



**Universidad**  
Zaragoza

# Proyecto Fin de Carrera

Modelación funcional y simulación numérica de  
sistemas no lineales

Autor

Alberto Mur España  
Ingeniería Industrial / Diseño de máquinas y vehículos

Director y ponente

Elvio Bonisoli / Politécnico de Turín  
Luis Castejón Herrero / Universidad de Zaragoza

Universidad de Zaragoza / Escuela de Ingeniería y Arquitectura  
2013

## ***Agradecimientos***

*A mi familia, especialmente a mis padres, Alberto y Maria Isabel, por apoyarme y ayudarme continuamente a llegar hasta aquí, y a mis hermanas, Mónica e Isabel, por servirme como ejemplo de las cosas bien hechas.*

*A la larga lista de profesores que me han educado y me han ido formando como persona y profesional. Mención especial para aquellos sin cuya ayuda éste Proyecto Final de Carrera hubiese sido imposible, mi director D. Elvio Bonisoli del Politécnico de Turín, y a las personas de su equipo de investigación, D. Francesco Di Monaco y D. Gabriele Marcuccio, y a mi ponente, D. Luis Castejón Herrer, por sus correcciones y sugerencias.*

*A todos mis amigos, de Huesca y Zaragoza, pero sobre todo a aquellos que hice durante el magnífico año que disfrute en Torino, tanto Españoles como Italianos. Gracias a los 'Gambiteros' por aquellos momentos únicos.*

## MODELACIÓN FUNCIONAL Y SIMULACIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS NO LINEALES RESUMEN

Este Proyecto Final de Carrera se desarrolla en el ámbito del análisis de sistemas dinámicos no lineales y particularmente intenta demostrar la validez de la transformación de la clásica ecuación dinámica con las matrices de masa, amortiguación y rigidez, que utiliza coordenadas espaciales, a la ecuación equivalente en coordenadas modales, que se utiliza habitualmente para desacoplar las ecuaciones dinámicas, y su aplicación a la resolución de problemas por elementos finitos. Esta transformación proviene del Análisis Modal de sistemas dinámicos y su ventaja radica en que la matriz modal es constante en cada configuración del sistema y sólo varía cuando cambia la configuración, por lo que es posible obviar las no linealidades del sistema presentes sobre todo en la matriz de rigidez. Si además consideramos que el Análisis Modal es capaz de simplificar la respuesta de un sistema considerando sólo unas pocas variables, los modos propios y sus frecuencias naturales, y que las más influyentes en la dinámica de los sistemas son los primeros modos propios, la conclusión es que la matriz modal se puede reducir enormemente considerando solamente estos primeros modos propios. Aplicando todas estas modificaciones en un modelo desarrollado en Matlab/Simulink, al final de este trabajo se puede comprobar cómo el cálculo es mucho más veloz con respecto al cálculo de un software comercial de elementos finitos como Abaqus/Explicit y que los errores cometidos son despreciables.

La primera parte de este Proyecto Final de Carrera se enfoca en conocer en profundidad la técnica de reducción que estamos aplicando mediante la simulación de dos sistemas de masas distribuidas muy sencillos. Estos ejemplos nos han permitido comprobar por un lado que la evolución dinámica de los sistemas antes y después de la transformación es idéntica, lo cual es fundamental para continuar con el desarrollo, y por otro lado nos ha servido para detectar problemas sobre todo cuando el sistema cambia de una configuración a otra. En las simulaciones por elementos finitos es habitual que los sistemas cambien de configuración, por ejemplo, se consideran nuevas condiciones de contorno, se aplican fuerzas diferentes, los sistemas evolucionan dinámicamente ante estos cambios y hemos considerado importante tratar este aspecto en el modelo desarrollado. En un principio hemos considerado únicamente dos configuraciones o niveles, pero en futuros trabajos el método se desarrollará para considerar tantas configuraciones como sea necesario.

La segunda parte se basa en la comparación de las simulaciones en Abaqus/Explicit y del modelo desarrollado en Matlab/Simulink de un impacto de una viga libre – articulada con un soporte cuando la viga desciende a causa de la fuerza gravitatoria. Esta comparación nos ha permitido comprobar la gran utilidad de este método dado que la solución es de gran similitud con la calculada por Abaqus. Dado que el modelo desarrollado considera únicamente el Análisis Modal, ha sido necesario superponer el movimiento como sólido rígido de la viga para compararlo con Abaqus, por lo que el resultado final ha sido una composición de Análisis Modal con Análisis Dinámico de Sistemas Multicuerpo.

## TABLA DE CONTENIDOS

1. Introducción .....	3
2. Sistemas de masas discretizadas con varios grados de libertad.....	6
2.1 Sistema con cinco grados de libertad.....	7
2.2 Sistema con ocho grados de libertad.....	10
3. Impacto de una viga articulada - libre.....	12
3.1 Resolución analítica del problema de valores propios.....	13
3.2 Extracción de frecuencias naturales con Abaqus/Standard .....	15
3.3 Extracción de frecuencias naturales con LUPOS.....	16
3.4 Comparación de modos propios: El Criterio de Confianza Modal .....	17
3.5 Simulación con Abaqus/Explicit.....	21
3.6 Simulación según el Análisis Modal Multinivel .....	26
4. Conclusiones.....	30
5. Aplicaciones y futuros desarrollos .....	33
Bibliografía .....	35
Índice de figuras.....	36
Índice de tablas .....	38
Anexos.....	39
Anexo I – Matrices dinámicas utilizadas en la simulación de masas discretizadas con varios grados de libertad.....	40
Anexo II – Evaluación dinámica de la fuerza de reacción cuando hay contacto..	45
Anexo III – Resolución analítica detallada del problema de valores propios para la viga sin masa en el extremo libre .....	47
Anexo IV – Visualización de los diez primeros modos propios extraídos en Abaqus/Standard y Lupos en ambas configuraciones para la viga sin masa en el extremo libre .....	51
Anexo V – El Criterio de Confianza Modal.....	55
Anexo VI – Movimiento como sólido rígido de la viga .....	56
Anexo VII – Resumen gráfico de las simulaciones de impacto de la viga con masas de 100 y 200 gramos respectivamente en el extremo libre .....	58
Anexo VIII – Esquema gráfico del modelo del Análisis Modal Multinivel desarrollado en Matlab/Simulink.....	62

## 1. Introducción

El objetivo de este Proyecto Final de Carrera es demostrar la validez de un método de resolución lineal de problemas de elementos finitos, incluyendo los problemas de naturaleza no lineales. Esta validez se evaluará en términos de precisión en el resultado y de tiempo de computación necesario. Si, como pensamos, el método es aplicable, el alcance de este Proyecto Final de Carrera será de gran interés para el desarrollo computacional de nuevos software de resolución de problemas de ingeniería por elementos finitos.

Este estudio se ha desarrollado con la ayuda de diversos miembros del Politécnico de Turín. Entre ellos cabe destacar al Profesor Asociado e investigador Elvio Bonisoli y a los estudiantes de Doctorado Francesco Di Monaco y Gabriele Marcuccio. Sus investigaciones se centran principalmente en el estudio de sistemas dinámicos no lineales y demostrar que el método utilizado en este Proyecto Final de Carrera es válido supone para su grupo de investigación adoptar la iniciativa en el desarrollo y optimización del método que a continuación detallaremos para adaptarlo a la resolución de todo tipo de problemas por elementos finitos.

De aquí en adelante nos vamos a referir como Análisis Modal Multinivel al método que vamos a aplicar. Como el propio nombre indica sirve para analizar las oscilaciones o vibraciones de uno o varios puntos de una estructura respecto de su posición de equilibrio cuando se ve sometido a fuerzas externas, y la palabra multinivel indica que es un método aplicable incluso cuando el sistema cambia su configuración. Partiendo de la ecuación general de análisis dinámico en forma matricial [1] [2]:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$$

Considerando no linealidades en forma paramétrica:

$$\mathbf{M}(\alpha) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\alpha) \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\alpha) \mathbf{x} = \mathbf{f}(t)$$

Dado que las matrices de masa, amortiguación y rigidez son de dimensiones  $n \times n$  y el vector de desplazamiento es de dimensión  $n \times 1$ , consideramos una matriz de transformación  $\mathbf{T}$  de dimensión  $n \times v$  que tiene en cuenta la aplicación de condiciones de contorno, uniones rígidas y elementos rígidos:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{T}_{RJs} \\ \mathbf{T}_{RBE} \\ \mathbf{T}_{BCs} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{T} = \mathbf{T}_{RJs} \mathbf{T}_{RBE} \mathbf{T}_{BCs}$$

Aplicando dicha matriz de transformación obtenemos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_{BCs} \rightarrow \mathbf{x}_{BCs} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{x} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T \mathbf{x}$$

$$\mathbf{M}_{BCs} = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{C}_{BCs} = \mathbf{T}^T \mathbf{C} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{K}_{BCs} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$$

$$\mathbf{f}_{BCs} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}$$

Con lo que se obtiene la siguiente ecuación dinámica, considerando ya la aplicación de las condiciones de contorno específicas para cada problema:

$$\mathbf{M}_{BCs} \ddot{\mathbf{x}}_{BCs} + \mathbf{C}_{BCs} \dot{\mathbf{x}}_{BCs} + \mathbf{K}_{BCs} \mathbf{x}_{BCs} = \mathbf{f}_{BCs}$$

Llegados a este punto procedemos a considerar uno de los puntos más importantes en este estudio, que es manipular la ecuación anterior utilizando la Transformación a Coordenadas Modales. Esta transformación permite desacoplar las ecuaciones dinámicas e introduce la consideración simultánea de coordenadas espaciales y coordenadas modales a través de la matriz modal:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}_{BCs} = \mathbf{\Phi}_{BCs} \boldsymbol{\eta} \\ \dot{\mathbf{x}}_{BCs} = \mathbf{\Phi}_{BCs} \dot{\boldsymbol{\eta}} \\ \ddot{\mathbf{x}}_{BCs} = \mathbf{\Phi}_{BCs} \ddot{\boldsymbol{\eta}} \end{array} \right\} \rightarrow \mathbf{M}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{C}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{K}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{f}_{BCs}$$

Si multiplicamos por la transpuesta de la matriz modal:

$$\mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{M}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{C}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \dot{\boldsymbol{\eta}} + \mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{K}_{BCs} \mathbf{\Phi}_{BCs} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{f}_{BCs}$$

Y si dicha matriz la hemos formado por los vectores propios normalizados con respecto a la masa, obtenemos la ecuación fundamental del Análisis Modal Multinivel:

$$\mathbf{I} \ddot{\boldsymbol{\eta}} + \text{diag}(2\xi_r \omega_r) \dot{\boldsymbol{\eta}} + \text{diag}(\omega_r^2) \boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{f}_{BCs}$$

El último paso de este razonamiento es evaluar las condiciones iniciales de las nuevas coordenadas modales. Si consideramos la expansión de los vectores propios:

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_{BCs} = \mathbf{T} \mathbf{\Phi}_{BCs} \boldsymbol{\eta} = \mathbf{\Phi} \boldsymbol{\eta}, \text{ con } \mathbf{\Phi} = \mathbf{T} \mathbf{\Phi}_{BCs}$$

Y utilizando una pseudo-inversa, en este caso nos interesa la inversa de mínimos cuadrados [3] [4]:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_0 = \mathbf{T} \mathbf{\Phi}_{BCs} \boldsymbol{\eta}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{T} \mathbf{\Phi}_{BCs} \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{\eta}_0 = \mathbf{\Phi}_{BCs}^{-1*} \mathbf{T}^{-1*} \mathbf{x}_0 \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_0 = \mathbf{\Phi}_{BCs}^{-1*} \mathbf{T}^{-1*} \dot{\mathbf{x}}_0 \end{cases}$$

Con  $\mathbf{T}^{-1*} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T})^{-1} \mathbf{T}^T$ ,  $\mathbf{\Phi}_{BCs}^{-1*} = (\mathbf{\Phi}_{BCs}^T \mathbf{\Phi}_{BCs})^{-1} \mathbf{\Phi}_{BCs}^T$

El anterior es el paso más importante en la aplicación del Análisis Modal Multinivel. Para conseguir mayor rapidez en el cálculo vamos a considerar solamente algunos pocos de los primeros modos de vibración, por lo que la matriz modal no va a ser cuadrada y no podemos aplicar una inversa tradicional. Al aplicar una pseudo-inversa estamos cometiendo un error, pero que consideramos

que va a ser despreciable. De este modo estamos aplicando quizás una de las propiedades más importantes del Análisis Modal, que es su habilidad para reducir la complejidad de un problema a la consideración de sólo unas pocas variables, los modos propios y las frecuencias naturales.

Al integrar ahora en coordenadas modales y no en coordenadas espaciales estamos evitando el problema de integrar en cada paso de simulación grandes matrices que se vuelven más incómodas en el cálculo cuando consideramos no linealidades, especialmente en la matriz de rigidez. Con la Transformación a Coordenadas Modales pasamos el problema a integrar la matriz modal, que es constante y sólo cambia cuando pasamos a otra configuración del sistema y que además reducimos enormemente al considerar solo los primeros modos de vibración.

Una vez explicado el nuevo método, que ha sido desarrollado en el entorno Matlab/Simulink, se procede a comprobar su validez y a detectar posibles problemas y sus soluciones con dos ejemplos muy sencillos de sistemas de masas discretizadas con varios grados de libertad. Se considerará solo dos niveles de configuración y se utilizarán las siguientes técnicas de análisis de señal de vibraciones:

- Análisis temporal. Comprobaremos la solución dada por el Análisis Modal Multinivel con la conseguida por la Integración Directa de las matrices de masa, amortiguación y rigidez.
- Análisis frecuencial. Se aplicará un análisis mediante la Transformada discreta de Fourier para comprobar que las frecuencias de la respuesta coinciden con las frecuencias naturales del sistema.
- Análisis temporal y frecuencial simultáneamente. Nos permitirá evaluar la evolución de las frecuencias en la respuesta del sistema cuando se cambia de una configuración a otra.

Por último, se compara un caso simple, aunque real, de impacto de una viga articulada – libre en sus extremos. En este caso haremos uso del software comercial de elementos finitos Abaqus para comprobar la solución del Análisis Modal Multinivel frente a la simulación llevada a cabo en Abaqus/Explicit. Analizaremos las frecuencias naturales del sistema mediante el uso de tres técnicas diferentes:

- Resolución analítica del problema de los valores propios.
- Frecuencias naturales extraídas de la simulación en Abaqus/Standard.
- Frecuencias naturales calculadas con el software LUPOS, desarrollado por el grupo de investigación del Politécnico de Turín. Este software es capaz de considerar modelos paramétricos y lo utilizamos en la evaluación de las matrices modales multinivel.

En este caso, utilizaremos también las técnicas de análisis de señal temporal, frecuencial y ambas simultáneamente.

## 2. Sistemas de masas discretizadas con varios grados de libertad

Los sistemas discretizados con masas puntuales suponen una simplificación de los sistemas continuos reales que nos permite utilizar la ecuación del análisis dinámico en forma matricial. Además, es una de las bases del análisis por elementos finitos, ya que como su nombre indica éste divide el sistema en pequeños elementos discretizados cada uno con un valor proporcional de masa, amortiguación y rigidez.

El empleo de dos sistemas de masas discretizadas nos sirve para comprobar la validez del método y para identificar posibles problemas. En concreto, dos conclusiones fundamentales han sido observadas con estas simulaciones:

- La evolución en el tiempo de las coordenadas espaciales debe ser continua, mientras que la evolución temporal en coordenadas modales es necesariamente discontinua en el momento en que se cambia de nivel.
- Al cambiar de nivel las nuevas condiciones de contorno deben ser aplicadas una paso de simulación anterior al cambio de la matriz modal, es decir, ambas señales no pueden estar sincronizadas.

Se van a analizar dos sistemas, el primero con cinco grados de libertad y el segundo con ocho. Para ambos casos se verificará primero que la solución temporal de desplazamiento de los diferentes nodos es idéntica utilizando el Análisis Modal Multinivel como empleando la Integración Directa de las matrices de masa, amortiguación y rigidez. Seguidamente, y sabiendo que el paso anterior ha sido concluido con éxito, se procede a simular la evolución temporal de los desplazamientos nodales mientras el sistema cambia entre dos configuraciones. La primera configuración o nivel es el sistema con todos los grados de libertad hábiles, mientras que en la segunda configuración se bloqueará el grado de libertad de unos de los nodos y se observará cómo evoluciona el sistema. En sistemas con tan pocos grados de libertad el hecho de bloquear el movimiento de unos de los nodos puede suponer un gran efecto disipativo según el momento en el que se bloquee dicho nodo. Por ejemplo, en uno de los casos se bloquea el nodo cuando éste alcanza una posición de velocidad nula, es decir, una posición extrema en la vibración de dicho nodo. En la evolución temporal del resto de nodos se espera que éste efecto no sea muy disipativo y que el resto de nodos sigan con su vibración con una amplitud parecida y decreciente por efecto de la amortiguación de tipo Rayleigh. En otro caso simularemos contacto entre la bancada y uno de los nodos cuando éste comienza los desplazamientos negativos respecto de su posición de equilibrio, es decir, exactamente en su posición de equilibrio que es una posición de velocidad máxima. Por ello esperamos que este contacto sea mucho más disipativo y que la amplitud de vibración del resto de nodos se vea muy influenciada por esta ausencia de energía. Hay que decir que en este contacto el nodo se puede mover en su desplazamiento positivo respecto de su posición de equilibrio cuando la dinámica del sistema lo requiere, por lo tanto estamos simulando dos configuraciones en las que en la primera no hay contacto y en la segunda hay contacto, lo cuál nos va a ser de gran utilidad para el último ejemplo

del impacto de la viga articulada – libre. Las matrices utilizadas en las simulaciones se pueden consultar en el Anexo I. El Anexo II recoge las ecuaciones dinámicas para la evaluación de la reacción en el contacto.

## 2.1 Sistema con cinco grados de libertad

El sistema considerado se puede apreciar en la figura 1. Como se ve los nodos 1 y 5 son solidarios a la bancada, mientras que el resto de nodos se pueden desplazar. Para que esto ocurra es necesario o bien aplicar unas condiciones iniciales en desplazamiento o velocidad, o bien aplicar una fuerza externa. En nuestra simulación hemos optado por aplicar un desplazamiento inicial de 1 cm. a los nodos 2, 3 y 4, dejando la velocidad inicial y la fuerza externa en valores nulos.

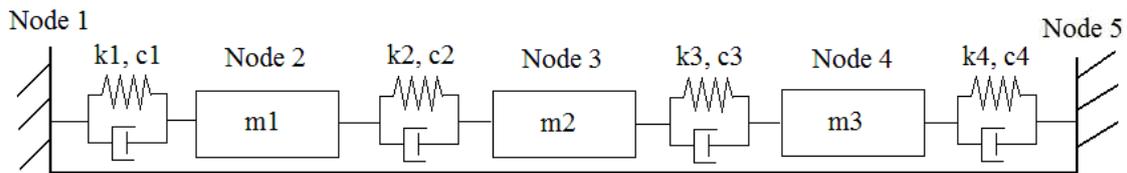


Figura 1 – Sistema con cinco grados de libertad

Las siguientes gráficas muestran la evolución temporal de los desplazamientos de los nodos utilizando en la primera gráfica la Integración Directa y en la segunda el Análisis Modal Multinivel:

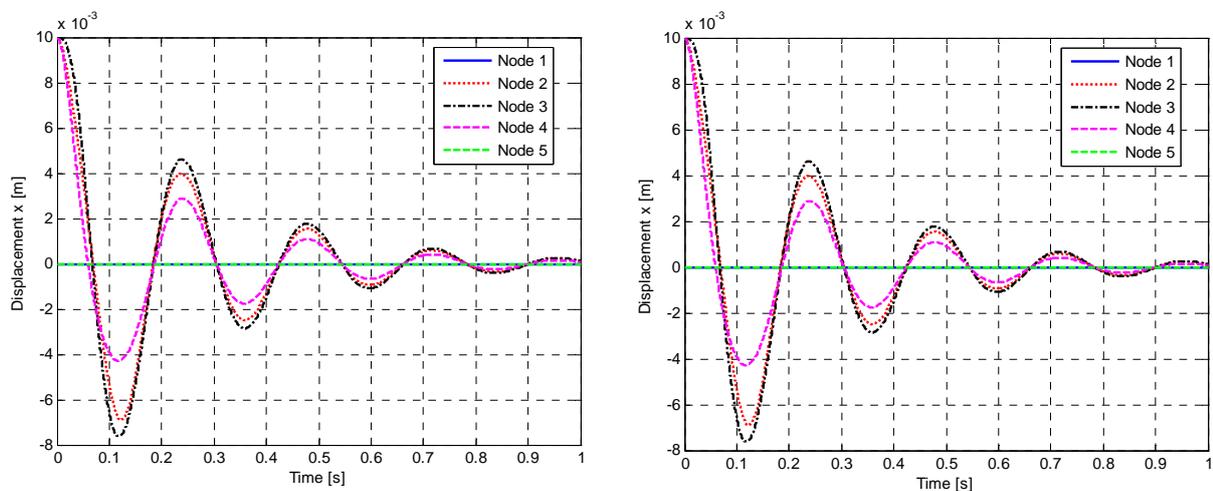
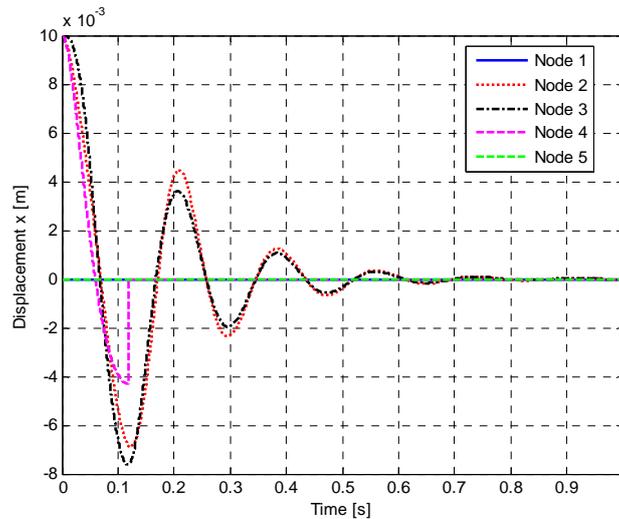


Figura 2 – Resultado temporal de la Integración Directa (izquierda) vs. Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel (derecha)

Se observa claramente, como esperábamos, que ambos métodos dan como resultado la misma solución temporal, lo que nos permite continuar con el análisis.

El siguiente paso es la simulación del sistema utilizando el Análisis Modal Multinivel y considerando dos configuraciones. En un primer ejemplo bloqueamos el nodo número 4 cuando ésta alcanza una posición determinada de velocidad nula, o lo que es lo mismo, una de sus posiciones extremas en su movimiento

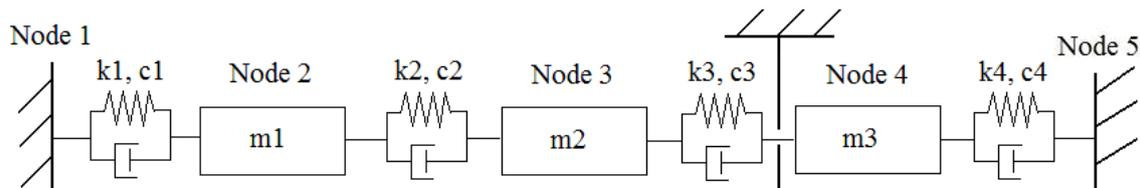
vibratorio. El siguiente gráfico muestra la evolución temporal de la dinámica del sistema:



**Figura 3 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel cuando se bloquea el nodo número 4 en una posición de velocidad nula**

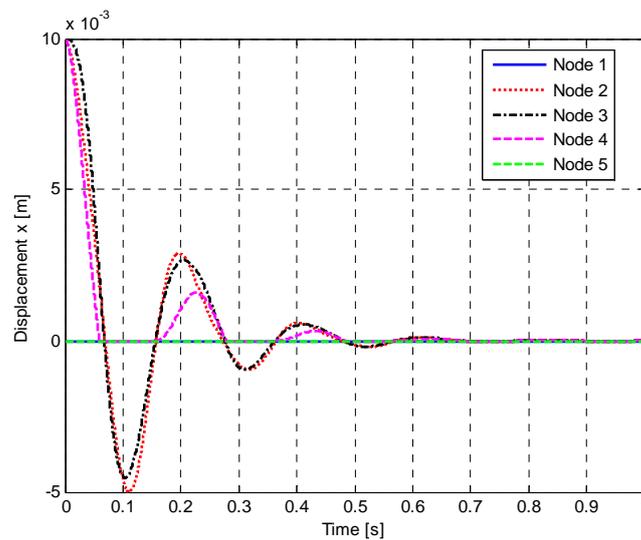
Se observa que después de bloquear el nodo número 4 el sistema evoluciona con otra frecuencia natural como es normal pero que la amplitud de esta vibración, aunque se reduce porque estamos eliminando una parte de la energía del sistema, no disminuye fuertemente.

Ahora consideramos la simulación contacto – no contacto cuando el nodo número 4 va a comenzar sus desplazamientos negativos. La figura número 4 muestra el esquema del sistema:



**Figura 4 – Sistema con cinco grados de libertad y contacto entre la bancada y el nodo número cuatro**

En este caso es necesario evaluar dos variables diferentes para cambiar de una configuración a otra. Para pasar del primer nivel al segundo, que es cuando se produce el contacto, hay que evaluar el desplazamiento del nodo número 4, es decir, cuando este es negativo o igual a cero se cambia a la configuración número dos. En cambio, para pasar del segundo nivel al primero hay que evaluar la fuerza de reacción entre la bancada y el nodo 4. Cuando esta reacción es menor o igual a cero el nodo 4 es libre para moverse y lo hará según lo requiera la dinámica del sistema. La siguiente gráfica muestra la evolución temporal del sistema:



**Figura 5 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel simulando el contacto entre el nodo número 4 y la bancada**

La gráfica muestra perfectamente cómo se produce contacto entre la bancada y el nodo número 4, y cómo éste se mueve cuando la fuerza de reacción se lo permite. También se observa que la simulación es mucho más disipativa que en el caso anterior, tal y como habíamos predicho.

## 2.2 Sistema con ocho grados de libertad

En el siguiente ejemplo consideramos el sistema representado en la Figura número 6. Se trata de un sistema de ocho grados de libertad en el que los nodos 1 y 8 son solidarios a la bancada y el resto se pueden desplazar. Siguiendo el proceso del ejemplo anterior, suponemos un desplazamiento inicial de 1 cm. para los nodos 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

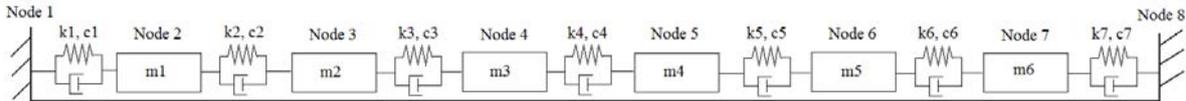


Figura 6 – Sistema con ocho grados de libertad

Los siguientes gráficos muestran la evolución temporal del desplazamiento de los nodos dadas las condiciones iniciales según el método de Integración Directa en el primer caso y según el Análisis Modal Multinivel después:

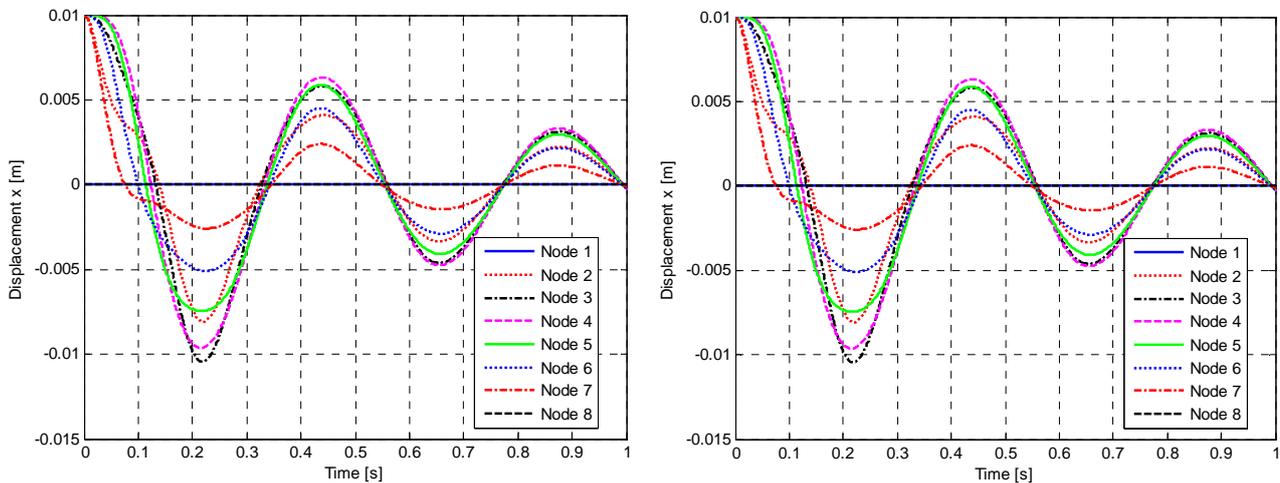
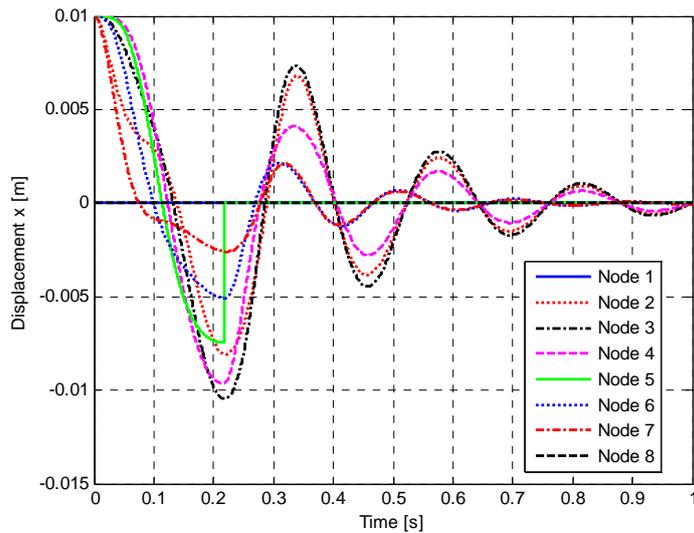


Figura 7 – Resultado temporal de la Integración Directa (izquierda) vs. Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel (derecha)

De nuevo ambas simulaciones confirman nuestras expectativas y ambos métodos dan el mismo resultado.

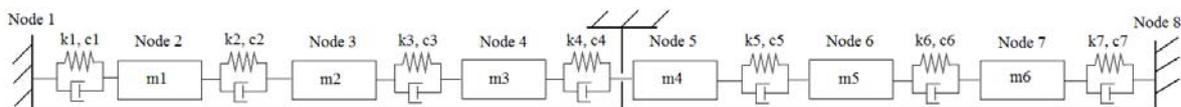
Seguidamente procedemos a analizar según el Análisis Modal Multinivel el cambio del sistema de una configuración a otra. Consideramos como segundo nivel aquel en el que el nodo número cinco se bloquea cuando éste alcanza una posición de velocidad nula. La diferencia fundamental entre este ejemplo y el anterior es que en este caso al bloquear el nodo número cinco estamos transformando el sistema en dos sistemas desacoplados, el primero formado por los nodos número 1, 2, 3, 4 y 5, y el segundo con los nodos 5, 6, 7 y 8. Por ello esperamos que después del bloqueo cada sistema evolucione con frecuencias diferentes. La siguiente gráfica muestra la evolución temporal de esta simulación:



**Figura 8 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel cuando se bloquea el nodo número 5 en una posición de velocidad nula**

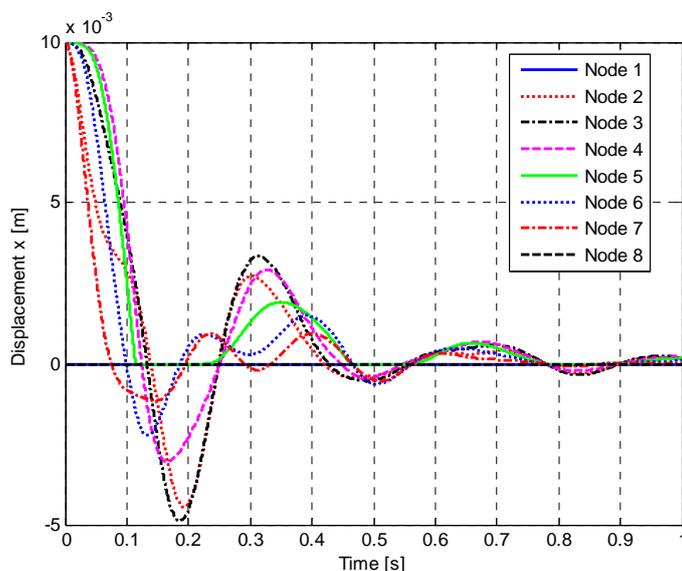
En el gráfico anterior se ve claramente cómo después del bloqueo del nodo 5 los nodos 6 y 7 evolucionan con una frecuencia diferente a la de los nodos 2, 3 y 4.

Para completar el análisis de este sistema consideramos por último la simulación contacto – no contacto. El contacto, tal y como se aprecia en la Figura 9, es entre la bancada y el nodo cinco.



**Figura 9 – Sistema con ocho grados de libertad y contacto entre la bancada y el nodo número cinco**

La Figura 10 muestra la evolución temporal de la dinámica del sistema en las fases de contacto – no contacto



**Figura 10 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel simulando el contacto entre el nodo número 5 y la bancada**

### 3. Impacto de una viga articulada - libre

La necesidad de comprobar la validez total del nuevo método implica comparar sus resultados con los proporcionados por un software comercial de elementos finitos, y dada la complejidad del Análisis Modal Multinivel el ejemplo a utilizar debe ser sencillo. Esto es fundamental y necesario para comprobar que el método funciona y seguir su desarrollo para la resolución de problemas más complejos.

El software comercial elegido es Abaqus y el ejemplo a simular es una viga de sección rectangular, articulada en uno de sus extremos y libre en el otro, que, posicionada inclinadamente tal que el extremo libre se encuentra 10 cm. por encima del extremo articulado, sometida a la fuerza gravitacional, desciende desde una posición de reposo y al alcanzar la horizontal impacta con un soporte colocado a 6 cm. del extremo libre. En ese momento la viga alcanza el segundo nivel del Análisis Modal Multinivel y se deforma de modo que comienza a vibrar. Cuando la fuerza de reacción entre la viga y el soporte lo permite, la viga rebota y comienza a ascender mientras vibra en el considerado primer nivel. Las variables a analizar serán los desplazamientos de los nodos respecto a sus respectivas posiciones de equilibrio, es decir, las vibraciones no lineales en la viga.

Dada la naturaleza de la simulación esperamos que la repuesta vibracional de la viga coincida con los modos propios de flexión en el plano XZ. Dado que el Análisis Modal Multinivel basa su efectividad en el uso de los valores propios y vectores propios correctos, primero un análisis de éstos va a ser detallado para el caso que nos concierne. En este análisis tres técnicas van a ser comparadas. Primero se llevará a cabo la resolución analítica del problema de los valores propios y cuya solución se tomará como la correcta. Seguidamente se extraerán las frecuencias naturales del modelo de Abaqus utilizando su versión Standard y también se utilizará el software no comercial de elementos finitos LUPOS para evaluar dichas frecuencias naturales. Se evaluarán los errores de las soluciones proporcionadas por estos dos software con respecto a las soluciones analíticas y se compararán los vectores propios facilitados por Abaqus/Standard y por LUPOS según el Criterio de Confianza Modal.

Hay que comentar que LUPOS es el software de elementos finitos desarrollado por el grupo de investigación en el que se encuadra este Proyecto Final de Carrera, grupo de investigación que pertenece al Politécnico de Turín. LUPOS permite considerar modelos paramétricos y ha sido utilizado en la evaluación de las matrices modales para el ejemplo que nos concierne del impacto de la viga para la simulación del Análisis Modal Multinivel.

Una vez realizado el Análisis Modal y concluido con éxito procederemos a realizar una simulación real del impacto de la viga. Para ello haremos uso de Abaqus en su versión Explicit y los resultados de las vibraciones no lineales de cuatro puntos característicos, extremo articulado, punto medio de la viga, punto de impacto y extremo libre, serán analizados según las técnica de señal que hemos ido utilizando en este estudio. Estos resultados serán comparados con los facilitados por el Análisis Modal Multinivel del impacto de la viga y además se evaluarán los

dos parámetros que hemos considerado fundamentales para comparar los métodos: precisión en el resultado y tiempo de simulación.

### 3.1 Resolución analítica del problema de valores propios

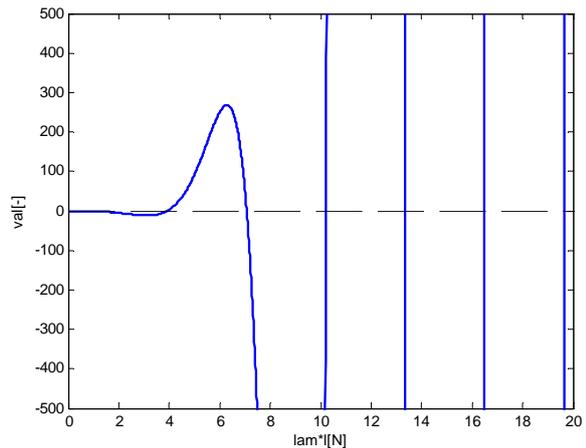
El problema de encontrar los valores propios del sistema se traduce en encontrar las raíces de la ecuación característica. Esta ecuación se obtiene mediante la aplicación directa de las condiciones de contorno correspondientes en cada plano. El razonamiento matemático detallado se puede encontrar en el Anexo III. Básicamente se parte de la ecuación desarrollada en la Teoría de vigas de Euler – Bernoulli [5]:

$$\rho A \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(y,t) + C_v \frac{\partial}{\partial t} u(y,t) + EI \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(y,t) = f(y,t)$$

Y se aplican las condiciones de contorno adecuadas. Para nuestro caso de la viga articulada – libre, los modos propios de flexión en el plano XZ se relacionan a través de condiciones de contorno articulado en un extremo y libre en el otro según la siguiente ecuación característica:

$$\operatorname{senh}(\lambda l) \cos(\lambda l) - \cosh(\lambda l) \operatorname{sen}(\lambda l) = 0$$

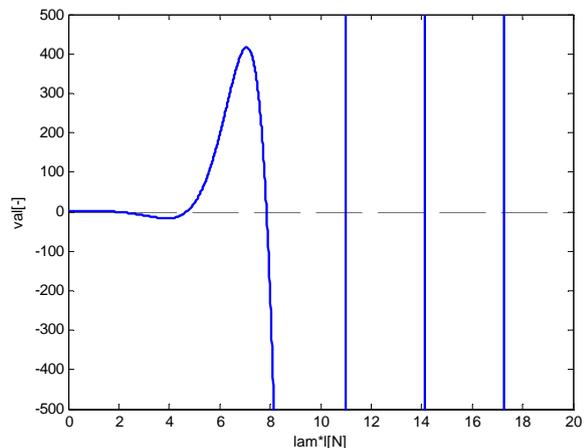
**Figura 11 – Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XZ para la viga articulada – libre**



En cambio, en el plano XY los modos propios de flexión se relacionan a través de condiciones de contorno empotrado en un extremo y libre en el otro, dando lugar a la siguiente ecuación característica:

$$\cosh(\lambda l) \cos(\lambda l) + 1 = 0$$

**Figura 12 – Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XY para la viga articulada – libre**



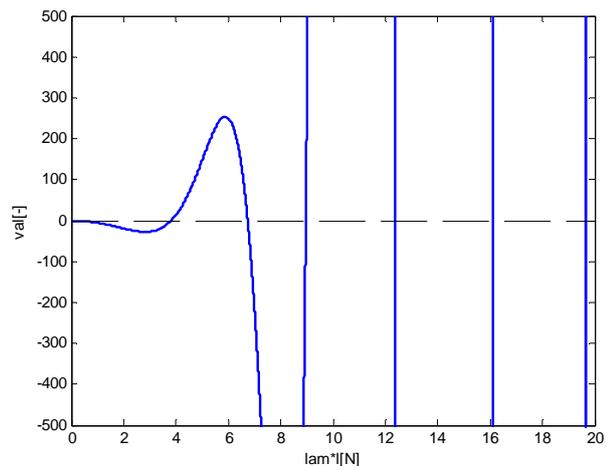
Las raíces de las anteriores ecuaciones características son los valores propios asociados a cada modo y corresponden con el cruce por cero de los gráficos representados en las Figuras 11 y 12. Una vez conocidos los valores propios de flexión, el cálculo de las frecuencias naturales de flexión es inmediato aplicando la siguiente fórmula:

$$\omega_r = (\lambda l)_r \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}}$$

Para calcular los modos propios de torsión es necesario variar el razonamiento ya que se debe considerar la variación de la orientación angular en lugar del desplazamiento. En el Anexo III se puede encontrar el método de cálculo analítico de las frecuencias naturales de torsión.

En el segundo nivel o configuración de la viga ésta sufre una variación en las condiciones de contorno, ya que pasa a tener un apoyo intermedio. Este cambio supone una variación en las ecuaciones características y por lo tanto unas frecuencias naturales diferentes como es obvio. A continuación se recoge la gráfica de la ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XZ, aunque el análisis detallado de estos resultados se puede encontrar en el Anexo III.

**Figura 13 - Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XZ para la viga articulada - apoyada - libre**



### 3.2 Extracción de frecuencias naturales con Abaqus/Standard

Abaqus/Standard es el motor de cálculo implícito para resolver problemas de elementos finitos disponible en el paquete comercial de Abaqus. En este caso, la herramienta utilizada se llama Extracción Frecuencial y sirve para obtener las frecuencias naturales y los vectores propios de un sistema previamente desarrollado en CAD. La Figura 14 muestra el modelo utilizado en Abaqus:

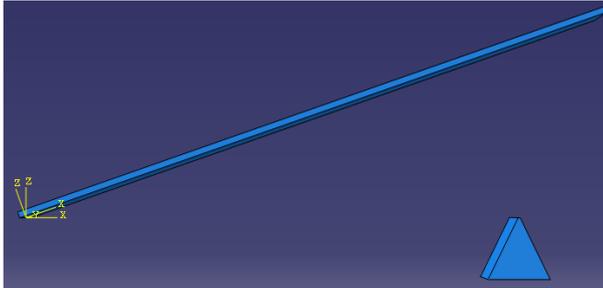


Figura 14 - Modelo utilizado en Abaqus

De las funciones disponibles hemos extraído las 10 primeras frecuencias naturales utilizando el algoritmo Lanczos y los vectores propios han sido normalizados según el desplazamiento máximo unitario.

La viga libre – articulada y el soporte han sido elaborados en el software de CAD Solidworks e importados en el formato Parasolid. Los resultados del Análisis Modal en Abaqus/Standard dependen enormemente de la discretización utilizada, consiguiendo sólo resultados correctos cuando el mallado esta suficientemente definido y los elementos utilizados son los adecuados para una Análisis Modal. Siguiendo las recomendaciones facilitadas por Abaqus/Standard en su bibliografía, la discretización utilizada aparece en la siguiente tabla:

Tabla 1 - Discretización utilizada en el modelo de la viga articulada – libre en Abaqus/Standard

Entorno	Propiedad	Valor
Abaqus/Standard	# Nodos	4493
	# Elementos (3D, C3D20R: Prisma rectangular de 20 nodos, de segundo orden e integración reducida)	720
	# Grados de libertad	13479

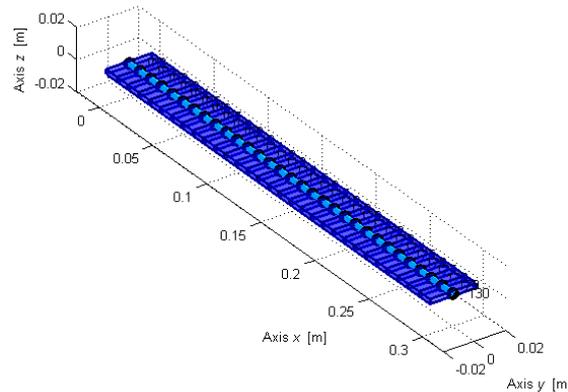
Las características geométricas y los materiales utilizados están recogidos en la Tabla número dos:

Tabla 2 – Caracterización geométrica y de materiales para el modelo de la viga articulada – libre en Abaqus/Standard

Entorno	Característica	Propiedad	Valor
Abaqus/Standard	Geometria de la viga	Longitud $x$ [mm]	300
		Profundidad $y$ [mm]	30
		Altura $z$ [mm]	3
	Material de la viga (Aluminio)	Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2700
		Módulo elástico $E$ [GPa]	70
		Coefficiente de Poisson $\nu$ [-]	0.30

### 3.3 Extracción de frecuencias naturales con LUPOS

LUPOS es el software paramétrico de elementos finitos no comercial desarrollado en el Politécnico de Turín, y que como tal está en constante desarrollo. Actualmente, la habilidad de este software reside en obtener valores de frecuencias naturales precisos con el uso de pocos elementos. La siguiente figura muestra el modelo empleado:



**Figura 15 – Modelo utilizado en LUPOS**

Como se observa comparando la Figura 15 con la 14, la discretización en LUPOS es diferente a la utilizada en Abaqus/Standard. Concretamente, la siguiente tabla recoge la discretización empleada en LUPOS:

**Tabla 3 – Discretización utilizada en el modelo de la viga articulada – libre en LUPOS**

Entorno	Propiedad	Valor
LUPOS	# Nodos	31
	# Elementos (1D, viga)	30
	# Grados de libertad	186

La geometría y los materiales empleados en el modelo de LUPOS aparecen en la siguiente tabla:

**Tabla 4 – Caracterización geométrica y de materiales para el modelo de la viga articulada – libre en LUPOS**

Entorno	Característica	Propiedad	Valor
LUPOS	Geometría de la viga	Longitud $x$ [mm]	300
		Profundidad $y$ [mm]	30
		Altura $z$ [mm]	3
	Material de la viga (Aluminio)	Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	2700
		Módulo elástico $E$ [GPa]	69
		Coefficiente de Poisson $\nu$ [-]	0.33

### 3.4 Comparación de modos propios: El Criterio de Confianza Modal

Una vez detallados los tres métodos de Análisis Modal procedemos a mostrar y analizar los resultados en las siguientes tablas:

**Tabla 5 – Frecuencias naturales y modos propios para la viga articulada – libre**

Modo	Solución analítica			LUPOS		Abaqus/Standard		Descripción
	$(\lambda l)_r$	$\omega_r$ [rad/s]	Freq. [Hz]	Freq. [Hz]	Err. [%]	Freq. [Hz]	Err. [%]	
1	0	0	0	0	0,00	0	0,00	Sólido rígido ry
2	1,25 $\pi$	755,57	120,25	119,4	-0,71	120,22	-0,02	1 <sup>era</sup> flexión xz
3	1,875	1722,49	274,14	272,2	-0,71	232,43	-15,21	1 <sup>era</sup> flexión xy
4	2,25 $\pi$	2448,05	389,62	386,8	-0,72	389,54	-0,02	2 <sup>a</sup> flexión xz
5	-	3189,61	507,64	497,4	-2,02	509,40	0,35	1 <sup>era</sup> torsión x
6	3,25 $\pi$	5107,65	812,91	807,1	-0,71	812,42	-0,06	3 <sup>era</sup> flexión xz
7	4,25 $\pi$	8734,39	1390,12	1380	-0,73	1387,6	-0,18	4 <sup>a</sup> flexión xz
8	-	9568,83	1522,93	1493	-1,97	1432,4	-5,94	2 <sup>a</sup> torsión x
9	4,694	10795,47	1718,15	1706	-0,71	1575,7	-8,29	2 <sup>a</sup> flexión xy
10	5,25 $\pi$	13328,26	2121,26	2106	-0,72	2110,5	-0,51	5 <sup>a</sup> flexión xz

**Tabla 6 – Frecuencias naturales y modos propios para la viga articulada – apoyada – libre**

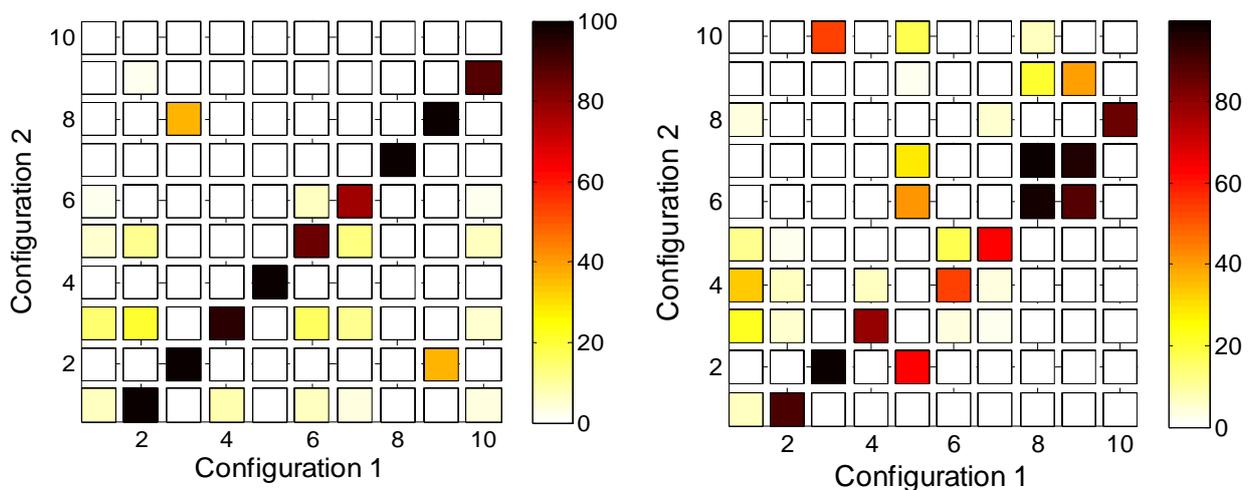
Modo	Solución analítica			LUPOS		Descripción
	$(\lambda l)_r$	$\omega_r$ [rad/s]	Freq. [Hz]	Freq. [Hz]	Err. [%]	
1	3,823	716,08	113,97	113,2	-0,68	1 <sup>era</sup> flexión xz
2	1,875	1722,49	274,14	272,2	-0,71	1 <sup>era</sup> flexión xy
3	6,74	2225,74	354,24	351,7	-0,72	2 <sup>a</sup> flexión xz
4	-	3189,61	507,64	497,4	-2,02	1 <sup>era</sup> torsión x
5	8,958	3931,67	625,75	621,2	-0,73	3 <sup>era</sup> flexión xz
6	12,39	7521,39	1197,07	1188	-0,76	4 <sup>a</sup> flexión xz
7	-	9568,83	1522,93	1493	-1,97	2 <sup>a</sup> torsion x
8	4,694	10795,47	1718,15	1706	-0,71	2 <sup>a</sup> flexión xy
9	16,11	12715,88	2023,80	2009	-0,73	5 <sup>a</sup> flexión xz
10	-	15948,06	2538,21	2494	-1,74	3 <sup>era</sup> torsión x

Modo	Abaqus/Standard		Descripción
	Freq. [Hz]	Err. [%]	
1	114,02	0,04	1 <sup>era</sup> flexión xz
2	233,86	-14,69	1 <sup>era</sup> flexión xy
3	356,84	0,73	2 <sup>a</sup> flexión xz
4	630,64	0,78	3 <sup>era</sup> flexión xz
5	1198,1	0,09	4 <sup>a</sup> flexión xz
6	1276,8	151,52	1 <sup>era</sup> torsión x
7	1491,4	-13,20	2 <sup>a</sup> flexión xy
8	2014,1	-0,48	5 <sup>a</sup> flexión xz
9	2591,0	70,13	2 <sup>a</sup> torsion x
10	2772,6	9,23	3 <sup>era</sup> torsión x

La primera configuración de la viga corresponde con los datos de la Tabla 5. Tomando como valores exactos las frecuencias naturales analíticas se observa que los errores en LUPOS son menores del 1% para los modos de flexión y aproximadamente del 2% para los modos de torsión. En cambio el modelo de Abaqus/Standard es más preciso con los modos de flexión en el plano XZ y sin embargo se obtienen errores inaceptables con los modos de flexión en XY y con los

modos torsionales. En la Tabla 6 se recogen los resultados de la segunda configuración de la viga y los valores continúan con la misma tendencia, LUPOS da resultados precisos en todos los modos propios y Abaqus/Standard los da en los modos de flexión en el plano XZ. Mientras los errores en Abaqus/Standard para los modos de flexión en XY y los modos de torsión siguen aumentando. Una explicación a este hecho es que mientras en Abaqus estamos utilizando elementos tridimensionales, es decir, en el extremo articulado está restringido su movimiento para todos sus nodos, en LUPOS y en la solución analítica suponemos elementos unidimensionales, es decir, sólo restringimos el movimiento del nodo central de la sección. Este efecto no influye en la flexión de la viga en el plano XZ, pero lo hace enormemente en la flexión en el plano XY y en la torsión. También hay que añadir que en la segunda configuración de la viga este efecto se ve maximizado por el hecho de que en la zona de impacto ocurre lo mismo, por lo que es normal que los errores sean mayores. Además, en la segunda configuración obtenemos un orden diferente en los modos propios debido a estos errores. En cualquier caso, nuestro análisis se centra concretamente en los modos propios de vibración en el plano XZ dado que es como esperamos responda la viga después del impacto y con el análisis previo estamos convencidos de que los valores de frecuencias naturales son correctos en todos los modelos.

En cuanto a los modos propios, hay que añadir que en el Anexo IV se encuentran las visualizaciones de los diez primeros modos de vibración de la viga articulada – libre en Abaqus/Standard y en LUPOS. Para comprobar la correlación entre éstos, es decir, cuánto una forma modal se parece a otra, se viene utilizando desde los últimos 30 años el Criterio de Confianza Modal (en inglés MAC: Modal Assurance Criterion) [6]. Este criterio, que se explica con mayor detenimiento en el Anexo V, compara los vectores propios de los distintos modos y permite decidir si los modos propios son similares o no. Aplicando este criterio a nuestro ejemplo de la viga, en los siguientes gráficos de barras se visualiza el Criterio de Confianza Modal comparando el primer nivel de la viga con el segundo para los vectores propios calculados en LUPOS y los extraídos de Abaqus/Standard (Figura 16):

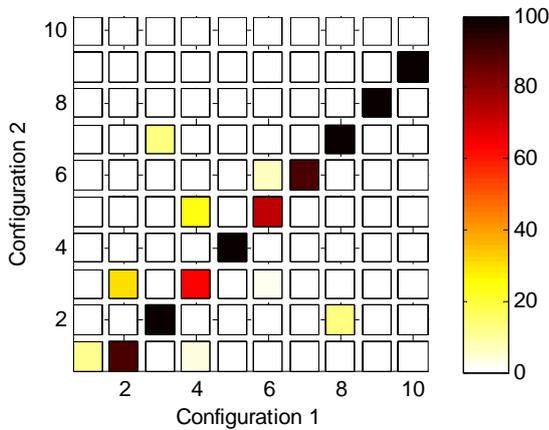


**Figura 16 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones (izquierda) vs. Criterio de Confianza Modal para los modos propios de Abaqus/Standard entre ambas configuraciones (derecha)**

La comparación de los modos propios en LUPOS nos da una perfecta diagonal, es decir, cada uno de las formas modales de la primera configuración de la viga se asemeja enormemente (en todos los casos más de un 80% y en algunos prácticamente un 100%) a una de las formas modales de la segunda configuración. Este era un hecho que no esperábamos, ya que con el cambio de configuración se espera, sobre todo en los modos propios de flexión en el plano XZ, una división en el Criterio de Confianza Modal, es decir, que uno de los modos propios de la segunda configuración sea similar no a uno de los modos propios de la primera sino a varios, repartiéndose entre ellos el coeficiente de Confianza Modal. El hecho de que hayamos obtenido una diagonal perfecta sólo se explica diciendo que el punto dónde hemos supuesto el impacto coincide exactamente con el valle que se produce en el primer modo de flexión en XZ de la viga, coincidencia totalmente fortuita. Para eliminar este efecto es necesario cambiar la dinámica del sistema o bien desplazando el punto de impacto a otro sitio o bien añadiendo masas puntuales a lo largo de la viga. En nuestro caso hemos decidido añadir dos diferentes masas puntuales en el extremo libre, la primera de 100 gramos y la segunda de 200 gramos. Antes de evaluar este nuevo efecto hace falta analizar con detenimiento la Figura 16 derecha, que nos permite visualizar el Criterio de Confianza Modal para los vectores propios extraídos de Abaqus/Standard. Se observa que la diagonal previa ya no se mantiene aunque hay cierta tendencia a mantenerla. El hecho de que el orden de los modos propios en la segunda configuración varíe dificulta el análisis en un primer vistazo, pero deteniéndose se observa que para los modos de flexión en XZ se produce el mismo efecto que con LUPOS, a uno de la configuración uno le corresponde otro de la configuración dos. En el caso de los modos de flexión en el plano XY y de torsión el análisis es más complejo, puesto que el Criterio de Confianza Modal mezcla ambos tipos de modos y no se observa ninguna relación clara. De hecho, en el Anexo IV se puede ver como estos modos son muy similares en Abaqus/Standard. Por último hay que añadir que los elementos utilizados en Abaqus/Standard carecen de rotaciones y que los modos torsionales son puramente de rotación, por lo que es una causa más que probable de que el Criterio de Confianza Modal no de buenos resultados en estos modos. En LUPOS en cambio los elementos empleados sí que tienen rotaciones ya que utilizamos seis grados de libertad (tres desplazamientos y tres rotaciones) y los resultados son más satisfactorios.

Como habíamos anticipado, modificamos la dinámica del sistema añadiendo una masa puntual en el extremo libre de la viga. La Figura 17 muestra el Criterio de Confianza Modal entre configuraciones para LUPOS cuando esta masa es de 100 gramos, y la Figura 18 lo mismo cuando la masa es de 200 gramos. El hecho de modificar la dinámica de la viga ha variado también el orden de los modos propios, aunque sólo apreciable en el caso de 200 gramos, de modo que en las tablas adyacentes a los gráficos aparece el orden correcto.

**Tabla 7 – Frecuencias naturales y modos propios al colocar una masa puntual de 100 gramos en el extremo libre**

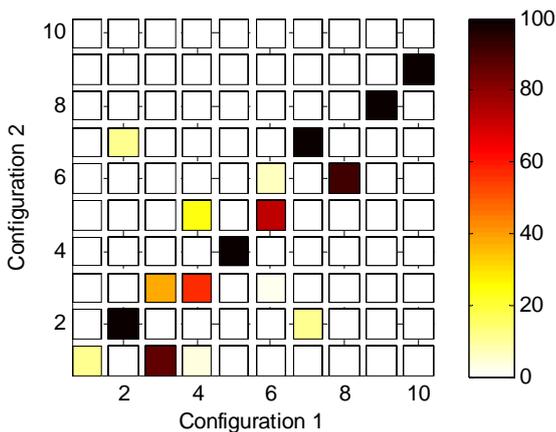


Modo	Freq. [Hz]	Descripción Configuración 1	Freq. [Hz]	Descripción Configuración 2
1	0	Sólido rígido ry	52,89	1era flexión xz
2	81,38	1era flexión xz	105,73	1era flexión xy
3	105,73	1era flexión xy	174,37	2a flexión xz
4	310,95	2a flexión xz	497,38	1era torsión x
5	497,37	1era torsión x	547,41	3era flexión xz
6	693,12	3era flexión xz	1146,82	4a flexión xz
7	1228,06	4a flexión xz	1242,21	2a flexión xy
8	1242,21	2a flexión xy	1493,47	2a torsion x
9	1493,47	2a torsion x	1915,72	5a flexión xz
10	1915,86	5a flexión xz	2045,67	3era torsión x

**Figura 17 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones con masa puntual de 100 gramos en el extremo libre**

La Figura 17 confirma nuestras sospechas porque en efecto para todos los modos de flexión tanto en el plano XY como en el plano XZ las formas modales de una configuración comparten un coeficiente de Confianza Modal elevado con dos modos propios diferentes de la otra configuración. Como muestra explicamos el más significativo: en el segundo modo de flexión en el plano XZ de la segunda configuración se obtienen coeficientes de Confianza Modal para dos modos propios de flexión en XZ de la primera configuración, el primero y el segundo. Al añadir una masa mayor esperamos que este efecto se magnifique.

**Tabla 8 – Frecuencias naturales y modos propios al colocar una masa puntual de 200 gramos en el extremo libre**



Modo	Freq. [Hz]	Descripción Configuración 1	Freq. [Hz]	Descripción Configuración 2
1	0	Sólido rígido ry	38,90	1era flexión xz
2	77,68	1era flexión xy	77,68	1era flexión xy
3	79,05	1era flexión xz	169,69	2a flexión xz
4	308,37	2a flexión xz	497,37	1era torsión x
5	497,37	1era torsión x	546,31	3era flexión xz
6	690,46	3era flexión xz	1145,98	4a flexión xz
7	1219,10	2a flexión xy	1219,10	2a flexión xy
8	1225,37	4a flexión xz	1493,46	2a torsion x
9	1493,46	2a torsion x	1527,10	3era torsión x
10	1527,10	3era torsión x	1913,10	5a flexión xz

**Figura 18 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones con masa puntual de 200 gramos en el extremo libre**

En efecto se comprueba que, para el caso que estamos analizando, la división del coeficiente de Confianza Modal tiende a igualarse entre los dos modos propios en los que se divide: Mientras el coeficiente entre el segundo modo de flexión en XZ de la segunda configuración y el primer modo de flexión en XZ de la primera aumenta rápidamente, el coeficiente entre el mismo modo de la segunda

configuración y el segundo modo de flexión en XZ de la primera configuración disminuye lentamente, aproximándose al valor del primer coeficiente. Añadiendo estas masas esperamos que la segunda configuración de la viga articulada – libre adquiera mayor protagonismo, ya que dada la naturaleza del impacto (no es instantáneo pero dura un corto lapso de tiempo) creemos que la segunda configuración apenas será apreciable sin las masas puntuales en el extremo libre.

### 3.5 Simulación con Abaqus/Explicit

Abaqus/Explicit es el motor de cálculo en forma explícita de los problemas de elementos finitos disponible en el paquete comercial de Abaqus. Es la herramienta ha utilizar cuando se quiere obtener una simulación real considerando las no linealidades. El impacto de la viga articulada – libre que estamos estudiando se ha analizado con esta herramienta. El tiempo simulado ha sido un cuarto de segundo y los efectos disipativos se han despreciado por lo que la simulación debe ser conservativa, es decir, la viga debe alcanzar la misma altura después del impacto que la que tenía al comienzo de la simulación. Lo cierto es que al final la simulación ha sido aproximadamente un 90% conservativa por diversos factores entre los que cabe destacar que la viga absorbe algo de energía de deformación después del impacto, que Abaqus/Explicit utiliza algo de amortiguación en el parámetro ‘Bulk Viscosity’ y en el momento del impacto, aunque ambos parámetros habían sido anulados o disminuidos al máximo, y que una parte de energía es disipada en la discretización finita. Los parámetros más relevantes en la simulación son los siguientes:

- Las propiedades de los materiales, la geometría, las condiciones de contorno e iniciales y las fuerzas externas son idénticas a la simulación llevada a cabo con Abaqus/Standard.
- La discretización ha sido diferente, principalmente para evitar o disminuir lo máximo posible el ‘hourglassing’. Por ello elementos hexaédricos de primer orden e integración reducida han sido empleados. También, como recomendación en la bibliografía de Abaqus/Explicit, cuatro elementos han sido utilizados a lo largo de la dimensión menor de la viga, que en este caso es su altura. Por último se ha visualizado la gráfica con los distintos tipos de energías que intervienen en la simulación y se ha verificado que la energía de deformación artificial, que es la empleada para controlar el ‘hourglassing’, no sobrepasa el 5% de la energía total. La tabla siguiente resume la discretización empleada:

**Tabla 9 – Discretización empleada en Abaqus/Explicit**

Entorno	Propiedad	Valor
Abaqus/Explicit	# Nodos	2135
	# Elementos (3D, C3D8R: Hexaedros lineales e integración reducida )	1440
	# Grados de libertad	6405

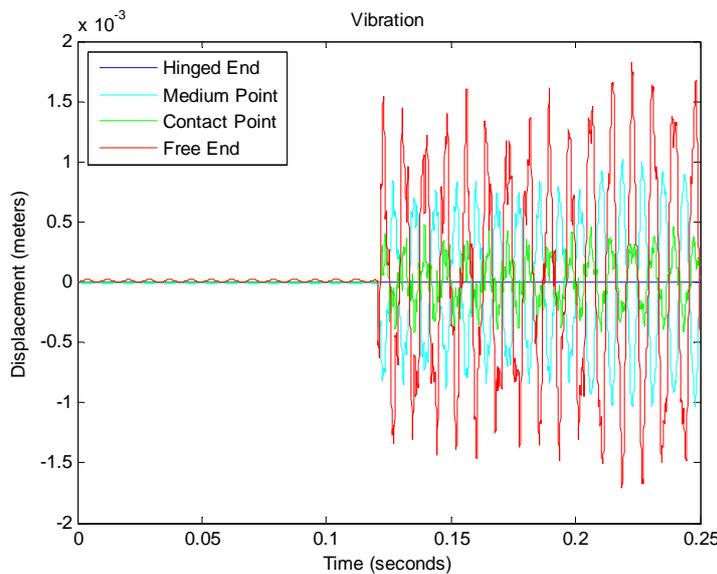
- El algoritmo de contacto utilizado ha sido de tipo ‘Hard Contact’ y la propiedad se ha definido para que se produzca un contacto fuerte, ya que nos interesa comparar el resultado con el dado por el Análisis Modal Multinivel, y éste último ha sido desarrollado para evaluar un contacto sin penetración entre sólidos. La amortiguación en el contacto se fija a cero. La tabla siguiente recoge los parámetros importantes del contacto:

**Tabla 10 – Parámetros del contacto en Abaqus/Explicit**

Característica	Propiedad		Valor
Interacción	Formulación de restricción mecánica		Método de contacto ‘Penalty’
	Formulación de deslizamiento		Deslizamiento finito
Propiedad de la interacción	Comportamiento en dirección normal	Método de aplicación de la restricción	Default
		Relación Presión - Penetración	‘Hard Contact’ Permitir la separación después del contacto activado
	Comportamiento en dirección tangencial	Formulación de fricción	Sin fricción

Una vez realizada la simulación hemos elegido cuatro puntos característicos para analizar sus vibraciones. Estos son el extremo articulado, el punto medio de la viga, el punto de impacto y el extremo libre. Las técnicas de señal empleadas son: primero un análisis temporal de la señal vibracional, segundo un estudio frecuencia mediante la Transformada Discreta de Fourier, y tercero un análisis en tiempo y en frecuencia simultáneo mediante la función Spectrogram de Matlab. En el tratamiento de los datos de salida se ha elegido una frecuencia de muestreo de 20000 Hz, más que suficiente para obtener una señal adecuada de las vibraciones, ya que la frecuencia más alta calculada en el Análisis Modal era aproximadamente de 2500 Hz.

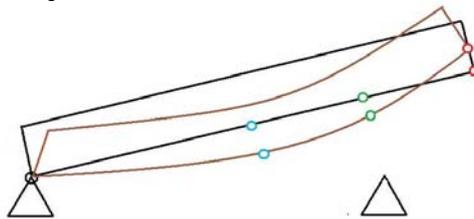
La siguiente figura muestra el análisis temporal de las vibraciones de dichos cuatro puntos:



**Figura 19 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit**

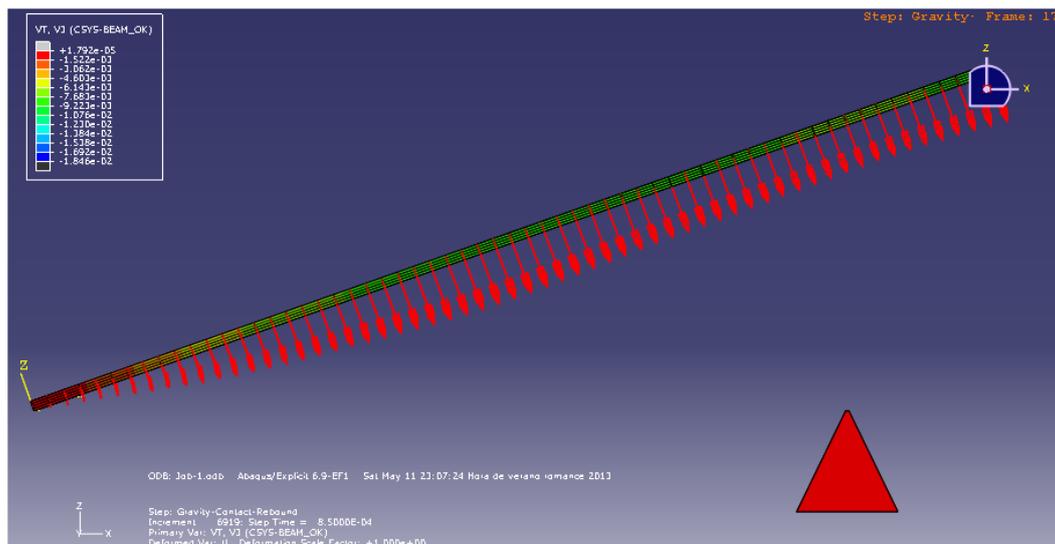
Como se aprecia el impacto se produce en torno al segundo 0.12, y mientras en el punto de contacto la vibración es menor (como es obvio, en el extremo articulado es nula), en el punto medio y en el extremo libre se producen vibraciones alternativas, esto es, mientras el extremo libre tiene desplazamientos respecto de su posición de equilibrio positivos, el punto medio los tiene negativos y viceversa. También hay que destacar que todas las señales se cruzan por cero en el mismo instante, por lo que esperamos que la frecuencia fundamental sea la misma en todas ellas.

Echando un vistazo uno fácilmente se puede dar cuenta de un efecto totalmente inesperado en los pasos previos al impacto, y es que partiendo de la posición de reposo y bajo la fuerza de la gravedad la viga ya vibra sin necesidad del impacto, éste sólo hace que aumentar la amplitud de la vibración y quizás excitar algunas frecuencias superiores. Este comportamiento inesperado se intenta explicar con el siguiente esquema:



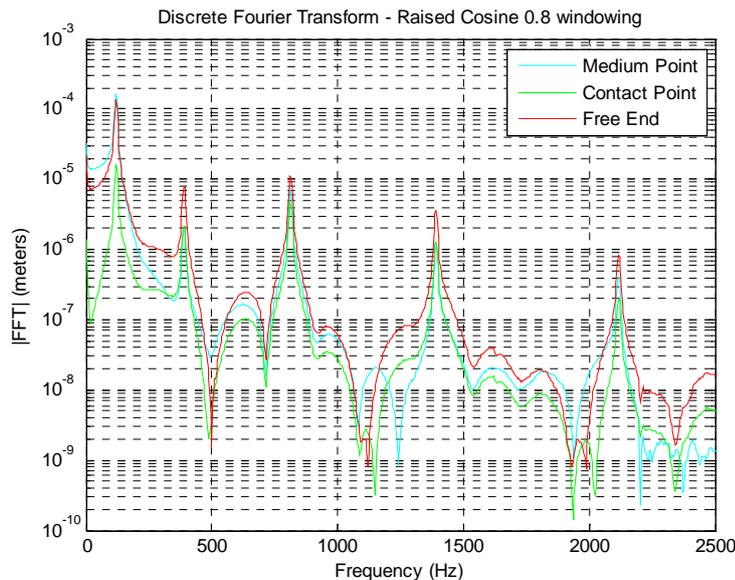
**Figura 20 – Esquema de la vibración de la viga en los primeros pasos de la simulación**

Esta vibración nos indica que en efecto la viga se encuentra deformada tras el instante inicial y que sus puntos vibran respecto de esta deformada que es la posición de equilibrio. La Figura 21, extraída de la simulación en Abaqus/Explicit, demuestra también este efecto. En ella se muestra el vector velocidad lineal en cada uno de los puntos de la viga y se ve cómo este vector es máximo en la zona media de la viga y no en el extremo libre como sería razonadamente en el movimiento como sólido rígido:



**Figura 21 – Vector velocidad lineal en los puntos de la viga para los primeros instantes de la simulación en Abaqus/Explicit**

El siguiente paso es el análisis frecuencial a través de la Transformada Discreta de Fourier. El objetivo es conocer cuáles son las frecuencias dominantes en la respuesta de la viga y comprobar que éstas coinciden con sus frecuencias naturales. Aplicando la Transformada Rápida de Fourier en Matlab a las señales temporales anteriores y considerando ventanas según el filtro de coseno alzado ( $\beta = 0.8$ ), esto es necesario porque la señal no es periódica y queremos evitar el 'leakage', se obtiene el análisis frecuencial de la Figura 22. En él se ha omitido el extremo articulado porque, como es obvio, no vibra. Como el tiempo de simulación es de un cuarto de segundo, el delta frecuencial considerado es su inversa, es decir, 4 Hz.



**Figura 22 – Análisis frecuencial de la vibración de los siguientes puntos de la viga: punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit**

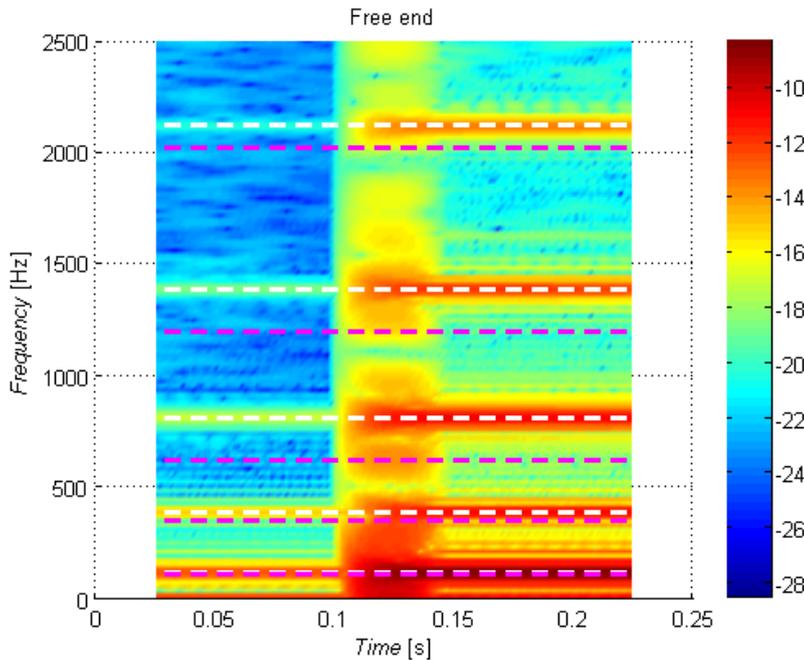
En la Figura 22 se observan perfectamente cinco picos que corresponde con las cinco frecuencias dominantes en la respuesta de la viga. Analizando cada una de estas llegamos a las siguientes conclusiones:

- El primer pico corresponde con 120 Hz, es decir, el primer modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El segundo es 388 Hz. Idéntico al segundo modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El tercer pico identificado es 812 Hz, que es el tercer modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El cuarto corresponde a 1392 Hz, es decir, al cuarto modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El quinto y último es 2116 Hz. También es el quinto modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.

El hecho de que las frecuencias en la respuesta de la viga coincidan con las frecuencias naturales de ésta es un hecho que ya esperábamos pero que cuya comprobación corrobora nuestro empeño de obtener un buen resultado con el Análisis Modal Multinivel.

Del análisis en frecuencia hemos concluido que las frecuencias dominantes corresponden con la primera configuración, lo que nos indica que la segunda

configuración apenas influye en el sistema, fundamentalmente porque el impacto es puntual y la viga apenas se mantiene en la segunda configuración, es decir, hay un solapamiento temporal entre el momento del impacto en el que se excitan una gran cantidad de frecuencias y la segunda configuración, como se muestra en la Figura 23. Como hemos comentado con el Criterio de Confianza Modal, aumentaremos la influencia del segundo nivel añadiendo masas puntuales en el extremo libre. Seguidamente se muestra en la Figura 23 el análisis tiempo – frecuencia con el que se puede observar la evolución temporal de las frecuencias en la respuesta del sistema. Hemos elegido el extremo libre como punto característico de análisis:

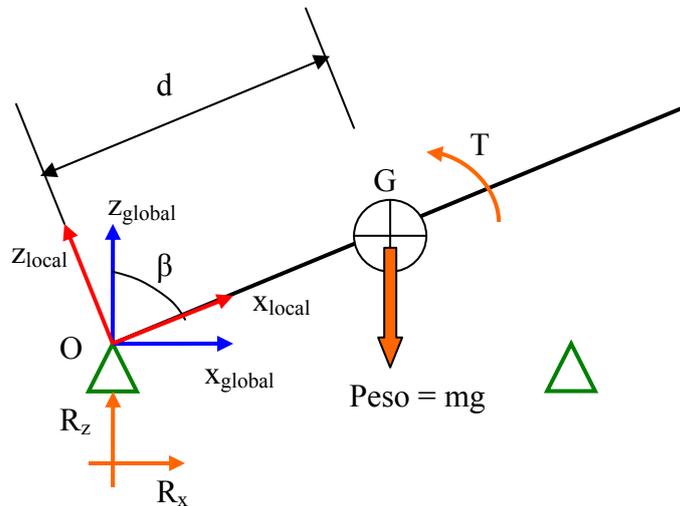


**Figura 23 – Análisis en tiempo y frecuencia de la vibración del extremo libre de la viga en Abaqus/Explicit y comparación con los modos propios de flexión en XZ analíticos de la primera configuración (blanco) y de la segunda configuración (magenta)**

Se observa como antes y después del impacto las frecuencias en la respuesta de la viga coinciden con las frecuencias naturales de la primera configuración (línea discontinua blanca). El momento del impacto se identifica también claramente porque un gran número de frecuencias son excitadas. Entre ella se distingue claramente el tercer modo de flexión en XZ de la segunda configuración (línea discontinua magenta). También llaman la atención frecuencias próximas a las naturales distanciadas de éstas una cantidad idéntica tanto por encima como por debajo.

### 3.6 Simulación según el Análisis Modal Multinivel

El último paso de este Proyecto Final de Carrera es simular con el modelo de Análisis Modal Multinivel desarrollado en Matlab/Simulink el impacto de la viga articulada – libre. Dado que éste modelo proviene del Análisis Modal es necesario superponer el movimiento como sólido rígido de la viga para obtener una simulación idéntica a la de Abaqus/Explicit.



El movimiento de sólido rígido es fácil de obtener previa aplicación de las ecuaciones geométricas, ecuaciones cinemáticas y diagramas de sólido libre:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_G - R_x = 0 \\ \sum M_y(O) = I_o \cdot \ddot{\beta} \rightarrow I_o \cdot \ddot{\beta} = m \cdot g \cdot d \cdot \sin(\beta) - T, \text{ con } \begin{cases} T = 0 & \text{si } \beta < \frac{\pi}{2} \\ T = \frac{E_{cinética}}{\beta - \frac{\pi}{2}} & \text{si } \beta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \sum F_z = 0 \rightarrow m \cdot \ddot{z}_G - R_z + m \cdot g = 0 \end{array} \right.$$

Estas ecuaciones se pueden englobar en forma matricial según la siguiente ecuación aplicada al centro de gravedad de la viga:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{Kst} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_p \end{Bmatrix}$$

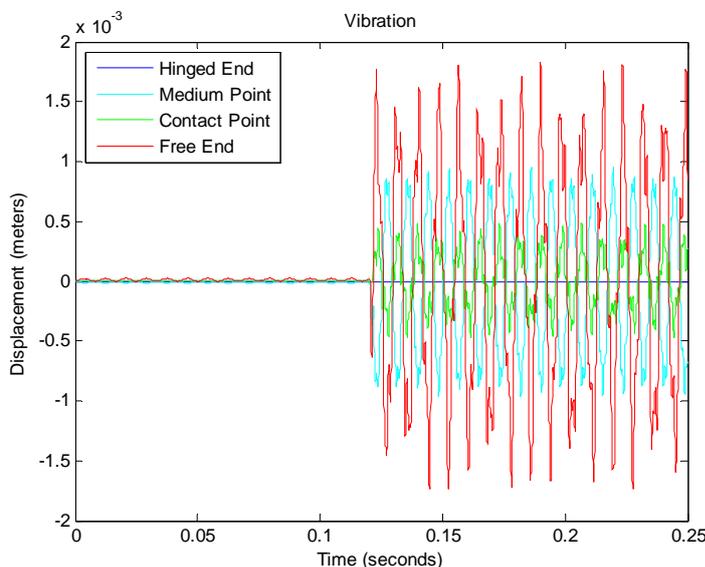
Definiendo cada matriz de la siguiente forma:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad Kst = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -d \cos \beta & 0 \\ 0 & d \sin \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_p = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}^2 d \sin \beta \\ -\dot{\beta}^2 d \cos \beta \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ m \cdot g \cdot d \cdot \sin \beta - T \\ -mg \end{bmatrix} \quad \ddot{\mathbf{x}} = \left\{ \ddot{x}_G \quad \ddot{\beta} \quad \ddot{z}_G \right\}^T \quad R = \left\{ R_{A,x} \quad R_{A,z} \right\}^T$$

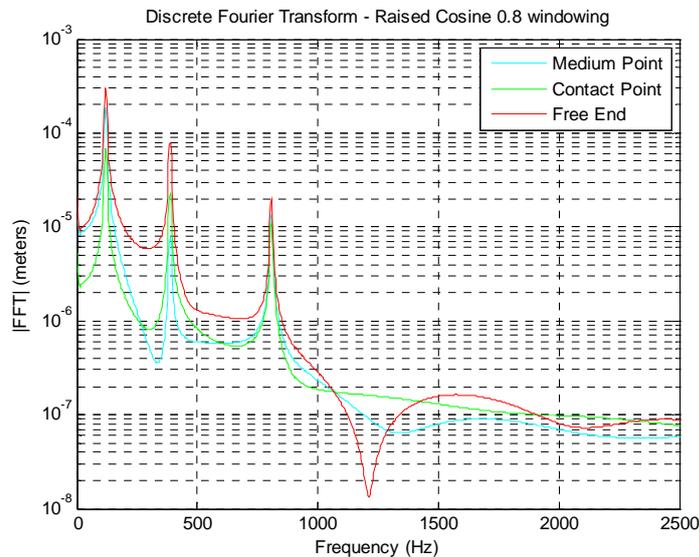
La explicación detallada de cómo se obtienen estas matrices aparece en el Anexo VI. Con la integración de la anterior ecuación se obtiene los grados de libertad útiles para el centro de gravedad de la viga, por lo que los grados de libertad del resto de puntos son fácilmente calculables conociendo la rotación respecto del punto articulado de la viga. Uno de estos puntos debe ser el punto de impacto y su desplazamiento en dirección Z nos servirá para cambiar de la primera configuración a la segunda cuando éste se haga nulo.

En la parte de Análisis Modal Multinivel vamos a considerar únicamente los cinco primeros modos propios de la viga. Es decir, la 1<sup>era</sup> flexión en XZ, la 1<sup>era</sup> flexión en XY, la 2<sup>a</sup> flexión en XZ, la 1<sup>a</sup> torsión en X y la 3<sup>era</sup> flexión en XZ. De un total de aproximadamente 186 modos propios disponibles (hemos discretizado la viga en 31 nodos con cada uno 6 grados de libertad) reducimos el análisis a considerar únicamente los 5 primeros. Este paso es fundamental para el desarrollo eficaz del nuevo método ya que estamos convencidos de que la velocidad de cálculo será mucho mayor pues las matrices se ven enormemente reducidas y sólo deberemos comprobar que la precisión en el resultado es aceptable. Esta idea basa su sentido en una de las propiedades más importantes del Análisis Modal, que es su habilidad para reducir la complejidad de un problema a la consideración únicamente de unas pocas variables, las frecuencias naturales y los modos propios. Además los primeros modos propios y sobretodo el primer modo propio o fundamental son aquellos que determinan la respuesta de un sistema, por lo que consideramos que despreciar el resto de modos no será importante. El problema fundamental y de dónde provendrá los errores que confiamos sean despreciables se presenta al pasar de coordenadas espaciales a coordenadas modales y viceversa, ya que nos vemos obligados a utilizar una seudo inversa. De todos modos utilizamos la seudo inversa de mínimos cuadrados para reducir este efecto indeseable. Siguiendo el mismo proceso de análisis que en Abaqus/Explicit, la Figura 24 muestra el análisis temporal de los cuatro puntos característicos de la viga:



**Figura 24 - Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en el Análisis Modal Multinivel**

Comparando en resultado con el dado por Abaqus/Explicit (Figura 19), la conclusión es evidente: las formas de las vibraciones son idénticas y el movimiento alternativo entre el extremo libre y el punto medio también se observa. Además, el comportamiento vibratorio no esperado antes del impacto también se produce y lo que es más sorprendente, la amplitud de la vibración es idéntica, obteniendo la contribución de casi todos los modos que intervienen. La comparación entre ambas figuras confirma que el método es aplicable y eficiente. El análisis en frecuencia aparece en la siguiente figura:



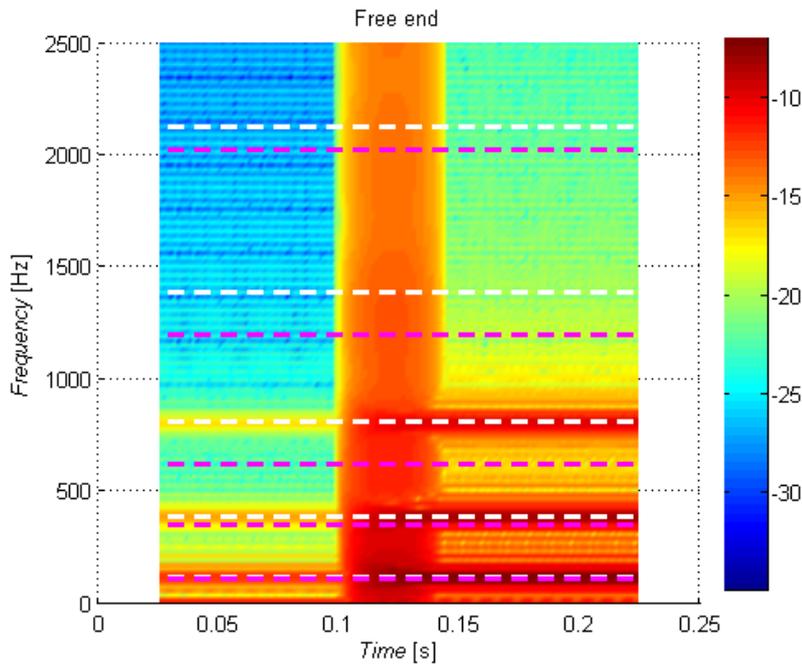
**Figura 25 – Análisis frecuencial de la vibración de los siguientes puntos de la viga: punto medio, punto de impacto y extremo libre en Análisis Modal Multinivel**

Se identifican claramente tres picos:

- El primer pico corresponde con 120 Hz, es decir, el primer modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El segundo es 388 Hz. Idéntico al segundo modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.
- El tercer pico identificado es 808 Hz, que es el tercer modo de flexión de la viga en XZ en la primera configuración.

Los dos otros modos de flexión en XZ que identificábamos con Abaqus/Explícit ahora no se aprecian porque sólo estamos considerando los cinco primeros modos propios de la viga, entre los que estos dos no se encuentran.

Realizando el análisis en tiempo y frecuencia simultáneo obtenemos el resultado que aparece en la Figura 26:



**Figura 26 - Análisis en tiempo y frecuencia de la vibración del extremo libre de la viga en Análisis Modal Multinivel y comparación con los modos propios de flexión en XZ analíticos**

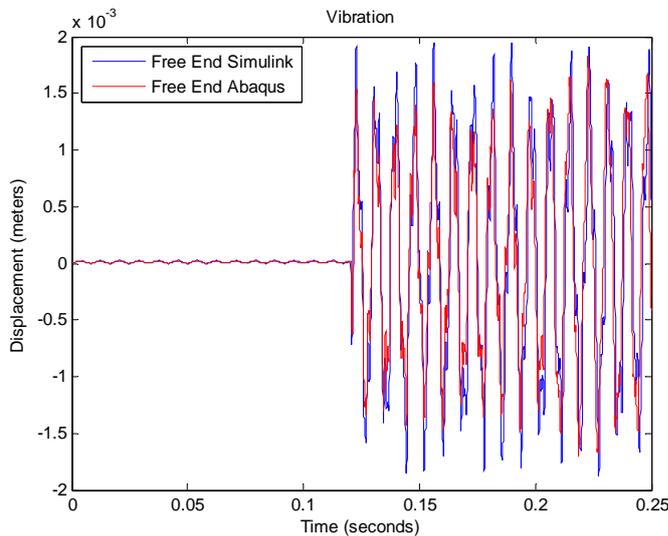
Comparando este resultado con el de la Figura 23 se aprecia que para los modos considerados la similitud entre ambos gráficos es bastante elevada, bien es cierto que la señal de Abaqus está mejor definida y el resultado del espectrograma es más detallado, sobretodo en el lapso temporal del impacto. De hecho, la Figura 26 muestra que en el impacto se excitan casi absolutamente todas las frecuencias y esto es un error derivado de realizar la pseudo inversa con tan pocos modos propios. De todos modos, los resultados son más que aceptables para el tiempo de simulación que ha sido necesario.

## 4. Conclusiones

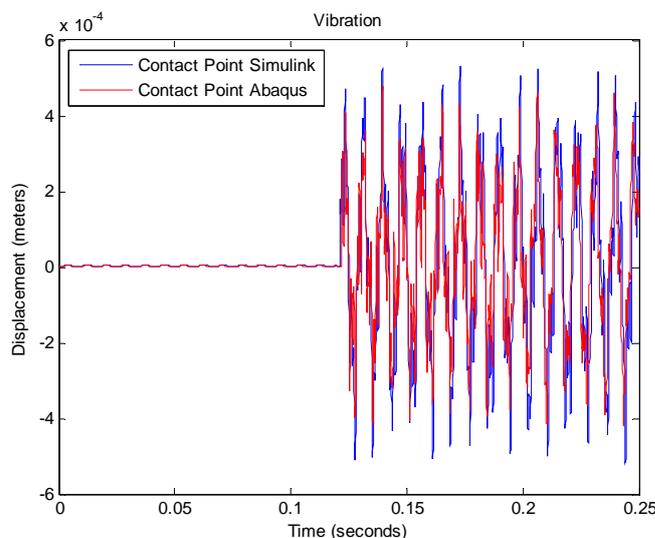
Los resultados muestran una gran similitud entre ambos procedimientos de cálculo lo que demuestra la validez del Análisis Modal Multinivel como mejora de los actuales programas de resolución por elementos finitos. Todo hace indicar que el método debe ser probado con otros ejemplos más complejos y que merece la pena desarrollarlo dadas sus increíbles ventajas. Al inicio de este Proyecto Final de Carrera hablábamos de dos parámetros fundamentales como medida de la validez del método: precisión en el resultado y tiempo de computación necesario. Ahora somos capaces de dar cifras exactas a estos parámetros.

- Precisión:

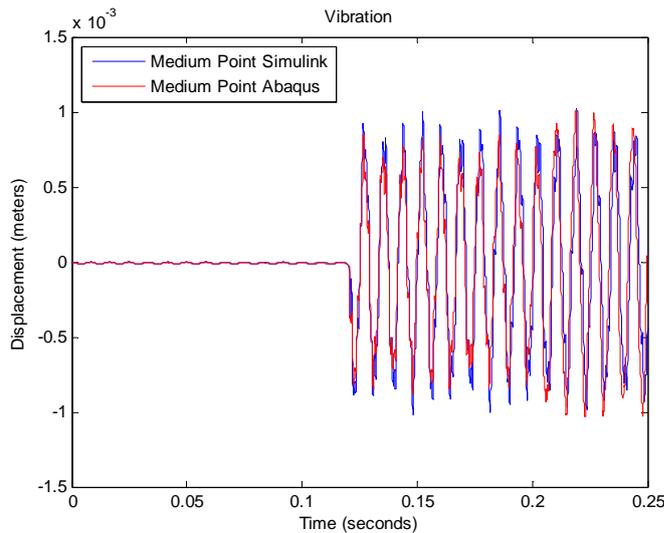
En términos del análisis temporal, las Figuras 27, 28 y 29 muestran una comparación de la vibración de los tres puntos fundamentales (extremo libre, punto de impacto y punto medio) de la viga para ambos métodos:



**Figura 27 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre**



**Figura 28 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre**



**Figura 29 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre**

A primera vista ya se aprecian varios aspectos. Primero que las gráficas son realmente muy parecidas y segundo que los pequeños errores que se cometen van aumentando conforme evoluciona el tiempo, como es evidente a causa de la evolución dinámica de sistemas con condiciones parecidas pero no idénticas. También hay que decir que en la simulación con Abaqus/Explicit se produce un segundo impacto próximo al tiempo 0.2 segundos, y de allí las mayores amplitudes de la vibración que se observan. En el Anexo VII se recoge este mismo análisis comparativo tanto para la simulación con una masa de 100 gramos en el extremo libre como para la de 200 gramos.

Para medir el error cometido utilizamos el parámetro NRMSE (Normalizad Root Mean Square Error – Raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado). La Tabla 11 muestra los resultados:

**Tabla 11 – Raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado de la solución en Matlab/Simulink respecto a la solución de Abaqus/Explicit para los tres puntos característicos de la viga**

Característica de la viga	Punto considerado	RNMSE (%)
Sin masa en el extremo libre	Extremo libre	10.03
	Punto de impacto	11.57
	Punto medio	9.40
Masa de 100 gramos en el extremo libre	Extremo libre	3.91
	Punto de impacto	8.28
	Punto medio	4.18
Masa de 200 gramos en el extremo libre	Extremo libre	3.68
	Punto de impacto	4.15
	Punto medio	3.61

$$RNMSE(\%) = 100 * \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{o,i=1}^N (x_o - x_i)^2}}{\text{máximo}(x_i) - \text{mínimo}(x_i)}$$

En términos frecuenciales, el análisis según la Transformada Discreta de Fourier ofrece el mismo resultado para ambas señales según los modos considerados. Por otro lado, el análisis tiempo – frecuencia ofrece una resolución más detallada para la señal proveniente de Abaqus/Explicit, sobre todo en el momento del impacto, ya que con la señal del Análisis Modal Multinivel el impacto supone la excitación de todas las frecuencias, consecuencia del error que estamos cometiendo al considerar una pseudo inversa.

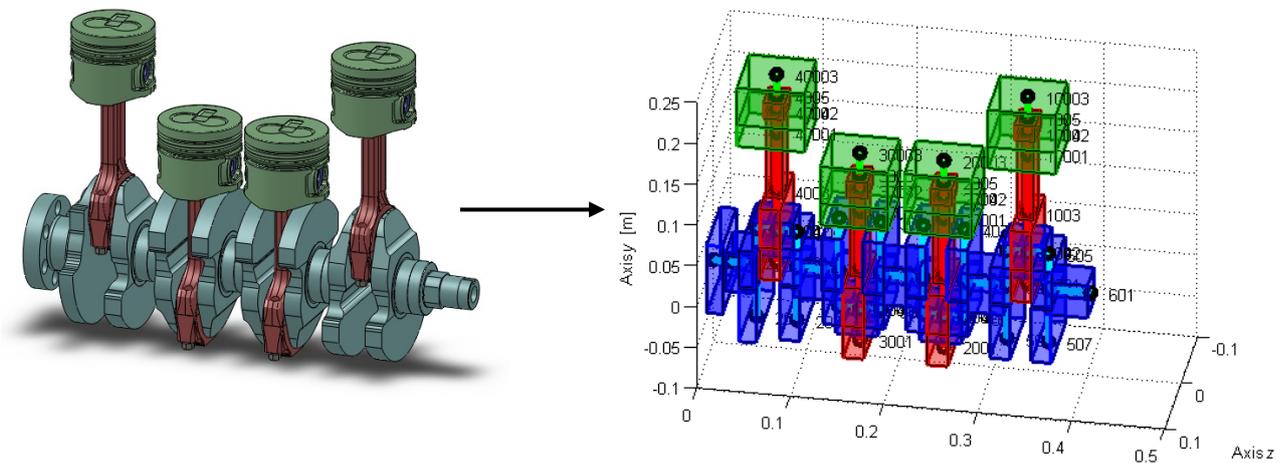
- Tiempo de computación necesario:

En Abaqus/Explicit ha sido necesario un tiempo de 4 horas para solucionar el problema conservativo, mientras que la simulación con amortiguación de tipo Rayleigh no ha sido posible debido a su lentitud, aunque estimamos un tiempo necesario de 40 días. Con el Análisis Modal Multinivel no hay gran diferencia entre el tiempo necesario para la simulación conservativa y para la disipativa, siendo en ambos casos de 10 minutos. El ahorro en tiempo es más que evidente ya que es 24 veces más veloz en el caso conservativo y mucho más en el ejemplo disipativo. Bien es cierto que Abaqus/Explicit emplea un mayor número de elementos, pero esto es necesario para obtener resultados aceptables. Sin embargo, con el nuevo método y un menor número de elementos los resultados son muy similares e incluso mejorables considerando más modos propios. Como ya hemos comentado, la clave del Análisis Modal Multinivel reside en considerar una matriz modal con los pocos e influyentes modos propios del sistema, por lo tanto una matriz muy reducida, y de este modo eliminar del cálculo casi todas las no linealidades provenientes de la integración de las matrices de masa, rigidez y amortiguación.

## 5. Aplicaciones y futuros desarrollos

Las aplicaciones de este método son tantas como el uso en el mundo de la Ingeniería del software de Elementos Finitos, es decir, se puede aplicar a todo tipo de problemas mecánicos. Particularmente, el interés del grupo de investigación en el que se ha desarrollado este Proyecto Final de Carrera es aplicar el método a dos problemas mecánicos a medio plazo:

- El primero es considerar un modelo de motor de combustión interna de cuatro tiempos y con cuatro pistones mediante una discretización simple pero con los elementos más destacados que lo forman: pistones, bielas y cigüeñal. Conforme el cigüeñal gira y dependiendo de la posición de los pistones el sistema evoluciona en una infinidad de configuraciones lo que ocasiona una gran variación en los modos propios y en las frecuencias naturales.



- El segundo consiste en una pieza de goma que sirve para soporte de un sistema wireless que se coloca en la banda interna de los neumáticos de los vehículos y cuyo objetivo es recoger información de presión, temperatura, velocidad, etc., y enviarla a un receptor para el tratamiento de los datos. La fuente de energía del sistema es la vibración de unos imanes colocados dentro del dispositivo a causa de las deformaciones provocadas por las irregularidades del terreno conforme el vehículo se desplaza.



El siguiente paso para la aplicación del método a estos problemas es extender el desarrollo a la consideración de tantas configuraciones como sea necesario. Para ello los futuros trabajos se van a centrar en la consideración de una matriz modal tridimensional con diferentes niveles de forma que se utilizará sólo aquella parte de la matriz que representa la configuración actual del sistema.

Por último y con el objetivo de reducir los errores cometidos con este método, que para el caso estudiado hemos visto que son aceptables y que dependerán del problema analizado, será necesario evaluar el número de modos propios necesarios para que el compromiso entre precisión en el resultado y tiempo de computación necesario sea el óptimo.

## Bibliografía

- [1] NUNO M. M. MAIA, JÚLIO M. M. SILVA, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Instituto Superior Técnico, Portugal, 1997, **pág. 50 - 56.**
- [2] A. FASANA, S. MARCHESIELLO, *Meccanica delle vibrazioni*, CLUT, 2006, **pág. 31 - 40.**
- [3] MOODY T. CHU, GENE H. GOLUB, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms and Applications*, Oxford Science Publications, 2005, **pág. 108.**
- [4] GENE H. GOLUB, CHARLES F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, The Johns Hopkins University Press, Third Edition, 1996, **pág. 496 - 498.**
- [5] G. GENTA, *Vibration Dynamics and Control*, Springer, 2009, **pág. 280 - 286.**
- [6] RANDALL J. ALLEMANG, *The Modal Assurance Criterion – Twenty Years of Use and Abuse*, Journal of Sound and Vibration, August, 2003.

## Índice de figuras

Figura 1 – Sistema con cinco grados de libertad .....	7
Figura 2 – Resultado temporal de la Integración Directa (izquierda) vs. Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel (derecha).....	7
Figura 3 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel cuando se bloquea el nodo número 4 en una posición de velocidad nula.....	8
Figura 4 – Sistema con cinco grados de libertad y contacto entre la bancada y el nodo número cuatro .....	8
Figura 5 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel simulando el contacto entre el nodo número 4 y la bancada .....	9
Figura 6 – Sistema con ocho grados de libertad.....	10
Figura 7 – Resultado temporal de la Integración Directa (izquierda) vs. Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel (derecha).....	10
Figura 8 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel cuando se bloquea el nodo número 5 en una posición de velocidad nula.....	11
Figura 9 – Sistema con ocho grados de libertad y contacto entre la bancada y el nodo número cinco .....	11
Figura 10 – Resultado temporal del Análisis Modal Multinivel simulando el contacto entre el nodo número 5 y la bancada.....	11
Figura 11 – Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XZ para la viga articulada – libre .....	13
Figura 12 – Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XY para la viga articulada – libre .....	13
Figura 13 – Ecuación característica para los modos propios de flexión en el plano XZ para la viga articulada – apoyada – libre .....	14
Figura 14 – Modelo utilizado en Abaqus.....	15
Figura 15 – Modelo utilizado en LUPOS.....	16
Figura 16 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones (izquierda) vs. Criterio de Confianza Modal para los modos propios de Abaqus/Standard entre ambas configuraciones (derecha) .....	18
Figura 17 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones con masa puntual de 100 gramos en el extremo libre.....	20
Figura 18 – Criterio de Confianza Modal para los modos propios de LUPOS entre ambas configuraciones con masa puntual de 200 gramos en el extremo libre.....	20
Figura 19 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit.....	22
Figura 20 – Esquema de la vibración de la viga en los primeros pasos de la simulación.....	23
Figura 21 – Vector velocidad lineal en los puntos de la viga para los primeros instantes de la simulación en Abaqus/Explicit .....	23
Figura 22 – Análisis frecuencial de la vibración de los siguientes puntos de la viga: punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit .....	24
Figura 23 – Análisis en tiempo y frecuencia de la vibración del extremo libre de la viga en Abaqus/Explicit y comparación con los modos propios de flexión en XZ analíticos de la primera configuración (blanco) y de la segunda configuración (magenta) .....	25

Figura 24 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en el Análisis Modal Multinivel .....	27
Figura 25 – Análisis frecuencial de la vibración de los siguientes puntos de la viga: punto medio, punto de impacto y extremo libre en Análisis Modal Multinivel.....	28
Figura 26 – Análisis en tiempo y frecuencia de la vibración del extremo libre de la viga en Análisis Modal Multinivel y comparación con los modos propios de flexión en XZ analíticos .....	29
Figura 27 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre .....	30
Figura 28 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre .....	30
Figura 29 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga sin masa en el extremo libre .....	31
Figura 30 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 100 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit.....	58
Figura 31 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 100 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en el Análisis Modal Multinivel .....	58
Figura 32 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre .....	59
Figura 33 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre .....	59
Figura 34 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre .....	59
Figura 35 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 200 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit.....	60
Figura 36 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 200 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit.....	60
Figura 37 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre .....	61
Figura 38 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre .....	61
Figura 39 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre .....	61

## Índice de tablas

Tabla 1 – Discretización utilizada en el modelo de la viga articulada – libre en Abaqus/Standard.....	15
Tabla 2 – Caracterización geométrica y de materiales para el modelo de la viga articulada – libre en Abaqus/Standard.....	15
Tabla 3 – Discretización utilizada en el modelo de la viga articulada – libre en LUPOS.....	16
Tabla 4 – Caracterización geométrica y de materiales para el modelo de la viga articulada – libre en LUPOS.....	16
Tabla 5 – Frecuencias naturales y modos propios para la viga articulada – libre...	17
Tabla 6 – Frecuencias naturales y modos propios para la viga articulada – apoyada – libre .....	17
Tabla 7 – Frecuencias naturales y modos propios al colocar una masa puntual de 100 gramos en el extremo libre .....	20
Tabla 8 – Frecuencias naturales y modos propios al colocar una masa puntual de 200 gramos en el extremo libre .....	20
Tabla 9 – Discretización empleada en Abaqus/Explicit .....	21
Tabla 10 – Parámetros del contacto en Abaqus/Explicit .....	22
Tabla 11 – Raíz cuadrada del error cuadrático medio normalizado de la solución en Matlab/Simulink respecto a la solución de Abaqus/Explicit para los tres puntos característicos de la viga .....	31