

# Dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon\*

F. Alcalde Cuesta<sup>1</sup>, A. Lozano Rojo<sup>2</sup> et M. Macho Stadler<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Xeometría e Topoloxía, Universidade de Santiago de Compostela,  
15782 Santiago de Compostela (Espagne)

<sup>2</sup> Departamento de Matemáticas, Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea,  
48940 Leioa (Espagne)

## 1 Introduction

Il y a des laminations minimales par surfaces de Riemann où les types conformes des feuilles se mélangent. Le premier exemple a été construit par É. Ghys [4] à partir d'un arbre apériodique et répétitif décrit par R. Kenyon [7]. La construction comporte deux étapes distinctes, valables pour tout sous-graphe répétitif du graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  d'un groupe infini de type fini  $G$ . Il s'agit d'abord de construire un espace compact, muni d'un feuillement par graphes, puis d'obtenir une lamination par surfaces de Riemann. Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes infinis de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . On munit  $\mathcal{T}$  de la *topologie de Gromov-Hausdorff* pour laquelle deux sous-graphes de  $\mathcal{G}$  sont proches s'ils coïncident sur une grande boule centrée en  $e$ . Puisqu'une boule ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Grâce à l'action de  $G$  sur  $\mathcal{G}$ , on définit une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie un arbre  $T$  et son translaté  $T' = g^{-1}T$  si  $g \in T$ . On peut d'ailleurs réaliser  $\mathcal{T}$  comme un sous-espace d'un espace métrique compact  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$ , muni d'un feuillement par graphes  $\mathcal{F}$  dont toutes les feuilles sont rencontrées par  $\mathcal{T}$ . Alors  $\mathcal{R}$  est induite par  $\mathcal{F}$  et les classes d'équivalence sont les ensembles de sommets des feuilles de  $\mathcal{F}$ .

Pour tout graphe  $T \in \mathcal{T}$ , l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  est un fermé saturé pour  $\mathcal{R}$ , appelé l'*enveloppe de  $T$* . Il est réalisable comme transversale complète d'un espace

---

\*Financé par Ministerio de Ciencia y Tecnología BFM2002-04439, Ministerio de Educación y Ciencia MTM2004-08214 et Universidad del País Vasco UPV 00127.310-E-14790/2002.

feuilleté compact  $\mathbf{X}$ , à savoir la fermeture de la feuille  $L_T \in \mathcal{F}$  passant par  $T$ . Les ensembles  $X$  et  $\mathbf{X}$  sont minimaux si et seulement si le graphe  $T$  est *répétitif*, i.e. pour tout nombre réel  $r > 0$ , il existe un nombre réel  $R > 0$  tel que toute boule de rayon  $R > 0$  contient une boule qui est l'image par translation de la boule de centre  $e$  et rayon  $r > 0$ . Par ailleurs, l'holonomie de  $L_T$  est triviale si et seulement si  $T$  est *apériodique*, i.e.  $T \neq g.T$  pour tout élément  $g \neq e$  de  $G$ . Ces définitions s'inspirent de définitions analogues pour les pavages [1, 9].

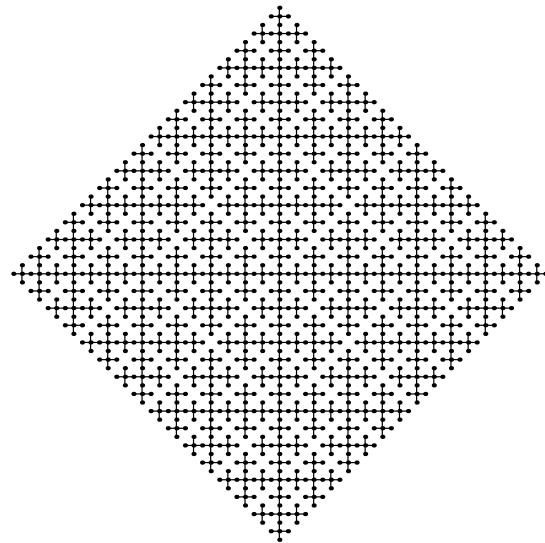


Figure 1: Arbre de Kenyon

Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys-Kenyon* la fermeture  $\mathbf{X}$  de la feuille  $L_{T_\infty}$  passant par l'arbre de Kenyon  $T_\infty$  (voir la figure 1) dans l'espace  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\mathbb{Z}^2)$ , munie du feuilletage induit par  $\mathcal{F}$ . Les feuilles sont des sous-arbres répétitifs et apériodiques du graphe de Cayley  $\mathcal{Z}^2$  de  $\mathbb{Z}^2$ . En remplaçant ces arbres par des surfaces, on obtient la lamination  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$  décrite par É. Ghys. Nous l'appellerons *lamination de Ghys-Kenyon*. Dans ce travail, nous allons récupérer l'espace  $\mathbf{X}$  par un procédé de construction de sous-arbres répétitifs et apériodiques de  $\mathcal{Z}^2$  à partir de suites de 4 éléments. Grâce à codage, nous montrerons que la dynamique transverse de ce feuilletage est représentée par l'automate suivant:

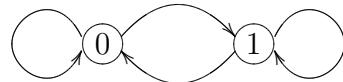


Figure 2: Machine à sommer binaire

Cela signifie que  $\mathcal{R}$  est *stablement orbitalement équivalente* à la relation engendrée par la somme  $S(x) = x + 1$  définie sur l'anneau des entiers 2-adiques, ou de manière équivalente par la transformation  $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  définie par:

- i) si  $\alpha_0 = 0$ , alors  $T(\alpha)_0 = 1$  et  $T(\alpha)_n = \alpha_n$  pour tout  $n \geq 1$ ,
- ii) si  $\alpha_0 = 1$ , alors  $T(\alpha)_0 = 0$  et  $T(\alpha)_1 = T(\sigma(\alpha))_0$  avec  $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$ .

Nous compléterons l'étude de l'exemple en décrivant sa dynamique topologique. Nous montrerons ainsi que  $\mathcal{L}$  est *affable*, en ce sens que  $\mathcal{R}$  est la limite inductive d'une suite de relations d'équivalence étales compactes [5]. La dynamique transverse de  $\mathcal{L}$  sera ainsi représentée par un système dynamique classique.

## 2 L'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff

Soit  $S$  un système fini de générateurs de  $G$ . Le *graphe de Cayley*  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(G, S)$  est un graphe localement fini non orienté, sans boucle, ni arête multiple, dont les sommets sont les éléments de  $G$ . Deux sommets  $g_1$  et  $g_2$  sont reliés par une arête si  $g_1^{-1}g_2 \in S$ . On appelle *longueur* de  $g$  le plus petit nombre d'éléments de  $S$  nécessaires pour écrire  $g$ , i.e.  $\text{long}_S(g) = \min\{n \geq 1 / g = s_1 \dots s_n \text{ avec } s_i s_{i+1} \neq e\}$ . La *distance des S-mots* est alors donnée par  $d_S(g_1, g_2) = \text{long}_S(g_1^{-1}g_2)$  pour tout couple  $g_1, g_2 \in G$ . Cette distance se prolonge en une distance sur  $\mathcal{G}$  telle que toute arête est isométrique à l'intervalle  $[0, 1]$ . Le graphe de Cayley  $\mathcal{G}$  devient ainsi un espace métrique connexe par chemins sur lequel le groupe  $G$  agit par isométries.

### 2.1 Topologie de Gromov-Hausdorff

Soit  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  l'ensemble des sous-graphes  $T$  de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$  de  $G$ . Notons  $B_T(e, N)$  (resp.  $\overline{B}_T(e, N)$ ) la boule ouverte (resp. fermée) de centre  $e$  et de rayon  $N$  et  $\text{val}_T(e)$  la valence de  $e$ , i.e. le nombre d'arêtes issues de  $e$ . Considérons l'ensemble  $A = \{N \geq 1 / B_T(e, N) = B_{T'}(e, N)\}$  et la quantité

$$R(T, T') = \begin{cases} \sup A & \text{si } A \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } A = \emptyset, \end{cases}$$

qui appartient à  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$  pour tout couple  $T, T' \in \mathcal{T}$ . On définit alors la *distance de Gromov-Hausdorff* par  $d(T, T') = e^{-R(T, T')}$ . C'est une ultramétrique et donc  $\mathcal{T}$  est totalement disconnexe. Puisque la boule fermée  $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, N)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, un procédé diagonal classique montre que  $\mathcal{T}$  est compact. Les sous-graphes finis de  $\mathcal{G}$  correspondent aux points isolés de  $\mathcal{T}$ . Nous noterons désormais  $\mathcal{T}$  l'ensemble des sous-graphes *infinis* de  $\mathcal{G}$  contenant l'élément neutre  $e$ . L'avantage de la nouvelle définition est mise en évidence par le fait que  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est alors homéomorphe à l'ensemble de Cantor, sauf si  $G = \mathbb{Z}$ .

## 2.2 Structure feuilletée

L'espace  $\mathcal{T}$  est muni d'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  qui identifie deux graphes  $T$  et  $T'$  si  $T' = g^{-1}.T$  avec  $g \in T$ . Toute classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  peut être alors réalisée comme l'ensemble de sommets d'un graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$ . Il suffit de joindre  $T' = g^{-1}.T$  et  $T'' = h^{-1}.T$  par une arête si  $d_S(g, h) = 1$ . Le graphe  $\overline{\mathcal{R}}[T]$  est donc isomorphe au quotient de  $T$  par le groupe de translations  $\text{Iso}(T) = \{g \in \mathcal{G}/T = g.T\}$ . C'est une feuille de l'espace feuilleté compact fourni par le résultat suivant:

**Théorème de réalisation géométrique 2.2.1.** *Il y a un espace compact, métrisable et séparable  $\mathcal{T}$ , muni d'un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$ , pour lequel  $\mathcal{T}$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite sur  $\mathcal{T}$ .*

**Preuve.** Considérons le sous-espace  $\tilde{\mathcal{T}} = \{(T, g) \in \mathcal{T} \times \mathcal{G} / g \text{ est un sommet de } T\}$  de  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ , muni de la pseudodistance  $d((T_1, g_1), (T_2, g_2)) = d(g_1^{-1}.T_1, g_2^{-1}.T_2)$ . Alors  $\mathcal{T}$  est le quotient de  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'action diagonale de  $G$  sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{G}$ . Chaque classe d'équivalence  $\mathcal{R}[T]$  est obtenue par passage au quotient à partir de l'orbite de  $(T, e)$ . L'ensemble  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} = \overline{B}_{\tilde{\mathcal{T}}}((T_1, g_1), e^{-1}) = \{(T_2, g_2) \in \tilde{\mathcal{T}} / \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) = \overline{B}_{g_2^{-1}.T_2}(e, 1)\}$  est un ouvert-fermé qui se projette sur l'ouvert-fermé  $U_{g_1^{-1}.T_1} = \overline{B}_{\mathcal{T}}(g_1^{-1}.T_1, e^{-1})$ . Puisque  $\overline{B}_{\mathcal{G}}(e, 1)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes, les ensembles  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)}$  et  $U_{g_1^{-1}.T_1}$  définissent des partitions finies de  $\tilde{\mathcal{T}}$  et  $\mathcal{T}$  respectivement. Nous allons remplacer  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'ensemble  $\tilde{\mathcal{T}}$  des couples  $(T, x)$  où  $x$  est un point quelconque de  $T$  qui peut appartenir à l'intérieur  $\mathring{e}$  d'une arête  $e$  de  $T$ . L'application  $\psi_{(T_1, g_1)} : ((T_2, g_2), x) \in \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto (T_2, g_2.x) \in \tilde{\mathcal{T}}$  est injective en restriction aux ensembles  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$ . Leurs images  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  sont munies de topologies telles que les restrictions et leurs inverses  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)} : \tilde{V}_{(T_1, g_1)} \rightarrow \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2})$  et  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e : \tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e \rightarrow \tilde{U}_{(T_1, g_1)} \times \mathring{e}$  sont des homéomorphismes. On munit  $\tilde{\mathcal{T}}$  de la topologie faible pour laquelle  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{V}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un recouvrement ouvert fini. On vérifie aisément que:

- i) l'espace  $\tilde{\mathcal{T}}$  est réalisé comme un sous-espace compact de  $\tilde{\mathcal{T}}$ ,
- ii) l'action de  $G$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$  s'étend en une action de  $G$  sur  $\tilde{\mathcal{T}}$ ,
- iii) les cartes locales  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}$  et  $\tilde{\varphi}_{(T_1, g_1)}^e$  forment un atlas feuilleté sur  $\tilde{\mathcal{T}}$  qui définit un feuilletage par graphes  $\tilde{\mathcal{F}}$  invariant par l'action de  $G$ .

Soit  $\mathcal{T}$  le quotient de  $\tilde{\mathcal{T}}$  par l'action de  $G$ . Alors les applications

$$\psi_{g_1^{-1}.T_1} : (g_2^{-1}.T_2, x) \in U_{g_1^{-1}.T_1} \times \overline{B}_{g_1^{-1}.T_1}(e, 1) \mapsto x^{-1}.(g_2^{-1}.T_2) \in \mathcal{T}$$

définissent des cartes locales

$$\varphi_{g_1^{-1}.T_1} : V_{g_1^{-1}.T_1} \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times B_{g_1^{-1}.T_1}(e, \frac{1}{2}) \quad \text{et} \quad \varphi_{g_1^{-1}.T_1}^e : V_{g_1^{-1}.T_1}^e \rightarrow U_{g_1^{-1}.T_1} \times \mathring{e}$$

et donc l'espace  $\mathcal{T}$  possède un atlas feuilleté fini. Il est compact car les plaques sont relativement compactes et les transversales sont compactes.  $\square$

## 2.3 Structure transverse

Nous allons préciser ici la notion de *dynamique transverse* (*mesurable* ou *topologique*) utilisée dans la introduction. D'abord, la relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est définie par l'action d'un pseudogroupe de transformations  $\Gamma$  engendré par les translations  $\tau_g : T \mapsto g^{-1}T$  associées aux éléments de  $G$ . Chacune de ces applications est définie sur l'ouvert-fermé  $D_g = \{T \in \mathcal{T} / g \in T\}$  de  $\mathcal{T}$ . Le théorème 2.2.1 montre que  $\Gamma$  est le *pseudogroupe d'holonomie de  $\mathcal{F}$*  réduit à  $\mathcal{T}$ . Nous utiliserons donc la notion de *dynamique transverse* introduite par A. Haefliger [6].

Néanmoins, si l'holonomie est triviale, la dynamique transverse est représentée par la relation d'équivalence induite sur toute transversale complète. Rappelons qu'une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien standard  $X$  est *mesurable discrète* si les classes d'équivalence sont dénombrables et si le graphe est un borélien de  $X \times X$ . On appelle *transformation partielle de  $\mathcal{R}$*  tout isomorphisme borélien  $\varphi : A \rightarrow B$  entre parties boréliennes de  $X$  dont le graphe  $G(\varphi) = \{(x, y) \in X \times X / y = \varphi(x)\} \subset \mathcal{R}$ . Une mesure borélienne  $\mu$  sur  $X$  est dite *invariante pour  $\mathcal{R}$*  si elle est invariante pour toute transformation partielle  $\varphi$ , i.e.  $\mu(\varphi^{-1}(B')) = \mu(B')$  pour tout borélien  $B' \subset B$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $\mathcal{T} = \mathcal{T}(G)$  est mesurable discrète car les classes d'équivalence sont dénombrables et le graphe de  $\mathcal{R}$  est un borélien de  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$  en tant que réunion des graphes des transformations partielles  $\tau_g$  définies sur les ouverts-fermés  $B_{\mathcal{T}}(T, e^{-1})$  (avec  $g \in B_{\mathcal{T}}(e, 1)$ ) et de leurs compositions.

**Définition 2.3.1.** Deux relations d'équivalence mesurées  $(\mathcal{R}, X, \mu)$  et  $(\mathcal{R}', X', \mu')$  sont dites:

- i) *orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  et de mesure totale pour lesquels il existe un isomorphisme borélien  $\varphi : Y \rightarrow Y'$  tel que  $\varphi(\mathcal{R}[x]) = \mathcal{R}'[\varphi(x)]$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in Y$  et  $f_*\mu \sim \mu'$ ;
- ii) *stablement orbitalement équivalentes* si  $X$  et  $X'$  contiennent des boréliens  $Y$  et  $Y'$  dont les saturés pour  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sont de mesure totale tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes. Nous dirons alors que  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  représentent une même *dynamique mesurable*.

Toute relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur un espace borélien ou topologique  $X$  est munie d'une structure naturelle de groupoïde caractérisée par les données suivantes: l'inclusion  $\varepsilon : x \in X \mapsto (x, x) \in \mathcal{R}$  de l'espace des unités  $X$  dans  $\mathcal{R}$ , les projections  $\beta : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto x \in X$  et  $\alpha : (x, y) \in \mathcal{R} \mapsto y \in X$ , l'ensemble des couples composable  $\mathcal{R} * \mathcal{R} = \{((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} \times \mathcal{R} / \alpha(x, y) = y = x' = \beta(x', y')\}$ , la

multiplication partielle  $\mu : ((x, y), (x', y')) \in \mathcal{R} * \mathcal{R} \mapsto (x, y') \in \mathcal{R}$  et l'inversion  $\iota : (x, y) \in \mathcal{R} \rightarrow (y, x) \in \mathcal{R}$ . La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est dite *topologique* si elle l'est comme groupoïde, c'est-à-dire si le graphe de  $\mathcal{R}$  est muni d'une topologie (qui en fait un espace localement compact séparé) telle que  $\alpha, \beta : \mathcal{R} \rightarrow X$  et  $\mu : \mathcal{R} * \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  sont continues et  $\iota : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$  est un homéomorphisme. Une telle relation d'équivalence est dite  *$\beta$ -discrète* si  $X$  est ouvert dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout ouvert  $U$  de  $\mathcal{T}$  et tout élément  $g$  de  $G$ , notons  $O(U, g) = \{(T, g^{-1} \cdot T) \in \mathcal{R} / T \in U \cap D_g\}$  le graphe de la translation  $\tau_g$  restreinte à  $U$ . Les ensembles  $O(U, g)$  engendrent une topologie sur  $\mathcal{R}$ , plus fine que celle induite par la topologie produit sur  $\mathcal{T} \times \mathcal{T}$ , qui en fait une relation d'équivalence topologique  $\beta$ -discrète.

**Définition 2.3.2.** Deux relations d'équivalence  $\beta$ -discrètes  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  sur  $X$  et  $X'$  sont dites *stablement orbitalement équivalentes* (resp. *isomorphes*) si  $X$  et  $X'$  contiennent des ouverts  $Y$  et  $Y'$  qui rencontrent toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}'$  tels que les relations d'équivalence induites  $\mathcal{R}|_Y$  et  $\mathcal{R}'|_{Y'}$  sont orbitalement équivalentes (resp. isomorphes).

## 2.4 Réalisation géométrique

La donnée d'un système fini de générateurs  $S$  de  $G$  fournit un système fini de générateurs  $\Sigma = \{\tau_g / g \in S\}$  de  $\Gamma$ . Par analogie avec l'action d'un groupe, l'orbite  $\Gamma(T) = \mathcal{R}[T]$  est l'ensemble des sommets d'un graphe  $\bar{\Gamma}(T) = \bar{\mathcal{R}}[T]$ , muni de la distance  $d_\Sigma$  définie par la longueur des  $\Sigma$ -mots. Nous dirons alors que  $(\mathcal{R}, \mathcal{T}, \Sigma)$  est une *relation d'équivalence graphée* et que  $(\Gamma, \mathcal{T}, \Sigma)$  un *pseudogroupe graphé*. Dans [8], le deuxième auteur a prouvé l'extension suivante du théorème 2.2.1:

**Théorème de réalisation géométrique 2.4.1.** *Soit  $\Gamma$  un pseudogroupe de génération compacte agissant sur un espace localement compact, métrisable et séparable  $X$  de dimension 0. Alors il existe lamination compacte par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$  dont le pseudogroupe de holonomie est équivalent à  $\Gamma$ .*

D'une part, si  $Y$  est un ouvert et fermé de  $X$  qui rencontre toutes les feuilles et si  $\Sigma$  est un système de génération compacte pour  $\Gamma|_Y$ , alors la fonction de valence  $val : Y \rightarrow \mathbb{N}$  est continue. Il existe donc un espace compact feilleté par graphes  $(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$  tel que  $Y$  est un fermé qui rencontre toute les feuilles de  $\mathcal{F}$  et  $\Gamma|_Y$  est le pseudogroupe de holonomie de  $\mathcal{F}$  réduit à  $X$ . D'autre part, si  $(\mathbf{Y}, \mathcal{F})$  un espace compact feilleté par graphes transversalement modelé par un espace localement compact, métrisable et séparable de dimension 0, il existe une lamination compacte par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathbf{L})$  telle que les pseudogroupes de holonomie de  $\mathcal{F}$  et  $\mathbf{L}$  réduits à l'ensemble de sommets  $Y$  sont égaux. En fait, comme nous l'ont fait remarquer B. Deroin et G. Hector, ce théorème d'épaissement reste valable en dimension topologique finie quelconque.

## 2.5 Graphes répétitifs et ensembles minimaux

Le but de ce paragraphe est de caractériser les ensembles minimaux de  $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$  et  $(\mathcal{M}, \mathcal{L})$  en adaptant la propriété d'*isomorphisme local* des pavages [1, 9].

**Définition 2.5.2.** i) Fixons un couple  $T, T' \in \mathcal{T}$ . Nous dirons qu' $T'$  contient une copie fidèle de la boule  $B_T(x, r)$  et nous écrirons  $B_T(x, r) \hookrightarrow T'$  s'il existe  $g \in G$  tel que  $g.B_T(x, r) = B_{T'}(g.x, r) \subset T'$ .

ii) Nous dirons qu'un graphe  $T \in \mathcal{T}$  est *récitatif* si pour tout entier  $r > 0$ , il existe un entier  $R > 0$  tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .

Nous adaptons ici une version uniforme de la propriété d'*isomorphisme local* usuelle. En fait, pour les pavages de type fini, les deux propriétés sont équivalentes. L'analogie pour les graphes fait partie du critère de minimalité suivant (dont l'équivalence  $(ii) \Leftrightarrow (iii)$  a été prouvée dans [2, 4]):

**Théorème 2.5.3.** Pour tout  $T \in \mathcal{T}$ , considérons l'ensemble fermé  $X = \overline{\mathcal{R}[T]}$  saturé pour  $\mathcal{R}$ . Les conditions suivantes sont équivalentes:

- i) le graphe  $T$  est récitatif;
- ii) pour tout  $r > 0$ , il existe  $R > 0$  tel que  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ ;
- iii) l'ensemble  $X$  est minimal.

**Preuve.** Il suffit de prouver  $(iii) \Rightarrow (i)$ , mais il convient avant de rappeler brièvement  $(iii) \Rightarrow (ii)$ . Pour cela, à tout réel  $r > 0$ , on lui associe une suite croissante d'ouverts  $U_R = \{ T' \in X / B_T(e, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  (avec  $R \geq 1$ ) qui recouvrent  $X$ . Puisque  $X$  est compact, il existe  $R > 0$  tel que  $X = U_R$ . Pour tout  $x \in T$ , le graphe  $x^{-1}.T \in U_R$  et donc  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_{x^{-1}.T}(e, R)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $g \in G$  tel que:  $g.B_T(e, r) = B_{x^{-1}.T}(g, r) \subset B_{x^{-1}.T}(e, R)$ . Alors on a:

$$h.B_T(e, r) = x.B_{x^{-1}.T}(g, r) = B_T(h, r) \subset x.B_{x^{-1}.T}(e, R) = B_T(x, R)$$

avec  $h = xg$  et  $B_T(e, r) \hookrightarrow B_T(x, R)$ . Pour démontrer  $(iii) \Rightarrow (i)$ , fixons un réel  $r > 0$  et un point  $x \in T$ . Comme auparavant, l'ensemble  $X$  est recouvert par une suite croissante d'ouverts  $U_R^x = \{ T' \in X / B_T(x, r) \hookrightarrow B_{T'}(e, R) \}$  et il existe  $R > 0$ , qui dépend de  $r$  et  $x$ , tel que  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout  $y \in T$ . Pour conclure, il faut pouvoir choisir  $R > 0$  indépendant du point  $x$ . Remarquons tout d'abord que pour tout sommet  $g$  de  $\mathcal{G}$ , la boule  $B_{\mathcal{G}}(g, r) = g.B_{\mathcal{G}}(e, r)$ . Rappelons aussi que la compacité  $\mathcal{T}$  provient du fait que  $B_{\mathcal{G}}(e, r)$  ne contient qu'un nombre fini de sous-graphes. Il en est de même pour  $B_{\mathcal{G}}(g, r)$ . En fait, à translation près, il n'y a qu'un nombre fini de boules de rayon  $r > 0$  distinctes. Considérons une famille

finie de points  $x_1, \dots, x_n \in T$  de manière que les boules  $B_T(x_i, r)$  représentent toutes les classes de translations possibles. Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $y \in T$ , on a  $B_T(x_i, r) \hookrightarrow B_T(y, R(r, x_i))$ . Si on pose  $R = \max\{R(r, x_1), \dots, R(r, x_n)\}$ , alors  $B_T(x, r) \hookrightarrow B_T(y, R)$  pour tout couple  $x, y \in T$ .  $\square$

### 3 L'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous donnons ici une nouvelle construction de l'*espace feuilleté de Ghys–Kenyon* [4], que n'utilise pas l'*arbre de Kenyon* [4, 7], mais ses règles de construction.

#### 3.1 L'arbre de Kenyon et l'espace feuilleté de Ghys–Kenyon

Nous allons commencer par rappeler la construction de l'arbre de Kenyon. Soient  $\mathcal{Z}^2$  le graphe de Cayley de  $\mathbb{Z}^2$ , muni du système de générateurs  $\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\}$ , et  $T_1$  le sous-arbre de  $\mathcal{Z}^2$  décrit dans la figure 3.

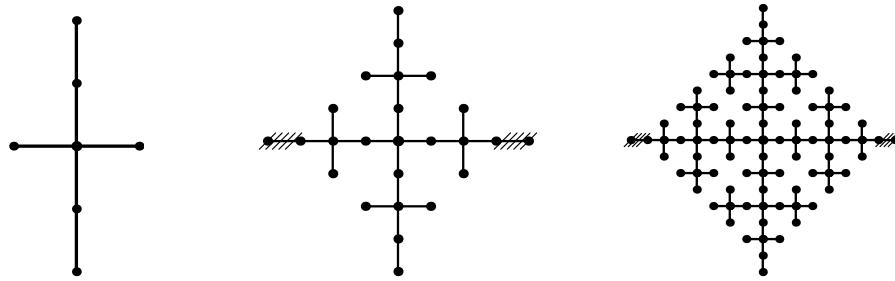


Figure 3: Les arbres  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$

Cet arbre est translaté ensuite par le vecteur  $(0, 2)$ , puis l'image est tournée à l'aide des rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . L'élagage des arêtes terminales contenues dans l'axe horizontal fournit un arbre  $T_2$ . Si on répète ce procédé, on obtient de même un arbre  $T_3$ . Par récurrence, on obtient une suite d'arbres  $T_n$  qui rencontrent les axes horizontal et vertical suivant les intervalles  $[-2^n + 1, 2^n - 1] \times \{0\}$  et  $\{0\} \times [-2^n, 2^n]$  respectivement. Nous appellerons *arbre de Kenyon* la réunion  $T_\infty = \bigcup_{n \geq 1} T_n \subset \mathcal{Z}^2$ . C'est un arbre apériodique et répétitif ayant 4 bouts.

Nous appellerons *minimal de Ghys–Kenyon* l'ensemble  $X = \overline{\mathcal{R}[T_\infty]}$ . D'après le théorème 2.2.1, il existe un feuilletage par graphes  $\mathcal{F}$  d'un espace compact  $\mathbf{X}$  pour lequel  $X$  est une transversale complète et  $\mathcal{R}$  est la relation d'équivalence induite par  $\mathcal{F}$ . Nous appellerons *espace feuilleté de Ghys–Kenyon* ce minimal de l'espace feuilleté de Gromov-Hausdorff  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$ . En fait, d'après le théorème 2.4.1, on peut remplacer  $(\mathbf{X}, \mathcal{F})$  par une vraie lamination par surfaces de Riemann  $(\mathbf{M}, \mathcal{L})$ , appelée *lamination de Ghys–Kenyon*.

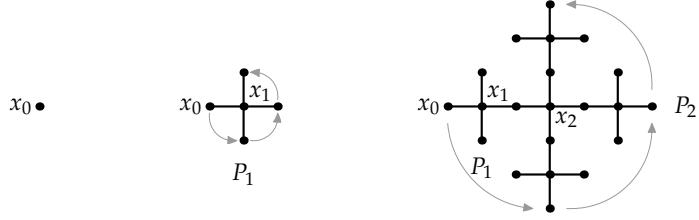


Figure 4: Construction de l’arbre  $\Phi(\alpha)$

### 3.2 Codage des feuilles

Nous allons reconstruire le minimal de Ghys–Kenyon à l’aide d’une application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow X$  qui, à toute suite  $\alpha = \alpha_0\alpha_1\dots \in \mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}} = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$ , associe un arbre apériodique et répétitif  $\Phi(\alpha)$  dans l’enveloppe de  $T_{\infty}$ . Nous construirons  $\Phi(\alpha)$  de proche en proche en partant du sommet  $x_0 = 0$  et de l’arbre trivial  $P_0 = \{0\}$ . Pour cela, nous commençons par identifier les éléments de  $\mathbb{Z}_4$  avec les racines quatrièmes de l’unité grâce à l’application  $\mathbf{r} : \mathbb{Z}_4 \rightarrow \mathbb{C}$  définie par  $\mathbf{r}(k) = e^{\frac{\pi}{2}ik}$ . Nous joignons les sommets  $x_0$  et  $x_1 = \mathbf{r}(\alpha_0)$  par une arête de  $\mathcal{Z}^2$ , puis nous prenons la réunion des images de cette arête par les rotations de centre  $x_1$  et d’angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Nous obtenons ainsi un arbre  $P_1 = \Phi(\alpha_0)$ . Considérons ensuite l’unique arête de  $\mathcal{Z}^2$  qui joint le sommet  $x_2 = x_1 + 2\mathbf{r}(\alpha_1)$  avec un sommet de  $P_1$ . Nous appelons  $P_2 = \Phi(\alpha_0\alpha_1)$  la réunion de l’arbre  $P_1$  et leurs images par les rotations de centre  $x_1$  et d’angle  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\pi$  et  $\frac{3\pi}{2}$ . Par récurrence, nous avons une suite de sommets  $x_n = x_{n-1} + 2^{n-1}\mathbf{r}(\alpha_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} 2^i \mathbf{r}(\alpha_i)$  et une suite croissante de sous-arbres finis  $P_n$  de  $\mathcal{Z}^2$ . Alors  $\Phi(\alpha) = \bigcup_{n \geq 0} P_n = \bigcup_{n \geq 0} \Phi(\alpha_0\dots\alpha_{n-1})$  est un arbre apériodique et répétitif ayant au plus 2 bouts. Nous appellerons *squelette de  $\Phi(\alpha)$*  la suite de sommets  $x_0x_1\dots x_n\dots$  identifiée au chemin d’arêtes obtenu en joignant les sommets  $x_n$  et  $x_{n+1}$  par  $2^n$  arêtes dans la direction  $\mathbf{r}(\alpha_i)$ . Nous venons de définir une application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{T}$ .

**Proposition 3.2.1.** *Le minimal de Ghys-Kenyon  $X$  est l’enveloppe  $\overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  de tout arbre codé  $\Phi(\alpha)$ . Il se décompose en la réunion disjointe de la classe  $\mathcal{R}[T_{\infty}]$  et de l’ensemble saturé  $\bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$ .*

**Preuve.** Vérifions d’abord que  $X = \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$ . En effet,  $T_{\infty} \in \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$  car  $B_{T_{\infty}}(0, 2^n - 1) = B_{\Phi(\alpha)}(x_n, 2^n - 1) - x_n = B_{\Phi(\alpha)-x_n}(0, 2^n - 1)$ . Donc  $X = \overline{\mathcal{R}[T_{\infty}]} \subset \overline{\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]}$ . Mais puisque  $\Phi(\alpha)$  est répétitif, on a l’égalité. Pour montrer la deuxième affirmation, on constate que les arbres  $T_{\infty}$  et  $\Phi(\alpha)$  sont distincts car ils n’ont pas le même nombre de bouts. Leurs classes d’équivalence  $\mathcal{R}[T_{\infty}]$  et  $\mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$  le sont aussi. Il faut vérifier que tout arbre  $T \in X - \mathcal{R}[T_{\infty}]$  est équivalent à un arbre  $\Phi(\alpha)$ . En remplaçant  $T$  par un translaté  $T - v$ , nous pourrons supposer

que  $\text{val}(T) = \text{val}_T(0) = 1$ . Nous construirons alors de proche en proche une suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  telle que  $T = \Phi(\alpha)$ . Par hypothèse, la sphère  $S_T(0, 1) = \partial\overline{B}_T(0, 1)$  est réduite à un point  $x_1$  et  $\alpha_0 = \mathbf{r}^{-1}(x_1)$ . Supposons connus les codes  $\alpha_0 \dots \alpha_n$  et les points  $x_0 \dots x_n$  du squelette. Alors la sphère  $S_T(x_n, 2^n) = \partial\overline{B}_T(x_n, 2^n)$  vérifie l'une des deux conditions suivantes:

- i)  $S_T(x_n, 2^n)$  est réduite à un seul point  $x_{n+1} = x_n + 2^n v$  où  $v \in \mathbb{Z}^4$ . Dans ce cas, nous définirons  $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$ .
- ii)  $S_T(x_n, 2^n)$  contient deux points  $x_{n+1}^0$  et  $x_{n+1}^1$ . Dans ce cas, il existe  $i \in \{0, 1\}$  tel que  $B_T(x_{n+1}^i, 2^{n+2} - 1) = B_{T_\infty}(0, 2^{n+2} - 1)$  (voir la figure 5) et nous définirons  $x_{n+1} = x_{n+1}^{1-i} = x_n + 2^n v$  et  $\alpha_n = \mathbf{r}^{-1}(v)$  avec  $v \in \mathbb{Z}^4$ .

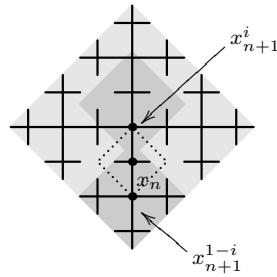


Figure 5: Le  $(n+1)$ -ième code

Par récurrence, nous aurons une suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  telle que  $T = \Phi(\alpha)$ .  $\square$

Considérons l'ouvert-fermé  $X^{\leq 2} = \{T \in X / \text{val}(T) \leq 2\}$ , le  $G_\delta$  dense  $Y = X - \mathcal{R}[T_\infty] = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{S}_4} \mathcal{R}[\Phi(\alpha)]$  et le borélien  $Y^{\leq 2} = Y \cap X^{\leq 2}$ . D'après la preuve de la proposition ci-dessus, l'application de codage  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est surjective.

### 3.3 Relation cofinale

Si on munit  $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^\mathbb{N}$  de la topologie produit, engendrée par les cylindres  $C_{\beta_0 \dots \beta_n}^{i_0 \dots i_n} = \{\alpha \in \mathcal{S}_4 / \alpha_{i_0} = \beta_0, \dots, \alpha_{i_n} = \beta_n\}$ ,  $\mathcal{S}_4$  est homéomorphe à l'ensemble de Cantor. Soit  $\sigma : \mathcal{S}_4 \rightarrow \mathcal{S}_4$  le déplacement de Bernoulli donné par  $\sigma(\alpha)_n = \alpha_{n+1}$  pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$  et tout entier  $n \geq 0$ . Deux suites  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathcal{S}_4$  sont *cofinales* s'il existe  $n \geq 0$  tel que  $\sigma^n(\alpha) = \sigma^n(\beta)$ , c'est-à-dire  $\alpha_m = \beta_m$  pour tout  $m \geq n$ . Pour tout couple de suites finies  $\alpha_0 \dots \alpha_n$  et  $\beta_0 \dots \beta_n$ , les arbres finis  $\Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n)$  et  $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n)$  sont reliés par  $\Phi(\beta_0 \dots \beta_n) = \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n) - v$  où le vecteur  $v = \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\alpha_i) - \sum_{i=0}^n 2^i \mathbf{r}(\beta_i) = \sum_{i=0}^n 2^i (\mathbf{r}(\alpha_i) - \mathbf{r}(\beta_i))$ . Un argument simple montre alors que:

**Proposition 3.3.1.** *Deux arbres codés  $\Phi(\alpha)$  et  $\Phi(\beta)$  sont  $\mathcal{R}$ -équivalents si et seulement si les suites  $\alpha$  et  $\beta$  sont cofinales.*

La remarque précédente montre aussi que  $\Phi$  est injective, ce qui nous donne:

**Proposition 3.3.2.** *L'application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est une bijection*

Signalons que l'expansion binaire des éléments de  $\mathbb{Z}_4$  fournit un homéomorphisme entre  $\mathcal{S}_4 = \mathbb{Z}_4^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{S}_2 = \mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ , induit par les substitutions  $0 \rightarrow 00$ ,  $1 \rightarrow 10$ ,  $2 \rightarrow 01$  et  $3 \rightarrow 11$  obtenues en remplaçant  $k \in \mathbb{Z}_4$  par un couple d'éléments  $a(k)$  et  $b(k)$  de  $\mathbb{Z}_2$  tels que  $k = a(k) + 2b(k)$ . Évidemment les relations cofinales sur  $\mathcal{S}_4 = \{0, 1, 2, 3\}^{\mathbb{N}}$  et  $\mathcal{S}_2 = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  deviennent isomorphes. Il y a d'ailleurs une équivalence orbitale entre la relation cofinale  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sur  $\mathcal{S}_2$  et la relation d'équivalence engendrée par la transformation  $T : \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  décrite dans l'introduction. Sauf les suites  $000\dots$  et  $111\dots$  qui appartiennent à une même orbite, les classes de cofinalité coïncident avec les orbites de  $T$ .

### 3.4 Dynamique borélienne

Empruntée de la théorie des pavages, la notion de *motif* est le bon outil pour décrire la  $\sigma$ -algèbre des boréliens de  $X$ . Tout sous-arbre fini  $P$  de  $\mathcal{Z}^2$  contenant l'origine sera appelé un *motif* de  $\mathcal{Z}^2$ . Nous dirons que  $T \in \mathcal{T}$  contient le motif  $P$  autour d'un sommet  $p$  si  $P + p \subset T$  et nous définirons  $X_{P,p} = \{T \in X/P + p \subset T\}$ . Si  $p = 0$ , nous écrirons simplement  $X_P$ . Comme pour les pavages [1], les ensembles  $X_P$  sont des ouverts-fermés de  $X$ . Néanmoins, les motifs ne suffisent pas pour engendrer la topologie de  $X$ . En effet, la boule  $B = \overline{B}_X(\Phi(00\dots), e^{-1})$  est l'ensemble des arbres  $T$  tels que  $\overline{B}_T(0, 1) = \overline{B}_{\Phi(00\dots)}(0, 1) = {}^0\bullet-\bullet$ , mais il n'y a aucun motif  $P$  tel que  $X_P \subset B$ . En fait,

$$B = X_0\bullet\bullet - (X_{\bullet_0} \cup X_{\bullet\bullet_0} \cup X_{\bullet_0}).$$

En général, pour tout arbre  $T \in X$  et tout entier  $r > 0$ , la boule  $\overline{B}_X(T, e^{-r})$  est l'ouvert-fermé  $X_{(P,A)}$  associé au motif fin  $(P, A)$  où  $P = \overline{B}_T(e, r)$  et  $A$  est l'ensemble des arêtes du graphe  $\overline{B}_{\mathcal{Z}^2}(e, r) - B_T(e, r - 1)$  qui rencontrent  $P$ . Par conséquent, les ouverts-fermés  $X_P$  engendrent la  $\sigma$ -algèbre des boréliens.

L'application de codage  $\Phi$  n'est pas continue, car  $\mathcal{S}_4$  est compact, mais  $Y^{\leq 2}$  ne l'est pas. Néanmoins,  $\Phi$  a deux propriétés importantes:

**Proposition 3.4.1.** *L'application  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  est borélienne ouverte.*

**Preuve.** Pour tout motif  $P$ , l'ensemble  $\Phi^{-1}(X_P) = \bigcup_{\alpha_0 \dots \alpha_n \in P} C_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^{0 \dots n}$  où  $\mathcal{P} = \{\alpha_0 \dots \alpha_n / P \subset \Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n)\}$ . Par ailleurs, on a  $\Phi(C_{\alpha_0 \dots \alpha_n}^{0 \dots n}) = X_{\Phi(\alpha_0 \dots \alpha_n)}$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant affirmer que *la dynamique transverse borélienne de la lamination de Ghys-Kenyon est représentée par une machine à sommer binaire*.

### 3.5 Propriétés ergodiques

Soit  $\mathcal{R}$  une relation d'équivalence mesurable discrète sur  $X$ , munie d'une mesure quasi-invariante ergodique  $\mu$ . Par analogie avec la classification des facteurs de F. J. Murray et J. von Neumann, on peut distinguer trois types de relations:

- 1) *Type I<sub>n</sub>* (avec  $n = 1, 2, \dots, \infty$ ): si  $\mathcal{R}$  est transitive (avec cardinal  $\#X = n$ ).
- 2) *Type II<sub>n</sub>* (avec  $n = 1$  ou  $\infty$ ): si  $\mathcal{R}$  n'est pas transitive et si  $\mu$  est équivalente à une mesure (finie ou infinie) invariante pour  $\mathcal{R}$ .
- 3) *Type III*: s'il n'existe pas de mesure invariante équivalente à  $\mu$ .

Si  $\mu_4$  est la mesure de probabilité équidistribuée sur  $\mathcal{S}_4$ , alors  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  est de type II<sub>1</sub>.

**Proposition 3.5.1.** *La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  sur  $X$  est de type II<sub>1</sub>.*

**Preuve.** Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $B_n$  la boule de centre  $T_\infty$  et de rayon  $n$  contenue dans  $\mathcal{R}[T_\infty]$ . L'isomorphisme entre  $\overline{\mathcal{R}}[T_\infty]$  et  $T_\infty$  identifie  $B_n$  avec  $B_{T_\infty}(0, n)$ . Soit  $\mu_n$  la mesure de comptage sur  $B_n$ . Pour tout motif  $P$ , on a:

$$\mu_n(X_P) = \frac{\#B_n \cap X_P}{\#B_n} = \frac{\#\{ p \in B_{T_\infty}(0, n) / P + p \subset T_\infty \}}{\#B_{T_\infty}(0, n)} = \frac{A(P, n)}{V(n)}$$

Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que  $\mu_n$  converge faiblement vers une mesure de probabilité  $\mu$ . Puisque  $X_P$  est un ouvert-fermé, on a:

$$\mu(X_P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(X_P) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(P, n)}{V(n)} = \text{fréquence du motif } P.$$

D'autre part, pour tout sommet  $v \in P$ , l'ensemble  $X_P - v = X_{P-v}$  est l'image de  $X_P$  par la translation  $\tau_v(T) = T - v$ . Si  $T_\infty$  contient le motif  $P$  autour d'un point  $p \in B_{T_\infty}(0, n-r)$ , il contient aussi le motif  $P - v$  autour du point  $p+v \in B_{T_\infty}(0, n)$  avec  $r > \|v\|$ . Donc

$$|\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| \leq \frac{V(n) - V(n-r)}{V(n)} \leq \frac{V(n+r) - V(n-r)}{V(n)}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Mais puisque la fonction  $V(n)$  est à croissance sous-exponentielle, il vient  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n(X_P - v) - \mu_n(X_P)| = 0$  et donc  $\mu$  est invariante pour  $\mathcal{R}$ .  $\square$

**Proposition 3.5.2.** *L'application  $\Phi$  définit une équivalence orbitale stable entre les relations d'équivalence mesurées  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$  sur  $\mathcal{S}_4$  et  $\mathcal{R}$  sur  $X$ .*

**Preuve.** Puisque le saturé de  $Y^{\leq 2}$  est de mesure totale, il nous suffit de démontrer que  $\Phi : \mathcal{S}_4 \rightarrow Y^{\leq 2}$  envoie  $\mu_4$  sur une mesure équivalente à  $\mu|_{Y^{\leq 2}}$ . Par l'invariance de  $\mu$ , on a  $\mu(X^{\leq 2}) = \frac{3}{4}$  et donc  $\mu_{X^{\leq 2}} = \frac{4}{3}\mu|_{X^{\leq 2}}$  est une mesure de probabilité sur  $X^{\leq 2}$  invariante pour  $\mathcal{R}|_{X^{\leq 2}}$ . L'inverse de  $\Phi$  envoie la mesure induite par  $\mu_{X^{\leq 2}}$  sur une mesure de probabilité sur  $\mathcal{S}_4$  invariante pour  $\mathcal{R}_{\text{cof}}$ . L'unicité ergodique de  $\mu_4$  entraîne que  $\Phi_*\mu_4 = \mu_{X^{\leq 2}}|_{Y^{\leq 2}}$ .  $\square$

**Théorème 3.5.3.** *La dynamique transverse mesurable de la lamination de Ghys-Kenyon ( $\mathbf{M}, \mathcal{L}$ ) est représentée par une machine à sommer binaire. En outre, elle est uniquement ergodique.*

Un très joli résultat d'É. Ghys [3] permet de parler du type topologique des feuilles génériques de  $\mathcal{L}$ . De notre cas, on a que:

- i) il y a un ensemble saturé résiduel et de mesure totale dont toutes les feuilles ont exactement un bout;
- ii) il y a un ensemble saturé maigre et de mesure nulle constitué par une infinité non dénombrable des feuilles ayant deux bouts;
- iii) il y a une seule feuille avec quatre bouts.

Le point essentiel est de vérifier qu'il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des feuilles ayant deux bouts et l'ensemble des suites de  $\mathcal{S}_4$  contenant un nombre fini de détours et une infinité d'aller et retours. Pour toute suite  $\alpha \in \mathcal{S}_4$ , nous appelons *aller* et *retour* (resp. *détour*) tout couple  $\alpha_n \alpha_{n+1}$  avec  $\alpha_n \neq \alpha_{n+1}$  ayant la même (resp. distincte) parité. Cela permet de montrer que l'ensemble des feuilles à deux bouts est non dénombrable de mesure nulle. D'après le lemme 2.6 de [2], l'ensemble des feuilles ayant un bout est résiduel.

## 4 Dynamique topologique

Toutes les  $\mathcal{R}$ -classes du minimal de Ghys-Kenyon sont obtenues à partir des mêmes motifs par un même procédé d'inflation. Nous utiliserons l'inclusion de ces motifs dans les motifs qui résultent de l'inflation pour décrire sa dynamique topologique.

### 4.1 Relations d'équivalence affables

Une relation d'équivalence  $\beta$ -discrète  $\mathcal{R}$  sur un espace localement compact séparé  $X$  est dite *compacte* [5] si  $\mathcal{R} - \Delta$  est compact où  $\Delta$  est la diagonale de  $X \times X$ .

**Définition 4.1.1** ([5]). Une relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  définie sur un espace totalement disconnexe  $X$  est dite *affable* s'il existe une suite croissante de relations d'équivalence compactes  $\mathcal{R}_n$  telle que  $\mathcal{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$ . Si on munit  $\mathcal{R}$  de la topologie limite inductive, alors  $\mathcal{R} = \varinjlim \mathcal{R}_n$  est une relation d'équivalence  $\beta$ -discrète *approximativement finie* (AF en abrégé).

Un *diagramme de Bratteli* est un graphe orienté  $\mathcal{B} = (V, E)$  dont les ensembles de sommets et d'arêtes admettent des décompositions  $V = \bigsqcup_{n \geq 0} V_n$  et  $E = \bigsqcup_{n \geq 0} E_n$  où  $V_n$  et  $E_n$  sont des ensembles finis non vides tels que pour toute arête  $e \in E_n$ , l'origine  $\alpha(e) \in V_n$  et l'extrémité  $\beta(e) \in V_{n+1}$  [5]. On appelle *source* tout sommet

$v$  tel que  $\beta^{-1}(v) = \emptyset$ . Soit  $X_{\mathcal{B}}$  l'espace des chemins infinis  $e_n e_{n+1} e_{n+2} \dots$  (avec  $\alpha(e_{i+1}) = \beta(e_i)$ ) issus d'une source  $\alpha(e_n)$  de  $\mathcal{B}$ . La relation d'équivalence *cofinal*  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  sur  $X_{\mathcal{B}}$  (qui identifie  $e_n e_{n+1} \dots$  et  $e'_m e'_{m+1} \dots$  s'il existe  $N \geq m, n$  tel que  $e'_i = e_i$  pour tout  $i \geq N$ ) est affable. En fait, d'après [5], toute relation d'équivalence AF sur  $X$  est isomorphe à la relation cofinale  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  sur  $X_{\mathcal{B}}$  définie par un diagramme de Bratteli  $\mathcal{B}$ .

## 4.2 Affabilité du minimal de Ghys-Kenyon

Soit  $\mathcal{P}_n = \{A_0^0, A_0^1, A_0^2, A_0^3, B_0^0, B_0^1, C_n\}$  la famille de *motifs basiques de taille n* définis par  $A_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k$ ,  $B_n^k = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n - 1) \cup e_n^k \cup e_n^{k+2}$  et  $C_n = \overline{B}_{T_\infty}(0, 2^n)$  où  $e_n^k$  est l'arête qui rélie  $(2^n - 1)\mathbf{r}(k)$  et  $2^n\mathbf{r}(k)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}_4$  (voir la figure 6). Deux éléments  $T$  et  $T'$  de  $X - X_{C_n}$  sont  $\mathcal{R}_n$ -équivalents s'il existe un motif basique  $P \in \mathcal{P}_n - \{C_n\}$  et deux sommets  $v, v' \in P$  avec  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$  tels que  $P \subset T - v = T' - v'$ . D'autre part, la relation  $\mathcal{R}_n$  est triviale sur  $X_{C_n}$ .

$A_0^0$			$A_1^0 = C_0 + A_0^0 + A_0^1 + A_0^3 + B_0^0$
$A_0^1$			$A_1^1 = C_0 + A_0^0 + A_0^1 + A_0^2 + B_0^1$
$A_0^2$			$A_1^2 = C_0 + A_0^1 + A_0^2 + A_0^3 + B_0^0$
$A_0^3$			$A_1^3 = C_0 + A_0^0 + A_0^2 + A_0^3 + B_0^1$
$B_0^0$			$B_1^0 = C_0 + A_0^1 + A_0^3 + 2B_0^0$
$B_0^1$			$B_1^1 = C_0 + A_0^0 + A_0^2 + 2B_0^1$
$C_0$			$C_1 = C_0 + 2B_0^0 + 2B_0^1$

Figure 6: Les familles  $\mathcal{P}_0$  et  $\mathcal{P}_1$  et les règles d'inflation

**Proposition 4.2.1.** *Les relations d'équivalence  $\mathcal{R}_n$  sont compactes et ouvertes dans  $\mathcal{R}$  et donc  $\mathcal{R}_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}_n$  est affable et ouverte dans  $\mathcal{R}$ .*

**Preuve.** Montrons que  $\mathcal{R}_n$  est ouverte dans  $\mathcal{R}$ . Pour tout couple  $(T, T') \in \mathcal{R}_n$ , il existe un motif  $P \in \mathcal{P}_n$  et deux sommets  $v, v' \in P$  avec  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$  tels que  $P \subset T - v = T' - v'$ . Choisissons  $N > 0$  tel que  $P + v \subseteq B_T(0, N)$ , puis considérons l'ouvert  $U = \{T'' \in X / B_{T''}(0, N) = B_T(0, N)\}$  de  $X$  et l'ouvert  $O(U, w)$  de  $\mathcal{R}$  où  $w = v - v'$ . Pour tout  $T'' \in U$ , le couple  $(T'', T'' - w) \in \mathcal{R}_n$  car  $T''$  contient le motif  $P$  autour de  $v$ . Donc  $(T, T') \in O(U, v) \subset \mathcal{R}_n$ . Alors  $\mathcal{R}_n$  est la réunion des ouverts  $O(U, w)$  associés motifs  $P \in \mathcal{P}_n$  et aux sommets  $v, v' \in P$  tels que  $\|v\|, \|v'\| < 2^n$ . En remplaçant  $U$  par l'ouvert-fermé  $X_{P,v}$  et  $O(U, w)$  par le graphe de la translation  $T'' \mapsto T'' - w$  définie sur  $X_{P,v}$ , nous aurons que  $R_n$  est compacte.  $\square$

Toutes les classes d'équivalence de  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{R}_\infty$  sont égales, sauf celle de  $T_\infty$  qui se décompose en la réunion de la classe triviale  $\{T_\infty\}$  et de quatre classes isomorphes aux composantes connexes de  $T_\infty - \{0\}$ . La dynamique topologique de  $\mathcal{R}_\infty$  est représentée par le diagramme de Bratteli  $\mathcal{B} = (V, E)$  où  $V_0 = \{0\}$ ,  $V_{n+1} = \mathcal{P}_n = \{A_n^0, A_n^1, A_n^2, A_n^3, B_n^0, B_n^1, C_n\}$  et  $P \in \mathcal{P}_n$  est relié par une arête de  $E_{n+1}$  à  $Q \in \mathcal{P}_{n+1}$  si et seulement si  $Q$  contient une copie fidèle de  $P$ . L'isomorphisme  $\Psi : X \rightarrow X_{\mathcal{B}}$  entre  $\mathcal{R}_\infty$  et  $\mathcal{R}_{\mathcal{B}}$  est donné par  $\Psi(T) = (e_0, e_1, \dots)$  où  $\beta(e_n)$  est l'unique motif  $P \in \mathcal{P}_{n+1}$  pour lequel  $T - v$  appartient à l'ouvert-fermé  $X_{(P,A)}$  avec  $v \in P$  et  $A$  formé des arêtes de  $\overline{B}_{T_\infty}(0, 2^{n+1})$  qui n'appartiennent pas à  $P$ . Pour tout  $T \in X$  avec  $\text{val}(T) = 4$ , l'origine 0 est l'intersection des translatés de quatre motifs basiques de taille  $n$ . Nous modifierons alors  $\mathcal{R}_n$  pour que 0 devienne équivalent aux autres points du translaté de  $A_n^0$  ou de  $B_n^0$ . Nous obtiendrons ainsi une suite de relations d'équivalence compactes  $\mathcal{R}'_n \supset \mathcal{R}_n$ . Alors  $\mathcal{R}'_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{R}'_n$  est affable. Puisque les bouts de la feuille de  $\mathcal{F}$  passant par  $T_\infty$  sont partout denses,  $\mathcal{R}[T_\infty]$  se décompose en la réunion de quatre orbites denses et donc  $\mathcal{R}'_\infty$  est minimale. Nous pouvons maintenant appliquer le corollaire 4.17 de [5]:

**Théorème 4.2.2.** *La relation d'équivalence  $\mathcal{R}$  est affable et la dynamique transverse de la lamination de Ghys-Kenyon est représentée par un système dynamique minimal sur l'ensemble de Cantor.*

## Références

- [1] J. Bellissard, R. Benedetti, J.M. Gambaudo. Spaces of Tilings, Finite Telescopic Approximations and Gap-Labelling. *Comm. Math. Phys.*, **261** (2006), 1-41.
- [2] E. Blanc. *Propriétés génériques des laminations*, Thèse UCB-Lyon 1, 2001.
- [3] E. Ghys. Topologie des feuilles génériques. *Ann. of Math.*, **141** (1995), 387–422.
- [4] E. Ghys. Laminations par surfaces de Riemann. *Panor. Syntheses*, **8** (1999), 49–95.

- [5] T. Giordano, I. F. Putnam, C. F. Skau. Affable equivalence relations and orbit structure of Cantor dynamical systems. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **24** (2004), 441-475.
- [6] A. Haefliger. Pseudogroups of local isometries, in *Differential Geometry (Santiago de Compostela, 1984)*, Research Notes in Math. 131, Pitman, Boston, 1985, 174-197.
- [7] R. Kenyon. A group of paths in  $\mathbb{R}^2$ . *Trans. Amer. Math. Soc.*, **348** (1996), 3155-3172.
- [8] A. Lozano Rojo. *Dinámica transversa de laminaciones definidas por grafos repetitivos*. Tesis Doctoral UPV-EHU, 2008.
- [9] C. Radin, M. Wolff. Space tilings and local isomorphism. *Geom. Dedicata*, **42** (1992), 355–360.