

# **Anexos**

## Anexo I – Matrices dinámicas utilizadas en la simulación de masas discretizadas con varios grados de libertad

A continuación se recogen las matrices dinámicas utilizadas en las simulaciones de los sistemas de masas discretizadas estudiados, tanto las matrices espaciales de masa, amortiguación y rigidez como sus equivalentes en coordenadas modales para los dos niveles considerados.

### ▪ Sistema con cinco grados de libertad:

#### • Primer nivel:

♦ Matriz de transformación:  $T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

♦ Matriz de masa:  $M = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & m1 & & & \\ & & m2 & & \\ & & & m3 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M_{BCs} = T_1' M T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

#### ♦ Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & & & \\ -k1 & k1+k2 & -k2 & & 0 \\ & -k2 & k2+k3 & -k3 & \\ & & 0 & -k3 & k3+k4 & -k4 \\ & & & -k4 & & k4 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & & & \\ -1000 & 3000 & -2000 & & 0 \\ & -2000 & 5000 & -3000 & \\ & & 0 & -3000 & 7000 & -4000 \\ & & & -4000 & 4000 & \end{bmatrix} \rightarrow K_{BCs} = T_1' K T_1 = 1000 \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 \\ 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$$

#### ♦ Matriz de amortiguación:

$$C_{BCs} = \alpha M_{BCs} + \beta K_{BCs} \text{ with } \alpha = 1 \quad \beta = 0.01 \rightarrow C_{BCs} = \begin{bmatrix} 31 & -20 & 0 \\ -20 & 52 & -30 \\ 0 & -30 & 73 \end{bmatrix}$$

#### ♦ Matriz modal de masa:

$$\Phi_{BCs}^T M_{BCs} \Phi_{BCs} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### ♦ Matriz modal de rigidez:

$$\Phi_{BCs}^T K_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 706.2 & 0 & 0 \\ 0 & 2615.5 & 0 \\ 0 & 0 & 4511.7 \end{bmatrix}$$

#### ♦ Matriz modal de amortiguación:

$$\Phi_{BCs}^T C_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(2\xi_r \omega_r) = \alpha \cdot I + \beta \cdot \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 8.0621 & 0 & 0 \\ 0 & 27.1547 & 0 \\ 0 & 0 & 46.1166 \end{bmatrix}$$

- Segundo nivel:

◆ Matriz de transformación:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz de masa:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & m1 & & & \\ & & m2 & & \\ & & & m3 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M_{BCs} = T_2' M T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & & & \\ -k1 & k1+k2 & -k2 & & 0 \\ & -k2 & k2+k3 & -k3 & \\ & & 0 & -k3 & k3+k4 & -k4 \\ & & & -k4 & & k4 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1000 & -1000 & & & \\ -1000 & 3000 & -2000 & & 0 \\ & -2000 & 5000 & -3000 & \\ & & 0 & -3000 & 7000 & -4000 \\ & & & -4000 & 4000 & \end{bmatrix} \rightarrow K_{BCs} = T_2' K T_2 = 1000 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz de amortiguación:

$$C_{BCs} = \alpha M_{BCs} + \beta K_{BCs} \quad \text{with} \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0.01 \rightarrow C_{BCs} = \begin{bmatrix} 31 & -20 \\ -20 & 52 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz modal de masa:

$$\Phi_{BCs}^T M_{BCs} \Phi_{BCs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz modal de rigidez:

$$\Phi_{BCs}^T K_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 1313.9 & 0 & 0 \\ 0 & 4186.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- ◆ Matriz modal de amortiguación:

$$\Phi_{BCs}^T C_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(2\xi_r \omega_r) = \alpha \cdot I + \beta \cdot \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 14.1386 & 0 & 0 \\ 0 & 42.8614 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

▪ Sistema con ocho grados de libertad:

• Primer nivel:

◆ Matriz de transformación:

$$T_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ Matriz de masa:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & m1 & & & & & & \\ & & m2 & & & & & \\ & & & m3 & & & & \\ & & & & m4 & & & \\ & & & & & m5 & & \\ & & & & & & m6 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 2 & & & & & \\ & & & 3 & & & & \\ & & & & 4 & & & \\ & & & & & 5 & & \\ & & & & & & 6 & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow M_{BCs} = T_1' M T_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 3 & & & & & \\ & & & 4 & & & & \\ & & & & 5 & & & \\ & & & & & 6 & & \\ & & & & & & & 6 \end{bmatrix}$$

◆ Matriz de rigidez:

$$K = \begin{bmatrix} k1 & -k1 & & & & & & \\ -k1 & k1+k2 & -k2 & & & & & \\ & -k2 & k2+k3 & -k3 & & & & \\ & & -k3 & k3+k4 & -k4 & & & \\ & & & -k4 & k4+k5 & -k5 & & \\ & & & & -k5 & k5+k6 & -k6 & \\ & & & & & -k6 & k6+k7 & -k7 \\ & & & & & & -k7 & k7 \end{bmatrix} = 1000 \begin{bmatrix} 1 & -1 & & & & & & \\ -1 & 3 & -2 & & & & & \\ & -2 & 5 & -3 & & & & \\ & & -3 & 7 & -4 & & & \\ & & & -4 & 9 & -5 & & \\ & & & & 0 & -5 & 11 & -6 \\ & & & & & -6 & 13 & -7 \\ & & & & & & -7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow K_{BCs} = T_1' K T_1 = 1000 \begin{bmatrix} 3 & -2 & & & & & & \\ -2 & 5 & -3 & & & & & \\ -3 & 7 & -4 & & & & & \\ & & -4 & 9 & -5 & & & \\ & & & 0 & -5 & 11 & -6 & \\ & & & & -6 & 13 & & \end{bmatrix}$$

◆ Matriz de amortiguación:

$$C_{BCs} = \alpha M_{BCs} + \beta K_{BCs} \text{ with } \alpha = 1 \quad \beta = 0.01 \rightarrow C_{BCs} = \begin{bmatrix} 31 & -20 & & & & & & \\ -20 & 52 & -30 & & & & & \\ & -30 & 73 & -40 & & & & \\ & & -40 & 94 & -50 & & & \\ & & & 0 & -50 & 115 & -60 & \\ & & & & -60 & 136 & & \end{bmatrix}$$

◆ Matriz modal de masa:

$$\Phi_{BCs}^T M_{BCs} \Phi_{BCs} = I = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & 0 & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

◆ Matriz modal de rigidez:

$$\Phi_{BCs}^T K_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 207.8 & & & & & \\ & 876.1 & & & & \\ & & 1861.8 & & & \\ & & & 2950.1 & & \\ & 0 & & & 3895.6 & \\ & & & & & 4658.5 \end{bmatrix}$$

◆ Matriz modal de amortiguación:

$$\Phi_{BCs}^T C_{BCs} \Phi_{BCs} = \text{diag}(2\xi_r \omega_r) = \alpha \cdot I + \beta \cdot \text{diag}(\omega_r) = \begin{bmatrix} 3.0784 & & & & & \\ & 9.7611 & & & & \\ & & 19.6175 & & & \\ & & & 30.5013 & & \\ & 0 & & & 39.9563 & \\ & & & & & 47.5853 \end{bmatrix}$$

• Segundo nivel:

◆ Matriz de transformación:

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

◆ Matriz de masa:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ & m1 & & & & & & & & & & \\ & & m2 & & & & & & & & & \\ & & & m3 & & & & & & & & \\ & & & & m4 & & & & & & & \\ & & & & & m5 & & & & & & \\ & & & & & & m6 & & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & & & \\ & & & 3 & & & & & & & & \\ & & & & 4 & & & & & & & \\ & & & & & 5 & & & & & & \\ & & & & & & 6 & & & & & \\ & & & & & & & 0 & & & & \end{bmatrix} \rightarrow M_{BCs} = T_2^T M T_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & & & & & \\ & & 3 & & & & & & & & & \\ & & & 5 & & & & & & & & \\ & & & & & 6 & & & & & & \end{bmatrix}$$



## Anexo II – Evaluación dinámica de la fuerza de reacción cuando hay contacto

Antes de evaluar el problema matricial dinámico comenzamos estudiando el problema estático:

$$\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} + \mathbf{R}$$

Siendo  $\mathbf{R}$  el vector de reacciones en cada uno de los grados de libertad bloqueados. Aplicando la transformación que considera las condiciones de contorno específicas del sistema:

$$\mathbf{K}_{BCs} \mathbf{x}_{BCs} = \mathbf{f}_{BCs} + \mathbf{R}_{BCs}$$

Si consideramos la optimización de la inversión numérica con la aplicación algebraica de la seudo inversa de mínimos cuadrados:

$$\tilde{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{BCs} \end{Bmatrix}$$

Con  $\tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}}$  y  $\tilde{\mathbf{T}}^T = \tilde{\mathbf{T}}^{-1}$ , matrices de rango completo. Reordenando la matriz de rigidez:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{BCs} & \mathbf{K}_R \\ \mathbf{K}_R^T & \mathbf{K}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{BCs} \end{Bmatrix}$$

La evaluación de la reacción es entonces:

$$\mathbf{R}_{BCs} = \mathbf{K}_R^T \mathbf{x}_{BCs}$$

Si extendemos la resolución al problema matricial dinámico, partimos de la siguiente ecuación:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{f} + \mathbf{R}$$

Aplicando el mismo procedimiento la anterior ecuación se puede escribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{M} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{x}}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \mathbf{C} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \tilde{\mathbf{K}} \begin{Bmatrix} \mathbf{x}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{BCs} \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_{BCs} \end{Bmatrix}$$

Y por lo tanto la evaluación de la reacción se concluye como se indica a continuación:

$$\mathbf{R}_{BCs} = \mathbf{M}_R^T \ddot{\mathbf{x}}_{BCs} + \mathbf{C}_R^T \dot{\mathbf{x}}_{BCs} + \mathbf{K}_R^T \mathbf{x}_{BCs} \cong \mathbf{K}_R^T \mathbf{x}_{BCs}$$

La conclusión de este análisis es que tanto en el problema estático como en el dinámico el vector de reacciones en cada uno de los grados de libertad eliminados del sistema se calcula evaluando la matriz de rigidez reordenada  $\mathbf{K}_R^T$ , que no es otra que la matriz de rigidez global considerando sólo las filas de los grados de libertad suprimidos y las columnas de todos los grados de libertad.

### **Anexo III – Resolución analítica detallada del problema de valores propios para la viga sin masa en el extremo libre**

A través de su solución, la ecuación de la Teoría de Vigas de Euler – Bernoulli nos permite calcular los modos propios de flexión, para los de torsión se debe modificar el planteamiento, de modo que si escribimos la solución de la siguiente forma:

$$q(z) = C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot z) + C_2 \cdot \cos(\lambda \cdot z) + C_3 \cdot \sinh(\lambda \cdot z) + C_4 \cdot \cosh(\lambda \cdot z)$$

Los coeficientes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  se calculan aplicando las correspondientes condiciones de contorno:

- Viga articulada – libre:

- ◆ En el plano XZ:

En el extremo articulado ( $z = 0$ ) se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} q(0) = 0 \\ \frac{d^2 q}{dz^2}(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ -C_2 + C_4 = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C_2 = C_4 = 0$$

Para el extremo libre ( $z = L$ ) se sabe que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 q}{dz^2}(L) = 0 \\ \frac{d^3 q}{dz^3}(L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -\lambda^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot L) + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \sinh(\lambda \cdot L) = 0 \\ -\lambda^3 \cdot C_1 \cdot \cos(\lambda \cdot L) + \lambda^3 \cdot C_3 \cdot \cosh(\lambda \cdot L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -\sin(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) \\ -\cos(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_1 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \det \begin{bmatrix} -\sin(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) \\ -\cos(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\sinh(\lambda \cdot L) \cdot \cos(\lambda \cdot L) - \cosh(\lambda \cdot L) \cdot \sin(\lambda \cdot L) = 0$$

- ◆ En el plano XY:

Ahora el extremo articulado ( $z = 0$ ) se comporta como un empotramiento según ese plano, por lo que se cumplen las siguientes condiciones:

$$\left. \begin{array}{l} q(0) = 0 \\ \frac{dq}{dz}(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} C_2 + C_4 = 0 \\ C_1 + C_3 = 0 \end{array} \right\}$$

En el extremo libre ( $z = L$ ) se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 q}{dz^2}(L) = 0 \\ \frac{d^3 q}{dz^3}(L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -\lambda^2 \cdot C_1 \cdot \sin(\lambda \cdot L) - \lambda^2 \cdot C_2 \cdot \cos(\lambda \cdot L) + \lambda^2 \cdot C_3 \cdot \sinh(\lambda \cdot L) + \lambda^2 \cdot C_4 \cdot \cosh(\lambda \cdot L) = 0 \\ -\lambda^3 \cdot C_1 \cdot \cos(\lambda \cdot L) + \lambda^3 \cdot C_2 \cdot \sin(\lambda \cdot L) + \lambda^3 \cdot C_3 \cdot \cosh(\lambda \cdot L) + \lambda^3 \cdot C_4 \cdot \sinh(\lambda \cdot L) = 0 \end{array} \right\}$$

Reagrupando las ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} C_3 \cdot \sin(\lambda \cdot L) + C_4 \cdot \cos(\lambda \cdot L) + C_3 \cdot \sinh(\lambda \cdot L) + C_4 \cdot \cosh(\lambda \cdot L) = 0 \\ C_3 \cdot \cos(\lambda \cdot L) - C_4 \cdot \sin(\lambda \cdot L) + C_3 \cdot \cosh(\lambda \cdot L) + C_4 \cdot \sinh(\lambda \cdot L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \sin(\lambda \cdot L) + \sinh(\lambda \cdot L) & \cos(\lambda \cdot L) + \cosh(\lambda \cdot L) \\ \cos(\lambda \cdot L) + \cosh(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) - \sin(\lambda \cdot L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\det \begin{bmatrix} \sin(\lambda \cdot L) + \sinh(\lambda \cdot L) & \cos(\lambda \cdot L) + \cosh(\lambda \cdot L) \\ \cos(\lambda \cdot L) + \cosh(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) - \sin(\lambda \cdot L) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\sinh^2(\lambda \cdot L) - \sin^2(\lambda \cdot L) - \cos^2(\lambda \cdot L) - \cosh^2(\lambda \cdot L) - 2 \cdot \cos(\lambda \cdot L) \cdot \cosh(\lambda \cdot L) = 0 \rightarrow$$

$$\cosh(\lambda \cdot L) \cdot \cos(\lambda \cdot L) + 1 = 0$$

Para calcular los modos propios de torsión en X se parte de la variación angular en lugar del cambio en el desplazamiento. Por ello se debe comenzar con la siguiente ecuación torsional para vigas:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial t^2} - \frac{G\gamma}{\rho J_p} \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial x^2} = 0$$

Siendo la solución una onda estacionaria de la forma:  $\mathcal{G}(x, t) = \theta(x)u(t)$

La parte espacial se puede escribir como:  $\theta(x) = A_1 \sin(k_T x) + A_2 \cos(k_T x)$

Y los coeficientes  $A_1$  y  $A_2$  se calculan aplicando las condiciones de contorno correspondientes, que en este caso son de viga articulada – libre:

$$\theta(0) = 0 \rightarrow A_2 = 0$$

$$\theta'(L) = 0 \rightarrow k_T A_1 \cos(k_T L) = 0 \rightarrow \cos(k_T L) = 0 \rightarrow k_{T,n} = \frac{n\pi}{2L}, \text{ con } n = 1, 3, 5, \dots$$

La frecuencia de los modos propios de torsión se calcula directamente aplicando la siguiente fórmula:

$$\omega_n = k_{T,n} \cdot \sqrt{\frac{G\gamma}{\rho J_p}}$$

- Viga articulada – apoyada – libre:

El único cambio en los modos propios de la viga respecto a la anterior configuración se produce en los modos de flexión en el plano XZ. En este caso, a parte de las ecuaciones que se derivan de la aplicación de las condiciones de contorno, hay que añadir también las ecuaciones que aseguran la continuidad entre un lado y el otro del apoyo intermedio. En este sentido, considerando dos soluciones para la ecuación de la Teoría de Vigas de Euler – Bernoulli, una para cada uno de esos lados, partimos de las siguientes ecuaciones:

$$q_1(z) = C_{11} \cdot \sin(\lambda \cdot z) + C_{21} \cdot \cos(\lambda \cdot z) + C_{31} \cdot \sinh(\lambda \cdot z) + C_{41} \cdot \cosh(\lambda \cdot z)$$

$$q_2(z) = C_{12} \cdot \sin(\lambda \cdot z) + C_{22} \cdot \cos(\lambda \cdot z) + C_{32} \cdot \sinh(\lambda \cdot z) + C_{42} \cdot \cosh(\lambda \cdot z)$$

En el extremo articulado ( $z = 0$ ) sabemos que se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} q_1(0) = 0 \\ \frac{d^2 q_1}{dz^2}(0) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} C_{21} + C_{41} = 0 \\ -C_{21} + C_{41} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow C_{21} = C_{41} = 0$$

Para el extremo libre ( $z = L$ ) tenemos que:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d^2 q_2}{dz^2}(L) = 0 \\ \frac{d^3 q_2}{dz^3}(L) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} -C_{12} \cdot \sin(\lambda \cdot L) - C_{22} \cdot \cos(\lambda \cdot L) + C_{32} \cdot \sinh(\lambda \cdot L) + C_{42} \cdot \cosh(\lambda \cdot L) = 0 \\ -C_{12} \cdot \cos(\lambda \cdot L) + C_{22} \cdot \sin(\lambda \cdot L) + C_{32} \cdot \cosh(\lambda \cdot L) + C_{42} \cdot \sinh(\lambda \cdot L) = 0 \end{array} \right\}$$

Las ecuaciones de continuidad en el apoyo ( $z = \frac{4}{5}L$ ) son:

$$q_1\left(z = \frac{4}{5}L\right) = q_2\left(z = \frac{4}{5}L\right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_{11} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{31} \cdot \sinh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) = 0 \\ C_{12} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{22} \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{32} \cdot \sinh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{42} \cdot \cosh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) = 0 \end{array} \right.$$

$$\frac{dq_1}{dz}\left(z = \frac{4}{5}L\right) = \frac{dq_2}{dz}\left(z = \frac{4}{5}L\right) \rightarrow$$

$$C_{11} \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{31} \cdot \cosh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) = C_{12} \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) - C_{22} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{32} \cdot \cosh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{42} \cdot \sinh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right)$$

$$\frac{d^2 q_1}{dz^2}\left(z = \frac{4}{5}L\right) = \frac{d^2 q_2}{dz^2}\left(z = \frac{4}{5}L\right) \rightarrow$$

$$-C_{11} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{31} \cdot \sinh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) = -C_{12} \cdot \sin\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) - C_{22} \cdot \cos\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{32} \cdot \sinh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right) + C_{42} \cdot \cosh\left(\lambda \cdot \frac{4}{5}L\right)$$

Reagrupando las ecuaciones en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\lambda \cdot L) & -\cos(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) \\ 0 & 0 & -\cos(\lambda \cdot L) & \sin(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) \\ \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \\ \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \\ -\sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{31} \\ C_{12} \\ C_{22} \\ C_{32} \\ C_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

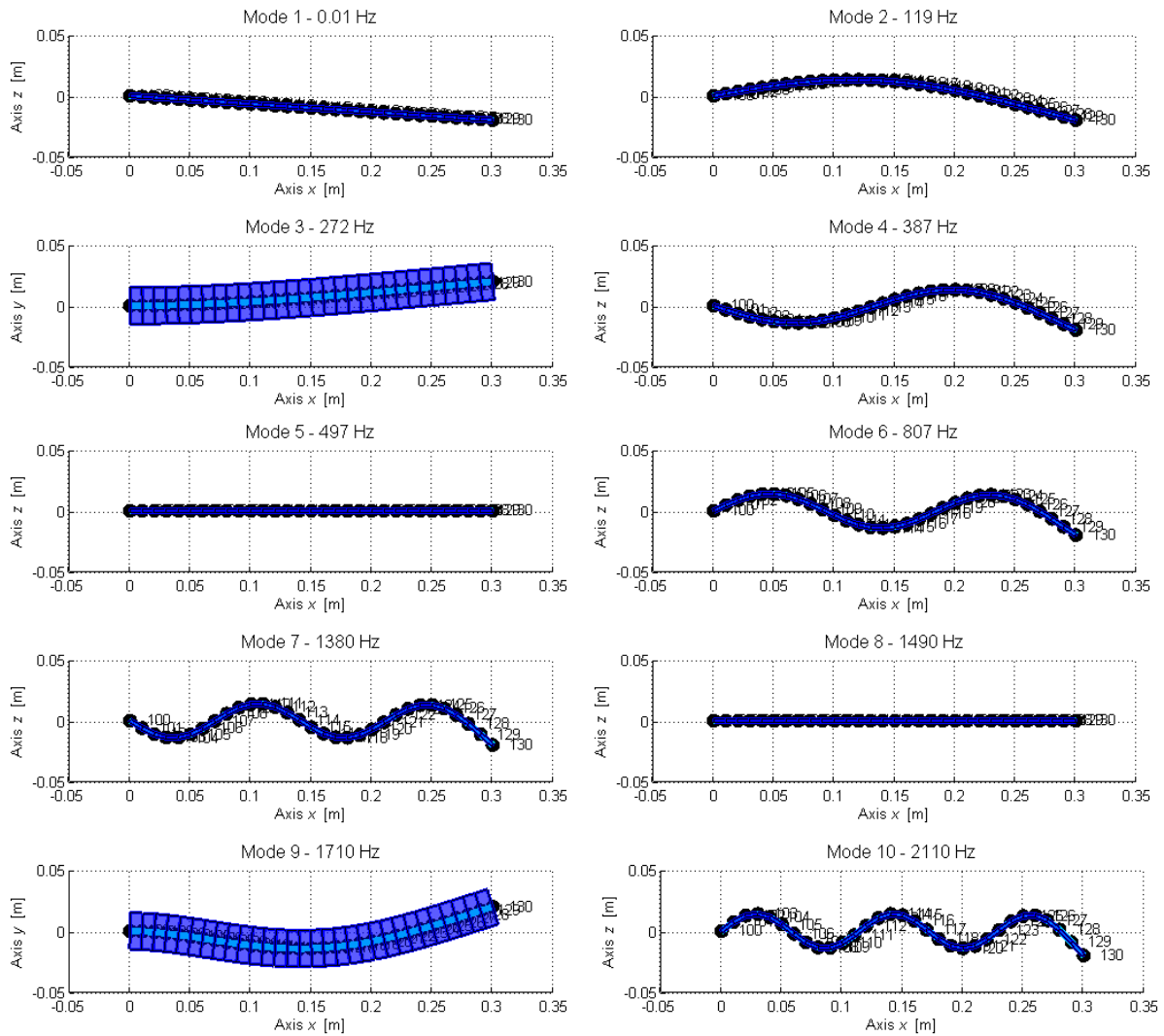
$$\rightarrow \det \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sin(\lambda \cdot L) & -\cos(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) \\ 0 & 0 & -\cos(\lambda \cdot L) & \sin(\lambda \cdot L) & \cosh(\lambda \cdot L) & \sinh(\lambda \cdot L) \\ \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \\ \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \\ -\sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & \cos(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) & -\cosh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \cos(\lambda \cdot \frac{3}{5}L) \cdot \cosh(\lambda \cdot L) - \cosh(\lambda \cdot \frac{3}{5}L) \cdot \cos(\lambda \cdot L) - \sin(\lambda \cdot \frac{3}{5}L) \cdot \sin(\lambda \cdot L) - \sinh(\lambda \cdot \frac{3}{5}L) \cdot \sin(\lambda \cdot L) \\ & - 4 \cdot \sin(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) \cdot \sinh(\lambda \cdot \frac{4}{5}L) - 2 \cdot \sin(\lambda \cdot L) \cdot \sinh(\lambda \cdot L) = 0 \end{aligned}$$

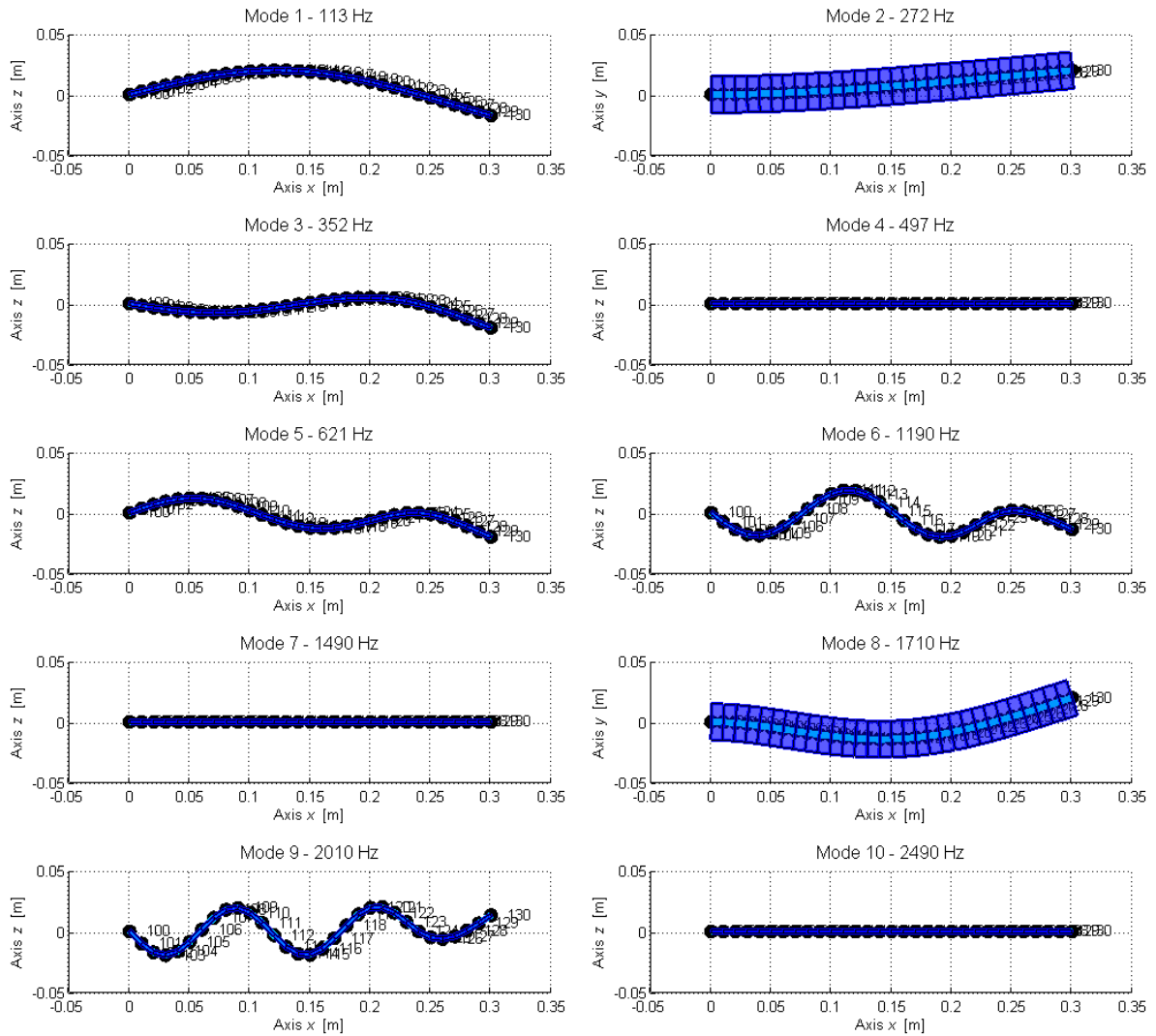
### Anexo IV – Visualización de los diez primeros modos propios extraídos en Abaqus/Standard y Lupos en ambas configuraciones para la viga sin masa en el extremo libre

- Lupos:

- ◆ Primera configuración:

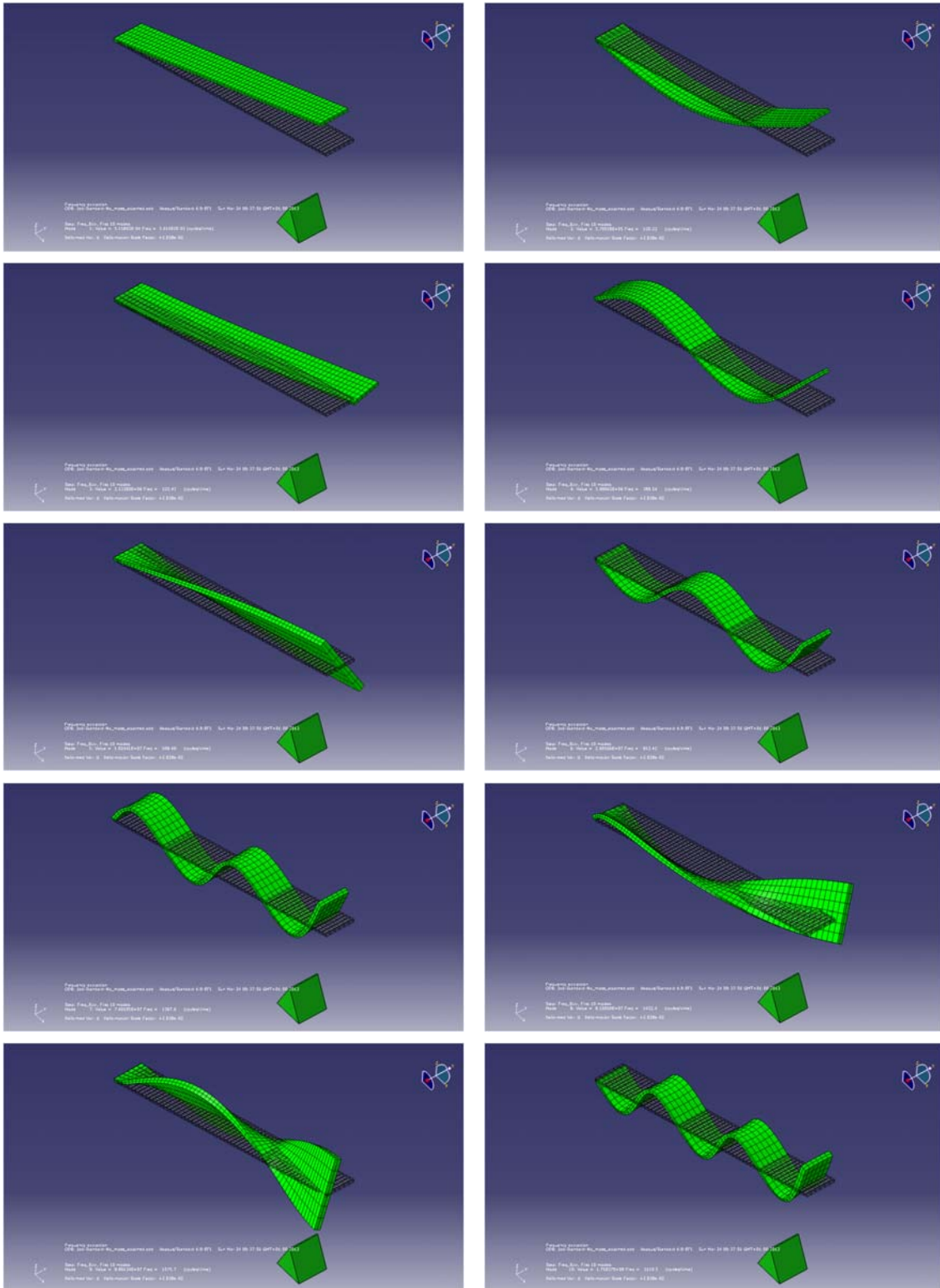


◆ Segunda configuración:



- Abaqus/Standard:

- ◆ Primera configuración:





### Anexo V – El Criterio de Confianza Modal

El Criterio de Confianza Modal (MAC: Modal Assurance Criterion) es un escalar constante ampliamente utilizado en los últimos años en el Análisis Modal como medida del grado de consistencia entre diferentes modos propios y que se calcula de la siguiente manera:

$$MAC_{cr} = \frac{\left| \{\psi_c\}^T \cdot \{\psi_d^*\} \right|^2}{\{\psi_c\}^T \cdot \{\psi_c^*\} \cdot \{\psi_d\}^T \cdot \{\psi_d^*\}}$$

Siendo  $\{\psi_c\}$  el vector modal para el modo  $c$  y  $\{\psi_d\}$  el vector modal para el modo  $d$ .

Este coeficiente adquiere los valores comprendidos entre 0, que representa ningún tipo de consistencia entre los modos propios, y 1, que indica similitud total entre las formas espaciales de los modos propios analizados.

Cabe indicar que este coeficiente sólo indica consistencia, y en ningún momento validez u ortogonalidad. Ello indica que si hay posibles errores en la formación de los vectores modales, éstos no serán detectados por el Criterio de Confianza Modal. De todos modos, es muy útil para el propósito en el que se utiliza en este Proyecto Final de Carrera.

## Anexo VI – Movimiento como sólido rígido de la viga

El movimiento como sólido rígido de la viga se simula mediante la rotación de la misma sobre el punto fijo que corresponde con la rótula. Esta simulación se ha realizado en Matlab/Simulink y para ello se han considerado las ecuaciones matemáticas que definen su movimiento en forma matricial. Comenzando por la cinemática correspondiente se sabe que, para el centro de gravedad, que según cada caso de viga estudiado varía su distancia a la rótula y cuya distancia la denotamos como  $d$ :

$$x_G = d \cdot \sin \beta \rightarrow \dot{x}_G = \dot{\beta} \cdot d \cdot \cos \beta \rightarrow \ddot{x}_G = \ddot{\beta} \cdot d \cdot \cos \beta - \dot{\beta}^2 \cdot d \cdot \sin \beta$$

$$z_G = d \cdot \cos \beta \rightarrow \dot{z}_G = -\dot{\beta} \cdot d \cdot \sin \beta \rightarrow \ddot{z}_G = -\ddot{\beta} \cdot d \cdot \sin \beta - \dot{\beta}^2 \cdot d \cdot \cos \beta$$

Seguidamente se analizan los diagramas de sólido libre. En el caso estático se cumple que:

$$\begin{cases} \sum F_x = 0 \rightarrow R_x = 0 \\ \sum F_z = 0 \rightarrow R_z - m \cdot g = 0 \end{cases}$$

Agrupando las ecuaciones en forma matricial:

$$[K_{st}] \cdot \{R\} = \{f\}$$

$$[K_{st}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} R_x \\ R_z \end{Bmatrix} \quad \{f\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ m \cdot g \end{Bmatrix}$$

Para el caso dinámico sabemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum F_x = 0 \rightarrow m \cdot \ddot{x}_G - R_x = 0 \\ \sum M_y(O) = I_o \cdot \ddot{\beta} \rightarrow I_o \cdot \ddot{\beta} = m \cdot g \cdot d \cdot \sin(\beta) - T, \text{ con } \begin{cases} T = 0 & \text{si } \beta < \frac{\pi}{2} \\ T = \frac{E_{cinética}}{\beta - \frac{\pi}{2}} & \text{si } \beta > \frac{\pi}{2} \end{cases} \\ \sum F_z = 0 \rightarrow m \cdot \ddot{z}_G - R_z + m \cdot g = 0 \end{array} \right.$$

Matricialmente:

$$M = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad K_{st} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -d \cos \beta & 0 \\ 0 & d \sin \beta & 1 \end{bmatrix}$$

$$f_p = \begin{bmatrix} -\dot{\beta}^2 d \sin \beta \\ -\dot{\beta}^2 d \cos \beta \end{bmatrix} \quad f = \begin{bmatrix} 0 \\ m \cdot g \cdot d \cdot \sin \beta - T \\ -mg \end{bmatrix}$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \left\{ \ddot{x}_G \quad \ddot{\beta} \quad \ddot{z}_G \right\}^T \quad R = \left\{ R_{A,x} \quad R_{A,z} \right\}^T$$

Integrando la ecuación matricial anterior se obtienen los grados de libertad útiles del centro de gravedad de la viga, y por lo tanto mediante aplicación de las ecuaciones cinemáticas, los de todos los puntos de la misma. Particularmente, para cada uno de los casos de viga estudiados:

- ♦ Sin masa en el extremo libre:

$$M = \rho \cdot L \cdot b \cdot h = m = 0.0729 \text{ kg}$$

$$d = \frac{L}{2} = 0.15 \text{ metros}$$

$$I_o = \frac{M \cdot L^2}{3}$$

- ♦ Masa de 100 gramos en el extremo libre:

$$M = \rho \cdot L \cdot b \cdot h$$

$$m = M + 0.1$$

Evaluación de la posición del centro de gravedad:

$$d = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + 0.1 \cdot L}{M + 0.1} = 0.2367 \text{ metros}$$

Aplicando el Teorema de Steiner:

$$I_o = \frac{M \cdot L^2}{3} + 0.1 \cdot L^2$$

- ♦ Masa de 200 gramos en el extremo libre:

$$M = \rho \cdot L \cdot b \cdot h$$

$$m = M + 0.2$$

Evaluación de la posición del centro de gravedad:

$$d = \frac{M \cdot \frac{L}{2} + 0.2 \cdot L}{M + 0.2} = 0.26 \text{ metros}$$

Aplicando el Teorema de Steiner:

$$I_o = \frac{M \cdot L^2}{3} + 0.2 \cdot L^2$$

### Anexo VII – Resumen gráfico de las simulaciones de impacto de la viga con masas de 100 y 200 gramos respectivamente en el extremo libre

◆ Masa de 100 gramos en el extremo libre:

- Abaqus/Explicit:

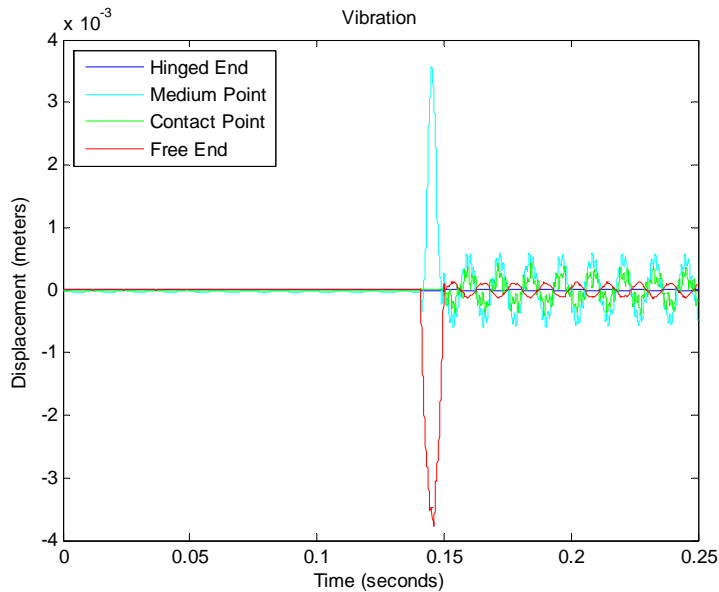


Figura 30 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 100 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit

- Matlab/Simulink

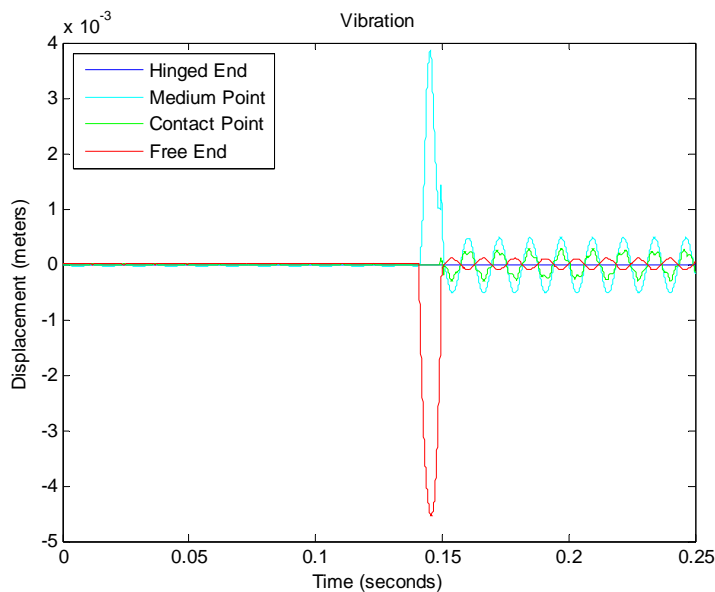


Figura 31 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 100 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en el Análisis Modal Multinivel

• Comparación:

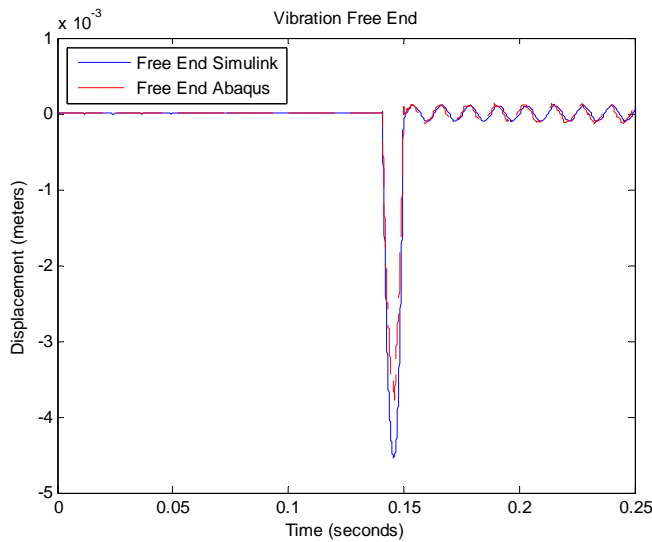


Figura 32 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre

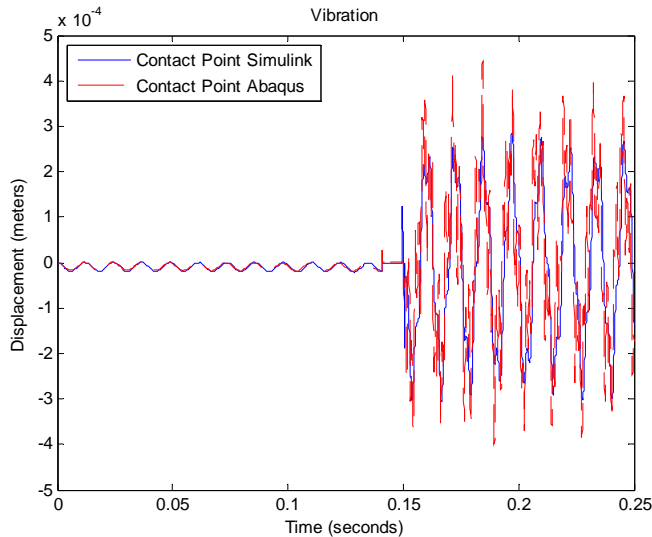


Figura 33 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre

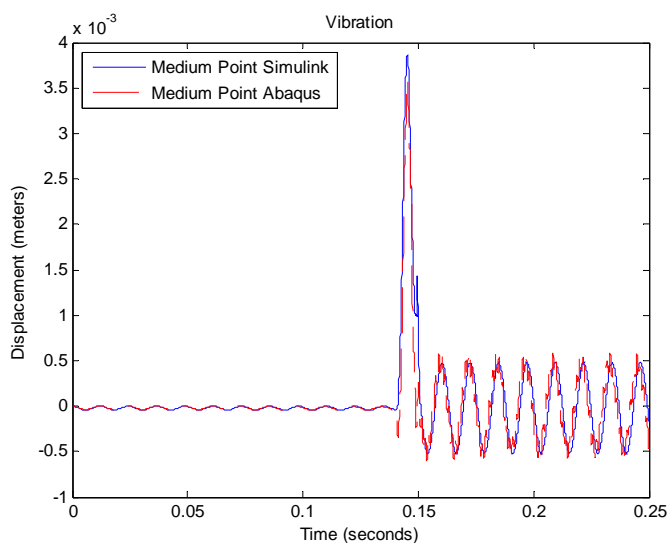
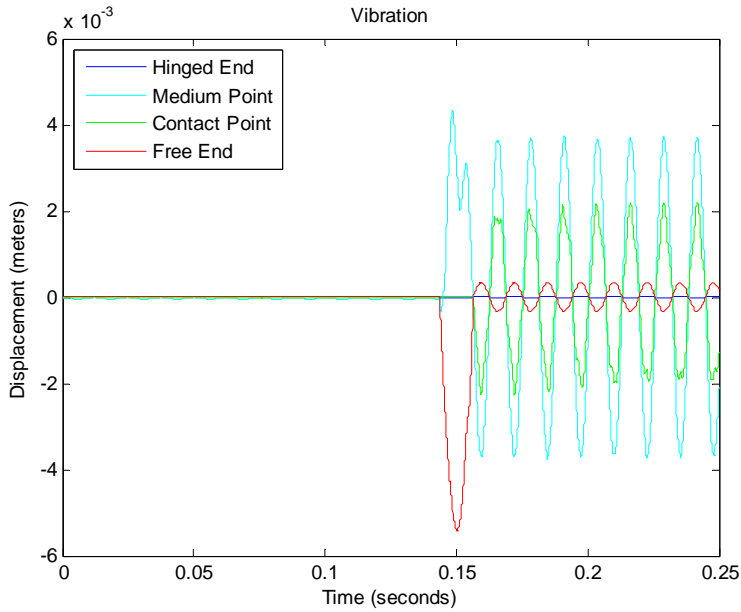


Figura 34 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 100 gramos en el extremo libre

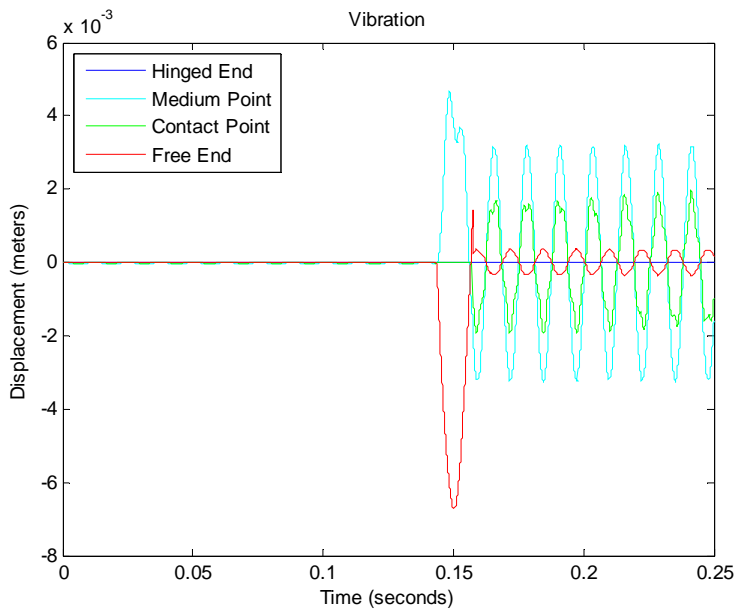
◆ Masa de 200 gramos en el extremo libre:

- Abaqus/Explicit:



**Figura 35 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 200 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit**

- Matlab/Simulink:



**Figura 36 – Señal temporal de la vibración de los siguientes puntos de la viga con una masa de 200 gramos en el extremo libre: extremo articulado, punto medio, punto de impacto y extremo libre en Abaqus/Explicit**

• Comparación:

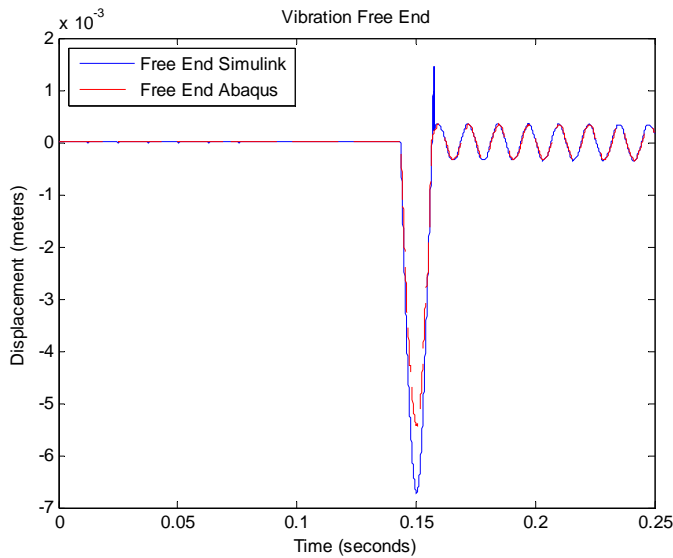


Figura 37 – Comparación del análisis temporal de la vibración del extremo libre de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre

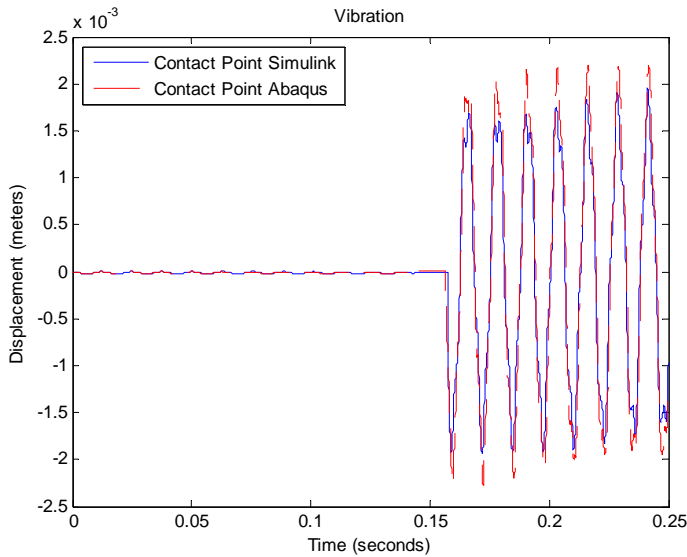


Figura 38 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto de impacto de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre

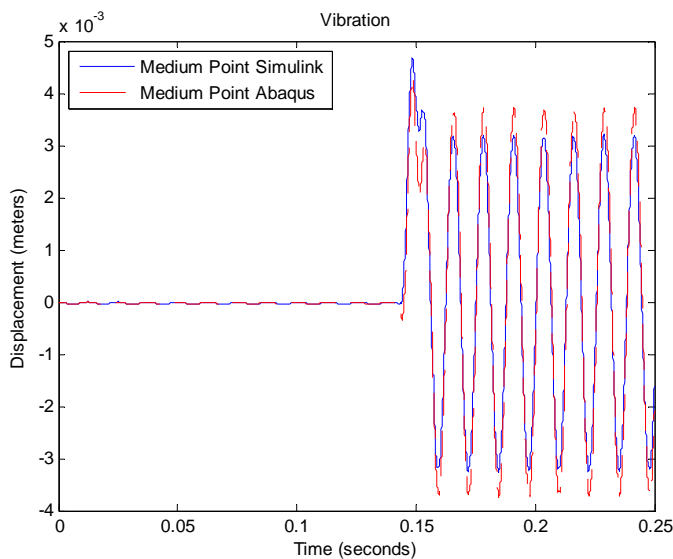


Figura 39 – Comparación del análisis temporal de la vibración del punto medio de la viga en el Análisis Modal Multinivel y en Abaqus/Explicit para la viga con 200 gramos en el extremo libre

**Anexo VIII – Esquema gráfico del modelo del Análisis Modal Multinivel desarrollado en Matlab/Simulink**

