



Universidad
Zaragoza

Trabajo Fin de Máster

Fenomenología de teorías de gravitación más allá de
relatividad general

Phenomenology of theories of gravitation beyond
General Relativity

Autor

Miguel Pardina García

Director

Manuel Asorey Carballeira

Facultad de Ciencias
2023

Índice

1. Introducción	1
2. Gravedad con altas derivadas	3
2.1. Inestabilidad de Ostrogradski y <i>ghosts</i> en altas derivadas	4
2.2. Posibles resoluciones a las patologías de las altas derivadas	6
3. Soluciones cosmológicas en gravedad cuadrática	7
3.1. Análisis de las ecuaciones de campo en una métrica FRW	9
3.2. Reinterpretación cosmológica de la gravedad cuadrática	12
3.3. Soluciones de Sitter, estabilidad y futuro del universo	13
3.4. Pasado del universo y singularidad inicial	15
4. Teoría inflacionaria en gravedad cuadrática	17
4.1. Descripción básica del paradigma inflacionario	17
4.2. Modelo de Starobinsky	20
4.3. Modelo de gravedad cuadrática	23
4.4. Modelos más generales de gravedad cuadrática	23
5. Conclusiones	27
Referencias	28
Anexo A. Notación y convenios	31
Anexo B. Equivalencia entre el formalismo Lagrangiano restringido y general	32
Anexo C. Desarrollo explícito del modelo inflacionario	38

1. Introducción

La relatividad general clásica se describe por la acción de Einstein-Hilbert

$$S_{EH} = \frac{M_p^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1)$$

siendo $M_p = (8\pi G)^{-1/2}$ la masa de Planck reducida, G la constante de Newton, R el escalar de curvatura y g el determinante de la métrica $g_{\mu\nu}$. Dicha acción es la más simple posible que proporciona las ecuaciones de campo de Einstein y que contiene derivadas segundas de la métrica. Sin embargo, no hay *a priori* una razón fundamental por la que no se puedan construir acciones más complejas que contengan derivadas de orden superior en la métrica. De hecho, en el proceso de cuantización de la teoría (1), emergen divergencias a un *loop*¹ que son proporcionales a invariantes de curvatura de segundo orden. Para absorber dichas divergencias, se deben incluir contratérminos de la forma [1]

$$\Delta\mathcal{L}_{1\text{-loop}} = a_1 R^2 + a_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + a_3 R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta} + a_4 \square R, \quad (2)$$

donde a_i son parámetros escogidos para cancelar justamente las divergencias de un *loop*. De manera similar, la renormalización de la relatividad general a orden de dos *loops* requiere términos de orden cúbico en curvatura como $R\square R$ o $R^{\alpha\beta}_{\mu\nu} R^{\mu\nu}_{\rho\sigma} R^{\rho\sigma}_{\alpha\beta}$ [2], las correcciones a tres *loops* requieren a su vez contratérminos de cuarto orden en curvatura, etc. Este procedimiento continua de forma indefinida, es decir, las divergencias que aparecen en la expansión perturbativa no pueden ser absorbidas por un número finito de contratérminos, mostrando que la relatividad general no es una teoría renormalizable.

Históricamente, las teorías no renormalizables eran catalogadas de no predictivas y solían abandonarse, pero el enfoque moderno Wilsoniano ha permitido sacar un provecho enorme de este tipo de teorías en el contexto de teorías efectivas [3]. Bajo este prisma, los términos de la acción están organizados en potencias de E/M_p , donde E es la escala de energía típica del problema. El simple análisis dimensional muestra que las curvaturas de orden superior corresponden a potencias más altas de E/M_p , por lo que, a energías muy por debajo de M_p , las potencias superiores de curvatura están completamente suprimidas y pueden tratarse como pequeñas perturbaciones. De esta forma, a una precisión deseada, la serie infinita de términos se puede truncar produciendo sólo un número finito de

¹Las correcciones de diagramas de *loops* a procesos *tree-level* (completamente especificados por el Lagrangiano clásico) se corresponden con órdenes superiores en teoría de perturbaciones.

parámetros libres. Consecuentemente, los términos de orden superior capturan la física subyacente de manera perturbativa y sólo contribuyen a los vértices de los diagramas de Feynman, no a los propagadores. Como resultado se obtiene una teoría que, aunque no es renormalizable, puede renormalizarse de forma efectiva en cada *loop*, orden a orden. Naturalmente, esta teoría resultante es únicamente válida para energías muy por debajo de M_p , pues cuando ésta se alcanza la expansión en el parámetro E/M_p no es legítima.

En un enfoque distinto, que es el que vamos a seguir en este trabajo, podríamos permitir que los coeficientes a_i de los términos con derivadas superiores en (2) tomaran valores arbitrarios, no ajustados para cancelar las divergencias a un *loop*. En ese caso, los términos de alta curvatura compiten con el término de Einstein-Hilbert en la escala de Planck, es decir, no son meros contratérminos como en la relatividad general, sino que se tratan en igualdad de condiciones que el término de Einstein-Hilbert, contribuyendo así tanto a los vértices como a los propagadores. Esta nueva teoría, usualmente llamada gravedad cuadrática y que naturalmente difiere de la relatividad general cuántica, presenta un cambio drástico en la estructura de las divergencias. La acción construida con invariantes de curvatura de segundo orden resulta ser renormalizable a todos los órdenes de *loops* [4] y no necesita la inclusión de términos con derivadas aún superiores. Esta teoría podría interpretarse entonces como una teoría fundamental de gravedad cuántica, y de hecho es una de las candidatas prominentes para ello. Por supuesto, el éxito de la gravedad cuadrática no es puramente teórico, sino que fenomenológicamente es el modelo más favorecido por la colaboración Planck [5] para explicar la era inflacionaria del universo primordial [6].

El objetivo principal de este trabajo consiste en analizar el comportamiento cosmológico de la gravedad cuadrática desde una perspectiva fundamental, mostrando las diferencias que emergen con respecto al marco vigente de la relatividad general, y fenomenológica, con el fin de predecir adecuadamente las observaciones actuales sobre la época inflacionaria del universo. En cuanto a la estructura del mismo, en primer lugar, introduciremos la teoría cuadrática con sus posibles ventajas e inconvenientes. Posteriormente, analizaremos las soluciones cosmológicas que presenta dicha teoría y finalmente describiremos el escenario inflacionario en el marco de las teorías más allá de relatividad general.

2. Gravedad con altas derivadas

Las teorías de gravitación con altas derivadas son teorías más allá de la relatividad general basadas en incorporar operadores de curvatura adicionales en la acción de Einstein-Hilbert (1). En el intento de desarrollar una teoría de gravedad cuántica han surgido muchos tipos distintos de modelos gravitatorios con altas derivadas. Estos modelos han mejorado notablemente nuestro conocimiento sobre gravedad cuántica, pero siguen existiendo varios problemas abiertos en ellos, siendo uno de los más discutidos la presencia de grados de libertad adicionales aparentemente patológicos, llamados partículas *ghost*.

Stelle [4, 7] propuso y desarrolló una teoría de gravitación a la que vamos a prestar una atención central en este trabajo, llamada gravedad cuadrática², definida por la acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} (\gamma R + \alpha R^2 - \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) , \quad (3)$$

donde $\gamma = \frac{M_p^2}{2}$ es el coeficiente usual de la acción de Einstein-Hilbert para recuperar el límite Newtoniano, mientras que α y β son constantes de acoplo adimensionales que acompañan a los términos de alta curvatura. Bajo la premisa cuadrática general, la acción (3) podría, en principio, contener también términos con acoplos constantes³ a $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ o $\square R$. Sin embargo, en una variedad \mathcal{M} tetradimensional, el término de Gauss-Bonnet

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} \quad (4)$$

resulta ser un invariante topológico proporcional a la característica de Euler $\chi(\mathcal{M}) = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} G$, que describe la topología de la variedad \mathcal{M} . Esta propiedad topológica nos permite escribir el término Riemann-Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ como una combinación del escalar de Ricci R^2 , el término Ricci-Ricci $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ y el invariante de Gauss-Bonnet G , cuya contribución es irrelevante siempre que no haya cambio de topología ni términos de frontera. Por otro lado, el término $\sqrt{-g} \square R = \sqrt{-g} \nabla_\mu \nabla^\mu R = \partial_\mu (\sqrt{-g} \nabla^\mu R)$ es una derivada total y, por el teorema de Gauss covariante [11], se puede escribir como la integral sobre la frontera de la variedad, que se anula siempre que $\nabla^\mu R$ tienda a cero lo suficientemente rápido en el infinito, por lo que también podemos ignorarlo. De esta manera, añadir $R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$ en la acción (3) produce únicamente una traslación constante

²En la literatura es usual encontrar esta teoría bajo los nombres de teoría con altas derivadas, gravedad R^2 , gravedad de cuarto orden, gravedad de Stelle, etc. [8, 9].

³Para esta discusión es estrictamente necesario que los acoplos sean constantes, pues si corren con la energía su contribución deja de ser nula como se demuestra en [10].

en los acoplos y añadir $\square R$ no tiene consecuencias para ningún observable insensible a la topología general del espaciotiempo (como las ecuaciones de campo o los cálculos perturbativos de interacciones de partículas⁴ [3]), así que la teoría descrita por dicha acción cuadrática es la más general posible para nuestro interés.

2.1. Inestabilidad de Ostrogradski y *ghosts* en altas derivadas

Añadir productos cuadráticos de tensores de curvatura a la acción gravitatoria conduce a ecuaciones de campo en las que los términos con mayor número de derivadas son de cuarto orden. Esto es aparentemente patológico, ya que Ostrogradski demostró que las teorías clásicas con derivadas superiores tienen inestabilidades que se traducen en un decaimiento del vacío [12]. Para ilustrar brevemente cómo surge este resultado, podemos seguir el enfoque Hamiltoniano [13] para dos casos típicos simples: teorías escalares con dos y cuatro derivadas en el término cinético viviendo en el espaciotiempo de Minkowski.

La teoría del campo escalar más sencilla con dos derivadas es la acción de Klein-Gordon

$$S = -\frac{1}{2} \int d^4x (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2) = \frac{1}{2} \int d^4x (\phi \square \phi - m^2 \phi^2) \implies (\square - m^2)\phi = 0, \quad (5)$$

cuya densidad hamiltoniana \mathcal{H} se construye a partir del momento canónico conjugado $\Pi = \dot{\phi}$ asociado al campo ϕ como la transformada de Legendre de la densidad lagrangiana,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2}\partial_i \phi \partial^i \phi + \frac{1}{2}m^2 \phi^2 \geq 0, \quad (6)$$

que está acotada inferiormente de forma manifiesta, por lo que la teoría es estable.

Si modificamos la acción (5) con un término que contenga cuatro derivadas del campo,

$$S = \frac{1}{2} \int d^4x [\phi(\square - \omega^2 \square^2)\phi - m^2 \phi^2] \implies (\square - \omega^2 \square^2 - m^2)\phi = 0, \quad (7)$$

siendo ω constante, la densidad hamiltoniana en este caso se escribe esquemáticamente

$$\mathcal{H} = \Pi_1 \dot{\phi} + O(\Pi_2^2, (\partial_i \phi)^2, \phi^2), \quad (8)$$

donde $\Pi_1 = \dot{\phi} - \omega^2 \ddot{\phi}$ y $\Pi_2 = \omega^2 \ddot{\phi}$. Con la presencia de altas derivadas, \mathcal{H} se compone de una parte claramente positiva por depender solamente de términos cuadráticos y de una parte lineal en Π_1 y ϕ que nos impide afirmar como en el caso anterior que el Hamiltoniano

⁴Por ejemplo, las amplitudes de *scattering* de gravitones alrededor de alguna geometría fija.

sea definido positivo. Dado que el término lineal puede tomar cualquier valor negativo que supere a la parte estrictamente positiva, se concluye que \mathcal{H} no está acotado inferiormente.

Es interesante analizar el caso no masivo, $m = 0$, de la teoría (7) a nivel cuántico. El propagador (inverso de la parte cuadrática/cinética del Lagrangiano o, equivalentemente, la función de Green asociada a las ecuaciones de campo) en el espacio de momentos, $D_F(p)$, en este caso no masivo se descompone en fracciones simples como

$$D_F(p) = -\frac{1}{p^2(1 + \omega^2 p^2)} = -\frac{1}{p^2} + \frac{\omega^2}{1 + \omega^2 p^2}. \quad (9)$$

Identificando los polos del propagador como el espectro de partículas de la teoría, observamos que la presencia de la derivada superior \square^2 a nivel del Lagrangiano introduce un polo adicional en el propagador (la primera contribución $1/p^2$ asociada a \square en el Lagrangiano se corresponde naturalmente con la partícula de masa cero), lo que implica un modo masivo de masa $\sqrt{-p^2} = m = 1/\omega$. Sin embargo, el signo diferente en el propagador indica que esta partícula masiva se corresponde con un *ghost* [14, 15].

Esta discusión sobre el campo escalar con altas derivadas es de gran utilidad, pues la teoría gravitatoria que nos ocupa presenta esencialmente la misma patología. La principal consecuencia es que, a nivel clásico, estos sistemas suelen ser inestables y, a nivel cuántico, se manifiestan partículas *ghosts* cuyo término cinético tiene un signo invertido, usualmente asociado en la literatura con estados de norma negativa que llevan a una violación de la unitariedad. En particular, la teoría (3) describe al gravitón estándar sin masa y de spin 2 (relacionado con el término R en la acción, como sucede en relatividad general), pero adicionalmente incorpora una partícula de spin 0 con masa $m_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{2(3\alpha - \beta)}}$ (relacionada con el término R^2) y una partícula de spin 2 con masa $m_2 = \sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$ (relacionada con el término $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$). Estos modos masivos están asociados en el límite Newtoniano con comportamientos de tipo potencial de Yukawa, de la forma $\frac{1}{r}e^{-m_0 r}$ y $\frac{1}{r}e^{-m_2 r}$, que suavizan la singularidad Newtoniana en el origen de una fuente puntual. En este límite de campo débil, la energía linealizada del gravitón y del escalar masivo es positiva, mientras que la de la partícula de spin 2 masiva es negativa, por lo que es el *ghost* de la teoría⁵. A nivel cuántico, se pueden tener autoestados de energía positiva para la partícula *ghost* a costa de tener normas negativas, atacando en principio la unitariedad de la teoría cuántica.

⁵Es interesante remarcar que una teoría del tipo $R + R^2$ solo contiene las dos primeras partículas y por tanto está libre de *ghosts*, pero no es renormalizable. El término $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}$ es necesario para la renormalizabilidad, con el precio a pagar de introducir un *ghost* en el espectro.

Merece la pena destacar que los *ghosts* son una característica común de muchos modelos de gravedad más allá de relatividad general [16], y hay que distinguirlos claramente de los *ghosts* de Faddeev-Popov ampliamente utilizados en la cuantización de teorías gauge no abelianas. Estos últimos violan la relación spin-estadística, aparecen naturalmente en la integral de camino para absorber grados de libertad gauge no físicos y no describen una partícula física. En cambio, los *ghosts* que acechan en teorías de gravitación modificada sí describen excitaciones físicas. En un acercamiento heurístico y general, para lidiar con *ghosts* físicos hay dos caminos a escoger: o bien aceptar la existencia de estados de norma negativa y abandonar la unitariedad de la teoría, o bien aceptar que los valores propios de energía los *ghosts* son negativos. Dado que el primero hace que toda la descripción cuántica sea completamente inconsistente, normalmente se acepta lo segundo, de manera que los *ghosts* suelen producir inestabilidades si se acoplan a otros campos convencionales.

2.2. Posibles resoluciones a las patologías de las altas derivadas

A pesar de que históricamente se ha considerado a la inestabilidad de Ostrogradski y a la aparición de *ghosts* como un arma arrojadiza infalible para descartar teorías más allá de relatividad general, numerosos estudios⁶ han demostrado que la situación es mucho más sutil de lo que ingenuamente parece.

Entre algunos de los recursos más exitosos para solventar la situación y exorcizar así a los *ghosts* se encuentran [16]:

- Aislarlos de algún modo concreto para que se desacoplen completamente de otros campos y así no desestabilizarlos. Es de gran interés mencionar que, pese al dogma, se han encontrado sistemas [17, 18] con *ghosts* en interacción con grados de libertad de energía positiva que tienen una robusta estabilidad clásica, y la situación mejora aún más en el caso cuántico [19].
- Hacerlos muy pesados para que su masa exceda el límite de energías relevantes en el contexto de teorías efectivas, de forma que no emerge ningún nuevo grado de libertad (*ghost* o no *ghost*) a parte del gravitón estándar.
- Romper invariancia Lorentz para regular la de producción de pares *ghost*-no *ghost*.
- Cambiar los grados de libertad fundamentales de la teoría (por ejemplo, trabajando

⁶Muchos de ellos especialmente recientes, pues estas teorías se encuentran en un momento de auge.

con funciones de correlación de invariantes de curvatura en lugar de la métrica).

- Argumentar que son consecuencia de tener un número finito de altas derivadas en la teoría, son ficticios al resultar de un truncamiento realizado en una teoría completa que contiene infinitos invariantes de curvatura y es libre de *ghosts* [20].
- En particular en gravedad cuadrática, eliminarlos del espectro redefiniendo las condiciones de frontera de la teoría en términos de un contorno de integración que no encierre los polos asociados a los *ghosts*.
- Argumentar que, pese a tener *ghosts*, la unitariedad en gravedad cuadrática puede funcionar de forma ordinaria según los argumentos originales de la teoría de Veltman [21]. La construcción cuidadosa del espacio de Hilbert [22] asociado a la teoría cuántica sigue la misma línea. Aparecen *ghosts* si el Hamiltoniano del modelo se trata (incorrectamente) como hermítico en el sentido de Dirac y no como simétrico PT [23], dando lugar no a estados de norma negativa sino de norma nula que, pese a no ser estándar, no atacan la unitariedad de la teoría. Por contrapartida, es conocido que teorías con altas derivadas que no presentan *ghosts* siguen teniendo problemas con la unitariedad [24], por lo que es el punto más sutil.

Aunque hay cierta abundancia de propuestas para abordar la problemática, es necesario remarcar que una manera consistente y sólida de abordar las inestabilidades clásicas de los *ghosts*, así como una forma unívoca de entender cuestiones relativas a la unitariedad, sigue siendo desconocida y es objeto de intensa investigación actual en el campo. Por ello, concluimos aquí la discusión de los aspectos fundamentales relacionados con este tipo de teorías para dedicarnos en lo que sigue a analizar las consecuencias físicas de las mismas.

3. Soluciones cosmológicas en gravedad cuadrática

Nos interesa centrarnos en las implicaciones cosmológicas de la teoría de gravedad cuadrática, cuya acción hemos visto que puede escribirse con total generalidad como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} [\gamma(R - 2\Lambda) + \alpha R^2 - \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}] + S_m, \quad (10)$$

siendo Λ la constante cosmológica y S_m la acción correspondiente a la materia. Las ecuaciones que definen la teoría, obtenidas aplicando el principio de mínima acción, son

$$\gamma (G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}) + \Phi_{\mu\nu} = \frac{1}{2} T_{\mu\nu}, \quad (11)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de las fuentes de materia, $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $\Phi_{\mu\nu}$ es el tensor asociado a los términos de curvatura superior, definidos por

$$T_{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_m}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (12)$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Phi_{\mu\nu} = & \alpha \left(2RR_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^2 - 2\nabla_\mu \nabla_\nu R + 2g_{\mu\nu}\square R \right) \\ & - \beta \left(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}R^{\alpha\beta} - \nabla_\nu \nabla_\mu R + \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\square R - 2R_{\alpha\mu\nu\beta}R^{\alpha\beta} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

También se puede interpretar matemáticamente el tensor $\Phi_{\mu\nu}$ como un tensor energía-momento efectivo, que cuantifica la desviación a la relatividad general por la alta curvatura. Cuando $\alpha = \beta = 0$ tenemos $\Phi_{\mu\nu} = 0$ pero el recíproco no es forzosamente cierto.

Ignorando la constante cosmológica, una primera observación sobre las ecuaciones de la teoría cuadrática (11) es que cualquier solución de vacío (es decir, $T_{\mu\nu} = 0$) de las ecuaciones de Einstein, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 0$, también es una solución de vacío de las ecuaciones de gravedad cuadrática. Esto es así porque tomando la traza de las ecuaciones de Einstein obtenemos $R = 0$, e insertando esto de nuevo en sus ecuaciones obtenemos la condición Ricci plana $R_{\mu\nu} = 0$, que es una solución manifiesta de (11) en el vacío.

Si añadimos la constante cosmológica a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0$, el mismo razonamiento anterior nos conduce a $R = D\Lambda$ y, consecuentemente, $R_{\mu\nu} = (\frac{1}{2}D - 1)\Lambda g_{\mu\nu}$ con D el número de dimensiones espacio-temporales. Este tipo de variedades con curvatura escalar R constante, tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ proporcional a la métrica $g_{\mu\nu}$ y tensor de curvatura de Riemann dado por $R_{\alpha\mu\nu\beta} = \frac{R}{D(D-1)}(g_{\alpha\nu}g_{\mu\beta} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta})$ se denominan maximalmente simétricas, son espacios a la vez homogéneos e isótropos y poseen $D(D+1)/2$ vectores de Killing (el mayor número posible en D dimensiones). Es interesante sustituir estas expresiones en (11), obteniendo

$$\frac{1}{2} \left[\alpha D(D-4) + \beta \frac{(D-2)(D+1)(D-4)}{(D-1)} \right] \Lambda^2 g_{\mu\nu} = 0, \quad (15)$$

y comprobando así que los espacios maximalmente simétricos son también solución de (11) únicamente en el caso $D = 4$, que es el que nos va a interesar en este trabajo.

Se conoce que existen más soluciones analíticas en gravedad cuadrática, y son novedosas en el sentido de que no son soluciones de las ecuaciones de Einstein ordinarias. Además,

hay soluciones de vacío en gravedad cuadrática pura, $\Phi_{\mu\nu} = 0$, que no son soluciones de relatividad general, $G_{\mu\nu} = 0$, y que, por tanto, no tienen contrapartida análoga en el límite Einsteiniano $\alpha, \beta \rightarrow 0$. Un ejemplo de estas soluciones intrínsecas a la parte cuadrática pura es la métrica FRW con un factor de escala $a(t) \sim t^{1/2}$ análogo a la época dominada por radiación en relatividad general (en este caso hay materia, mientras que en la teoría cuadrática pura es una solución de vacío). En cuanto a soluciones de la teoría completa, en muchos casos no preservan la isotropía y algunas de las más importantes son las métricas de Brinkmann, Peres, Siklos o Kasner [25, 26, 27].

3.1. Análisis de las ecuaciones de campo en una métrica FRW

Nos centramos en el caso isótropo y homogéneo con curvatura espacial prácticamente nula, que es la situación más cercana a nuestro universo en virtud del principio cosmológico y las observaciones actuales. De esta manera, trabajaremos con una métrica de tipo FRW

$$ds^2 = -b(t)^2 dt^2 + a(t)^2(dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad g_{\mu\nu} = \text{diag}(-b^2, a^2, a^2, a^2). \quad (16)$$

Es usual en relatividad general tomar la simplificación⁷ $b(t) = 1$, de manera que la métrica (16) sustituida como *ansatz* en las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto proporciona las conocidas dos ecuaciones de Friedmann. Una ecuación está asociada a la parte temporal y la otra a la parte espacial, y no son independientes sino que están ligadas por la conservación⁸ local de la materia, $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$, junto con la ecuación de estado del fluido, $p = \omega\rho$, que relaciona su presión p con la densidad de energía ρ mediante el parámetro de estado ω (como es usual, $\omega = 0$ describe a la materia bariónica, $\omega = 1/3$ a la materia ultrarelativista/radiación y $\omega = -1$ a la energía oscura).

Analizaremos a continuación lo que sucede en el marco de la teoría de gravedad cuadrática con la métrica (16). Existen dos formalismos equivalentes para atacar el problema, uno consiste en escribir explícitamente las ecuaciones de campo generales (11) particularizadas a una métrica FRW (enfoque general) y el otro se basa en aplicar las ecuaciones de Euler-Lagrange a la acción (10) tras escribirla en términos de los campos dinámicos $a(t)$ y $b(t)$ que componen la métrica (enfoque restringido).

⁷Esta reparametrización de la componente temporal está justificada como una redefinición del tiempo coordinado.

⁸Estamos abusando de lenguaje porque en realidad no se trata de una ley de conservación real, no se puede escribir en una forma integral equivalente como sí ocurriría con una derivada parcial.

Los invariantes de curvatura de la acción cuadrática asociados a la métrica (16) son

$$\begin{aligned} R &= \frac{6}{b^2}(X + Y) , \quad R^2 = \frac{36}{b^4}(X^2 + Y^2 + 2XY) , \quad R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{12}{b^4}(X^2 + Y^2 + XY) , \\ R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} &= \frac{12}{b^4}(X^2 + Y^2) , \quad G = \frac{24}{b^4}XY , \quad \text{donde } X = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}\dot{b}}{a\dot{b}} , \quad Y = \frac{\dot{a}^2}{a^2} . \end{aligned} \quad (17)$$

Sustituyendo los mismos en la acción (3) y teniendo en cuenta que $\sqrt{-g} = a^3b$, la acción queda de la forma implícita

$$S = S_g + S_m = \int d^3x \int dt \mathcal{L}(a, \dot{a}, \ddot{a}, b, \dot{b}) + S_m . \quad (18)$$

El Lagrangiano restringido (18) contiene dependencias en derivadas segundas del factor de escala $a(t)$, pero únicamente presenta dependencias hasta la derivada primera en el parámetro temporal $b(t)$. Esta diferencia de altas derivadas hace que las ecuaciones de Euler-Lagrange provenientes de variar la acción puramente gravitatoria, δS_g , se escriban como

$$E_b = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{b}} \right) , \quad (19)$$

$$E_a = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}} \right) . \quad (20)$$

Si no se considera ningún tipo de materia, esto es, en el vacío, las ecuaciones son naturalmente $E_b = 0$ y $E_a = 0$. En presencia de materia, nos centramos en el caso de fluido perfecto descrito por sus componentes del tensor energía-momento $T_{00} = b^2(t)\rho(t)$ y $T_{ij} = a^2(t)p(t)\delta_{ij}$, que por supuesto satisfacen la conservación $\nabla^\mu T_{\mu\nu} = \dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0$. En este caso el lado derecho de las ecuaciones se ve modificado para dar cuenta de la materia, porque la variación de la acción (18) conduce a $\delta S_g = -\delta S_m$. La variación de la acción de materia se lee de la definición del tensor energía-momento (12) como sigue

$$\begin{aligned} \delta S_m &= -\frac{1}{2}\sqrt{-g} [T_{00}\delta g^{00} + T_{ij}\delta g^{ij}] = -\frac{1}{2}a^3b \left[b^2\rho \delta \left(-\frac{1}{b^2} \right) + 3a^2p \delta \left(\frac{1}{a^2} \right) \right] \\ &= -a^3\rho \delta b + 3a^2bp \delta a \implies \frac{\delta S_m}{\delta b} = -a^3\rho , \quad \frac{\delta S_m}{\delta a} = 3a^2bp , \end{aligned} \quad (21)$$

luego las ecuaciones de movimiento en presencia de materia son

$$E_b(a, \dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}, b, \dot{b}, \ddot{b}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial b} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{b}} \right) = a^3\rho , \quad (22)$$

$$E_a(a, \dot{a}, \ddot{a}, \ddot{\ddot{a}}, \ddot{\ddot{\ddot{a}}}, b, \dot{b}, \ddot{b}, \ddot{\ddot{b}}) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{a}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ddot{a}} \right) = -3a^2bp . \quad (23)$$

Este enfoque Lagrangiano restringido es totalmente equivalente al enfoque Lagrangiano general de las ecuaciones de campo, la única diferencia es que el primero restringe la métrica antes de deducir las ecuaciones. Se ha comprobado explícitamente (Anexo B) que las ecuaciones (22) y (23) son las mismas que las componentes $\mu = \nu = 0$ y $\mu = \nu = i$ de (11), respectivamente.

La componente $\mu = \nu = 0$ de las ecuaciones de campo (11) (o, equivalentemente, E_b) depende de $a(t)$ y $b(t)$ junto con sus derivadas hasta segundo orden en b , \ddot{b} , y tercer orden en a , \ddot{a} . Por otro lado, la ecuación $\mu = \nu = i$ de las ecuaciones de campo (11) (o, equivalentemente, E_a) depende de $a(t)$ y $b(t)$ junto con sus derivadas hasta tercer orden en b , \ddot{b} , y cuarto orden en a , \ddot{a} . Parece natural entonces derivar E_b con respecto al tiempo, obteniendo \dot{E}_b , para así cuadrar el orden del sistema de las dos ecuaciones diferenciales y resolverlo simultáneamente. Sin embargo, esto no es posible porque en realidad las ecuaciones E_b y E_a no son independientes, sino que una es consecuencia de la otra. De hecho, un cálculo explícito con las ecuaciones del movimiento muestra que

$$\dot{E}_b = \frac{\dot{a}}{b} E_a, \quad (24)$$

revelando que podemos escribir E_a en términos de la derivada de E_b . Una ecuación es una ligadura de la otra, son redundantes, y en última instancia se puede ver que el sistema de ecuaciones formado por $\dot{E}_b = 3a^2\dot{a}\rho + a^3\dot{\rho}$ y $E_a = -3a^2bp$ presenta la forma lineal

$$\left. \begin{aligned} A\ddot{a} + B\ddot{b} &= P \\ C\ddot{a} + D\ddot{b} &= Q \end{aligned} \right\} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{a} \\ \ddot{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \quad (25)$$

con la particularidad de que $\det M = AD - BC = 0$, indicando que el sistema está indeterminado y hay infinitas soluciones. Para resolver esta situación, que también ocurre en relatividad general⁹, invocamos a la invariancia bajo difeomorfismos que nos da libertad para fijar una reparametrización de la componente temporal, siendo el caso más simple $b(t) = 1$. La justificación profunda reside en que la reparametrización temporal es un subgrupo del grupo de difeomorfismos que es una simetría local (gauge, en realidad) de teorías de gravitación covariantes generales y, por lo tanto, todos los estados físicos deben ser invariantes bajo ella. De esta manera, la libertad gauge nos permite fijar $b(t) = 1$, convirtiendo el sistema en uno compatible con solución única. Bajo estas condiciones, las ecuaciones (22) y (23) se escriben explícitamente como

$$\frac{12(3\alpha - \beta)\dot{a}^2(2a\ddot{a} - 3\dot{a}^2)}{a} + 6a[\gamma\dot{a}^2 - 2(3\alpha - \beta)(\ddot{a}^2 - 2\ddot{a}\dot{a})] - 2\gamma\Lambda a^3 = a^3\rho, \quad (26)$$

⁹Sucede lo mismo en cualquier teoría covariante general que respete la invariancia bajo difeomorfismos.

$$6 \left[\gamma (\dot{a}^2 - \Lambda a^2) + \frac{6(3\alpha - \beta) (\dot{a}^4 - 4a\dot{a}^2\ddot{a})}{a^2} + 2a (2(3\alpha - \beta) \ddot{a} + \gamma \ddot{a}) + 2(3\alpha - \beta) (3\ddot{a}^2 + 4\ddot{a}\dot{a}) \right] = -3a^2p . \quad (27)$$

Por supuesto, pese haber fijado $b(t) = 1$ para tener solución única, las dos ecuaciones anteriores no son independientes sino que (27) se puede escribir en términos de la derivada de (26) tal y como hemos visto¹⁰. Dado que (26) es más sencilla porque contiene un número menor de derivadas pero la misma información, podemos trabajar únicamente con ella.

3.2. Reinterpretación cosmológica de la gravedad cuadrática

Salta a la vista en (26) y (27) que hay una relación especial entre las constantes de acoplo de la teoría, $3\alpha = \beta$, que simplifica notablemente las ecuaciones. De hecho, en este caso dichas ecuaciones son exactamente las ecuaciones de Friedmann de la relatividad general

$$6a\gamma\dot{a}^2 - 2\gamma\Lambda a^3 = a^3\rho \implies \frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{\rho}{6\gamma} + \frac{\Lambda}{3} , \quad (28)$$

$$6 \left[\gamma (\dot{a}^2 - \Lambda a^2) + 2a\gamma\ddot{a} \right] = -3a^2p \xrightarrow{(28)} \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{12\gamma} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} . \quad (29)$$

Este resultado no es una coincidencia fortuita, sino que es consecuencia de que la relación $3\alpha = \beta$ esconde un hecho profundo detrás en este tipo de métricas. Para entender este régimen tenemos que analizar la acción de la teoría (3), que en el caso $3\alpha = \beta$ se escribe

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\gamma R + \alpha (R^2 - 3R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}) \right] . \quad (30)$$

El punto crucial consiste en usar la siguiente identidad entre invariantes de curvatura

$$R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{1}{3}R^2 + \frac{1}{2}W^2 - \frac{1}{2}G , \quad (31)$$

con G el invariante topológico de Gauss-Bonnet (4) y $W^2 = W_{\mu\nu\alpha\beta}W^{\mu\nu\alpha\beta}$ el invariante de curvatura asociado al tensor de Weyl, $W_{\mu\nu\alpha\beta}$, que se corresponde con las componentes de traza nula del tensor de Riemann. De esta manera, la acción de la teoría se escribe

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\gamma R - \frac{\alpha}{2}W^2 + \frac{\alpha}{2}G \right) . \quad (32)$$

Ya hemos comentado anteriormente que G no contribuye a la dinámica de la teoría y podemos ignorarlo. El segundo punto clave es que en métricas tipo FRW¹¹ (16) el tensor

¹⁰Es interesante remarcar que, si hubiésemos impuesto $b(t) = 1$ en el Lagrangiano, el resultado tras variar con respecto a $a(t)$, que es el único campo presente, sería (27) y no la más sencilla (26).

¹¹En general, ocurre para cualquier métrica conformalmente plana.

de Weyl se anula idénticamente [28], por lo que $W^2 = 0$ y entonces la acción (32) se reduce justamente a la de Einstein-Hilbert. Así pues, el límite $3\alpha = \beta$ de la teoría cuadrática (3) se corresponde con relatividad general (el término Λ no influye en esta discusión).

El hecho de que el tensor de Weyl se anule en métricas FRW es una herramienta extremadamente útil, pues nos ayuda a entender mejor la estructura de la teoría y sus soluciones. Gran parte de la complicación de la teoría cuadrática en su expresión original (3) proviene del término Ricci-Ricci, así que podemos usar (31) para escribirla en general como

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\gamma R + \left(\alpha - \frac{\beta}{3} \right) R^2 - \frac{\beta}{2} W^2 + \frac{\beta}{2} G \right] . \quad (33)$$

Particularizando esta teoría a situaciones cosmológicas homogéneas e isotrópicas descritas por una métrica FRW, con $W^2 = 0$, e ignorando el término topológico de Gauss-Bonnet, concluimos que la cosmología de la teoría original (3) es equivalente a la de la teoría

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\gamma R + \left(\alpha - \frac{\beta}{3} \right) R^2 \right] . \quad (34)$$

Es decir, la teoría cuadrática (3) es indistinguible cosmológicamente hablando a la teoría (34), que es una teoría de tipo¹² $f(R) = \gamma R + \left(\alpha - \frac{\beta}{3} \right) R^2$ muy concreta, llamada teoría de Starobinsky, que comentaremos en detalle más adelante.

3.3. Soluciones de Sitter, estabilidad y futuro del universo

Por supuesto, las ecuaciones de campo derivadas de (34) son idénticas a las ecuaciones (26) y (27). Como ya hemos justificado, podemos trabajar solo con (26) que escrita en términos del parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$ y en el vacío (es decir, $\rho = 0$) queda

$$3\gamma H^2 - \gamma\Lambda + 6(3\alpha - \beta) \left(-\dot{H}^2 + 6\dot{H}H^2 + 2H\ddot{H} \right) = 0 . \quad (35)$$

Esta forma de escribir la ecuación de movimiento nos permite identificar que el espacio-tiempo de de Sitter con $H = H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$ siendo H_0 constante es solución de la teoría, como ya habíamos demostrado (es un caso particular de espacio maximalmente simétrico). Es interesante analizar la estabilidad de esta solución en la teoría cuadrática [29], así que escribimos (35) como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{H} = F ,$$

¹²Las teorías $f(R)$ están descritas por la acción de Einstein-Hilbert reemplazando la dependencia lineal del escalar de Ricci R por una función suave del mismo, $f(R)$.

$$\dot{F} \equiv \mathcal{F} = \frac{F^2}{2H} - 3FH + \frac{\gamma}{12(3\alpha - \beta)H} (\Lambda - 3H^2) , \quad (36)$$

cuya linealización proporciona

$$\begin{aligned} \dot{H} &= F , \\ \dot{F} &= \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial H} \right)_{H=H_0} H + \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial F} \right)_{H=H_0} F = -\frac{\gamma(3H_0^2 + \Lambda)}{12H_0^2(3\alpha - \beta)} H - 3H_0 F , \end{aligned} \quad (37)$$

de manera que el polinomio característico asociado a la matriz del sistema es

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -\frac{\gamma(3H_0^2 + \Lambda)}{12H_0^2(3\alpha - \beta)} & -3H_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \implies \lambda^2 + 3H_0\lambda + \frac{\gamma(3H_0^2 + \Lambda)}{12H_0^2(3\alpha - \beta)} = 0 . \quad (38)$$

El polinomio asociado es de Hurwitz estable, esto es, tiene coeficientes positivos cuyas raíces reales tienen parte real negativa (indicando que el sistema es estable) sí y solo sí $3\alpha > \beta$. Concluimos entonces que la solución de de Sitter es estable siempre y cuando el coeficiente que acompaña al término R^2 en la teoría (34) es positivo¹³.

El caso inestable, dado por la condición $3\alpha < \beta$, presenta implicaciones cosmológicas más interesantes aún. Los comportamientos de tipo de Sitter comentados anteriormente son análogos a los de relatividad general, esto es, presentan expansiones menos (Figura 2¹⁴) o más (Figura 3) rápidas según los parámetros de la teoría y de las condiciones iniciales, pero todos ellos predicen que el destino del universo es siempre una expansión. Sin embargo, si se verifica $3\alpha < \beta$, independientemente de las condiciones iniciales, se presenta un nuevo escenario donde el universo termina eventualmente colapsando haciéndose el factor de escala $a(t)$ nulo, lo que se conoce como *Big Crunch* (Figura 4). Este resultado es interesante porque es una solución de altas derivadas que no puede ocurrir en relatividad general con dichas condiciones, y es consecuencia únicamente de la relación entre las constantes de acoplo de las altas curvaturas. Además, el régimen $3\alpha < \beta$ se corresponde con que la masa m_0 de la partícula escalar adicional sea imaginaria. En presencia de materia ninguno de los comportamientos mencionados cambia sustancialmente para el futuro del universo.

¹³En métricas anisótropas o dimensiones más altas este resultado deja de ser cierto [29].

¹⁴En todas las siguientes gráficas se representa el factor de escala, a , en función del tiempo, t , en relatividad general (en rojo, GR) y en gravedad cuadrática (en azul, HD).

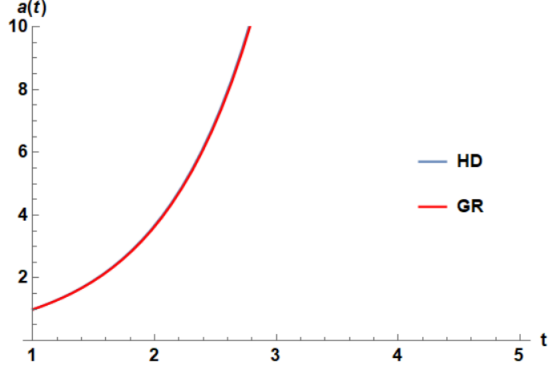


Figura 1: $\Lambda = 5$, $\alpha = 1$, $\beta = 2.9999$, $\gamma = 20$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 1$, $\ddot{a}(1) = 0.2$.

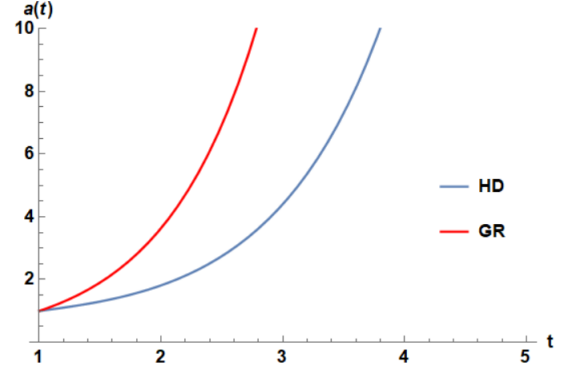


Figura 2: $\Lambda = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\gamma = 20$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.5$, $\ddot{a}(1) = 0.3$.

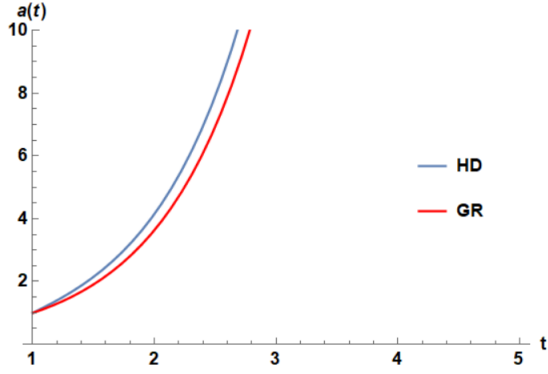


Figura 3: $\Lambda = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 1$, $\gamma = 20$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 1.9$, $\ddot{a}(1) = 0.5$.

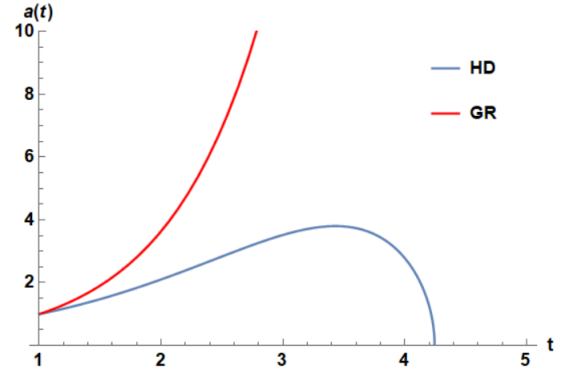


Figura 4: $\Lambda = 5$, $\alpha = 5$, $\beta = 30$, $\gamma = 20$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.6$.

3.4. Pasado del universo y singularidad inicial

Uno de los mayores intereses de las teorías más allá de relatividad general consiste en propiciar una mejor comprensión de las singularidades cosmológicas que presenta la teoría Einsteniana. Cuando analizamos el pasado de la teoría cuadrática obtenemos un amplio espectro de soluciones que mostramos a continuación.

Como se puede ver en las resoluciones numéricas con materia y energía oscura, la Figura 5 representa un universo dominado por materia ordinaria, la Figura 6 representa un universo dominado por radiación y la Figura 7 representa un universo dominado por energía oscura. En todos los casos mostrados se tiene la presencia de un *Big Bang* donde nace el universo, y los comportamientos son similares a los de relatividad general con constante cosmológica. Sin embargo, en la Figura 8, que representa el caso $3\alpha < \beta$, se tiene que el universo puede partir tanto de un *Big Bang* como de un tamaño infinito para acabar colapsando

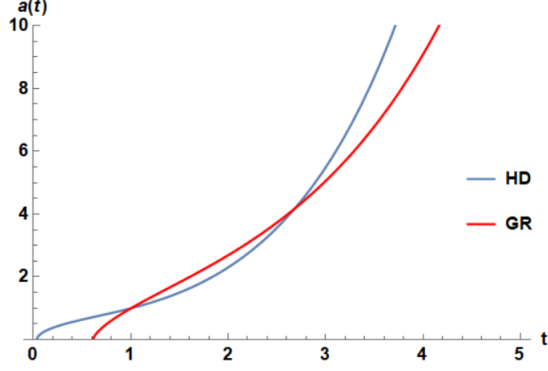


Figura 5: $\omega = 0$, $\rho_0 = 170$, $\Lambda = 1$, $\alpha = 4$, $\beta = 3$, $\gamma = 10$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.6$.

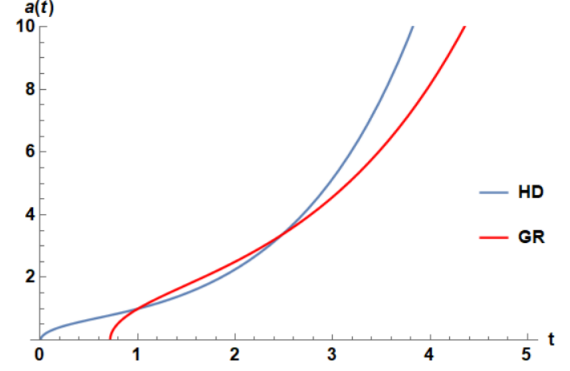


Figura 6: $\omega = 1/3$, $\rho_0 = 180$, $\Lambda = 1$, $\alpha = 6$, $\beta = 3$, $\gamma = 10$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.6$.

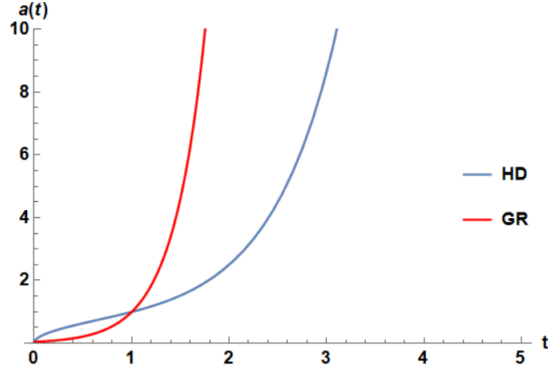


Figura 7: $\omega = -1$, $\rho_0 = 540$, $\Lambda = 1$, $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\gamma = 10$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.6$.

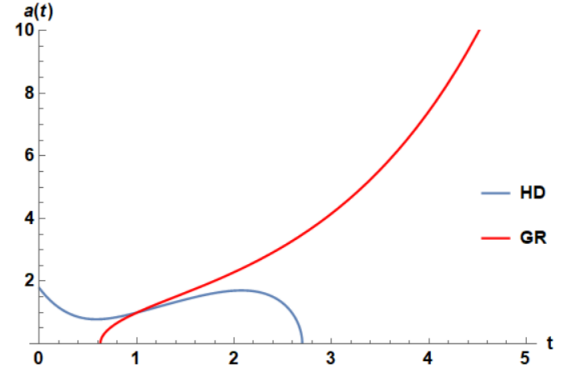


Figura 8: $\omega = 1/3$, $\rho_0 = 100$, $\Lambda = 1$, $\alpha = 5$, $\beta = 16$, $\gamma = 10$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.6$.

en un *Big Crunch* independientemente del contenido de materia considerado.

Cabe destacar que las soluciones isótropas con singularidad inicial como las mostradas en la Figura 5, Figura 6 y Figura 7 (que además se comportan todas ellas como un universo de Friedmann dominado por radiación, $a(t) \sim t^{1/2}$ cuando $t \rightarrow 0$) son estables a la presencia de pequeñas heterogeneidades escalares, vectoriales y tensoriales por el efecto de los términos cuadráticos que dominan al acercarse a la singularidad inicial [30]. Esto es distinto de la relatividad general, donde se presenta una inestabilidad a medida que $t \rightarrow 0$, y ocurre lo mismo si se consideran potencias o funciones generales del término Ricci-Ricci, indicando que el comportamiento de la gravedad cuadrática es especial.

Por último, la teoría cuadrática tiene un espacio de soluciones tan rico que también

es posible encontrar soluciones con una expansión a tiempos lejanos y que además no presentan *Big Bang* en tiempos pretéritos, es decir, son libres de singularidades. Esta conducta se corresponde con un universo que se contrae hasta un tamaño mínimo finito y tras ello vuelve a expandirse. Un ejemplo de este tipo de soluciones, que únicamente ocurren en el régimen $3\alpha < \beta$ bajo la presencia de materia¹⁵, se muestra en la Figura 9.

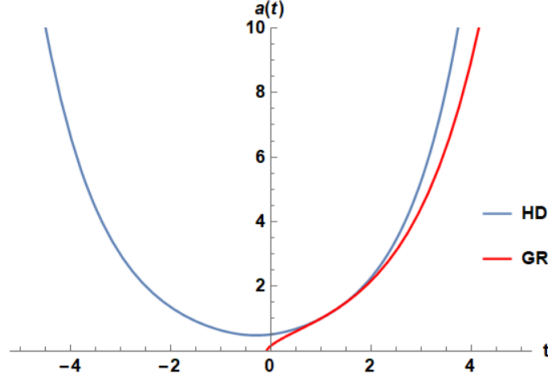


Figura 9: Solución libre de singularidades en la teoría cuadrática dada por los parámetros: $\omega = 0$, $\rho_0 = 15$, $\Lambda = 1.5$, $\alpha = 3$, $\beta = 16$, $\gamma = 10$, $a(1) = 1$, $\dot{a}(1) = 0.8$, $\ddot{a}(1) = 0.7$.

Varios estudios han tratado de llevar este comportamiento al régimen periódico, empalmando contracciones y expansiones del universo de forma continua (*Big Bounce/Ekpyrotic Universe* [31]). No obstante, no está cómo puede emerger dicho comportamiento en esta teoría pues las aproximaciones semiclásicas usadas dejan de ser válidas en el *Bounce* [32].

4. Teoría inflacionaria en gravedad cuadrática

4.1. Descripción básica del paradigma inflacionario

El modelo estándar cosmológico (Λ CDM) se basa en el hecho observacional de que el universo es extremadamente homogéneo, isótropo y plano a gran escala.

La cosmología estándar predice que el universo primitivo estaba formado por muchas regiones del espacio causalmente desconectadas. Estos parches de espacio aparentemente inconexos resulta que tienen aproximadamente las mismas densidades y temperaturas (por ejemplo, la temperatura del fondo cósmico de microondas/CMB es de $2.725\text{K} \pm 0.0002\text{K}$, sumamente uniforme), lo cual es conocido como el problema del horizonte.

¹⁵A diferencia de lo que ocurría a tiempos futuros, vemos como en tiempos primordiales sí emergen distintos comportamientos cuando se incorpora materia.

En segundo lugar, nuestro universo parece muy cercano a la planitud siendo su curvatura espacial global aproximadamente cero, lo cual se conoce como el problema de la planitud. Con los datos actuales de densidades, se puede inferir que al comienzo del universo éste era todavía mucho más cercano a la planitud ideal. No parece demasiado natural que por puro azar nuestro universo haya escogido ese valor tan finamente ajustado, por lo que sería interesante un mecanismo dinámico que explicase por qué el universo es tan plano.

Añadido a estos dos problemas anteriores, también se presenta el problema de los monopolos magnéticos/de las reliquias exóticas (bordes de dominio, cuerdas cósmicas, etc., motivadas por teorías de gran unificación). Hipotéticamente, en el universo primigenio, con una elevadísima temperatura/muy alta energía, se producirían un gran número de monopolos magnéticos/reliquias exóticas estables y de masas enormes que actualmente aún no hemos logrado detectar, por lo que debería haber un motivo para no encontrarlas.

Una respuesta simultánea y satisfactoria tanto teórica como experimental, pues también explica el origen de las estructuras a gran escala del cosmos mediante perturbaciones en la densidad de energía, a todos estos problemas reside en el llamado mecanismo de inflación, un período en el universo temprano que conduce hacia la homogeneidad y la isotropía observadas, pese a que éste hubiese comenzado en un estado inicial genérico.

La manera más sencilla y usual de formalizar este mecanismo en la mayoría de modelos inflacionarios¹⁶ es mediante la introducción de un campo escalar homogéneo, $\phi = \phi(t)$, denominado inflatón, que la genere. Un período inflacionario de este tipo se logra mediante distintas condiciones, a saber: una expansión acelerada (aproximadamente de Sitter), un parámetro de Hubble que varía lentamente en el tiempo (se suele denominar *slow-roll*), una presión negativa y una densidad de energía constante. Durante la inflación, la mayor parte de la densidad de energía en el universo está en forma del potencial de inflación $V(\phi)$, lo cual está íntimamente ligado con la condición de *slow-roll*. La inflación termina cuando el potencial se empina y el campo de inflación adquiere energía cinética, transfiriendo la energía almacenada a las distintas partículas del modelo estándar (este proceso se llama *reheating*, y empalma satisfactoriamente con el modelo del *Big Bang* caliente).

El Lagrangiano de materia asociado al campo escalar ϕ es $\mathcal{L}_m = -\frac{1}{2}\partial^\mu\phi\partial_\mu\phi - V(\phi)$, cuya

¹⁶Cabe destacar que existen una gran variedad de modelos de inflación: modelos con un campo escalar bajo distintos potenciales (cuadrático, de tipo Higgs, periódico, etc.), modelos multicampo, modelos de gravedad modificada (Starobinsky), modelos de dimensiones extra, etc.

variación proporciona la ecuación de movimiento

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 . \quad (39)$$

Dicha ecuación para la materia nos permite hacer la identificación $\rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ y $p = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$ de manera que se satisfaga la conocida ecuación de continuidad

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 , \quad (40)$$

y nos sirve también escribir la ecuación de estado como

$$\omega = \frac{p}{\rho} = \frac{\dot{\phi} - 2V(\phi)}{\dot{\phi} + 2V(\phi)} . \quad (41)$$

Inflación se caracteriza por un período de casi-de Sitter, donde el parámetro de Hubble H decrece lentamente con el tiempo (aproximación *slow-roll*), es decir, se cumple

$$\frac{\dot{H}}{H^2} \ll 1 , \quad \frac{\ddot{H}}{H\dot{H}} \ll 1 , \quad (42)$$

lo cual inspira a definir los parámetros de *slow-roll* ϵ y η de la forma

$$0 < \epsilon = -\frac{\dot{H}}{H^2} , \quad \eta = -\frac{\dot{H}}{H^2} - \frac{\ddot{H}}{2H\dot{H}} , \quad (43)$$

que deben ser pequeños durante inflación (termina cuando se hacen de orden unidad).

En términos del campo escalar ϕ se pueden reescribir las condiciones *slow-roll*

$$\dot{\phi}^2 \ll V(\phi) , \quad \ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi} , \quad (44)$$

porque de esta forma $\omega \simeq -1$ (casi-de Sitter), lo que implica que (39) se aproxima como

$$3H\dot{\phi} + V'(\phi) \simeq 0 , \quad 3H\ddot{\phi} + V''(\phi)\dot{\phi} \simeq 0 . \quad (45)$$

En cuanto a los parámetros fenomenológicos relevantes en las observaciones cosmológicas primordiales, para la solución casi-de Sitter inflacionaria el número de *e-folds* \mathcal{N} se define

$$\mathcal{N} \equiv \log \left(\frac{a_f}{a_i} \right) = \int_{t_i}^{t_f} dt H(t) \simeq 3 \int_{\phi_i}^{\phi_f} d\phi \frac{H^2}{V'(\phi)} , \quad (46)$$

indicando el subíndice “i” el inicio de inflación y “f” el final de la misma. Por otro lado, la amplitud del espectro de potencias escalar primordial A_s , el índice espectral escalar n_s y el ratio tensor-escalar r vienen dados por

$$A_s = \frac{H^2}{16\pi^2\gamma\epsilon} = \frac{H^2}{8\pi^2 M_p^2 \epsilon} , \quad n_s = 1 - 6\epsilon + 2\eta , \quad r = 16\epsilon . \quad (47)$$

Los últimos resultados del satélite Planck [5] confirman las siguientes estimaciones y cotas a los parámetros fenomenológicos de la era inflacionaria: $49 < \mathcal{N} < 59$ (95 % CL), $A_s \simeq 10^{-9}$, $n_s = 0.9649 \pm 0.0042$ (68 % CL), $r < 0.10$ (95 % CL).

4.2. Modelo de Starobinsky

Como ya hemos anticipado, el modelo de Starobinsky [6] se describe por la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \gamma \left(R + \frac{\alpha}{\gamma} R^2 \right) , \quad \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{1}{6M^2} , \quad (48)$$

con M una escala de masa. Este modelo goza de una gran reputación cosmológica, principalmente porque la curvatura adicional produce una expansión acelerada en el universo primordial que permite describir el escenario inflacionario con el mejor ajuste de toda la gama de modelos disponibles actualmente [5]. La gran diferencia del modelo de Starobinsky respecto al resto es que tiene la característica específica de que no requiere la introducción de un campo de inflatón a mano, sino que el grado de libertad del inflatón surge de forma efectiva por añadir un término de curvatura/gravitatorio de orden superior. En el límite de baja energía, donde $R \ll M^2$, la teoría (48) se reduce a la relatividad general con constante cosmológica, mientras que cuando R se vuelve comparable con M^2 el segundo término se hace relevante y desvía el comportamiento de relatividad general.

Aplicando una transformación conforme/de Weyl a la métrica de la acción (48) (que en la jerga se dice que está en el marco de Jordan), podemos obtener un modelo equivalente de gravedad ordinaria¹⁷ (lo que se llama marco de Einstein) acoplada a un campo escalar ϕ . Una transformación conforme es un reescalado de la métrica que depende del punto

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu} \equiv e^{2\omega(x)} g_{\mu\nu} , \quad (49)$$

donde $\omega(x) = \log \Omega(x)$. El tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ y el escalar de Ricci R construidos mediante la métrica $g_{\mu\nu}$, y $\tilde{R}_{\mu\nu}$ y \tilde{R} obtenidos de la métrica transformada $\tilde{g}_{\mu\nu}$, se relacionan por

$$R = \Omega^2 \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu}\partial_\mu\omega\partial_\nu\omega \right) . \quad (50)$$

Queremos utilizar esta transformación para obtener una acción en el marco de Einstein a partir del modelo de Starobinsky, y para ello resulta útil reescribir la acción (48) en la forma equivalente [34]

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\gamma F R - U) , \quad (51)$$

¹⁷Esta característica no es exclusiva del modelo de Starobinsky, sino de cualquier teoría $f(R)$, todas ellas son equivalentes a relatividad general acoplada a un campo escalar (escalarón) [33].

con $F = 1 + 2\alpha R/\gamma$ y $U = \gamma[FR - (R + \alpha R^2/\gamma)] = \alpha R^2$, de manera que usando la relación conforme entre determinantes $\sqrt{-g} = \Omega^{-4}\sqrt{-\tilde{g}}$ la acción queda

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\gamma F \Omega^{-2} \left(\tilde{R} + 6\tilde{\square}\omega - 6\tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \omega \partial_\nu \omega \right) - \Omega^{-4} U \right]. \quad (52)$$

La acción (52) se encuentra en el marco de Einstein, esto es, es lineal en \tilde{R} , si se verifica $F = \Omega^2 = e^{2\omega}$. Por supuesto, el término $\tilde{\square}\omega$ es una derivada total cuya integral se anula por el teorema de Gauss. Además del término de Einstein, ha emergido un término cinético para factor conforme ω , por que podemos promocionarlo a un campo escalar ϕ normalizado canónicamente bajo la redefinición $\phi(x) = \sqrt{12\gamma}\omega(x)$, sujeto a un potencial $V(\phi) = F^{-2}U$. Con todo esto, la acción transformada conforme en el marco de Einstein queda

$$S = \int d^4x \sqrt{-\tilde{g}} \left[\gamma \tilde{R} - \frac{1}{2} \tilde{g}^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - V(\phi) \right], \quad (53)$$

que efectivamente es equivalente a la relatividad general con un campo escalar acoplado. Para determinar el potencial escalar basta con reescribir todo en términos de ϕ ,

$$V(\phi) = \frac{\gamma^2}{4\alpha} (1 - e^{-2\omega})^2 = \frac{3}{4} M_p^2 M^2 \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}} \right)^2, \quad (54)$$

cuyo comportamiento se representa en la Figura 10. De la forma del potencial reconocemos dos fases de evolución del campo escalar. Para valores transplanckianos del campo escalar, $\phi \gg M_p$, el potencial tiende a la constante $\frac{3}{4} M_p^2 M^2$ por lo que se puede dar una inflación *slow-roll* dada la planitud del potencial. Este período inflacionario termina cuando $\phi \simeq M_p$, y tras esta fase nos encontramos el régimen $\phi \ll M_p$, donde el potencial se reduce a $\frac{1}{2} M \phi^2$, de modo que oscila alrededor de $\phi = 0$ dando lugar al proceso de *reheating*.

Las predicciones fenomenológicas del modelo de Starobinsky se pueden estudiar tanto en el marco de Jordan como en el marco de Einstein. En el marco de Jordan basta con tomar las ecuaciones de campo de la teoría¹⁸ (48), que se reducen a

$$\ddot{H} - \frac{\dot{H}^2}{2H} + \frac{1}{2} M^2 H + 3\dot{H}H = 0. \quad (55)$$

Durante el período inflacionario, bajo la aproximación *slow-roll* (42), podemos despreciar los dos primeros términos de (55) obteniendo entonces $\dot{H} = -\frac{M^2}{6}$, que conduce a la solución casi-de Sitter

$$H(t) \simeq H_i - \frac{M^2}{6}(t - t_i), \quad a(t) \simeq a_i \exp \left[H_i(t - t_i) - \frac{M^2}{12}(t - t_i)^2 \right]. \quad (56)$$

¹⁸Son idénticas a la ecuación (35) cambiando el acoplo $\alpha - \frac{\beta}{3}$ por $\alpha = \frac{\gamma}{6M^2}$ y tomando $\Lambda = 0$.

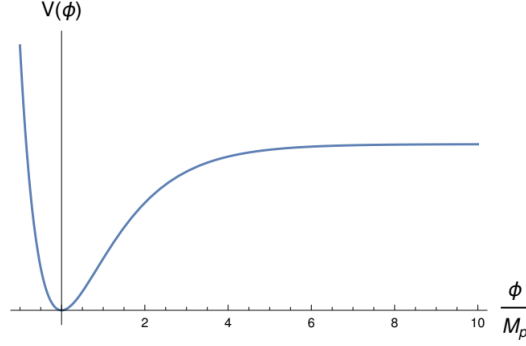


Figura 10: Potencial escalar de Starobinsky (54) en el marco de Einstein correspondiente al modelo (48). La inflación satisfactoria se produce para valores del campo $\phi \gg M_p$.

La expansión acelerada continua mientras que el parámetro de *slow-roll* (43) $\epsilon = \frac{M^2}{6H^2}$ es menor que de orden uno, esto es, mientras $H^2 \gtrsim M^2$, y la inflación termina cuando $\epsilon \simeq 1$, es decir, cuando $H_f = \frac{M}{\sqrt{6}}$. El número de *e-foldings* durante este período es

$$\mathcal{N} = \int_{t_i}^{t_f} dt H(t) \simeq H_i(t_f - t_i) - \frac{M^2}{12}(t_f - t_i)^2, \quad (57)$$

y como inflación acaba cuando $t_f \simeq t_i + \frac{6H_i}{M^2}$ se sigue que

$$\mathcal{N} \simeq \frac{3H_i^2}{M^2} \simeq \frac{1}{2\epsilon(t_i)}. \quad (58)$$

Por otro lado, en el marco de Einstein, podemos obtener los parámetros de *slow-roll* (43) en términos del potencial escalar como

$$\epsilon = \frac{M_p^2}{2} \left(\frac{V'(\phi)}{V(\phi)} \right)^2 = \frac{4}{3} \left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}} \right)^{-2}, \quad \eta = M_p^2 \frac{V''(\phi)}{V(\phi)} = -\frac{4}{3} \frac{\left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}} - 2 \right)}{\left(1 - e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}} \right)^2}, \quad (59)$$

que efectivamente durante inflación $\phi \gg M_p$ son mucho menores que 1. El parámetro de *slow-roll* que alcanza antes el orden unidad es ϵ , siendo el valor del campo $\phi \simeq 0.94M_p$. El número de *e-folds* en el marco de Einstein se calcula como

$$\mathcal{N}(\phi) = \frac{1}{M_p^2} \int_{\phi}^{\phi_i} d\phi \frac{V(\phi)}{V'(\phi)} \simeq \frac{3}{4} \left(e^{\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p}} + \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{\phi}{M_p} \right), \quad (60)$$

y se suele hacer una expansión a primer orden en $1/\mathcal{N}$ para obtener $\phi(\mathcal{N})$, resultando los parámetros de *slow-roll* en

$$\epsilon \simeq \frac{3}{4\mathcal{N}^2}, \quad \eta \simeq \frac{1}{\mathcal{N}}, \quad (61)$$

de modo que el índice espectral y el ratio tensor escalar (47) predichos son

$$n_s \simeq 1 - \frac{2}{\mathcal{N}}, \quad r \simeq \frac{12}{\mathcal{N}^2}. \quad (62)$$

4.3. Modelo de gravedad cuadrática

Consideramos ahora el modelo de gravedad cuadrática de Stelle, descrito por

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (\gamma R + \alpha R^2 - \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}). \quad (63)$$

Tal y como hemos discutido al derivar (34) en la sección anterior, podemos reescribir el término Ricci-Ricci en función de R^2 , el invariante topológico de Gauss-Bonnet G y el invariante del tensor de Weyl W^2 , que en métricas de tipo FRW se anula. Concluimos entonces que teoría de gravedad cuadrática de Stelle es equivalente en sus predicciones cosmológicas a la teoría de Starobinsky (48). Todo el análisis anterior sobre el modelo de Starobinsky es idéntico a lo que se obtiene de la teoría cuadrática de Stelle, con la salvedad de sustituir el acoplo $\alpha - \frac{\beta}{3}$ por $\frac{\gamma}{6M^2}$. Esto es muy positivo, pues demuestra que la gravedad cuadrática tiene la misma capacidad que el modelo de Starobinsky (el modelo inflacionario más robusto actualmente) para explicar inflación, con la ventaja adicional de ser una teoría renormalizable.

Cabe destacar que, si se consideran fluctuaciones de la métrica FRW, entonces en las perturbaciones sí aparece la contribución del tensor de Weyl. En [35] se han analizado los efectos de dichas perturbaciones sobre los parámetros fenomenológicos, y el resultado es que tanto la amplitud del espectro de potencias escalar A_s como el índice espectral escalar n_s son idénticos a los del modelo de Starobinsky, mientras que el ratio tensor escalar r se ve aún más reducido por un factor proporcional a la masa del *ghost*.

4.4. Modelos más generales de gravedad cuadrática

Podemos dar un paso más allá en la construcción de modelos inflacionarios basados en gravedad cuadrática. La generalización más natural, motivada por las teorías $f(R)$, consiste en la siguiente acción

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\gamma R + f(R^2, P, Q) - \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right), \quad (64)$$

siendo ϕ el campo escalar homogéneo que da cuenta del contenido de materia y donde $f(R^2, P, Q)$ es una función suave de R^2 , $P = R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$ y $Q = R_{\mu\nu\alpha\beta} R^{\mu\nu\alpha\beta}$. Trabajando

en una métrica FRW plana (16), los invariantes de curvatura vienen dados por (17) y podemos escribir el Lagrangiano (64) con multiplicadores de Lagrange λ_i asociados a cada invariante con el fin de tener un Lagrangiano estándar de primer orden pero con más variables [36]

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= a^3 b \left[\frac{6\gamma}{b^2} (X + Y) + f(R^2, P, Q) + \frac{1}{2b^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - \lambda_1 \left(R - \frac{6}{b^2} (X + Y) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_2 \left(P - \frac{12}{b^4} (X^2 + Y^2 + XY) \right) - \lambda_3 \left(Q - \frac{12}{b^4} (X^2 + Y^2) \right) \right] \\ &= a^3 b \left[\frac{6\gamma}{b^2} (X + Y) + f(R^2, P, Q) + \frac{1}{2b^2} \dot{\phi}^2 - V(\phi) - \lambda_1 \left(R - \frac{6}{b^2} (X + Y) \right) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_2 \left(P - \frac{1}{3} R^2 \right) - \lambda_3 \left(Q - \frac{1}{3} R^2 \right) - \frac{12}{b^4} XY (\lambda_2 + 2\lambda_3) \right] .\end{aligned}\quad (65)$$

De esta forma, las variaciones del Lagrangiano con respecto a P , Q Y R imponen

$$\begin{aligned}\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta P} &= a^3 b \left[\frac{\delta f(R^2, P, Q)}{\delta P} - \lambda_2 \right] = 0 \implies \lambda_2 = \frac{\delta f(R^2, P, Q)}{\delta P} \equiv f_P(R^2, P, Q) , \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta Q} &= a^3 b \left[\frac{\delta f(R^2, P, Q)}{\delta Q} - \lambda_3 \right] = 0 \implies \lambda_3 = \frac{\delta f(R^2, P, Q)}{\delta Q} \equiv f_Q(R^2, P, Q) , \\ \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta R} &= a^3 b \left[\frac{\delta f(R^2, P, Q)}{\delta R} - \lambda_1 + \frac{2}{3} R (\lambda_2 + \lambda_3) \right] = 0 \implies \lambda_1 = f_R(R^2, P, Q) + \frac{2}{3} R (\lambda_2 + \lambda_3) ,\end{aligned}\quad (66)$$

mientras que las variaciones con respecto a y b tras imponer el gauge $b(t) = 1$ e introducir el parámetro de Hubble $H = \dot{a}/a$ son, respectivamente,

$$\begin{aligned}6\gamma H^2 + f(R^2, P, Q) - \lambda_1 R + 6 \left(\dot{\lambda}_1 H + \lambda_1 H^2 \right) - \lambda_2 \left(P - \frac{1}{3} R^2 \right) - \lambda_3 \left(Q - \frac{1}{3} R^2 \right) \\ - 12H^3 (\dot{\lambda}_2 + 2\dot{\lambda}_3) = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) ,\end{aligned}\quad (67)$$

$$\begin{aligned}2\gamma(3H^2 + 2\gamma\dot{H}) + f(R^2, P, Q) - \lambda_1 R + 4\dot{\lambda}_1 H + 6\lambda_1 H^2 + 2\ddot{\lambda}_1 + 4\lambda_1 \dot{H} - \lambda_2 \left(P - \frac{1}{3} R^2 \right) \\ - \lambda_3 \left(Q - \frac{1}{3} R^2 \right) - 8H(\dot{H} + H^2)(\dot{\lambda}_2 + 2\dot{\lambda}_3) - 4H^2(\ddot{\lambda}_2 + 2\ddot{\lambda}_3) = -\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + V(\phi) .\end{aligned}\quad (68)$$

De esta forma, (67) y (68) junto con las expresiones de los multiplicadores de Lagrange (66) y los invariantes de curvatura (17) (fijando $b(t) = 1$) determinan completamente la dinámica de la teoría (64). De hecho, únicamente nos interesa (67), puesto que la ecuación para la materia proveniente de variar \mathcal{L} con respecto al campo ϕ es la conocida

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V'(\phi) = 0 .\quad (69)$$

Como ya hemos discutido en la sección anterior, (67) y (68) no son independientes sino que derivan una de la otra de forma consistente. En esta ocasión, si derivamos (67) y usamos (68) entonces encontramos la ecuación del movimiento del campo de materia ϕ , ligando así ambas.

Para analizar cómo la función general $f(R^2, P, Q)$ modifica inflación, debemos particularizar la ecuación (67) al caso de solución casi de Sitter, esto es, $H = H_{dS} \simeq cte$ bajo la aproximación *slow-roll* $\dot{\phi}^2 \ll V(\phi)$, lo cual conduce a

$$V(\phi) = 6\gamma H_{dS}^2 + f(R_{dS}^2, P_{dS}, Q_{dS}) - \frac{R_{dS}}{2} f_R - P_{dS} f_P - Q_{dS} f_Q, \quad (70)$$

siendo $R_{dS} = 12H_{dS}^2$, $P_{dS} = 36H_{dS}^4$ y $Q_{dS} = 24H_{dS}^4$. Además, tomando la derivada de (67) con respecto al tiempo en la aproximación *slow-roll* obtenemos la ecuación para \dot{H} (y para \ddot{H} si la derivamos nuevamente) que nos permite hallar los parámetros ϵ y η (43),

$$\begin{aligned} \dot{H} [12\gamma H + 12f_R H - 144f_{RR} H^3 - 5184f_{PP} H^7 - 6912f_{PQ} H^7 - 2304f_{QQ} H^7 \\ - 1728f_{RP} H^5 - 1152f_{RQ} H^5] \simeq V'(\phi) \dot{\phi}, \end{aligned} \quad (71)$$

donde $H = H_{dS}$ y $\dot{\phi} \simeq -\frac{V'(\phi)}{3H}$.

Todas estas herramientas nos permiten entonces fijar un modelo concreto y hacer predicciones inflacionarias sobre el mismo. Con el fin de trabajar con un modelo analítico y que además sea natural, escogemos un potencial cuadrático y una función de curvatura dada por

$$V(\phi) = \frac{1}{2} M^2 \phi^2, \quad f(R^2, P, Q) = \alpha R^{2n} + \beta P^n + \delta Q^n, \quad (72)$$

con α , β y γ constantes con dimensiones de M^{4-4n} siendo n un real. Como inflación tiene lugar en el régimen de alta curvatura, podemos despreciar el término de Einstein-Hilbert frente a los invariantes superiores y obtener de (70) la solución de tipo de Sitter como

$$H_{dS} = C M^{\frac{1}{2n}} \phi^{\frac{1}{2n}}, \quad C = \left[\frac{2^{-1-2n} 3^{-n}}{(n-1)(-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right]^{\frac{1}{4n}} \quad (73)$$

la cual para $n > 1$ obliga que $12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta < 0$. Usando (71) encontramos que $\dot{H} = -\frac{M^2}{6n}$, generalizando correctamente lo encontrado en el modelo de Starobinsky ($n = 1$), y con la derivada de dicha ecuación tenemos $\ddot{H} = \frac{M^4(1+2n)}{18n^2 H_{dS}}$, por lo que los parámetros de *slow-roll* (42) y el número de *e-folds* (46) se escriben

$$\epsilon = \frac{1}{6nC^2} \frac{M^{2-\frac{1}{n}}}{\phi^{\frac{1}{n}}}, \quad \eta = \frac{(n+1)}{3nC^2} \frac{M^{2-\frac{1}{n}}}{\phi^{\frac{1}{n}}}, \quad \mathcal{N} = 3nC^2 \frac{\phi^{\frac{1}{n}}}{M^{2-\frac{1}{n}}}. \quad (74)$$

Aparentemente, obtenemos de forma satisfactoria en (74) que un número grande de *e-folds* (es decir, $\phi_i \gg M_p$) produce que los parámetros de *slow-roll* sean pequeños durante la inflación, pues se verifica

$$\epsilon \simeq \frac{\eta}{2(n+1)} \simeq \frac{1}{2\mathcal{N}} , \quad (75)$$

de forma consistente y similar a lo obtenido en el modelo de Starobinsky (58). No obstante, un análisis fenomenológico con los datos del satélite Planck [5] en mano para el número de *e-folds*, la amplitud del espectro de potencias, el índice espectral y el ratio tensor-escalar arroja, respectivamente, los siguientes resultados (Anexo C):

$$49 < 3nC^2 \frac{\phi_n^{\frac{1}{n}}}{M^{2-\frac{1}{n}}} < 59 , \quad (76)$$

$$\frac{3nC^4}{4\pi^2 M_p^2} \frac{\phi_n^{\frac{2}{n}}}{M^{2-\frac{2}{n}}} \simeq 10^{-9} , \quad (77)$$

$$1 + \frac{(2n-1)}{3nC^2} \frac{M^{2-\frac{1}{n}}}{\phi_n^{\frac{1}{n}}} = 0.9649 \pm 0.0042 , \quad (78)$$

$$\frac{8}{3nC^2} \frac{M^{2-\frac{1}{n}}}{\phi_n^{\frac{1}{n}}} < 0.10 . \quad (79)$$

Independientemente del exponente n escogido en el modelo (72), las condiciones (76) y (79) son incompatibles puesto que haciendo el inverso de la última obtenemos $\mathcal{N} > 80$, muy superior a la restricción de Planck. La condición (77), al ser una estimación de orden de magnitud, sí es compatible y arroja un valor similar al de Starobinsky para la masa del campo escalar, $M \simeq 10^{-6} M_p$. Nuevamente, el ratio tensor-escalar predicho es totalmente incompatible con las observaciones porque el segundo término del lado izquierdo de (78) es positivo.

Este breve análisis demuestra que los modelos de tipo potencial cuadrático y ley de potencias en gravedad cuadrática se ven muy desfavorecidos con respecto a la gravedad cuadrática de Stelle. De hecho, con otros potenciales escalares naturales como el potencial cuártico o de tipo Higgs se obtienen resultados similares (peores en el caso cuártico que en el caso Higgsiano), totalmente incompatibles con los datos actuales. En [37] se lleva a cabo un análisis muy similar para modelos tipo Gauss-Bonnet, distintos al modelo potencial que hemos analizado, y la tendencia es la misma: la inflación es aparentemente viable pero los parámetros fenomenológicos predichos no son compatibles con los datos del satélite Planck, cosa que sí ocurre con la gravedad cuadrática de Stelle.

5. Conclusiones

La gravedad cuadrática es una teoría renormalizable, que proporciona una compleción ultravioleta de la relatividad general y que, en nuestra opinión, es una candidata válida como teoría de gravedad cuántica. No obstante, no es una teoría totalmente consistente. Diversos conceptos usualmente asumidos de forma ortodoxa en teoría cuántica de campos, como la unitariedad o la causalidad (lo cual no es sorprendente, pues en un espaciotiempo cuántico, fluctuante, no está claro cómo mantener dicho concepto), deben ser formulados de forma extremadamente cuidadosa, aún objeto de investigación actual, para que sea una teoría totalmente consistente. El problema de los grados de libertad *ghost* está íntimamente relacionado con estos principios básicos de una teoría de campos cuánticos relativista, y hemos visto como, pese a las ingeniosas ideas presentes en la literatura, sigue siendo necesario explorar en profundidad la teoría para cimentar sus fundamentos.

También hemos analizado las soluciones cosmológicas de la teoría cuadrática. Hemos demostrado que los espacios maximalmente simétricos en 4 dimensiones y las soluciones de vacío de la relatividad general son también solución de la teoría con altas derivadas, aunque esta última presenta soluciones adicionales sin contrapartida Einsteiniana. Hemos sido capaces de reducir la gravedad cuadrática de Stelle a una teoría de tipo Starobinsky en lo que a cuestiones cosmológicas se refiere, puesto que el tensor de Weyl es nulo en métricas FRW. A partir de ese resultado, hemos obtenido soluciones tipo de Sitter y hemos estudiado su estabilidad, comprobando que si $3\alpha > \beta$ (rama estable) se tiene una expansión continua del universo, pero si $3\alpha < \beta$ (rama inestable, la masa de la partícula adicional se hace imaginaria) el universo tiende a colapsar. En cuanto a la singularidad inicial, hemos encontrado soluciones que tienen *Big Bang* seguido de una expansión continua ($3\alpha > \beta$) o de un *Big Crunch* ($3\alpha < \beta$), otras que no tienen *Big Bang* y acaban colapsando a un *Big Crunch* ($3\alpha < \beta$) y otras que no tienen ni *Big Bang* ni *Big Crunch* ($3\alpha < \beta$).

Por último, hemos estudiado el paradigma inflacionario en la teoría de Starobinsky haciendo emerger un campo escalar oculto en un término de curvatura superior mediante una transformación conforme. Hemos visto que las predicciones del modelo de Starobinsky son idénticas a la teoría de Stelle, teniendo esta la ventaja de ser renormalizable. Por último, hemos generalizado la teoría cuadrática con un modelo potencial genérico y hemos visto que sus predicciones inflacionarias son peores que las de la gravedad cuadrática ordinaria.

Referencias

- [1] I. L. Buchbinder and I. Shapiro. *Introduction to Quantum Field Theory with Applications to Quantum Gravity*. Oxford University Press, 2023.
- [2] J. F. Donoghue. General relativity as an effective field theory: The leading quantum corrections. *Phys. Rev. D*, 50:3874–3888, 1994. [arXiv:gr-qc/9405057](#).
- [3] C. P. Burgess. Quantum gravity in everyday life: General relativity as an effective field theory. *Living Reviews in Relativity*, 7(1), 2004. [doi:10.12942/lrr-2004-5](#).
- [4] K. S. Stelle. Renormalization of Higher Derivative Quantum Gravity. *Phys. Rev. D*, 16:953–969, 1977. [doi:10.1103/PhysRevD.16.953](#).
- [5] Y. Akrami et al. Planck 2018 results. X. Constraints on inflation. *Astron. Astrophys.*, 641:A10, 2020. [arXiv:1807.06211](#), [doi:10.1051/0004-6361/201833887](#).
- [6] A. A. Starobinsky. A New Type of Isotropic Cosmological Models Without Singularity. *Phys. Lett. B*, 91:99–102, 1980. [doi:10.1016/0370-2693\(80\)90670-X](#).
- [7] K. S. Stelle. Classical Gravity with Higher Derivatives. *Gen. Rel. Grav.*, 9:353–371, 1978. [doi:10.1007/BF00760427](#).
- [8] A. Salvio. Quadratic Gravity. *Front. in Phys.*, 6:77, 2018. [arXiv:1804.09944](#), [doi:10.3389/fphy.2018.00077](#).
- [9] L. Alvarez-Gaume et al. Aspects of Quadratic Gravity. *Fortsch. Phys.*, 64(2-3):176–189, 2016. [arXiv:1505.07657](#), [doi:10.1002/prop.201500100](#).
- [10] R. Myrzakulov, S. D. Odintsov, and L. Sebastiani. Inflationary universe from higher-derivative quantum gravity. *Physical Review D*, 91(8), apr 2015. [doi:10.1103/physrevd.91.083529](#).
- [11] M. Blau. Lecture Notes on General Relativity. 2023. URL: <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html>.
- [12] R. P. Woodard. Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability. *Scholarpedia*, 10(8):32243, 2015. [arXiv:1506.02210](#), [doi:10.4249/scholarpedia.32243](#).
- [13] A. Bas, G. Calcagni, and L. Rachwał. Classical and quantum nonlocal gravity, 2022. [arXiv:2211.05606](#).

- [14] M. Asorey, J. L. López, and I. L. Shapiro. Some remarks on high derivative quantum gravity. *International Journal of Modern Physics A*, 12(32):5711–5734, dec 1997. doi:10.1142/S0217751x97002991.
- [15] F. Sbisà. Classical and quantum ghosts. *European Journal of Physics*, 36(1):015009, nov 2014. doi:10.1088/0143-0807/36/1/015009.
- [16] T. Clifton, P. G. Ferreira, A. Padilla, and C. Skordis. Modified gravity and cosmology. *Physics Reports*, 513(1-3):1–189, mar 2012. doi:10.1016/j.physrep.2012.01.001.
- [17] C. Deffayet, S. Mukohyama, and A. Vikman. Ghosts without runaway instabilities. *Phys. Rev. Lett.*, 128:041301, Jan 2022. doi:10.1103/PhysRevLett.128.041301.
- [18] C. Deffayet, A. Held, S. Mukohyama, and A. Vikman. Global and local stability for ghosts coupled to positive energy degrees of freedom, 2023. arXiv:2305.09631.
- [19] J. F. Donoghue and G. Menezes. Ostrogradsky instability can be overcome by quantum physics. *Physical Review D*, 104(4), 2021. doi:10.1103/physrevd.104.045010.
- [20] I. Kuntz. Exorcising ghosts in quantum gravity. *Eur. Phys. J. Plus*, 135(10):859, 2020. arXiv:1909.11072, doi:10.1140/epjp/s13360-020-00875-x.
- [21] J. F. Donoghue and G. Menezes. On quadratic gravity, 2021. arXiv:2112.01974.
- [22] P. D. Mannheim. Solution to the ghost problem in higher-derivative gravity. *Nuovo Cim. C*, 45(2):27, 2022. arXiv:2109.12743, doi:10.1393/ncc/i2022-22027-6.
- [23] C. M. Bender and P. D. Mannheim. No-ghost theorem for the fourth-order derivative Pais-Uhlenbeck oscillator model. *Phys. Rev. Lett.*, 100:110402, 2008. arXiv:0706.0207, doi:10.1103/PhysRevLett.100.110402.
- [24] M. Asorey, L. Rachwal, and I. L. Shapiro. Unitary Issues in Some Higher Derivative Field Theories. *Galaxies*, 6(1):23, 2018. doi:10.3390/galaxies6010023.
- [25] H. J. Schmidt. Fourth order gravity: Equations, history, and applications to cosmology. *eConf*, C0602061:12, 2006. arXiv:gr-qc/0602017, doi:10.1142/S0219887807001977.
- [26] J. Middleton. On The Existence Of Anisotropic Cosmological Models In Higher-Order Theories Of Gravity. *Class. Quant. Grav.*, 27:225013, 2010. arXiv:1007.4669, doi:10.1088/0264-9381/27/22/225013.

- [27] J. D. Barrow and S. Hervik. On the evolution of universes in quadratic theories of gravity. *Phys. Rev. D*, 74:124017, 2006. [arXiv:gr-qc/0610013](#), [doi:10.1103/PhysRevD.74.124017](#).
- [28] M. Iihoshi, S. V. Ketov, and A. Morishita. Conformally flat FRW metrics. *Progress of Theoretical Physics*, 118(3):475–489, sep 2007. [doi:10.1143/ptp.118.475](#).
- [29] A. V. Toporensky and P. V. Tretyakov. De Sitter stability in quadratic gravity. *International Journal of Modern Physics D*, 16(06):1075–1085, jun 2007. [doi:10.1142/s0218271807010572](#).
- [30] J. Middleton and J. D. Barrow. The Stability of an Isotropic Cosmological Singularity in Higher-Order Gravity. *Phys. Rev. D*, 77:103523, 2008. [arXiv:0801.4090](#), [doi:10.1103/PhysRevD.77.103523](#).
- [31] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt, and N. Turok. The Ekpyrotic universe: Colliding branes and the origin of the hot big bang. *Phys. Rev. D*, 64:123522, 2001. [arXiv:hep-th/0103239](#), [doi:10.1103/PhysRevD.64.123522](#).
- [32] M. Miranda, D. Vernieri, S. Capozziello, and F. S. N. Lobo. Bouncing cosmology in fourth-order gravity. *Universe*, 8(3):161, mar 2022. [doi:10.3390/universe8030161](#).
- [33] A. De Felice and S. Tsujikawa. $f(R)$ theories. *Living Rev. Rel.*, 13:3, 2010. [arXiv:1002.4928](#), [doi:10.12942/lrr-2010-3](#).
- [34] A. Kehagias, A. Moradinezhad, and A. Riotto. Remarks on the Starobinsky model of inflation and its descendants. *Phys. Rev. D*, 89(4):043527, 2014. [arXiv:1312.1155](#), [doi:10.1103/PhysRevD.89.043527](#).
- [35] D. Anselmi, E. Bianchi, and M. Piva. Predictions of quantum gravity in inflationary cosmology: effects of the Weyl-squared term. *JHEP*, 07:211, 2020. [arXiv:2005.10293](#), [doi:10.1007/JHEP07\(2020\)211](#).
- [36] G. Cognola, M. Gastaldi, and S. Zerbini. On the stability of a class of modified gravitational models. *Int. J. Theor. Phys.*, 47:898–910, 2008. [arXiv:gr-qc/0701138](#), [doi:10.1007/s10773-007-9516-x](#).
- [37] S. Myrzakul, R. Myrzakulov, and L. Sebastiani. Chaotic inflation in higher derivative gravity theories. *Eur. Phys. J. C*, 75(3):111, 2015. [arXiv:1501.01796](#), [doi:10.1140/epjc/s10052-015-3332-x](#).

Anexo A. Notación y convenios

A lo largo del trabajo empleamos un sistema de unidades que verifique $\hbar = c = 1$, de manera que $E = M = L^{-1} = T^{-1}$ donde E , M , L y T son, respectivamente, dimensiones de energía, masa, longitud y tiempo.

Usamos también el convenio de sumación de Einstein, asumiendo siempre una suma sobre un índice cuando el mismo aparezca repetido arriba (contravariante) y abajo (covariante). Por último, las letras griegas (indicando índices espaciotemporales) μ, ν, α, \dots tomarán valores de 0 a 3 y las letras latinas (indicando índices puramente espaciales) i, j, k, \dots tomarán valores de 1 a 3.

Denotamos la derivada parcial con respecto a la coordenada x^μ como

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} .$$

El operador Laplaciano \square se define como $\square = \nabla^\mu \nabla_\mu$, siendo ∇_μ la derivada covariante.

Abusamos de lenguaje llamando Lagrangiano o Hamiltoniano a lo que en realidad es una densidad Lagrangiana o Hamiltoniana, que denotamos por \mathcal{L} y \mathcal{H} , respectivamente.

UV o ultravioleta hacen referencia a alta energía, mientras que IR o infrarrojo hacen referencia a baja energía.

La métrica $g_{\mu\nu}$, cuyo determinante denotamos por $g = \det g_{\mu\nu}$, tiene signatura *mostly plus* $(-, +, +, +)$. Esta métrica tiene asociada una conexión afín dada por

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\lambda\alpha} (\partial_\mu g_{\nu\alpha} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\alpha g_{\mu\nu}) .$$

A partir de la conexión se puede construir el tensor de curvatura de Riemann como

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\sigma\mu} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\nu} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\sigma\mu} ,$$

que contrayendo su primer y tercer índice da lugar al tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$, cuya traza proporciona la curvatura escalar del espaciotiempo R :

$$R_{\mu\nu} = R^\rho{}_{\mu\rho\nu} , \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} .$$

Anexo B. Equivalencia entre el formalismo Lagrangiano restringido y general

In[*]:= ClearAll["Global`*"]

[borra todo](#)

Needs["VariationalMethods`"]

[necesita](#)

- Lagrangiano sin materia pero con constante cosmológica

In[*]:= n = 4;

coord = {t, x, y, z};

metric = {{-b[t]^2, 0, 0, 0}, {0, a[t]^2, 0, 0}, {0, 0, a[t]^2, 0}, {0, 0, 0, a[t]^2}};

inversemetric = Simplify[Inverse[metric]];

[simplifica](#) [matriz inversa](#)

affine := affine =

Simplify[Table[(1/2) * Sum[inversemetric[[i, s]] * (D[metric[[s, j]], coord[[k]]] +

[simplifica](#) [tabla](#) [suma](#) [deriva](#)
D[metric[[s, k]], coord[[j]]] - D[metric[[j, k]], coord[[s]]],

[deriva](#) [deriva](#)
{s, 1, n}], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}]]];

riemann := riemann = Simplify[Table[D[affine[[i, j, 1]], coord[[k]]] -

[simplifica](#) [tabla](#) [deriva](#)

D[affine[[i, j, k]], coord[[1]]] +

[deriva](#)

Sum[affine[[s, j, 1]] * affine[[i, k, s]] - affine[[s, j, k]] * affine[[i, 1, s]],

[suma](#)

{s, 1, n}], {i, 1, n}, {j, 1, n}, {k, 1, n}, {1, 1, n}]]];

ricci := ricci = Simplify[Table[Sum[riemann[[i, j, i, 1]], {i, 1, n}],

[simplifica](#) [tabla](#) [suma](#)

{j, 1, n}, {1, 1, n}]]

R = Simplify[Sum[inversemetric[[i, j]] * ricci[[i, j]], {i, 1, n}, {j, 1, n}]]];

[simplifica](#) [suma](#)

Riem2 = Sum[ricci[[i, k]] inversemetric[[i, 1]] inversemetric[[k, m]] ricci[[1, m]],

[suma](#)

{i, 1, 4}, {k, 1, 4}, {1, 1, 4}, {m, 1, 4}] // Simplify;

[simplifica](#)

R2 = R^2;

L = FullSimplify[b[t] * a[t]^3 * (γ * (R - 2 * Λ) + α * R2 - β * Riem2)]

[simplifica completamente](#)

$$\begin{aligned} \text{Out[*]} = & \frac{1}{a[t] b[t]^5} \left(\alpha \left(6 a[t] a'[t] b'[t] - 6 b[t] \left(a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right)^2 + \right. \\ & \gamma a[t]^2 b[t]^3 \left(-2 \Lambda a[t]^2 b[t]^3 - 6 a[t] a'[t] b'[t] + 6 b[t] \left(a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right) - \\ & \beta \left(9 a[t]^2 \left(a'[t] b'[t] - b[t] a''[t] \right)^2 + \right. \\ & \left. \left. 3 \left(a[t] a'[t] b'[t] - b[t] \left(2 a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right)^2 \right) \right) \end{aligned}$$

Lagrangiano Λ =

$$\frac{1}{a[t] b[t]^5} \left(\alpha \left(6 a[t] a'[t] b'[t] - 6 b[t] \left(a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right)^2 + \gamma a[t]^2 b[t]^3 \right. \\ \left. \left(-2 \Lambda a[t]^2 b[t]^3 - 6 a[t] a'[t] b'[t] + 6 b[t] \left(a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right) - \beta \left(9 a[t]^2 \right. \right. \\ \left. \left. \left(a'[t] b'[t] - b[t] a''[t] \right)^2 + 3 \left(a[t] a'[t] b'[t] - b[t] \left(2 a'[t]^2 + a[t] a''[t] \right) \right)^2 \right) \right);$$

In[]:= EulerEquations[Lagrangiano Λ , b[t], t];

In[]:= EcblLagrangiano Λ =

$$-2 \gamma \Lambda a[t]^3 + \frac{36 (-3 \alpha + \beta) a'[t]^4}{a[t] b[t]^4} + \frac{24 (3 \alpha - \beta) a'[t]^2 (-a'[t] b'[t] + b[t] a''[t])}{b[t]^5} + \\ \frac{1}{b[t]^6} \left(6 a[t] \left(\gamma b[t]^4 a'[t]^2 + 10 (3 \alpha - \beta) a'[t]^2 b'[t]^2 - 4 (3 \alpha - \beta) b[t] a'[t] \right. \right. \\ \left. \left. (2 b'[t] a''[t] + a'[t] b''[t]) - 2 (3 \alpha - \beta) b[t]^2 (a''[t]^2 - 2 a'[t] a^{(3)}[t]) \right) \right);$$

In[]:= EulerEquations[Lagrangiano Λ , a[t], t];

$$\text{In[]:= EcaLagrangiano}\Lambda = \frac{1}{a[t]^2 b[t]^6} \left(-\gamma \Lambda a[t]^4 b[t]^7 + \right. \\ 6 (3 \alpha - \beta) b[t]^3 a'[t]^4 - 24 (3 \alpha - \beta) a[t] b[t]^2 a'[t]^2 (-a'[t] b'[t] + b[t] a''[t]) + \\ a[t]^2 b[t] \left(\gamma b[t]^4 a'[t]^2 + 30 (3 \alpha - \beta) a'[t]^2 b'[t]^2 - 4 (3 \alpha - \beta) b[t] a'[t] \right. \\ \left. (9 b'[t] a''[t] + 2 a'[t] b''[t]) + 2 (3 \alpha - \beta) b[t]^2 (3 a''[t]^2 + 4 a'[t] a^{(3)}[t]) \right) + \\ 2 a[t]^3 (-\gamma b[t]^4 a'[t] b'[t] + 30 (-3 \alpha + \beta) a'[t] b'[t]^3 + \gamma b[t]^5 a''[t] + \\ 10 (3 \alpha - \beta) b[t] b'[t] (3 b'[t] a''[t] + 2 a'[t] b''[t]) - 2 (3 \alpha - \beta) b[t]^2 \\ \left. (4 a''[t] b''[t] + 6 b'[t] a^{(3)}[t] + a'[t] b^{(3)}[t]) + 2 (3 \alpha - \beta) b[t]^3 a^{(4)}[t] \right) \right);$$

■ prueba de que no son independientes sin añadir materia, pero con constante cosmológica

In[]:= FullSimplify[D[EcblLagrangiano Λ , t] == EcaLagrangiano Λ * a'[t] / b[t]]

[simplifica compl...](#) [deriva](#)

Out[]:= True

■ Lagrangiano sin materia y sin constante cosmológica

In[]:= Lagrangiano =

$$6 / \left(a[t] * b[t]^5 \right) * \left(\gamma * a[t]^2 * b[t]^4 * a'[t]^2 + 2 * (3 * \alpha - \beta) * b[t]^2 * a'[t]^4 + \right. \\ 2 * (3 * \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * a''[t]^2 + 2 * (3 * \alpha - \beta) * a[t]^2 * a'[t]^2 * \\ b'[t]^2 + \left(\gamma * a[t]^3 * b[t]^4 + 2 * (6 * \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * a'[t]^2 \right) * a''[t] - \\ \left(\gamma * a[t]^3 * b[t]^3 * a'[t] + 2 * (6 * \alpha - \beta) * a[t] * b[t] * a'[t]^3 + \right. \\ \left. 4 * (3 * \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * a'[t] * a''[t] \right) * b'[t] \left. \right);$$

In[]:= EulerEquations[Lagrangiano, b[t], t];

In[]:= EcblLagrangiano = $\frac{1}{a[t] b[t]^6} 6$

$$\left(6 (-3 \alpha + \beta) b[t]^2 a'[t]^4 + 4 (3 \alpha - \beta) a[t] b[t] a'[t]^2 (-a'[t] b'[t] + b[t] a''[t]) + \right. \\ a[t]^2 \left(\gamma b[t]^4 a'[t]^2 + 10 (3 \alpha - \beta) a'[t]^2 b'[t]^2 - 4 (3 \alpha - \beta) b[t] a'[t] \right. \\ \left. (2 b'[t] a''[t] + a'[t] b''[t]) - 2 (3 \alpha - \beta) b[t]^2 (a''[t]^2 - 2 a'[t] a^{(3)}[t]) \right) \left. \right);$$

In[]:= EulerEquations[Lagrangiano, a[t], t];

$$\begin{aligned} \text{In}[*]:= \text{EcaLagrangiano} = & \frac{1}{a[t]^2 b[t]^6} 6 \\ & (6 (3\alpha - \beta) b[t]^3 a'[t]^4 - 24 (3\alpha - \beta) a[t] b[t]^2 a'[t]^2 (-a'[t] b'[t] + b[t] a''[t]) + \\ & a[t]^2 b[t] (\gamma b[t]^4 a'[t]^2 + 30 (3\alpha - \beta) a'[t]^2 b'[t]^2 - 4 (3\alpha - \beta) b[t] a'[t] \\ & (9 b'[t] a''[t] + 2 a'[t] b''[t]) + 2 (3\alpha - \beta) b[t]^2 (3 a''[t]^2 + 4 a'[t] a^{(3)}[t])) + \\ & 2 a[t]^3 (-\gamma b[t]^4 a'[t] b'[t] + 30 (-3\alpha + \beta) a'[t] b'[t]^3 + \gamma b[t]^5 a''[t] + \\ & 10 (3\alpha - \beta) b[t] b'[t] (3 b'[t] a''[t] + 2 a'[t] b''[t]) - 2 (3\alpha - \beta) b[t]^2 \\ & (4 a''[t] b''[t] + 6 b'[t] a^{(3)}[t] + a'[t] b^{(3)}[t]) + 2 (3\alpha - \beta) b[t]^3 a^{(4)}[t])); \end{aligned}$$

■ prueba de que no son independientes sin añadir materia y sin cte cosmológica

$$\text{In}[*]:= \text{FullSimplify}[D[\text{EcblLagrangiano}\Lambda, t] == \text{EcaLagrangiano}\Lambda * a'[t] / b[t]]$$

[simplifica compl... deriva]

Out[*]= True

■ VAMOS A VER AHORA QUE LO DE ARRIBA ES EQUIVALENTE A LAS ECUACIONES DE CAMPO

■ constante cosmológica pero sin materia

$$\begin{aligned} \text{In}[*]:= \text{Ec00}\Lambda = & -\frac{1}{2 a[t]^4 b[t]^4} (-6 \gamma * a[t]^2 * b[t]^4 * (a'[t])^2 + 36 * (3\alpha - \beta) * b[t]^2 * (a'[t])^4 - \\ & 24 (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * (a'[t])^2 * a''[t] + 12 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * \\ & b[t]^2 * (a''[t])^2 - 24 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a'''[t] - \\ & 60 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * (a'[t])^2 * (b'[t])^2 + 24 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * \\ & b[t] * (a'[t])^2 * b''[t] + 24 * ((3\alpha - \beta) * a[t] * b[t] * (a'[t])^3 + \\ & 2 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * a'[t] * a''[t]) * b'[t] + 2 * \gamma * \Lambda * a[t]^4 * b[t]^6); \\ \text{Ecii}\Lambda = & -\frac{1}{2 a[t]^2 b[t]^7} (2 * \gamma * a[t]^2 b[t]^5 * (a'[t])^2 + 12 (3\alpha - \beta) * b[t]^3 a'[t]^4 + \\ & 12 (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * (a''[t])^2 + \\ & 16 (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * a'[t] * a'''[t] + \\ & 8 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^3 * a''''[t] - 120 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * a'[t] * (b'[t])^3 - \\ & 8 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'[t] * b''''[t] + \\ & 60 ((3\alpha - \beta) * a[t]^2 b[t] * (a'[t])^2 + 2 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 b[t] * a''[t]) b'[t]^2 + \\ & 4 (\gamma * a[t]^3 b[t]^5 - 12 (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^3 * (a'[t])^2) a''[t] - \\ & 4 (\gamma * a[t]^3 b[t]^4 a'[t] - 12 (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * a'[t]^3 + 18 (3\alpha - \beta) * \\ & a[t]^2 * b[t]^2 a'[t] a''[t] + 12 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 a'''[t]) b'[t] - \\ & 16 ((3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a'[t])^2 + 2 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a''[t] - \\ & 5 (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a'[t] * b'[t]) b''[t] - 2 * \gamma * \Lambda * a[t]^4 * b[t]^7); \end{aligned}$$

$$\text{In}[*]:= \text{FullSimplify}[\text{EcblLagrangiano}\Lambda == 2 * a[t]^3 / b[t]^2 * \text{Ec00}\Lambda]$$

[simplifica completamente]

Out[*]= True

$$\text{In}[*]:= \text{FullSimplify}[\text{EcaLagrangiano}\Lambda == -6 * b[t] \text{Ecii}\Lambda]$$

[simplifica completamente]

Out[*]= True

■ Sin constante cosmológica y sin materia

```

In[ ]:= Ec00 =
- 
$$\frac{1}{2 a[t]^4 b[t]^4} \left( -6 \gamma * a[t]^2 * b[t]^4 * (a'[t])^2 + 36 * (3 \alpha - \beta) * b[t]^2 * (a'[t])^4 - \right.$$


$$24 * (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * (a'[t])^2 * a''[t] + 12 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a''[t])^2 -$$


$$24 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a'''[t] -$$


$$60 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * (a'[t])^2 * (b'[t])^2 + 24 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * (a'[t])^2 * b''[t] +$$


$$24 * ((3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t] * (a'[t])^3 + 2 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * a'[t] * a''[t]) * b'[t] \Big);$$

Ecii = - 
$$\frac{1}{2 a[t]^2 b[t]^7} \left( 2 * \gamma * a[t]^2 b[t]^5 * (a'[t])^2 + 12 * (3 \alpha - \beta) * b[t]^3 a'[t]^4 + \right.$$


$$12 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * (a''[t])^2 +$$


$$16 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * a'[t] * a'''[t] +$$


$$8 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^3 * a''''[t] - 120 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * a'[t] * (b'[t])^3 -$$


$$8 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'[t] * b''''[t] +$$


$$60 * ((3 \alpha - \beta) * a[t]^2 b[t] * (a'[t])^2 + 2 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 b[t] * a''[t]) b'[t]^2 +$$


$$4 * (\gamma * a[t]^3 b[t]^5 - 12 * (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^3 * (a'[t])^2) a''[t] -$$


$$4 * (\gamma * a[t]^3 b[t]^4 a'[t] - 12 * (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * a'[t]^3 + 18 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a''[t] +$$


$$12 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'''[t]) b'[t] -$$


$$16 * ((3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a'[t])^2 + 2 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a''[t] -$$


$$5 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a'[t] * b''[t]) b''[t] \Big);$$


```

```

In[ ]:= FullSimplify[EcbLagrangiano == 2 * a[t]^3 / b[t]^2 * Ec00]
[simplifica completamente]

```

```
Out[ ]:= True
```

```

In[ ]:= FullSimplify[EcaLagrangiano == -6 * b[t] Ecii]
[simplifica completamente]

```

```
Out[ ]:= True
```

■ VAMOS AL CASO CON MATERIA Y CON CONSTANTE COSMOLÓGICA

```

In[ ]:= ρ[t] = d * a[t]^(-3 * (1 + w));
p[t] = w * ρ[t];
EcbLagrangianoΛ = EcbLagrangianoΛ - a[t]^3 * ρ[t];
EcaLagrangianoΛ = EcaLagrangianoΛ + 3 * a[t]^2 * b[t] * p[t];

```

■ prueba de que no son independientes con materia y constante cosmológica

```

In[ ]:= FullSimplify[D[EcbLagrangianoΛ, t] == EcaLagrangianoΛ * a'[t] / b[t]]
[simplifica completa] [deriva]

```

```
Out[ ]:= True
```

■ Demostramos que es equivalente a las ecuaciones de campo

$$\text{In[*]:= Ec00}\Lambda\rho = -\frac{1}{2a[t]^4b[t]^4} \left(a[t]^4 * b[t]^6 * \rho[t] - 6\gamma * a[t]^2 * b[t]^4 * (a'[t])^2 + \right. \\ \left. 36 * (3\alpha - \beta) * b[t]^2 * (a'[t])^4 - 24 * (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * (a'[t])^2 * a''[t] + \right. \\ \left. 12 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a''[t])^2 - 24 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * \right. \\ \left. b[t]^2 * a'[t] * a'''[t] - 60 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * (a'[t])^2 * (b'[t])^2 + \right. \\ \left. 24 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * (a'[t])^2 * b''[t] + 24 * \right. \\ \left. ((3\alpha - \beta) * a[t] * b[t] * (a'[t])^3 + 2 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * a'[t] * a''[t]) * \right. \\ \left. b'[t] + 2 * \gamma * \Lambda * a[t]^4 * b[t]^6 \right);$$

$$\text{Eci}\Lambda\rho = -\frac{1}{2a[t]^2b[t]^7} \left(a[t]^4 * b[t]^7 * p[t] + 2 * \gamma * a[t]^2 * b[t]^5 * (a'[t])^2 + \right. \\ \left. 12 * (3\alpha - \beta) * b[t]^3 * a'[t]^4 + 12 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * (a''[t])^2 + \right. \\ \left. 16 * (3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * a'[t] * a'''[t] + \right. \\ \left. 8 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^3 * a''''[t] - 120 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * a'[t] * (b'[t])^3 - \right. \\ \left. 8 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'[t] * b''''[t] + \right. \\ \left. 60 * ((3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * (a'[t])^2 + 2 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a''[t]) * b'[t]^2 + \right. \\ \left. 4 * (\gamma * a[t]^3 * b[t]^5 - 12 * (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^3 * (a'[t])^2) * a''[t] - \right. \\ \left. 4 * (\gamma * a[t]^3 * b[t]^4 * a'[t] - 12 * (3\alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * a'[t]^3 + 18 * (3\alpha - \beta) * \right. \\ \left. a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a''[t] + 12 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'''[t]) * b'[t] - \right. \\ \left. 16 * ((3\alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a'[t])^2 + 2 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a''[t] - \right. \\ \left. 5 * (3\alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a'[t] * b'[t]) * b''[t] - 2 * \gamma * \Lambda * a[t]^4 * b[t]^7 \right);$$

`In[*]:= FullSimplify[EcbLagrangiano\Lambda == 2 * a[t]^3 / b[t]^2 * Ec00\Lambda\rho]`
[\[simplifica completamente\]](#)

`Out[*]:= True`

`In[*]:= FullSimplify[EcaLagrangiano\Lambda == -6 * b[t] * Eci\Lambda\rho]`
[\[simplifica completamente\]](#)

`Out[*]:= True`

`In[*]:= FullSimplify[D[EcbLagrangiano, t] ==`
[\[simplifica compl...\]](#) `deriva`

$$-3 * \text{Eci}\Lambda\rho * a'[t] * b[t]^2 / a[t]^3 + \text{Ec00}\Lambda\rho * (-3 * a'[t] / a[t] + 2 * b'[t] / b[t])]$$

`Out[*]:= True`

■ VAMOS AL CASO CON MATERIA Y SIN CONSTANTE COSMOLÓGICA

`In[*]:= \rho[t] = d * a[t]^(-3 * (1 + w));`
`p[t] = w * \rho[t];`
`EcbLagrangiano\rho = EcbLagrangiano - a[t]^3 * \rho[t];`
`EcaLagrangiano\rho = EcaLagrangiano + 3 * a[t]^2 * b[t] * p[t];`

■ prueba de que no son independientes con materia y sin constante cosmológica

`In[*]:= FullSimplify[D[EcbLagrangiano\rho, t] == EcaLagrangiano\rho * a'[t] / b[t]]`
[\[simplifica compl...\]](#) `deriva`

`Out[*]:= True`

■ Demostramos que es equivalente a las ecuaciones de campo

In[]:= Ec00ρ =

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2 a[t]^4 b[t]^4} \left(a[t]^4 * b[t]^6 * \rho[t] - 6 \gamma * a[t]^2 * b[t]^4 * (a'[t])^2 + 36 * (3 \alpha - \beta) * \right. \\
 & \quad b[t]^2 * (a'[t])^4 - 24 (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * (a'[t])^2 * a''[t] + 12 * (3 \alpha - \beta) * \\
 & \quad a[t]^2 * b[t]^2 * (a''[t])^2 - 24 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a'''[t] - \\
 & \quad 60 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * (a'[t])^2 * (b'[t])^2 + 24 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * \\
 & \quad (a'[t])^2 * b''[t] + 24 * ((3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t] * (a'[t])^3 + \\
 & \quad \left. 2 * (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * a'[t] * a''[t]) * b'[t] \right); \\
 \text{Eci}\rho & = - \frac{1}{2 a[t]^2 b[t]^7} \left(a[t]^4 * b[t]^7 * p[t] + 2 * \gamma * a[t]^2 * b[t]^5 * (a'[t])^2 + \right. \\
 & \quad 12 (3 \alpha - \beta) * b[t]^3 * a'[t]^4 + 12 (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * (a''[t])^2 + \\
 & \quad 16 (3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^3 * a'[t] * a'''[t] + \\
 & \quad 8 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^3 * a''''[t] - 120 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * a'[t] * (b'[t])^3 - \\
 & \quad 8 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'[t] * b''''[t] + \\
 & \quad 60 ((3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t] * (a'[t])^2 + 2 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a''[t]) * b'[t]^2 + \\
 & \quad 4 (\gamma * a[t]^3 * b[t]^5 - 12 (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^3 * (a'[t])^2) * a''[t] - \\
 & \quad 4 (\gamma * a[t]^3 * b[t]^4 * a'[t] - 12 (3 \alpha - \beta) * a[t] * b[t]^2 * a'[t]^3 + 18 (3 \alpha - \beta) * \\
 & \quad \left. a[t]^2 * b[t]^2 * a'[t] * a''[t] + 12 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a'''[t]) * b'[t] - \right. \\
 & \quad \left. 16 ((3 \alpha - \beta) * a[t]^2 * b[t]^2 * (a'[t])^2 + 2 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t]^2 * a''[t] - \right. \\
 & \quad \left. 5 (3 \alpha - \beta) * a[t]^3 * b[t] * a'[t] * b'[t]) * b''[t] \right);
 \end{aligned}$$

In[]:= FullSimplify[EcbLagrangianoρ == 2 * a[t]^3 / b[t]^2 * Ec00ρ]
[simplifica completamente](#)

Out[]:= True

In[]:= FullSimplify[EcaLagrangianoρ == -6 * b[t] * Eciρ]
[simplifica completamente](#)

Out[]:= True

In[]:= FullSimplify[D[Ec00ρ, t] ==
[simplifica compl...](#)[deriva](#)
 $-3 * \text{Eci}\rho * a'[t] * b[t]^2 / a[t]^3 + \text{Ec00}\rho * (-3 * a'[t] / a[t] + 2 b'[t] / b[t])$]

Out[]:= True

Anexo C. Desarrollo explícito del modelo inflacionario

```
In[ ]:= ClearAll["Global`*"]
         borra todo
         Needs["VariationalMethods`"]
         necesita
```

```
In[ ]:= R = 12 * H[t]^2 + 6 * H'[t];
         P = 12 * (H'[t]^2 + 3 * H[t]^4 + 3 * H'[t] * H[t]^2);
         Q = 12 * (H'[t]^2 + 2 * H[t]^4 + 2 * H'[t] * H[t]^2);
         G = 24 * H[t]^2 * (H[t]^2 + H'[t]);
         λ2 = f^(0,1,0) [R, P, Q];
         λ3 = f^(0,0,1) [R, P, Q];
         λ1 = f^(1,0,0) [R, P, Q] + 2 / 3 * R * (λ2 + λ3);
```

- Ecb particularizada al caso HdS aprox cte (en slow-roll despreciamos $\phi'[t]^2 \ll V[\phi[t]]$ aquí)

```
In[ ]:= Expand[1 / 2 * ϕ'[t]^2 + V[ϕ[t]] == 6 * γ * H[t]^2 + f[R, P, Q] - λ1 * R +
         expande factores
         6 * (D[λ1, t] * H[t] + λ1 * H[t]^2) - λ2 * (P - 1 / 3 * R^2) - λ3 * (Q - 1 / 3 * R^2) -
         deriva
         12 * H[t]^3 * (D[λ2, t] + 2 * D[λ3, t]) ] /. {H'[t] -> 0, H''[t] -> 0}
         deriva
```

```
Out[ ]:= V[ϕ[t]] + 1 / 2 * ϕ'[t]^2 ==
         f[12 H[t]^2, 36 H[t]^4, 24 H[t]^4] + 6 γ H[t]^2 - 24 H[t]^4 f^(0,0,1) [12 H[t]^2, 36 H[t]^4, 24 H[t]^4] -
         36 H[t]^4 f^(0,1,0) [12 H[t]^2, 36 H[t]^4, 24 H[t]^4] - 6 H[t]^2 f^(1,0,0) [12 H[t]^2, 36 H[t]^4, 24 H[t]^4]
```

- Ahora queremos hacer la derivada de Ecb con respecto al tiempo para sacar epsilon slow-roll (despreciamos $\phi''[t]$ aquí)


```

In[ ]:= Expand[D[1/2 * ϕ'[t]^2 + V[ϕ[t]] == 6 * γ * H[t]^2 + f[R, P, Q] -
expand·[deriva
λ1 * R + 6 * (D[λ1, t] * H[t] + λ1 * H[t]^2) - λ2 * (P - 1/3 * R^2) -
λ3 * (Q - 1/3 * R^2) - 12 * H[t]^3 * (D[λ2, t] + 2 * D[λ3, t]), t]] /.
{f^(1,0,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fR, f^(0,1,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fP,
f^(0,0,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fQ, f^(1,1,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRP,
f^(1,0,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRQ, f^(0,1,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPQ,
f^(2,0,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRR, f^(0,2,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPP,
f^(0,0,2) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fQQ} /.
{H''[t] -> 0, H'''[t] -> 0, H'[t]^2 -> 0, H'[t]^3 -> 0, H'[t]^4 -> 0,
H'[t]^5 -> 0}

Out[ ]:= V'[ϕ[t]] ϕ'[t] + ϕ'[t] ϕ''[t] ==
12 fR H[t] H'[t] + 12 γ H[t] H'[t] - 144 fRR H[t]^3 H'[t] - 1728 fRP H[t]^5 H'[t] -
1152 fRQ H[t]^5 H'[t] - 5184 fPP H[t]^7 H'[t] - 6912 fPQ H[t]^7 H'[t] - 2304 fQQ H[t]^7 H'[t]

```

- Para comprobar que está bien tenemos el notebook de comprobación, donde la ecuación Eca junto con la derivada de la ecuación Ecb permite verificar que proporciona la ecuación del campo cuando las juntamos.
- Haciendo de nuevo la derivada de la ecuación anterior (derivada de Ecb) tenemos la ecuación para el segundo parámetro de slow-roll

```

In[*]:= Expand[D[1/2 * ϕ'[t]^2 + V[ϕ[t]] == 6 * γ * H[t]^2 + f[R, P, Q] -
expand·[deriva
λ1 * R + 6 * (D[λ1, t] * H[t] + λ1 * H[t]^2) - λ2 * (P - 1/3 * R^2) -
[deriva
λ3 * (Q - 1/3 * R^2) - 12 * H[t]^3 * (D[λ2, t] + 2 * D[λ3, t]), {t, 2}]] /.

{f^(1,0,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fR, f^(0,1,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fP,
f^(0,0,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fQ, f^(1,1,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRP,
f^(1,0,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRQ, f^(0,1,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPQ,
f^(2,0,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRR, f^(0,2,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPP,
f^(0,0,2) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fQQ,
f^(1,1,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRPQ, f^(0,0,3) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fQQQ,
f^(3,0,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRRR, f^(0,3,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPPP,
f^(1,0,2) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRQQ,
f^(1,2,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRPP, f^(0,1,2) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPQQ,
f^(0,2,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fPPQ, f^(2,1,0) [12 H[t]^2 + 6 H'[t],
12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2), 12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRRP,
f^(2,0,1) [12 H[t]^2 + 6 H'[t], 12 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2),
12 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)] => fRRQ} /.

{H''''[t] -> 0, H'''''[t] -> 0, H'[t]^2 -> 0, H'[t]^3 -> 0, H'[t]^4 -> 0,
H'[t]^5 -> 0, H'[t]^6 -> 0, H'[t]^7 -> 0, H'[t] * H''[t] -> 0,
H''[t]^2 -> 0, H''[t]^3 -> 0, H'[t]^2 * H''[t] -> 0}

Out[*]:= ϕ'[t]^2 V''[ϕ[t]] + V'[ϕ[t]] ϕ''[t] + ϕ''[t]^2 + ϕ'[t] ϕ^(3)[t] ==
12 fRH[t] H''[t] + 12 γ H[t] H''[t] - 144 fRRH[t]^3 H''[t] - 1728 fRPH[t]^5 H''[t] -
1152 fRQH[t]^5 H''[t] - 5184 fPPH[t]^7 H''[t] - 6912 fPQH[t]^7 H''[t] - 2304 fQQH[t]^7 H''[t]

```

■ VAMOS AL MODELO EN CUESTION

```

f = α * R^(2 * n) + β * P^n + δ * Q^n;
fR = 2 * n * α * R^(2 * n - 1);
fRR = (2 * n - 1) * 2 * n * α * R^(2 * n - 2);
fP = n * β * P^(n - 1);
fPP = (n - 1) * n * β * P^(n - 2);
fQ = n * δ * Q^(n - 1);
fQQ = (n - 1) * n * δ * Q^(n - 2);
V[φ] = 1 / 2 * M^2 * φ^2;
FullSimplify[V[φ] == f - 6 fR H[t]^2 + 6 γ H[t]^2 - 36 fP H[t]^4 - 24 fQ H[t]^4] /.
[simplifica completamente
{H'[t] → 0, γ → 0}

```

(*Esta es Ecb particularizada a HdS)

$$\text{Out}[*]= \frac{M^2 \phi^2}{2} = -2^{4n} \times 3^{2n} n \alpha (H[t]^2)^{2n} + 12^n n H[t]^4 \left(-3^n \beta (H[t]^4)^{-1+n} - 2^n \delta (H[t]^4)^{-1+n} \right) + 12^n \left(2^{2n} \times 3^n \alpha (H[t]^2)^{2n} + 3^n \beta (H[t]^4)^n + 2^n \delta (H[t]^4)^n \right)$$

(*Para encontrar HdS la resolvemos, usando x=H^(4*n) por comodidad)

$$\text{In}[*]= \text{Solve}\left[\frac{M^2 \phi^2}{2} = -2^{4n} \times 3^{2n} n \alpha x + 12^n n \left(-3^n \beta x - 2^n \delta x \right) + 12^n \left(2^{2n} \times 3^n \alpha x + 3^n \beta x + 2^n \delta x \right), x\right]$$

$$\text{Out}[*]= \left\{ \left\{ x \rightarrow -\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (2^{2n} \times 3^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right\} \right\}$$

(*Vamos ahora a la Ecb derivada,
que nos permite encontrar H' para así hallar epsilon,
despreciamos E-H en alta curvatura de inflación y H^2>>H')

[número e

$$\text{In}[*]= \text{FullSimplify}\left[12 fR H[t] H'[t] + 12 \gamma H[t] H'[t] - 144 fRR H[t]^3 H'[t] - 5184 fPP H[t]^7 H'[t] - 2304 fQQ H[t]^7 H'[t] = D[V[\phi], \phi] * \left(-D[V[\phi], \phi] / (3 * H[t]) \right) \right] /. \{\gamma \rightarrow 0\}$$

$$\text{Out}[*]= 3^n \times 4^{1+n} n H[t] H'[t] \left(-2 \times 3^n (-1+2n) \alpha H[t]^2 (2 H[t]^2 + H'[t])^{-2+2n} + 3^n \alpha (2 H[t]^2 + H'[t])^{-1+2n} + (-1+n) H[t]^6 \left(-4 \delta (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} - 9 \beta (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} \right) \right) = -\frac{M^4 \phi^2}{3 H[t]}$$

In[*]:= Solve[$3^n \times 4^{1+n} n H dH \left(-2 \times 3^n (-1+2n) \alpha H^2 (2 H^2)^{-2+2n} + \right.$

[|resuelve](#)

$$3^n \alpha (2 H^2)^{-1+2n} + (-1+n) H^6 \left(-4 \delta (2 H^4)^{-2+n} - 9 \beta (3 H^4)^{-2+n} \right) = -\frac{M^4 \phi^2}{3 H}, dH] /.$$

$$\{H \rightarrow \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{1/(4+n)} \}$$

Out[*]= { {dH →

$$\left(2^{-2-2n} \times 3^{-1-n} M^4 \phi^2 \right) / \left((-1+n) n \left(2^{2n} \times 3^n \alpha \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right)^{2n} + \right. \\ \left. 3^n \beta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n + \right. \\ \left. 2^n \delta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) \}$$

In[*]:= dH = FullSimplify[

[|simplifica completamente](#)

$$\left(2^{-2-2n} \times 3^{-1-n} M^4 \phi^2 \right) / \left((-1+n) n \left(2^{2n} \times 3^n \alpha \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. 3^n \beta \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right) + 2^n \delta \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right) \right) \right) \}$$

$$Out[*]= -\frac{M^2}{6n}$$

In[*]:= $\epsilon = \text{FullSimplify}[-(dH)/H^2] /. \{H \rightarrow \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{1/(4+n)} \}$

[|simplifica completamente](#)

$$Out[*]= \frac{M^2 \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{6n}$$

(*Vamos a sacar ahora el segundo parámetro de slow-roll eta con H'')

In[*]:= Expand[12 fRR H[t] H'''[t] + 12 γ H[t] H'''[t] -
 [expande factores

$$\begin{aligned} & 144 \text{fRR H[t]}^3 \text{H}'''[t] - 5184 \text{fPP H[t]}^7 \text{H}'''[t] - 2304 \text{fQQ H[t]}^7 \text{H}'''[t] == \\ & 2 * \text{D[V[φ], φ]} * (-\text{D[V[φ], {φ, 2}]} / (3 * \text{H[t]})) * (-\text{D[V[φ], φ]} / (3 * \text{H[t]})) - \\ & 2 * \text{H[t]} * \text{D[V[φ], φ]} * (-\text{D[V[φ], φ]} / (3 * \text{H[t]})) * ε] /. {γ → 0} \end{aligned}$$

Out[*]:= $288 n \alpha H[t]^3 (12 H[t]^2 + 6 H'[t])^{-2+2n} H''[t] -$
 $576 n^2 \alpha H[t]^3 (12 H[t]^2 + 6 H'[t])^{-2+2n} H''[t] + 24 n \alpha H[t] (12 H[t]^2 + 6 H'[t])^{-1+2n} H''[t] +$
 $3^n \times 4^{2+n} n \delta H[t]^7 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} H''[t] -$
 $3^n \times 4^{2+n} n^2 \delta H[t]^7 (2 H[t]^4 + 2 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} H''[t] +$
 $3^{2+n} \times 4^{1+n} n \beta H[t]^7 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} H''[t] -$
 $3^{2+n} \times 4^{1+n} n^2 \beta H[t]^7 (3 H[t]^4 + 3 H[t]^2 H'[t] + H'[t]^2)^{-2+n} H''[t] ==$

$$\frac{M^6 \phi^2 \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{9 n} + \frac{2 M^6 \phi^2}{9 H[t]^2}$$

In[*]:= Solve[288 n α H³ (12 H²)⁻²⁺²ⁿ ddH - 576 n² α H³ (12 H²)⁻²⁺²ⁿ ddH + 24 n α H (12 H²)⁻¹⁺²ⁿ ddH +
 [resuelve
 $3^n \times 4^{2+n} n \delta H^7 (2 H^4)^{-2+n} ddH - 3^n \times 4^{2+n} n^2 \delta H^7 (2 H^4)^{-2+n} ddH + 3^{2+n} \times 4^{1+n} n \beta H^7 (3 H^4)^{-2+n} ddH -$
 $3^{2+n} \times 4^{1+n} n^2 \beta H^7 (3 H^4)^{-2+n} ddH == \frac{M^6 \phi^2 \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{9 n} + \frac{2 M^6 \phi^2}{9 H^2}, ddH] /.$

$$\{H \rightarrow \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \}$$

Out[*]:= { {ddH → - $\left(\left(2^{-2-2n} \times 3^{-2-n} M^6 \phi^2 \right. \right.$

$$\left. \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{3}{4}/n} \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} + \right.$$

$$\left. \left. 2 n \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right) \right) /$$

$$\left((-1+n) n^2 \left(2^{2n} \times 3^n \alpha \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right)^{2n} + \right.$$

$$3^n \beta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n +$$

$$\left. \left. 2^n \delta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) \right) \}$$

In[*]:= **ddH = FullSimplify**[$-\left(2^{-1-2n} \times 3^{-2n} M^6 \phi^2\right)$
[simplifica completamente

$$\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{3}{4}/n} \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} + \right. \\ \left. 2n \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right) / \\ \left((-1+n) n^2 \left(2^{2n} \times 3^n \alpha \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right)^{2n} + \right. \right. \\ \left. 3^n \beta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n + \right. \\ \left. \left. 2^n \delta \left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-2^{2n} \times 3^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) \right) \right]$$

Out[*]= $M^4 (1+2n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta) \left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{1-\frac{1}{4n}} /$
 $\left(18 n^2 \left(12^n \alpha \left(\left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n} \right)^{2n} + \right. \right.$
 $\left. (3^n \beta + 2^n \delta) \left(\left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}} \right)^n \right) \right)$

In[*]:= **numddH = FullSimplify**[$M^4 (1+2n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta) \left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{1-\frac{1}{4n}}$]
[simplifica completamente

Out[*]= $M^4 (1+2n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta) \left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{1-\frac{1}{4n}}$

In[*]:= **denddH = FullSimplify**[
[simplifica completamente

$$18 n^2 \left(12^n \alpha \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right) + (3^n \beta + 2^n \delta) \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)]$$

Out[*]= $\frac{3^{2-n} \times 4^{-n} M^2 n^2 \phi^2}{1-n}$

In[*]:= **ddH = FullSimplify**[numddH/denddH]
[simplifica completamente

Out[*]= $\frac{M^4 (1+2n) \left(-\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{4}/n}}{18 n^2}$

$$\text{In[*]:= } \eta = \text{FullSimplify}\left[\epsilon - \text{ddH} / (2 * \text{H} * \text{dH})\right] /. \left\{ \text{H} \rightarrow \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{1/(4*n)} \right\}$$

[simplifica completamente]

$$\text{Out[*]:= } \frac{1}{6n} \text{M}^2 \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n} +$$

$$(1+2n) \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{4}/n} \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{4}/n}$$

$$\text{In[*]:= } \text{num}\eta = \text{FullSimplify}\left[\left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n} + \right.\right.$$

[simplifica completamente]

$$\left. (1+2n) \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{4}/n} \left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{4}/n} \right]$$

$$\text{Out[*]:= } 2(1+n) \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}$$

$$\text{In[*]:= } \eta = \text{FullSimplify}\left[\text{M}^2 / (6 * n) * \text{num}\eta\right]$$

[simplifica completamente]

$$\text{Out[*]:= } \frac{\text{M}^2 (1+n) \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{3n}$$

$$\text{In[*]:= } \text{Nefolds} = 3 * \text{Integrate}\left[\left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{1/(4*n)} \right)^2 / \left(\text{D}[V[\phi], \phi] \right), \phi\right]$$

[integra] [deriva]

$$\text{Out[*]:= } \frac{3n \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n}}{\text{M}^2}$$

- Así que debe cumplirse $\frac{3n \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n}}{\text{M}^2}$ entre 49 y 59
- La amplitud del espectro de potencias debe ser de aprox $10^{(-9)}$

$$\text{In[*]:= } \text{AmplitudePowerSpectrum} =$$

$$\text{FullSimplify}\left[\left(\left(\frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (-12^n \alpha - 3^n \beta - 2^n \delta)} \right)^{1/(4*n)} \right)^2 / (\text{Pi} * \text{Mp1}^2 * \epsilon) \right]$$

[simplifica completamente] [número pi]

$$\text{Out[*]:= } \frac{6n \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}}}{\text{M}^2 \text{Mp1}^2 \pi}$$

- Así que debe cumplirse $\frac{6n \left(- \frac{2^{-1-2n} \times 3^{-n} \text{M}^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}}}{\text{M}^2 \text{Mp1}^2 \pi} = 10^{(-9)}$
- El índice espectral debe ser de 0.9649 +- 0.0042

In[]:= **IndiceEspectral = FullSimplify[1 - 6 * ε + 2 * η]**

[simplifica completamente]

$$\text{Out[]} = 1 + \frac{M^2 \left(-1 + 2n \right) \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{3n}$$

- Tiene que ser menor que 1, así que no puede ser porque $n > 1$
- El ratio tensor escalar debe ser menor que 0.10

In[]:= **RatioTensorEscalar = FullSimplify[16 * ε]**

[simplifica completamente]

$$\text{Out[]} = \frac{8 M^2 \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{3n}$$

- Así que las tres condiciones son

$$\frac{3n \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n}}{M^2} = N_{\text{ef}} \quad \text{que está entre 49 y 59}$$

$$\frac{6n \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{n}}}{M^2 M_{\text{pl}}^2 \pi} = 10^{-9}$$

$$\frac{8 M^2 \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{-\frac{1}{2}/n}}{3n} < 0.10$$

- La primera con la tercera son casi incompatibles, porque si hacemos el inverso de la tercera condición tenemos

$$\frac{3n \left(-\frac{2^{-1-2n} 3^{-n} M^2 \phi^2}{(-1+n) (12^n \alpha + 3^n \beta + 2^n \delta)} \right)^{\frac{1}{2}/n}}{8 M^2} > 1 / 0.10$$

- Y usando la primera condición nos queda que el número de efolds tiene que ser

$$N_{\text{ef}} / 8 > 1 / 0.10, \text{ es decir, } N_{\text{ef}} > 80$$

- Número de efolds tiene que ser mayor que 80 para cuadrar el ratio tensor escalar
- Ahora elevando al cuadrado la primera y usando la segunda

$$\frac{9n * 10^{-9} * M_{\text{pl}}^2 \pi}{6 M^2} = N_{\text{ef}}^2$$

In[]:= **N[Sqrt[9 * n * 10⁻⁹ * M_{pl}² * π / (6 * 80)]]**

[raíz cuadrada]

$$\text{Out[]} = 7.67495 \times 10^{-6} \sqrt{M_{\text{pl}}^2 n}$$

- Nos conduce a una masa del campo

$$M = \text{Sqrt}[n * 8 * 10^{-6} * M_{\text{pl}}]$$

[raíz cuadrada]