parámetros de la función de transferencia de lazo abierto. Normalmente, el parámetro a variar es la ganancia estacionaria del sistema (lo que se conoce como "Lugar de las raíces") aunque también es posible observar la posición de estas raíces cuando varía un polo o cero de la función de transferencia de lazo abierto (lo que se denomina como "Contorno de las raíces").

2.4.1. Condiciones Módulo-Argumento

Suponiendo un sistema de control en lazo cerrado, como el de la siguiente figura:

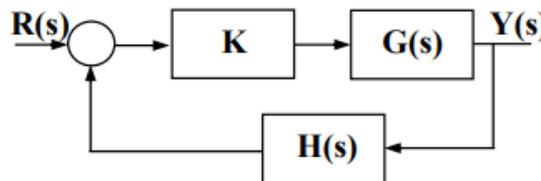


Ilustración 25: Control en lazo cerrado (Capítulo 6 - Lugar de las Raíces - Studocu, 2018)

La ecuación característica se puede expresar como

$$1 + K * G(s) * H(s) = 0$$

Con lo cual:

$$K * G(s) * H(s) = -1$$

Si se separa en modulo y argumento pueden establecerse dos condiciones:

$$\boxed{\begin{aligned} |G(s)H(s)| &= 1 \\ \angle G(s)H(s) &= \pm 180^0 (2q + 1) \end{aligned}}$$

Donde: $q=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3...$

Estas son las condiciones de módulo y argumento de la ecuación característica de lazo cerrado. Sin embargo, es también interesante ver cómo quedan estas condiciones en función de los valores de un parámetro K que aparece multiplicando a G(s) (control proporcional).

Considerando que el parámetro K aparece como factor multiplicador:

$$1 + K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + K \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} = 0$$

Si esta expresión nuevamente se separa en módulo y argumento se obtiene:

Aplicando la condición del argumento

$$\angle G(s)H(s) = \angle K + \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 180(2q + 1)$$

Dependiendo de que el valor de K sea positivo o negativo se obtienen dos expresiones:

si $k > 0$ la fase de K es 0° luego la expresión queda:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 180(2q + 1)$$

si $k < 0$ la fase de K es 180° luego la expresión queda:

$$\angle F(s) = \sum_{i=1}^m \angle(s + z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s + p_j) = 2q \cdot 180$$

La condición de módulo no va a verse afectada por el valor de K si se considera incluido en la G(s).

Por lo tanto, las condiciones de módulo y argumento quedarán:

$ G(s)H(s) = 1$
$\angle(G(s)H(s)) = 180(2q + 1) \quad \text{si } K > 0$
$\angle(G(s)H(s)) = 180(2q) \quad \text{si } K < 0$

Donde: $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$

De esta forma se tiene que los polos de la función de transferencia de lazo cerrado deben cumplir estas dos condiciones. Por lo tanto, si se va variando el valor del parámetro K, los puntos que cumplen las condiciones de módulo y argumento serán los polos de lazo cerrado del sistema.

El lugar de las raíces representa la posición de los polos de lazo cerrado del sistema para cada valor del parámetro K. Es decir, es el lugar geométrico de las raíces del denominador de la función de transferencia de lazo cerrado.

De esta forma se puede ver gráficamente cual sería la posición de dichos polos de lazo cerrado al variar el valor de la ganancia K o la posición de los polos y ceros de lazo abierto. Conociendo los puntos donde se sitúan los polos de lazo cerrado puede conocerse la forma de la respuesta del sistema (especificaciones temporales).

(Capítulo 6 - Lugar de las Raíces - Studocu, 2018)

2.4.2. Procedimiento de construcción

1) Ecuación característica

$$1 + KG(s)H(s) = 0$$

Es necesario que el parámetro K aparezca como factor multiplicador, en la forma:

$$1 + K \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = 0$$

2) Puntos de comienzo y fin del lugar

Considerando la condición modular de la forma:

$$|G(s)H(s)| = \frac{1}{K} \quad \left| \frac{(s + z_1)(s + z_2) \dots (s + z_m)}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} \right| = \frac{1}{K}$$

Para el punto de comienzo del lugar de las raíces, $K=0$ se tiene que $|G(s)H(s)| \rightarrow \infty$, esto ocurre cuando el valor de s es igual a uno de los polos de la función de transferencia de lazo abierto, luego los puntos de comienzo son los polos de lazo abierto.

Para el punto de finalización del lugar de las raíces, $K=\infty$ se tiene que $|G(s)H(s)| \rightarrow 0$, esto ocurre cuando el valor de s es igual a uno de los ceros de la función de transferencia de lazo abierto, luego los puntos de finalización son los ceros de lazo abierto.

Por tanto:

Comienza en los polos de la FTLA, F(s).

Finaliza en los ceros de la FTLA, F(s).

3) Asíntotas del lugar de las raíces

Cuando el número de polos de lazo abierto es mayor que el número de ceros de lazo abierto, las ramas que no terminan en ningún cero, tienden asintóticamente a infinito.

Para calcular el ángulo de la asíntota se considera un punto de ella muy lejano de los polos y ceros de lazo cerrado. De esa manera los ángulos que tienen los polos y ceros de lazo abierto respecto a ese punto se pueden considerar todos iguales. Aplicando el criterio del argumento, donde a la suma de los ángulos de los polos se resta la suma de los ángulos de los ceros, si todos los ángulos se consideran iguales quedarán solamente los ángulos de la diferencia entre el número de polos y ceros:

$$\angle(G(s)H(s)) = 180(2q + 1)$$

$$(n - m) \cdot \theta_a = 180(2q + 1)$$

Y despejando el valor del ángulo

$$\theta_a = \frac{180(2q + 1)}{n - m}$$

Por tanto, los ángulos vendrán dados por la expresión:

$$\theta_a = \frac{180(2q + 1)}{n - m} \text{ para } k > 0$$

$$\theta_a = \frac{180(2q)}{n - m} \text{ para } k < 0$$

Donde: $q = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$

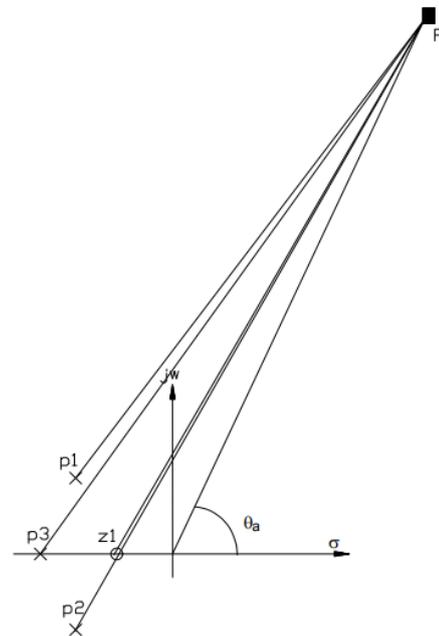


Ilustración 26: Asíntotas del lugar de las raíces (Capítulo 6 - Lugar de las Raíces - Studocu, 2018)

4) Intersección de asíntotas con el eje real

Todas las asíntotas cortarán al eje real en el centroide que es una especie de centro de gravedad de los polos y ceros.

Para el lugar directo e inverso:

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{polos de } F(s) - \sum \text{ceros de } F(s)}{n - m}$$

5) Ángulos de salida de los polos y llegada a los ceros

Se puede calcular aplicando el criterio del argumento a un punto muy próximo al polo o cero del que se quiere calcular el ángulo. Si están muy próximos, la diferencia entre el ángulo obtenido para el punto y el ángulo del polo o cero a calcular será prácticamente nula.

Dos ecuaciones

$$\sum \angle \text{ceros} - \sum \angle \text{polos} = 180(2q + 1) \quad \text{Para } K > 0$$

$$\sum \angle \text{ceros} - \sum \angle \text{polos} = 180(2q) \quad \text{Para } K < 0$$

6) Cálculo de K en cualquier punto

Para ello basta con aplicar el criterio del módulo al punto del lugar de las raíces s_k donde se desea conocer el valor de K.

$$|K| = \frac{\prod_{j=1}^n |(s_k + p_j)|}{\prod_{i=1}^m |(s_k + z_i)|}$$

(Capítulo 6 - Lugar de las Raíces - Studocu, 2018)

2.5. ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El análisis en el dominio de la frecuencia es una herramienta, comúnmente utilizada en el control automático para comprender el comportamiento de un sistema en términos de su respuesta en frecuencia. Siendo la función de transferencia de un sistema $G(s)$ puede describirse en el dominio de la frecuencia la relación:

$$G(jw) = G(s)|_{s=jw} = R(w) + jX(w)$$

Donde

$$R(w) = \text{Re}[G(jw)] \text{ y } X(w) = \text{Im}[G(jw)]$$

Alternativamente, la función de transferencia puede representarse por una magnitud $|G(jw)|$ y una fase $\Phi(jw)$

$$G(jw) = |G(jw)|e^{j\Phi(jw)} = |G(w)|\Phi(w)$$

donde

$$\Phi(w) = \tan^{-1} \frac{X(w)}{R(w)} \text{ y } |G(w)|^2 = R(w)^2 + X(w)^2$$

Su presentación gráfica de la respuesta de frecuencia de sistema $G(j\omega)$ puede utilizar cualquiera de las ecuaciones anteriores. La primera en forma rectangular y la segunda en forma polar.

Pero hay distintas posibilidades para representar gráficamente la respuesta de frecuencia de un sistema. Sin embargo, las limitaciones de las gráficas polares se notan fácilmente, la adición de polos y ceros a un sistema existente requieren calcular de nuevo la respuesta de frecuencia. Además, el cálculo de la respuesta de frecuencia en esta forma es tedioso y no indica el efecto de los polos o ceros individuales.

La introducción de gráficas logarítmicas, frecuentemente conocidas como gráficas de Bode, simplificará la determinación de una descripción gráfica de la respuesta de frecuencia. A las gráficas logarítmicas se les da el nombre de Bode en honor de H. W. Bode, quien las utilizó mucho en sus estudios de amplificadores con realimentación. La función de transferencia en el dominio de la frecuencia es

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|e^{j\Phi(j\omega)}$$

El logaritmo de la magnitud normalmente se expresa en función del logaritmo de base 10, de forma que se usa

$$\text{Ganancia logarítmica} = 20\log_{10}|G(j\omega)|$$

Donde las unidades son los decibelios (dB). La ganancia logarítmica en dB y el ángulo $\Phi(\omega)$ pueden dibujarse frente a la frecuencia ω de diferentes formas. Para un diagrama de Bode, la gráfica de la ganancia logarítmica en dB frente a ω normalmente se representa en un conjunto de ejes y la fase $\Phi(\omega)$ frente a ω en otro distinto, como se muestra en la Ilustración 24.

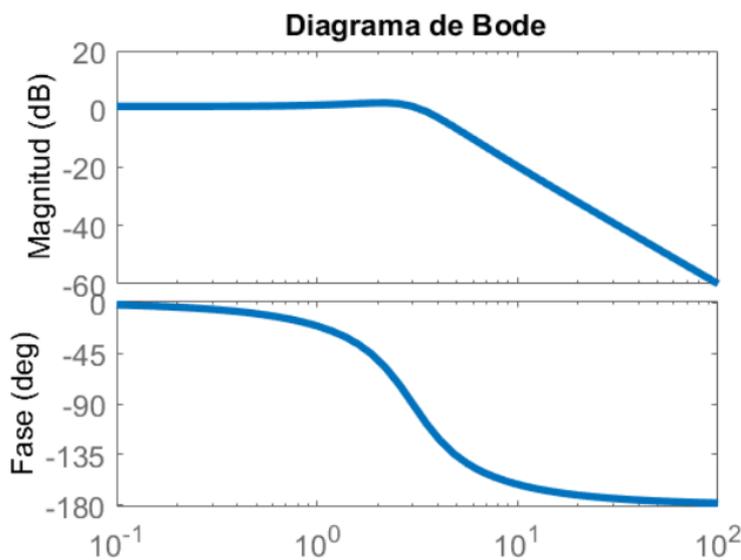


Ilustración 27: Diagrama de Bode (C, 2019a)

El diagrama de Bode es una representación gráfica que muestra la respuesta en frecuencia de un sistema. En el eje horizontal se representa la frecuencia (generalmente en escala logarítmica) y en el eje vertical se representa la magnitud y la fase de la respuesta del sistema.

La magnitud del diagrama de Bode muestra cómo el sistema amplifica o atenúa diferentes frecuencias de la señal de entrada. Permite identificar los puntos de ganancia máxima (picos) y las frecuencias de corte donde la magnitud comienza a disminuir. También se pueden observar las características de filtrado del sistema.

La fase del diagrama de Bode muestra el desfase temporal que experimenta la señal de salida en comparación con la señal de entrada en diferentes frecuencias. Esto es importante para comprender el retardo o adelanto de fase del sistema y cómo puede afectar el comportamiento general del sistema.

El análisis del diagrama de Bode permite obtener información valiosa sobre la estabilidad, la robustez y el rendimiento de un sistema de control. Permite diseñar controladores adecuados, ajustar los parámetros del controlador y evaluar la respuesta del sistema en diferentes frecuencias.

En resumen, el análisis en el dominio de la frecuencia y el diagrama de Bode son herramientas esenciales para comprender y diseñar sistemas de control automático, ya que brindan información sobre la respuesta en frecuencia, la ganancia y la fase del sistema.

(C, 2019a; Esteban Escaño, Javier, 2013)

3. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE LA HERRAMIENTA

En los siguientes apartados se va a detallar el proceso de diseño de la herramienta presentada como resultado de este TFG. Como idioma de la herramienta, se ha escogido el castellano para ayudar al estudiante en su grado académico. En un primer lugar se realizó una validación de las señales generadas por Sysquake usando como sistema de comparación el software de Matlab.

Los diseños escogidos, van a ser los ejercicios del trabajo de regulación de la asignatura "Fundamentos de Automática" del segundo año de ingeniería mecatrónica.

3.1. GENERACIÓN DE SEÑALES DE ENTRADA

En este apartado se va a discutir el algoritmo utilizado para generar las señales de entrada. Partiendo del enunciado del problema:

Pregunta 4

- a) Obtenga la respuesta de las siguientes funciones de transferencia ante señales de tipo:
- Impulso unitario.
 - Escalón unitario
 - Rampa unitaria

$$G_1(s) = \frac{(B1s + C1 * 20)}{s^2 + B1s + 5 * E1}$$

$$G_2(s) = \frac{(E1s + F1)/25}{s^2 + \frac{C1 + E1}{5}s + \frac{A1 + C1}{7}}$$

Ilustración 28: Enunciado del primer ejemplo (Esteban Escaño, Javier, 2013)

Donde las letras corresponden a la posición del NIA (Número de Identificación del Alumno) que tiene cada estudiante de la Universidad de Zaragoza, que en este caso será el siguiente:

A	B	C	D	E	F
8	0 (10)	4	3	3	6

Tabla 9: Los valores de cada letra del NIA

Una vez que se sabe el valor de cada una de las letras, se sustituye para observar cómo queda la función final.

$$1^{\circ} \text{ apartado: } G(s) = \frac{10s+80}{s^2+10s+15} \quad 2^{\circ} \text{ apartado: } G(s) = \frac{(3s+6)/25}{s^2+\frac{7}{5}s+\frac{12}{7}}$$

Conociendo el resultado de cada sistema, se pasará a implementar dichas funciones tanto en Matlab como en Sysquake, para obtener las señales requeridas. Solamente se implementará en el primer apartado.

3.1.1. Señales de entrada usando Matlab

La herramienta Matlab de MathWorks dispone de una serie de toolbox orientados a los sistemas de control. En estos toolbox se identifican sistemas que posee funciones de apoyo para esta tarea. Y las que se van a emplear para este ejercicio son las siguientes.

- *sys = tf(numerator,denominator)*
Creación de modelos de función de transferencia de valores reales o complejos. Donde se pueden visualizar dos parámetros, *numerator*, que indica el numerador de la función de transferencia y el *denominator* que es el denominador.
- *step(sys)*
Representación de la respuesta de un modelo de sistema dinámico a una entrada en escalón de amplitud unitaria. El parámetro requerido en este comando es la de una función, que perfectamente puede ser el sistema del caso *tf*.
- *impulse(sys)*
Representación de la respuesta de un modelo de sistema dinámico a una entrada de impulso de amplitud unitaria. Como en el caso anterior, el parámetro requerido en este comando es la de una función, que perfectamente puede ser el sistema del caso *tf*.
- *lsim(sys, u, t)*
Representación de la respuesta en el tiempo simulada del modelo del sistema dinámico (*sys*) para el historial de entradas (*t, u*). El vector *t* especifica las muestras de tiempo para la simulación. En sistemas con una única entrada, la señal de entrada *u* es un vector de la misma longitud que *t*. En cambio, en los sistemas de varias entradas, *u* es una matriz con tantas filas como muestras de tiempo (*size(t)*) y tantas columnas como entradas a *sys* (*tf*). Donde el vector *t* se representara de la siguiente manera:
t=0:0.1:10 → que significa que cuente de 0 a 10 en intervalos de 0.1.

(Control System Toolbox Documentation - MathWorks España, 2023)

A continuación, se van a aplicar los 4 comandos en el primer apartado que se ha obtenido del ejercicio anterior.

A partir del primer sistema:

$$G(s) = \frac{10s + 80}{s^2 + 10s + 15}$$

Se irán escribiendo los comandos para generar las señales de entrada. Todas van a tener una base en común que va a ser la siguiente:

```
numerator=[10 80]
denominator=[1 10 15]
sys=tf(numerator, denominator)
```

Donde los dos primeros van a corresponder a los parámetros del tercero.

Numerator y *Denominator* se escriben de manera matricial, dando como resultado la siguiente función de transferencia:

```
numerator =
    10    80

denominator =
    1    10    15

sys =
    10 s + 80
-----
    s^2 + 10 s + 15

Continuous-time transfer function.
```

Una vez que se tiene el sistema definido, se irán escribiendo las diferentes señales de entrada para conseguir sus respectivas representaciones.

El siguiente ejemplo, muestra cómo utilizando el comando *step* genera una señal de entrada, de tipo escalón unitario, representado en un gráfico que se puede ver en la Ilustración 26.

```
numerator=[10 80]
denominator=[1 10 15]
sys=tf(numerator, denominator)
step(sys)
```

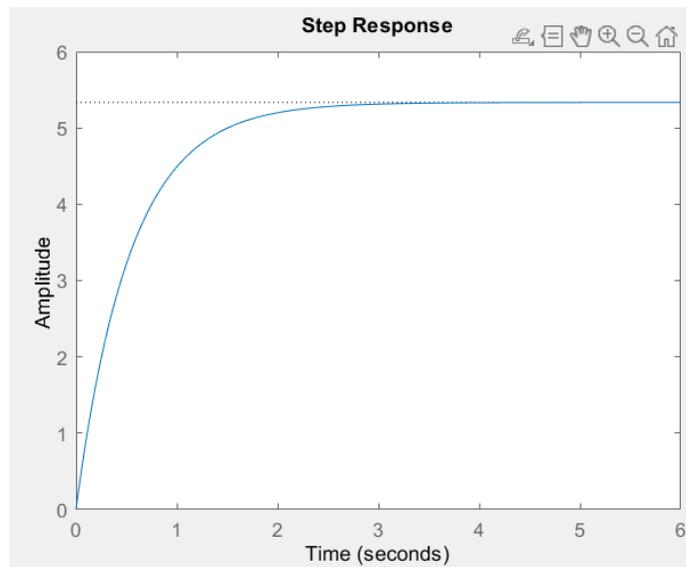


Ilustración 29: Señal de escalón unitario generada por Matlab

Seguidamente, se hará lo mismo para las señales de impulso y rampa unitarios.

```
numerator=[10 80]
denominator=[1 10 15]
sys=tf(numerator, denominator)
impulse(sys)
```

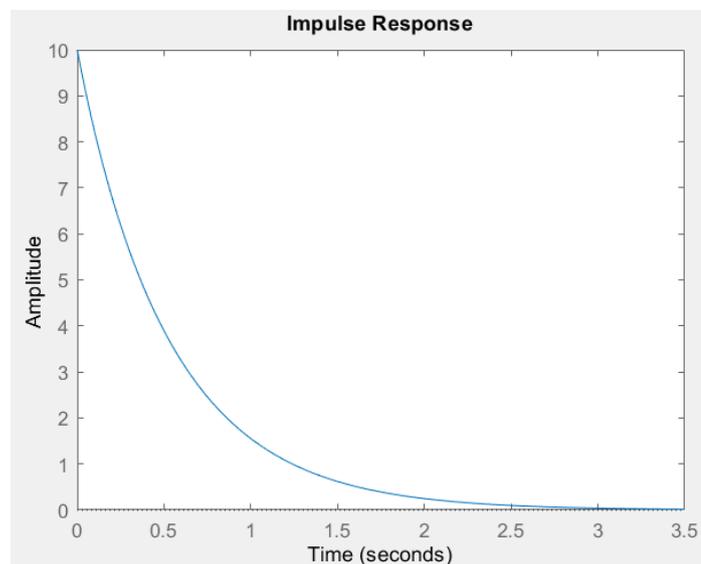


Ilustración 30: Señal de impulso unitario generada por Matlab

```
numerator=[10 80]  
denominator=[1 10 15]  
sys=tf(numerator, denominator)  
t=0:0.1:10  
u=t  
lsim(sys,u,t)
```

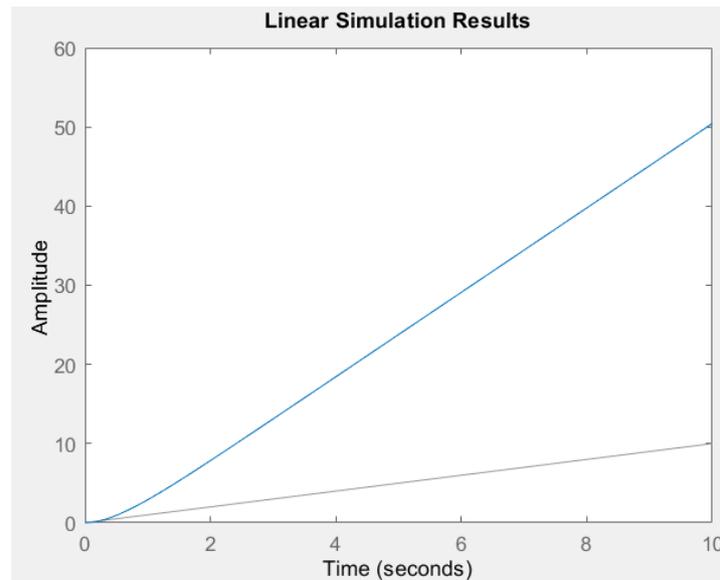


Ilustración 31: Señal de rampa unitaria generada por Matlab

A continuación, se ha fijado como objetivo determinar cómo genera Matlab estas diferentes secuencias. Ya que, el objetivo principal del TFG es poder generar secuencias de control de uso docente en Sysquake, Matlab va a ser una herramienta que permita comparar los resultados obtenidos con Sysquake para así poder validar las secuencias generadas.

El siguiente paso, es desarrollar un algoritmo que sin necesidad de utilizar los comandos anteriores genere la misma secuencia que éste. A continuación, se muestra el código empleado:

```
% Define la función de transferencia del sistema
num = [10 80]; % Numerador
den = [1 10 15]; % Denominador
sys = tf(num, den); % Sistema lineal

% Configura los parámetros del tiempo
t = 0:0.01:5; % Vector de tiempo

% Crea la secuencia de entrada de escalón
u = ones(size(t));

% Crea la secuencia de entrada de impulso
u = zeros(size(t));
u(1) = 1; % Impulso unitario en el primer punto

% Crea la secuencia de entrada de rampa unitaria
u = t; % Rampa unitaria

% Calcula la respuesta del sistema
lsim(sys, u, t); % Utiliza la función lsim para calcular la respuesta
```

Como se puede observar, se parte de la misma base que de la rampa unitaria. La diferencia es en la designación de la secuencia u , ya que no será la misma en los tres casos.

Para conocer la gráfica del escalón unitario, se deberá definir una secuencia de entrada basada en el tamaño del vector de tiempo, $size(t)$ y su posterior transformación en unos, $ones(size(t))$. Esto se debe a que un escalón unitario representa la entrada que se produce en un sistema cuando, estando parado o en estado inicial nulo, lo conectamos y le asignamos una entrada de consigna. En este caso es un uno, ya que, es un sistema unitario. (Ver apartado 2.2.2.1.2)

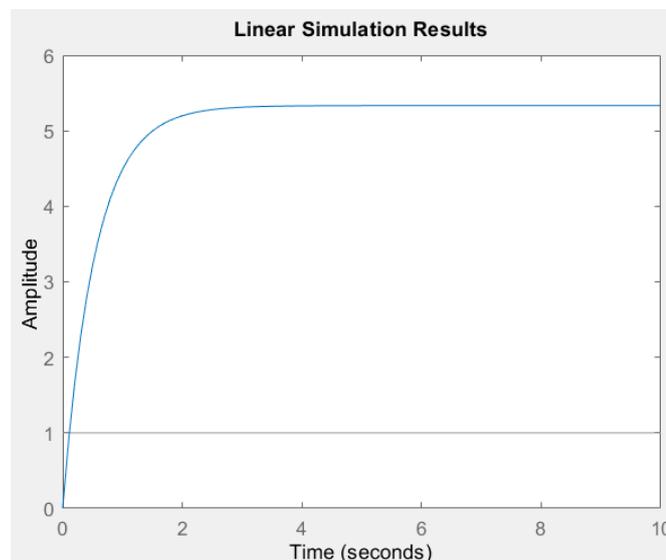


Ilustración 32: Escalón unitario sin el comando step

Para el impulso unitario también se deberá tomar de referencia el tamaño del vector t , $size(t)$, pero esta vez su transformación será de ceros, $zeros(size(t))$ excepto el primer número que será 1, $u(1)=1$.

Esto se debe a la definición del impulso unitario, que es el siguiente

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon'} & -\frac{\varepsilon}{2} \leq t \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Donde $\varepsilon > 0$. A medida que se aproxima a cero, la función $f(t)$ se aproxima a la función $\delta(t)$, que tiene las siguientes propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

Ver apartado 2.2.2.1.1

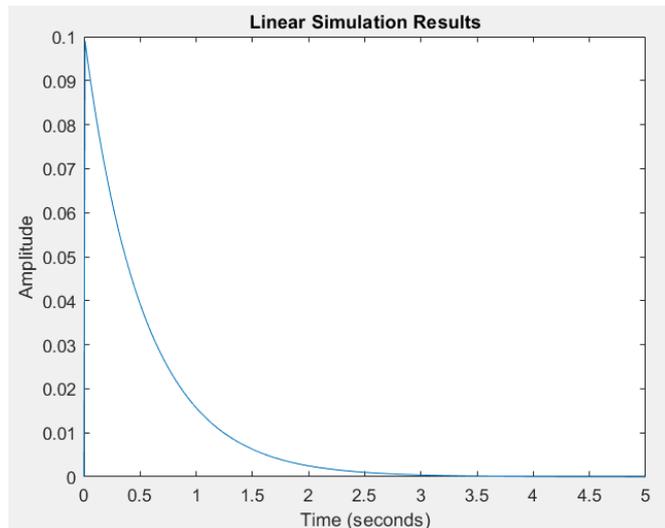


Ilustración 33: Impulso unitario sin el comando impulse

Por último, está la rampa unitaria que tendrá el mismo proceso, ya que no tiene un comando específico. Donde la secuencia de entrada, u , será la misma que el vector de tiempo, $u=t$. Esto se debe, a que la rampa unitaria descubre el comportamiento del sistema ante cambios en la entrada a un ritmo constante. (Ver apartado 2.2.2.1.3)

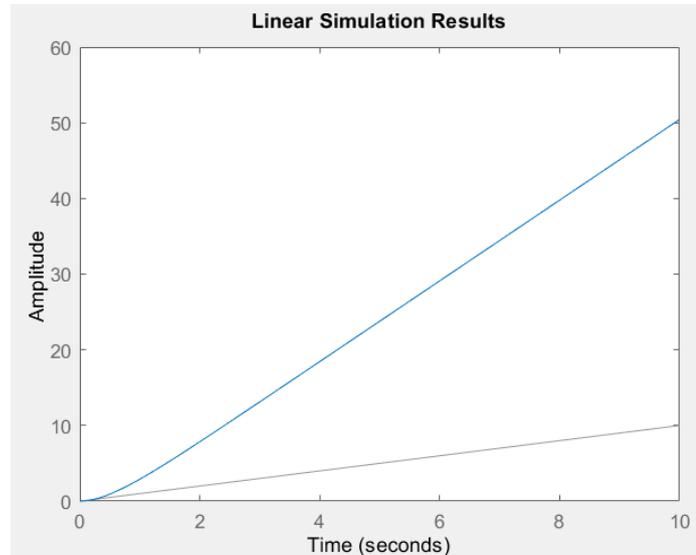


Ilustración 34: Impulso unitario

3.1.2. Señales de entrada usando Sysquake

El principal objetivo del TFG es generar las señales de entrada utilizadas en la identificación de sistemas usando Sysquake. La interactividad inherente a Sysquake permitirá de una forma sencilla personalizar la señal generada.

Cabe recalcar, que Sysquake utiliza un lenguaje de programación basado en Matlab, lo que quiere decir, que para definir algún comando que otro en Sysquake, se utilizará la misma sintaxis que en Matlab.

A continuación, se muestra el código en Sysquake

```
% Define la función de transferencia del sistema
num = [10 80]; % Numerador
den = [1 10 15]; % Denominador

% Configura los parámetros del tiempo
t = 0:0.01:5; % Vector de tiempo

% Crea la secuencia de entrada de escalón
u = ones(size(t));

% Crea la secuencia de entrada de impulso
u = zeros(size(t));
u(1) = 1; % Impulso unitario en el primer punto

% Crea la secuencia de entrada de rampa unitaria
u = t;

% Calcula la respuesta del sistema
lsim(num, den, u, t);
```

La única diferencia entre estos algoritmos y los de Matlab tienen que ver con la forma en que Sysquake y Matlab trabajan con las funciones de transferencia. El comando *tf*, te genera directamente la función de transferencia, sin embargo, en Sysquake tienes que cargar una librería para poder utilizarlo, esta vez introduciremos el numerador y el denominador de forma manual en la función de transferencia de la representación final.

En las Ilustraciones 32, 33, 34 puede apreciarse que el resultado de este algoritmo es el mismo que se había obtenido con Matlab que se representó en las Ilustraciones 29, 30, 31.

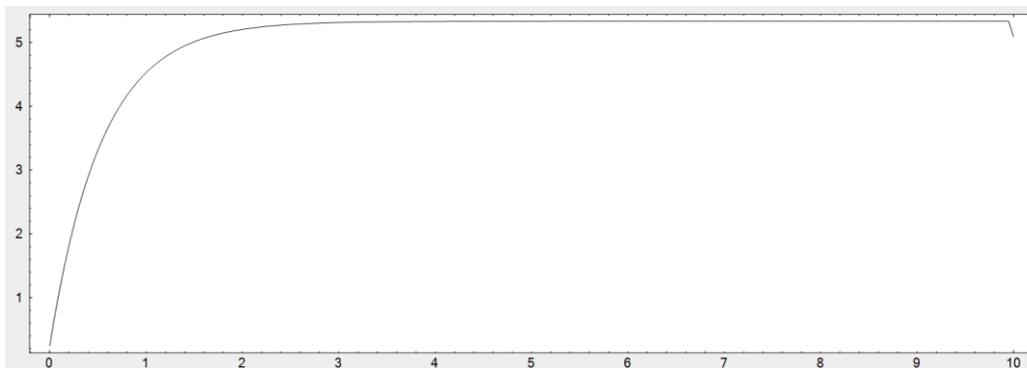


Ilustración 35: Escalón unitario en Sysquake

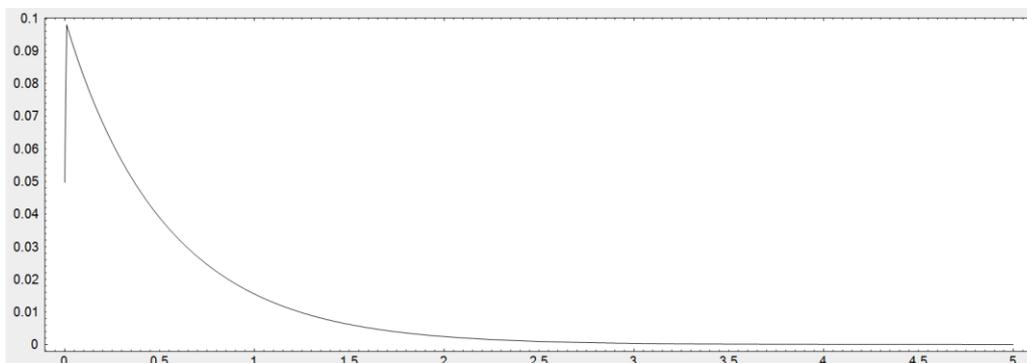


Ilustración 36: Impulso unitario en Sysquake

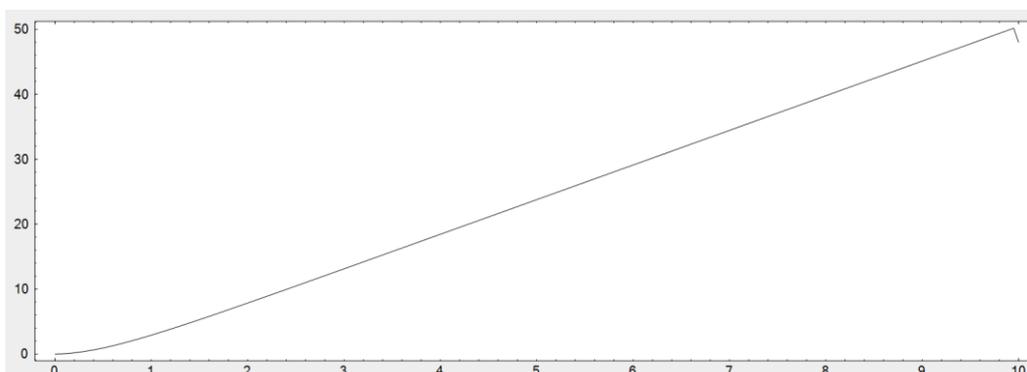


Ilustración 37: Rampa unitaria en Sysquake

3.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Como en el capítulo anterior, se realizará la implementación de Sysquake a un ejercicio de la universidad, en este caso, la estabilidad de una función. El enunciado es el siguiente:

Pregunta 5

Estudie la estabilidad de los siguientes sistemas en función del parámetro k

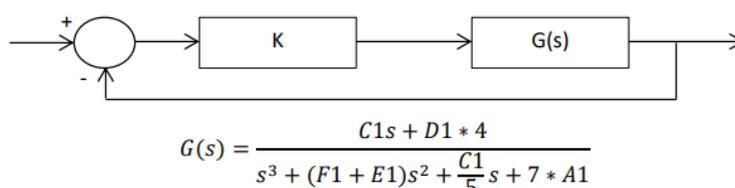


Ilustración 38: Enunciado del segundo ejemplo (Esteban Escaño, Javier, 2013)

Sabiendo que valor es cada letra (Ver Tabla 9), la función queda tal que así:

$$G(s) = \frac{4s + 12}{s^3 + 9s^2 + \frac{4}{5}s + 56}$$

A primera vista, se ve que es un sistema de lazo cerrado, por el cual se aplicará la fórmula de la teoría (Apartado 2.2.1.1)

$$FT = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Como el sistema es unitario, la parte H(s) será 1.

Para poder aplicar esta fórmula, en la rama de arriba tendrá que haber un solo diagrama de bloque. Gracias a la Tabla 6, sabemos que se tienen que multiplicar, quedando como resultado final:

$$g(s) = \frac{K(4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \frac{4}{5}s + 56}$$

Obteniendo una función de transferencia tal que así:

$$FT = \frac{g(s)}{1 + g(s)} = \frac{K(4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \left(\frac{4}{5} + 4K\right)s + 56 + 12K}$$

Al no saber el valor de K, no se puede seguir con el estudio, pero aplicando el criterio de Routh-Hurwitz, se puede obtener un intervalo.

Partimos otra vez de la teoría, esta vez del apartado 2.3.1, donde se explica los pasos a seguir y que son los siguientes:

El array de Routh va a ser,

$$\begin{array}{l|ll} s^3 & 1 & (\frac{4}{5} + 4K) \\ s^2 & 9 & 56 + 12K \\ s^1 & b_1 & 0 \\ 1 & c_1 & 0 \end{array}$$

Donde nos quedan las siguientes ecuaciones:

$$b_1 = \frac{a_2 a_1 - a_3 a_0}{a_2} = \frac{24K - \frac{244}{5}}{9} \quad c_1 = \frac{b_1 a_0}{b_1} = a_0 = 56 + 12K$$

Para que la función sea estable, b y c deben de ser positivos, es decir, mayor que 0.

$$b_1 \rightarrow \frac{24K - \frac{244}{5}}{9} > 0 \rightarrow K > 2.033$$

$$c_1 \rightarrow 56 + 12K > 0 \rightarrow K > -4.67$$

Para que la función sea estable, K tiene que ser mayor que 2.033

3.2.1. Estudio de la estabilidad en Matlab

Así es como se hace de manera analítica, pero el objetivo de este TFG es implementarlo al software de Sysquake, sin antes comprobarlo con Matlab. Donde se obtiene el siguiente código:

```
k=1;
num=[4 12];
den=[1 9 4/5 56];
Gs=tf(num, den)
gs=k*Gs
Ft=feedback(gs, 1)

Gs =

      4 s + 12
-----
s^3 + 9 s^2 + 0.8 s + 56

Continuous-time transfer function.

gs =

      4 s + 12
-----
s^3 + 9 s^2 + 0.8 s + 56

Continuous-time transfer function.

Ft =

      4 s + 12
-----
s^3 + 9 s^2 + 4.8 s + 68

Continuous-time transfer function.
```

- Para poder avanzar con el estudio, se debe implantar un valor a la incógnita de K , que se ha escogido al azar el valor 1.
- La función del comando ft ya lo hemos visto en el Apartado 3.1.1
- gs , es la multiplicación de la rama de arriba entre K y $G(s)$
- El comando *feedback*, como bien dice su traducción al español, es la "retroalimentación" unitaria del sistema (lazo cerrado).

Una vez definido la función de transferencia, comenzaremos con el estudio de la estabilidad. Empezaremos sacando los polos del sistema y su respectiva representación.

```
>> pole(Ft)
pzplot(Ft)

ans =

    -9.2732 + 0.0000i
     0.1366 + 2.7045i
     0.1366 - 2.7045i
```

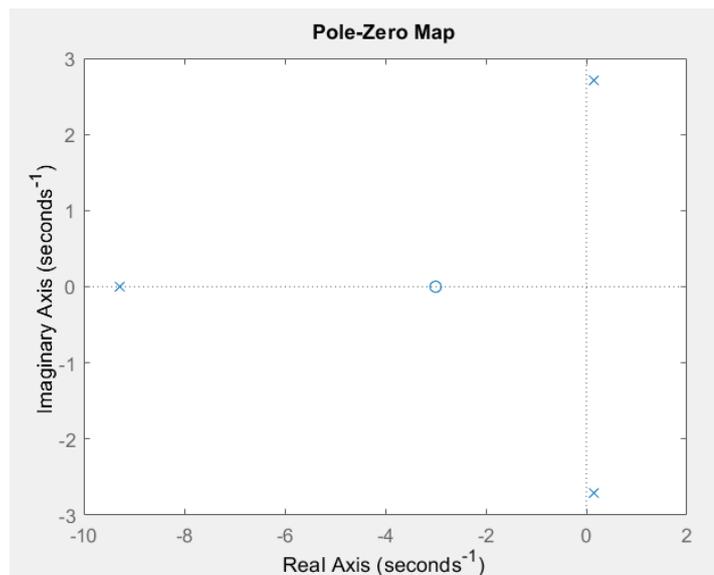


Ilustración 39: Grafica de los polos en Matlab

Donde $pole(Ft)$, es el comando que nos dice los polos que tiene una función, en este caso Ft . Y $pzplot(Ft)$, representa los polos y los ceros de transmisión de un modelo de sistema dinámico (Ft). (*Control System Toolbox Documentation - MathWorks España, 2023*)

Con estos resultados se puede decir que el sistema es inestable, ya que, dos de los tres polos obtenidos son positivos, cuando deberían ser los tres negativos. Lo mismo pasa con la gráfica, para que el sistema sea estable se debería reflejar los tres puntos en el semiplano negativo.

Aun así, existe un comando que te dice directamente si el sistema es estable (1) o inestable (0), se trata de $isstable()$

```
>> isstable(Ft)
```

```
ans =
```

```
logical
```

```
0
```

A continuación, se estudiará la estabilidad del sistema según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces. Y el comando perfecto para estas dos representaciones es el *sisotool(gs)*. Donde se define la función sin retroalimentar, ya que el mismo comando hace dicha función, dando como resultado lo siguiente:

```
>> sisotool(gs)
```

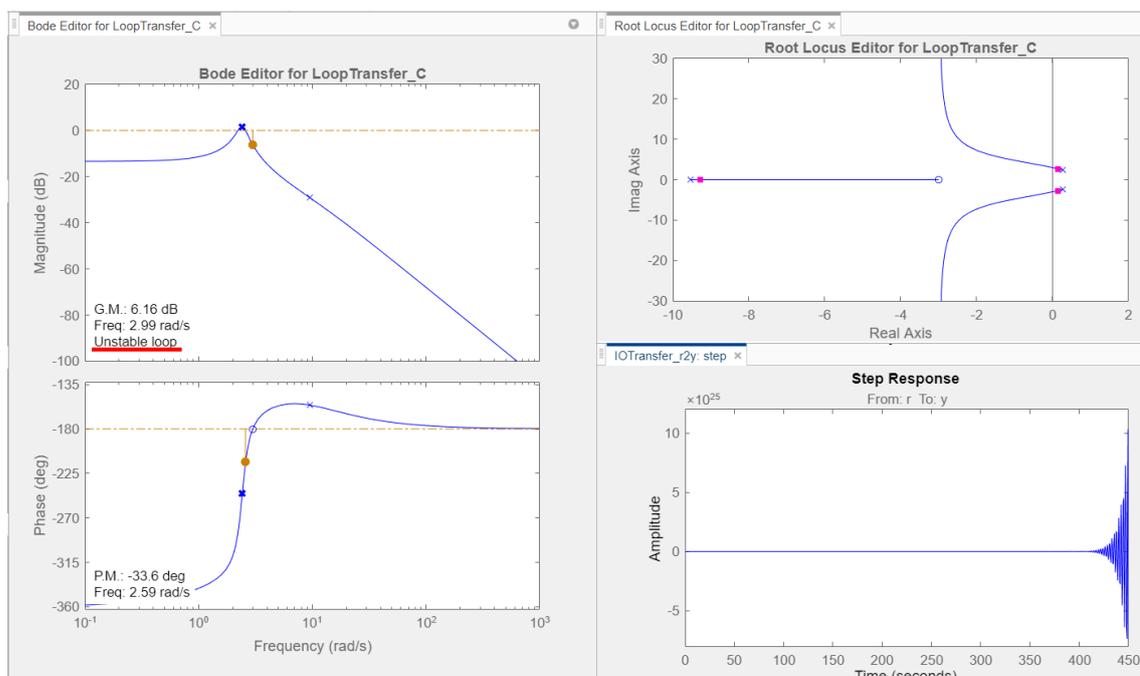


Ilustración 40: Graficas según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces en Matlab

Se puede apreciar con las dos graficas de Bode que el sistema es inestable, ya que te lo dice la misma gráfica y a simple vista se ve que solamente está en el lado negativo.

Pasa algo similar con el lugar geométrico de las raíces, ya que dos de los tres puntos están en el semiplano positivo, un indicio de que no va a ser estable.

No hay que olvidar que todo esto ha sido con un valor en K de 1, esto quiere decir que el resultado obtenido de manera analítica tiene razón, ya que, $1 < 2.03$ por el cual el sistema es INESTABLE.

Sabiendo que valor elegir, para que el sistema sea estable, volveremos a estudiar su estabilidad, pero esta vez con una $K=4$.

```
k=4;
num=[4 12];
den=[1 9 4/5 56];
Gs=tf(num, den)
gs=k*Gs
Ft=feedback(gs, 1)
pole(Ft)
pzplot(Ft)
isstable(Ft)
sisotool(gs)
Gs =
```

$$\frac{4 s + 12}{s^3 + 9 s^2 + 0.8 s + 56}$$

Continuous-time transfer function.

```
gs =
```

$$\frac{16 s + 48}{s^3 + 9 s^2 + 0.8 s + 56}$$

Continuous-time transfer function.

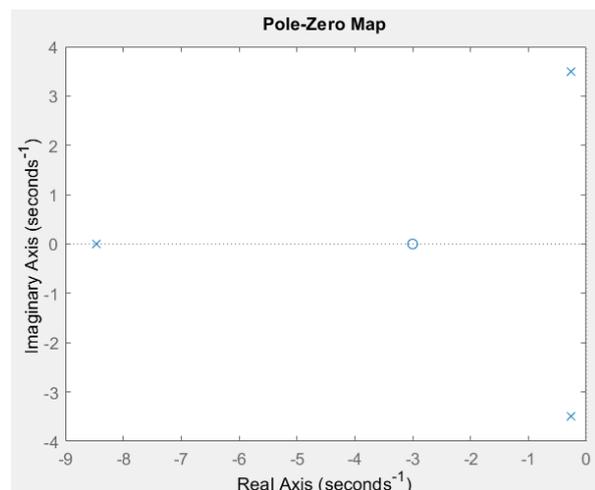
```
Ft =
```

$$\frac{16 s + 48}{s^3 + 9 s^2 + 16.8 s + 104}$$

Continuous-time transfer function.

```
ans =
```

-8.4666 + 0.0000i
-0.2667 + 3.4946i
-0.2667 - 3.4946i



Ahora sí que da indicios de un sistema estable, ya que los tres polos obtenidos son negativos, lo que conlleva a estar en el semiplano negativo de la gráfica.

Utilizamos el comando *isstable* para salir de dudas.

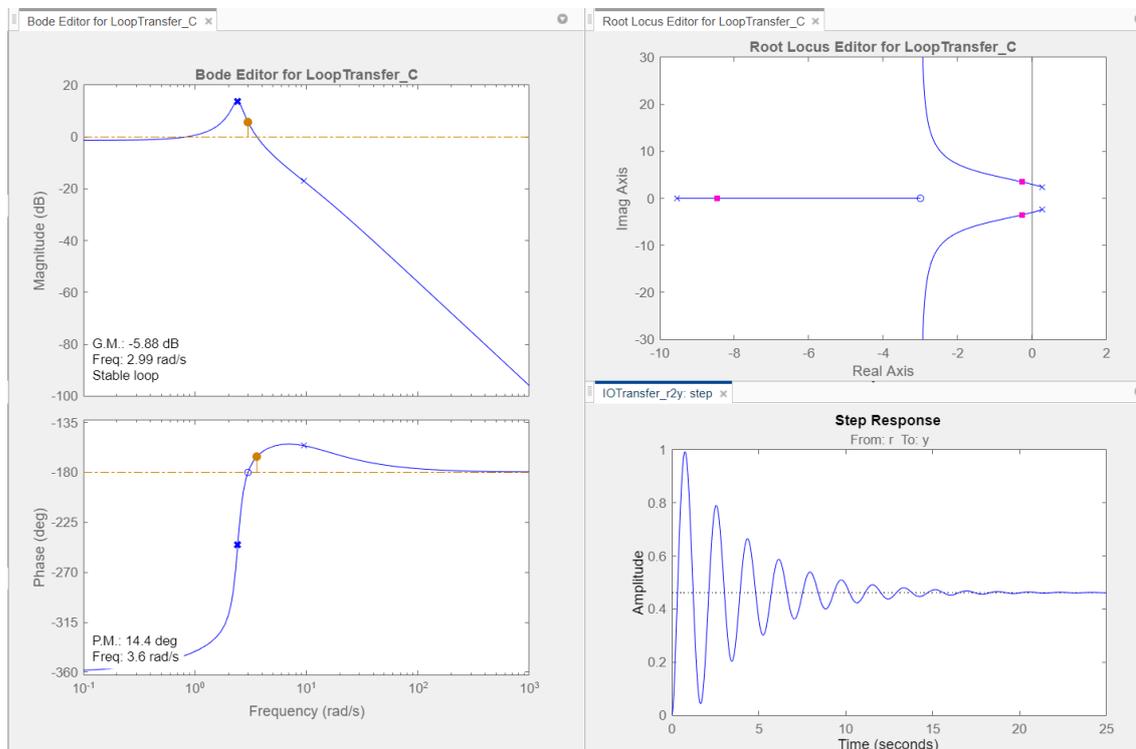
ans =

logical

1

Al darnos el valor 1, nos dice que el sistema es estable.

Por último, veremos qué resultado nos da estudiando su estabilidad según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces.



Como bien hemos comentado antes, el diagrama de Bode nos dice que es estable y esta vez llega a estar en el lado positivo de la gráfica. Y el lugar geométrico de las raíces, los tres puntos conseguidos, están en el semiplano negativo, otra prueba de que el sistema es ESTABLE.

3.2.2. Estudio de la estabilidad en Sysquake

A continuación, se comprobará los anteriores resultados del sistema estable, en Sysquake. Teniendo en cuenta, que Sysquake se basa en la programación de Matlab, la sintaxis de algunos comandos serán los mismos. Dando como resultado lo siguiente:

```
use lti

k=4;
num = [4 12];
den = [1 9 4/5 56];
Gs = tf(num, den)
gs=k*Gs
Ft=feedback(gs, 1)

pole(Ft)
pzmap(Ft)
issiso(Ft)
```

La novedad en este código es la utilización de la librería *lti*, que nos ayudara definiendo la función de transferencia, *tf*, y las representaciones para su respectivo estudio de estabilidad, *pzmap*...

En las siguientes siete líneas, no hay ninguna sorpresa que no hayamos visto en el Apartado 3.2.1. A partir de la octava, la cosa cambia, pero a la vez no tanto, ya que *pzmap* e *issiso*, tienen la misma función que *pzplot* e *isstable*, pero los primeros son válidos en Sysquake y los otros no.

```
Gs =
continuous-time transfer function
(4s+12)/(s^3+9s^2+0.8s+56)
gs =
continuous-time transfer function
(16s+48)/(s^3+9s^2+0.8s+56)
Ft =
continuous-time transfer function
(16s+48)/(s^3+9s^2+16.8s+104)
ans =
-8.4666
-0.2667 + 3.4946j
-0.2667 - 3.4946j
ans =
true
```

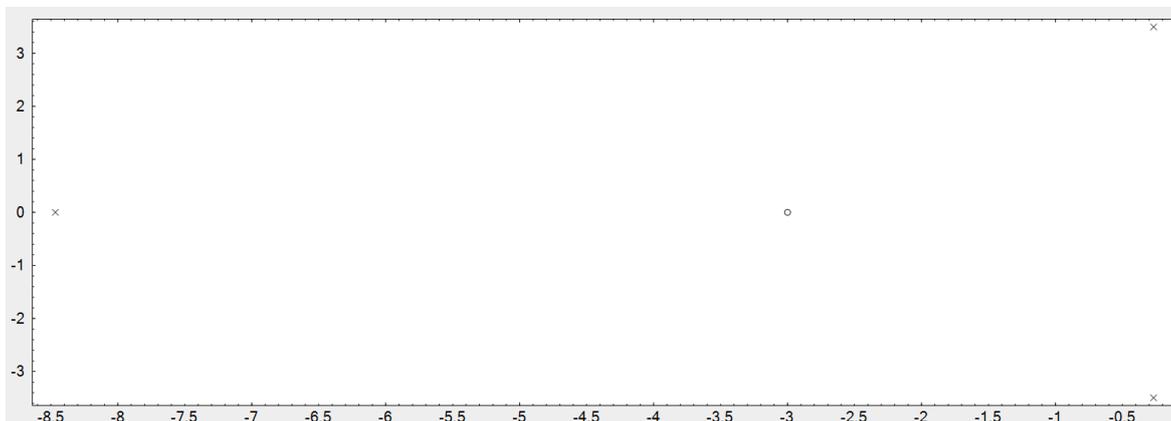


Ilustración 41: Grafica de los polos en Sysquake

Observando que los polos conseguidos son negativos y en su respectiva representación, los puntos están en el semiplano negativo, se puede decir que el sistema es estable.

El comando *issiso*, también nos lo confirma con un *true*.

En Matlab para el estudio de estabilidad según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces teníamos el comando *sisotool()*, ¿Pero y en Sysquake?. A continuación, diseñaremos un algoritmo que nos dé el mismo resultado que en Matlab.

```
subplot(2, 2, 1); % Subplot para el diagrama de Bode de magnitud
bodemag(gs);
scale logdb;
title('Diagrama de Bode - Magnitud');

subplot(2, 2, 2); % Subplot para el diagrama de Bode de fase
bodephase(gs);
scale loglin;
title('Diagrama de Bode - Fase');

subplot(2, 2, 3); % Subplot para la respuesta al escalón
step(gs);
title('Respuesta al Escalón');

subplot(2, 2, 4); % Subplot para el diagrama de Root Locus
rlocus(gs);
scale([-10, 2, -10, 10]);
title('Root Locus');
```

- *Subplot(m,n,p)*: es una función que se encarga en dividir una ventana de gráficos en multiples subplots o áreas para mostrar diferentes gráficos en una sola figura. Donde los parámetros *m*, *n* y *p*, significa el numero de filas, el numero de columnas y la posición del subplot. Estos parámetros se utilizan para determinar la ubicación y el tamaño de cada subplot en la figura.
Por ejemplo, si tengo una figura dividida en 2 filas y 2 columnas , es decir, un total de de 4 subplots, puese usar *subplot(2, 2, 1)* para especificar que el siguiente gráfico se colocará en el primer subplot de la cuadrícula.
- *Bodemag()* y *bodephase()*: Define la magnitud y la fase que tiene el diagrama de Bode de un sistema de tiempo continuo.
- *Step()*: Respuesta de escalón unitario de una función.
- *Rlocus()*: Representación de lugar geométrico de las raíces.
- *Scale()*: La escala que va a tener la grafica según el manual de usuario de Sysquake
(Piguet & Sarl, 2019)

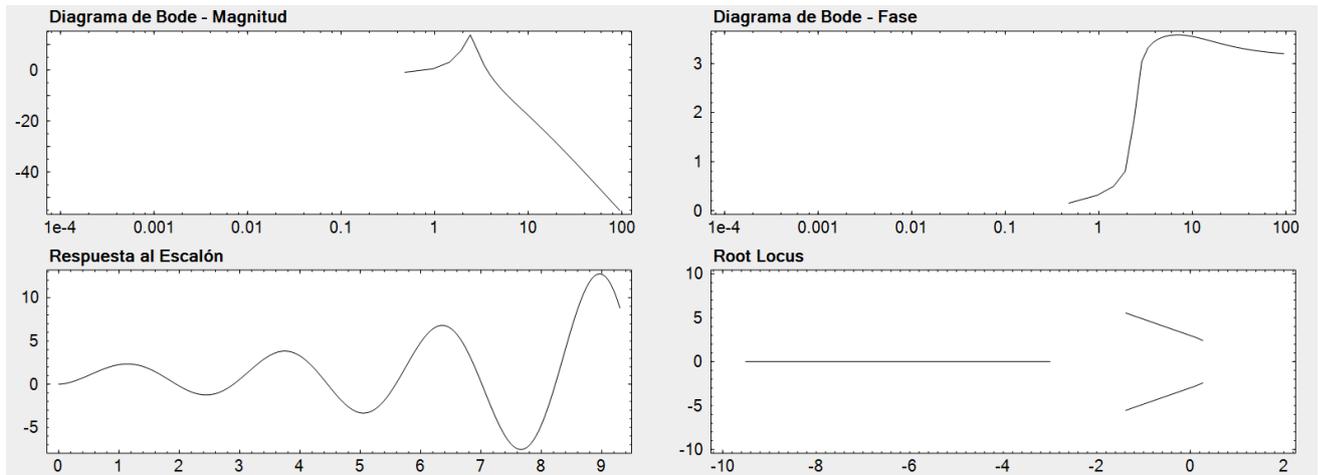


Ilustración 42: Graficas según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces en Sysquake

Las dos gráficas de arriba representan la estabilidad según el diagrama de Bode, donde se puede ver que el sistema es estable, ya que, la gráfica de la magnitud llega a estar en zona positiva cuando a su vez la fase se excita. En cambio, en la gráfica del lugar geométrico de las raíces, nos marca las posiciones donde el sistema será estable.

4. EJEMPLOS DEL USO DE LA HERRAMIENTA

En esta sección se van a describir una serie de ejemplos de uso de la herramienta, así como un resumen del fundamento teórico de cada uno de los ejemplos.

Los ejemplos escogidos, van a ser los mismos del capítulo anterior.

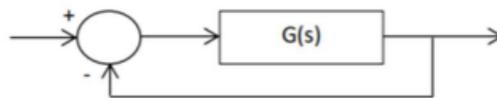
4.1. PARÁMETROS DE FORMA ANALÍTICA DE UNA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Recordando el apartado 3.1, que se obtuvo la siguiente función:

$$G(s) = \frac{10s + 80}{s^2 + 10s + 15}$$

Se analiza bien y se llega a la conclusión de que es un sistema de segundo orden, ósea con dos polos. La salida del lazo cerrado es

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$



Donde el valor de ω_n se llama frecuencia natural del polo de segundo orden y al valor ξ se le denomina coeficiente de amortiguamiento.

Teniendo el tiempo de respuesta del sistema tal que así:

$$t_r = \frac{4}{\sigma} = \frac{4}{\xi\omega_n}$$

La relación entre la sobreoscilación y el valor de ξ es muy compleja, de forma que en este ejemplo usaremos tablas para determinar su valor (Ver Tabla 7).

Ahora que se sabe que es cada cosa, aplicaremos el lazo cerrado unitario de la función $G(s)$. Obteniendo una función de transferencia tal que así:

$$FT = \frac{G(s)}{1 + G(s) * 1} = \frac{\frac{10s + 80}{s^2 + 10s + 15}}{1 + \frac{10s + 80}{s^2 + 10s + 15}} = \frac{10s + 80}{s^2 + 20s + 95}$$

A continuación, comparamos la función anterior con la de la teoría:

$$G(s) = \frac{10s + 80}{s^2 + 20s + 95} \rightarrow \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Donde:

$$\omega_n^2 = 95 \quad y \quad 2\xi\omega_n = 20$$

Es decir:

$$\omega_n = \sqrt{95} = 9.747$$

$$\xi = \frac{20}{2\omega_n} = \frac{20}{2 * 9.747} = 1.02 \rightarrow SO = 0\%$$

Con toda esta información, Sysquake nos proporciona un ejemplo llamado "Second Order Function with cero" donde podremos ir metiendo los datos que nos dice ya sea de forma manual o con la ayuda de una barra reguladora.

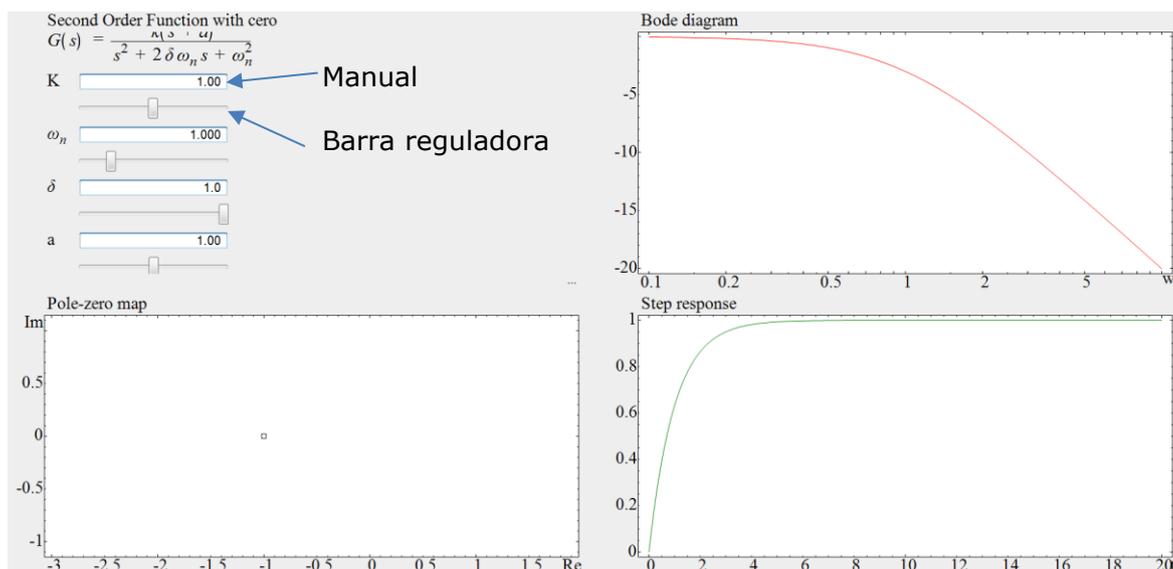


Ilustración 43: Ejemplo interactivo de sistema de segundo orden

En el ejemplo no se aprecia muy bien, pero el formato que nos da para definir el sistema de segundo orden es:

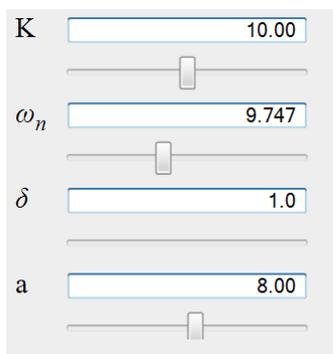
$$G(s) = \frac{k(s + a)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

Entonces, tenemos que convertir la función que nos ha dado antes, a la que nos pide Sysquake.

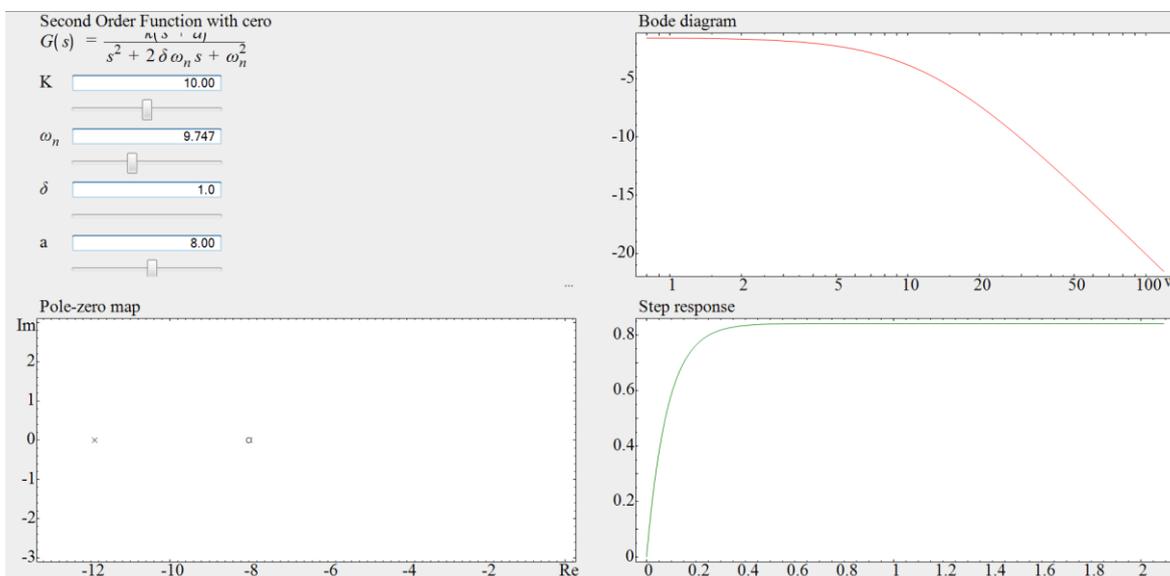
$$G(s) = \frac{10s + 80}{s^2 + 20s + 95} = \frac{10(s + 8)}{s^2 + 20s + 95}$$

Teniendo el formato correcto, pasaremos a introducir los datos en el programa.

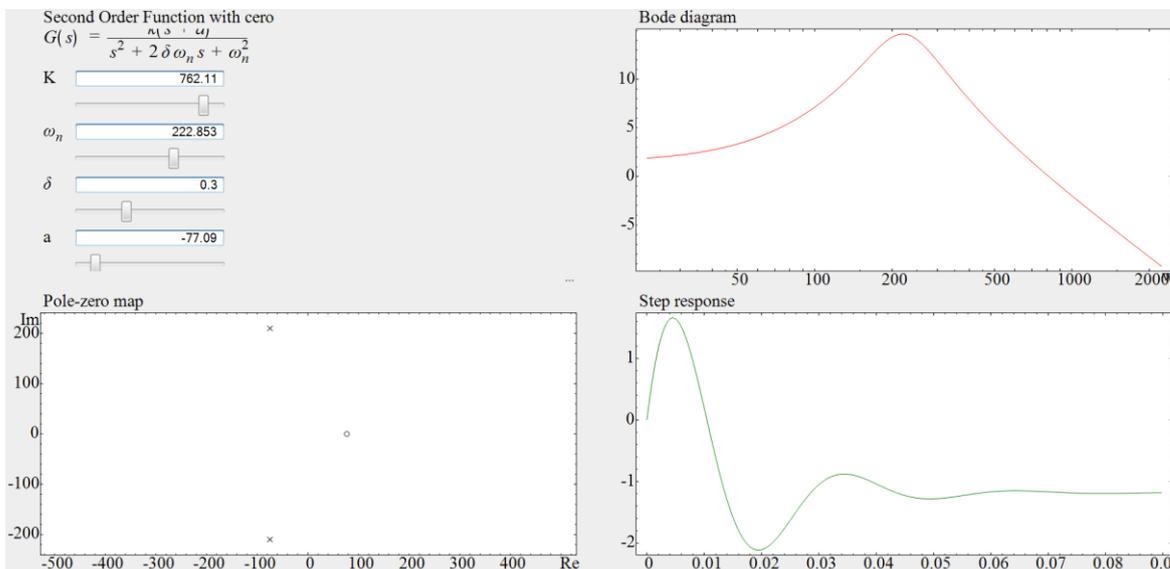
Ejemplos del uso de la herramienta



Obteniendo como resultado las representaciones de los polos y ceros, el diagrama de Bode y la respuesta a escalón unitario.



Estos ejemplos vienen muy bien para el estudiante, ya que puede ver en vivo cómo reaccionan las gráficas al modificar los diferentes valores que proporciona el programa, ya sea manualmente o con la barra reguladora. Un ejemplo de ello es la siguiente imagen:



4.2. ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD

Como en el caso anterior, se implementará lo del capítulo 3.2 en este. Es decir, estudiaremos la estabilidad según el diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces, pero poniendo en práctica el ejemplo interactivo que proporciona Sysquake.

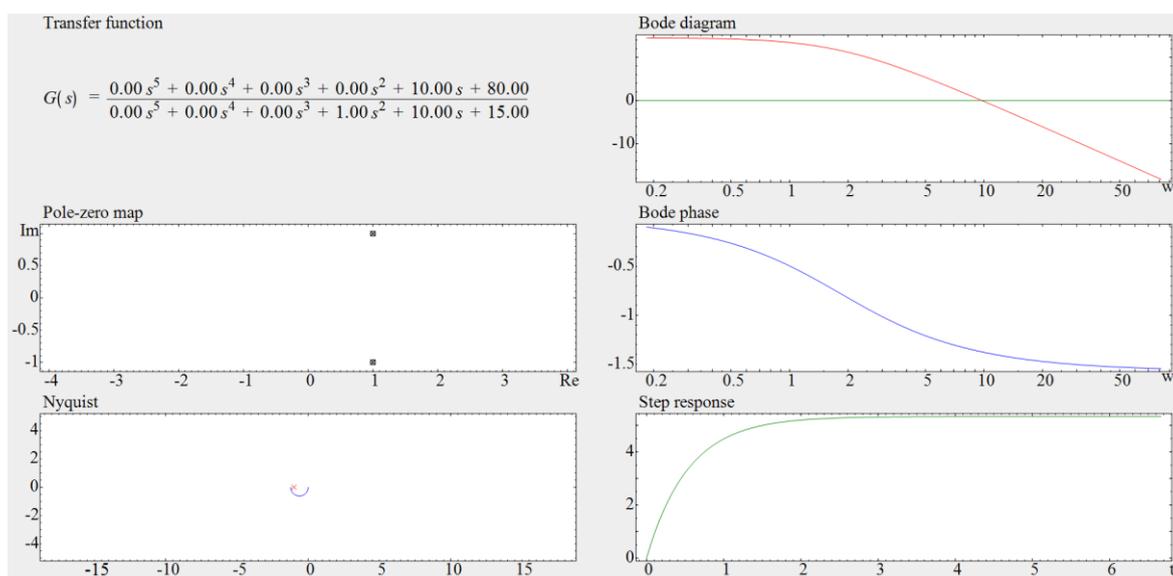


Ilustración 44: Ejemplo interactivo del estudio de estabilidad

Podemos ver que arriba a la izquierda aparece el formato que tiene el ejemplo, debajo de ella está la representación de polos y ceros del sistema, es decir, la gráfica del lugar geométrico de las raíces. Por el contrario, arriba a la derecha se visualiza el diagrama de Bode, primero el de magnitud y segundo el de fase. Debajo suya, se encuentra la gráfica de la señal de entrada según escalón unitario.

Recordemos la función que adquirimos y el valor de la constante K , después de aplicar la teoría de Routh-Hurwitz, para que sea estable.

$$g(s) = \frac{K(4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \frac{4}{5}s + 56}$$

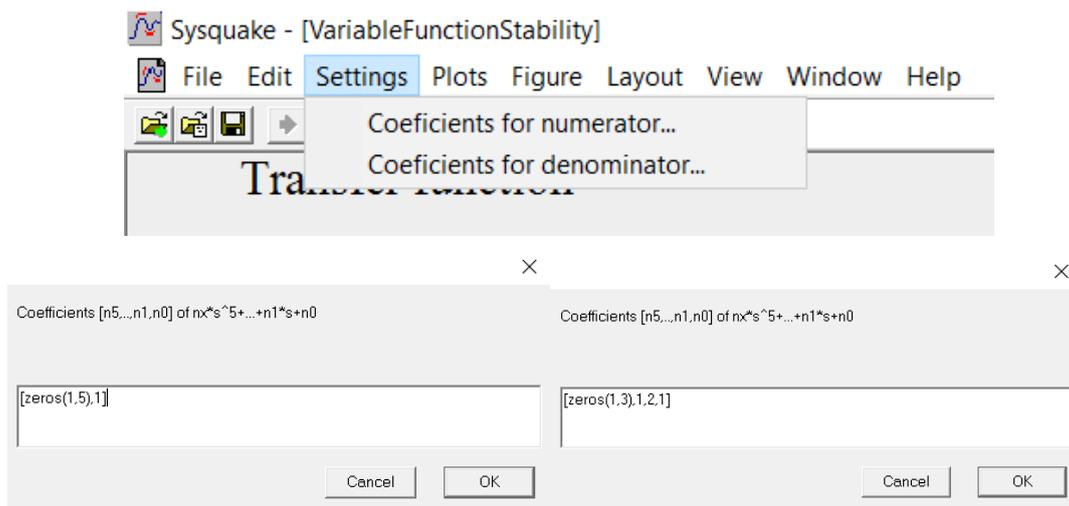
$$FT = \frac{g(s)}{1 + g(s)} = \frac{K(4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \left(\frac{4}{5} + 4K\right)s + 56 + 12K} \rightarrow K > 2.033$$

A continuación, daremos 2 valores a la constante K para ver los dos tipos de estabilidad. Empezamos con $K=1$

$$FT = \frac{1 * (4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \left(\frac{4}{5} + 4 * 1\right)s + 56 + 12 * 1} = \frac{4s + 12}{s^3 + 9s^2 + \frac{24}{5}s + 68}$$

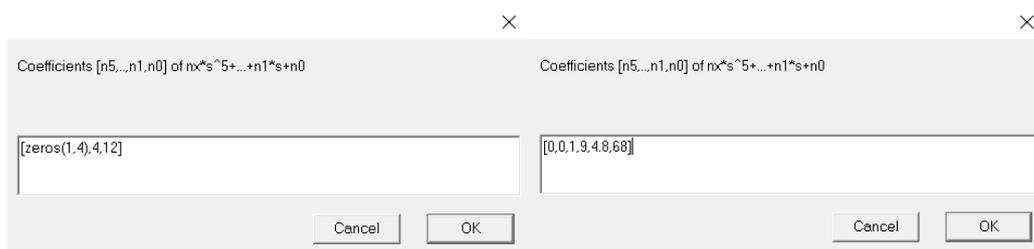
El 1 al ser menor que 2.033, el sistema deberá ser inestable, pero se comprobará utilizando el ejemplo interactivo.

Primero, para introducir los respectivos datos de la función, habrá que ir a la opción de "Settings", donde nos saldrá dos elecciones para modificar "Coefficients for numerator" y "Coefficients for denominator"

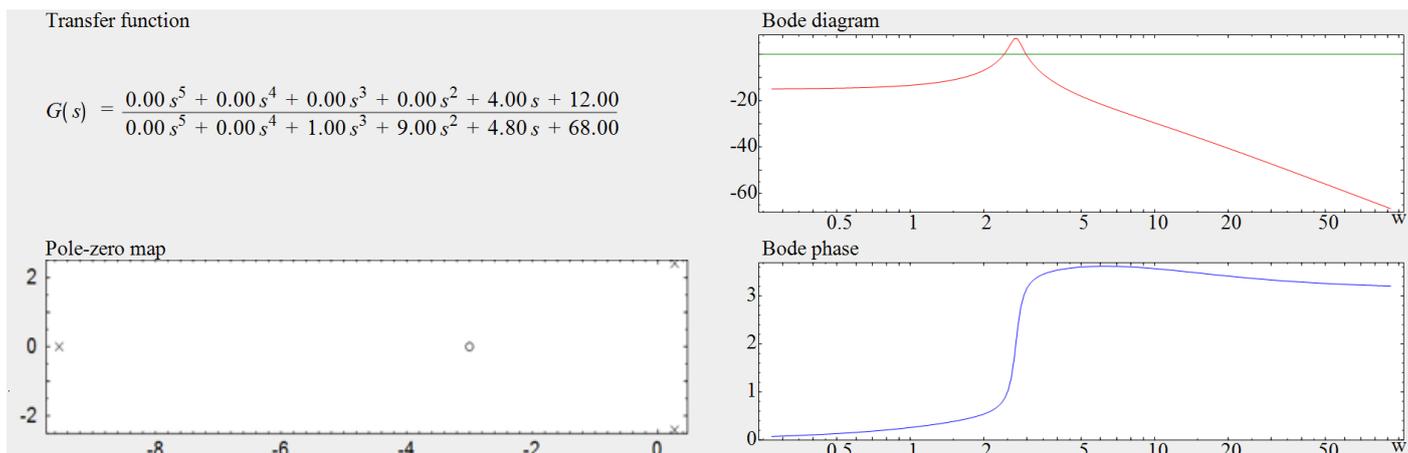


Si elegimos la opción de modificar el numerador, nos saldrá la ventana de la izquierda. Que expresa el valor que va a tener cada una de las posiciones del numerador, en este caso, del primero al quinto escribirá un 0 y en la sexta posición un 1. Pasa lo mismo si elegimos la opción de modificar el denominador, la ventana de la derecha. Porque hay que dar un valor en orden a las posiciones del denominador, el ejemplo anterior nos dice que desde la primera hasta la tercera posición escribirá un 0, en la cuarta un 1, en la quinta un 2 y en la última un 1.

Sabiendo como se introducen los valores para una función de transferencia, lo aplicaremos para el ejercicio anterior.



Ejemplos del uso de la herramienta

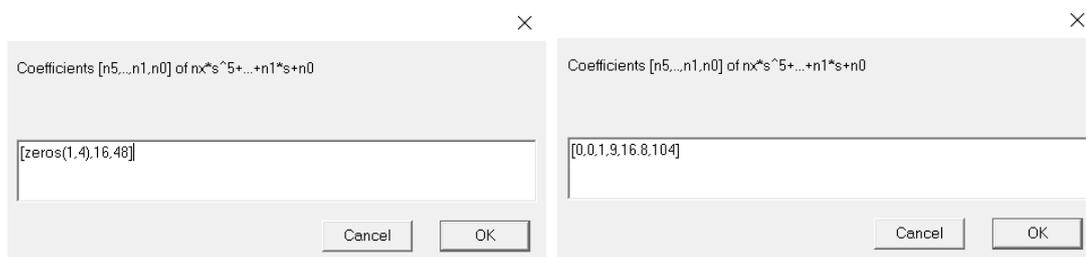


Con la señal de entrada a escalón unitario y el criterio de Nyquist, también se puede estudiar la estabilidad de la función, pero ahora solo nos centraremos en los resultados del diagrama de Bode y el lugar geométrico de las raíces. Como era de esperar la función es inestable, ya que, 2 de los 3 polos conseguidos son positivos y en la parte de la fase del diagrama de Bode, la señal se excita, pero aun así tiende a estar en la parte positiva, un indicio de que la función es inestable.

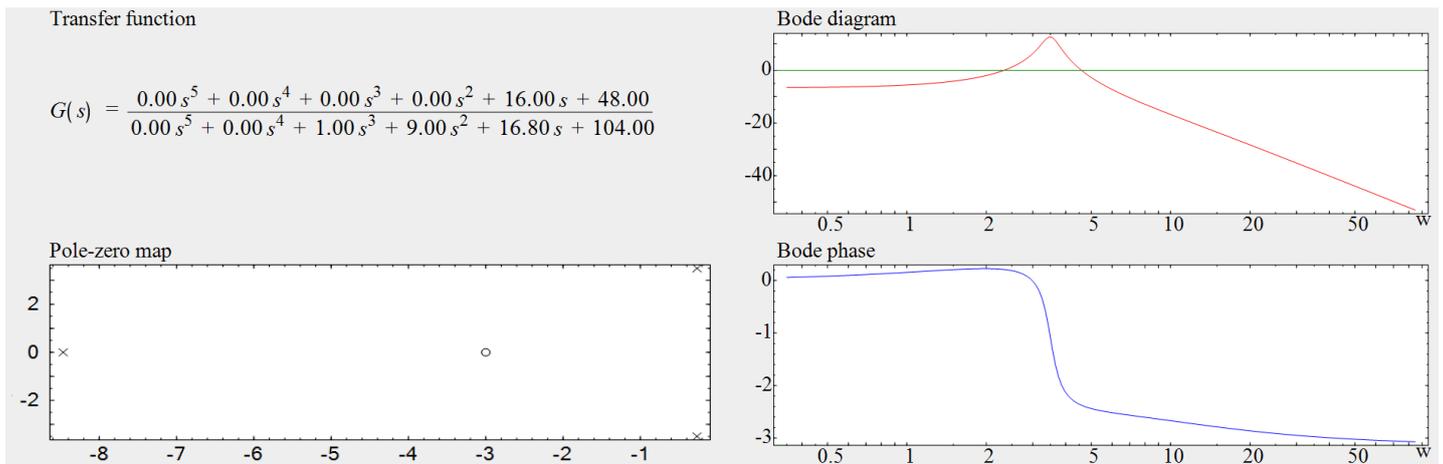
Ahora, cambiaremos el valor de la constante K y le daremos un número mayor que 2.033, por ejemplo, el número 4. A continuación, volveremos a calcular su función de transferencia.

$$FT = \frac{4 * (4s + 12)}{s^3 + 9s^2 + \left(\frac{4}{5} + 4 * 4\right)s + 56 + 12 * 4} = \frac{16s + 48}{s^3 + 9s^2 + \frac{84}{5}s + 104}$$

El 4 al ser mayor que 2.033, el sistema deberá ser estable, pero se comprobará utilizando el ejemplo interactivo.



Ejemplos del uso de la herramienta



Como hemos explicado anteriormente, introducimos los datos en la opción de "Settings" → "Coefficients for numerator" y "Coefficients for denominator". Y se ve que se cumple con lo dicho, la función es estable. Ya que, esta vez los 3 polos están en el semiplano negativo y la parte de la fase del diagrama de Bode incita hacia la parte negativa.

5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El objetivo de este TFG se pretende hacer una investigación del software Sysquake para implementarla en estudios o practicas universitarias. Para ello se hará un estudio detallado del programa, analizando todos los elementos que los componen. Por consiguiente, se deberá realizar diversas pruebas en el programa de diferentes sectores de trabajo. Las pruebas estarán compuestas de todo tipo de simulaciones, de los cuales deberemos garantizar resultados convenientes a los respectivos ensayos. Por último, llegaremos a una conclusión final de que tan fiable y útil es el software para estudiantes universitarios o similares y cuánto te puede ayudar a tu vida académica.

Después de completar este trabajo, los objetivos del proyecto fin de grado se han cumplido. Por una parte, se quería ilustrar que tan fiable y útil es el programa Sysquake y por otro, como ayudaría al estudiante en su vida académica. Durante el desarrollo de este TFG, se han estudiado las propiedades que tiene Sysquake frente a otros programas para resolver problemas de ingeniería, en este caso Matlab. Esto ha hecho ver que comparten varias cosas, algo positivo para el estudiante, ya que Matlab, al ser un software bastante extendido y famoso en el mundo de la ingeniería, no habría problema en implementarlo, puesto que un gran porcentaje de los comandos empleados en dicho programa, son iguales en Sysquake. Una prueba de ello es el punto 3 de este trabajo, pues se implementan dos ejercicios universitarios en los 2 programas y se ve que comandos tienen en común y cuáles no. Llegando a la conclusión de que dan el mismo resultado, aunque en algunas ocasiones utilizando un método distinto, pero fiable y útil. Por todos estos motivos se considera cumplido el primer objetivo del TFG.

El segundo objetivo del TFG persigue que tan beneficiario es para la vida académica de un estudiante. En el capítulo 4, se ha ido desarrollando y explicando los dos ejercicios empleados en el capítulo 3, donde se han empleado los ejemplos interactivos que proporciona Sysquake. Una forma de llamar la atención del usuario, puesto que no hace falta escribir un código para visualizar, de manera gráfica, el resultado. Se observa perfectamente que los resultados obtenidos tanto de manera escrita como empleando los ejemplos interactivos son los mismos. Pero sin la dificultad de tener que aprender un código de programación, sino que con la teoría implantada en clase o la que hayas visto tu por tu cuenta, es suficiente. Por todo esto, se consideran cumplidos los objetivos propuestos inicialmente al comenzar el TFG.

Sin embargo, debido a la restricción de tiempo de este trabajo, han quedado fuera algunos aspectos que deberán ser desarrollados posteriormente durante la preparación del proyecto. Estos se detallan en el siguiente apartado.

5.1. TRABAJOS FUTUROS

En base al análisis y desarrollo llevado a cabo en este TFG, se han identificado diversas oportunidades y áreas de mejora que podrían ser abordadas en futuros trabajos. A continuación, se detallan algunos posibles trabajos futuros que podrían contribuir al avance y perfeccionamiento de la implementación de Sysquake frente a Matlab en el ámbito universitario.

- Evaluación comparativa del software: Sería interesante realizar un estudio comparativo exhaustivo entre Sysquake y Matlab en otras áreas de la ingeniería. Esto permitiría obtener resultados cuantitativos y cualitativos sobre las ventajas y desventajas de cada sistema, facilitando la toma de decisiones informadas sobre su implementación y adopción.
- Implementación y seguimiento de Sysquake: Una posible línea de trabajo futuro consistiría en llevar a cabo la implementación completa de Sysquake en la universidad y realizar un seguimiento detallado de su funcionamiento y aceptación por parte de los usuarios. Esto permitiría identificar posibles problemas o áreas de mejora, así como evaluar el impacto real del nuevo software en términos de eficiencia, usabilidad y satisfacción de los alumnos.
- Cuestionario de seguimiento y evaluación: Para obtener una visión más completa de la opinión de los alumnos, se podría diseñar un cuestionario periódico que permita recopilar su percepción y experiencia con el nuevo software. Esto ayudaría a identificar áreas de mejora, detectar posibles dificultades de uso y recoger sugerencias para futuras actualizaciones y ajustes.
- Análisis de resultados y retroalimentación continua: Es importante realizar un análisis exhaustivo de los resultados obtenidos a partir del cuestionario y otras fuentes de información relevante. Esto proporcionaría una retroalimentación continua sobre la implementación del nuevo software, permitiendo realizar ajustes y mejoras iterativas en función de las necesidades y preferencias de los usuarios.

Se recomienda que los trabajos futuros mencionados sean abordados de manera secuencial y en colaboración con el personal docente y los usuarios finales involucrados. Esto garantizará una implementación efectiva y exitosa del programa, maximizando así los beneficios para la comunidad universitaria.

6. OBJETIVOS DE DESARROLLO SOSTENIBLE

Los objetivos de este Trabajo Fin de Grado están alineados con los siguientes Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y metas, de la Agenda 2030:

- **Objetivo 4** - Garantizar una educación inclusiva y equitativa de calidad y promover oportunidades de aprendizaje permanente para todos



- Meta 4.4 De aquí a 2030, aumentar considerablemente el número de jóvenes y adultos que tienen las competencias necesarias, en particular técnicas y profesionales, para acceder al empleo, el trabajo decente y el emprendimiento

- **Objetivo 8** - Promover el crecimiento económico sostenido, inclusivo y sostenible, el empleo pleno y productivo y el trabajo decente para todos



- Meta 8.2 Lograr niveles más elevados de productividad económica mediante la diversificación, la modernización tecnológica y la innovación, entre otras cosas centrándose en los sectores con gran valor añadido y un uso intensivo de la mano de obra
- Meta 8.3 Promover políticas orientadas al desarrollo que apoyen las actividades productivas, la creación de puestos de trabajo decentes, el emprendimiento, la creatividad y la innovación, y fomentar la formalización y el crecimiento de las microempresas y las pequeñas y medianas empresas, incluso mediante el acceso a servicios financieros

- **Objetivo 9** – Construir infraestructuras resilientes, promover la industrialización sostenible y fomentar la innovación



- Meta 9.5 Aumentar la investigación científica y mejorar la capacidad tecnológica de los sectores industriales de todos los países, en particular los países en desarrollo, entre otras cosas fomentando la innovación y aumentando

considerablemente, de aquí a 2030, el número de personas que trabajan en investigación y desarrollo por millón de habitantes y los gastos de los sectores público y privado en investigación y desarrollo

- Meta 9 b Apoyar el desarrollo de tecnologías, la investigación y la innovación nacionales en los países en desarrollo, incluso garantizando un entorno normativo propicio a la diversificación industrial y la adición de valor a los productos básicos, entre otras cosas

7. BIBLIOGRAFÍA

Automatismos Y Control. (2013, mayo 3).

<http://yubeialzola.blogspot.com/2013/05/ejemplo-de-utilizacion-de-laplace-en.html>

Berenguer, B. E. P. (2007). *INTRODUCCION A LOS SISTEMAS DE CONTROL*. <http://dea.unsj.edu.ar/control1/apuntes/unidad1y2.pdf>

C, S. (2019a, octubre 5). ▷ *Diagrama de Bode*. Control Automático Educación. <https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/1-diagrama-de-bode/>

C, S. (2019b, octubre 6). ▷ *Criterio de Estabilidad de Routh-Hurwitz*. Control Automático Educación. <https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/criterio-de-estabilidad-de-routh-hurwitz/>

C, S. (2019c, octubre 6). ▷ *Error en Estado Estacionario— [Sistemas de Control]*. Control Automático Educación. <https://controlautomaticoeducacion.com/control-realimentado/error-en-estado-estacionario/>

Cap1_control automatico. (2009). https://ocw.ehu.eus/file.php/83/cap1_html/introduccion-al-control-automatico.html

Capitulo 6—Lugar de las Raíces—Studocu. (2018, 2019). <https://vdocuments.net/automatica-ejercicios-capitulo-6-lugar-de-las-raices-y-calcular-el-valor.html?page=3>

Circuito RC. (2022). En *Wikipedia, la enciclopedia libre*. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Circuito_RC&oldid=144742672

- Control System Toolbox Documentation—MathWorks España.*
(2023).
https://es.mathworks.com/help/control/index.html?s_tid=CRUX_lftnav
- Ejercicios Resueltos Diagrama de Bloques—Studocu.* (2018, 2019).
<https://www.studocu.com/co/document/universidad-internacional-de-la-rioja-en-colombia/teoria-de-la-investigacion/ejercicios-resueltos-diagrama-de-bloques/36508788>
- Esteban Escaño, Javier. (2013). *FUNDAMENTOS DE AUTOMÁTICA EUPLA* (Área de electrónica y regulación automática).
- Gráficas—MATLAB & Simulink—MathWorks España.* (2023).
<https://es.mathworks.com/help/matlab/graphics.html>
- Javier Esteban Escaño. (2022). *TFM_Desarrollo de una herramienta software interactiva en Sysquake.*
- Juárez, D. A. G. (2010). *CURSO DE SEÑALES Y SISTEMAS.*
<https://sivea.uson.mx/docentes/tareas/seyales-elementales.pdf>
- Modelos matematicos.* (2013, mayo 4).
<http://yubeialzola.blogspot.com/p/blog-page.html>
- Moncada, L. (2020, octubre 14). *DIAGRAMAS DE BLOQUES. Ingeniería Química .tech.* <http://ingenieriaquimica.tech/diagramas-de-bloques/>
- Noguera, I. B. (2020, diciembre 4). *Introducción a los sistemas de control automático.*
<https://www.ingenieriaquimicareviews.com/2020/12/sistemas-de-control-automatico-introduccion.html>
- Piguet, Y., & Sarl, C. (2019). *Sysquake User Manual.*
<https://calerga.com/doc/SQ65.pdf>
- Sysquake.* (2023).
<https://calerga.com/products/Sysquake/index.html>



Yumpu.com. (2013, mayo 6). *Diagrama de Bloques*.

<https://www.yumpu.com/es/document/read/14073658/diagrama-de-bloquespdf>



Relación de documentos

Memoria 77 páginas

Anexos páginas

La Almunia, a 07 de junio de 2023

Firmado: Einar Vladimir Illanes Vargas