



**Universidad**  
Zaragoza

1542

**Trabajo Fin de Máster  
en Sistemas Mecánicos**

**ANÁLISIS VIBRATORIO EN  
ESTRUCTURAS LIGERAS SOMETIDAS  
A EXCITACIONES ARMÓNICAS**

Autor

Carlos Alegre Terrado

Director

Javier Óscar Abad Blasco

Convocatoria

Diciembre 2013

Universidad de Zaragoza / Escuela de Ingeniería y Arquitectura





# Análisis Vibratorio en Estructuras Ligeras sometidas a Excitaciones Armónicas.

## (Resumen)

El presente trabajo Fin de Máster se desarrolla en el ámbito del análisis de vibraciones en sistemas con comportamiento no lineal. En concreto se analiza y estudia la respuesta en estructuras de pequeño espesor de aplicación en el ámbito automovilístico, naval y aeronáutico.

Así pues, este trabajo consiste en el análisis de la variación de la rigidez de una estructura ligera sometida a cargas armónicas de amplitud variable, con el fin de caracterizar su no linealidad.

El trabajo se ha desarrollado siguiendo una serie de fases:

- Revisión bibliográfica y estado del arte.
- Definición del problema (geometría, cargas, material).
- Análisis estático no lineal con grandes deformaciones.
- Análisis modal.
- Planteamiento de un modelo analítico con MATLAB.
- Análisis dinámico no lineal.
- Análisis en el dominio frecuencial.
- Validación.

El objetivo principal de este Trabajo Fin de Máster es analizar el comportamiento de este tipo de estructuras frente a solicitudes armónicas con el fin de aplicar los resultados a análisis de estructuras similares empleados en diversos campos de la ingeniería. Estableciendo para ello un procedimiento de caracterización que permita su implementación en modelos simplificados para su análisis, ya que el cálculo del modelo completo, frente a una solicitud dinámica, con comportamiento no lineal supone un alto coste computacional.



## Agradecimientos

*El primer agradecimiento es para Javier Abad Blasco por haberme brindado la oportunidad de realizar este Trabajo Fin de Máster, estar siempre disponible para solventarme todas aquellas dudas surgidas durante la realización del trabajo y por haberme transmitido multitud de conocimientos que seguro me seguirán ayudando en el futuro.*

*También querría agradecer al resto de profesores, tanto del máster en sistemas mecánicos como de la carrera, por ayudarme a formarme en esta difícil profesión del ingeniero.*

*Y por supuesto, a mis padres, a mi hermana, a mi familia y a todos mis amigos por su comprensión, apoyo, consejos, experiencia y ayuda en los momentos difíciles porque siempre han estado ahí.*



## ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN .....	6
1.1. Objetivo y alcance del Trabajo Fin de Máster .....	7
1.2. Historia de las vibraciones.....	7
1.3. Definición y conceptos básicos.....	9
1.4. Clasificación de las vibraciones .....	12
1.5. Programas empleados.....	13
2. ESTADO DEL ARTE.....	14
2.1. Introducción .....	14
2.2. Comportamiento geométricamente no lineal en estructuras delgadas.....	14
2.3. Dificultades encontradas en el análisis no lineal de estructuras delgadas.....	15
2.4. Nuevos materiales.....	16
2.5. Estudios experimentales .....	17
2.6. Conclusiones.....	17
3. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA.....	19
4. ANÁLISIS Y RESULTADOS .....	21
4.1. Análisis estático no lineal .....	21
4.2. Análisis modal.....	23
4.3. Modelo analítico con MATLAB .....	27
4.3.1. Análisis en el dominio temporal .....	28
4.3.2. Análisis en el dominio frecuencial .....	29
4.4. Análisis numérico dinámico transitorio no lineal.....	30
5. VALIDACIÓN.....	33
6. CONCLUSIONES.....	40
7. MEJORAS Y TRABAJOS FUTUROS.....	41
8. BIBLIOGRAFÍA .....	42
ANEXOS.....	44
Anexo A: Análisis Estático No Lineal.....	45
Anexo B: Análisis Modal .....	46
B.1. Formas Modales .....	46
B.2. Gráficas Modo-Frecuencia.....	66
B.3. Relación Fuerza-Frecuencia del Modo 1 .....	69
Anexo C: Análisis Temporal MATLAB .....	70
Anexo D: Análisis Frecuencial MATLAB .....	87
Anexo E: Análisis Dinámico No Lineal ABAQUS.....	92



## **1.-Introducción.**

En diversos campos de la ingeniería como el de la automoción, aeronáutico y aeroespacial entre otros se están utilizando estructuras ligeras sometidas a diferentes excitaciones armónicas, cuyo comportamiento no queda definido mediante los análisis tradicionales aplicados a estructuras con comportamiento lineal.

El uso de estructuras ligeras viene propiciado por el incesante objetivo de conseguir estructuras poco pesadas y lo suficientemente resistentes para las cargas a las que van a estar sometidas. Para ello se utilizan materiales con poca densidad tratados por distintos métodos que consiguen aumentar su rigidez.

En el mundo de la ingeniería es importante conocer cómo va a responder un sistema mecánico al estar sometido a una serie de cargas externas para así poder realizar un diseño adecuado de dicho sistema. Las vibraciones son un aspecto a tener muy en cuenta ya que pueden provocar la rotura de ciertos elementos y por lo tanto hay que ser muy cuidadosos para conseguir un diseño en el que se minimice este fenómeno.

Resulta ser que un sistema vibratorio puede ser representado por un modelo matemático que incluya los parámetros del sistema, las condiciones iniciales y el tipo de excitación, entre otras cosas. Este modelo permite la formulación de criterios importantes para su análisis y diseño y son representados por ecuaciones diferenciales que pueden clasificarse como [1]:

- a) Modelo lineal y no lineal. Representado por ecuaciones diferenciales lineales o no lineales, respectivamente.
- b) Modelo no forzado y forzado. Representado por una ecuación diferencial homogénea y no homogénea, respectivamente.
- c) Modelo con y sin amortiguamiento. Representado por una ecuación diferencial en donde interviene el término que representa la pérdida de energía o no, respectivamente.
- d) Modelo de 1 grado de libertad o de varios grados de libertad. Representado por una ecuación diferencial o un conjunto de ecuaciones diferenciales, respectivamente.

Para conocer el comportamiento de estas estructuras ligeras se van a realizar distintos análisis, entre los que destacan los siguientes:

- Análisis estático no lineal con grandes deformaciones.
- Análisis modal.



- Análisis dinámico no lineal en el dominio temporal.
- Análisis en el dominio frecuencial.

Cada uno de ellos aportará distinta información que utilizaremos a lo largo del trabajo para llevar a cabo el análisis planteado en este TFM. De este modo, gracias al primero de ellos, se conocerá la constante de rigidez y el desplazamiento que se produce en el voladizo de la estructura que se va a analizar.

En el análisis modal se visualizarán las formas modales de vibración a lo largo del tiempo dependiendo de la fuerza aplicada en el extremo de la estructura y se calcularán las frecuencias naturales. Se comprobará que éstos varían según la fuerza aplicada debido a la no linealidad del modelo.

Se verán las distintas variables de desplazamiento, velocidad y aceleración respecto al tiempo mediante un modelo en MATLAB que resolverá el sistema equivalente a la estructura ligera y su forma de vibrar. Mediante la Transformada de Fourier se hará el análisis frecuencial.

Finalmente, en ABAQUS, se analizará dinámicamente el modelo de una forma sencilla para comparar con los modelos anteriormente mostrados y realizar, de esta manera, la validación del modelo.

### **1.1. Objetivo y alcance del Trabajo Fin de Máster.**

En el presente Trabajo Fin de Máster se pretende analizar el comportamiento de estructuras ligeras frente a solicitudes armónicas con el fin de aplicar los resultados a análisis de estructuras similares empleadas en diversos campos de la ingeniería.

Para ello se establecerá un procedimiento de caracterización que permita su implementación en modelos simplificados para su análisis, ya que el cálculo del modelo completo, frente a una solicitud dinámica, con comportamiento no lineal, supone un alto coste computacional.

Así pues, el trabajo propuesto se desarrolla en el ámbito del análisis de vibraciones de sistemas con comportamiento no lineal, en concreto se analizará y estudiará la respuesta en estructuras de pequeño espesor de aplicación en diversos ámbitos como se verá posteriormente.

### **1.2. Historia de las Vibraciones.**

El origen de la ciencia de las vibraciones mecánicas es difícil de establecer. No hay una sola persona que apadrine la ciencia de las vibraciones, ya que a lo largo de la historia grandes científicos realizaron importantes aportaciones haciendo que hoy en día el fenómeno de las vibraciones sea toda una ciencia.



A continuación se realiza un pequeño recorrido de algunos personajes que hicieron aportaciones importantes sobre el fenómeno de las vibraciones.

Antes de Cristo, dos personajes célebres como **Pitágoras** y **Aristóteles** ya hacían aportaciones a la ciencia de las vibraciones. El primero de ellos, mediante un experimento realizado con unas agujas del mismo espesor y misma tensión, pero distinta longitud pudo concluir que las notas dependían de la frecuencia de vibración, lo calculó y concluyó que la música no era más que una relación matemática de las vibraciones medidas según intervalos.

Por su parte, **Aristóteles** trabajó con las leyes del movimiento, escribió el primer escrito relacionado con la acústica *On Acustic* e introdujo el principio del trabajo virtual.

Más cercano en el tiempo se encuentra **Galileo Galilei**, el cual encontró la relación existente entre la longitud de cuerda de un péndulo y su frecuencia de oscilación, así como la relación entre la tensión, longitud y frecuencia de vibración de las cuerdas. A través de un experimento basado en una piedra atada a una cuerda averiguó que el tiempo de oscilación dependía de la longitud de la cuerda.

Posteriormente fue **Isaac Newton** el que se implicó en este campo. Tiene un papel importante en el análisis de sistemas y en la determinación de frecuencias de oscilación. De la misma época es **Robert Hooke**, reconocido por sus investigaciones en el campo de la elasticidad.

Ya en el siglo XVIII, **Bernoulli** estudió la forma de vibrar de algunos cuerpos usando el principio de superposición de armónicos. Junto con su amigo **Euler** trataron problemas de pequeñas oscilaciones en cuerdas y vigas.

A finales de este mismo siglo y comienzos del XIX, una de las sorprendentes aportaciones del trabajo de **Fourier** fue que muchas de las funciones más conocidas podían expresarse en series de senos y cosenos, de tal modo que esta es una aportación de las más importantes e interesantes en el ámbito de las vibraciones mecánicas ya que en base al algoritmo de la serie de Fourier trabajan los modernos analizadores de vibraciones [1].

En la era moderna se han realizado importantes aportaciones matemáticas que han ampliado considerablemente el área de investigación del campo de las vibraciones. Por ejemplo, los métodos de Rayleigh que sirven para determinar las frecuencias de resonancia de algunos elementos basándose en ecuaciones de energía, las variables de estado que nos permiten resolver y analizar problemas basados en ecuaciones diferenciales no lineales, el elemento finito que consiste en discretizar cualquier elemento para posteriormente modelar y analizar su comportamiento como pudiera ser los modos de vibrar y ecuaciones estadísticas que facilitan el estudio de vibraciones aleatorias. Todo esto combinando con los avances tecnológicos en computadores, analizadores de vibraciones, etc...

### 1.3. Definición y Conceptos Básicos.

Una vibración mecánica es la oscilación repetida de un punto material o de un cuerpo rígido en torno a su posición de equilibrio. El análisis de las señales de vibración puede hacerse en el dominio del tiempo o de la frecuencia. En el primero la variable independiente es el tiempo y en el segundo la frecuencia. Ambos dominios están relacionados por la transformada de Fourier.

Se dice que un cuerpo vibra cuando experimenta cambios alternativos, de tal modo que sus puntos oscilen sincrónicamente en torno a sus posiciones de equilibrio, sin que el campo cambie de lugar.

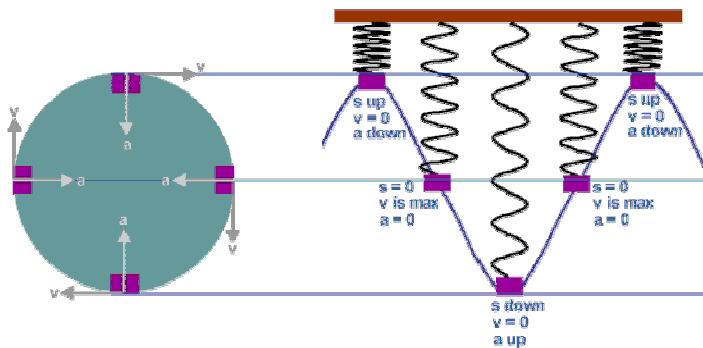


Figura 1.3.1. Representación de una vibración armónica.

Las vibraciones pueden producirse por efecto del propio funcionamiento de una máquina o equipo. En toda oscilación vibratoria, en general, se producen los siguientes tres fenómenos energéticos:

- Almacenamiento de energía potencial en los elementos elásticos.
- Almacenamiento de energía cinética en las masas e inercias.
- Pérdida gradual de energía en los elementos disipativos.

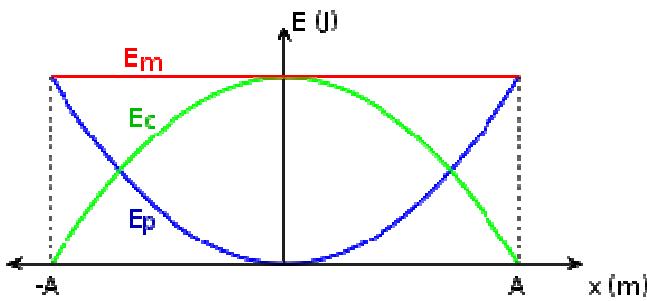


Figura 1.3.2. Representación de la energía sin elemento disipativo.

La amplitud desde el punto de vista de las vibraciones, es cuánta cantidad de movimiento puede tener una masa desde una posición neutral. Se puede medir la amplitud del desplazamiento, velocidad o aceleración de la señal de vibración. Se mide en unidades de longitud en el sistema internacional.

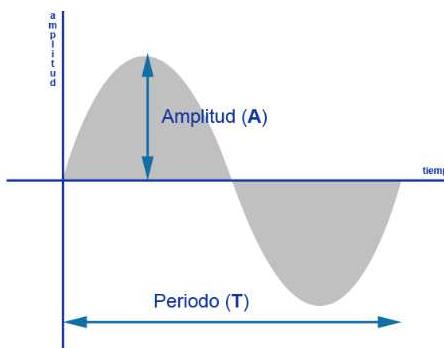


Figura 1.3.3. Amplitud y Período.

La fase se refiere a la medida relativa entre dos puntos de medición, generalmente se usa el ángulo de separación entre las señales que representan el movimiento de estos puntos.

Otro concepto básico asociado a las vibraciones es el periodo, que tal y como se muestra anteriormente (Figura 1.3.3.) es el tiempo transcurrido entre dos puntos equivalentes de la vibración. Se mide en segundos.

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

Conociendo el período y haciendo su inversa como se observa en la ecuación anterior, se puede calcular la frecuencia, o viceversa. En cuestión de vibración, la frecuencia es el número de períodos (oscilaciones) completos que el cuerpo realiza por segundo, la unidad de medición son los ciclos/segundo o Hertz (Hz).

Dentro del término frecuencia cabe destacar la frecuencia natural, que es aquella que solo depende de la masa y la rigidez del sistema. Una frecuencia natural es una frecuencia a la que una estructura vibrará si uno la desvía y después la suelta. Una estructura típica tendrá muchas frecuencias naturales.

De cualquier estructura física se puede hacer un modelo en función de un número de resortes, masas y amortiguadores. Los amortiguadores absorben energía, mientras que los resortes y las masas la liberan. El resorte y la masa interactúan uno con otro, de manera que forman un sistema que hace resonancia a su frecuencia natural característica. Si se le aplica energía a un sistema masa resorte, el sistema vibrará a su frecuencia natural, y el nivel de las vibraciones dependerá de la fuerza de la fuente de energía y de la absorción inherente al sistema. La ecuación es:

$$f_N = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Siendo:  $f_N$  = frecuencia natural (Hz)

$k$  = constante de elasticidad o rigidez ( $\frac{N}{m}$ )

$m$  = masa (Kg)



De la ecuación anterior se puede ver que si la rigidez aumenta, el valor de la frecuencia natural también lo hace, y si la masa aumenta, la frecuencia natural disminuye.

La resonancia es un estado de operación en el que una frecuencia de excitación se encuentra cerca de una frecuencia natural de la estructura. Cuando ocurre la resonancia, los niveles de vibración que resultan pueden ser muy altos y pueden causar que los daños evolucionen muy rápidamente.

El amortiguamiento se define como la capacidad de un sistema o cuerpo para disipar energía cinética en otro tipo de energía.

El amortiguamiento es un parámetro fundamental en el campo de las vibraciones y en el desarrollo de modelos matemáticos que permiten el estudio y análisis de sistemas vibratorios, como son: estructuras metálicas, motores, maquinaria rotativa, turbinas, automóviles, etc. Esto va encaminado a la teoría de que todo sistema vibratorio (sistemas mecánicos) tiene la capacidad de disipar energía. Para el control de vibraciones e impactos en maquinaria, se utiliza el concepto de amortiguamiento como una técnica para disipar energía del sistema, manipulando así la amplitud de vibración en el sistema y otros parámetros de estudio. El elemento que disipa la energía es llamado amortiguador.

El desplazamiento especifica un cambio de posición o distancia, sus unidades pueden ser m, mm o  $\mu\text{m}$  y se expresa de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$x = x_0 \sin(\omega t)$$

Siendo:  $x_0$  = Amplitud

$T$  = Periodo

$\omega = \frac{2\pi}{T}$  = frecuencia angular

La velocidad es la tasa de cambio de desplazamiento respecto al tiempo. Se mide en m/s y se expresa de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$v = \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t)$$

La aceleración es la razón de cambio de la velocidad respecto al tiempo. Se expresa en  $\text{m/s}^2$  y su ecuación es:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t)$$



#### ***1.4. Clasificación de las vibraciones.***

Las vibraciones mecánicas pueden clasificarse desde diferentes puntos de vista dependiendo de la excitación, la disipación de energía, la linealidad de los elementos y las características de la señal [2].

##### **- Dependiendo de la excitación:**

Se dividirá en vibración libre o vibración forzada. Una vibración libre es cuando un sistema vibra debido a una excitación instantánea. La vibración forzada se debe a una excitación permanente. Esta división o clasificación es importante porque indica que un sistema vibra libremente si solo existen condiciones iniciales del movimiento, ya sea porque se suministra energía por medio de un impulso o debido a una deformación inicial del resorte.

##### **- Dependiendo de la disipación de energía:**

Habrá vibraciones amortiguadas y no amortiguadas. El amortiguamiento es un sinónimo de la pérdida de energía de sistemas vibratorios y se manifiesta con la disminución del desplazamiento de vibración. Este hecho puede aparecer como parte del comportamiento interno de un material por ejemplo la fricción, o bien, como un elemento físico llamado precisamente amortiguador.

Por lo tanto, la vibración amortiguada es aquella en la que la frecuencia de oscilación de un sistema se ve afectada por la disipación de la energía, pero cuando la disipación de energía no afecta considerablemente a la frecuencia de oscilación entonces la vibración es del tipo no amortiguada.

##### **- Dependiendo de la linealidad de los elementos:**

Si el comportamiento de cada uno de los parámetros de los componentes básicos de un sistema es del tipo lineal la vibración resultante es lineal, en caso contrario será del tipo no lineal. En realidad todo elemento se comporta de forma no lineal, pero bajo ciertas condiciones puede considerarse como elemento lineal, facilitando de esta manera considerablemente su análisis.

##### **- Dependiendo de las características de la señal:**

Esta clasificación divide en determinística y probabilísticas.

Mientras que probabilística se refiere a la señal de vibración que se caracteriza por ciclos irregulares de movimiento por lo que no es predecible.



Determinística es cuando el comportamiento vibratorio de un sistema puede ser representado por medio de una ecuación matemática.

Las vibraciones determinísticas las podemos dividir a su vez en periódicas o no periódicas. Se llaman así a las primeras debido a que se repiten cada cierto periodo de tiempo. Por el contrario, aquellas que no se repiten periódicamente reciben el nombre de no periódicas.

### ***1.5. Programas empleados.***

Para este Trabajo Fin de Máster han sido varios los programas empleados para poder validar los modelos realizados. Así pues, a parte de los programas ofimáticos tradicionales como Excel y Word, para el cálculo y las gráficas que se muestran en los Anexos, se han utilizado los tres siguientes.

#### **ABAQUS:**

Es un software que nos permite calcular mediante el método de elementos finitos múltiples modelos actuales, los cuales pueden utilizarse en distintos ámbitos de la ingeniería. Gracias a él se pueden realizar simulaciones próximas a la realidad de estructuras permitiéndonos una mayor calidad en los productos y reduciendo sustancialmente el número de experimentos reales a ensayar.

Se compone de tres módulos principales ABAQUS/STANDARD, ABAQUS/EXPLICIT y ABAQUS/CAE. Dos de sus tres módulos han sido empleados en el trabajo presente. El primero de ellos permite hacer frente a los tradicionales problemas del análisis por elementos finitos, como la estática, dinámica... Con el siguiente módulo se pueden realizar y calcular la dinámica en problemas como los de impacto, mientras que con el CAE se pueden crear modelos, visualizar resultados, etc.

#### **MATLAB:**

Es un programa matemático con lenguaje propio. Entre sus principales características cabe destacar la posibilidad de manipular matrices, representar funciones, implementar distintos algoritmos y la comunicación con programas con otros lenguajes. Es un software muy utilizado en universidades y en centros tecnológicos de desarrollo e investigación.

#### **MEScope:**

Es una herramienta de post-procesamiento de señales temporales, obtenidas experimentalmente o mediante simulación. Este programa da la posibilidad de importar y exportar datos de vibraciones y estructuras gracias a una interfaz digital. Con él se va a realizar el análisis frecuencial a partir de los datos obtenidos en ABAQUS y MATLAB, para su comparación, en el análisis dinámico transitorio no lineal realizado en este trabajo de investigación.



## **2.- Estado del Arte.**

En el presente apartado se va a proceder a hablar sobre el estado del arte relacionado con el análisis vibratorio en estructuras ligeras y delgadas sometidas a excitaciones armónicas.

Al tratarse de estructuras ligeras de poco espesor, los análisis que se realizarán serán con elementos tipo placa y barra sometidos a vibraciones no lineales en programas de cálculo de elementos finitos. Por lo tanto, a continuación, se va a hablar y presentar los diferentes problemas de no linealidad geométrica, así como las dificultades encontradas en el análisis dinámico no lineal de este tipo de estructuras.

También se van a comentar los métodos más comunes de modelar con sus respectivas soluciones y conclusiones. Todo ello debidamente referenciado con múltiple bibliografía de distintos autores como se observará a lo largo del texto para poder encontrar literatura sobre este tema rápidamente.

### ***2.1. Introducción.***

Se pueden encontrar múltiples problemas relacionados con la vibración en estructuras delgadas en distintas ramas de la industria, incluyendo la ingeniería aeronáutica, automovilística, naval y civil [3, 4]. En todas las ramas mencionadas las estructuras deben tener un peso lo más bajo posible y una resistencia lo más alta posible para que puedan estar expuestas a grandes amplitudes de vibración [4, 5]. Según la teoría lineal de vibración, las frecuencias naturales y las formas modales son independientes de la amplitud de la vibración.

### ***2.2. Comportamiento geométricamente no lineal en estructuras delgadas.***

En este primer apartado se da una descripción cualitativa de varios efectos que pueden inducir a la no linealidad en el comportamiento estructural dinámico.

Una de las características encontrada en el estudio de vibraciones no lineales es la presencia de fenómenos no previstos a través de la teoría lineal. La comprensión de muchos casos experimentales es difícil si no se tiene en cuenta la no linealidad del sistema. Así pues, habrá que tener especial cuidado con:

- La variación de las frecuencias resonantes con la amplitud de vibración [6].
- La dependencia de la amplitud con las formas modales [7].
- La distorsión armónica de la respuesta no lineal a una excitación armónica, y su distribución espacial [8].
- La presencia de vibración caótica. [9]
- La existencia de puntos de bifurcación [10].
- La resonancia interna [11].



- El acoplamiento debido a la no linealidad entre desplazamientos transversales y en el plano [12].
- Etc.

La determinación de las características modales de vibraciones libres y forzadas en estructuras delgadas es un problema de gran interés técnico. En muchos casos, el análisis lineal, es insuficiente para explicar y describir el comportamiento del sistema. Por esta razón, los efectos no lineales deben ser tenidos en cuenta en el análisis y en el proceso de diseño de la estructura [13]. Por ejemplo, los paneles de un avión excitados a altos niveles de presión se exponen a un comportamiento no lineal. Recientemente, el creciente empleo de nuevos materiales, principalmente compuestos, hace que haya una mayor demanda de principios de diseño apropiados, satisfaciendo las nuevas exigencias de funcionamiento en futuras estructuras en vehículos navales, aeroespaciales... Por otra parte, gracias a los progresos teóricos en el desarrollo de instrumentos de investigación analíticos y numéricos, así como el alto rendimiento de los nuevos sistemas de cálculo, permiten a los ingenieros utilizar los materiales avanzados para este tipo de estructuras ligeras.

El modelar y simular el comportamiento de estructuras complejas para el campo aeroespacial es quizás la tarea de análisis más desafiante hasta el momento.

Las formas modales son de particular interés en el comportamiento dinámico de una estructura. Por lo tanto, los métodos de predicción deben ser necesariamente precisos para determinar en vibraciones de grandes amplitudes las formas modales no lineales y las frecuencias de resonancia correspondientes a estructuras ligeras de poco espesor. Otro de los objetivos del análisis modal de vibraciones no lineales es poder detectar zonas peligrosas donde se puedan concentrar tensiones y ser una zona de riesgo de rotura, para ello se compara con el modelo de teoría lineal obteniendo en aquellas zonas diferencias cuantitativas y cualitativas [14].

Para concluir, el análisis de los efectos no lineales jugará un importante papel en el diseño y la ingeniería en los próximos años, por lo que deberá ser incluido en los modelos matemáticos.

### **2.3. Dificultades encontradas en el análisis no lineal de estructuras delgadas.**

Tal y como explica Leissa en su libro [5], las soluciones características como la unicidad y la superposición que son totalmente garantizadas en problemas lineales de vibraciones, no pueden ser garantizadas ni válidas en problemas de no linealidad. Las principales fuentes de no linealidad pueden ser varias [10]:

- El material.
- La geometría.



- La inercia.
- Condiciones de contorno.

Actualmente, con los estudios realizados hasta el momento, solamente es considerada la geometría como no lineal, combinado en algunas ocasiones con otros efectos que complican el cálculo. El efecto no lineal es introducido en la relación tensión-desplazamiento.

Una dificultad más en problemas de vibraciones no lineales geométricamente aparece en la definición de los modos normales, los cuales se hacen difíciles de interpretar en el caso no lineal debido a que el tiempo y las variables espaciales no son independientes en la mayoría de los problemas de vibración no lineal. Lo cierto es que el concepto de forma modal no lineal no está claro y se aceptó a nivel universal su equivalente lineal. Sin embargo para muchos de los artículos referentes a este tema del que se está tratando, es muy útil para la comprensión cualitativa del comportamiento no lineal, y se espera que sean de un importante papel para desarrollar la teoría de análisis modal no lineal.

Hay muy pocos estudios experimentales dedicados a la vibración no lineal de superficies delgadas. También, pocos trabajos experimentales plasmados en literatura corresponden a características especiales geométricas, condiciones de contorno y amplitudes de vibración. Así pues, esto todavía es insuficiente para clarificar en mayor medida el sorprendente comportamiento no lineal de placas delgadas.

#### **2.4. Nuevos materiales.**

La línea que se está siguiendo actualmente en este campo de los nuevos materiales se rige principalmente por varios factores de los que destacan el peso (densidad), la resistencia y el precio al cual se consiguen esos materiales.

Respecto a la densidad, en ámbitos como la industria aeroespacial, aeronáutica, naval o automovilística, se intentan conseguir materiales poco pesados para reducir cargas en otros elementos del conjunto. Actualmente se están utilizando materiales de baja densidad expuestos a tratamientos térmicos, por ejemplo, para que su resistencia aumente considerablemente, de tal forma que sean capaces de aguantar a las fuerzas externas a las que van a ser sometidos.

Los componentes fabricados tienen un precio y con él se debe jugar también. Posiblemente un material sea de muy baja densidad y muy resistente, pero para conseguirlo se han podido utilizar muchos tratamientos que hacen que su precio sea inviable con respecto a otros materiales más baratos, pero con peores propiedades.

Actualmente, en las industrias anteriormente mencionadas se trabaja duramente en conseguir este tipo de materiales. Los aluminios tratados térmicamente son los más utilizados en estos tiempos.



## **2.5. *Estudios experimentales.***

No se pueden desarrollar modelos no lineales a no ser que sean realizados a través de los resultados de las investigaciones experimentales. Dichas investigaciones deberían jugar un papel importante a priori y a posteriori del trabajo teórico. Los datos experimentales dirigen las suposiciones básicas e indican la forma de las soluciones esperadas antes de comenzar la realización del modelo. Posteriormente, en una nueva etapa, estos experimentos nos permiten validar los resultados numéricos obtenidos a través del modelo, así como nos indican la gama de validez y el grado de exactitud de cada tipo de solución. Se cree que las primeras investigaciones sobre los efectos de la no linealidad geométrica sobre las vibraciones en estructuras ligeras fueron realizadas por Evensen [15].

Más adelante, otros investigadores, con diferentes tipos de experimentos llegaron a conclusiones similares. Por ejemplo Olson [16] concluyó que las amplitudes de grandes vibraciones exponen una no linealidad leve que va suavizando. Este resultado experimental es usado con frecuencia por los investigadores para validar sus modelos [13].

## **2.6. *Conclusiones***

Finalmente, se pueden sacar varias conclusiones respecto a este tema, de las que pueden destacar las siguientes:

- Aunque hay muchas publicaciones que traten sobre la no linealidad de tipo geométrico, pocos documentos han sido encontrados sobre la no linealidad de tipo material o la combinación de ambas no linealidades.
- El número de referencias relatando investigaciones experimentales sobre este tema es demasiado bajo. Se necesita de una revisión continua para clarificar mucho más el comportamiento no lineal de estructuras de este tipo.
- La mayor parte de los estudios sobre las vibraciones no lineales en estructuras delgadas no dan ninguna indicación de la forma física de los modos de vibración en amplitudes grandes.
- Se puede observar que la gran mayoría de los trabajos restringen sus estudios a la amplitud, la relación de frecuencia y la estabilidad. Sin embargo, las distribuciones de tensión sobre la superficie de la estructura no son analizadas. Estos efectos no lineales tienen una gran importancia en la ingeniería de diseño y muy significante en comparación con los casos de linealidad.
- En muchas aplicaciones se utilizan refuerzos en estructuras delgadas, sin embargo, aunque los estudios referentes a vibraciones lineales en



estructuras ligeras reforzadas ha sido extenso, los estudios del mismo tipo de estructuras pero referenciados a vibraciones no lineales es muy escaso.

Todas estas conclusiones finales vienen a confirmar la multitud de problemas y complicaciones de las vibraciones no lineales en estructuras ligeras, así como la poca investigación y el poco trabajo que se ha realizado hasta la fecha.

### 3.- Definición del Problema.

El Trabajo Fin de Máster analiza la variación de la rigidez de una estructura ligera de poco espesor sometida a una carga armónica de amplitud variable en un extremo de ella con el otro extremo empotrado, con el fin de caracterizar su no linealidad.

Esta estructura se va a modelizar como un sistema masa-muelle-amortiguador, con un solo grado de libertad.

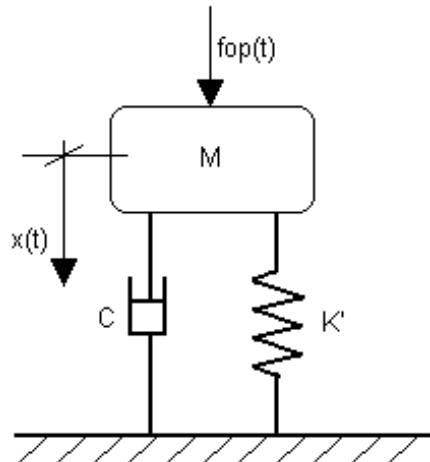


Figura 3.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

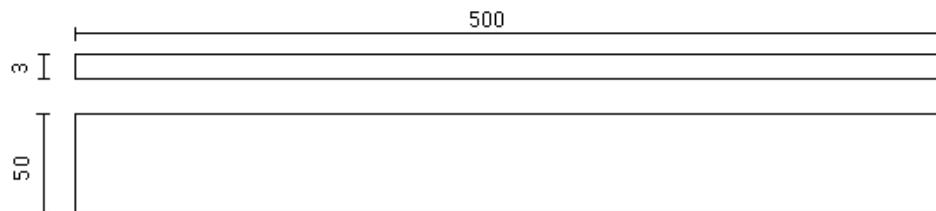
El material con el que se ha trabajado es un Al 7075 T6. Es un material de baja densidad tratado térmicamente para aumentar su dureza, resistencia y elasticidad. Las propiedades del material son las siguientes:

$$\text{Densidad} = \delta = 2800 \text{ Kg/m}^3$$

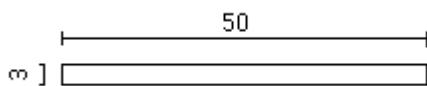
$$\text{Coeficiente de Poisson} = \nu = 0.33$$

$$\text{Módulo de elasticidad} = E = 71.7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$$

Para ello se ha utilizado una estructura de dimensiones (en mm) como la del plano siguiente:

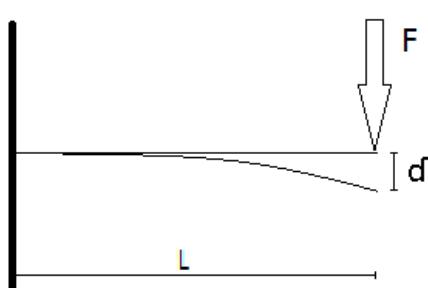


Con la sección rectangular de la estructura se calcula su momento de inercia:



$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{50 \cdot 3^3}{12} = 112,5 \text{ mm}^4$$

Las dimensiones de la sección de la estructura se han tomado teniendo como ejemplo una placa fabricada de este material. La longitud de la estructura es una medida para la cual nuestras fuerzas van a hacer que el comportamiento de ésta sea de no linealidad. Para ello se calculó una longitud de estructura de la siguiente forma:



$$\delta = \frac{FL^3}{3EI}$$

Condición de no linealidad:

$$\delta > \frac{L}{10}$$

Igualando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$L = \sqrt{\frac{3 \cdot 71700 \frac{N}{mm^2} \cdot 112,5 mm^4}{10 \cdot 10 N}} = 491,92 mm \rightarrow \text{Se tomará } L = 500 mm$$

La masa total que tiene la estructura viene determinada por la densidad y las dimensiones que se le han dado a ésta.

$$m = 2800 \frac{Kg}{m^3} * 0,5m * 0,05m * 0,003m = 0,21 Kg$$

Uno de los extremos de la placa, como anteriormente se ha mencionado, estará empotrado, es decir, todos sus movimientos estarán restringidos. Mientras que en el otro extremo se aplicará la fuerza armónica de ecuación:

$$F = F_0 * \text{sen}(\Omega * t)$$

La amplitud ( $F_0$ ) corresponderá al módulo de la fuerza que vamos a aplicar, mientras que la frecuencia de excitación ( $\Omega$ ) variará entre los 0 y los 30 Hz. El tiempo ( $t$ ) que se va a dejar que vibre la estructura serán 20 segundos en todos los casos.

El último parámetro que falta de mencionar es  $\xi$ , el factor de amortiguamiento del modo que trabajaremos, el cual será 0,5%.

Tras determinar las dimensiones del modelo se procederá, mediante distintos análisis y distintos programas de cálculo, a analizar la estructura para poder validar el modelo que acontece.

Se compararán resultados obtenidos en dos programas de cálculo como son ABAQUS y MATLAB en el dominio temporal y en el dominio frecuencial para el primer modo de vibración. Además, mediante el análisis modal se podrán ver las distintas formas modales dependiendo de la fuerza implementada en el extremo.

## 4.- Análisis y Resultados.

A continuación se va a proceder a explicar la forma en la que se han realizado los distintos análisis uno a uno, y ver los distintos resultados obtenidos en ellos.

### 4.1. Análisis Estático No Lineal.

El análisis estático no lineal se ha realizado en el programa ABAQUS/CAE. La placa se ha modelizado según un modelo en 3D deformable con elementos Shell, dándoles a estos, posteriormente, su debido espesor. Para ello se ha dibujado un rectángulo de dimensiones 0,5 m x 0,05 m mediante las opciones que tiene el programa en sus barras de herramientas.

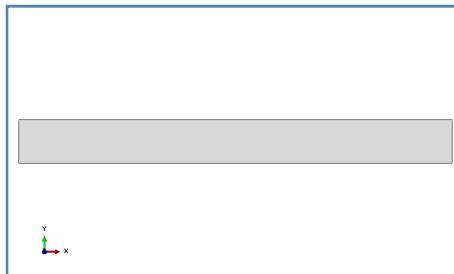


Figura 4.1.1. Geometría de la placa.

Posteriormente se han introducido las propiedades del material elástico (densidad, módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson)

El siguiente paso ha sido la construcción de una sección a la cual se le han asignado los elementos shell con el espesor mencionado, así como el material creado con anterioridad que tiene las propiedades de nuestro Al 7075 T6.

Una vez realizados los primeros pasos, se ha pasado a introducir las condiciones de contorno en el step inicial. De este modo se han restringido los movimientos en uno de los extremos. En este step no se ha aplicado ninguna fuerza, ya que ésta será aplicada en el siguiente step.

Luego se ha procedido a crear el nuevo step, concretamente el estático general:

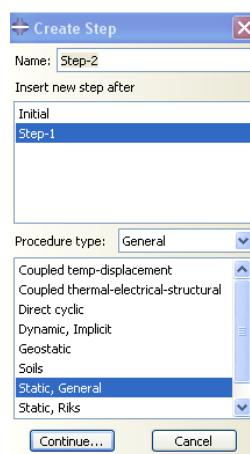


Figura 4.1.2. Creación de un step estático.



En este momento se indica que el periodo durante el que se va a aplicar este cálculo estático va a ser de 1 segundo, ya que la fuerza se aplica instantáneamente y para que calcule rápidamente el programa. También se debe seleccionar la opción de no linealidades geométricas ya que es un análisis no lineal.

A continuación se aplica la fuerza en el extremo. Para cada caso habrá que aplicar la nueva carga, es decir, para 10 N habrá que hacer un cálculo, y para 20 N deberemos de cambiar la carga. Así sucesivamente hasta los 10 casos que se han analizado.

Luego, se malla la geometría. Cuantos más elementos tengamos en el mallado, más exacta será la solución. En este caso, al realizar los cálculos en la versión estudiantil del ABAQUS, éste sólo deja realizar cálculo con un máximo de 1000 nodos. Se ha procedido a tener el mayor número de elementos posibles, y con ellos se ha realizado el cálculo.

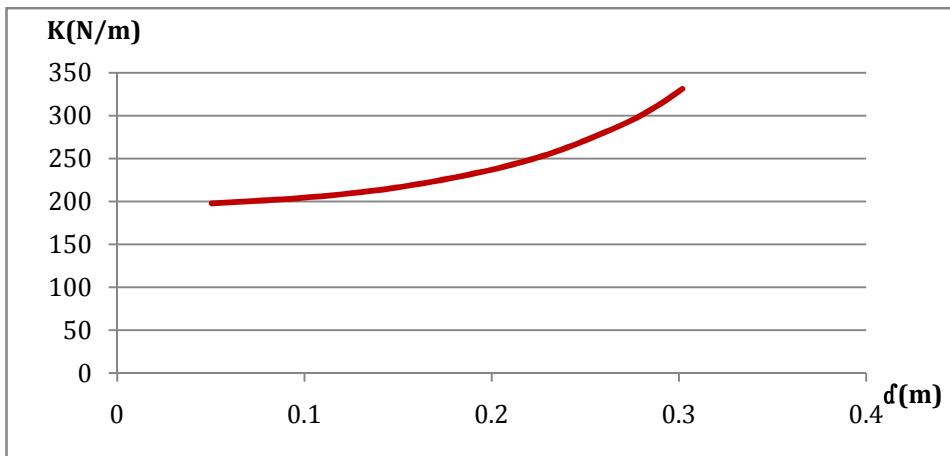
Finalmente se crea un trabajo y se lanza el cálculo. Tras haber lanzado el cálculo, el propio programa crea una serie de archivos con distintas extensiones entre los que cabe destacar el ODB y el STA. El ODB es un archivo que se puede abrir con ABAQUS VIEWER y en él se muestran los resultados. Por otra parte, el archivo de extensión STA nos informa como va transcurriendo el cálculo y nos indica si éste ha sido completado correctamente (ha convergido) o por el contrario ha habido algún tipo de problema y no ha convergido.

Tras haber realizado todos estos pasos, los resultados obtenidos en el extremo donde se aplica la carga se muestran en la siguiente tabla:

$F(N)$	$K(N/m)$ no lineal	$\delta(m)$ no lineal
10	198.0590216	0.05049
20	204.3318349	0.09788
30	213.8275125	0.1403
40	226.6288952	0.1765
50	241.1963338	0.2073
60	257.4002574	0.2331
70	275.2654345	0.2543
80	293.040293	0.273
90	311.8503119	0.2886
100	331.3452618	0.3018

Tabla 4.1.1. Resultados del análisis estático no lineal.

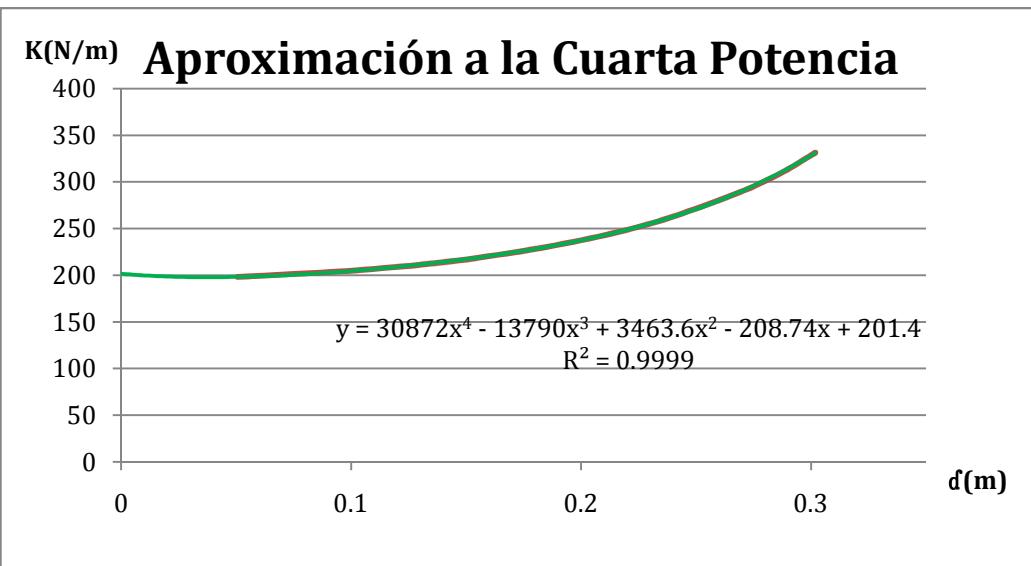
De esta forma podemos sacar la relación que hay entre la constante de rigidez y el desplazamiento que la fuerza genera en el extremo del voladizo de la estructura.



Gráfica 4.1.1. Relación rigidez-desplazamiento.

Mediante la Tabla 4.1.1., en una hoja Excel, se crean una serie de gráficas iguales a la anterior con aproximaciones mediante la línea de tendencia, las cuales pueden observarse en el Anexo A.1.

De entre todas ellas, la que mejor se aproxima es aquella que está elevada a la cuarta potencia.



Gráfica 4.1.2. Aproximación de la relación rigidez-desplazamiento.

De este modo podemos finalizar este análisis diciendo, que la constante de rigidez del muelle dependerá del desplazamiento obtenido. Conforme va aumentando el desplazamiento, la estructura tendrá una mayor rigidez.

#### 4.2. Análisis Modal.

El objetivo de este análisis es observar el cambio de las formas modales según la carga que se aplique en el extremo y la variación de la frecuencia a la que dichas formas modales suceden.

El modelo geométrico empleado en ABAQUS es idéntico al utilizado en el análisis estático no lineal. Este análisis es continuación del propio análisis estático no lineal, ya que se quieren visualizar las formas modales obtenidas para cada carga.

Así pues, se crea el nuevo step, en este caso será:

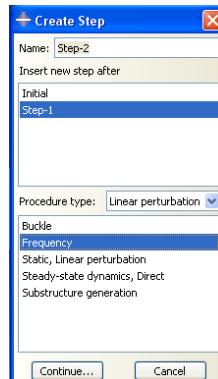


Figura 4.2.1. Creación de un step modal.

De este modo, no hay que introducir ningún dato para realizar el análisis, simplemente el número de modos que queremos visualizar. Se lanza el cálculo como anteriormente se ha realizado en el caso anterior y se visualizan los resultados.

El trabajo realizado consta de 10 modos para las 10 cargas aplicadas de 10 N a 100 N. En el Anexo B.1. y sus diferentes apartados se pueden observar las distintos modos de cada carga aplicada, así como las frecuencias de cada uno de ellos.

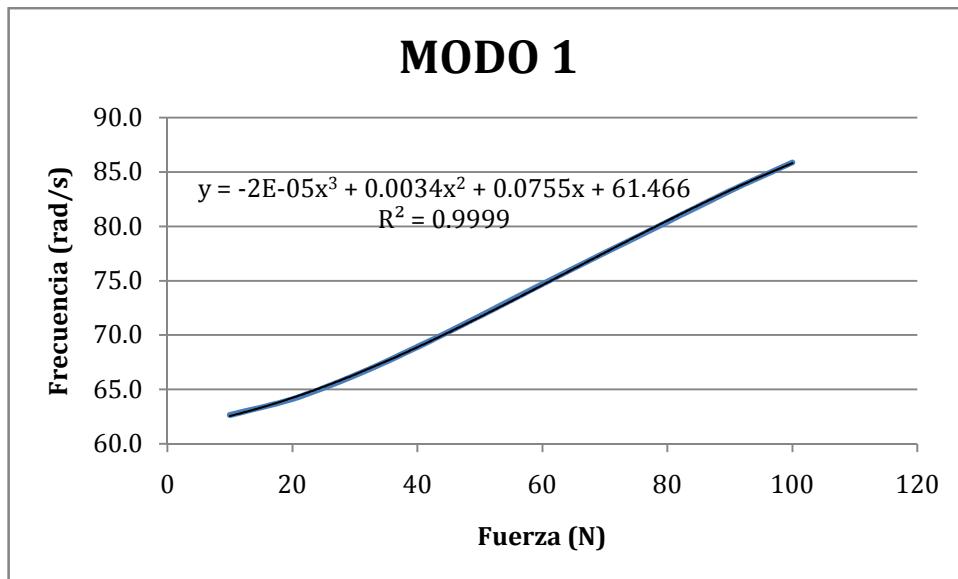
Si nos fijamos en el primer modo de todas las cargas aplicadas, observamos que tiene la misma forma, por el contrario, las demás formas modales (tanto a flexión como a torsión), varían su forma conforme aumentamos la carga aplicada.

En las tablas que se adjuntan en cada apartado del Anexo B.1. se pueden ver las distintas masas efectivas que se mueven en cada eje para cada modo.

El estudio se centrará a partir de este momento en el modo 1 de todas las cargas, ya que es el único que no varía su forma y su forma movilizada es la mayor. Así pues, la Tabla 4.2.1. nos muestra las frecuencias del modo 1 para cada carga aplicada y su relación con la fuerza:

FUERZA (N)	FRECUENCIA (Hz)	FRECUENCIA (rad/s)
10	9.969	62.635
20	10.202	64.101
30	10.548	66.275
40	10.965	68.895
50	11.416	71.729
60	11.885	74.676
70	12.345	77.566
80	12.797	80.406
90	13.249	83.246
100	13.667	85.872

Tabla 4.2.1. Frecuencias del modo 1 según la carga aplicada.



Gráfica 4.2.1. Relación Fuerza aplicada-Frecuencia del modo 1.

Para seguir adelante en el análisis de nuestro modelo, habrá que tener en cuenta la siguiente relación:

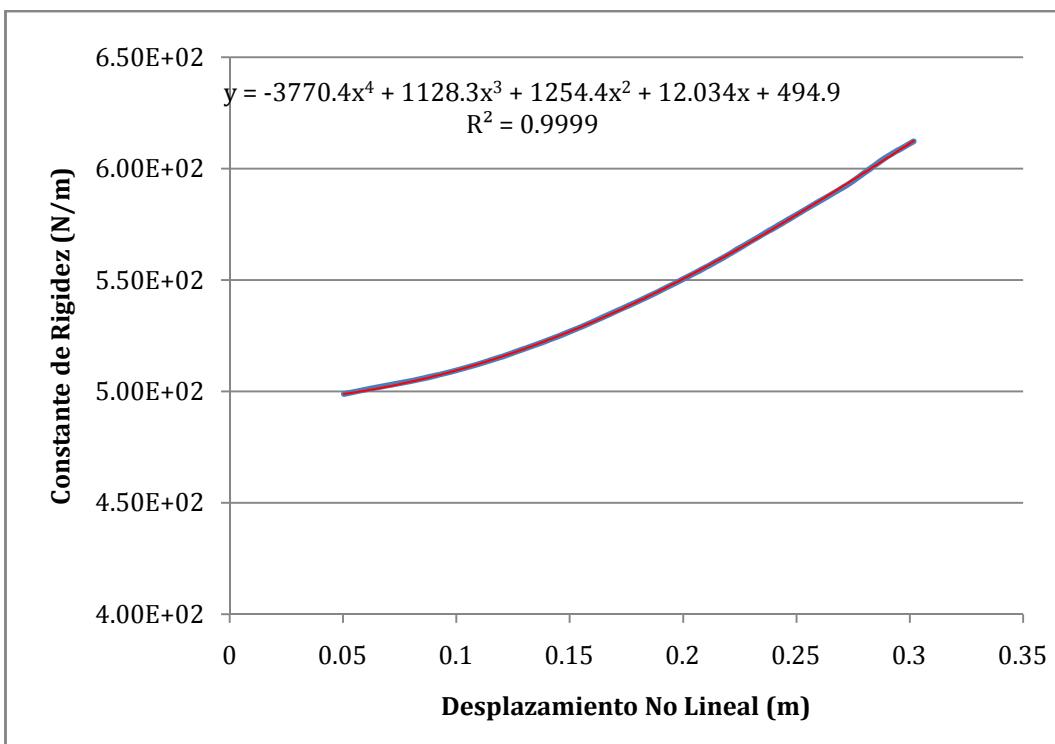
$$K = \omega^2 * m$$

Esta ecuación nos indica que la constante de rigidez va a depender de la masa efectiva (en nuestro caso en el eje Z) y de la frecuencia.

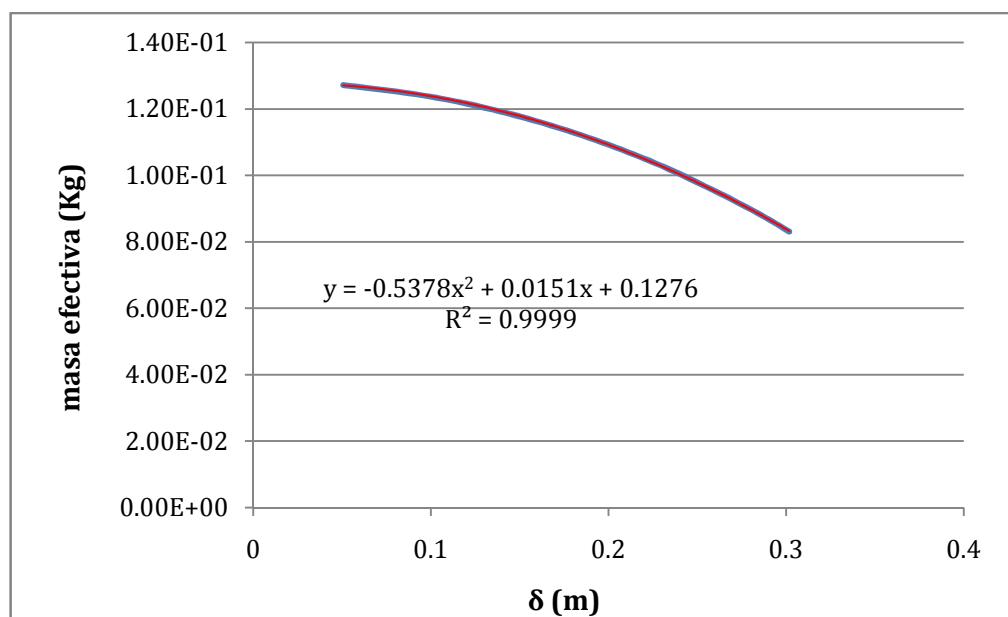
MODO 1			
F(N)	$\delta(m)$	K (N/m)	Masa Efectiva (kg)
10	0.05049	4.99E+02	1.27E-01
20	0.09788	5.09E+02	1.24E-01
30	0.1403	5.23E+02	1.19E-01
40	0.1765	5.39E+02	1.14E-01
50	0.2073	5.54E+02	1.08E-01
60	0.2331	5.69E+02	1.02E-01
70	0.2543	5.82E+02	9.67E-02
80	0.273	5.93E+02	9.17E-02
90	0.2886	6.04E+02	8.72E-02
100	0.3018	6.12E+02	8.30E-02

Tabla 4.2.2. Resultados del modo 1 según la carga aplicada.

Ante esta nueva situación se genera una nueva relación entre la constante de rigidez y el desplazamiento no lineal teniendo en cuenta la masa efectiva y la frecuencia de cada carga aplicada:



Avanzando un poco más, y analizando diversas situaciones se ha llegado a la conclusión de que la masa efectiva también depende del desplazamiento, ya que ésta varía conforme se va aumentando la deformación en el extremo de la estructura. A partir de los datos de la tabla anterior, se relaciona la masa con el desplazamiento no lineal obtenido en el análisis estático no lineal. La relación que se observa es la siguiente:





Todas las relaciones obtenidas en el análisis modal de la estructura serán de gran utilidad en el modelo analítico que se va a realizar con el programa MATLAB a continuación.

#### **4.3. Modelo Analítico con MATLAB.**

El modelo analítico realizado con MATLAB se realiza a través de la implementación de un código el cual se expone en el Anexo C.1.1. La primera parte del código corresponde al programa principal, en él se indica el número de puntos a analizar, en nuestro caso 65536 ( $2^{16}$ ), el tiempo total de análisis y como varía el tiempo en relación al tiempo total del análisis.

También se llama a una función (con sus condiciones iniciales) que nos resuelve la ecuación característica del sistema de un grado de libertad masa-muelle-amortiguador modelizado, devolviéndonos ésta un vector cuyas componentes son el desplazamiento y la velocidad.

En el mismo código se introducen las instrucciones para la realización de las gráficas temporales y la gráfica frecuencial obtenida a través de la Transformada de Fourier, indicando que su eje y sea dibujado en escala logarítmica.

La transformada de Fourier es el espectro de frecuencias de una función. Un claro ejemplo de qué es lo que hace la transformada de Fourier lo tenemos en el propio oído, recibe una onda auditiva y la transforma en una descomposición de distintas frecuencias. El oído va percibiendo distintas frecuencias conforme el tiempo pasa, sin embargo, la Transformada de Fourier contiene todas las frecuencias presentes en todos los tiempo en que la señal existió, obteniendo un solo espectro de frecuencias para toda la función [17].

La Transformada de Fourier [18] es utilizada para pasar al dominio frecuencial una señal con la que no se ha sacado información relevante en el dominio temporal. Es más sencillo saber sobre qué ancho de banda se concentra la energía de una señal analizándola en el dominio frecuencial.

En el tratamiento digital de imágenes es muy utilizada para mejorar ciertas zonas de una imagen fotográfica. También es muy útil para el diseño de filtros de radiotransistores.

En el código que tenemos en MATLAB, se consigue hacer la Transformada de Fourier de la velocidad gracias a la codificación que tenemos al final del código.

En la función llamada en el programa principal en el que se pasan las condiciones iniciales introducimos datos significantes. La frecuencia de excitación inicial y final, es decir, el intervalo de frecuencias en el que se mueve la fuerza aplicada. El tiempo final de nuevo, ya que será utilizado para ir calculando paso a paso la frecuencia de excitación.

Posteriormente se comienza a utilizar lo que se ha hallado en el análisis modal, como por ejemplo la función de la masa respecto al desplazamiento. También se usa la

ecuación aproximada de la constante de rigidez del modo 1 respecto al desplazamiento no lineal y teniendo en cuenta la frecuencia y la masa efectiva.

A continuación se define el amortiguamiento en función de la constante de rigidez y de la masa. Se introduce el valor de la amplitud de la fuerza y se resuelve la ecuación de segundo orden. Finalmente, devuelve el vector mencionado anteriormente.

Llegados a este punto, las cargas que se aplicarán de aquí en adelante serán menores a las cargas aplicadas en los análisis anteriores. La razón es porque en el análisis dinámico, la amplitud se magnifica para frecuencias cercanas a la frecuencia de resonancia, tal y como se muestra en la Figura 4.3.1.

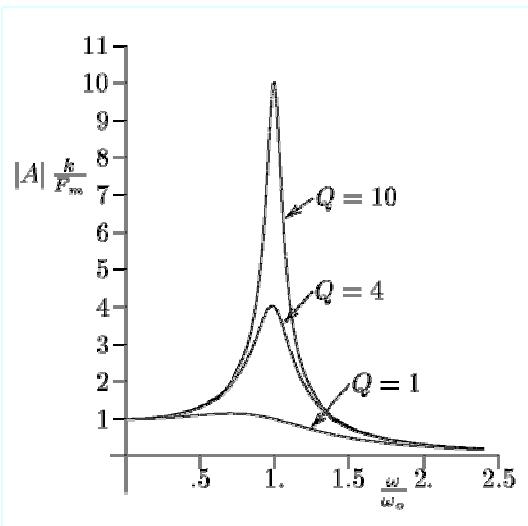


Figura 4.3.1. Respuesta en frecuencia de un oscilador armónico.

La amplitud de las oscilaciones forzadas dependerá de la amplitud de la fuerza externa, pero para una misma amplitud de la fuerza, la amplitud de la oscilación dependerá también de la frecuencia.

En la Figura 4.3.1. se representa la amplitud de la oscilación forzada en función de la frecuencia para varios valores de calidad  $Q$ . Cuando estamos a muy baja frecuencia, la amplitud es la misma que si la fuerza fuera estática, mientras que conforme nos acercamos a la frecuencia propia del sistema la amplitud también aumenta. Esta frecuencia se llamará frecuencia de resonancia. De esta figura se deduce que cuando el sistema está excitado a una frecuencia cercana a la de resonancia, la amplitud de las oscilaciones será  $Q$  veces más grande que la que se obtiene a baja frecuencia.

#### 4.3.1. Análisis en el dominio temporal.

La parte correspondiente del código de MATLAB al análisis en el dominio temporal es aquella en la que vamos a representar las funciones de desplazamiento y velocidad respecto al tiempo.



Para ello se han utilizado los resultados proporcionados por la función que resuelve el sistema. Esta solución viene determinada por un vector de cuatro componentes y cada componente tendrá para cada instante de tiempo su correspondiente valor.

De este modo, la primera componente del vector será el desplazamiento, mientras que la segunda será la velocidad, las cuales utilizaremos junto con el tiempo para realizar las gráficas del dominio temporal del modelo.

Las tercera y cuarta componente no se utilizan para realizar, en este caso, ninguna gráfica, ya que no son necesarias para éste análisis. De todos modos corresponde a la aceleración y a la fuerza del resorte, respectivamente.

Todas las gráficas se encuentran en el Anexo C junto con el código de MATLAB. Ahí se muestran para cada fuerza aplicada en este caso. Podemos observar que dependiendo de la amplitud de la fuerza que se aplique, el desplazamiento y la velocidad aumentará conforme se aumente la amplitud de la fuerza. Conforme se aumenta la fuerza aplicada de observa que llega un momento en el que las amplitudes positivas y negativas no tienen el mismo módulo produciéndose gráficas no simétricas.

También se han realizado las gráficas desplazamiento-velocidad (se pueden ver en el Anexo C para cada amplitud de carga), en ellas se observa su circularidad y que están centradas en el origen, pero conforme aumenta la no linealidad (aumentando la fuerza), van tomando formas más sorprendentes.

#### ***4.3.2. Análisis en el dominio frecuencial.***

El análisis en el dominio de la frecuencia se utiliza como una herramienta muy común en la teoría de control. Actualmente con las facilidades y la cantidad de aplicaciones que nos permiten las computadoras, la simulación en el dominio temporal es bastante más sencilla, por lo que este análisis ha perdido importancia práctica. Aún con todo, sigue teniendo un valor conceptual y una sencillez en la comprensión intuitiva muy importante.

Gracias al programa MATLAB, mediante una de sus funciones (la Transformada Rápida de Fourier, anteriormente explicada), se han podido realizar las gráficas de la frecuencia respecto a la amplitud de la velocidad. Todas las gráficas se pueden observar en el Anexo D dependiendo de la fuerza aplicada. Se observa que mientras la fuerza no produce la no linealidad, todas ellas tienen la misma frecuencia en el modo 1. Cuando se empieza a producir no linealidad se observa que aumenta ligeramente la amplitud y aparecen zonas con muchos picos de frecuencia (barridos continuos).

Para la validación del modelo, se ha comparado con el modelo de ABAQUS a través del programa de tratamiento de señales MESCOPE.

#### 4.4. Análisis Numérico Dinámico Transitorio No Lineal.

Para el análisis que se muestra a continuación se proyecta una estructura en 2D deformable con elementos tipo barra (beam). Lo que cambiará respecto a los otros análisis realizados en ABAQUS será en primer lugar el nuevo paso, también denominado step, que se aplicará en el programa de la forma que se muestra en la Figura 4.4.1.

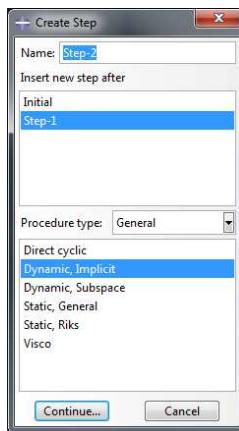


Figura 4.4.1. Creación de un step dinámico transitorio.

El análisis dinámico transitorio no lineal se ha realizado para un tiempo total de 20 segundos, con un incremento de 0,000305175 con un máximo de 66.000 pasos (número superior al marcado en MATLAB, aunque analizará el mismo número que en MATLAB debido a que le hemos marcado el incremento). Estos datos son introducidos al crear el step.

En las propiedades del material introduciremos el amortiguamiento en la pestaña DAMPING.

El amortiguamiento que se introduce en el programa ABAQUS en este caso corresponde al tipo de amortiguamiento de Rayleigh. La forma de encontrar la matriz de amortiguamiento es muy útil cuando se está analizando estructuras con disipadores visco-elásticos. En el modelo matemático que se adopte los amortiguadores deberán estar colocados en las masas, para que sea más fácil su evaluación.

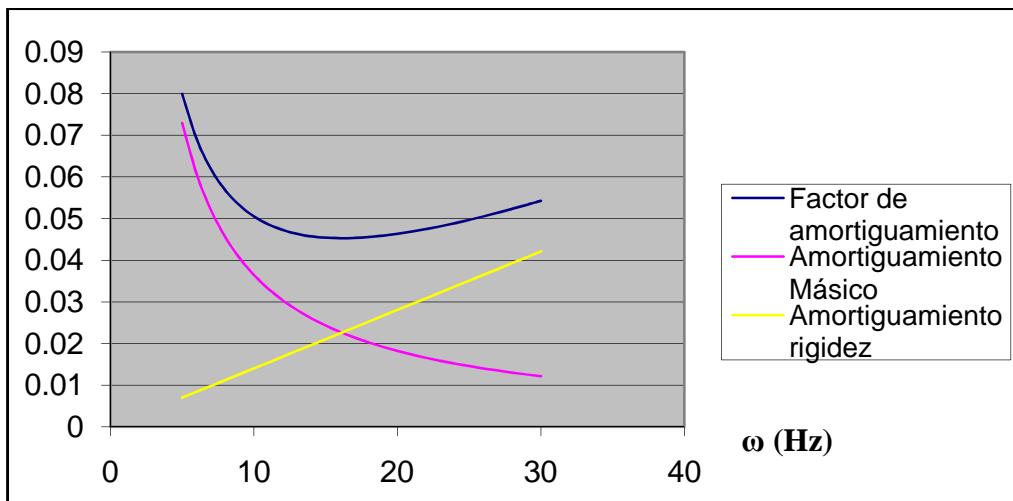
Una forma sencilla de encontrar la matriz de amortiguamiento  $C$  de una estructura es considerarla como una función dependiente de la matriz de masas  $M$  y la matriz de rigidez  $K$ , como se presenta a continuación. El modelo de Rayleigh considera que la matriz de amortiguamiento es una combinación lineal de las matrices de masa y rigidez.

$$C = \alpha M + \beta K$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son dos constantes que se obtienen en base a los dos primeros modos de vibración, utilizando la siguiente ecuación:

$$\xi = \frac{\alpha}{2\omega_i} + \frac{\beta\omega_i}{2}$$

Para hallar los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se ha realizado la Gráfica 4.4.1. que se muestra a continuación.



Gráfica 4.4.1. Amortiguamiento de Rayleigh.

Para aplicar la fuerza, se crea una tabla en el programa EXCEL con los tiempos y la fuerza aplicada en cada instante. Esta tabla se introduce en ABAQUS en la parte de Amplitudes tal y como se muestra en la Figura 4.4.2.

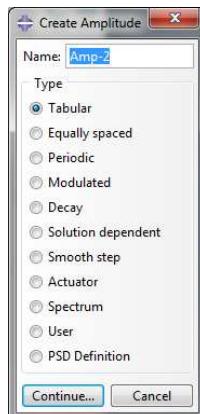


Figura 4.4.2. Creación de una amplitud de fuerza.

Tras haber realizado estos pasos previos, se llega al punto donde introducir los datos de la tabla generada en EXCEL, como se observa en la Figura 4.4.3.

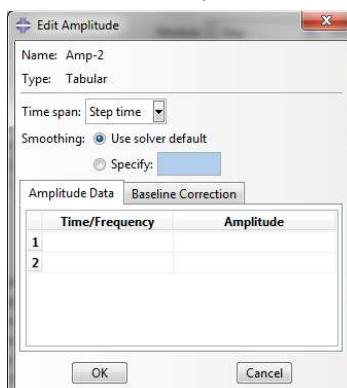


Figura 4.4.3. Introducción tabulada de la fuerza.



Una vez introducida la fuerza, ésta se aplicará mediante la creación de una carga dependiente de la amplitud generada. Tal y como muestra la Figura 4.4.4.

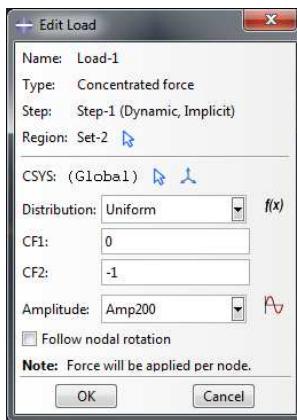


Figura 4.4.4. Aplicación de la fuerza.

Finalizados todos los pasos que se deben dar para generar el análisis que se está realizando, se lanza el cálculo como se ha hecho en análisis anteriores. El coste computacional de este modelo es mucho mayor a los realizados hasta el momento.

Los resultados obtenidos a través de este análisis pueden observarse en el Anexo D.

Si observamos las gráficas temporales del desplazamiento observamos que la amplitud va en aumento conforme se aplica mayor carga en el extremo. La forma gráfica es muy parecida en las cargas de 0.1 N a 2 N, pero a partir de este valor la forma gráfica cambia debido a la aparición de la no linealidad. También observamos que cuando se llega a la no linealidad, aparece una segunda fase en la gráfica en la cual vuelve a aumentar la amplitud.

Al igual que en el desplazamiento, en la velocidad también se aumenta la amplitud conforme aumentamos la carga, y aparece el mismo fenómeno, en la segunda fase, en las cargas de valor alto.

El fenómeno que se produce en la segunda fase o parte de la gráfica será analizado en la validación del modelo que se muestra en el siguiente apartado.

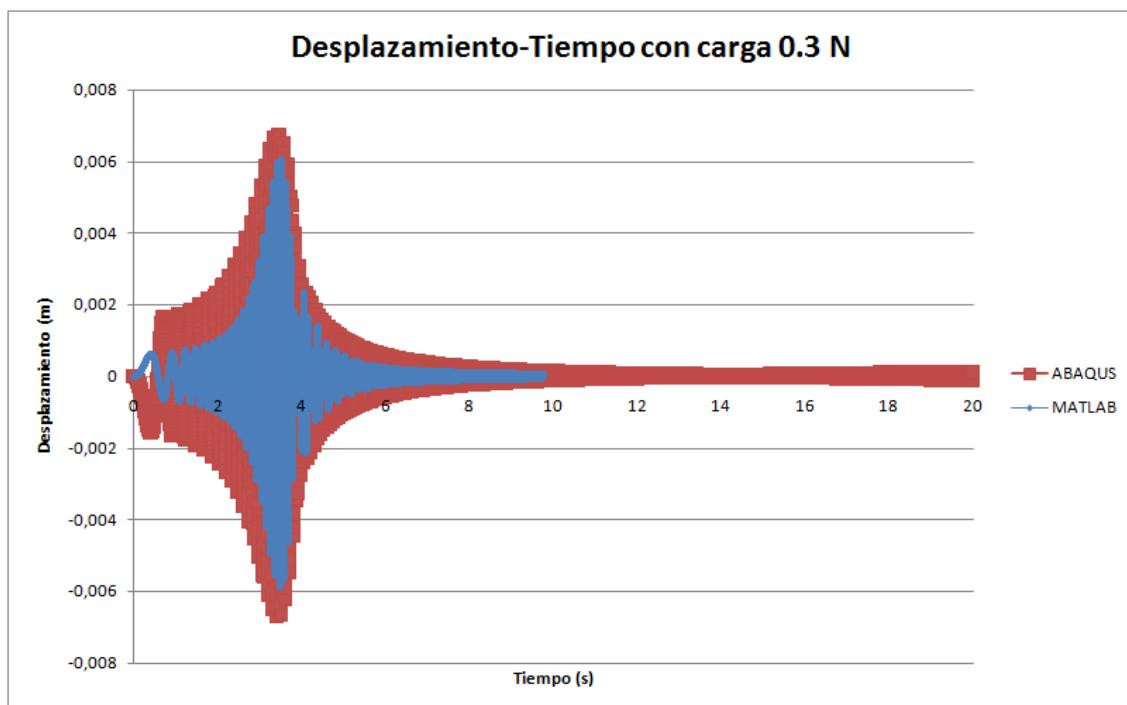
## 5.- Validación.

La validación de los modelos que se han presentado en este Trabajo Fin de Máster consiste en valorar las diferencias que existen entre el funcionamiento del modelo en MATLAB con el modelo de ABAQUS.

Para realizar la validación del análisis en el dominio temporal se van a superponer las gráficas que ambos programas nos muestran en el programa EXCEL (solo permite hacer gráficos con un máximo de 32.000 puntos). Para ello se han pasado los datos de los tiempos, desplazamientos y velocidades de ambos programas a una hoja EXCEL.

Para simplificar un poco la cantidad de imágenes se va a reproducir la validación para tres cargas significativas (0.3 N, 1.5 N y 20 N) de tal forma que puedan verse las diferencias más notables en el desplazamiento y en la velocidad.

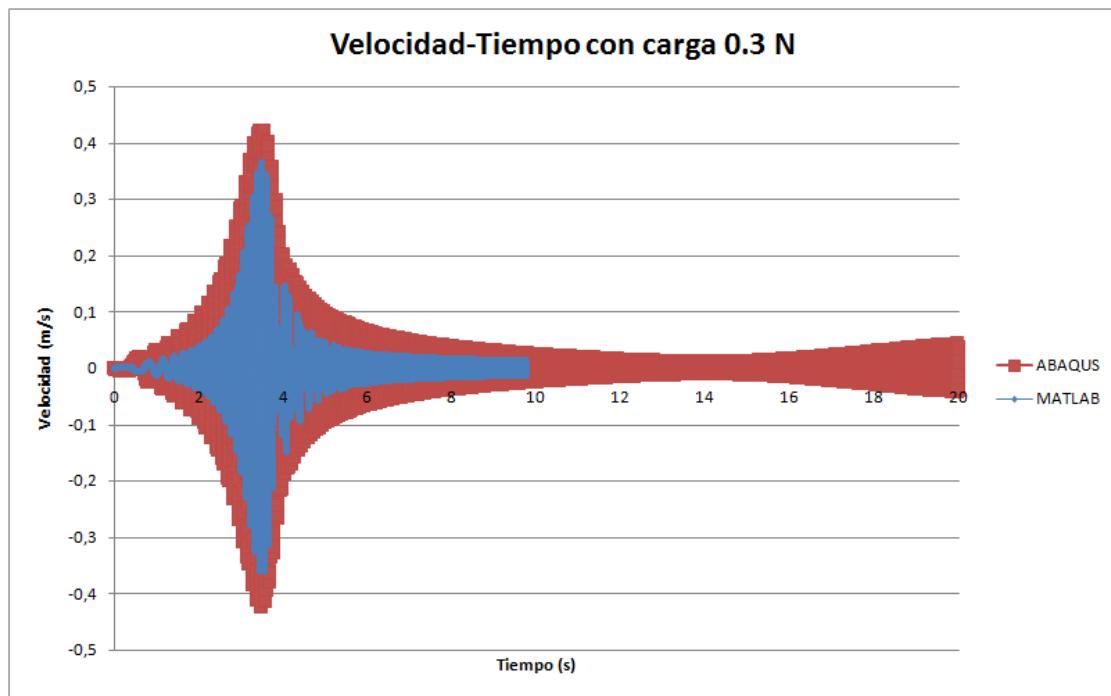
En primer lugar, para las cargas de pequeño valor (0.3 N y 1.5 N), se puede decir que los resultados que se producen en ambos programas son prácticamente idénticos, con unas pequeñas diferencias derivadas de la deficiente definición del amortiguamiento en el programa ABAQUS, por ello sus amplitudes son mayores que en el caso de MATLAB. Esta conclusión se puede observar gráficamente en las gráficas (Gráfica 5.1., Gráfica 5.2., Gráfica 5.3. y Gráfica 5.4.) de a continuación.



Gráfica 5.1. Comparativa del desplazamiento en el dominio temporal con carga de 0.3 N.

El porcentaje de error cometido en este caso de desplazamiento será:

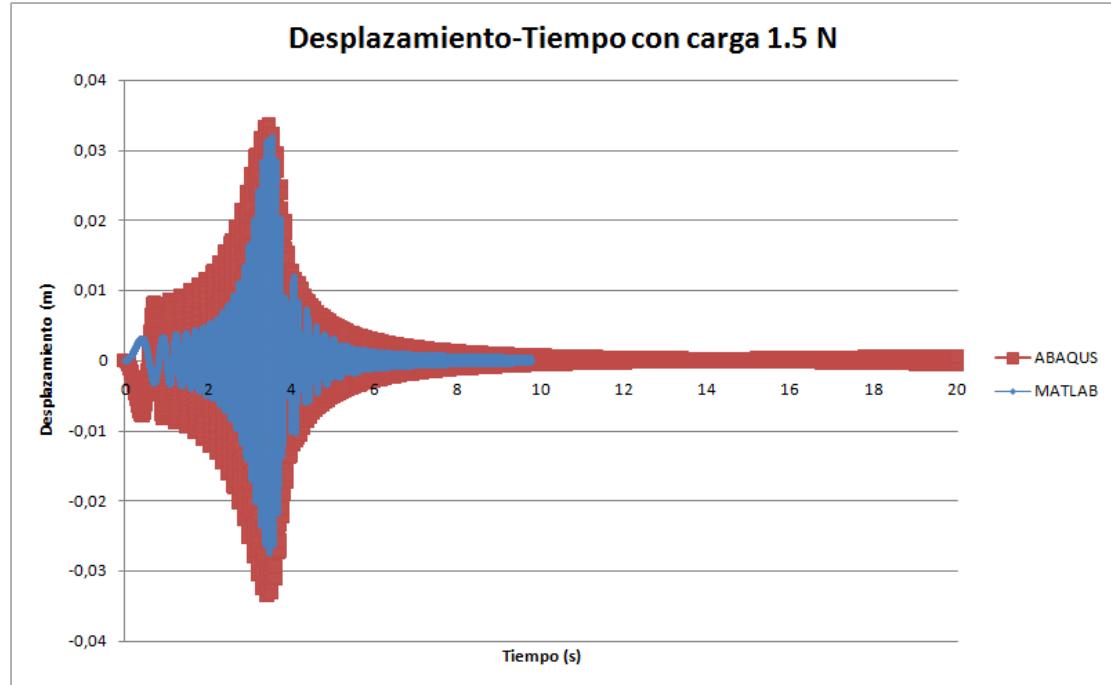
$$\frac{\text{Amplitud en ABAQUS}}{\text{Amplitud en MATLAB}} * 100 = \frac{0,0071}{0,0061} * 100 = 116,4 \rightarrow 16,4 \%$$



Gráfica 5.2. Comparativa de la velocidad en el dominio temporal con carga de 0.3 N.

El porcentaje de error cometido en este caso de velocidad será:

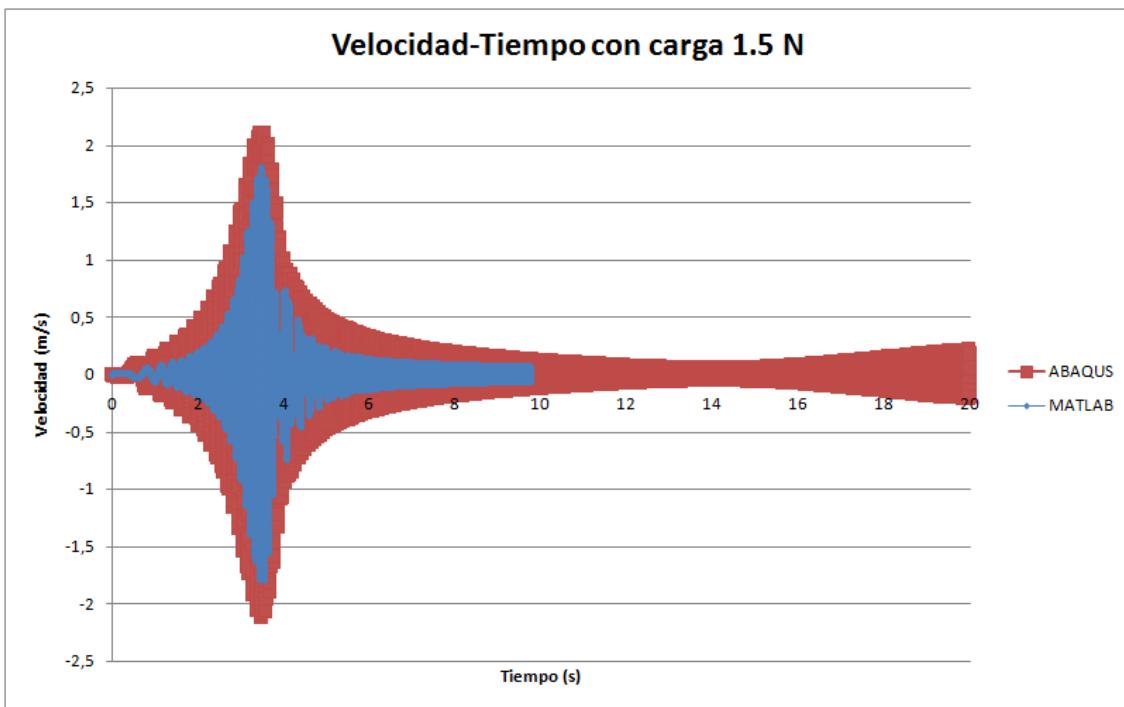
$$\frac{\text{Amplitud en ABAQUS}}{\text{Amplitud en MATLAB}} * 100 = \frac{0,420}{0,380} * 100 = 110,5 \rightarrow 10,5 \%$$



Gráfica 5.3. Comparativa del desplazamiento en el dominio temporal con carga de 1.5 N.

El porcentaje de error cometido en este caso de desplazamiento será:

$$\frac{\text{Amplitud en ABAQUS}}{\text{Amplitud en MATLAB}} * 100 = \frac{0,0345}{0,0325} * 100 = 106,1 \rightarrow 6,1 \%$$

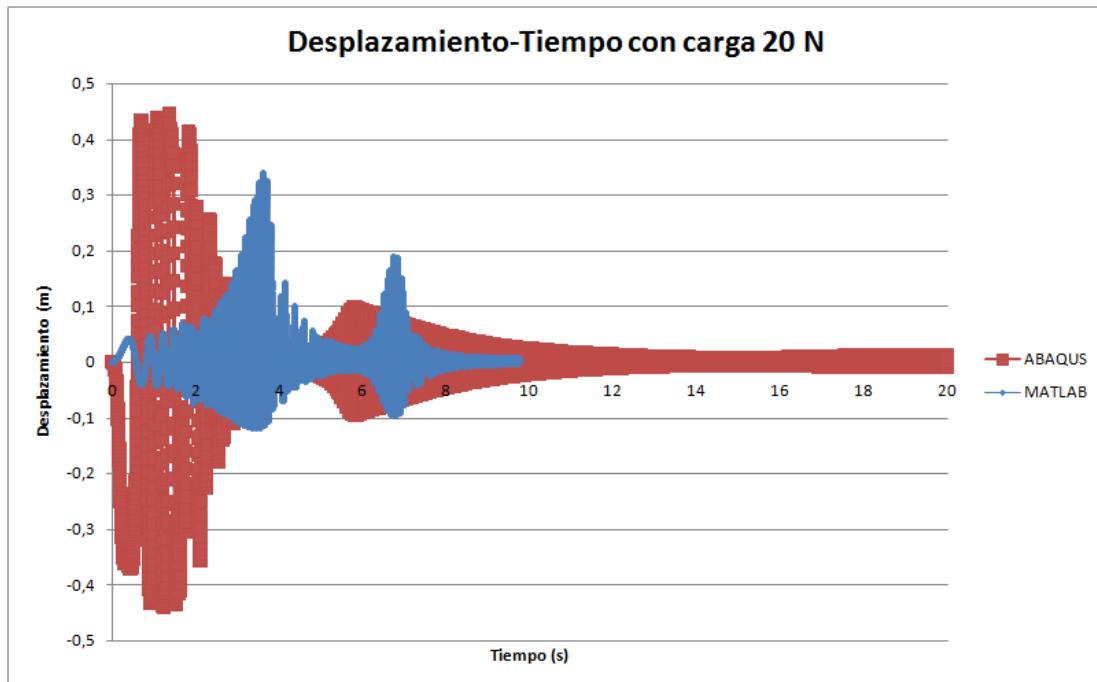


Gráfica 5.4. Comparativa de la velocidad en el dominio temporal con carga de 1.5 N.

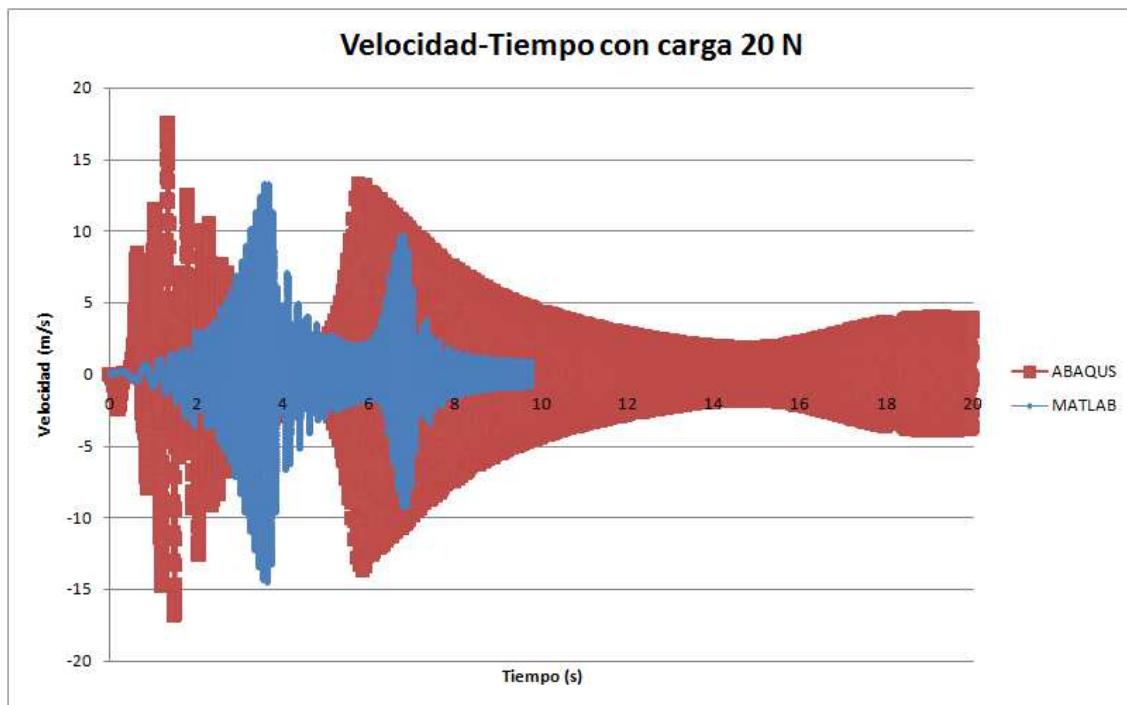
El porcentaje de error cometido en este caso de velocidad será:

$$\frac{\text{Amplitud en ABAQUS}}{\text{Amplitud en MATLAB}} * 100 = \frac{2,150}{1,825} * 100 = 117,8 \rightarrow 17,8 \%$$

Las gráficas correspondientes a la carga de 20 N son difíciles de comparar debido a que empiezan a aparecer diferentes formas modales para cada modelo.



Gráfica 5.5. Comparativa del desplazamiento en el dominio temporal con carga de 20 N.



Gráfica 5.6. Comparativa de la velocidad en el dominio temporal con carga de 20 N.

Respecto al análisis frecuencial, en primer lugar observamos en la Figura 5.1. la velocidad respecto al tiempo en el programa MESCOPE de los dos análisis (ABAQUS y MATLAB respectivamente). Estas gráficas corresponden a unas fuerzas aplicadas que son 1 N, 1.5 N, 2 N, 5 N, 10 N y 20 N de arriba a abajo como se muestran. Aquí también se puede observar lo que se ha comentado al final del análisis dinámico transitorio no lineal (la diferencia entre la forma de las gráficas con poca carga y con carga alta).

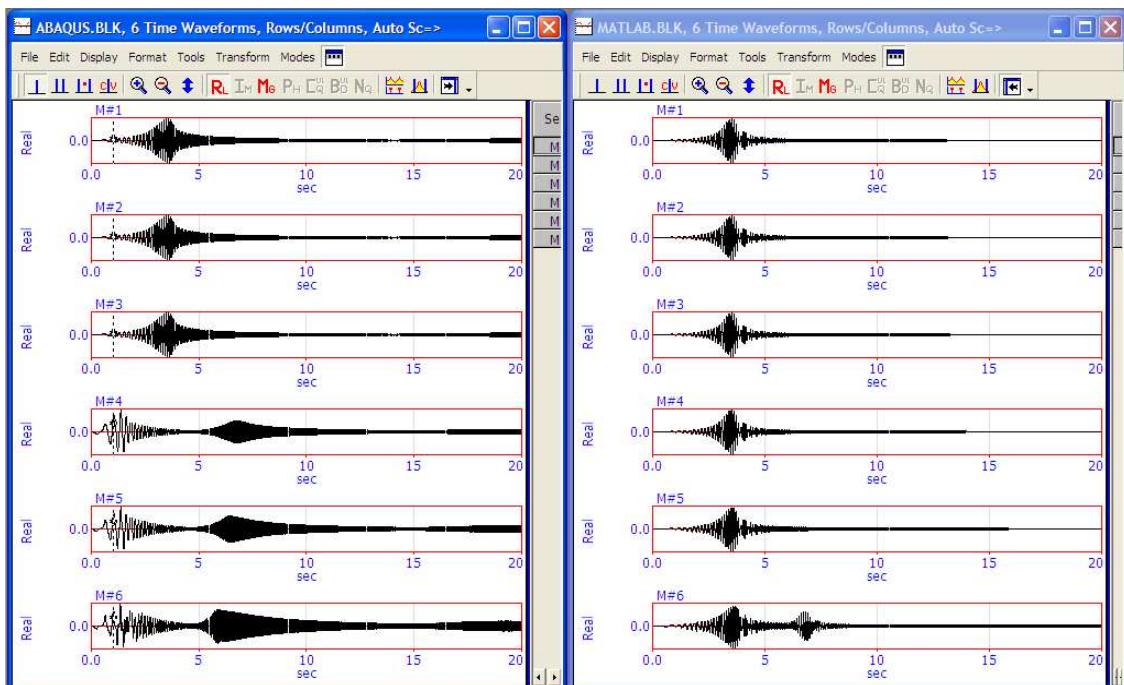


Figura 5.1. Velocidades en el dominio temporal en el programa MESCOPE.

A través de las herramientas que tiene el programa MESCOPE y de las velocidades anteriormente vistas en la Figura 5.1., se hallan las Transformadas de Fourier para cada una de ellas, tal y como se muestra en la Figura 5.2.

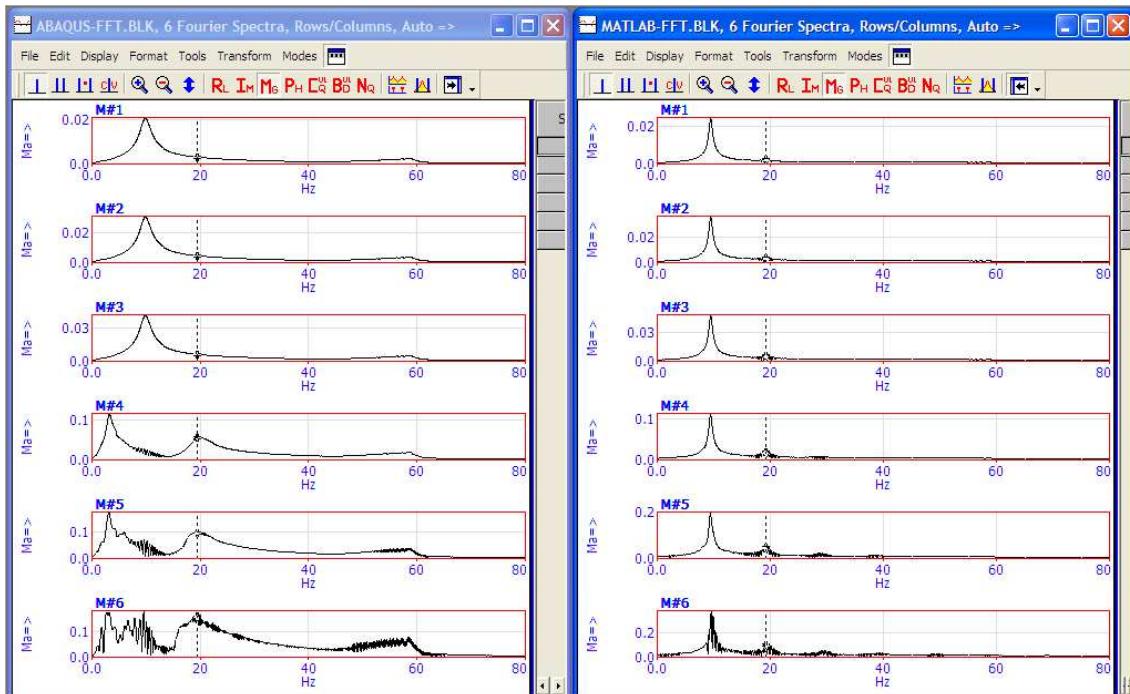


Figura 5.2. Transformada de Fourier de la velocidad en el programa MESCOPE.

Se observan cambios en las frecuencias conforme aumentamos las cargas. Esto es debido a la diferencia en las formas modales. Para los puntos donde el tiempo es de 3,25 segundos, 9,8 segundos y 19,2 segundos encontramos picos de frecuencia, que si los analizamos en la animación de ABAQUS, podemos ver que corresponden a deformadas de vibración diferentes como se muestra a continuación en las figuras.

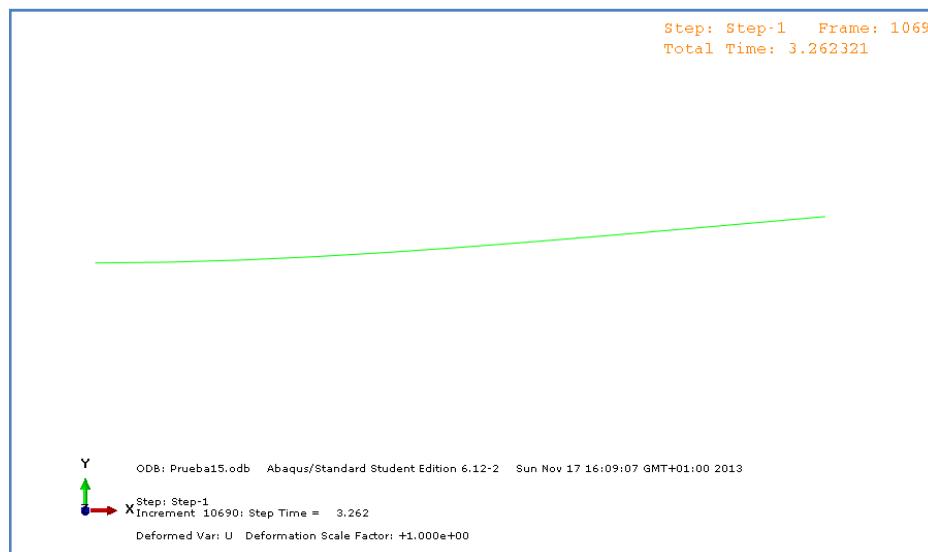


Figura 5.3. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 1,5 N en el tiempo 3,25 segundos.

En la Figura 5.4. se muestra la deformada de la vibración para una carga de 1,5 N en el instante 9,8 segundos, la cual no varía respecto al instante de 3,25 segundos (Figura 5.3.). Se produce en este punto la mayor frecuencia debido a que es donde mayor velocidad y menor amplitud tiene la respuesta.

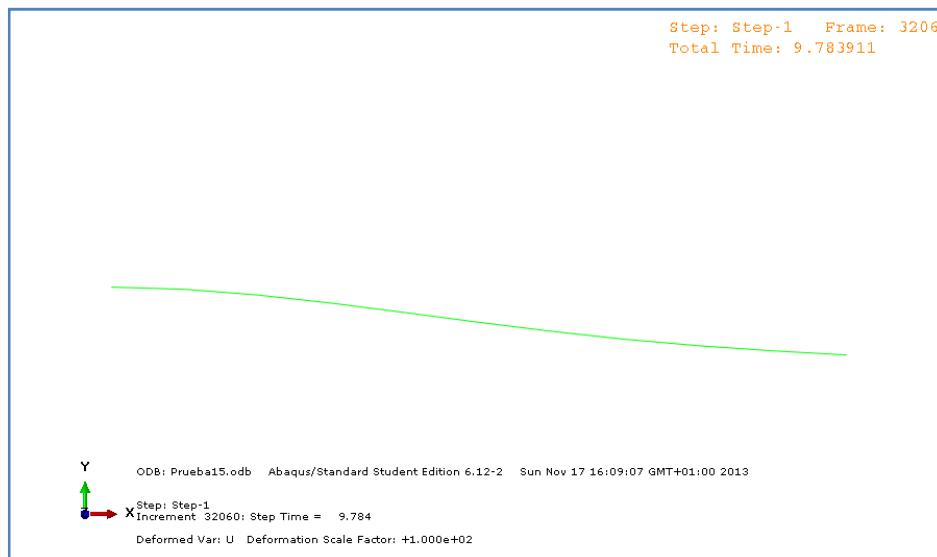


Figura 5.4. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 1,5 N en el tiempo 9,8 segundos.

Para el instante 19,2 segundos se puede observar en la animación de ABAQUS que la deformada comienza a cambiar (Figura 5.5.), por eso aparece un pequeño barrido de frecuencias en la Transformada de Fourier.

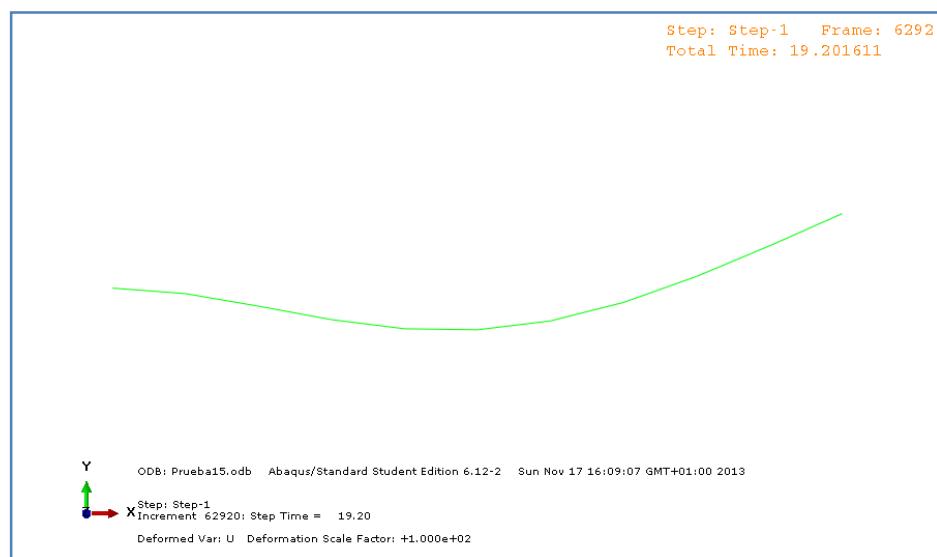


Figura 5.5. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 1,5 N en el tiempo 19,2 segundos.

Referente a la carga de 20 N, podemos observar que las formas modales han cambiado respecto a la que se veía para la carga de 1,5 N, de ahí los cambios producidos en las frecuencias de la Transformada de Fourier.

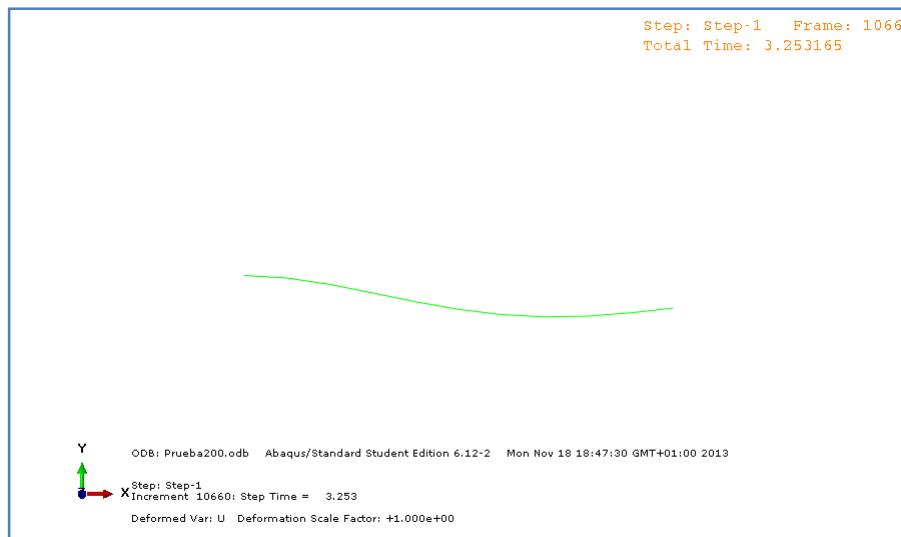


Figura 5.6. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 20 N en el tiempo 3,25 segundos.

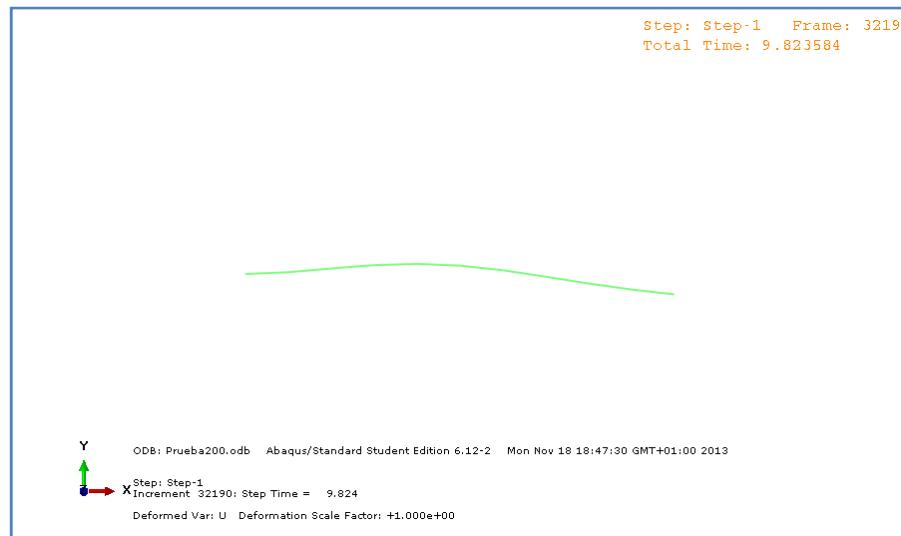


Figura 5.7. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 20 N en el tiempo 9,8 segundos.

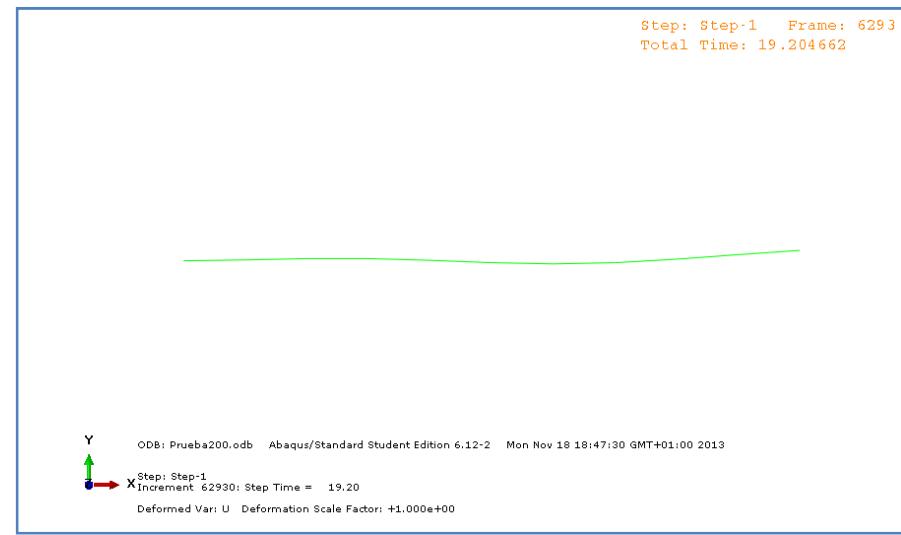


Figura 5.8. Deformada de la geometría en vibración para una carga de 20 N en el tiempo 19,2 segundos.



## **6.- Conclusiones.**

La realización del Trabajo Fin de Máster respecto al análisis vibratorio de estructuras ligeras sometidas a excitaciones armónicas ha llevado a la obtención de una serie de conclusiones como las que se indican en este apartado.

Se ha establecido un procedimiento para modelizar el comportamiento dinámico no lineal en una placa de pequeño espesor mediante la reducción a un sistema de un grado de libertad.

El comportamiento no lineal del sistema para el primer modo de vibración, que ha sido empleado para la construcción del modelo simplificado dado que es el que mayor masa moviliza, presenta las siguientes particularidades:

- Aumento de la frecuencia con la amplitud de la carga.
- Disminución de la masa movilizada del primer modo de vibración con la amplitud de la carga.
- De las dos anteriores se deduce el aumento de la rigidez con la amplitud de carga.
- Teniendo todo lo anterior en cuenta se constata que el empleo del amortiguamiento de Rayleigh en el modelo numérico no es el más adecuado.
- Los resultados obtenidos con un grado de libertad presentan un comportamiento similar a los obtenidos con el modelo numérico para niveles de carga que generan comportamientos no lineales de pequeña magnitud, presentando mayor discrepancia para niveles de carga que generan efectos no lineales de mayor amplitud.
- Finalmente, del análisis numérico se constata que para niveles de carga que generan lo linealidades de gran magnitud su comportamiento se aleja de la respuesta asociada al primer modo de vibración.



## **7.- Mejoras y trabajos futuros.**

El trabajo realizado aborda un tema muy poco investigado hasta la fecha como muy bien se recoge en el estado del arte de este documento. Por ello, sería interesante profundizar en aspectos sobre la no linealidad. Hay múltiples opciones de investigación para un futuro próximo en relación con este tema.

### **1. FASE EXPERIMENTAL:**

Entre esas opciones destacaría la realización de una fase experimental desarrollando un sistema sin contacto para no alterar la dinámica de la estructura debido a su bajo peso como por ejemplo sistemas piezoelectrómicos, magnéticos, etc. En este caso se podría utilizar un vibrómetro láser para medir y, de este modo, ajustar al máximo los resultados obtenidos.

### **2. AUMENTO DE LA COMPLEJIDAD DEL MODELO:**

El trabajo desarrollado en este Trabajo Fin de Máster ha consistido en un modelo analítico de un sólo grado de libertad, por lo que sería muy interesante aumentar la complejidad de este modelo analítico aumentando el número de grados de libertad, incrementando de esta manera la dificultad, pero, por el contrario, ajustándose más a la realidad.

### **3. AJUSTE DEL AMORTIGUAMIENTO:**

Como se ha explicado cuando se ha hablado del análisis numérico dinámico transitorio no lineal, el amortiguamiento en el programa ABAQUS da problemas por lo que una mejora podría dirigirse en este sentido, en el ajuste de la definición del amortiguamiento en el análisis dinámico del mencionado programa.



## 8.- Bibliografía.

[1] Evelio Palomino Marín. "La Medición y el Análisis de Vibraciones en el Diagnóstico de Máquinas Rotatorias". Fecha de consulta 10 Julio del 2004.  
<http://www.cujae.edu.cu/centros/ceim/articulos/monografia.PDF>

[2] Fundamentos de las vibraciones mecánicas. César Guerra, Miguel Carrola y José de J. Villalobos. FIME UANL. 2005

[3] K. M. LIEW, C. W. LIM and L. S. ONG 1994 *International Journal of Mechanical Sciences* 36, 547-565. Flexural vibration of doubly-tapered cylindrical shallow shells.

[4] M. M. MIKULAS JR and J. A. MCELMAN 1965 *NASA TN D-3010*. On free vibrations of eccentrically stiffened cylindrical shells and flat plates.

[5] A. W. LEISSA 1984 *Proceedings of the Second International Conference on Recent Advances in Structure Dynamics*, 262-272. Non-linear analysis of plates and shell vibrations.

[6] M. AMABILI, F. PELLICANO and M. P. PAIGDOUSSIS 1999 *Journal of Sound and Vibration* 228, 1103-1124. Non-linear dynamic and stability of circular cylindrical shells containing flowing fluid. Part II: large-amplitude vibration without flow.

[7] L. AZRAR 1999 *Ph.D. Thesis, Ecole Mohammadia d'Ingenieurs Rabat, Morocco*. Semi-analytical and Asymptotic-numerical Methods for Non-linear Vibrations. Applications to large amplitude vibrations of beams and plates.

[8] R. BENAMAR 1990 *Ph.D. Thesis, University of Southampton, England*. Non-linear Dynamic Behaviour of Fully Clamped Beams and Rectangular Isotropic and Laminated Plates.

[9] J. M. T. THOMSON and S. R. BISHOP 1994 Non-linearity and Chaos in Engineering Dynamics. Centre for Non-linear Dynamics, University College London, U.K: John Wiley & Sons.

[10] A. H. NAYFEH and D. T. MOOK 1979 *Non-linear Oscillations*. New York: John Wiley & Sons.

[11] R. A. IBRAHIM, A. A. AFANEH and B. H. LEE 1993 *Journal of Vibration and Acoustics* 115, 182-201. Structural modal multifurcation with internal resonance. I: Deterministic approach. II: Stochastic approach.

[12] F. MOUSSAOUI and R. BENAMAR 1998 *Second International Conference on Applied Mathematics and Engineering Sciences*. The effect of large vibration amplitudes on the mode shapes and natural frequencies of thin elastic shells, coupled transverse-circumferential mode shapes of an isotropic circular cylindrical shells.

[13] R. BENAMAR 1986 *Mémoire de Certificat Préparatoire à la Recherche*. Comportement dynamique nonlinéaire des plaques minces rectangulaires encastrées aux grandes amplitudes. Ecole Mohammadia d'Ingénieurs, Rabat: Morocco.

[14] F. MOUSSAOUI and R. BENAMAR 1998 *6ème Colloque Maghrébin sur les Modèle Numériques de l'Ingénieur*. The effect of large vibration amplitudes on the



mode shapes and natural frequencies of an isotropic elastic circular cylindrical shells of infinite length.

[15] D. A. EVENSEN 1963 *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal* 1, 2857-2858. Some observations on the non-linear vibration of thin cylindrical shells.

[16] M. D. OLSON 1965 *American Institute of Aeronautics and Astronautics* 3, 1775-1777. Some experimental observations on the non-linear vibration of cylindrical shells.

[17] C. Gasquet and P. Witomski, *Fourier Analysis and Applications, Filtering, Numerical Computation, Wavelets* Texts in Applied Mathematics 30 Springer 1999.

[18] C. Lanczos, *Discourse on Fourier Series*, Olyver and Boyd, Edinburg, 1996.

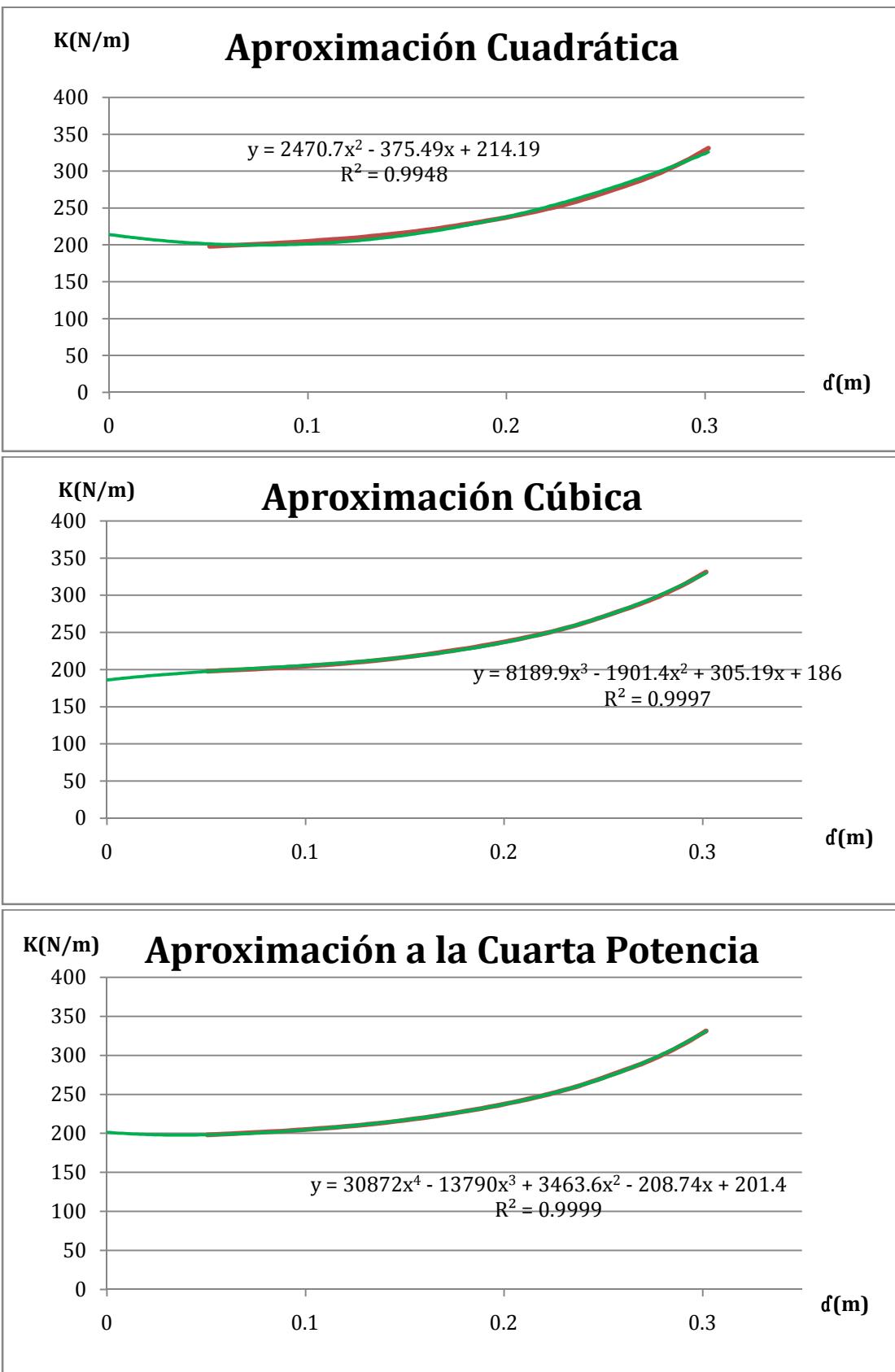
Para la realización de los modelos y su resolución en los programas utilizados se han necesitado y han servido de mucha ayuda los distintos manuales de usuarios de los programas, así como diversa ayuda encontrada en algunas páginas web.



# ANEXOS

## ANEXO A: Análisis Estático No Lineal.

### A.1. Aproximación en la Relación Constante de Rigidez-Desplazamiento.

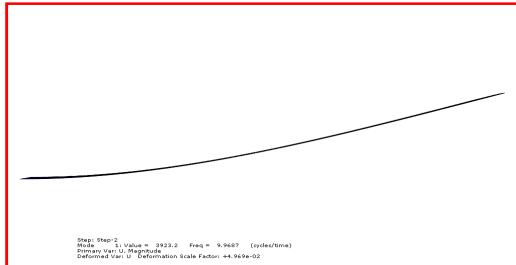


## **ANEXO B: Análisis Modal.**

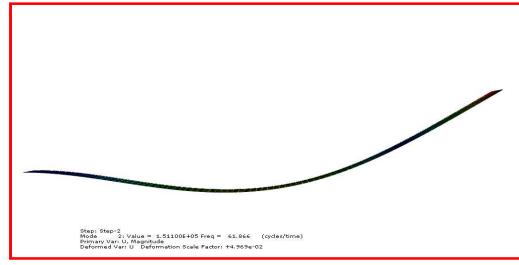
### ***B.1. Formas Modales.***

#### **B.1.1. Fuerza 10 N.**

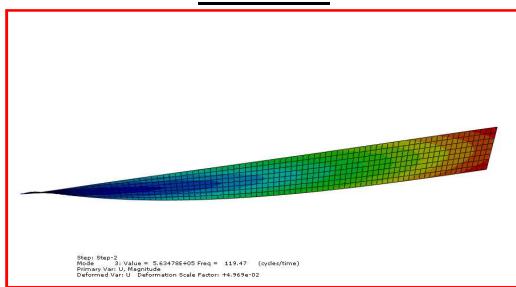
**MODO 1**



**MODO 2**



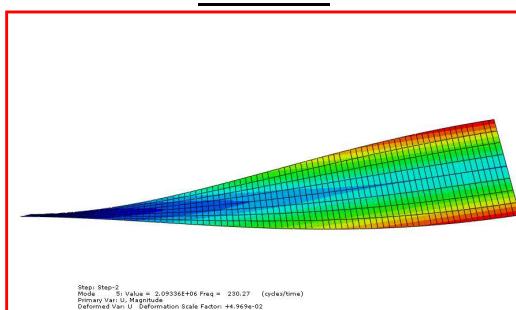
**MODO 3**



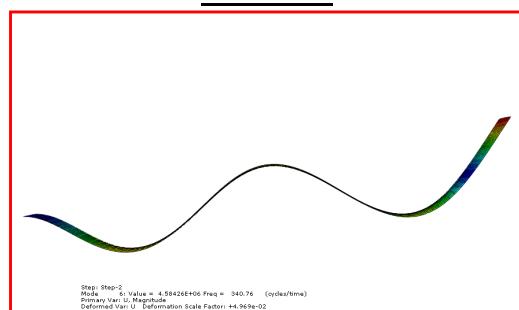
**MODO 4**



**MODO 5**



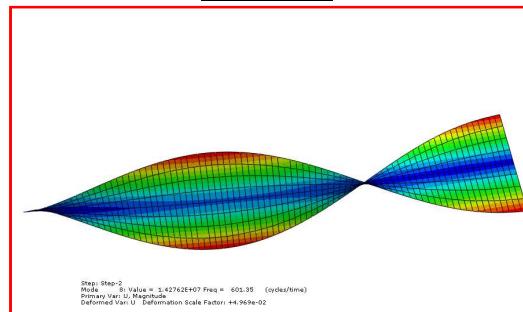
**MODO 6**



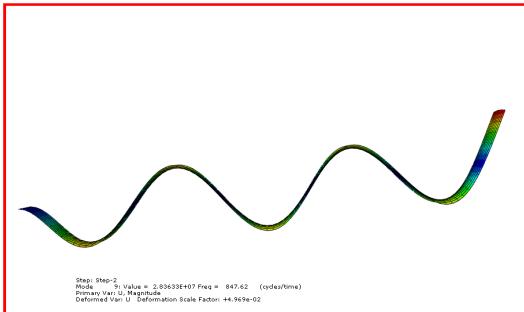
MODO 7



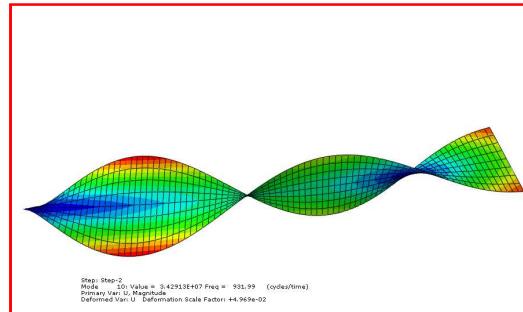
MODO 8



MODO 9



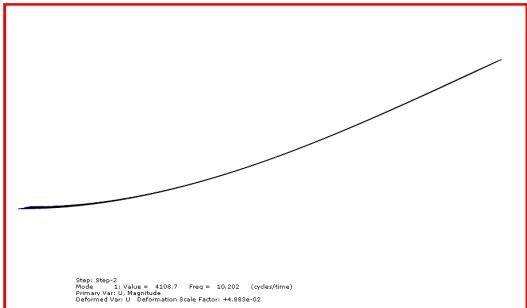
MODO 10



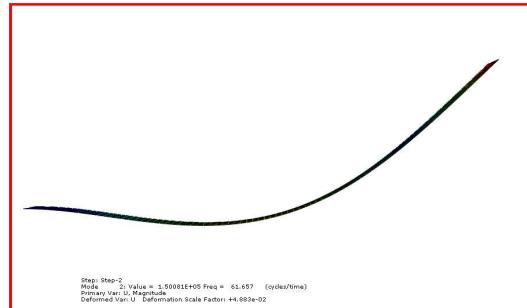
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	9.969	62.635	1.26E-03	6.75E-26	1.27E-01
2	61.866	388.716	2.03E-04	3.88E-24	4.02E-02
3	119.470	750.652	1.92E-26	9.62E-02	5.07E-24
4	173.300	1088.876	5.60E-04	2.96E-25	1.40E-02
5	230.270	1446.829	3.79E-27	3.07E-02	6.98E-25
6	340.760	2141.058	3.27E-04	7.10E-26	7.13E-03
7	565.230	3551.445	2.73E-04	4.98E-24	4.32E-03
8	601.350	3778.393	3.39E-25	5.62E-03	3.70E-24
9	847.620	5325.754	2.12E-04	1.06E-24	2.90E-03
10	931.990	5855.866	1.44E-23	1.31E-02	2.47E-23
		TOTAL	2.84E-03	0.14563	0.19565

**B.1.2. Fuerza 20 N.**

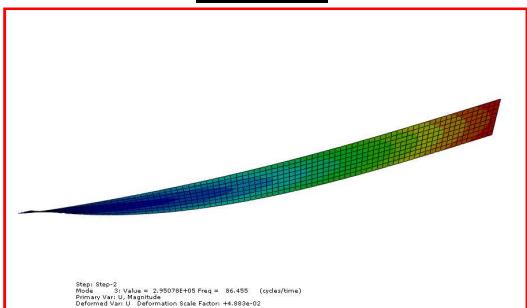
MODO 1



MODO 2



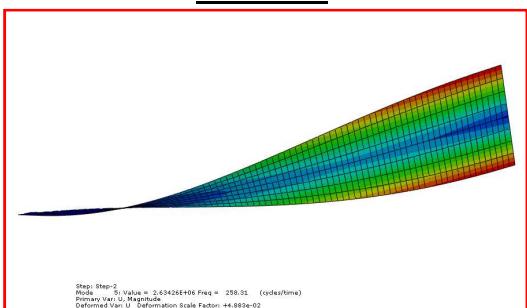
MODO 3



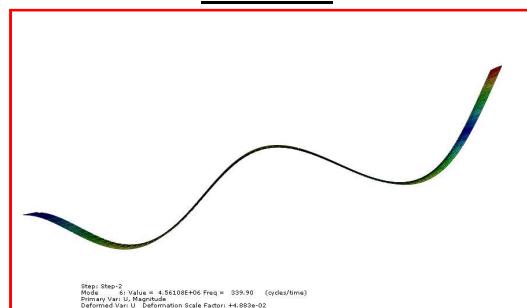
MODO 4



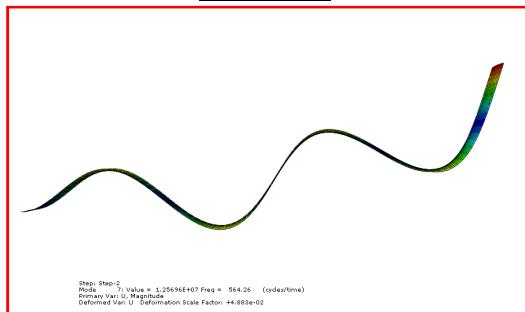
MODO 5



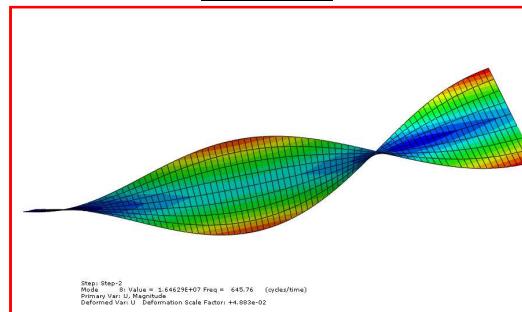
MODO 6



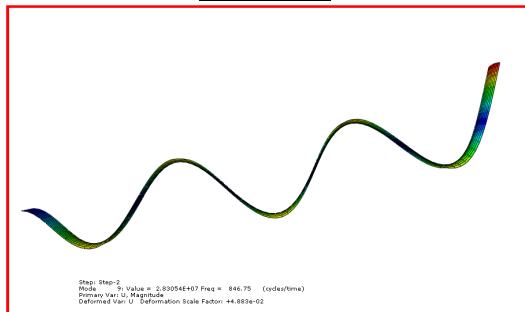
MODO 7



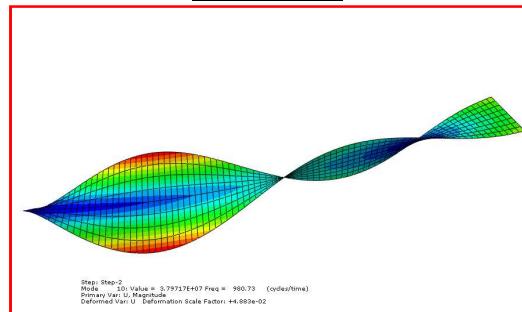
MODO 8



MODO 9



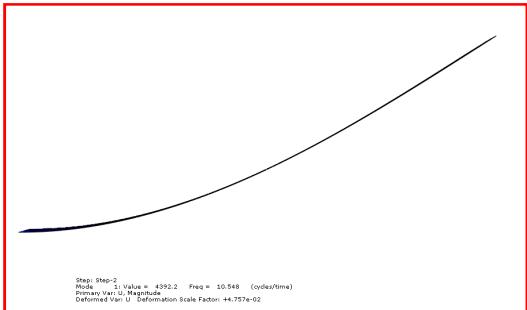
MODO 10



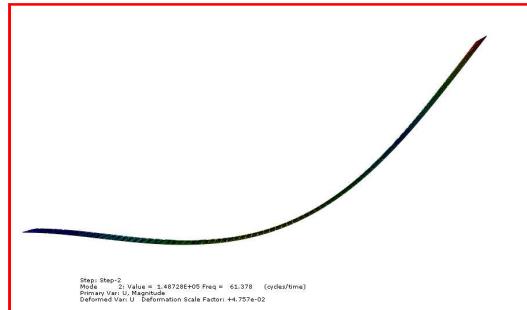
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	10.202	64.101	4.76E-03	3.34E-25	1.24E-01
2	61.657	387.402	7.23E-04	5.01E-24	4.20E-02
3	86.455	543.213	1.93E-26	1.00E-01	5.18E-24
4	172.350	1082.907	2.01E-03	1.30E-24	1.48E-02
5	258.310	1623.010	3.57E-26	2.45E-02	3.74E-25
6	339.900	2135.655	1.16E-03	1.55E-25	7.42E-03
7	564.260	3545.350	9.65E-04	1.55E-24	4.47E-03
8	645.760	4057.430	2.22E-25	1.73E-02	7.56E-25
9	846.750	5320.287	7.43E-04	8.02E-24	2.98E-03
10	980.730	6162.108	4.14E-24	4.24E-03	1.27E-23
		TOTAL	1.04E-02	0.14646	0.1955

**B.1.3. Fuerza 30 N.**

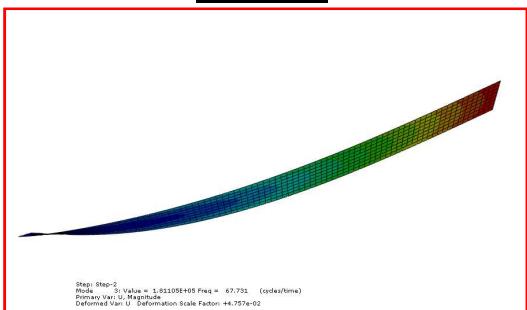
MODO 1



MODO 2



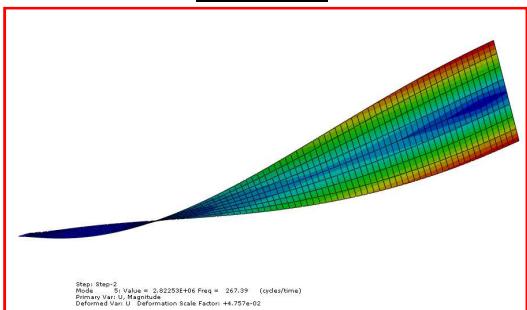
MODO 3



MODO 4



MODO 5



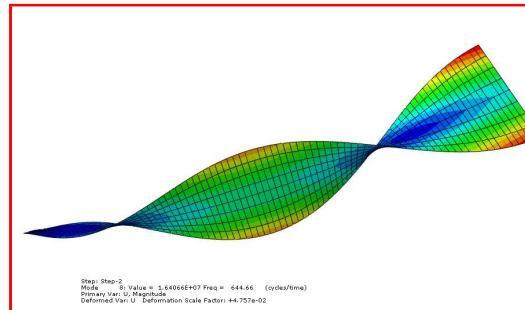
MODO 6



MODO 7



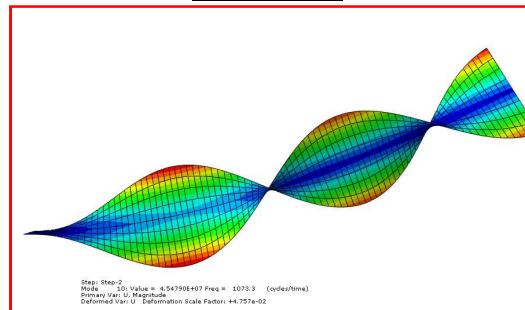
MODO 8



MODO 9



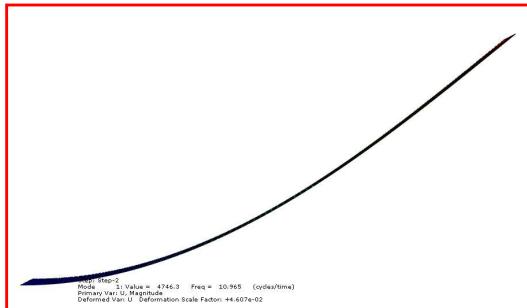
MODO 10



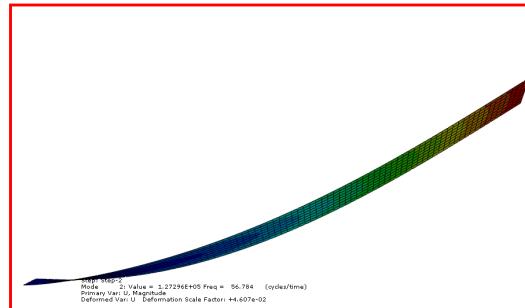
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	10.548	66.275	9.83E-03	1.19E-23	1.19E-01
2	61.378	385.649	1.36E-03	1.46E-22	4.47E-02
3	67.731	425.566	5.72E-24	1.04E-01	2.06E-23
4	171.050	1074.739	3.85E-03	3.02E-26	1.60E-02
5	267.390	1680.061	1.02E-26	2.12E-02	7.94E-25
6	338.720	2128.241	2.21E-03	1.29E-25	7.82E-03
7	562.960	3537.182	1.81E-03	9.60E-25	4.68E-03
8	644.660	4050.518	8.10E-26	2.31E-02	3.70E-25
9	845.590	5312.999	1.38E-03	1.13E-22	3.09E-03
10	1,073.300	6743.743	3.18E-23	6.64E-03	5.12E-22
		TOTAL	2.04E-02	0.15477	0.1953

**B.1.4. Fuerza 40 N.**

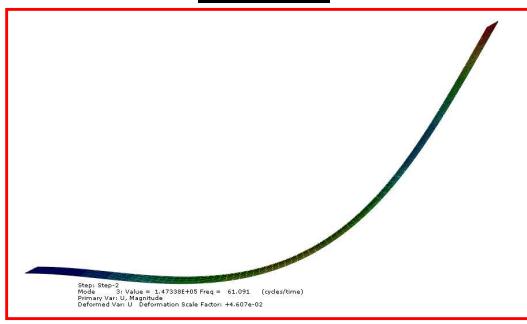
**MODO 1**



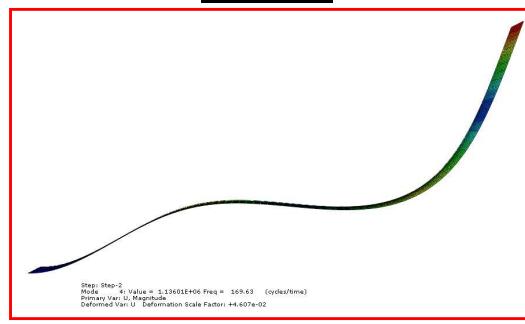
**MODO 2**



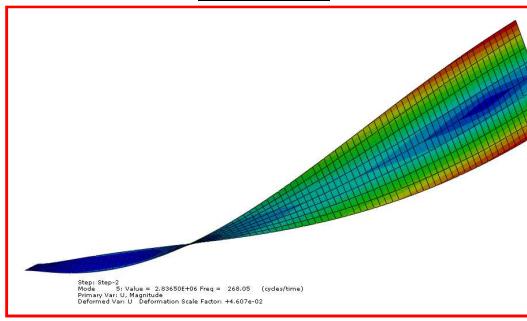
**MODO 3**



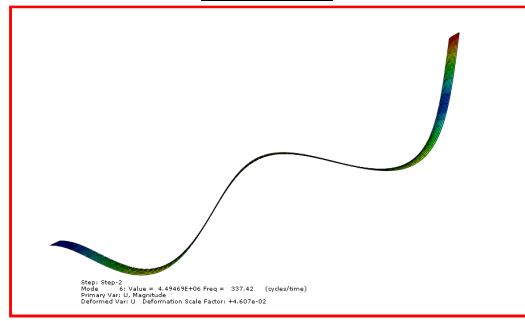
**MODO 4**



**MODO 5**



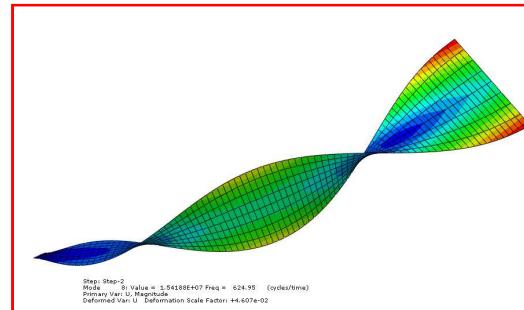
**MODO 6**



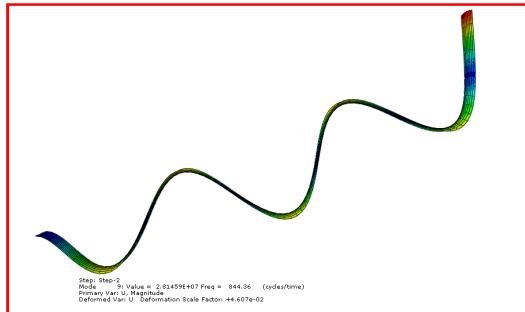
MODO 7



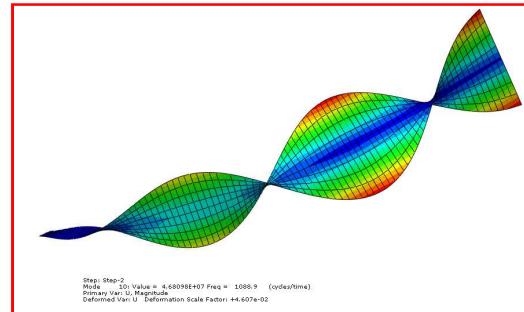
MODO 8



MODO 9



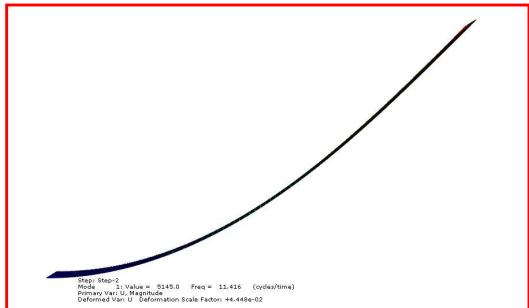
MODO 10



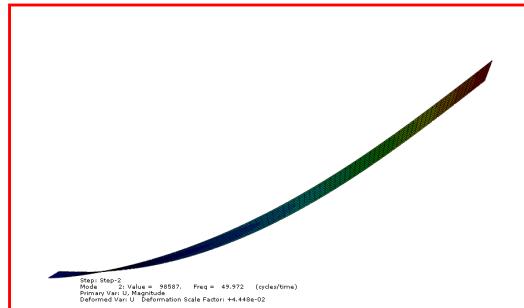
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	10.965	68.895	1.57E-02	1.27E-23	1.14E-01
2	56.784	356.784	8.48E-24	0.10587	6.29E-22
3	61.091	383.846	1.95E-03	1.04E-21	4.77E-02
4	169.630	1065.817	5.65E-03	8.95E-25	1.74E-02
5	268.050	1684.208	9.00E-27	2.03E-02	1.00E-27
6	337.420	2120.072	3.22E-03	2.35E-27	8.29E-03
7	561.550	3528.323	2.61E-03	2.60E-25	4.91E-03
8	624.950	3926.677	2.77E-26	2.44E-02	1.07E-25
9	844.360	5305.270	1.97E-03	1.22E-22	3.22E-03
10	1,088.900	6841.760	4.55E-22	1.07E-02	1.59E-23
		TOTAL	3.11E-02	0.1612	0.19507

**B.1.5. Fuerza 50 N.**

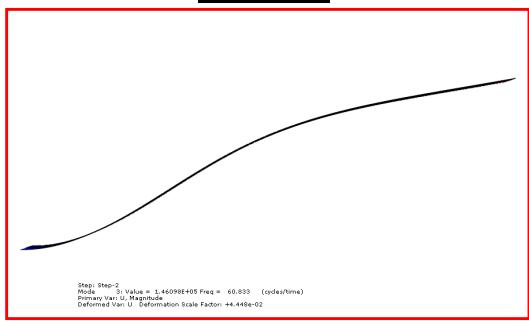
**MODO 1**



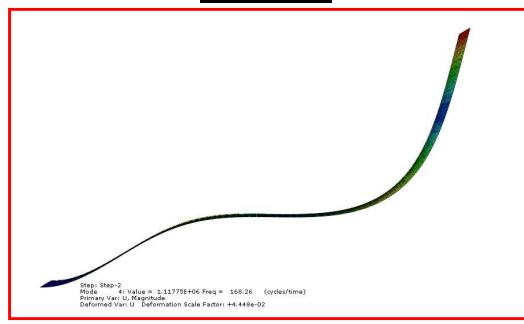
**MODO 2**



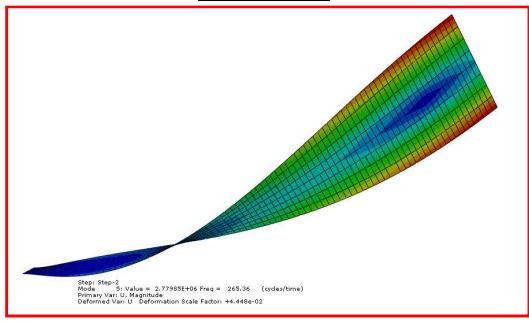
**MODO 3**



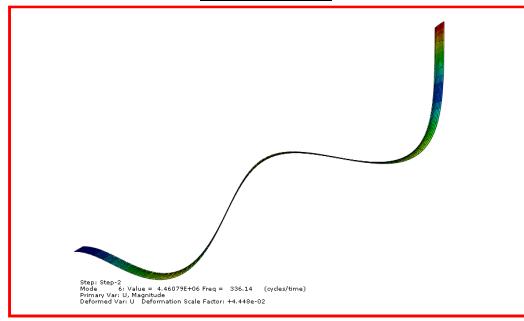
**MODO 4**



**MODO 5**



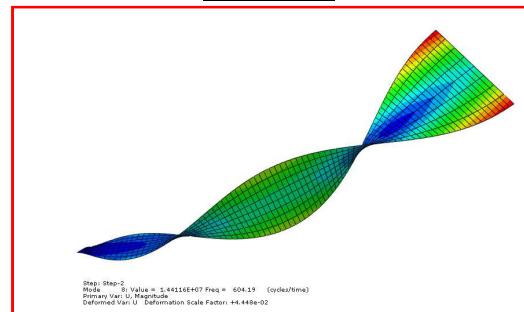
**MODO 6**



MODO 7



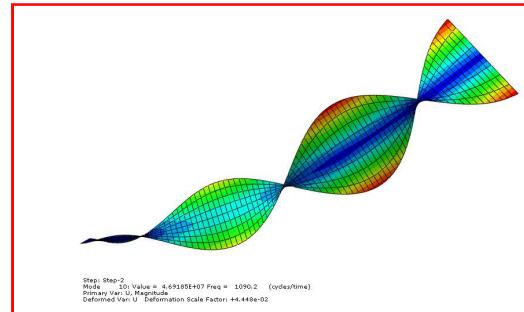
MODO 8



MODO 9



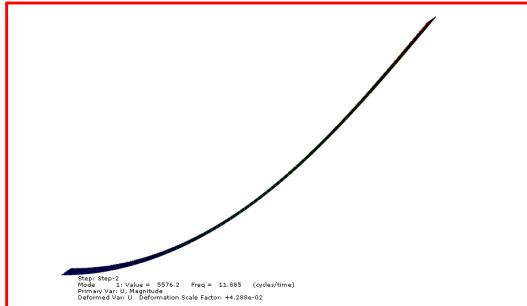
MODO 10



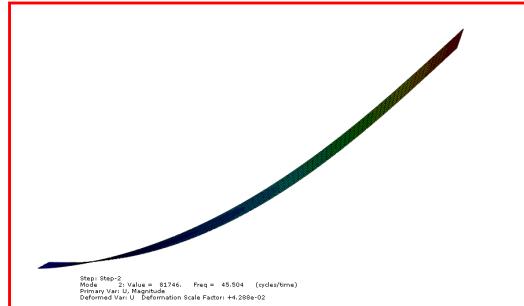
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	11.416	71.729	2.19E-02	2.52E-23	1.08E-01
2	49.972	313.983	2.03E-23	0.10725	2.65E-23
3	60.833	382.225	2.40E-03	2.15E-22	5.10E-02
4	168.260	1057.209	7.17E-03	1.10E-26	1.89E-02
5	265.360	1667.306	1.18E-29	2.04E-02	1.83E-25
6	336.140	2112.030	4.07E-03	1.47E-25	8.76E-03
7	560.180	3519.715	3.28E-03	2.01E-25	5.14E-03
8	604.190	3796.238	2.45E-26	2.44E-02	1.66E-25
9	843.180	5297.856	2.45E-03	1.25E-22	3.34E-03
10	1,090.200	6849.929	9.08E-21	1.02E-02	3.60E-21
		TOTAL	4.12E-02	0.16211	0.19483

**B.1.6. Fuerza 60 N.**

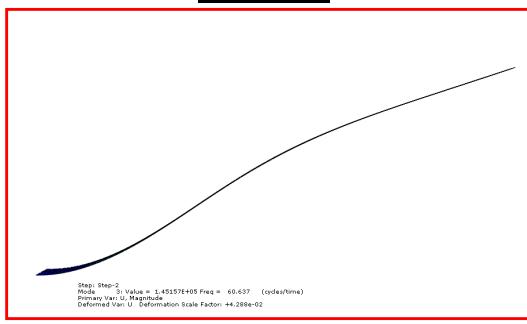
**MODO 1**



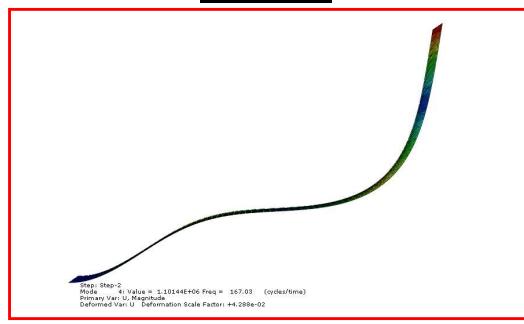
**MODO 2**



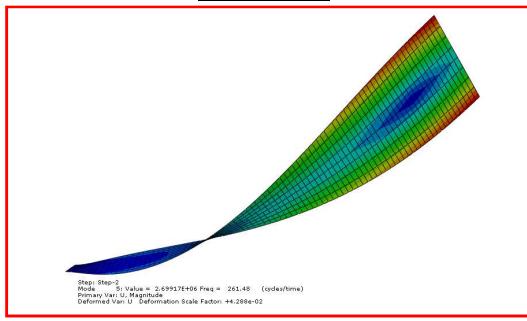
**MODO 3**



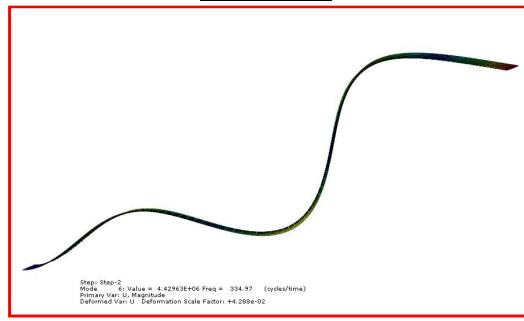
**MODO 4**



**MODO 5**



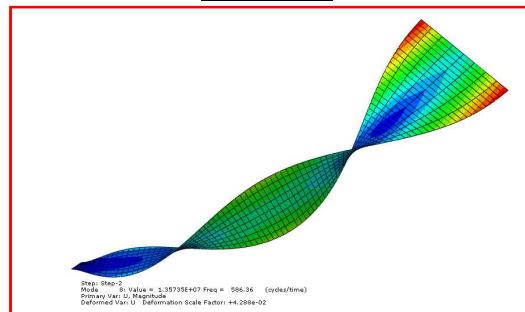
**MODO 6**



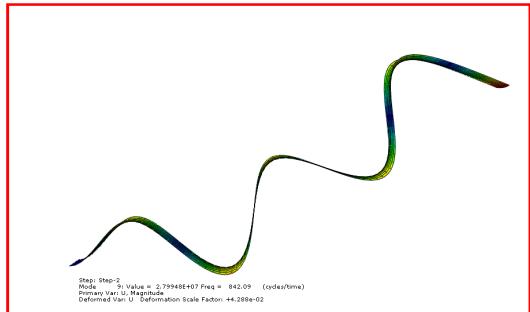
MODO 7



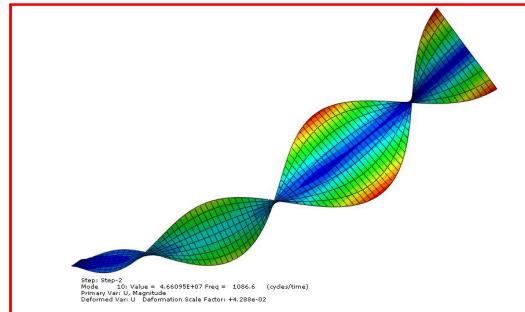
MODO 8



MODO 9



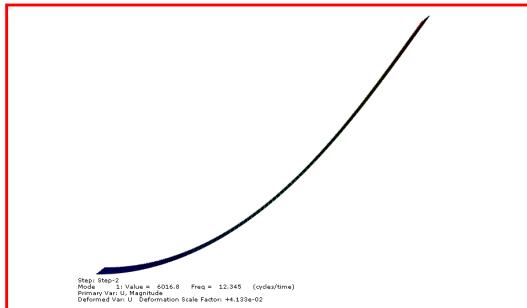
MODO 10



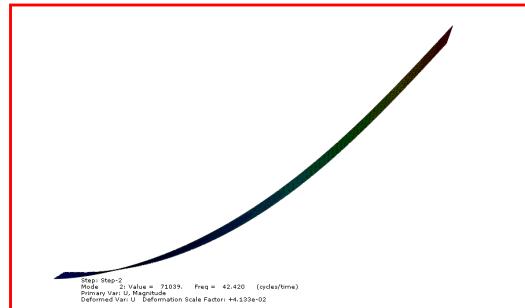
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	11.885	74.676	2.79E-02	1.68E-22	1.02E-01
2	45.504	285.910	2.49E-23	0.10828	3.48E-22
3	60.637	380.994	2.69E-03	6.27E-23	5.42E-02
4	167.030	1049.480	8.35E-03	8.34E-25	2.03E-02
5	261.480	1642.927	3.04E-26	2.08E-02	3.99E-26
6	334.970	2104.679	4.75E-03	4.40E-25	9.23E-03
7	558.920	3511.798	3.79E-03	1.94E-25	5.37E-03
8	586.360	3684.209	7.89E-31	2.39E-02	1.48E-27
9	842.090	5291.008	2.82E-03	5.52E-23	3.46E-03
10	1,086.600	6827.309	4.35E-21	9.60E-03	2.08E-21
		TOTAL	5.03E-02	0.1626	0.19461

**B.1.7. Fuerza 70 N.**

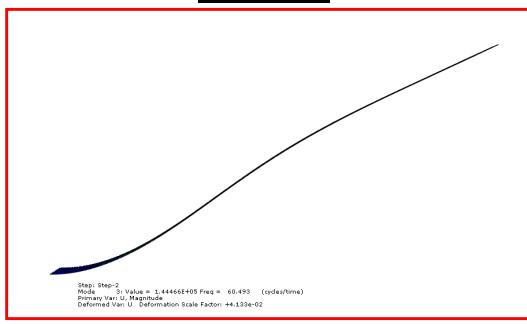
**MODO 1**



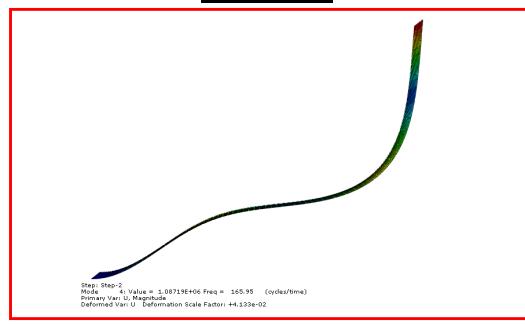
**MODO 2**



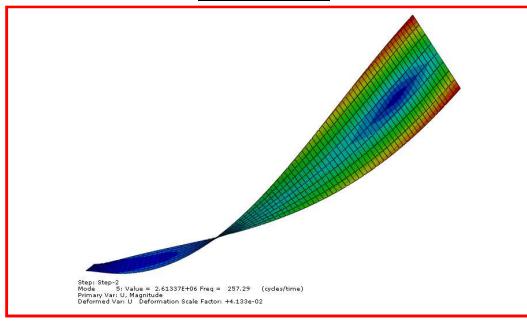
**MODO 3**



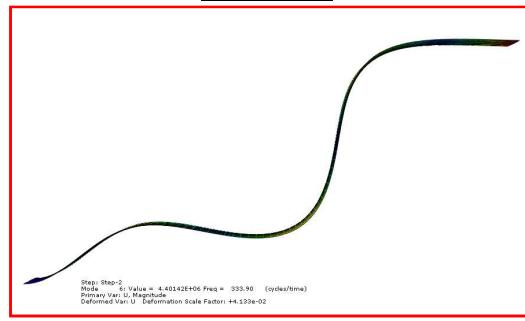
**MODO 4**



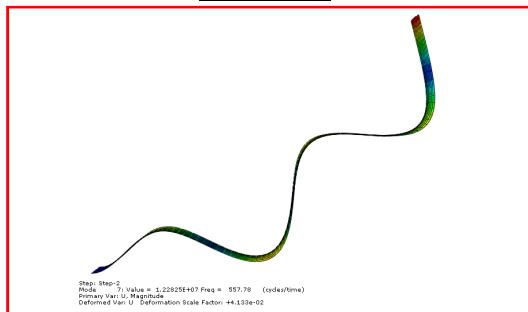
**MODO 5**



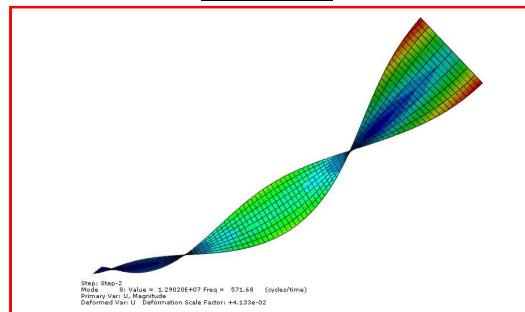
**MODO 6**



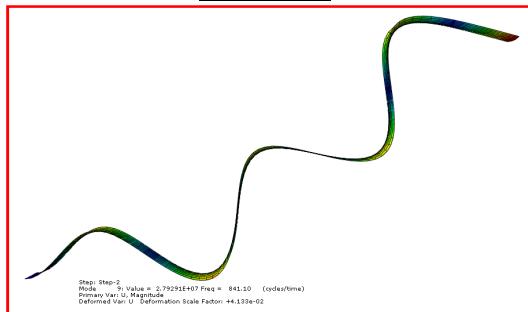
MODO 7



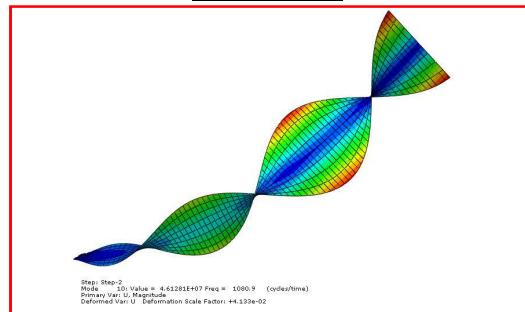
MODO 8



MODO 9



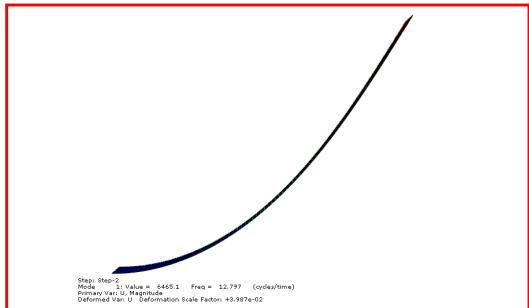
MODO 10



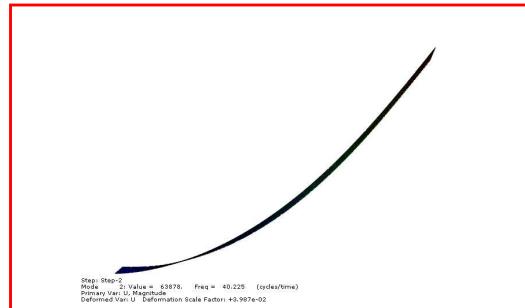
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	12.345	77.566	3.37E-02	3.95E-22	9.67E-02
2	42.420	266.533	1.16E-22	0.1091	4.90E-22
3	60.493	380.089	2.84E-03	2.65E-23	5.72E-02
4	165.950	1042.695	9.23E-03	2.31E-24	2.17E-02
5	257.290	1616.601	8.10E-27	2.14E-02	4.22E-25
6	333.900	2097.956	5.27E-03	4.52E-26	9.67E-03
7	557.780	3504.635	4.18E-03	1.18E-24	5.58E-03
8	571.680	3591.971	4.96E-25	2.33E-02	1.50E-25
9	841.100	5284.787	3.09E-03	1.94E-25	3.58E-03
10	1,080.900	6791.495	1.51E-21	9.19E-03	7.45E-22
		TOTAL	5.83E-02	0.16303	0.19439

**B.1.8. Fuerza 80 N.**

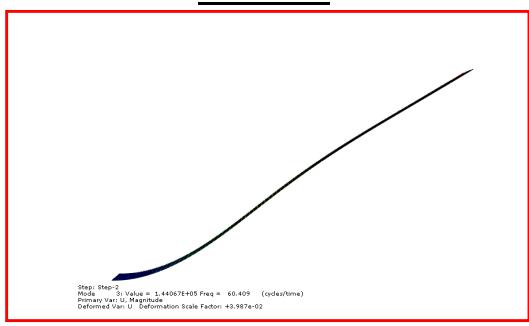
MODO 1



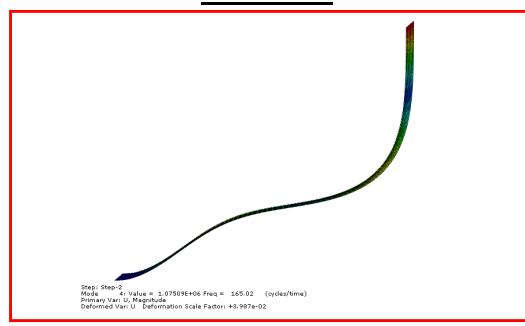
MODO 2



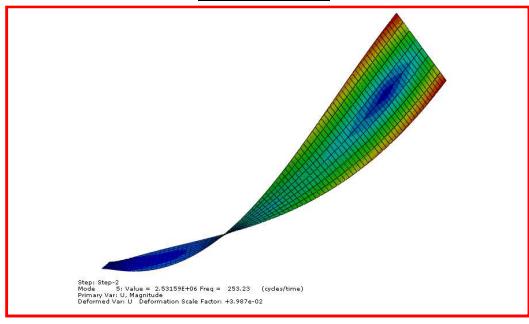
MODO 3



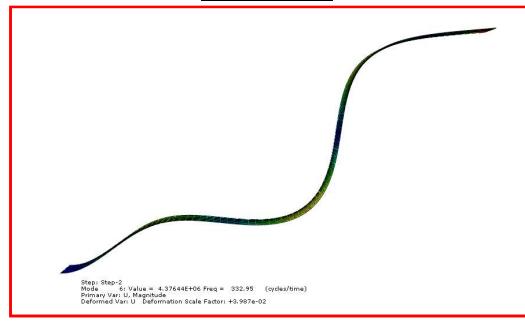
MODO 4



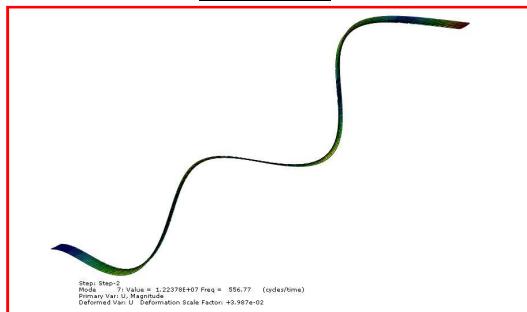
MODO 5



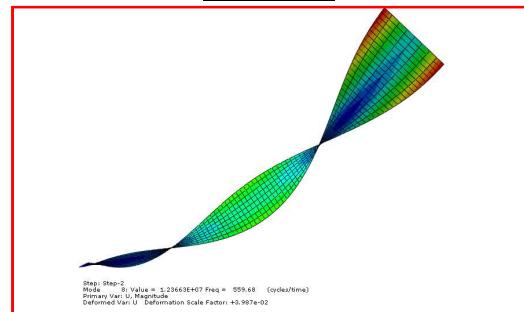
MODO 6



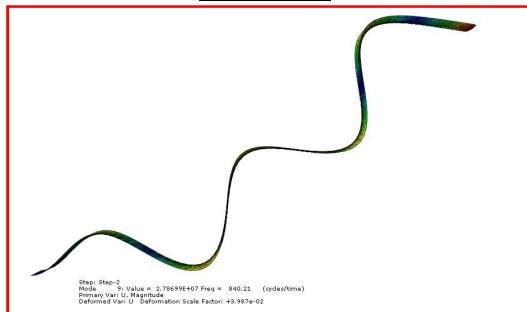
MODO 7



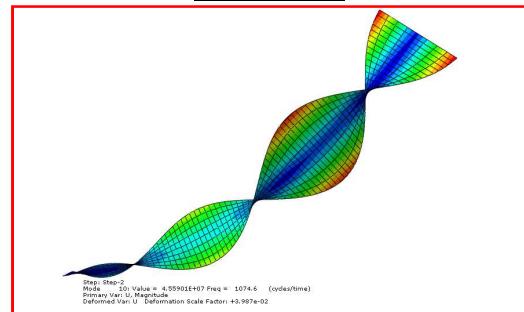
MODO 8



MODO 9



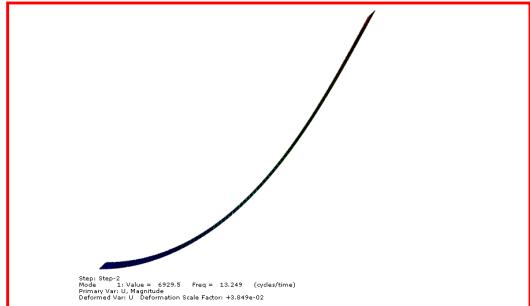
MODO 10



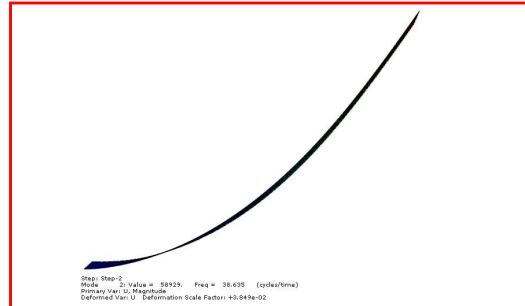
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	12.797	80.406	3.90E-02	3.81E-22	9.17E-02
2	40.225	252.741	1.13E-22	0.10981	5.28E-22
3	60.409	379.561	2.87E-03	4.65E-23	6.00E-02
4	165.020	1036.851	9.85E-03	2.90E-25	2.29E-02
5	253.230	1591.091	2.11E-25	2.20E-02	4.21E-26
6	332.950	2091.987	5.66E-03	2.68E-25	1.01E-02
7	556.770	3498.289	4.47E-03	1.35E-22	5.78E-03
8	559.680	3516.573	2.77E-23	2.27E-02	3.84E-23
9	840.210	5279.195	3.29E-03	1.03E-23	3.68E-03
10	1,074.600	6751.911	1.40E-21	8.91E-03	3.55E-21
		TOTAL	6.52E-02	0.16345	0.19419

**B.1.9. Fuerza 90 N.**

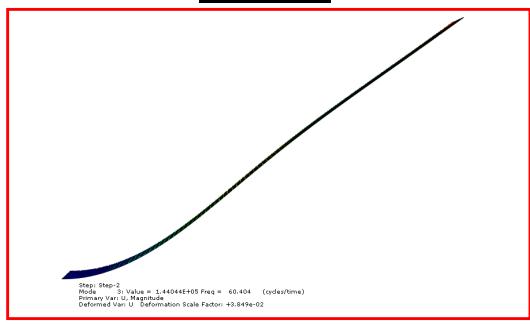
**MODO 1**



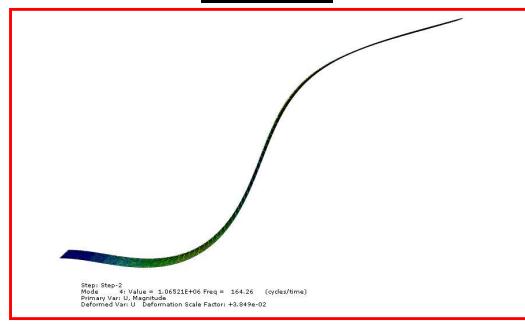
**MODO 2**



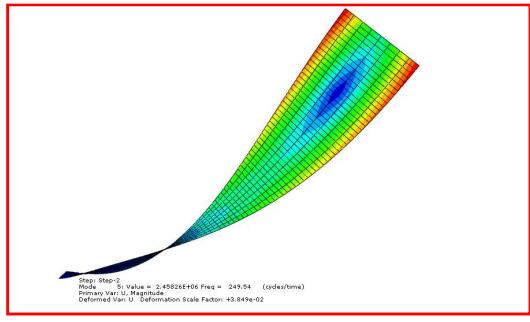
**MODO 3**



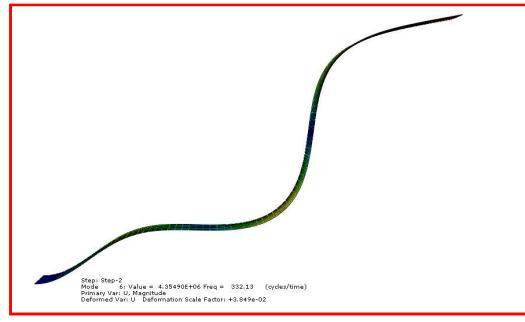
**MODO 4**



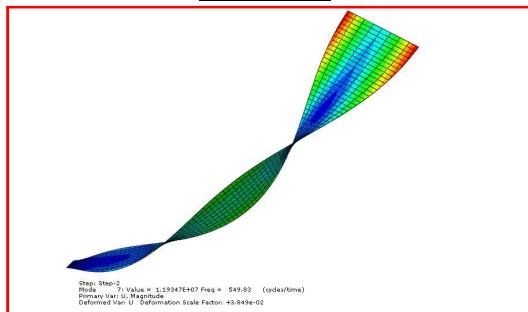
**MODO 5**



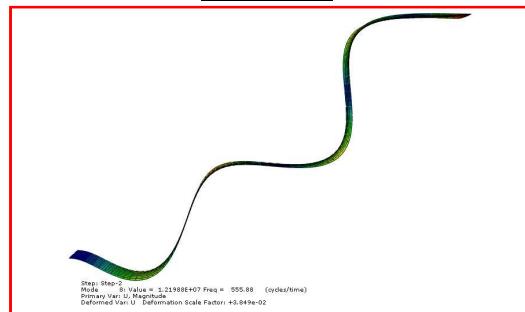
**MODO 6**



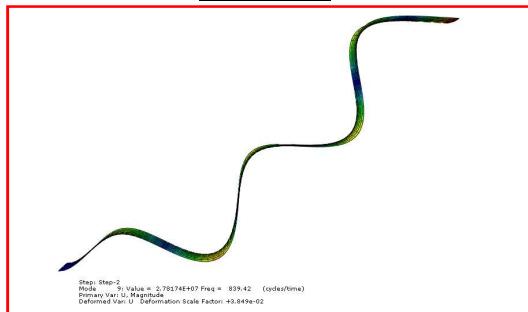
MODO 7



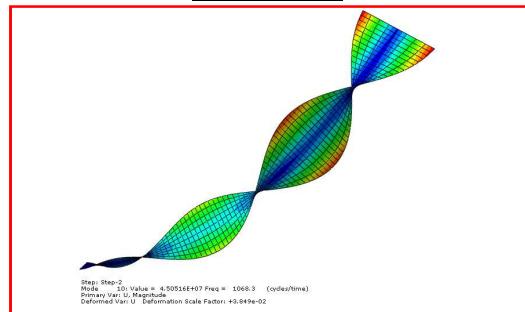
MODO 8



MODO 9



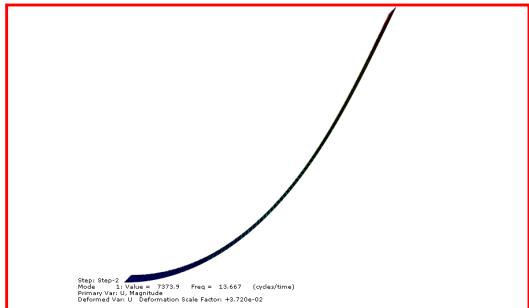
MODO 10



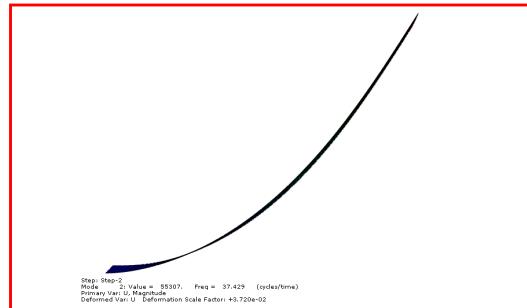
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	13.249	83.246	4.40E-02	2.43E-22	8.72E-02
2	38.635	242.751	7.12E-23	0.11043	3.77E-22
3	60.404	379.530	2.83E-03	5.49E-23	6.25E-02
4	164.260	1032.076	1.03E-02	3.65E-25	2.41E-02
5	249.540	1567.906	9.00E-25	2.25E-02	8.99E-25
6	332.130	2086.834	5.95E-03	9.84E-25	1.05E-02
7	549.830	3454.684	2.41E-24	2.22E-02	3.32E-24
8	555.880	3492.697	4.68E-03	1.44E-23	5.96E-03
9	839.420	5274.231	3.44E-03	3.31E-23	3.78E-03
10	1,068.300	6712.327	7.69E-23	8.71E-03	5.83E-21
		TOTAL	7.12E-02	0.16385	0.194

**B.1.10. Fuerza 100 N.**

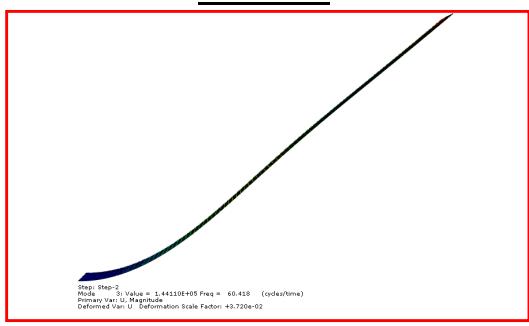
**MODO 1**



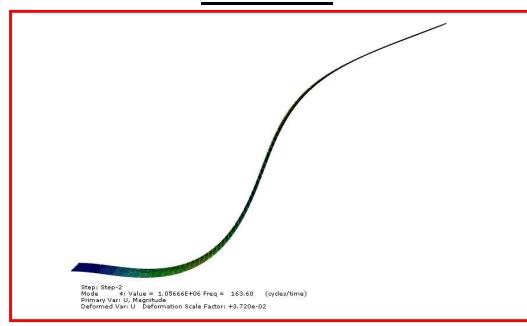
**MODO 2**



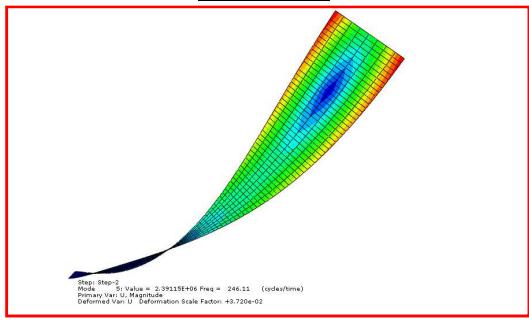
**MODO 3**



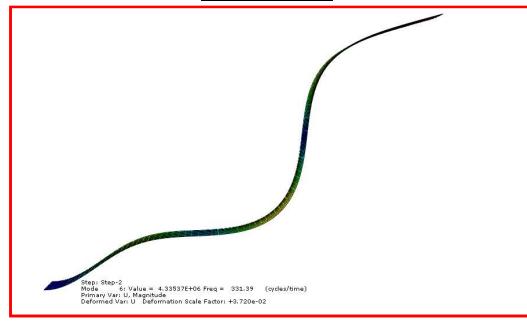
**MODO 4**



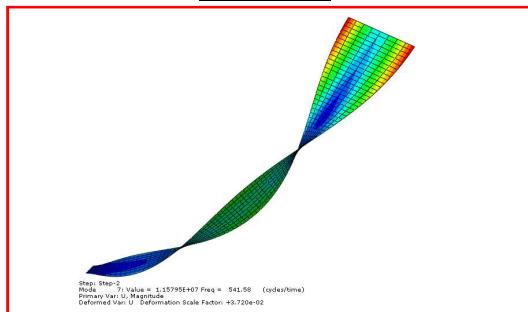
**MODO 5**



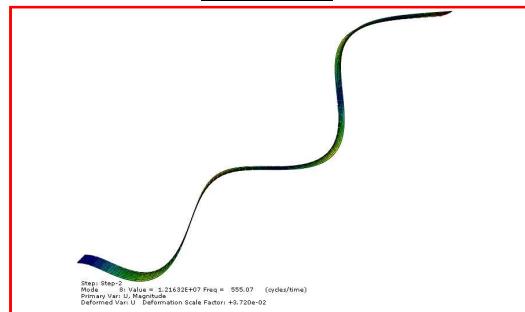
**MODO 6**



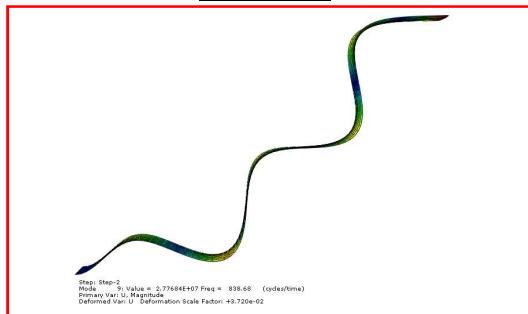
MODO 7



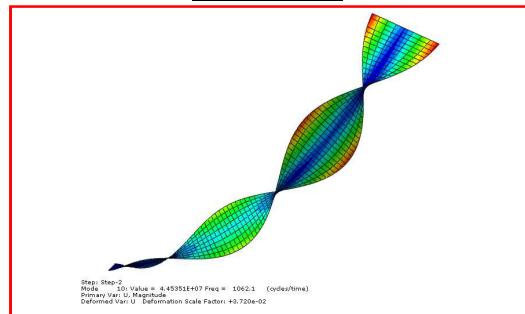
MODO 8



MODO 9

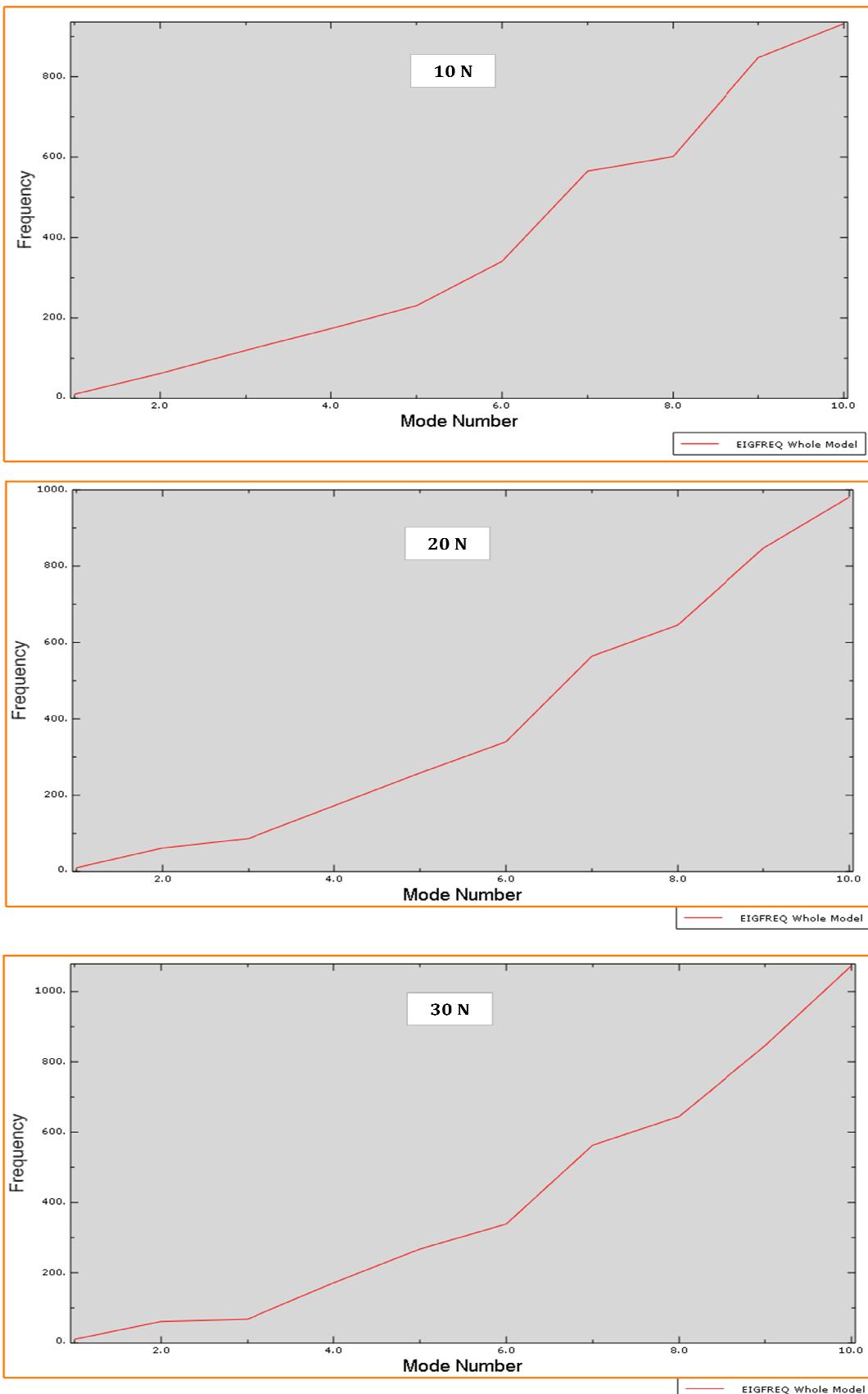


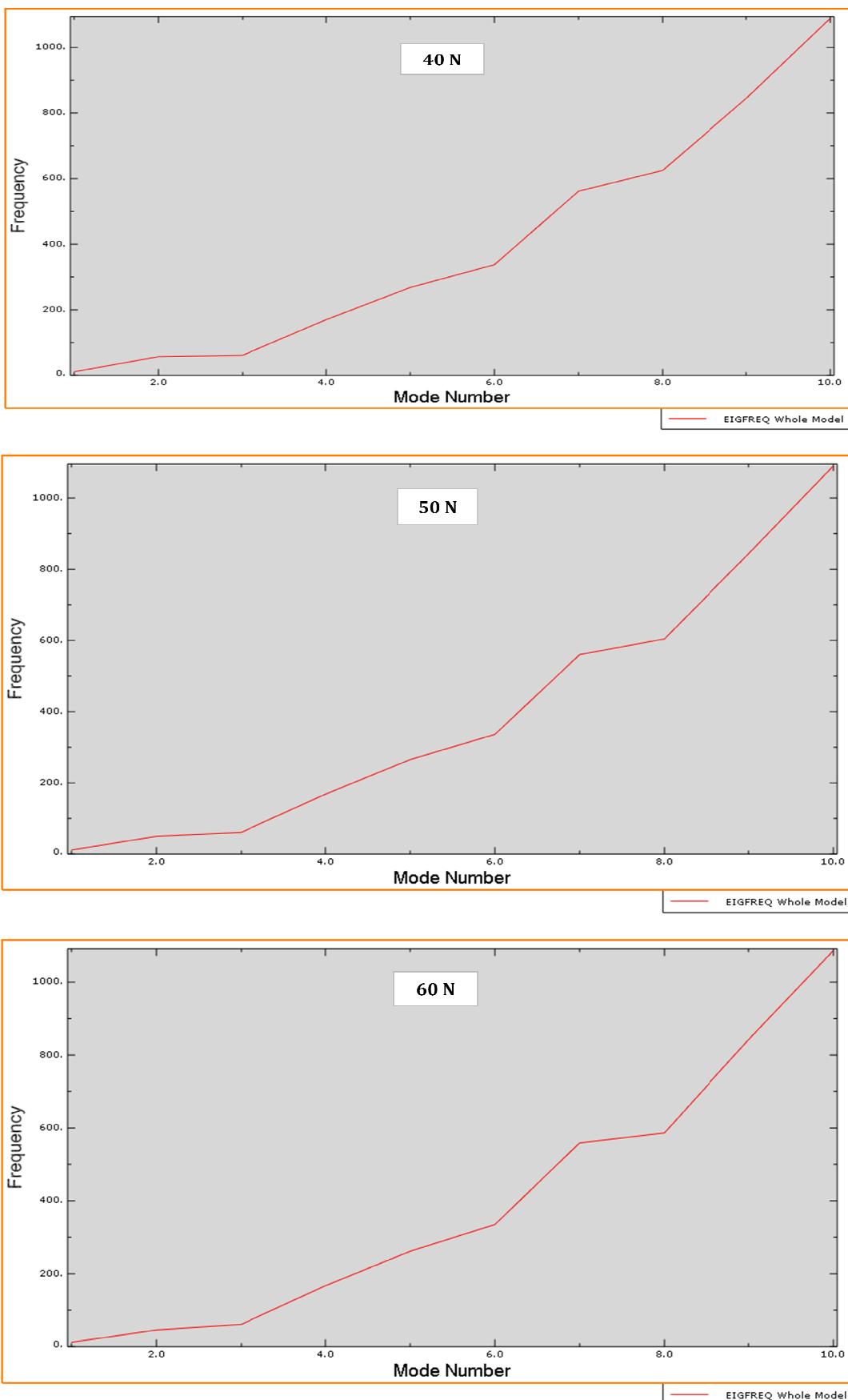
MODO 10

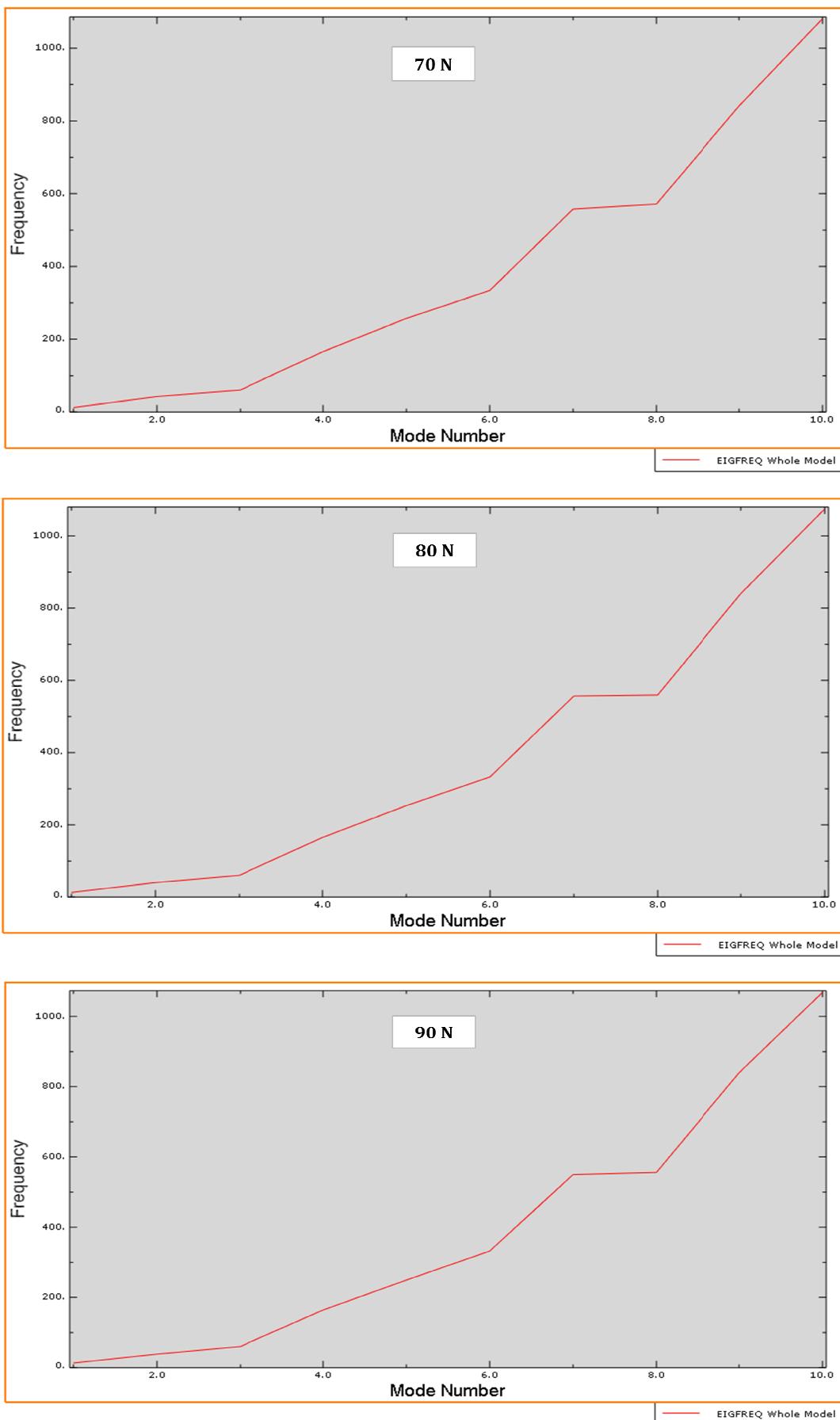


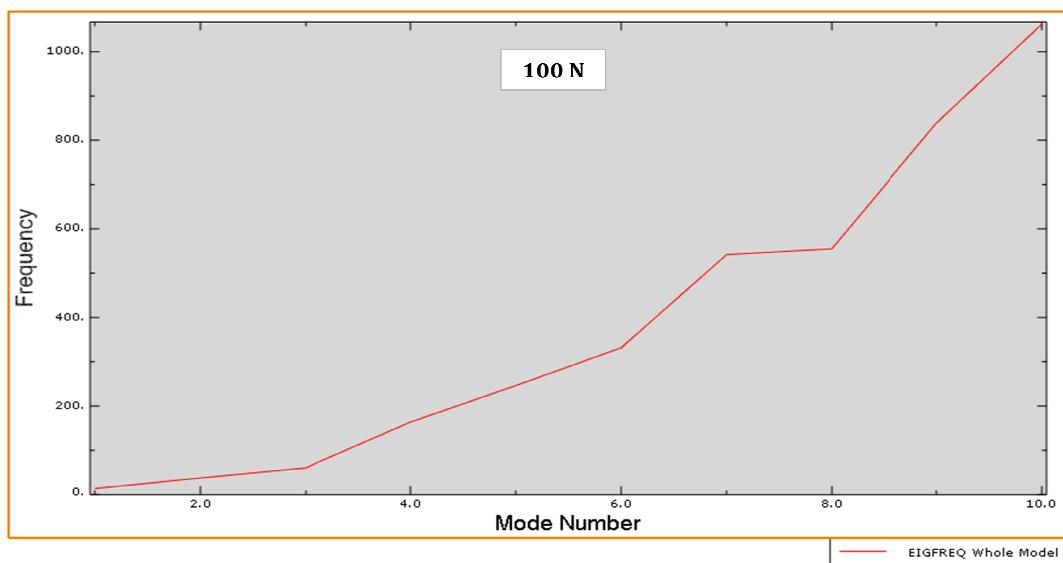
MODO	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)	MASA EFECTIVA		
			X	Y	Z
1	13.667	85.872	4.85E-02	9.17E-24	8.30E-02
2	37.429	235.173	8.27E-25	0.11099	7.97E-23
3	60.418	379.617	2.73E-03	6.74E-23	6.48E-02
4	163.600	1027.929	1.05E-02	1.16E-24	2.52E-02
5	246.110	1546.355	1.30E-27	2.29E-02	7.41E-25
6	331.390	2082.185	6.17E-03	7.21E-27	1.08E-02
7	541.580	3402.847	6.17E-24	2.17E-02	6.71E-24
8	555.070	3487.608	4.84E-03	2.66E-23	6.13E-03
9	838.680	5269.582	3.56E-03	7.92E-23	3.87E-03
10	1,062.100	6673.371	6.74E-22	8.56E-03	8.74E-21
		TOTAL	7.64E-02	0.16423	0.19382

**B.2. Gráficas Modo-Frecuencia.**



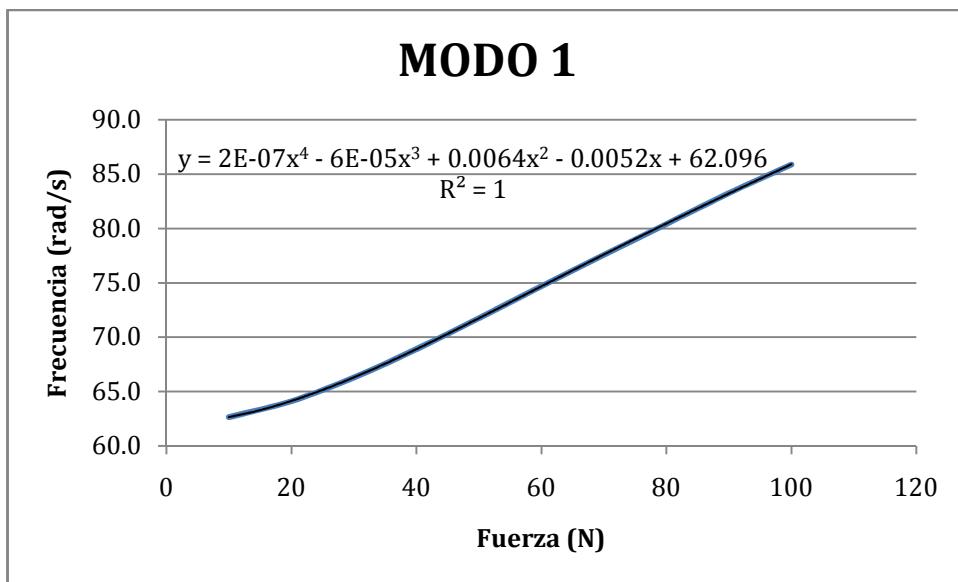






### B.3. Relación Fuerza-Frecuencia del MODO 1.

FUERZA (N)	FRECUENCIA (ciclos/tiempo)	FRECUENCIA (rad/tiempo)
10	9.969	62.635
20	10.202	64.101
30	10.548	66.275
40	10.965	68.895
50	11.416	71.729
60	11.885	74.676
70	12.345	77.566
80	12.797	80.406
90	13.249	83.246
100	13.667	85.872



## **ANEXO C: Análisis Temporal MATLAB.**

### **C.1. Código de MATLAB implementado.**

```
clear all
close all
%Parámetros
N=2^16;                                %Constante
n=[0:N-1];                                %Número de puntos a calcular
t_final=20;                                %Tiempo Final
t=t_final/N*n;                            %Como incrementa el tiempo
%Calculamos la ecuación de segundo orden
[t,y]=ode45(@solucion,t,[0;0;0;0]);      %Nos devuelve un vector
velocidad, aceleración, desplazamiento, Fuerza del Resorte.
%%%%%%%%%%%%%GRÁFICAS%%%%%%%%%%%%%
a=figure;
plot(t,y(:,1));                          %Dibuja Tiempo-Desplazamiento
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Desplazamiento (m)')
b=figure;
plot(t,y(:,2));                          %Dibuja Tiempo-Velocidad
xlabel('Tiempo (s)');
ylabel('Velocidad (m/s)')
d=figure;
plot(y(:,1),y(:,2));                    %Dibuja Desplazamiento-
Velocidad
xlabel('Desplazamiento (m)');
ylabel('Velocidad (m/s)')
%%%%%%%%%%%%%TRANSFORMADA DE FOURIER%%%%%%%%%%%%%
ts=t_final/(N-1);
fs=1/ts;
X=fft(y(:,2),N)/N;
k=fs/2*linspace(0,1,N/2+1);
AmplitudEspectro=abs(X);
FrecuenciaEjes=0:fs/2;
g=figure;
plot(FrecuenciaEjes,AmplitudEspectro(1:fs/2+1));
title('Transformada de Fourier');
xlabel('Frecuencia');
ylabel('Amplitud (velocidad)');
%Create axes

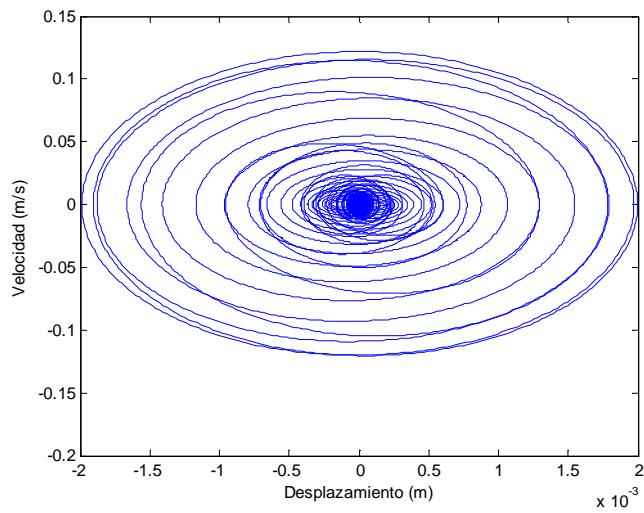
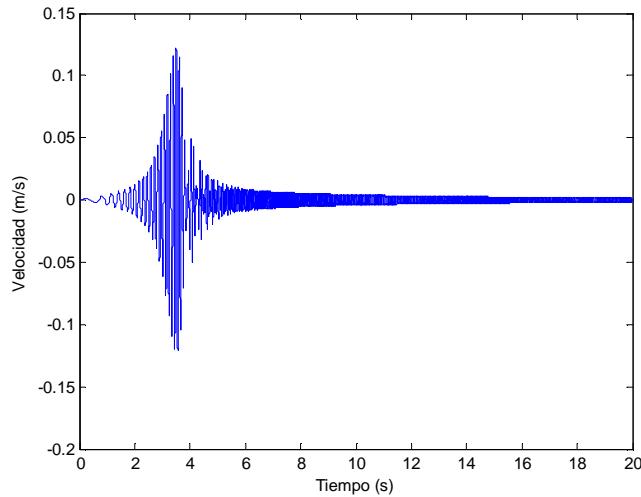
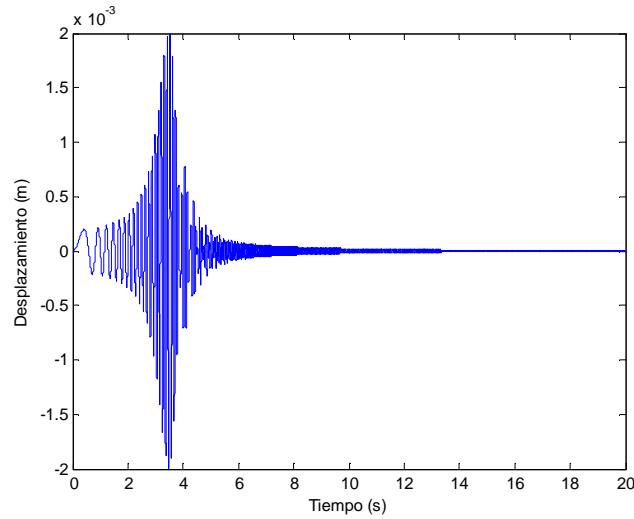
%Create semilog
semilogy(k,2*abs(X(1:N/2+1)), 'Color',[1 0 0]);
```



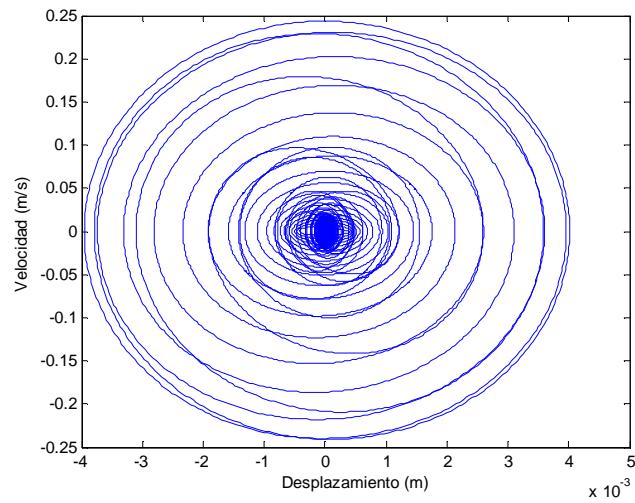
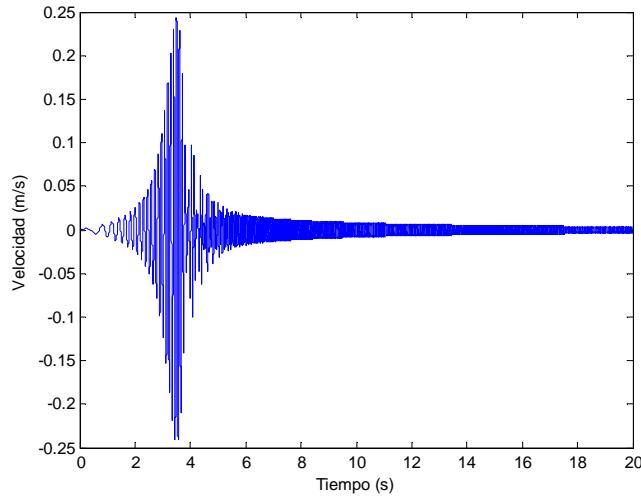
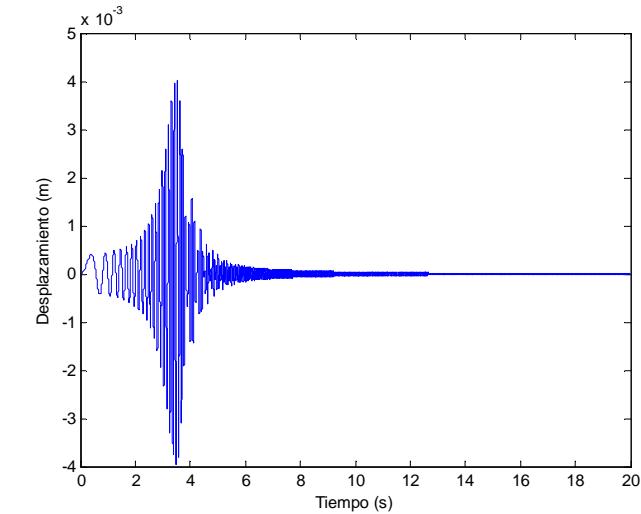
Esta codificación siguiente es una función a parte que es llamada por la anterior.

```
function du = solucion(t, y )
%parametros ecuaciones
wexcitacion_inicio=0;
wexcitacion_final=30;
t_final=20;
wexcitacion=wexcitacion_inicio+(t*(wexcitacion_final-
wexcitacion_inicio)/t_final);
masa=(-0.5378*y(1)^2+0.0151*y(1)+0.1276);
K0=494.9;
K1=12.034;
K2=1254.4;
K3=1128.3;
K4=-3770.4;
amortiguamiento=0.005*(4*(K0+K1*abs(y(1))+K2*abs((y(1)^2))+K3*abs(
(y(1)^3))+K4*abs((y(1)^4)))/masa)^0.5;
Fuerza=2.0;
%%%%%%%%%%%%%
Fresorte=(K0+K1*abs(y(1))+K2*abs((y(1)^2))+K3*abs((y(1)^3))+K4*abs(
((y(1)^4)))*y(1);
du=zeros(4,1);
du(1)=y(2);
du(2)=((Fuerza*(sin(2*pi*wexcitacion*t)))-(Fresorte)-
(amortiguamiento*y(2)))/masa;
end
```

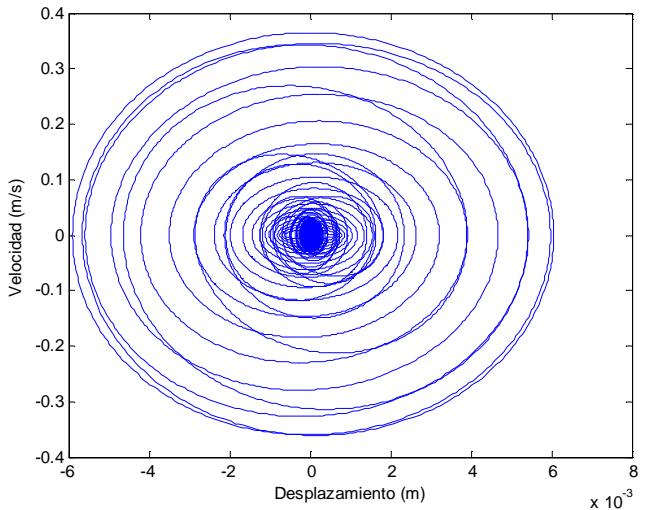
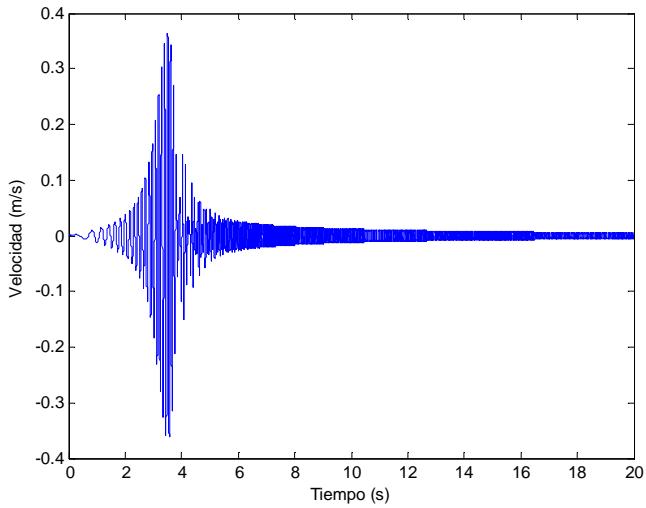
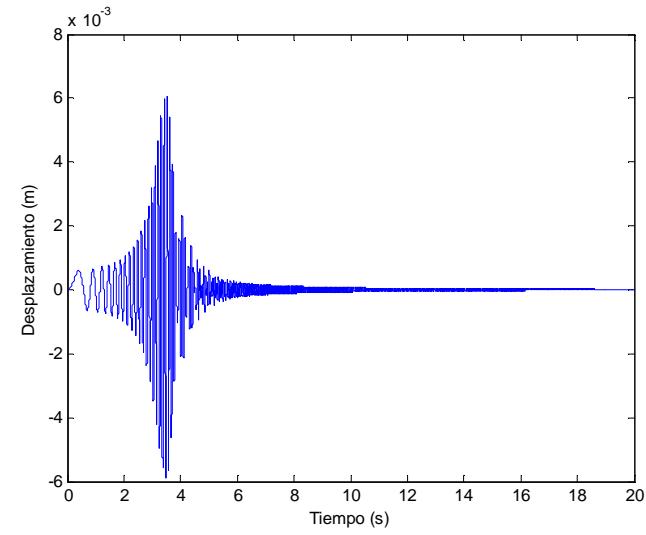
## C.2. Fuerza de 0.1 N.



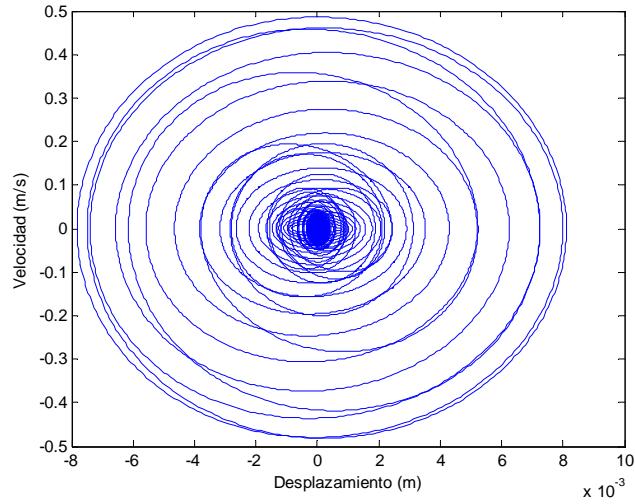
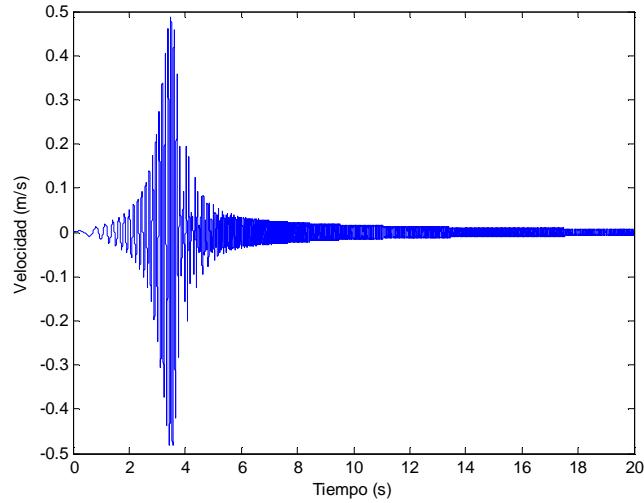
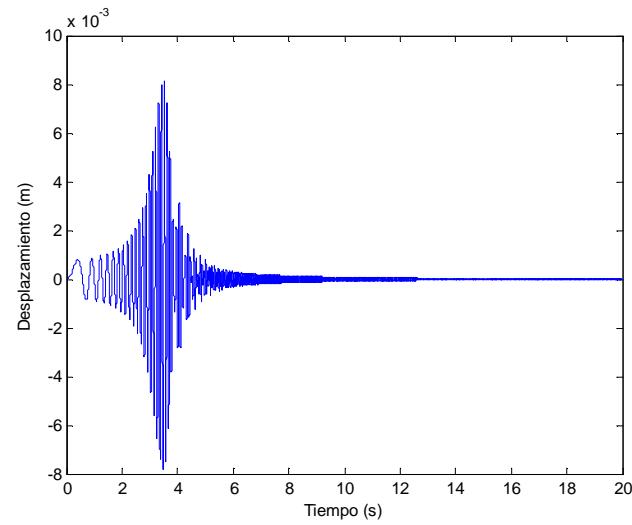
### C.3. Fuerza de 0.2 N.



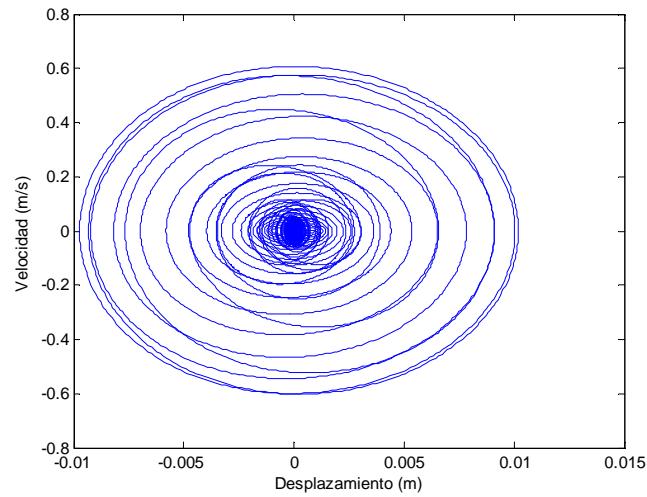
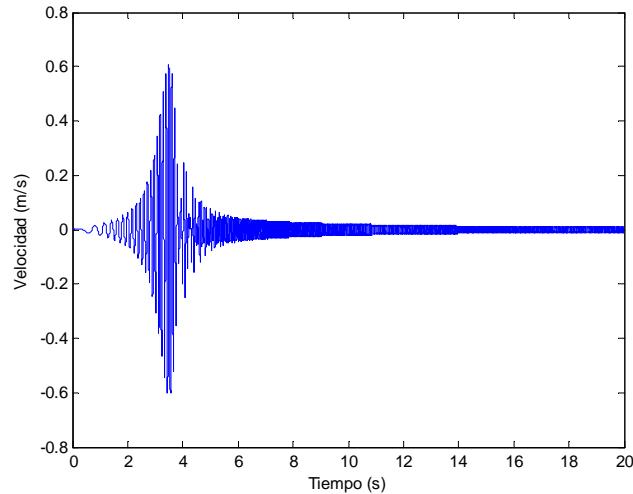
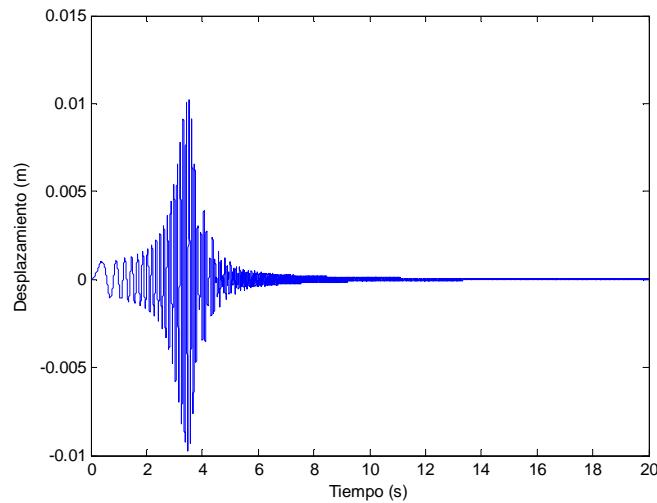
#### C.4. Fuerza de 0.3 N.



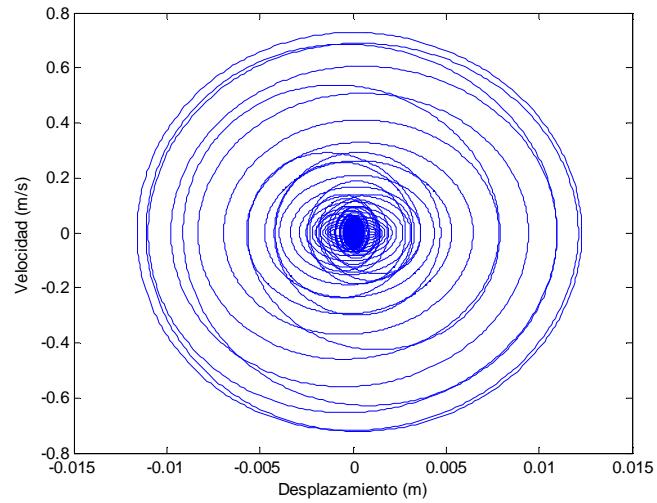
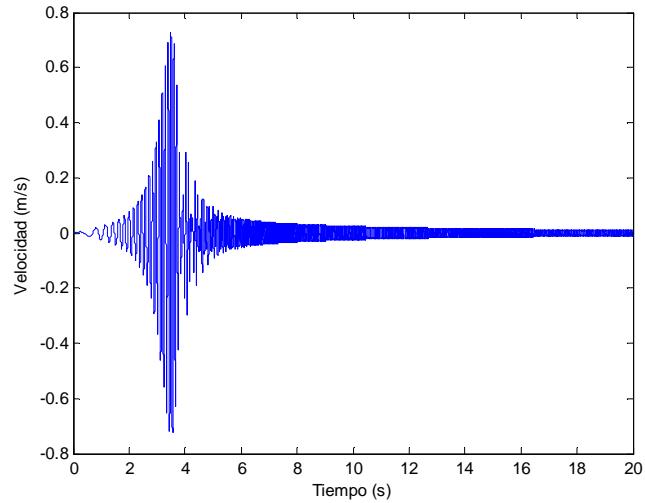
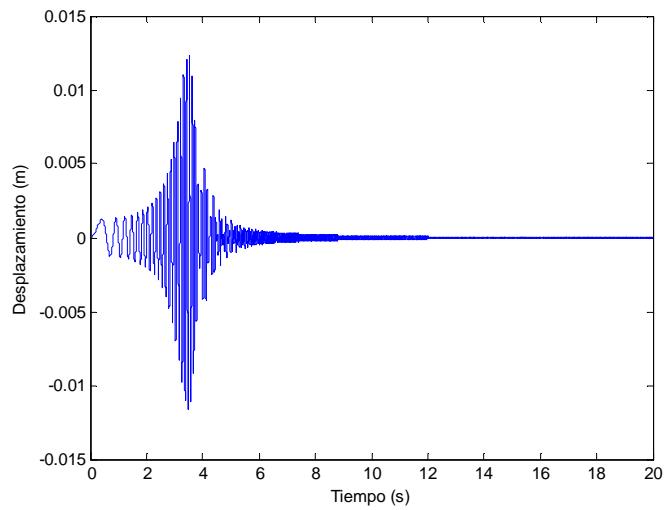
### C.5. Fuerza de 0.4 N.



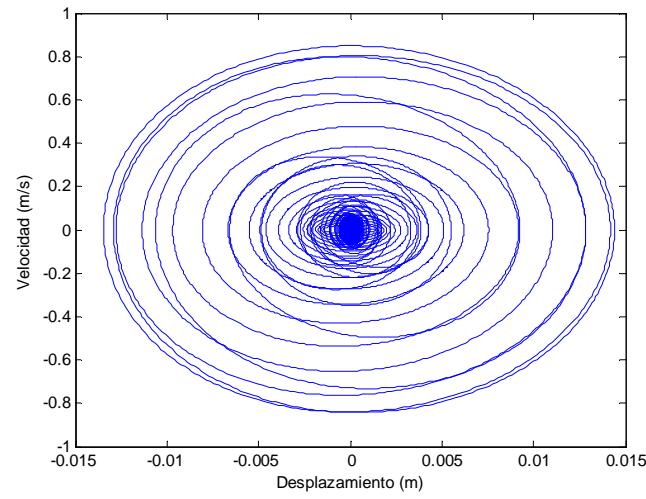
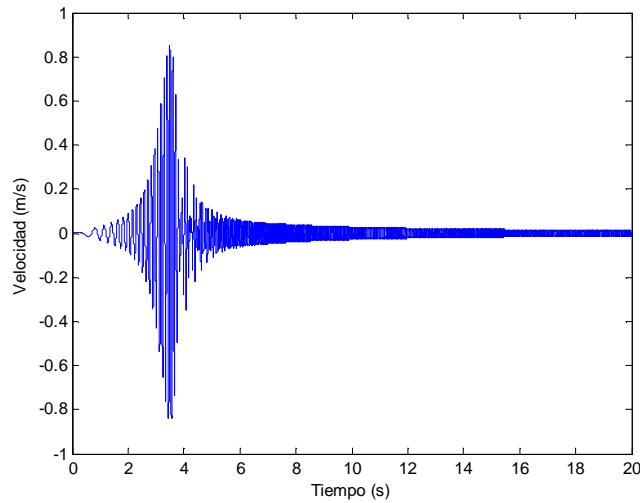
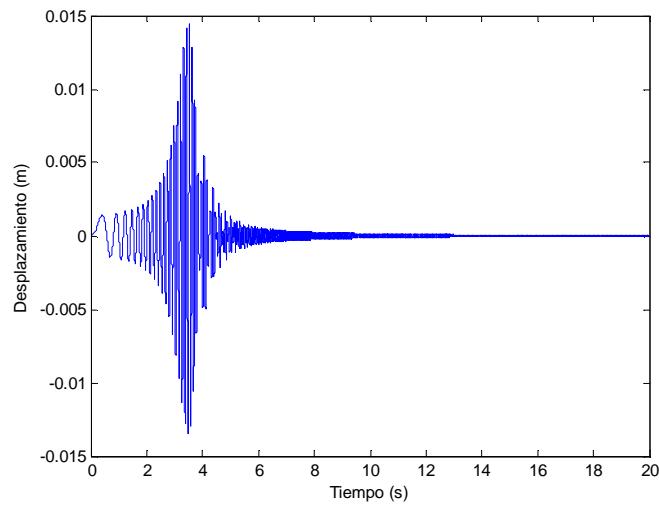
### C.6. Fuerza de 0.5 N.



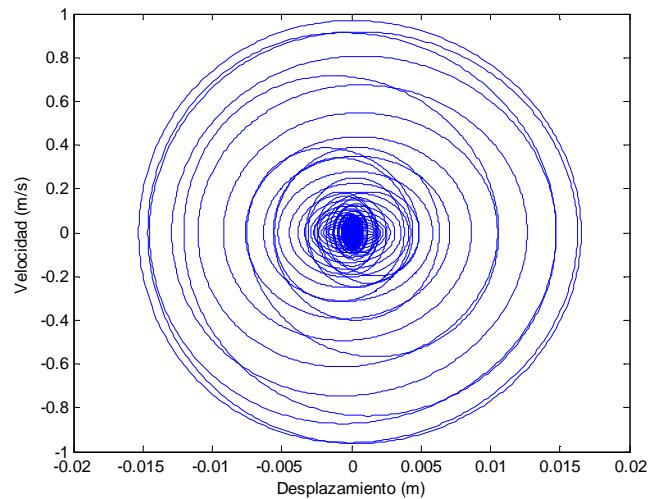
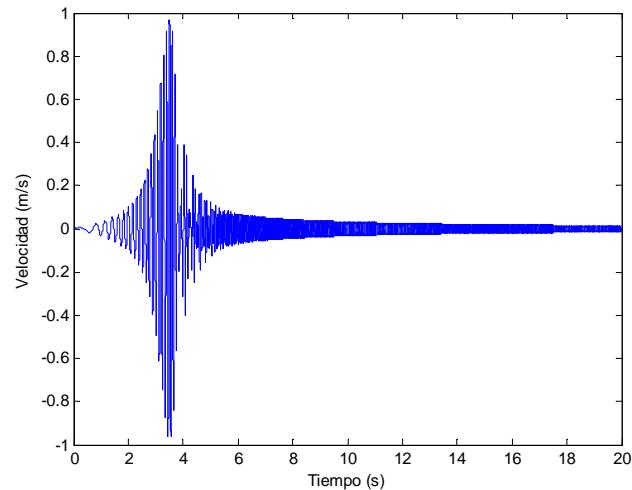
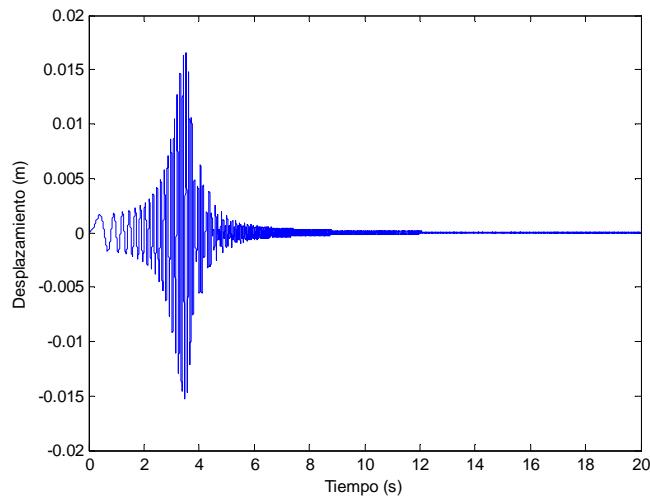
### C.7. Fuerza de 0.6 N.



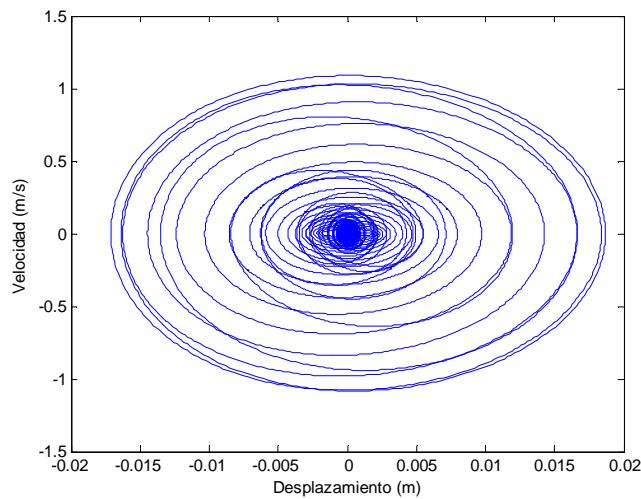
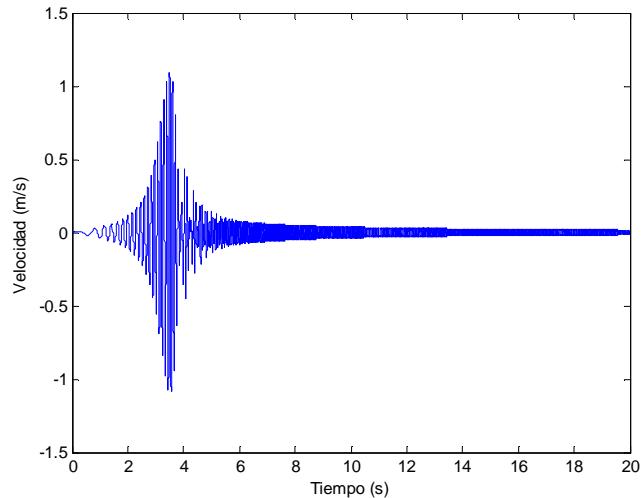
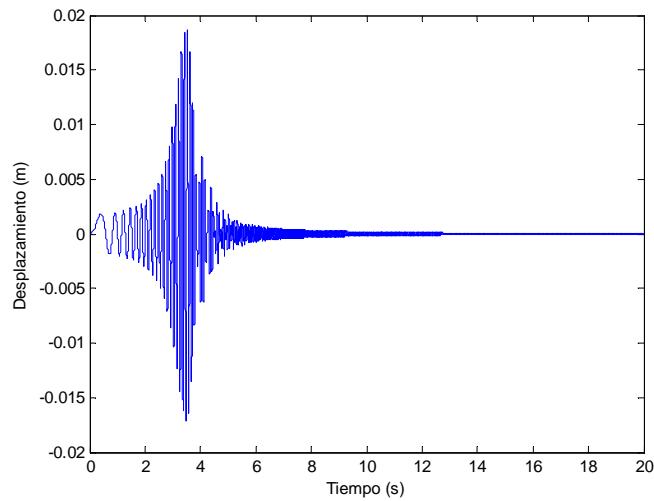
### C.8. Fuerza de 0.7 N.



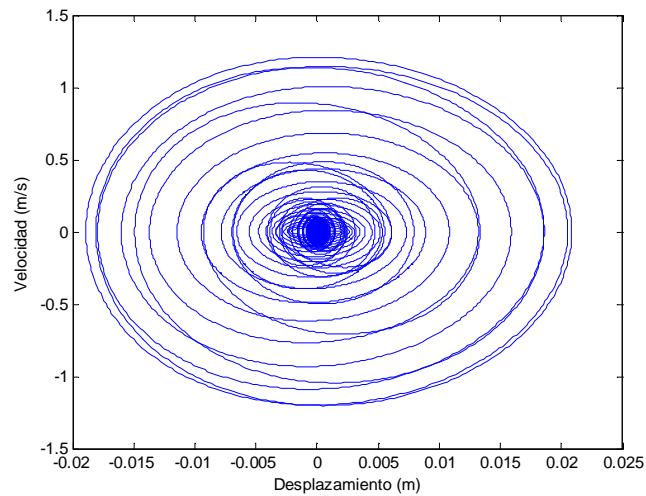
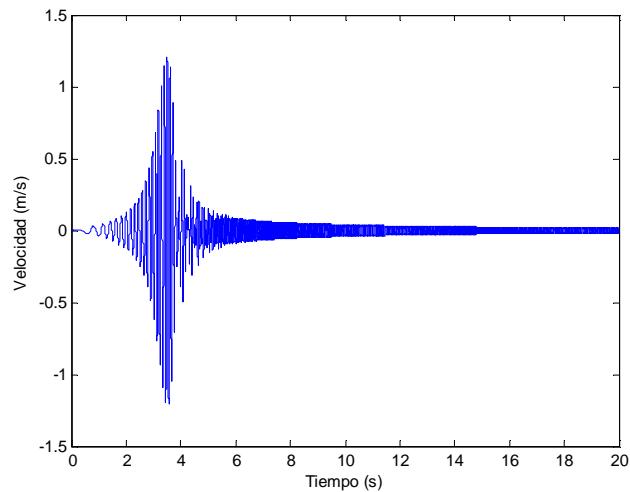
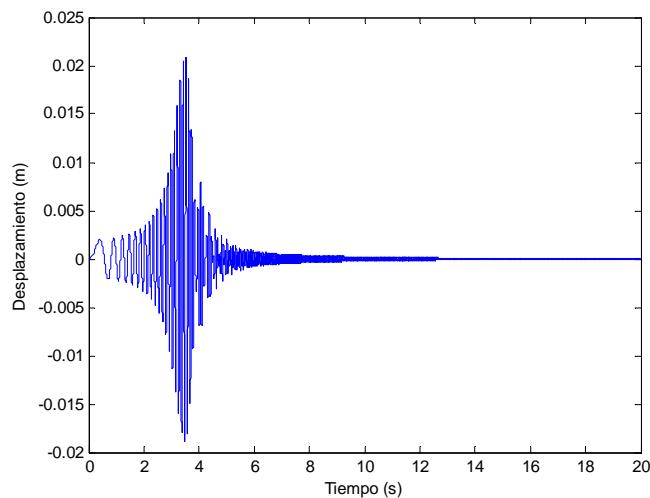
### C.9. Fuerza de 0.8 N.



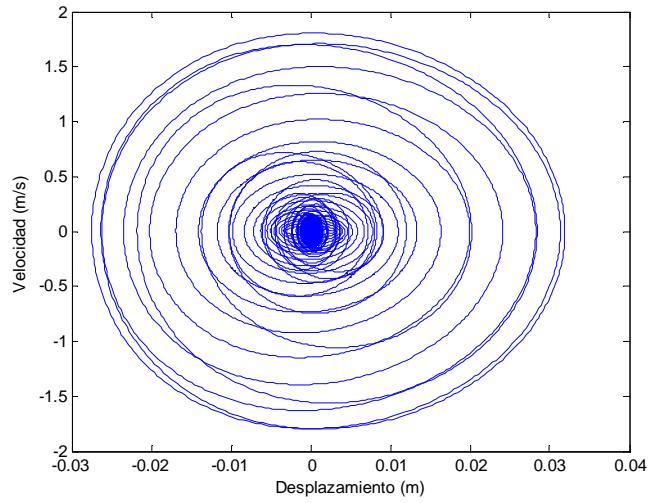
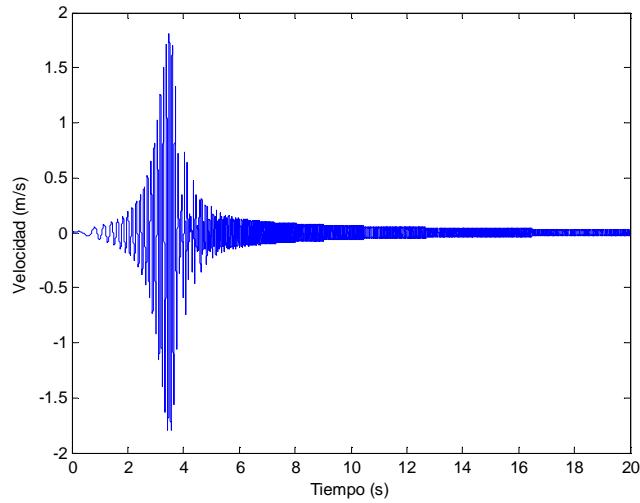
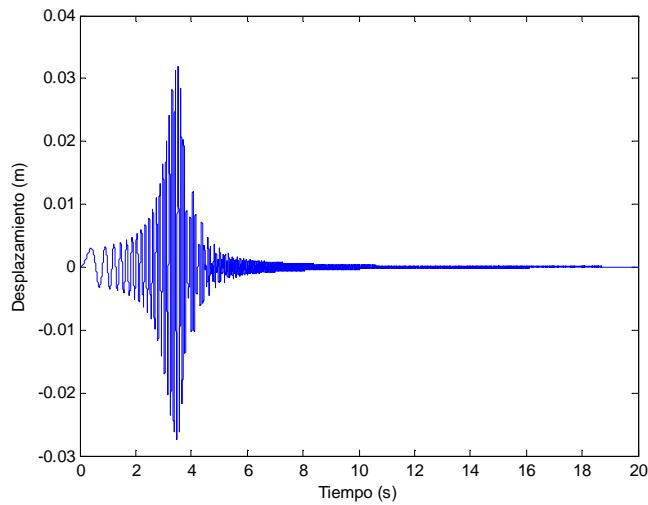
**C.10. Fuerza de 0.9 N.**



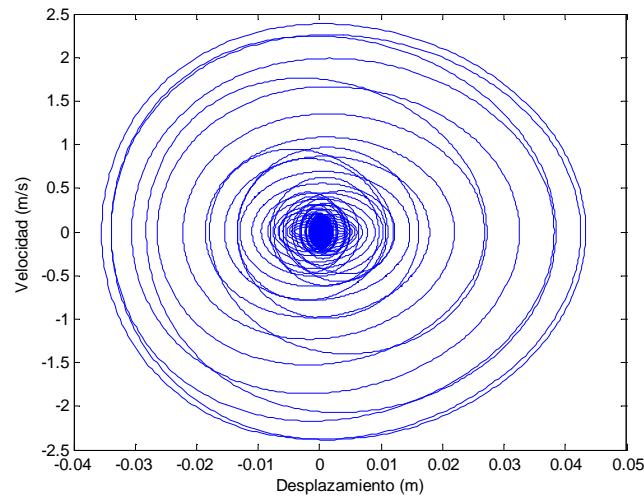
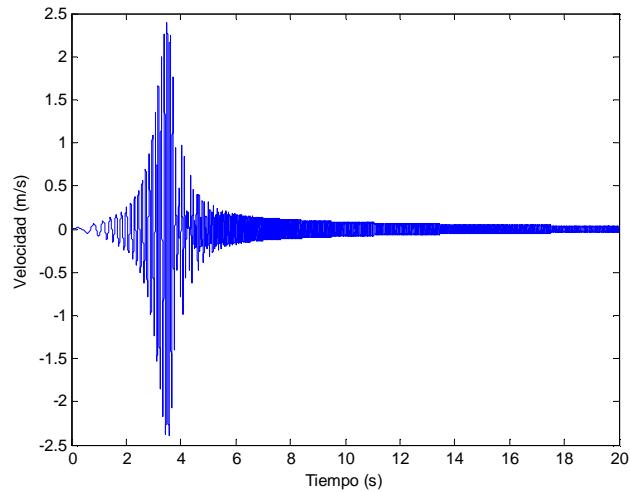
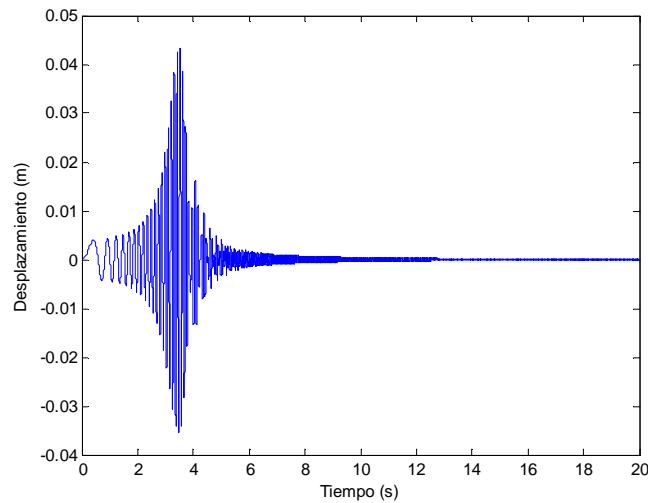
**C.11. Fuerza de 1 N.**



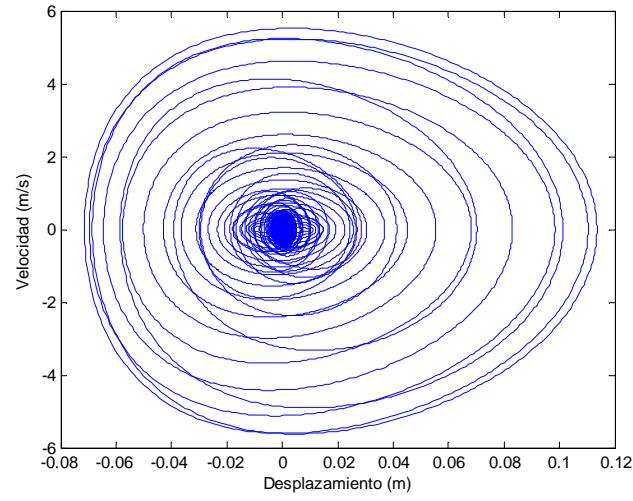
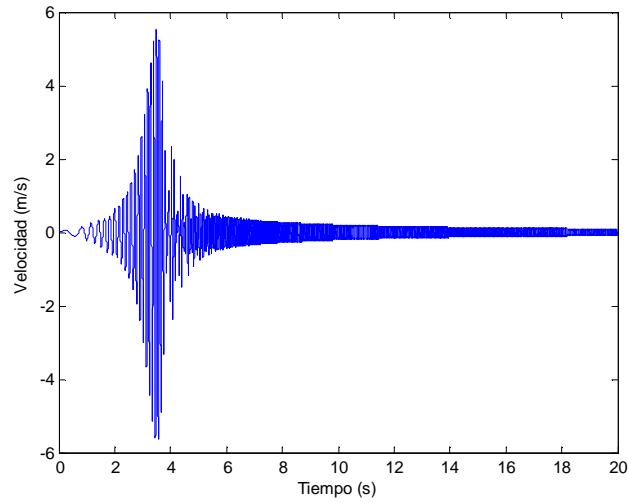
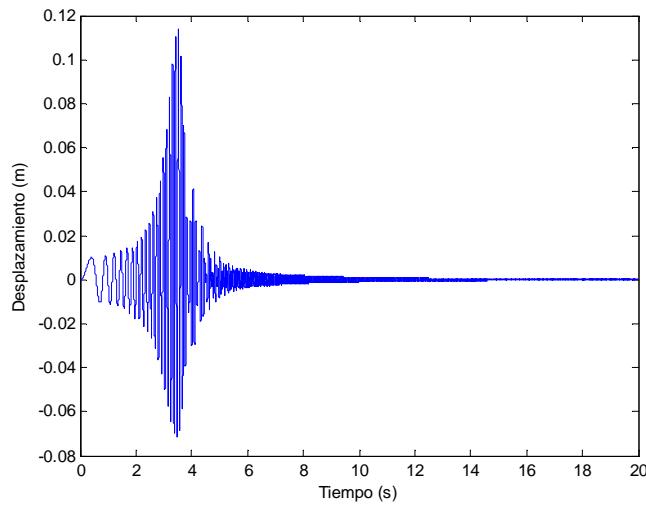
**C.12. Fuerza de 1.5 N.**



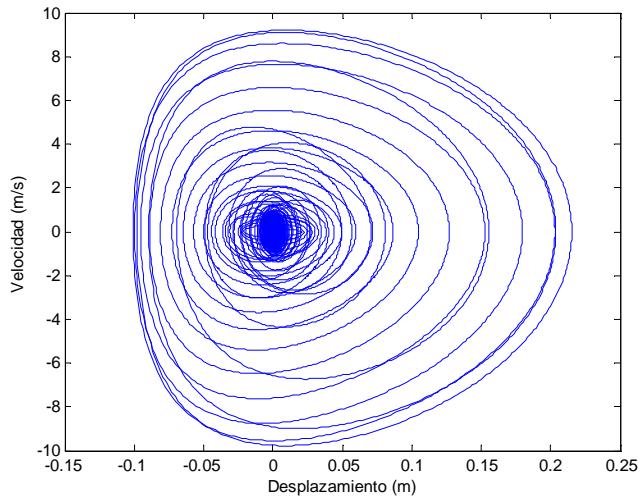
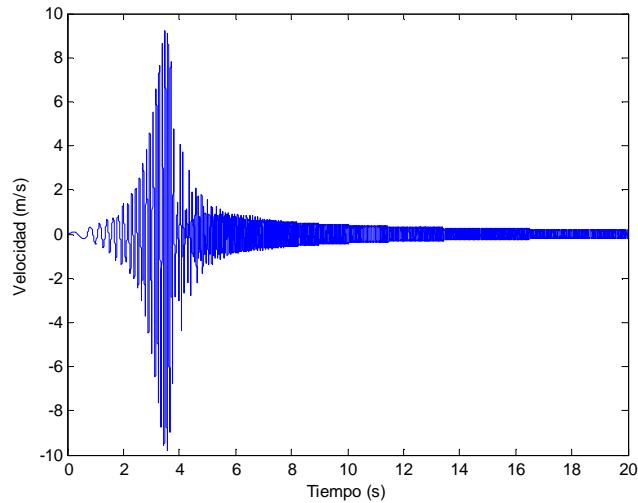
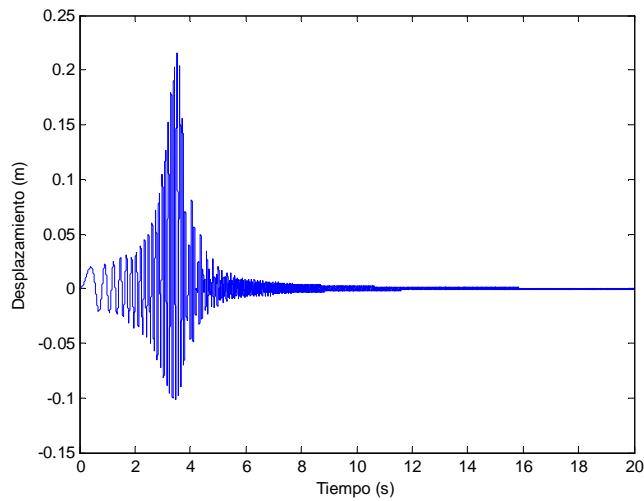
**C.13. Fuerza de 2 N.**



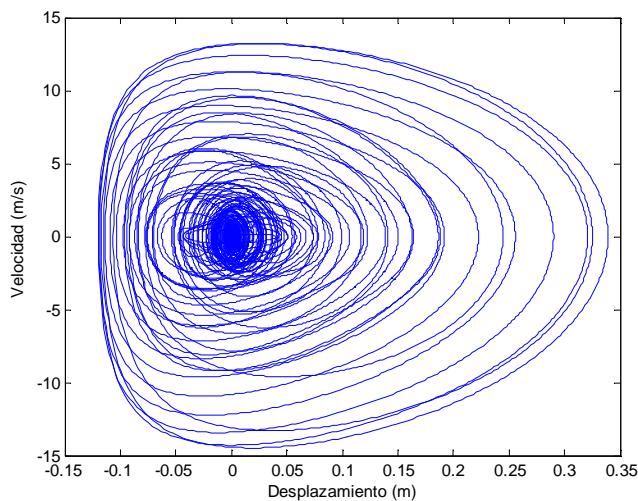
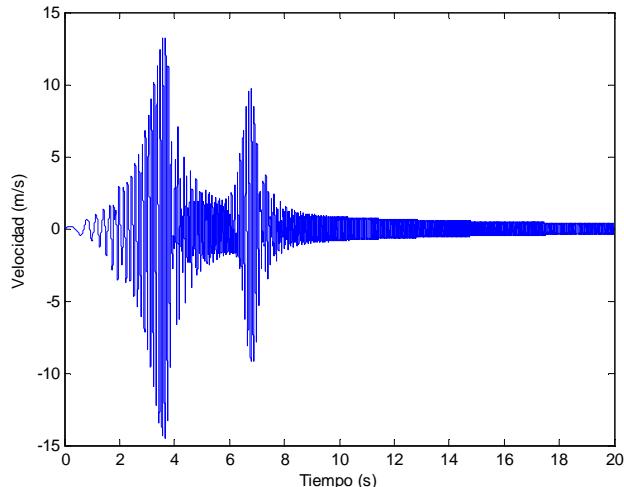
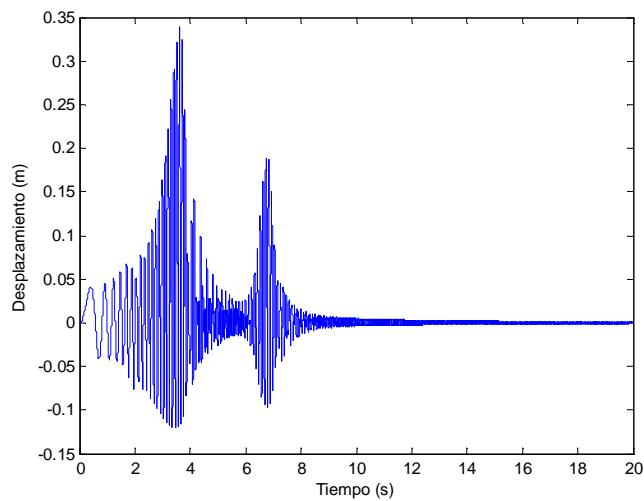
**C.14. Fuerza de 5 N.**



**C.15. Fuerza de 10 N.**

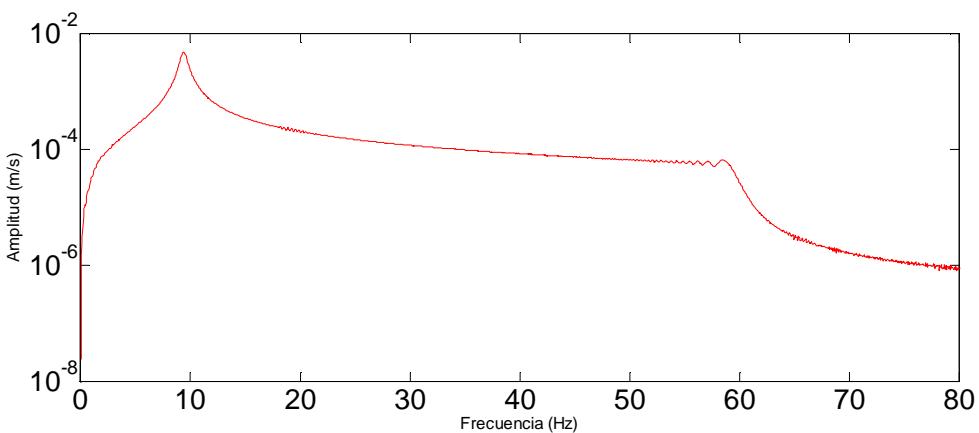


**C.16. Fuerza de 20 N.**

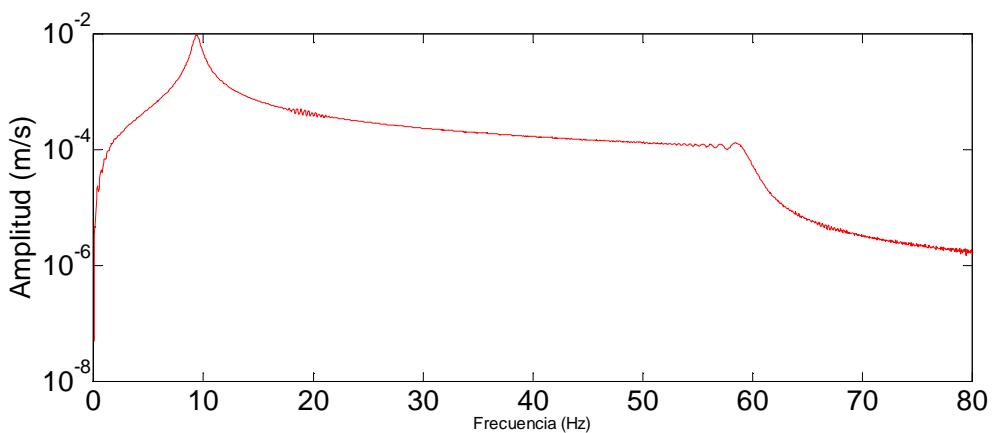


## **ANEXO D: Análisis Frecuencial MATLAB.**

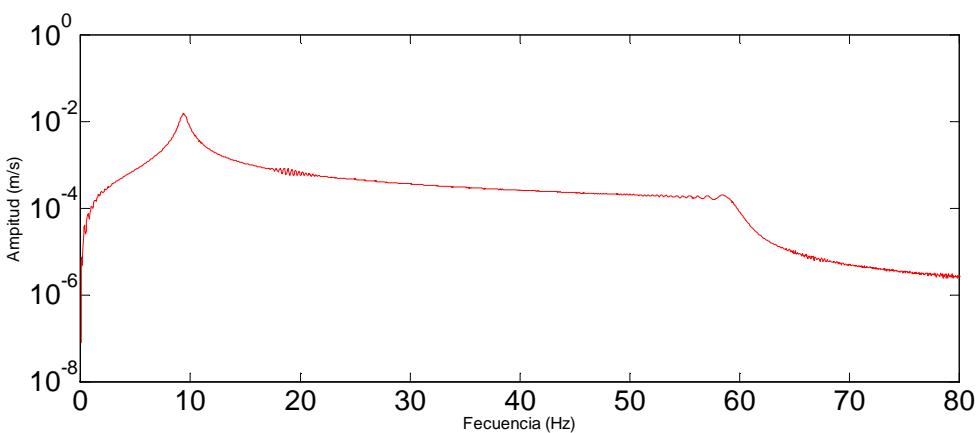
### **D.1. Fuerza de 0.1 N.**



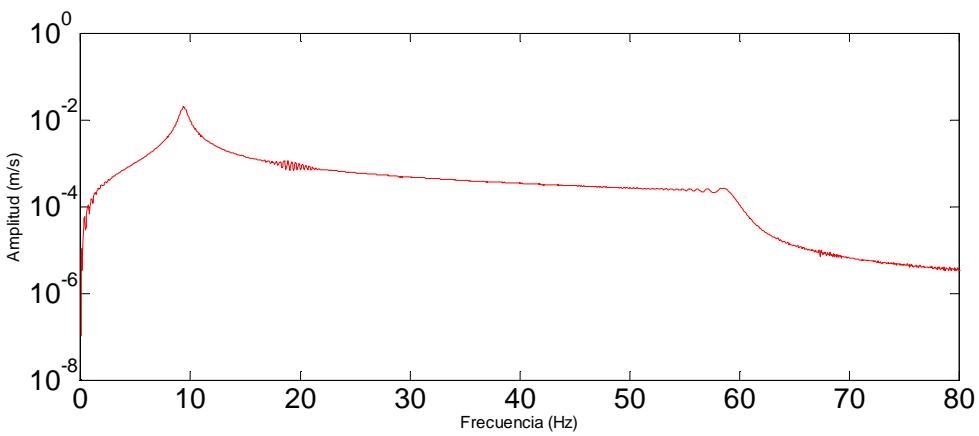
### **D.2. Fuerza de 0.2 N.**



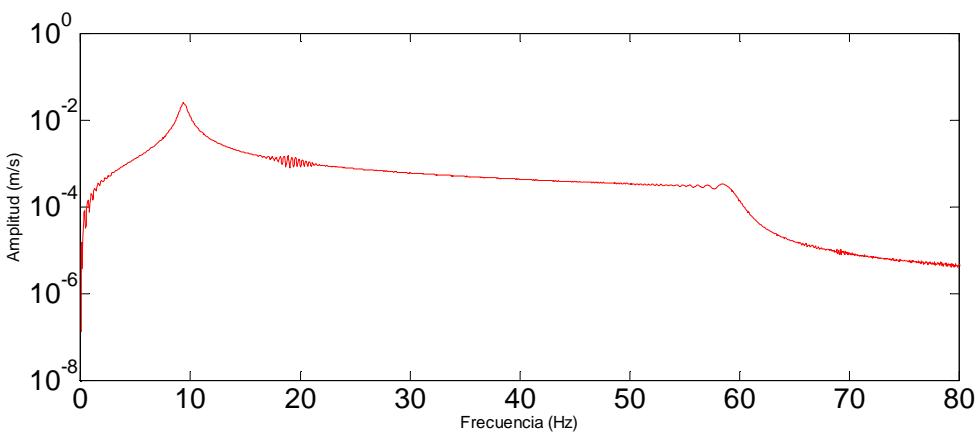
### **D.3. Fuerza de 0.3 N.**



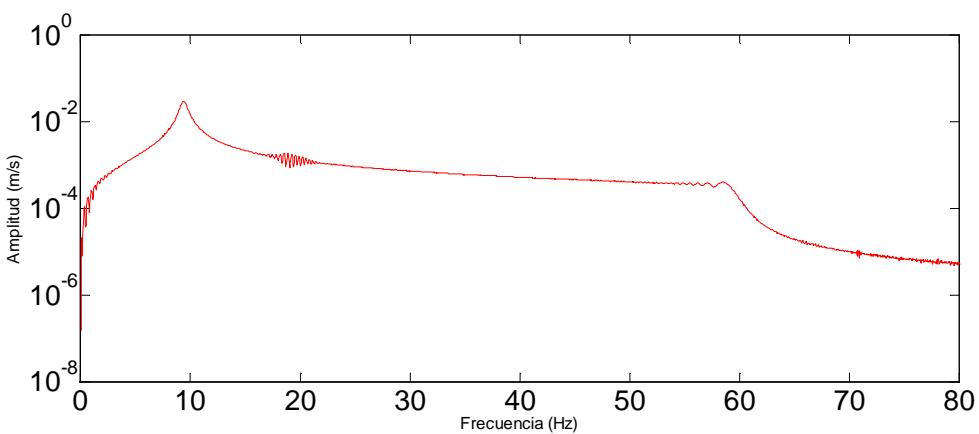
**D.4. Fuerza de 0.4 N.**



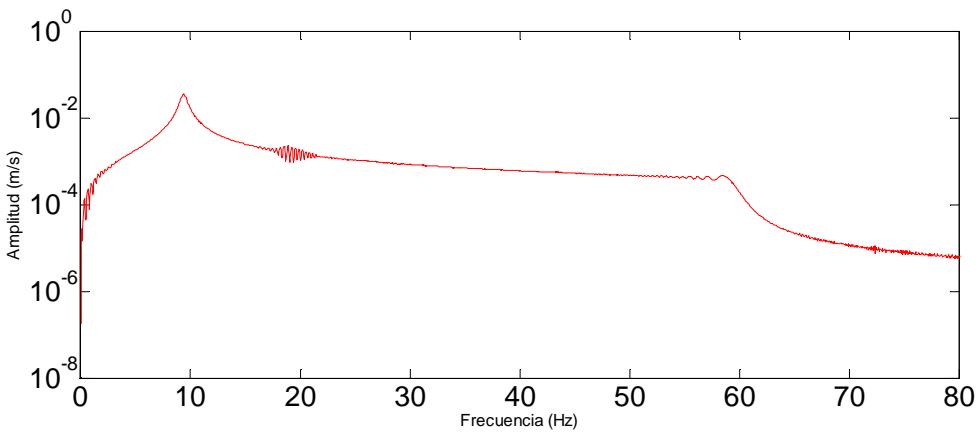
**D.5. Fuerza de 0.5 N.**



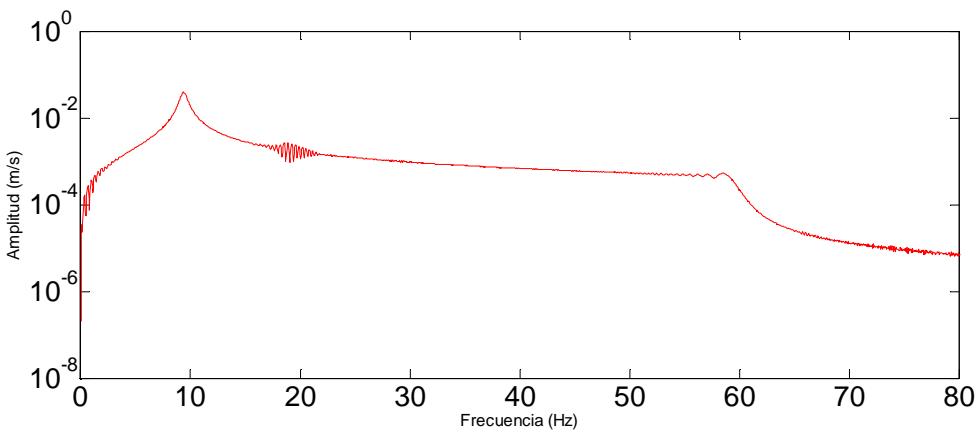
**D.6. Fuerza de 0.6 N.**



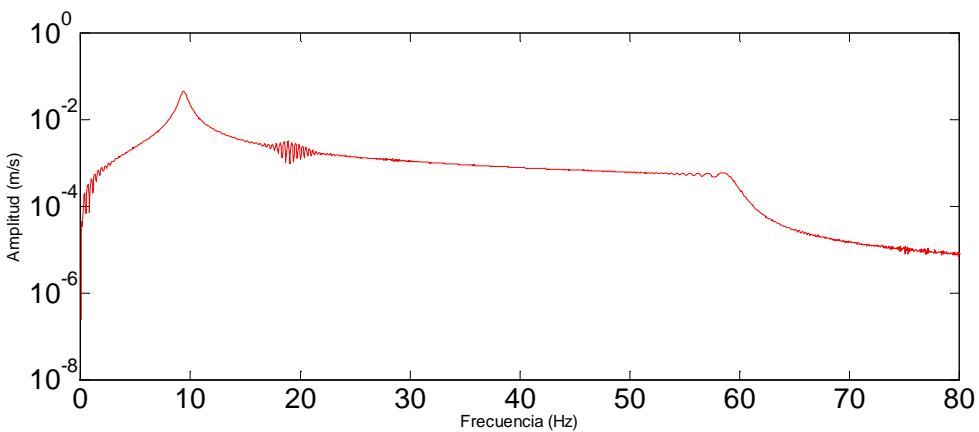
**D.7. Fuerza de 0.7 N.**



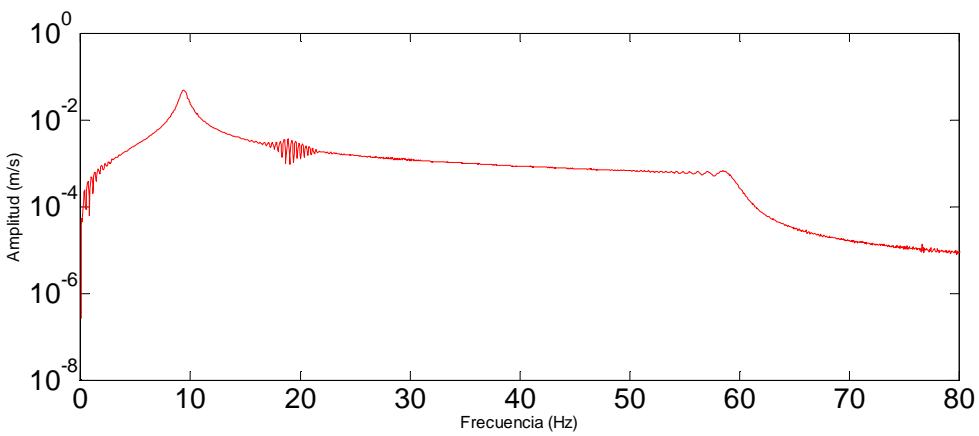
**D.8. Fuerza de 0.8 N.**



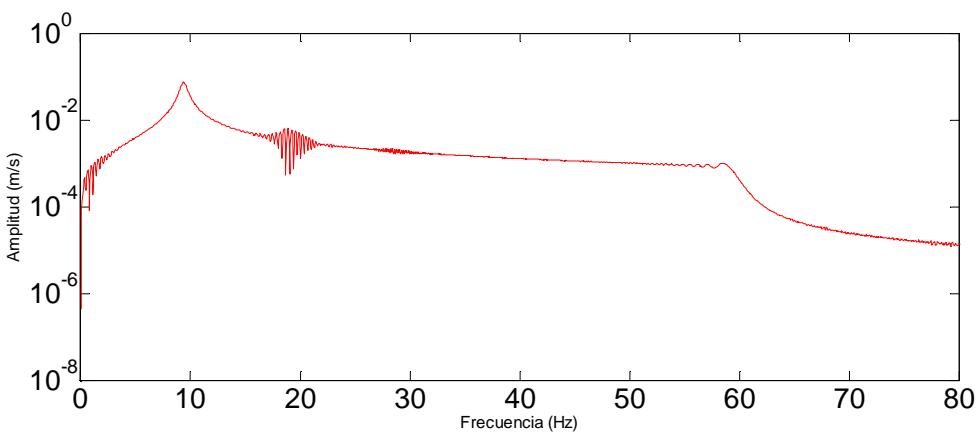
**D.9. Fuerza de 0.9 N.**



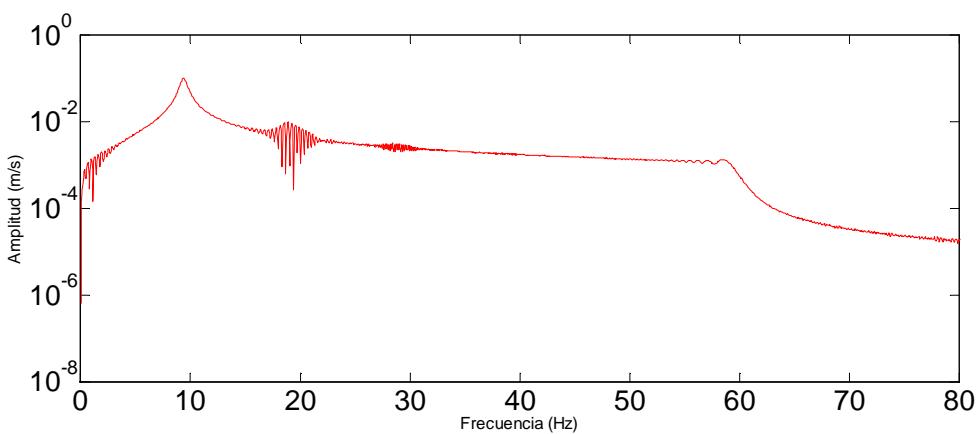
**D.10. Fuerza de 1 N.**



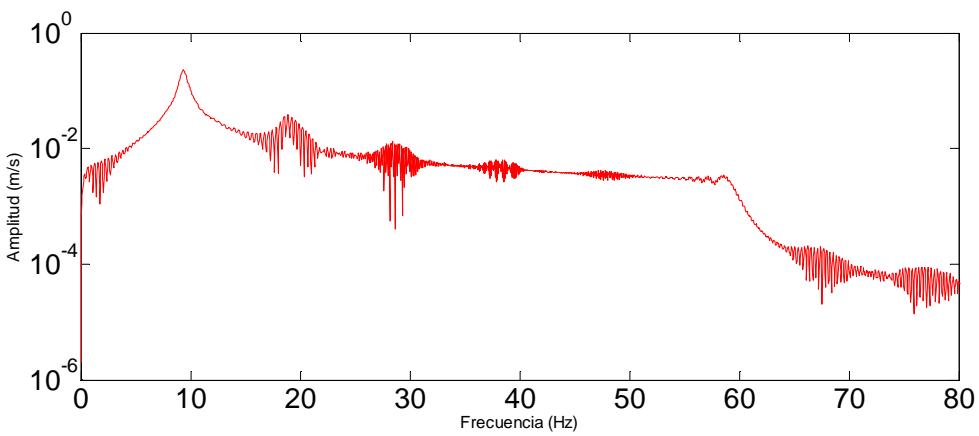
**D.11. Fuerza de 1.5 N.**



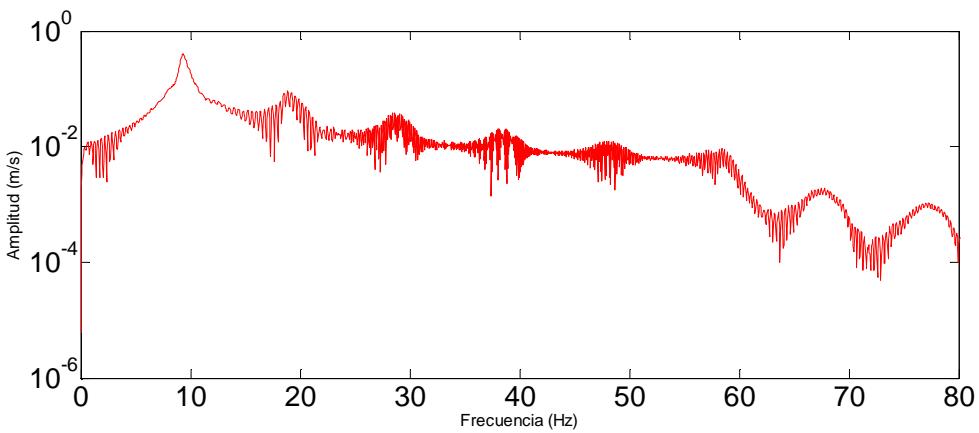
**D.12. Fuerza de 2 N.**



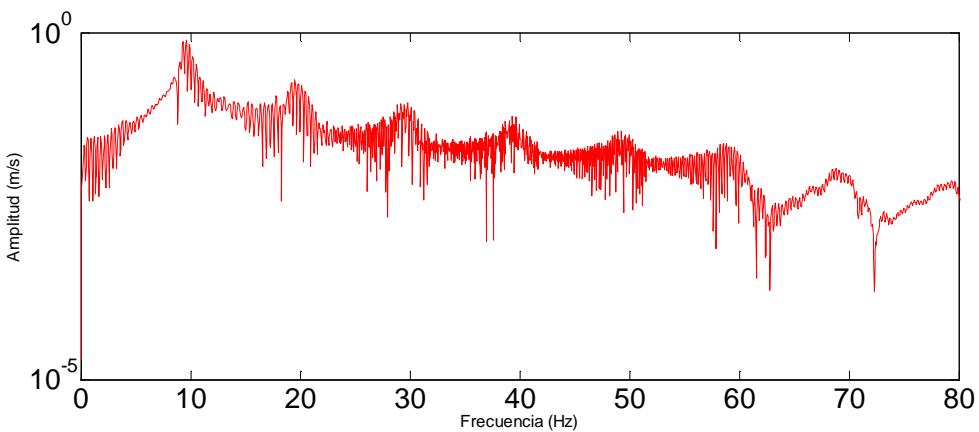
**D.13. Fuerza de 5 N.**



**D.14. Fuerza de 10 N.**

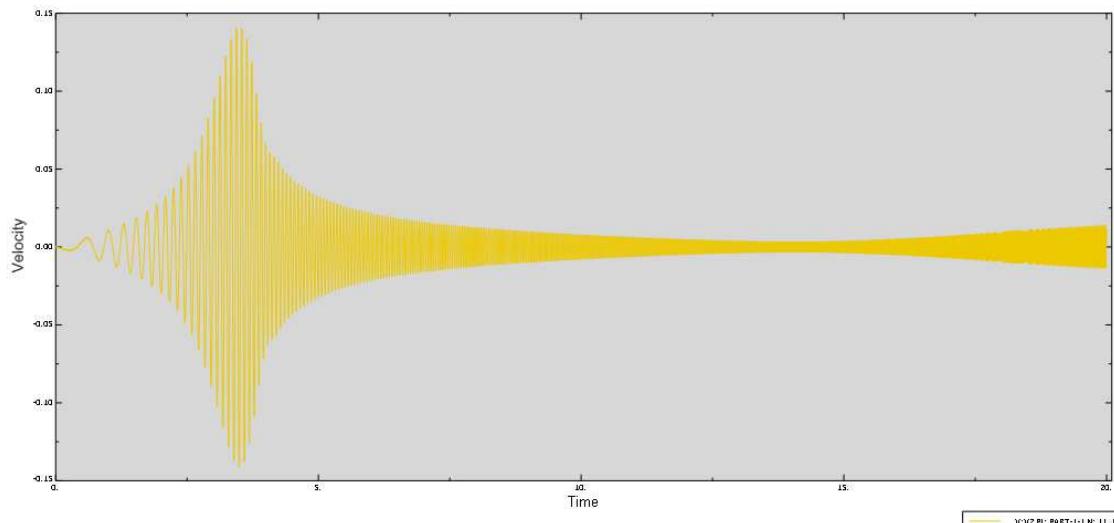
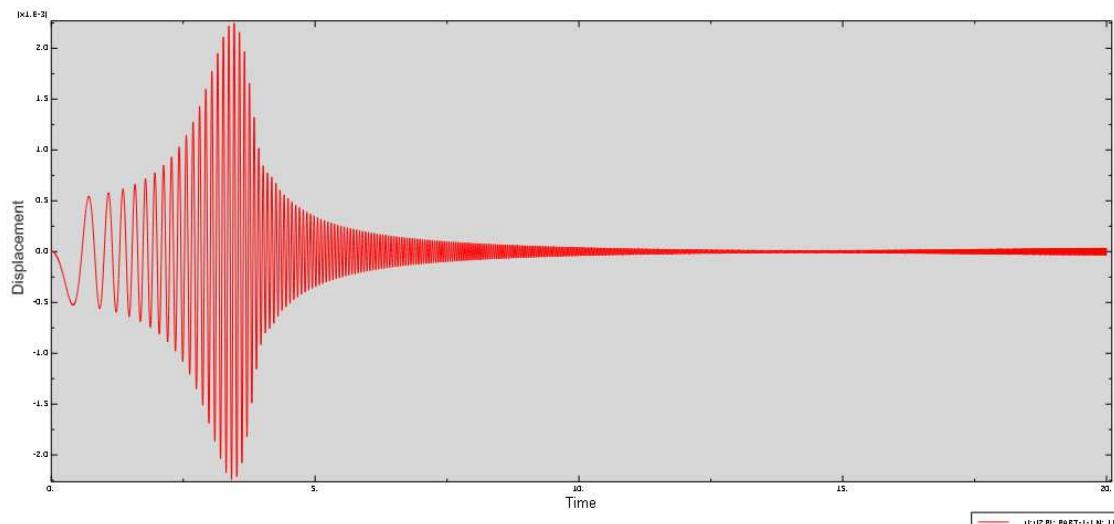


**D.15. Fuerza de 20 N.**

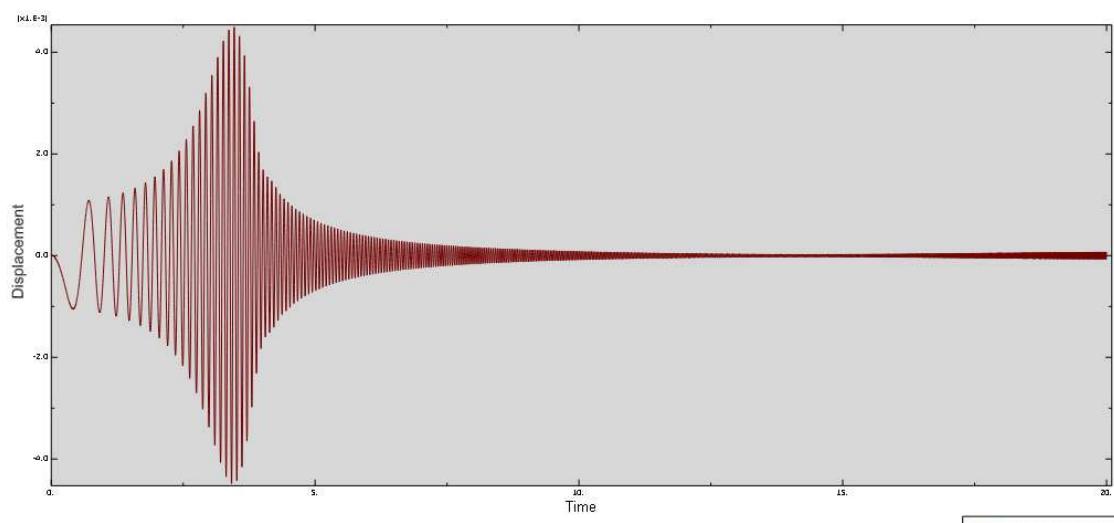


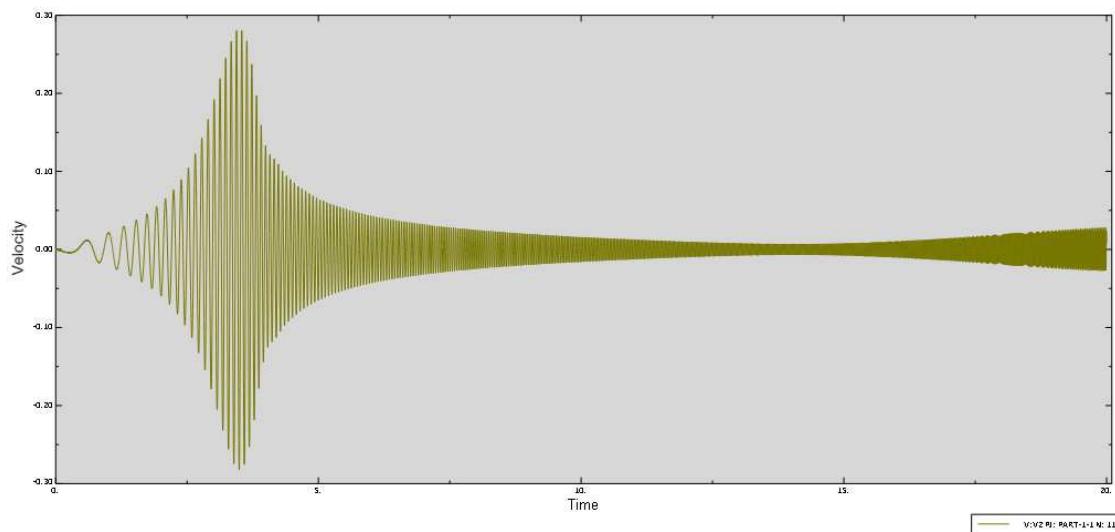
## **ANEXO E: Análisis Dinámico No Lineal ABAQUS.**

### **D.1. Fuerza de 0.1 N.**

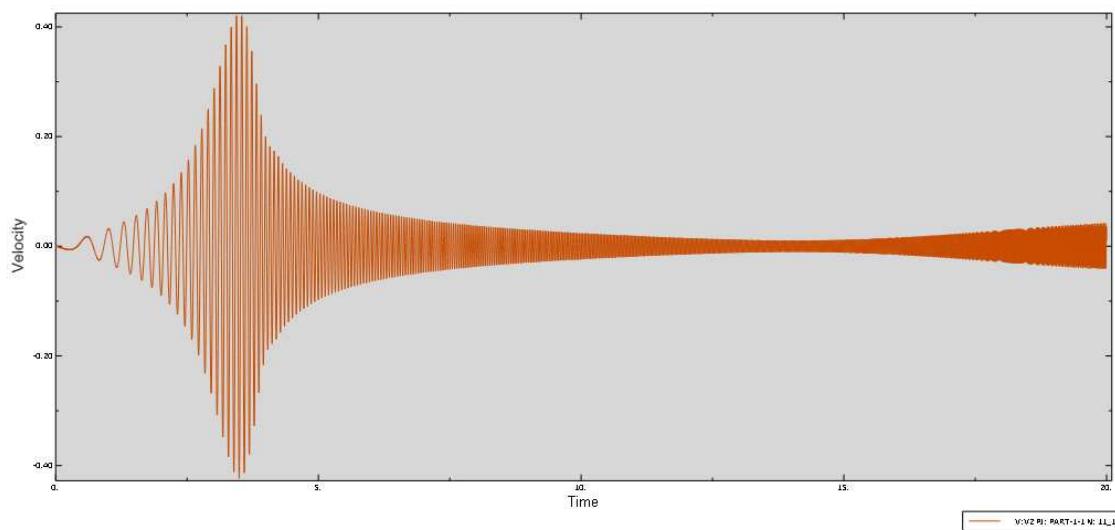
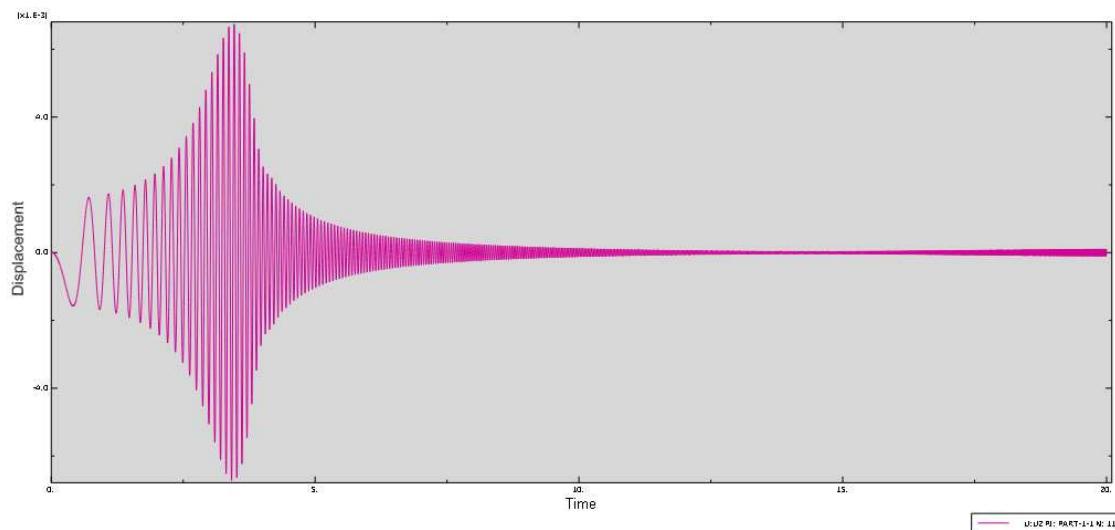


### **D.2. Fuerza de 0.2 N.**

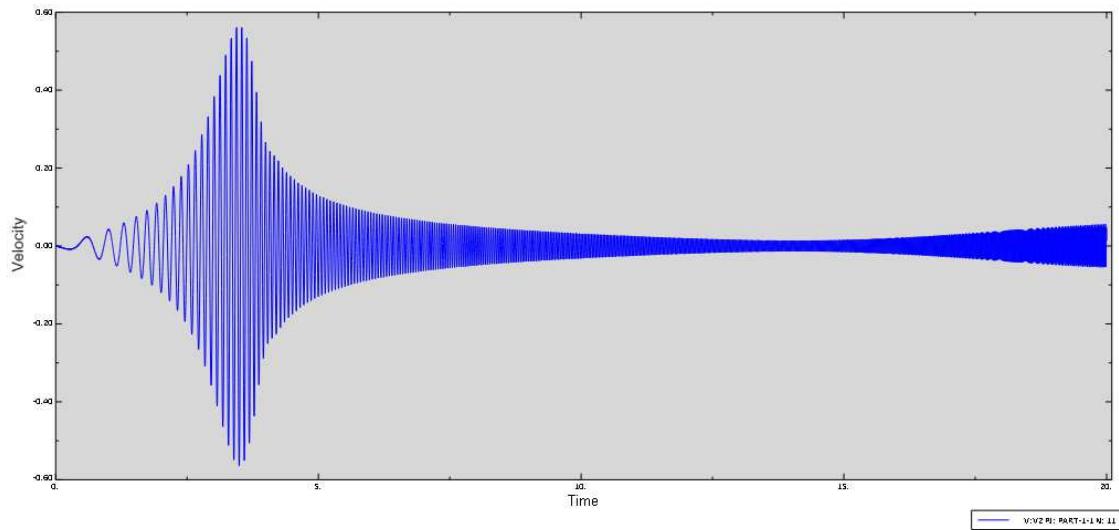
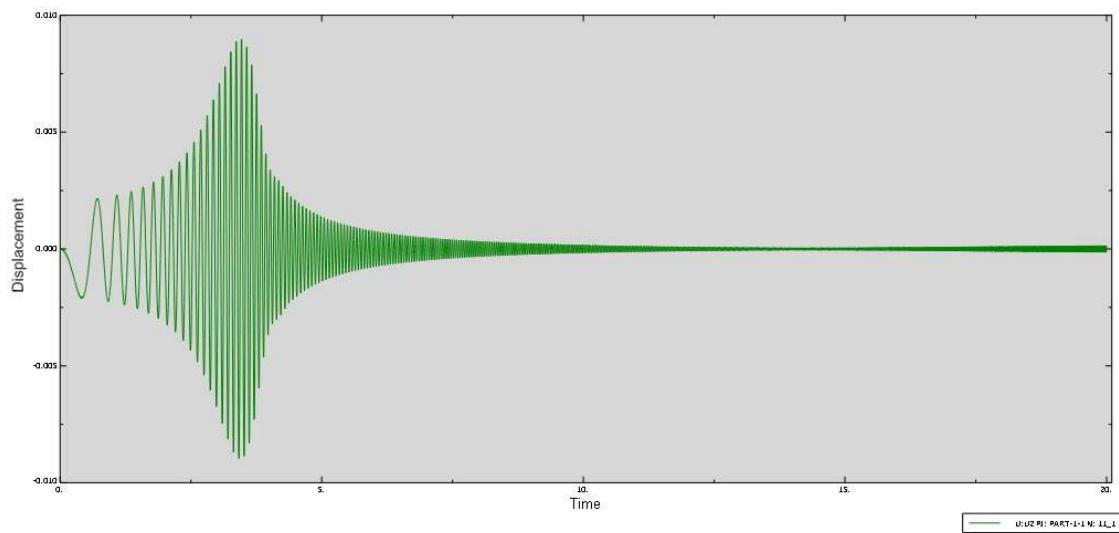




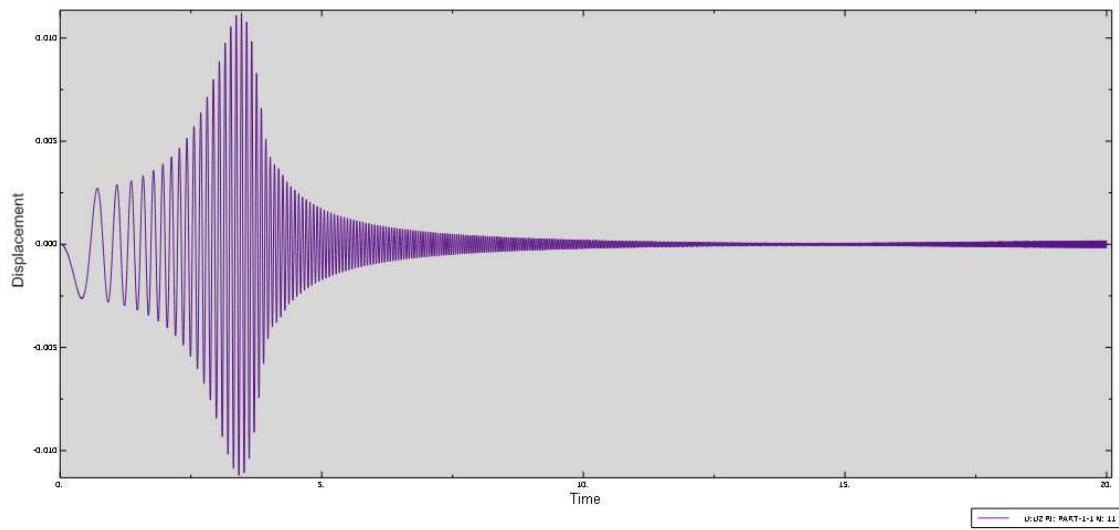
### D.3. Fuerza de 0.3 N.

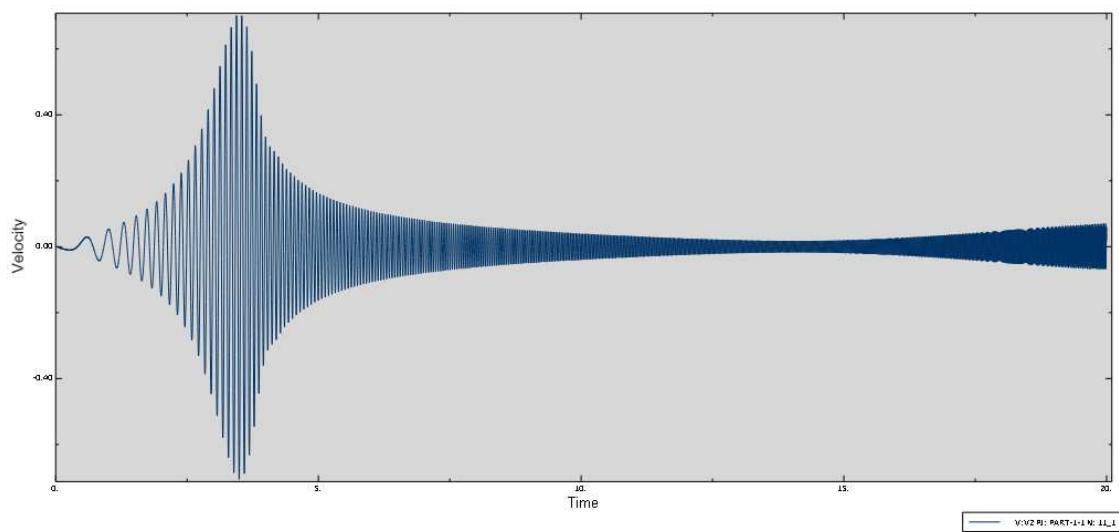


#### D.4. Fuerza de 0.4 N.

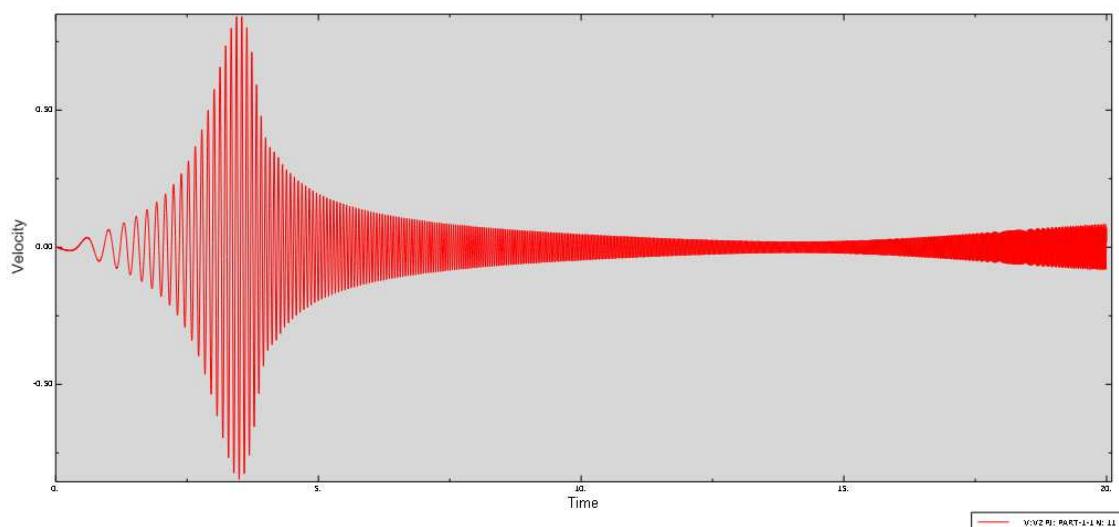
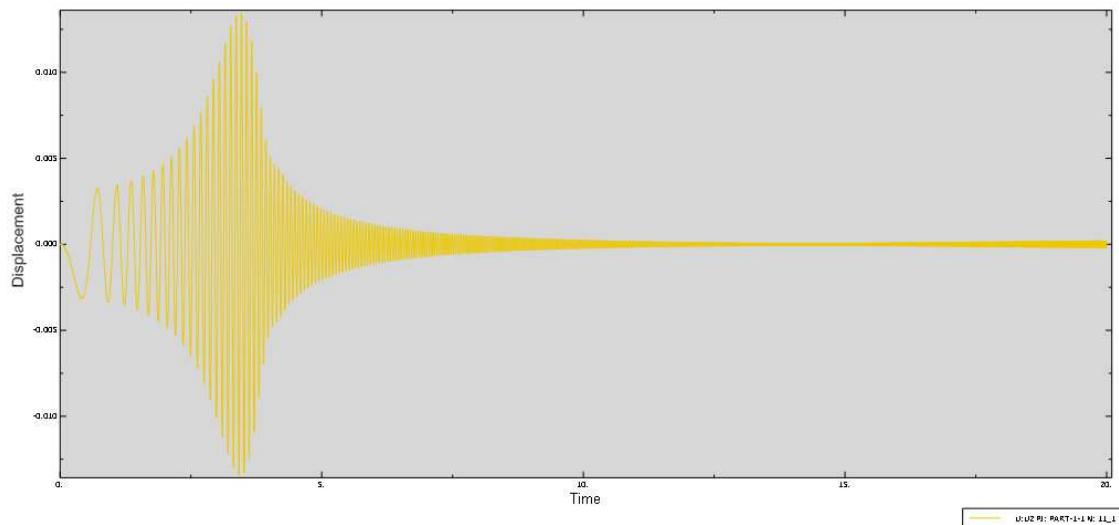


#### D.5. Fuerza de 0.5 N.

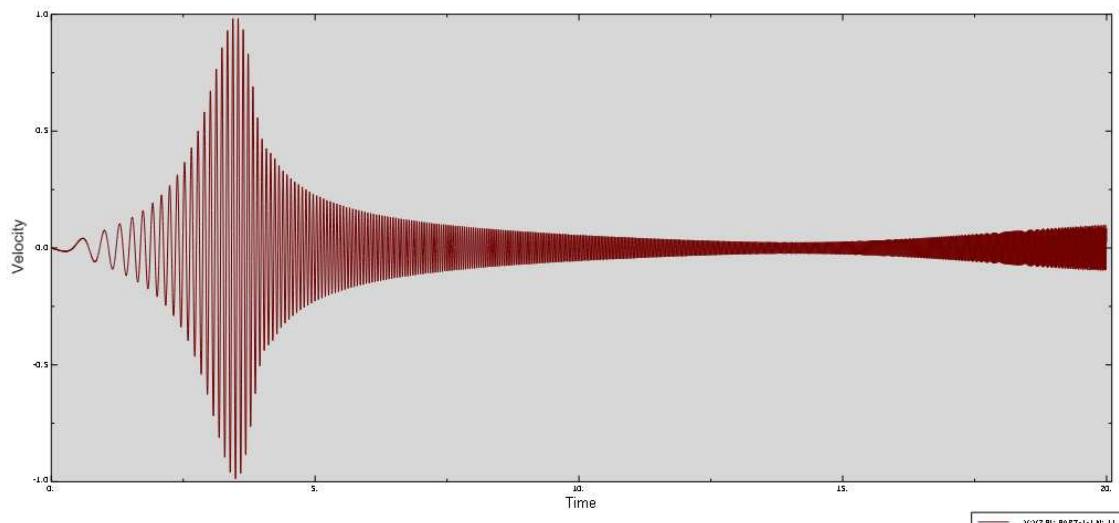
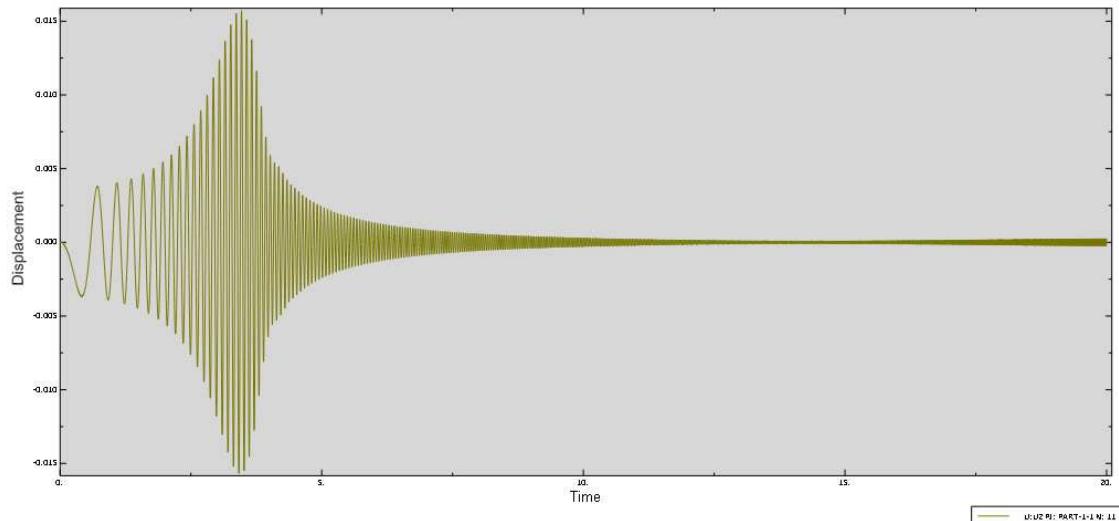




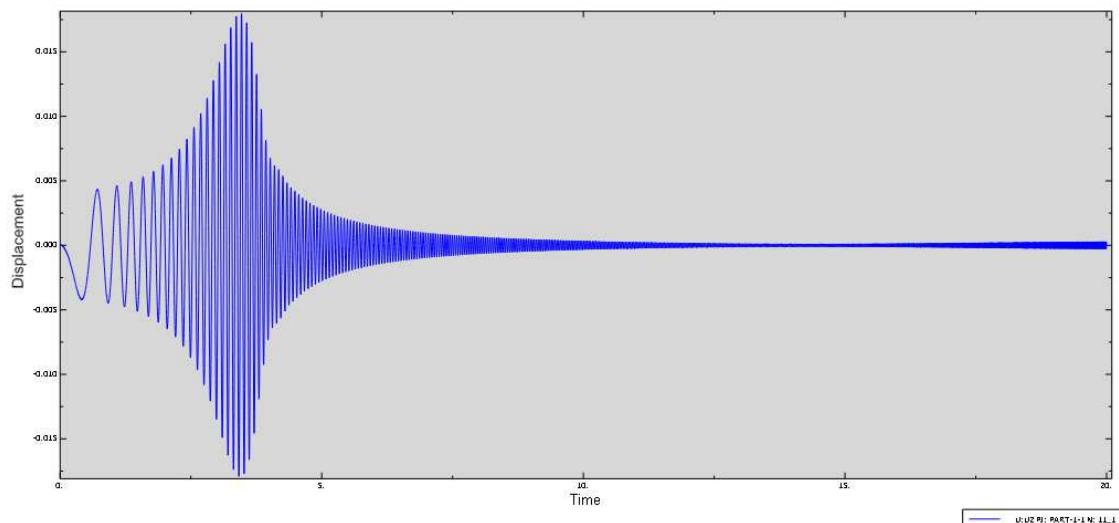
#### D.6. Fuerza de 0.6 N.

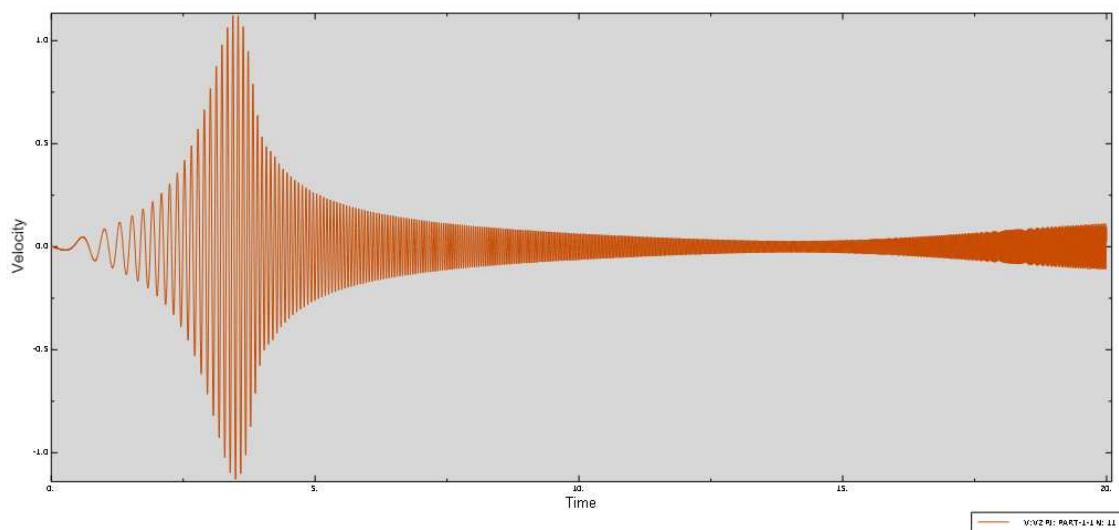


### D.7. Fuerza de 0.7 N.

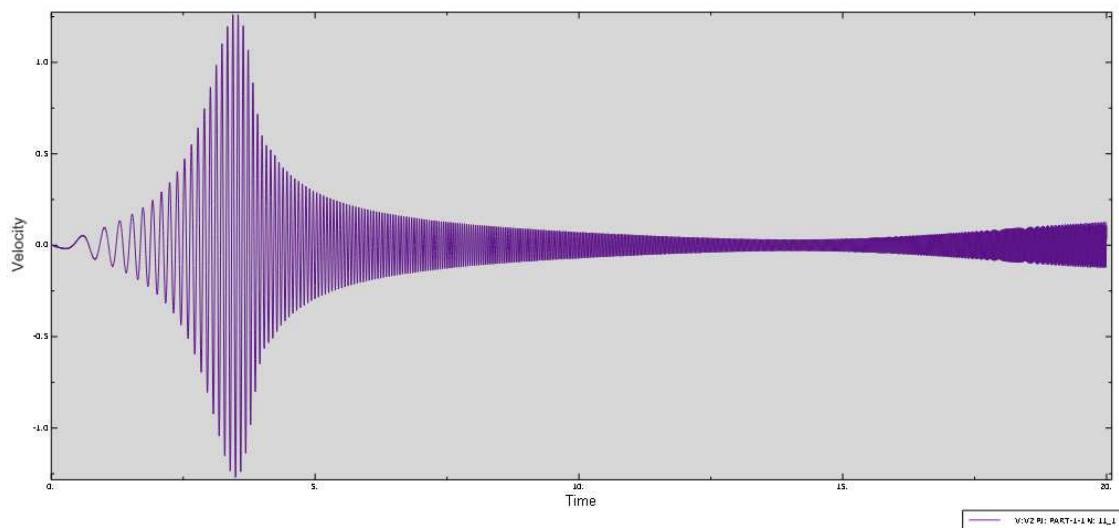
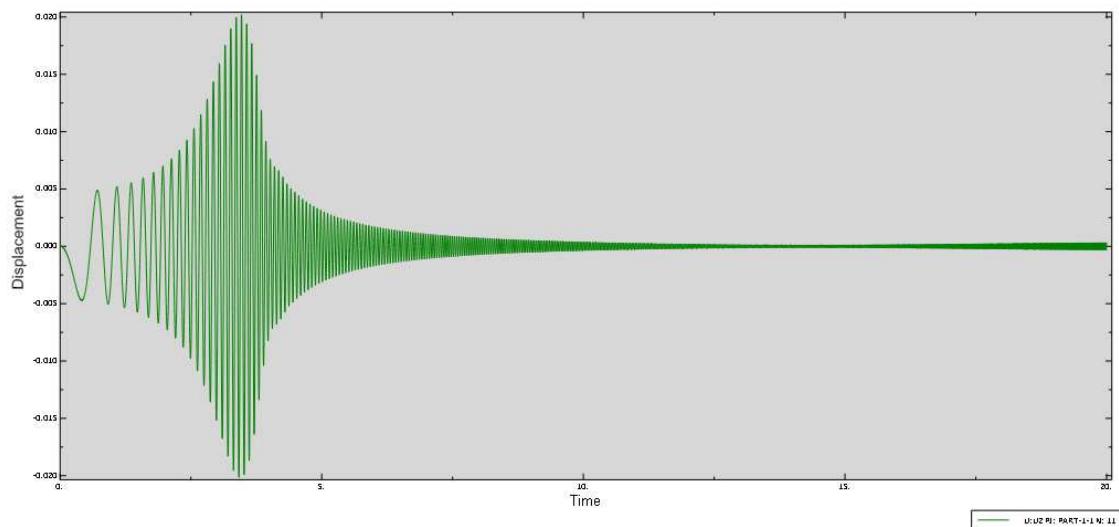


### D.8. Fuerza de 0.8 N.

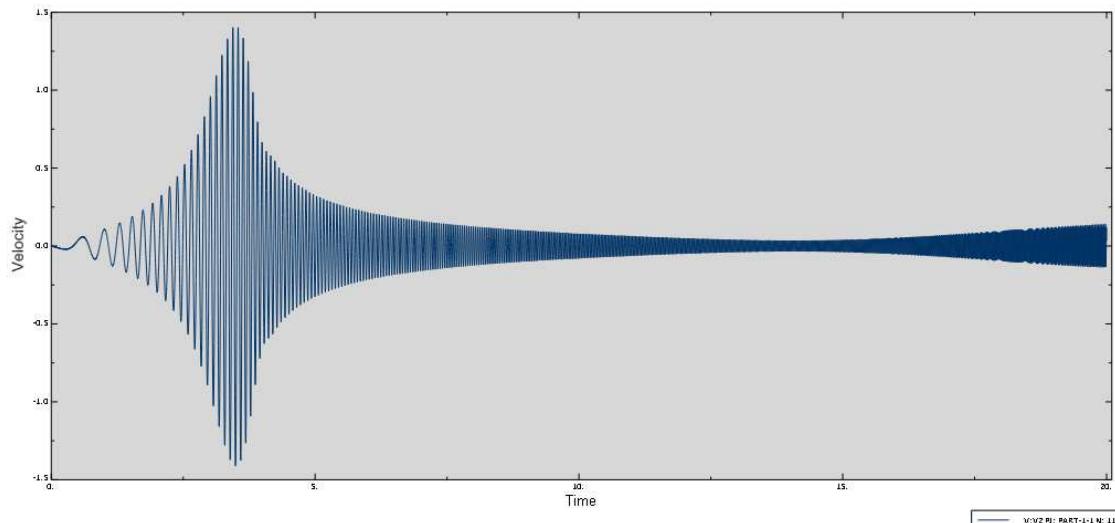
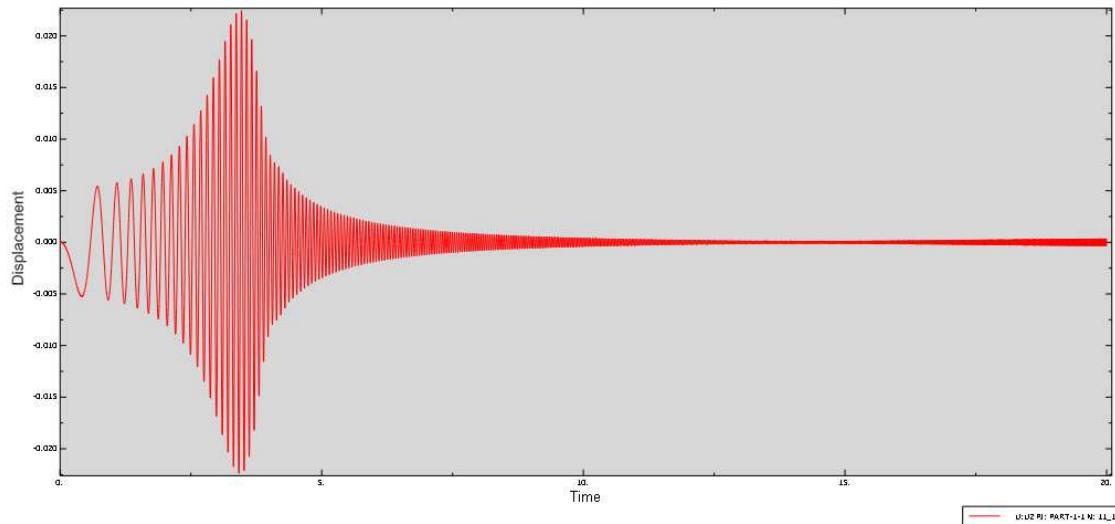




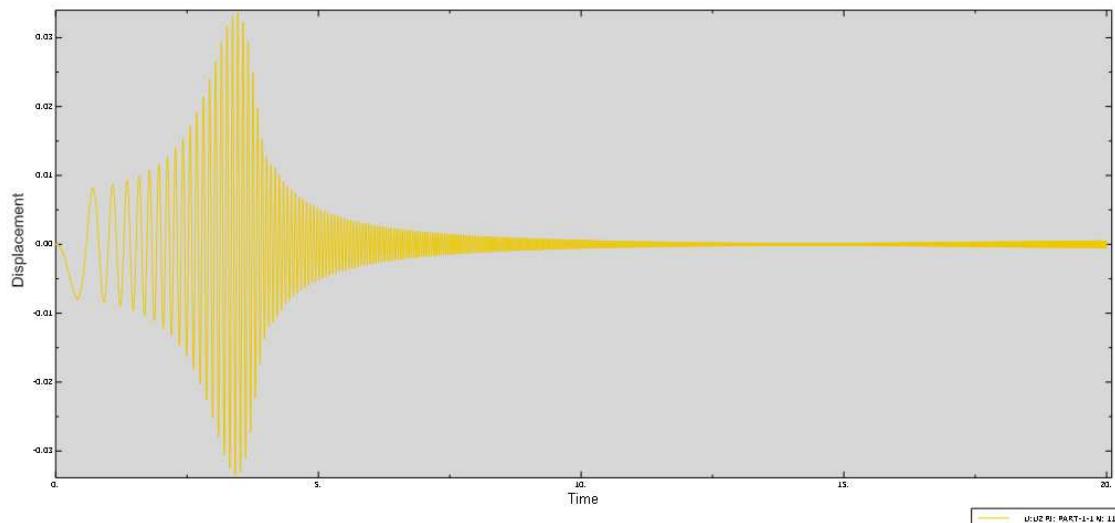
### D.9. Fuerza de 0.9 N.

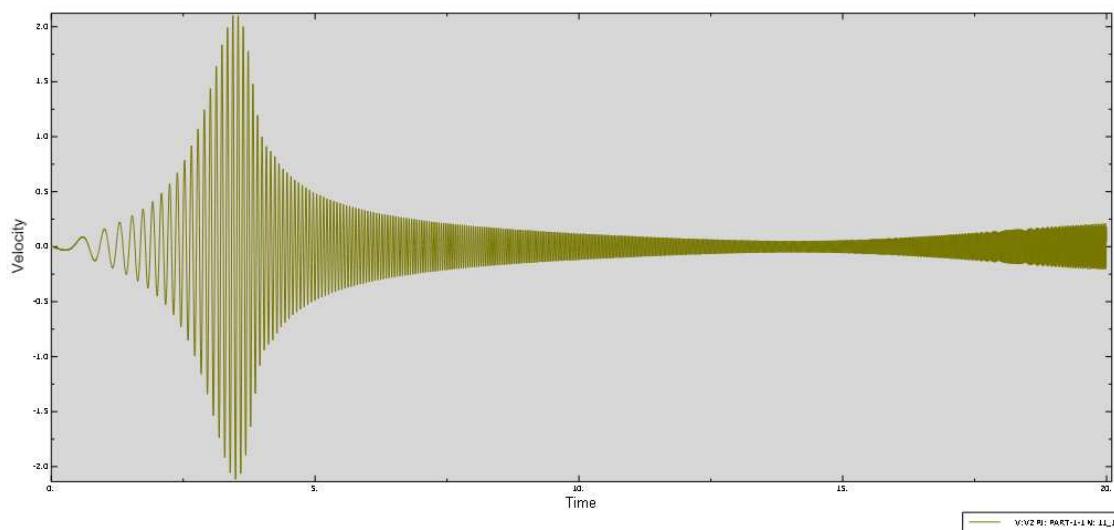


**D.10. Fuerza de 1 N.**

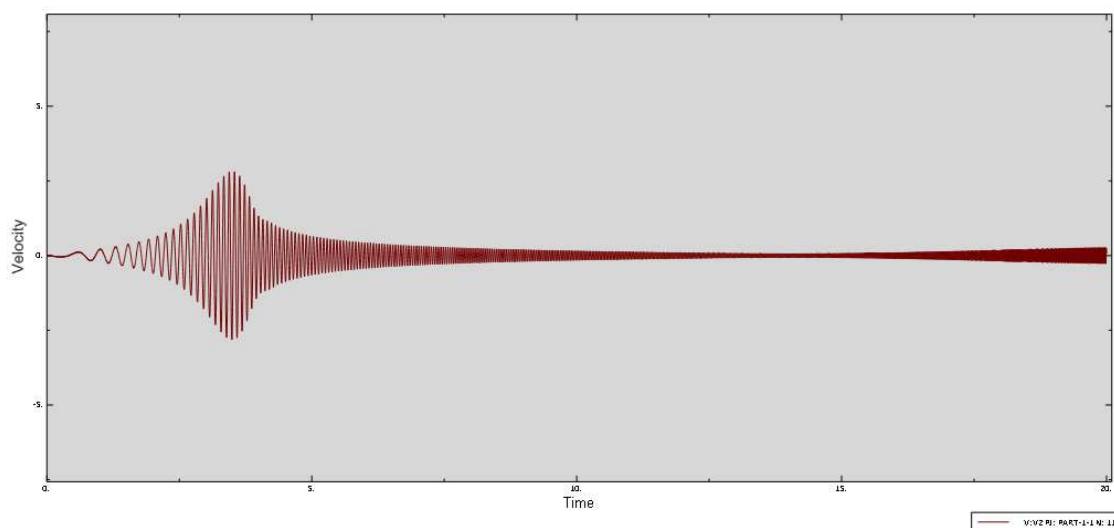
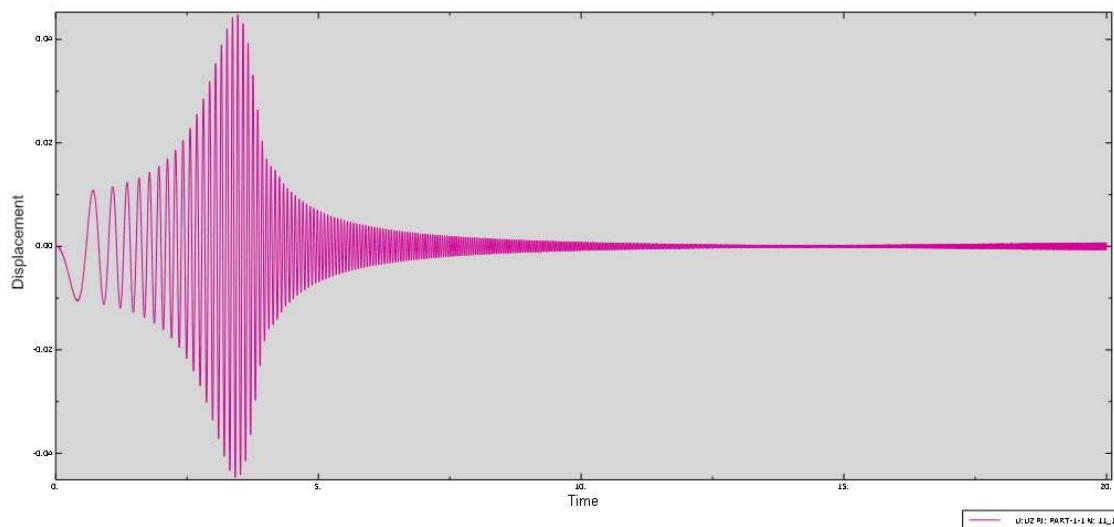


**D.11. Fuerza de 1.5 N.**

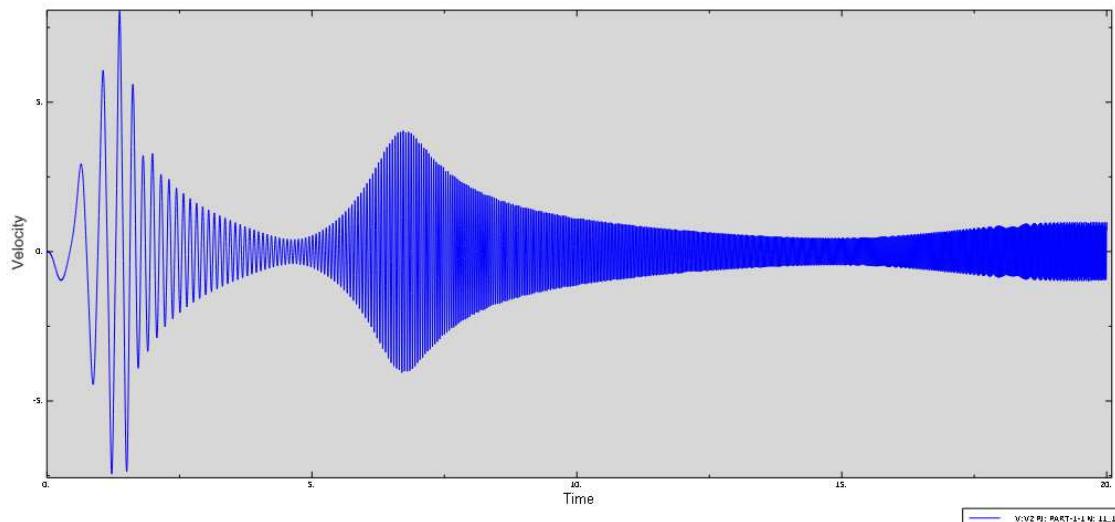
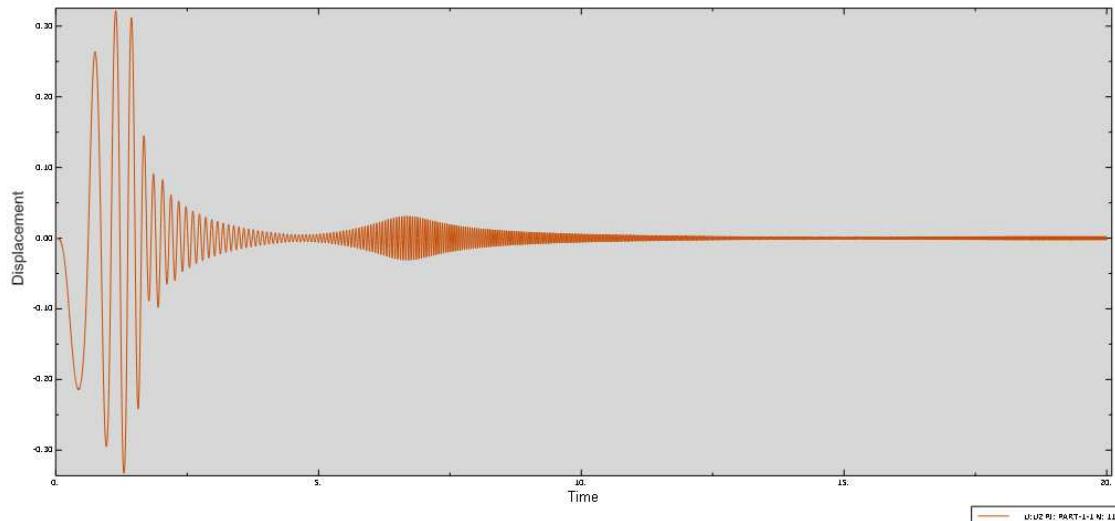




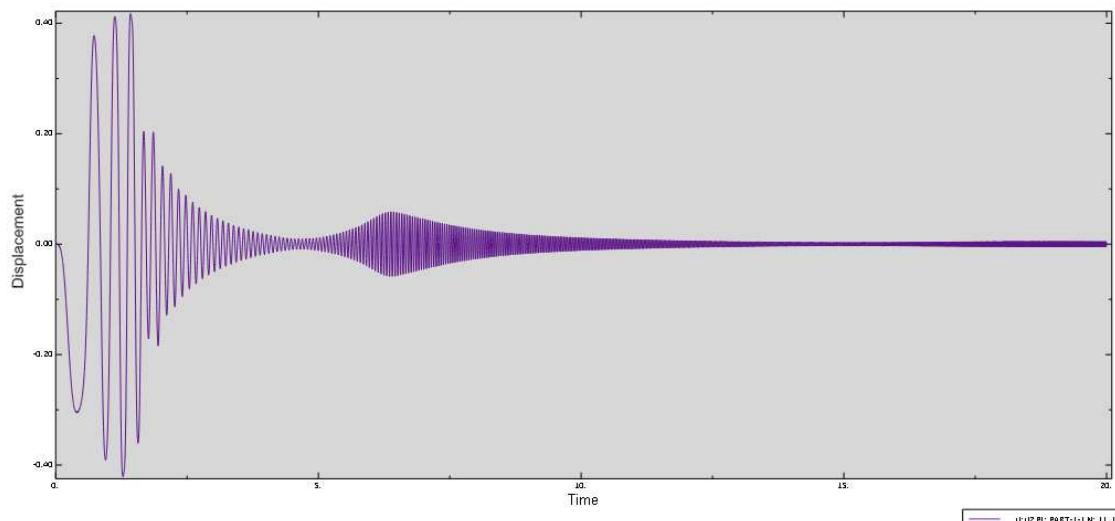
#### D.12. Fuerza de 2 N.

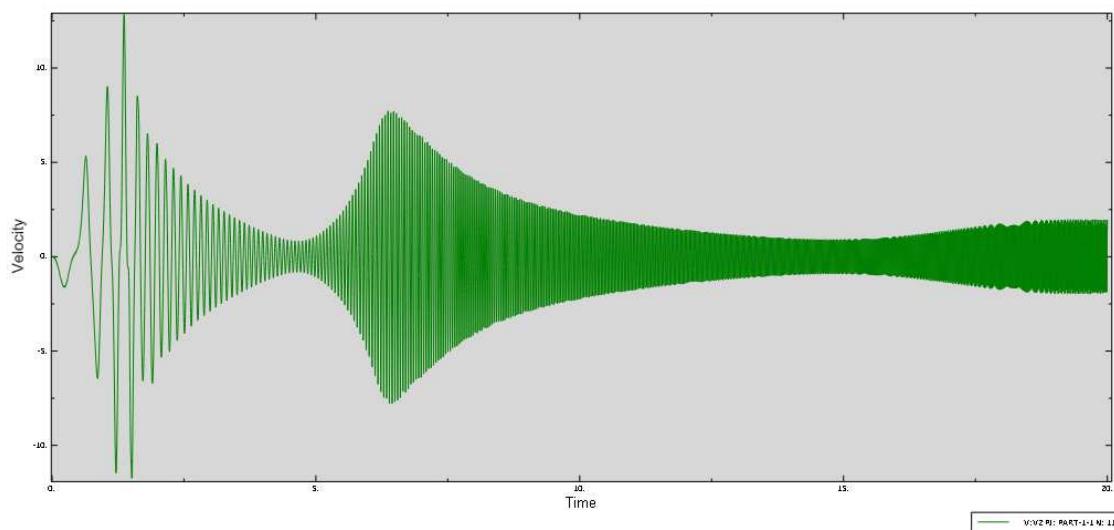


**D.13. Fuerza de 5 N.**



**D.14. Fuerza de 10 N.**





D.15. Fuerza de 20 N.

