Universidad Zaragoza

1542

Trabajo Fin de Máster

Estudio exploratorio sobre razonamiento geométrico de alto nivel en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato

Exploratory study on high-level Geometric Reasoning in Compulsory Secondary Education and High School

Autor/es

Carlos Alquézar Baeta

Director/es

Alberto Arnal Bailera
Víctor Manero García

FACULTAD DE EDUCACIÓN

Año

2022/2023

A J.I. Extremiana, L. Español,
J.I. Cogolludo y E. Artal,
por las conversaciones de pasillo
sobre geometría y por prestarme
su experiencia.

A C. Jiménez y A. Magreñán,
por todo el apoyo recibido.

A S. Martínez por ser un buen tutor.

En memoria de Héctor Romanos Pueyo.

Índice

Índice de figuras

Índice de tablas

1. Introducción

La finalidad de este trabajo consiste en profundizar sobre la evaluación del proceso de demostración en contextos geométricos. En concreto, en este trabajo se va a tratar de explorar cómo llevar al aula los últimos resultados obtenidos por Arnal-Bailera y Manero (2023). Para ello, se van a definir los siguientes objetivos:

1. Diseñar un instrumento que permita medir rasgos característicos de los niveles 2 a 5 en la escala de Van Hiele, en alumnos de ESO y Bachillerato.
2. Administrar el test y realizar una exploración de los resultados obtenidos.
3. Elaborar una situación de aprendizaje que permita solventar algunos de los problemas y dificultades que se observen en el análisis de resultados.

1.1. Currículo

El modelo de Van Hiele es un modelo muy extendido dentro del ámbito educativo, el cual intenta dar herramientas de diagnóstico e intervención a los docentes para influir en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y favorecer el desarrollo del pensamiento geométrico de los alumnos. Para este trabajo se va a seguir lo indicado en la ORDEN ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, y la ORDEN ECD/1173/2022, de 3 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación del Bachillerato y se autoriza su aplicación en los centros docentes también de la comunidad autónoma de Aragón. En estos documentos se hace explícita la utilidad del modelo de Van Hiele para estructurar tanto los saberes básicos, como el diseño de actividades y situaciones de aprendizaje en el aula.

2. Marco teórico

El modelo de razonamiento geométrico propuesto por Pierre y Dina Van Hiele (Crowley, 1987; Jaime, 1995), surgió fruto de la observación que realizaron en el aula sobre los problemas cotidianos a los que se enfrentaban los/as alumnos/as de enseñanza secundaria a la hora de resolver cuestiones de índole geométrico. Se dieron cuenta de que los alumnos, en algunas ocasiones, no entendían la materia que se les explicaba, aunque se presentara el contenido de formas distintas. En otras, no sabían seguir los pasos necesarios para resolver ciertos ejercicios, o ni siquiera entendían lo que el profesor les pedía. Y lo más importante, se dieron cuenta de que estas dificultades ocurrían año tras año. Fruto de esta observación, en sendas tesis doctorales, Pierre y Dina Van Hiele idearon un modelo, desde una perspectiva constructivista del aprendizaje, sobre las características y evolución del razonamiento geométrico. Pierre se encargó del marco teórico del modelo, y Dina fue quien propuso una aplicación práctica del modelo con unas lecciones de geometría.

Este modelo, como no podía ser de otra manera, se conoce como el modelo de Van Hiele, y tiene una doble finalidad: por un lado, estructura el grado de destreza de los estudiantes en cinco niveles de razonamiento, siendo el nivel 1 el más sencillo, y el nivel 5 el correspondiente a un nivel experto; y por otro lado, da indicaciones sobre cómo organizar las actividades educativas para que los alumnos progresen de un nivel a otro, proponiendo cinco “fases de aprendizaje” que hay que tener en cuenta a la hora de elaborar dichas actividades, ya que las características de éstas dependerán de la fase concreta que estén atravesando los alumnos.

2.1. Propiedades del modelo de Van Hiele

Para comprender mejor el modelo de Van Hiele, es importante atender a sus principales características (Jaime, 1995):

Secuencialidad: Los niveles de razonamiento se van adquiriendo de forma secuencial, empezando por el nivel 1. No es posible ni empezar por otro nivel ni dar saltos entre niveles. Si una persona ha adquirido un nivel arbitrario de razonamiento, necesariamente ha debido pasar por los niveles inferiores previamente.

Especificidad: Esta propiedad hace referencia a la especificidad del lenguaje. Cada nivel maneja un lenguaje propio y las mismas palabras pueden tener significados distintos entre un nivel y otro. Por ejemplo, si a un alumno se le pide “demostrar” cierta conjetura o proposición, no tiene el mismo significado cuando estamos trabajando en los primeros niveles de razonamiento, donde quizás sea suficiente una demostración intuitiva, que en los niveles superiores, donde ya se espera que el alumno se maneje con el lenguaje formal.

Paso de un nivel al siguiente: Una pregunta interesante es cómo se producen las transiciones entre niveles de razonamiento. En la propuesta inicial de los Van Hiele, éstos contemplaron una transición brusca entre niveles (ver Figura 1). La explicación a esta transición brusca sería que un individuo se encuentra razonando de acuerdo a las características del nivel en el que se encuentra, y en cierto momento, de forma súbita, comienza a percibir la geometría de otra manera, de acuerdo con las características del nuevo nivel de razonamiento adquirido.

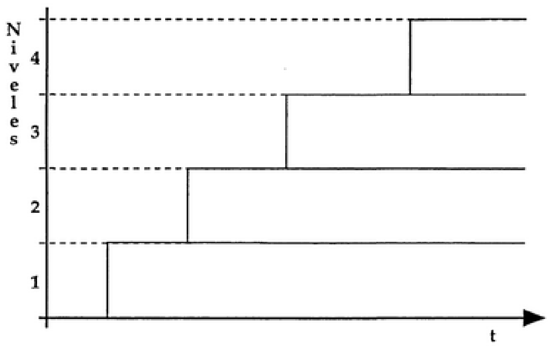


Figura 1: Propuesta inicial de Pierre y Dina Van Hiele sobre cómo se producen las transiciones de un nivel al siguiente (Jaime, 1993).

Sin embargo, las investigaciones que se han llevado a cabo para comprobar este fenómeno han sugerido que estas transiciones se producen de forma continua, incluyendo un solapamiento entre el nivel del que se parte y el siguiente nivel (Jaime, 1993). Este solapamiento se traduciría en que aparecen características de razonamiento de ambos niveles durante el periodo de transición (ver Figura 2).

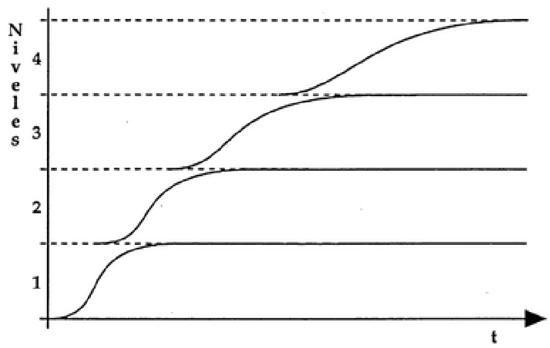


Figura 2: Otra propuesta sobre cómo se producen las transiciones de un nivel al siguiente (Clements, 1992; Jaime, 1993, p. 33).

Globalidad o localidad: Esta propiedad responde a la pregunta de si un individuo, cuando adquiere cierto nivel de razonamiento, lo hace de forma global, es decir, de manera independiente al concepto sobre el que se razona, o de forma local, es decir, si depende de él. La respuesta a la que apuntan las investigaciones es que el nivel de razonamiento es dependiente del concepto con el que se trabaja. Es decir, un individuo, frente a un concepto como podría ser la posición relativa de dos rectas en el plano, podría mostrar en su razonamiento características propias del nivel 4, pero frente a la posición relativa de dos planos en el espacio mostrar características propias del nivel 3.

Instrucción: Esta propiedad hace referencia a que la adquisición de los niveles de razonamiento, no depende de aspectos biológicos, sino de la instrucción recibida y experiencia propia del individuo.

2.2. Vinner y la formación de conceptos

Antes de presentar las características propias de cada nivel de razonamiento del modelo de Van Hiele, es necesario hacer mención de una idea que propuso Vinner sobre los conceptos y cómo éstos se aprenden (Vinner, 1983). Vinner propuso diferenciar entre un concepto en sí mismo, determinado por la definición matemática, y la imagen mental de dicho concepto que generamos en la toma de contacto con dicha definición. Además, propuso tener en cuenta que tanto el concepto como la imagen que nos generamos de él no tienen necesariamente por qué coincidir al completo. Aquí por imagen se entiende, no sólo la posible representación visual del concepto, sino también las propiedades y relaciones de dicho concepto con otros.

Para determinar las diferencias entre el concepto y la imagen mental que nos hacemos de él, Vinner propuso diferenciar entre atributos relevantes e irrelevantes. Los atributos relevantes serían aquellas características que necesariamente posee el concepto, y que si las quitamos, el concepto deja de ser el mismo. Los atributos irrelevantes, por el contrario, son aquellas características que la representación del concepto puede cumplir o no, es decir, son características que no aparecen en la definición del concepto. En una definición solo aparecen, por lo tanto, atributos relevantes. Veamos esto con un ejemplo: supongamos que se nos presentan una serie de polígonos, y debemos determinar cuáles de ellos son triángulos. Para poder realizar la clasificación, nos tendremos que centrar en los atributos relevantes, como que el polígono tenga tres lados. La posición y tamaño del polígono, por ejemplo, serían atributos irrelevantes, ya que son características que no definen el concepto de triángulo.

	Atributos relevantes	**Atributos irrelevantes**
Ejemplo	Todos	Algunos
Contraejemplo	No todos	Algunos
Definición	Conjunto mínimo suficiente	Ninguno

Tabla 1: Aparición de atributos relevantes e irrelevantes en definiciones, ejemplos y contraejemplos.

Esta clasificación de los atributos entre relevantes e irrelevantes, es muy útil para determinar cuáles de ellos deben aparecer en un ejemplo, contraejemplo o una definición de un concepto. Como hemos dicho antes, una definición debe contener solo los atributos relevantes. Un ejemplo, debe contener todos los atributos relevantes y poseerá algunos irrelevantes, y en cambio, un contraejemplo nunca deberá contener todos los atributos relevantes. En este caso, al menos uno de ellos no deberá aparecer, pero puede contener atributos irrelevantes. En la tabla 1, extraída de (Jaime, 1995, p. 39), se esquematiza qué atributos deben aparecer en cada caso:

Ahora ya estamos en disposición de introducir las características propias de los niveles de razonamiento del modelo de Van Hiele.

2.3. Primer nivel

En este primer nivel, los conceptos se consideran de forma global. La imagen del concepto que se maneja puede incluir atributos no relevantes que pueden ser dependientes de la representación utilizada para expresar los mismos. Por ejemplo, si al trabajar con triángulos éstos siempre se muestran apoyados en la horizontal por uno de los lados, es posible que si se muestra un triángulo en otra posición éste no se identifique como tal.

Este nivel de razonamiento también se caracteriza porque frente a varias representaciones de un mismo concepto no se generalizan propiedades que puedan tener en común, o incluso puede ser que la imagen del concepto no contenta todos los atributos relevantes.

2.4. Segundo nivel

En este segundo nivel de razonamiento, se añaden propiedades características de los conceptos, pero no se relacionan unas con otras. También se incluye el descubrimiento y generalización de propiedades a partir de varias observaciones. En este nivel, el concepto “demostración” se entiende como la verificación de ciertas propiedades en casos concretos. Una definición de un concepto en el segundo nivel de razonamiento se compondrá por una lista de propiedades, que no necesariamente contendrá el mínimo conjunto necesario y suficiente de propiedades que aparecen en la definición formal del concepto, sino que podrían estar omitidas algunas propiedades esenciales, incluir propiedades irrelevantes o incluso aparecer redundancias.

El hecho de que a este nivel no se relacionen propiedades influye, por ejemplo, en que ciertas clasificaciones de objetos no contemplen el hecho de que unas propiedades implican otras. Por ejemplo, atendiendo a la clasificación de paralelogramos, si se define rombo como un paralelogramo con todos sus lados iguales y cuatro ángulos iguales dos a dos, un cuadrado y un rombo podrían entenderse como objetos geométricos distintos, y no se contemplaría que el cuadrado es un rombo en el caso particular en el que los ángulos internos son de 90°.

2.5. Tercer nivel

Este nivel se caracteriza principalmente porque se establecen relaciones entre las propiedades de los conceptos, lo que permite:

1. En las demostraciones, permite enlazar resultados basados en la experimentación que lleven a justificar las proposiciones. Además, los alumnos son capaces de seguir y reproducir demostraciones sencillas si se les explica paso por paso, ya que son capaces de entender la relación que hay entre un resultado y el siguiente.

2. En las definiciones, se entiende que deben comprender un conjunto mínimo y necesario de propiedades, y si se da una lista que contenga redundancias o propiedades innecesarias, el alumno es capaz de quedarse con el subconjunto que contiene el mínimo número de propiedades que hacen falta para definir el concepto.

3. Al contrario de lo que ocurría en el nivel inferior, en este caso se entiende que las clasificaciones de los objetos no tienen por qué ser exclusivas, sino que unas definiciones pueden estar contenidas dentro de otras. En el ejemplo que poníamos del rombo y el cuadrado, a este nivel de razonamiento, el/la alumno/a entiende que un cuadrado es un caso particular de rombo.

2.6. Cuarto nivel

El mayor cambio que se produce al alcanzar este nivel, es que el alumno es capaz de utilizar el lenguaje formal propio de las matemáticas. Esto le permite, principalmente: (1) realizar demostraciones formales, (2) entender que dos definiciones distintas pueden ser equivalentes antes de demostrar la doble implicación necesaria para dicha equivalencia.

2.7. Quinto nivel

Este nivel es el nivel de razonamiento más sofisticado en el modelo de Van Hiele. El alumno/a que alcanza este nivel, es capaz de razonar dentro de otros conjuntos axiomáticos que definen diferentes geometrías.

2.8. Fases del modelo de Van Hiele

Como se ha mencionado anteriormente, el modelo de Van Hiele no solo proporciona una visión descriptiva de los diferentes niveles de razonamiento, sino que propone, desde una perspectiva constructivista, una serie de fases de aprendizaje que pueden ayudar al docente a evaluar, intervenir y diseñar actividades para que los alumnos progresen de unos niveles a otros. En el modelo se contemplan las siguientes cinco fases:

- Fase primera: **Información**. El docente trata de averiguar qué saben los alumnos, y los alumnos a su vez entran en contacto con el concepto con el que se va a trabajar.
- Fase segunda: **Orientación dirigida**. El docente proporcionará a los alumnos una serie de actividades y situaciones que les permitan construir aquellas características del concepto propias del nivel en el que se esté trabajando.
- Fase tercera: **Explicitación**. El profesor, tras comprobar si los estudiantes han sido capaces de expresar, mediante el vocabulario propio del nivel en el que estén, lo que han aprendido hasta el momento sobre el concepto en cuestión, institucionaliza las características y propiedades correspondientes al tema de estudio.
- Fase cuarta: **Orientación libre**. El profesor/a proporciona actividades y situaciones más abiertas en donde los estudiantes deben razonar y aplicar lo aprendido con anterioridad.

- Fase quinta: **Integración**. El profesor ayuda a los alumnos/as a poner en común todo lo aprendido y a estructurar la información en un resumen general que permita esquematizar las características y propiedades más importantes.

2.9. Propuestas de evaluación de los niveles 1 a 4 del modelo de Van Hiele

Una vez introducido el modelo de Van Hiele, la pregunta importante a hacer es la siguiente: ¿cómo podemos determinar en qué nivel de razonamiento se encuentran nuestros alumnos? Para responder a esta pregunta se han propuesto en la literatura varios tests, algunos de ellos con ciertas objeciones:

- El test de Usiskin (Usiskin, 1982) está basado en un cuestionario de selección múltiple. Lo bueno de este test es que al ser un cuestionario puede ser administrado de forma masiva, pero no queda claro que ciertas capacidades de razonamiento puedan ser medidas mediante este tipo de pruebas.
- El test de Burger y Shaughnessy (Burger y Shaughnessy, 1986) es una prueba muy exhaustiva donde los alumnos son entrevistados uno a uno y se registra toda la información relativa a los razonamientos que van realizando. La ventaja de este test es que se obtiene mucha información útil para valorar el razonamiento de los alumnos, pero tiene una gran desventaja y es que este tipo de pruebas requieren mucho tiempo y no permiten evaluar a grupos de individuos muy grandes.

Con la intención de resolver estos inconvenientes y proponer una alternativa, Jaime & Gutiérrez (Jaime y Gutiérrez, 1994; Gutiérrez y Jaime, 1995) realizaron una propuesta de un modelo de test a mano alzada pero con un enfoque basado en la metodología propia de las entrevistas clínicas. Esta propuesta se basaba en considerar diferentes procesos involucrados en cada nivel de razonamiento y en el uso de preguntas abiertas, con el que poder extraer la mayor cantidad de información posible de las respuestas de los estudiantes.

En esta propuesta, identificaron cuatro procesos involucrados en el razonamiento y consideraron, para cada nivel de Van Hiele, qué procesos se manifiestan y cuáles no. Por tanto, un test diseñado para medir el nivel de razonamiento geométrico de un individuo, siguiendo esta propuesta, debe contener elementos que permitan identificar el grado de desempeño en cada uno de los procesos. Sin embargo, en esta propuesta, únicamente abarcaron la evaluación de los niveles 1 a 4 del modelo de Van Hiele, argumentando que su interés radicaba en las etapas de primaria y secundaria, y en cambio el nivel 5 únicamente aparecía en la etapa universitaria y rara vez en etapas educativas inferiores. Los procesos que consideraron que caracterizaban los niveles de Van Hiele eran los siguientes:

- Identificación de la familia a la que pertenece cierto objeto geométrico.
- Definición de un concepto. Este proceso a su vez se puede entender de dos maneras: en cuando a leer definiciones, o formular definiciones.
- Clasificación de objetos geométricos en diferentes familias.
- Demostración de propiedades o proposiciones.

En la tabla 2 se puede ver, a modo de resumen, qué procesos aparecen en cada nivel de Van Hiele (Jaime y Gutiérrez, 1994, p. 43). Una X significa que aparece este proceso en el nivel correspondiente, "- - -" significa que el proceso no es parte del razonamiento a ese nivel:

	Identificación	Definición	**Clasificación**	Demostración
Nivel 1	X	Leer	X	- - -
Nivel 2	X	Leer y Formular	X	X
Nivel 3	- - -	Leer y Formular	X	X
Nivel 4	- - -	Leer y Formular	- - -	X

Tabla 2: Procesos involucrados en los diferentes niveles de Van Hiele.

Es importante remarcar que, al igual que ocurría en la propuesta original del modelo de Van Hiele, dependiendo del nivel en el que nos encontremos, el mismo proceso puede significar cosas distintas. Por ejemplo, no significa lo mismo "demostrar" en el nivel 2 que en el nivel 4.

2.10. Aproximaciones a la evaluación del nivel 5 del modelo de Van Hiele

La propuesta anterior, pese a sus ventajas, no abordaba el problema de evaluar el nivel 5 de razonamiento geométrico, y es difícil encontrar en la literatura estudios donde se hayan descrito las características de los procesos clave asociados a este nivel de pensamiento. Dos de los autores que han abordado este tema han sido Victor Manero y Alberto

Arnal (Arnal-Bailera y Manero, 2023), quienes recientemente han publicado un estudio donde proponen una serie de características que definen los procesos de razonamiento asociados al nivel 5 de Van Hiele. El objetivo de este estudio fue el de describir este nivel a través de la propuesta y validación de una serie de indicadores para cada uno de los procesos involucrados en el razonamiento geométrico. En el estudio apuntan que, si bien se pueden encontrar en la literatura estudios previos donde se aportan ideas acerca de los procesos de definición y demostración para niveles altos de razonamiento, no ocurre lo mismo con los procesos de clasificación e identificación.

Dada la falta de estudios previos en esta materia, decidieron aplicar la metodología Delphi (Linstone y Turoff, 1975), técnica que permite recolectar información de un panel de expertos a través de un proceso iterativo, para después llegar a un consenso sobre una cuestión en particular. En este caso, sobre indicadores que definen los procesos de razonamiento. Esta metodología funciona de la siguiente manera:

1. Primero, un pequeño grupo (llamado el grupo de investigación) diseña un cuestionario que luego envía al panel de expertos en la materia en cuestión.

2. Una vez que han completado el cuestionario y han enviado sus respuestas, el grupo de investigación resume y sintetiza las respuestas obtenidas y, sobre ellas, elabora un nuevo cuestionario que es enviado al panel de expertos para que evalúen las ideas que éste contiene.

3. En las fases sucesivas, el panel de expertos reevalúa, bien el mismo o bien una modificación del cuestionario, el cual incluye también información sobre el feedback general recibido en las versiones anteriores.

4. El proceso iterativo termina cuando se alcanza el criterio que satisface los objetivos planteados al inicio del estudio.

Aplicando esta metodología, Arnal-Bailera y Manero llegaron a la conclusión de que los indicadores que definen el nivel 5 de razonamiento de Van Hiele, para cada uno de los procesos involucrados, son los siguientes (Arnal-Bailera y Manero, 2023, p. 21):

Definición

- **Def1**. Construye y usa las definiciones en diferentes sistemas axiomáticos

- **Def2**. Entiende que definir un objeto matemático no es algo universal, sino que es una acción relativa al contexto geométrico en el que uno trabaja, implicando por ejemplo que para la misma definición de un objeto geométrico, puede tener propiedades distintas en cada contexto.

- **Def3**. Define nuevos objetos, por ejemplo, bien porque necesita generalizar los que ya existen, o bien para probar alguna proposición.
- **Def4**. Entiende que una definición aparece por la necesidad de introducir un nuevo objeto matemático, o bien para enfatizar alguna propiedad.
- **Def5**. Compara definiciones equivalentes para elegir la que más se ajusta a las necesidades del momento.

Demostración

- **Pro2.1** Es capaz de considerar si una demostración puede o no puede ser total o parcialmente transferible a otro contexto geométrico, entendiendo que probar cierto resultado matemático es una acción dependiente del contexto en el que se está trabajando.
- **Pro3**. Compara pruebas sobre la base de diferentes criterios, por ejemplo, por la posibilidad de utilizarlos para probar resultados más generales.
- **Pro4.1**. Realiza procesos mixtos de demostración-reformulación, siendo capaz eventualmente de modificar la proposición de acuerdo con el desarrollo de la demostración.
- **Pro5**. Estructura una demostración reconociendo resultados parciales que pueden ser de utilidad en otra demostración y a los que da entidad propia en forma de lemas, definiciones, etc.

Clasificación

- **Cla1**. Clasifica teorías matemáticas, por ejemplo, para ver la geometría euclidiana como un caso particular de una familia de geometrías.
- **Cla2**. Entiende que clasificar un determinado objeto matemático no es algo absoluto, sino una acción relativa al contexto geométrico en el que se trabaja, lo que implica, por ejemplo, que la relación de equivalencia entre objetos geométricos varía de un contexto a otro.

Identificación

- **Ide1**. Identifica objetos geométricos a través de procesos que transforman el objeto dado en un objeto equivalente que es directamente reconocible

3. Diseño metodológico

Como se ha mencionado al comienzo de este documento, el objetivo de este trabajo es explorar cómo llevar al aula parte de los últimos resultados obtenidos por Arnal-Bailera y Manero (2023). En concreto, explorar cómo se puede manifestar y/o medir el nivel 5 de Van Hiele respecto al proceso de demostración, en las etapas de ESO y Bachillerato.

Para ello, se va a seguir una metodología de investigación llamada estudio de casos (Gómez, 2012). En concreto, se realizará un estudio de caso colectivo desde un paradigma interpretativo (Stake, 2020; Pérez Serrano, 1994) . Según estos autores, un estudio de caso colectivo se realiza cuando el interés de la investigación se centra en un fenómeno, población o condición general seleccionando para ello varios casos que se han de estudiar intensivamente. Un estudio de casos interpretativo contiene descripciones detalladas y los datos se utilizan para desarrollar categorías conceptuales o para ilustrar, defender o desafiar presupuestos teóricos defendidos antes de recoger los datos. En este trabajo se pretende estudiar el tipo de razonamiento geométrico de una muestra de estudiantes de diferentes niveles, e ilustrar y defender que el modelo teórico sobre el que se basa se apoya en evidencias.

3.1. Modelo de tareas

Para poder enlazar diferentes niveles, el modelo de actividad que se va a proponer es el llamado **superítem**, ya utilizado en otras propuestas previas (Gutiérrez y Jaime, 1998), el cual funciona de la siguiente manera:

1. Se propone una actividad diseñada para medir cierto nivel.
2. Si la persona que la realiza no es capaz de resolverla, se le muestra otra pregunta o contenido adicional, que hace la tarea más sencilla y conecta con el nivel de razonamiento inferior, siempre sobre la misma actividad.
3. Si la persona tampoco es capaz de resolver la actividad modificada, se repite el proceso enlazando con el nivel inferior, y así sucesivamente.

3.2. Sobre los contenidos que asume el test

El problema respecto a diseñar un test de estas características radica en que lo que se intenta medir es la capacidad de razonamiento, independiente de los contenidos o saberes que la persona acumula. Los problemas que se planteen han de ser lo suficientemente claros como para que los contenidos no sean un obstáculo en la evaluación. Además, como se ha mencionado anteriormente, el test se pretende diseñar de tal manera que, si la persona no muestra indicios de que ha adquirido el nivel 5, se pueda verificar en qué nivel inferior se encuentra.

Para resolver estas cuestiones, se ha decidido tomar como punto de referencia el currículo aragonés de la actual ley de educación (LOMLOE) donde se especifican tanto los saberes, como los niveles que deberían adquirir los alumnos al terminar las etapas de ESO y Bachillerato. En concreto, finalizada la etapa de Educación Secundaria, se espera que los alumnos/as hayan alcanzado el nivel 3 de razonamiento geométrico, siendo el nivel 4 introducido en la etapa de Bachillerato (Gutiérrez y Jaime, 1995; Mayberry, 1983; Pandiscio y Knight, 2010).

Por estas razones, y dado que uno de los objetivos de este trabajo es el de diseñar el test de tal forma que enlace con el resto de niveles, se van a tomar como referencia para las tareas de nivel 5 los saberes incluidos en los currículos de matemáticas de ESO y Bachillerato (uno u otro dependiendo de la tarea). Además, en caso de comenzar con contenidos de Bachillerato y que la persona que realice el test no pueda responder a una pregunta, el test se diseñará de tal forma que sea lo suficientemente flexible para adaptar el problema a un contexto geométrico más sencillo. Por ejemplo, el concepto de vector se introduce en Bachillerato, pero si el alumno no es capaz de trabajar con él, la pregunta se deberá poder reformular para que pueda resolverse sin necesidad de utilizar estos objetos matemáticos.

La elección de los contenidos que aparecen en el instrumento es un factor muy importante que puede influir en el diseño de las preguntas e impedir, por ejemplo, focalizar la atención en la relación entre diversas geometrías, rasgo característico del nivel 5 de Van Hiele (Blair, 2004). Si bien es cierto que en la propuesta original del modelo de Van Hiele se habla del nivel de razonamiento en diferentes sistemas axiomáticos, en el estudio realizado por Arnal-Bailera y Manero (2023), respecto a los procesos mixtos de demostración-reformulación, el panel de expertos no especificó que este rasgo tuviese que ser analizado en diferentes contextos geométricos (en cambio si que lo hizo con el indicador Pro2.1). En este trabajo se ha asumido un determinado contexto geométrico para analizar este proceso, pero para un estudio más profundo habrá que tener esto en cuenta.

3.3. Diseño del instrumento

Los instrumentos usados para medir deben poseer ciertas cualidades necesarias, principalmente, que sean válidos y confiables (Reidl Martínez, 2012). La validez se refiere a que el instrumento mide lo que tiene que medir, y la confiabilidad nos dice como de fiable es la medición si la repetimos varias veces en el mismo sujeto.

El diseño del test se va a realizar en dos fases. En la primera, se realizará una validación interna de contenido mediante un método iterativo, en el que se irán proponiendo ejercicios en paralelo a un grupo formado por dos profesores expertos en didáctica de las matemáticas, y éstos irán aportando comentarios que permitan ajustar las preguntas que conformarán el test final. Dado que el nivel 5 de Van Hiele hace referencia a la capacidad de adaptarse a diferentes contextos geométricos, en esta primera fase también se decidirá entre otras cosas, qué contextos estarán involucrados. El método a seguir se puede ver esquematizado en la figura 3.

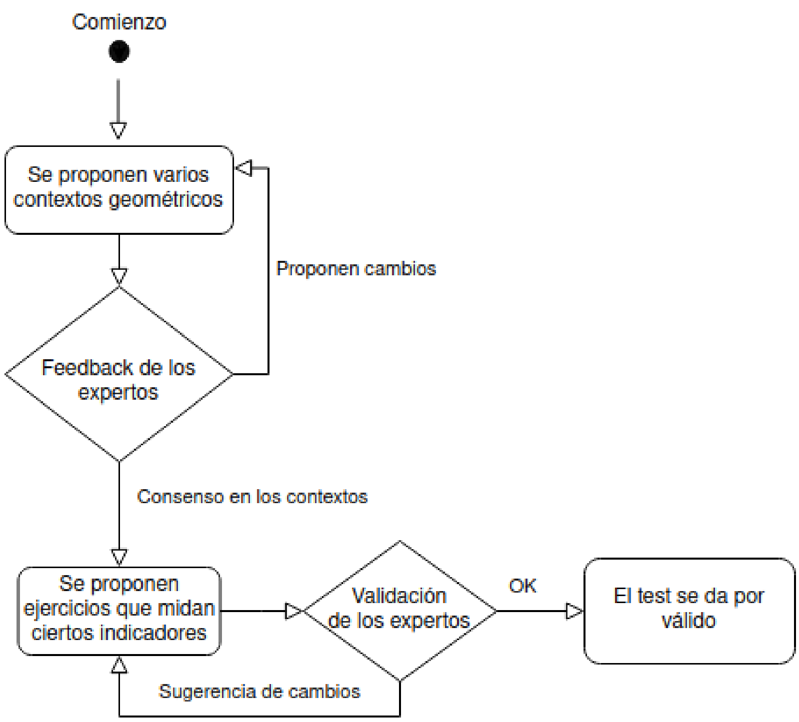


Figura 3: Ciclos de validación interna del contenido del test

Una vez terminada la validación interna, el test se pasará a un grupo de profesores universitarios de Geometría y Topología. Estos profesores no estarán involucrados en el diseño de las preguntas y este grupo servirá además de control respecto a las respuestas que después se obtendrán de alumnos de Secundaria, Bachillerato e Ingeniería.

3.4. Características de la muestra

La técnica de muestreo utilizada en este trabajo es la llamada *muestreo por conveniencia*: se seleccionan los individuos que están más accesibles. Dicha muestra se puede separar en tres categorías: panel de expertos en geometría, alumnos de 1º de Ingeniería, y alumnos de ESO y Bachillerato. El panel de expertos en geometría lo conforman 4 sujetos procedentes de tres universidades distintas: Universidad de Málaga (1), Universidad Autónoma de Madrid (1) y Universidad de Zaragoza (2). Estos sujetos no han estado involucrados en el trabajo que aquí se presenta. La muestra procedente de alumnos de 1º de Ingeniería consta de 17 sujetos de la Universidad de La Rioja. La muestra se completa con sujetos que están cursando 4º ESO A (15), 4º ESO B (28) y 1º Bachillerato de Ciencias Sociales (17) del Colegio Salesianos de Zaragoza.

Hay dos razones por las que se incluye a estudiantes de primero de ingeniería: la primera es porque la geometría en el espacio se ve en 2º de Bachillerato, y para cuando se vayan a obtener los datos en este trabajo, es posible que todavía no hayan visto ese contenido. La otra razón es para explorar la utilidad de este test en la etapa universitaria, y comprobar: (1) cómo se propagan ciertos saberes y competencias de unas etapas educativas a las siguientes, y (2) detectar carencias en el nivel de razonamiento de los estudiantes en etapa universitaria, lo que podría repercutir en proponer refuerzos concretos para las etapas de ESO y Bachillerato.

3.5. Análisis de resultados

Para analizar los datos se van a definir una serie de criterios de evaluación que ayudarán a identificar el nivel de adquisición de cada nivel en función de la actividad. Los criterios definidos son:

- CE.1: Comprende los cambios globales que surgen al cambiar de contexto geométrico
- CE.2: Entiende que objetos matemáticos concretos cambian de representación en función del contexto
- CE.3: Compara demostraciones en base a diferentes criterios, como adaptabilidad o simplicidad
- CE.4: Es capaz de determinar bajo qué condiciones, una proposición puede o no demostrarse, siendo capaz de reformular la proposición

- CE.5: Estructura una demostración de tal manera que puedan reutilizarse resultados parciales para demostrar algo más general
- CE.6: Es capaz de realizar una demostración formal
- CE.7: Es capaz de realizar una demostración formal que requiere un número pequeño de pasos lógicos, utilizando un lenguaje informal
- CE.8: Entiende que la demostración es una verificación de casos concretos
- CE.9: No tiene en cuenta atributos relevantes propios de los objetos geométricos

En la tabla 3 se muestra la relación entre los criterios de evaluación, los niveles de Van Hiele asociados, así como las actividades en las que se aplicarán.

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	N5	N4	N3	N2	N1	A1	A2	A3	A4
CE.1	•					•	•		
CE.2	•					•			
CE.3	•						•		
CE.4	•							•	
CE.5	•								•
CE.6		•				•		•	•
CE.7			•			•		•	•
CE.8				•		•		•	
CE.9					•	•	•	•	•

Tabla 3: Relación entre los criterios de evaluación, los niveles de Van Hiele y las actividades a realizar.

El análisis que se llevará a cabo será un análisis cualitativo en base a los criterios indicados. Dada la amplitud del trabajo de investigación realizado, se ha seleccionado para su inclusión en esta memoria del Trabajo Fin de Máster únicamente una de las actividades, la que se considera que presenta mayor interés y permite generar una situación de aprendizaje rica, orientada a mitigar algunas de las carencias que se han detectado.

4. Propuesta de un instrumento para medir el nivel de Van Hiele en el proceso de demostración

En este trabajo se propone el diseño de un text que consta de 4 actividades. Cada una de las actividades intenta medir aspectos diferentes relacionados con el nivel 5 de Van Hiele. Aunque a continuación se detallan qué criterios de evaluación se utilizarán en cada uno de los apartados de las actividades, el criterio CE.9 será transversal a todos ellos, lo que nos permitirá detectar problemas con las definiciones de los objetos geométricos y sus atributos relevantes.

4.1. Actividad 1

La actividad muestra una proposición en el contexto de $\mathbb{R}^2$ y su demostración. Después se pide responder a una pregunta.

4.1.1. Enunciado

En esta actividad se va a definir el concepto de mediana y se va a dar una demostración de que las tres medianas de un triángulo se cortan en el mismo punto. Los pasos de la demostración son los siguientes:

- Primero, dadas las coordenadas de los vértices, se calculan las coordenadas de los puntos medios de los tres lados del triángulo.
- Segundo, para cada vértice y el punto medio del lado opuesto, se calcula la ecuación de la recta que pasa por ambos puntos (mediana). Esto lo hace para los tres vértices.
- Tercero, tomando dos medianas cualesquiera, se calcula el punto de intersección entre ellas, resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente. Esto da como resultado un punto expresado en las coordenadas de los vértices del triángulo.
- Por último, en la demostración se comprueba que el punto está contenido en la tercera mediana, la que no estaba incluida en el sistema de ecuaciones.

La pregunta a la que hay que responder es si ésta demostración se podría reutilizar tal y como está para el caso en el que el triángulo estuviese en el espacio, $\mathbb{R}^3$, en vez de en el plano. En caso de que no, habrá que indicar qué es lo que falla y qué habría que cambiar para adaptarla a ese nuevo contexto.

Enunciado 1.a:

Sea el triangulo formado por los vértices A,B,C.

Definición (Mediana): Recta que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Proposición: Las tres medianas de un triánguo se cortan en un punto G llamado *baricentro*.

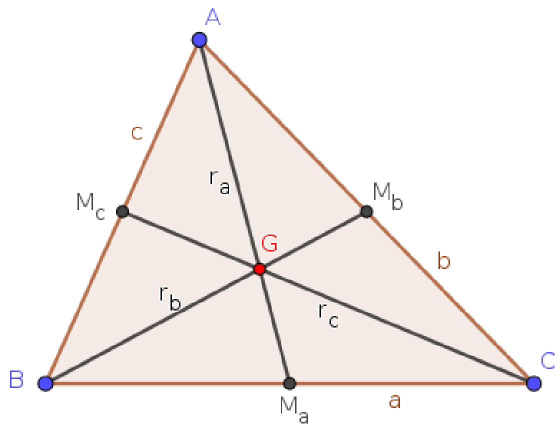


Figura 4: Representación del baricentro de un triángulo

Demostración:

Supongamos que las coordenadas de los vértices son $A=(x_a,y_a),B=(x_b,y_b),C=(x_c,y_c)$. Con estas coordenadas, podemos calcular las coordenadas de los puntos medios:

$$M_a = (\frac{x_b+x_c}{2}, \frac{y_b+y_c}{2})$$
$$M_b = (\frac{x_a+x_c}{2}, \frac{y_a+y_c}{2})$$
$$M_c = (\frac{x_a+x_b}{2}, \frac{y_a+y_b}{2})$$

Teniendo las coordenadas de los puntos medios y los vértices, podemos calcular las ecuaciones de las rectas que pasan por cada vértice y el punto medio del lado opuesto (medianas). Para ello podemos usar la ecuación punto-pendiente de la recta. De forma genérica, la pendiente que pasa por dos puntos cualesquiera (x_1,y_1) y (x_2,y_2) viene dada por

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

y la ecuación punto-pendiente de la recta que pasa por esos puntos es:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

Utilizando esta ecuación, vamos a calcular las medianas del triángulo $\overset{\triangle}{ABC}$. Sea r_a la recta que pasa por los puntos $\{A, M_a\}$. Primero calculamos la pendiente de la recta, m_{ra}:

$$m_{ra} = \frac{y_b + y_c - 2y_a}{x_b + x_c - 2x_a}$$

y usando la ecuación punto-pendiente, la recta r_a será aquella que contenga los puntos que cumplan la siguiente ecuación:

$$\frac{y - y_a}{x - x_a} = m_{ra}$$

De forma análoga, podemos obtener las ecuaciones de las otras dos medianas:

$$m_{rb} = \frac{y_a + y_c - 2y_b}{x_a + x_c - 2x_b}$$

$$r_b \to \frac{y - y_b}{x - x_b} = m_{rb}$$

$$m_{rc} = \frac{y_a + y_b - 2y_c}{x_a + x_b - 2x_c}$$

$$r_c \to \frac{y - y_c}{x - x_c} = m_{rc}$$

Ahora, cojamos dos medianas, por ejemplo r_a y r_b. El punto de intersección entre ellas se puede obtener resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \frac{y - y_a}{x - x_a} = \frac{y_b + y_c - 2y_a}{x_b + x_c - 2x_a} \\ \\ \frac{y - y_b}{x - x_b} = \frac{y_a + y_c - 2y_b}{x_a + x_c - 2x_b} \end{cases}$$

cuya solución es:

$$G = (\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3})$$

Sustituyento en la ecuación de r_c, se puede comprobar que G pertenece también a la otra mediana, por lo que queda demostrado que las tres medianas se cortan en el mismo punto.

■

Pregunta

¿Esta demostración también es válida para asegurar que en $\mathbb{R}^3$ también se cumple la proposición? En caso de que la demostración no sea válida, ¿qué cambios habría que realizar para tener una demostración para un triángulo en $\mathbb{R}^3$?

Criterios de evaluación

Con esta actividad, se pretende medir los criterios de evaluación CE.1 y CE.2, ya que la demostración es prácticamente la misma, pero el alumno/a debe darse cuenta de que en $\mathbb{R}^3$, además de tener una coordenada más, la ecuación de la recta punto-pendiente no es transferible tal y como está aquí enunciada, ya que la recta en el espacio algebraicamente no se representa igual que en el plano, por lo que deberá entender que cambiando ese detalle la estructura de la demostración es equivalente.

4.1.2. Enlace con el nivel 4

En caso de que la persona no sea capaz de responder a las preguntas, se le sugerirán las ecuaciones de la recta en el espacio.

Enunciado 1.b:

Sea el triángulo formado por los vértices A, B, C en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas

$$A = (1, 0, 0)$$

$$B = (0, 1, 0)$$

$$C = (0, 0, 1)$$

Pregunta: Demuestra que las tres medianas se cortan en un mismo punto.

Criterios de evaluación

En este apartado, se medirá el CE.6 ya que se pide que realice una demostración formal de un caso concreto.

4.1.3. Enlace con el nivel 3

En caso de que la persona no sea capaz de realizar la demostración teniendo presentes las ecuaciones de la recta en el espacio, se procederá a reducir la complejidad de la demostración para comprobar que la persona es capaz de concatenar un número pequeño de pasos lógicos, aunque el lenguaje que utilice no sea formal.

Enunciado 1.c: Sea el triángulo formado por los vértices A,B,C en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas

$$A = (0,0)$$
$$B = (0,1)$$
$$C = (1,0)$$

.

La recta que pasa por dos puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2) viene dada por la expresión:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$$

Pregunta: Demuestra que la mediana que pasa por el vértice A tiene de ecuación $y=x$.

Criterios de evaluación

En este apartado, se medirá el CE.7 ya que se pide que realice una demostración que requiere un pequeño número de pasos lógicos en un caso concreto.

4.1.4. Enlace con el nivel 2

Si la persona llega a este nivel del superítem, se le mostrará un ejemplo concreto, y se le pedirá que verifique que el baricentro de un triángulo cumple con lo enunciado en la proposición inicial.

Enunciado 1.d: Sea el triángulo formado por los vértices A,B,C en $\mathbb{R}^2$ con coordenadas

$$A = (0,0)$$
$$B = (0,1)$$
$$C = (1,0)$$

.

cuyo baricentro tiene coordenadas $G = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Pregunta:Comprueba que el baricentro está contenido en las tres medianas:

$$\begin{cases} \text{Mediana A}: & y &= & x \\ \text{Mediana B}: & y &= & 1-2x \\ \text{Mediana C}: & y &= & \frac{1-x}{2} \end{cases}$$

Criterios de evaluación

En este apartado, se medirá el CE.8 ya que se pide que realice la verificación de que un punto está contenido en tres rectas.

4.2. Actividad 2

En esta actividad, teniendo en cuenta la proposición y demostración anterior, se van a añadir dos demostraciones adicionales, y se pedirá al sujeto que las compare bajo los criterios que considere más relevantes. La demostración 1 se ha obtenido de (González-Meneses J, 2008).

4.2.1. Enunciado

A continuación se van a dar dos demostraciones acerca de que las mediandas de un triángulo, en el plano, se cortan en el mismo punto. Compáralas explicando los criterios que consideres más relevantes para evaluarlas.

Demostración 1:

Para esta demostración vamos a utilizar algunos resultados previos que nos serán de utilidad.

Teorema de Thales:Si dos rectas paralelas cortan a dos rectas secantes (formando por tanto dos triángulos de ángulos iguales), entonces la proporción entre cada lado del triángulo mayor y el lado correspondiente del triángulo menor es constante.

Proposición (Recíproco del Teorema de Thales):Si una recta r corta a dos lados de un triángulo, de forma que las proporciones entre los segmentos resultantes son iguales en ambos lados, entonces r es paralela al tercer lado.

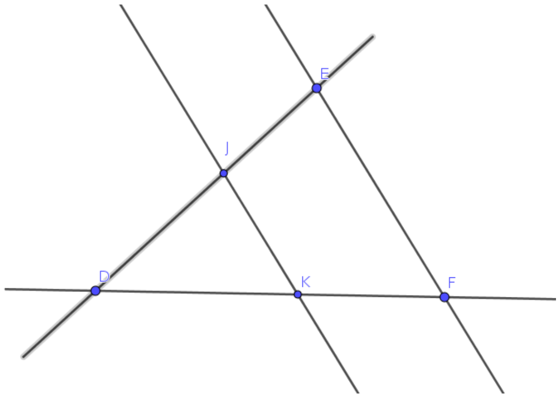


Figura 5: Representación del teorema de Thales

Proposición: Un cuadrilátero con dos lados opuestos iguales y paralelos es un paralelogramo.

Proposición: Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas diagonales.

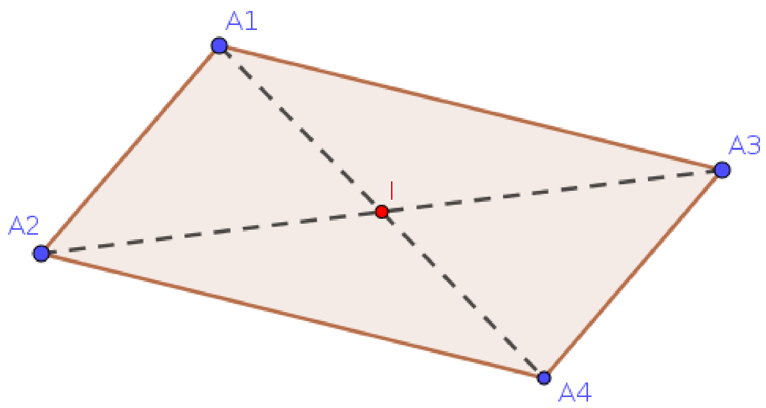


Figura 6: Las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio.

Con estos resultados, vamos a proceder a realizar la demostración de que las tres medianas de un triángulo se cortan en el mismmo punto:

Consideremos el siguiente triángulo:

Sean M_b y M_c los puntos medios de los lados b y c respectivamente, y sea G el punto de corte de las medianas r_b y r_c. Sea P el punto medio del segmento $\overline{BG}$ y Q el punto medio del segmento $\overline{GC}$. Por el recíproco al teorema de Thales, sabemos que el segmento $\overline{M_b, M_c}$ es paralelo al lado a. Análogamente, aplicándolo al triángulo $\overset{\triangle}{BGC}$, el segmento $\overline{PQ}$ también es paralelo al lado a y, por tanto, paralelo al segmento $\overline{M_b M_c}$. Aplicando ahora el teorema de Thales, vemos que los segmentos $\overline{M_b, M_c}$ y $\overline{PQ}$, no solo son parale-

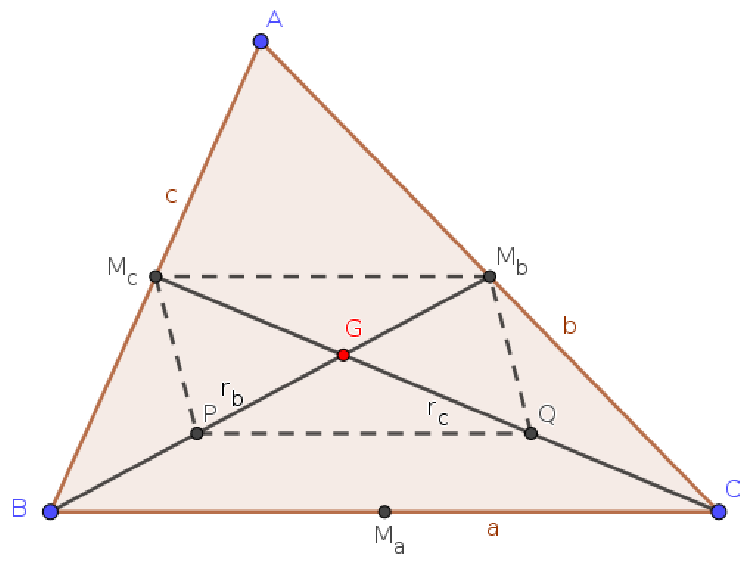


Figura 7: Los puntos M_c,M_b,P y Q forman un paralelogramo.

los, sino que miden lo mismo, la mitad del segmento $\overline{BC}$. Por lo tanto, M_cPQM_b es un paralelogramo.

Ahora, sabiendo que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio de ambas, sabemos que G es el punto medio de los segmentos $\overline{PM_b}$ y $\overline{QM_c}$ y, como P es el punto medio del segmento $\overline{BG}$, tenemos que

$$\overline{BP} = \overline{PG} = \overline{GM_b}$$

y análogamente

$$\overline{CQ} = \overline{QG} = \overline{GM_c}$$

Por lo que podemos decir que G es el punto de trisección de las medianas r_b y r_c. Aplicando el mismo procedimiento para la mediana r_a, demostramos que las tres medianas se cortan en el baricentro G.

$\blacksquare$

Demostración 2:

Dado el triángulo con vértices $A,B,C \in \mathbb{R}^2$, elijo un sistema de coordenadas $\{A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\}$ de tal manera que las coordendas de los vértices, respecto a este sistema, son:

$$A = (0,0)$$
$$B = (1,0)$$
$$C = (0,1)$$

Con estas coordendas, los puntos medios de los lados del triángulo son

$$m_a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$$
$$m_b = (0, \frac{1}{2})$$
$$m_c = (\frac{1}{2}, 0)$$

Definimos las medianas como las rectas:

$$r_a = \{(\lambda_1, \lambda_1)\}$$

$$r_b = \{(1+\lambda_2, -\frac{\lambda_2}{2})\}$$
$$r_c = \{(-\frac{\lambda_3}{2}, 1+\lambda_3)\}$$

con lo que los puntos de intersección son:

$$r_a \cap r_b = \{(\lambda_1, \lambda_1) | \lambda_1 = 1+\lambda_2, 2\lambda_1 = -\lambda_2\} = \{(\lambda_1, \lambda_1) | \lambda_1 = 1 - 2\lambda_1\} = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})\}$$

y es fácil ver que $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \in r_c$ para $\lambda_3 = -\frac{2}{3}$.

■

Criterios de evaluación

Esta actividad se evaluará mediante los criterios CE.1 y CE.3. Se espera que la persona que conteste a las preguntas reflexione sobre las ventajas de usar geometría afín, y que demostraciones basadas en sistemas de referencia relativos al propio objeto matemático permiten manejar coordenadas mucho más sencillas con las que trabajar.

4.2.2. Enlace con los niveles inferiores

Esta actividad tiene la única finalidad de analizar criterios de comparación de demostraciones y no se enlaza con los niveles inferiores.

4.3. Actividad 3

Esta actividad está vinculada con la generalización del teorema de Pitágoras y pretende que se descubran las hipótesis necesarias para que se pueda aplicar.

4.3.1. Enunciado

Enunciado 3.a: Consideremos un triángulo con vértices $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ y lados de longitudes a, b, c cualesquiera.

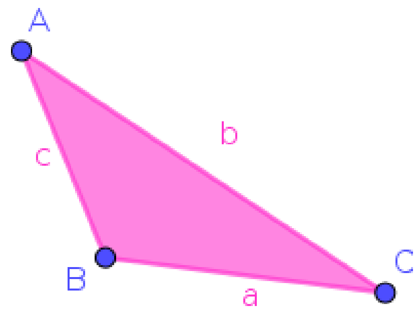


Figura 8: Triángulo genérico

Ahora consideremos los semicírculos de diámetros a, b, c tal y como figura en la imagen:

Pregunta:

Trata de demostrar que el área del semicírculo de diámetro b es igual a la suma de las áreas de los otros semicírculos. En caso de que alguna condición inicial impida que se pueda demostrar, trata de describir bajo qué condiciones se cumple esta afirmación. Por el contrario, si cambiando alguna condición se puede generalizar la proposición, indícalo.

Criterios de evaluación

En esta actividad se espera que el alumnado sea capaz de identificar la relación entre que el triángulo sea rectángulo y que las áreas cumplan la propiedad que se presenta.

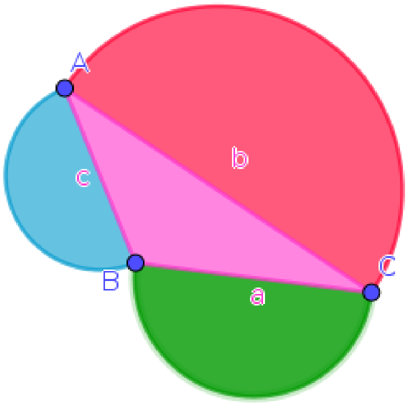


Figura 9: Contruimos tres semicírculos cuyas longitudes de los diámetros son a,b y c respectivamente

Una respuesta que cumpla el criterio de evaluación CE.4 deberá incluir el añadir dicha condición a la proposición.

4.3.2. Enlace con el nivel 4

Enunciado 3.b:

Demuestra que el área del semicírculo de diámetro b es igual a la suma de las áreas de los otros semicírculos en el caso en el que el triángulo es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es *b*.

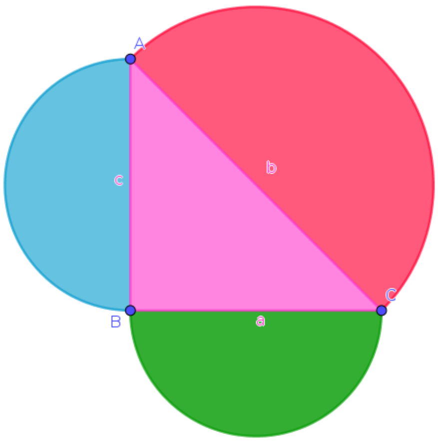


Figura 10: Caso en el que el triángulo es rectángulo

Criterios de evaluación

En este apartado, se espera que el alumnado sea capaz de realizar una demostración formal para cuando el triángulo es rectángulo, apoyándose en el teorema de pitágoras. Se evaluará con el critero de evaluación CE.6.

4.3.3. Enlace con el nivel 3

Enunciado 3.c:

Sabiendo que el área de un círculo de radio r es $A = \pi r^2$, y que el teorema de pitágoras dice que, en un triángulo rectángulo de lados a, b, c, siendo a la hipotenusa, se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$, demuestra que el área del semicírculo de diámetro b es igual a la suma de las áreas de los otros semicírculos en el caso en el que el triángulo es un triángulo rectángulo cuya hipotenusa es b.

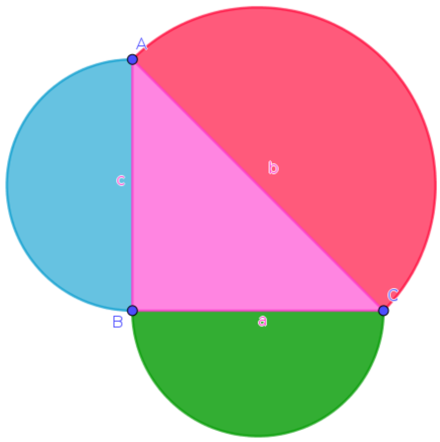


Figura 11: Caso en el que el triángulo es rectángulo

Criterios de evaluación

En este caso, en el enunciado se aporta explícitamente el teorema de pitágoras y la fórmula del área de un círculo, por lo que se espera que el alumnado sea capaz de realizar la demostración de manera más fácil. Se evaluará con el criterio CE.7.

4.3.4. Enlace con el nivel 2

Enunciado 3.d:

Verifica que para el siguiente triángulo, de lados $a = 5$, $b = 4$ y $c = 3$, se cumple el teorema de pitágoras, es decir $a^2 = b^2 + c^2$.

Criterios de evaluación

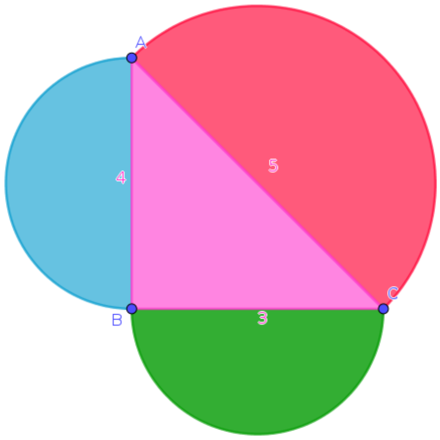


Figura 12: Caso concreto en el que el triángulo es rectángulo

Se pide verificar el teorema de pitágoras en ese triángulo rectángulo concreto. Se evaluará con el criterio CE.8.

4.4. Actividad 4

4.4.1. Enunciado

En esta actividad, se muestran cuatro figuras geométricas: tres piezas indivisibles (Harundo, Imber y Pomifer), y una cuarta divisible (Rorifer), que se contruye en base a las anteriores.

La tarea consiste en: (1) demostrar que el área de Rorifer viene dada por la fórmula:

$$A_{Rorifer} = 4ab - \frac{\pi a^2}{8}$$

y (2) la demostración deberás estructurarla de tal manera que, para cualquier construcción que hagas con estas piezas, sabiendo con qué piezas está construida cualquier otra figura, sepas calcular rápidamente el área de la figura.

Criterios de evaluación

En esta actividad, se espera que la persona: (1) de entidad propia a la cuarta pieza que compone Rorifer mediante una definición, y (2) sepa estructurar la demostración, de tal manera que al final obtenga una fórmula del área de cualquier figura construida con esas piezas, en función del número de piezas de cada tipo que la componen. El área de Rorifer será un caso particular, la cual está construida con una pieza de cada tipo. El criterio de

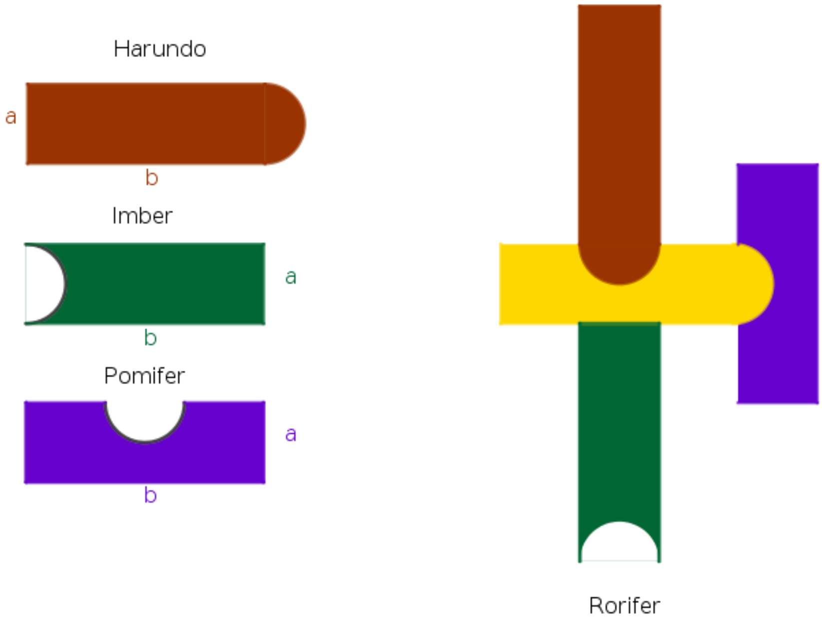


Figura 13: Sistema Rorifer

evaluación que se utilizará será el CE.5.

4.4.2. Enlace con los niveles inferiores

Dado que se ha de realizar una demostración, aunque no cumpla con las características del nivel 5, se aplicarán los criterios de evaluación CE.6 y CE.7 en caso de que no se verifique CE.5.

5. Análisis de datos y resultados

Los datos recogidos en este trabajo han sido de un total de 204 producciones correspondientes a 81 sujetos. No todos los sujetos realizaron todas las actividades propuestas. Las producciones obtenidas se distribuyen como se refleja en la tabla 4.

	N	A1	A2	A3	A4	Total Producciones
Expertos	4	4	4	4	3	15
1º Ingeniería	17	11	0	15	0	26
1º Bachillerato CCSS	17	17	0	17	17	51
4º ESO A	15	14	0	11	10	35
4º ESO B	28	28	0	27	22	77
	81	74	4	74	52	204

Tabla 4: Distribución de los datos obtenidos en función de la actividad y curso.

Como hemos indicado en el apartado de metodología, dado que este trabajo se enmarca dentro del Máster de Profesorado en Educación Secundaria, y su objetivo no es el de realizar un trabajo científico exhaustivo, sino plasmar lo aprendido durante el curso mediante un trabajo de iniciación a la investigación, se va a proceder a mostrar los resultados del análisis de la actividad 3, ya que, junto con la actividad 1, es la actividad de la cual más producciones se han obtenido en todos los niveles educativos, y en la que se han encontrado indicios de dificultades que sufre el alumnado. Producto de este análisis será una situación de aprendizaje para la etapa de la ESO que podría ayudar a mitigar dichas carencias en el razonamiento geométrico del alumnado.

5.1. Resultados

Como hemos indicado anteriormente, en esta sección vamos a analizar los datos obtenidos respecto a la actividad 3. Los resultados de la evaluación han sido los siguientes: a las producciones que no dejaban claro si el sujeto entendía el resultado al que había llegado, así como las que lo han puesto explícitamente, se las ha declarado no válidas.

5.1.1. 1º Bachillerato

En 1º Bachillerato, se han obtenido los siguientes resultados: de 17 sujetos, 8 han sabido identificar que para que se cumpla la relación entre las áreas de los semicírculos, se ha de añadir la condición de que el triángulo sea rectángulo, 3 sujetos han sabido asegurar que en un triángulo rectángulo sí se cumple la condición y 6 producciones se han declarado no válidas.

1º Bachillerato	N5	N4	N3	N2	N1	A3	No válidos
CE.4	●					8	6
CE.6		●				3	
CE.7			●			0	
CE.8				●		0	
CE.9					●	0	
						17	

Figura 14: Resultados del test en 1° Bachillerato CCSS

5.1.2. 4ºESO A

En 4ºESO A, se han obtenido los siguientes resultados: de 11 sujetos, 9 han sabido identificar que para que se cumpla la relación entre las áreas de los semicírculos, se ha de añadir la condición de que el triángulo sea rectángulo, 1 sujeto ha sabido asegurar que en un triángulo rectángulo si se cumple la condición y 1 sujeto se ha declarado no válidos.

4º ESO A	N5	N4	N3	N2	N1	A3	No validos
CE.4	●					9	1
CE.6		●				1	
CE.7			●			0	
CE.8				●		0	
CE.9					●	0	
						11	

Figura 15: Resultados del test en 4ºESO A

En la sección 5.3 se muestran dos ejemplos, el primero de una producción que se ha evaluado positivamente con el criterio CE.4, y el segundo la producción no válida que se ha obtenido en el análisis:

5.1.3. 4ºESO B

En 4ºESO B, se han obtenido los siguientes resultados: de 27 sujetos, 15 han sabido identificar que para que se cumpla la relación entre las áreas de los semicírculos, se ha de añadir la condición de que el triángulo sea rectángulo, 2 sujetos han sabido asegurar que en un triángulo rectángulo sí se cumple la condición y 10 producciones se han declarado no válidas.

4º ESO B	N5	N4	N3	N2	N1	A3	No validos
CE.4	●					15	10
CE.6		●				2	
CE.7			●			0	
CE.8				●		0	
CE.9					●	0	
						27	

Figura 16: Resultados del test en 4ºESO B

5.1.4. 1º Ingeniería

En 1º Ingeniería, se han obtenido los siguientes resultados: de 15 sujetos, 3 han sabido identificar que para que se cumpla la relación entre las áreas de los semicírculos, se ha de añadir la condición de que el triángulo sea rectángulo, 1 sujeto ha sabido asegurar que en un triángulo rectángulo sí se cumple la condición, 3 han sabido verificar que en un triángulo rectángulo concreto, se cumple el teorema de pitágoras, 7 han cometido errores, o bien obviando atributos relevantes del/los triángulos que han empleado en la demostración, o bien en las propiedades algebraicas utilizadas para demostrar la proposición, llegando a veces a demostrar que la proposición se cumple, y 1 producción se ha declarado no válida.

5.2. Resumen de resultados

En términos de porcentajes, los resultados obtenidos se resumen en la siguiente tabla:

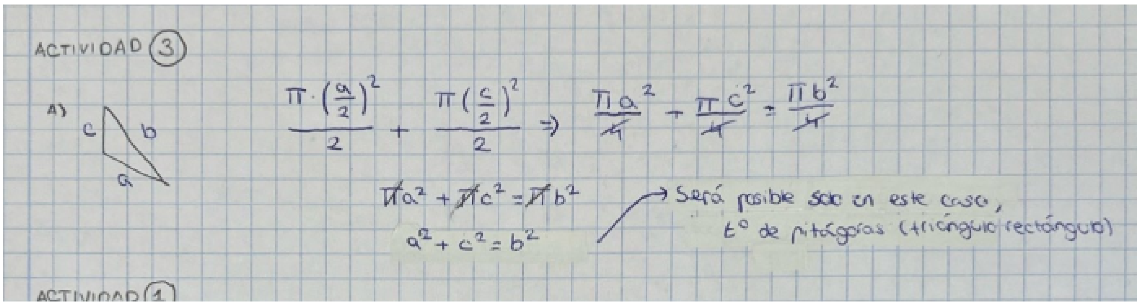
1º INGENIERIA	N5	N4	N3	N2	N1	A3	No validos
CE.4	●					3	1
CE.6		●				1	
CE.7			●			0	
CE.8				●		3	
CE.9					●	7	
						15	

Figura 17: Resultados del test en 1º Ingeniería

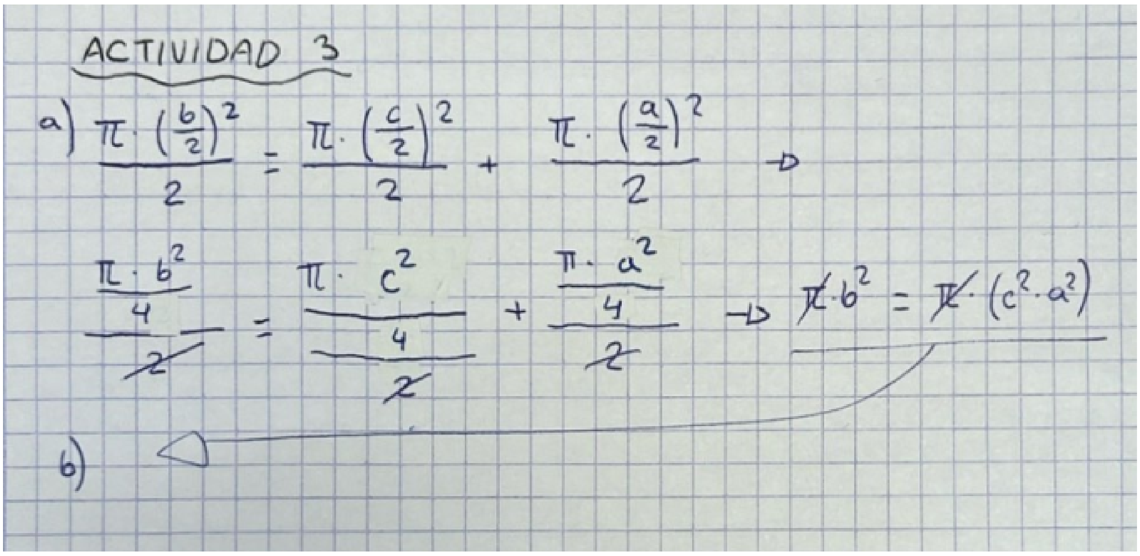
	Expertos	1º INGENIERIA	1º Bachillerato	4º ESO A	4º ESO B	Total
CE.4	100,00%	20,00%	47,06%	81,82%	55,56%	60,89%
CE.6	0,00%	6,67%	17,65%	9,09%	7,41%	8,16%
CE.7	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%	0,00%
CE.8	0,00%	20,00%	0,00%	0,00%	0,00%	4,00%
CE.9	0,00%	46,67%	0,00%	0,00%	0,00%	9,33%
No válidos	0,00%	6,67%	35,29%	9,09%	37,04%	17,62%
	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%

Figura 18: Resumen de los resultados obtenidos

5.3. Ejemplos de producciones

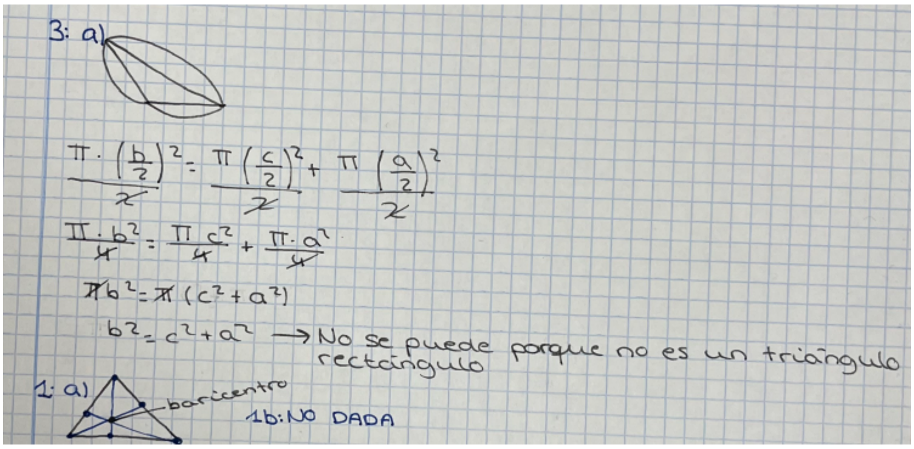


(a) Ejemplo de producción que cumple CE.4 en 1ºB

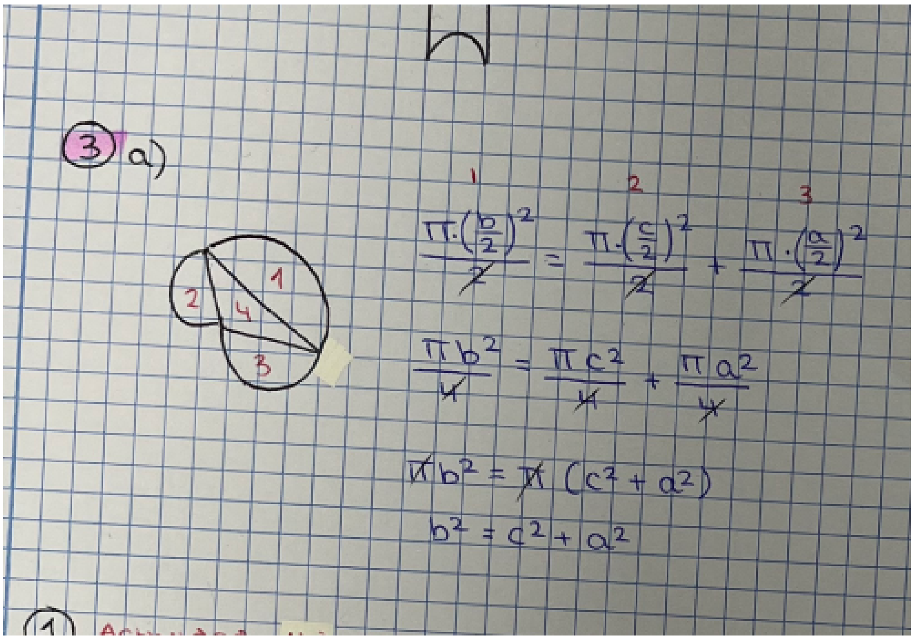


(b) Ejemplo de producción no válida en 1ºB

Figura 19: Ejemplos de producciones de 1ºB

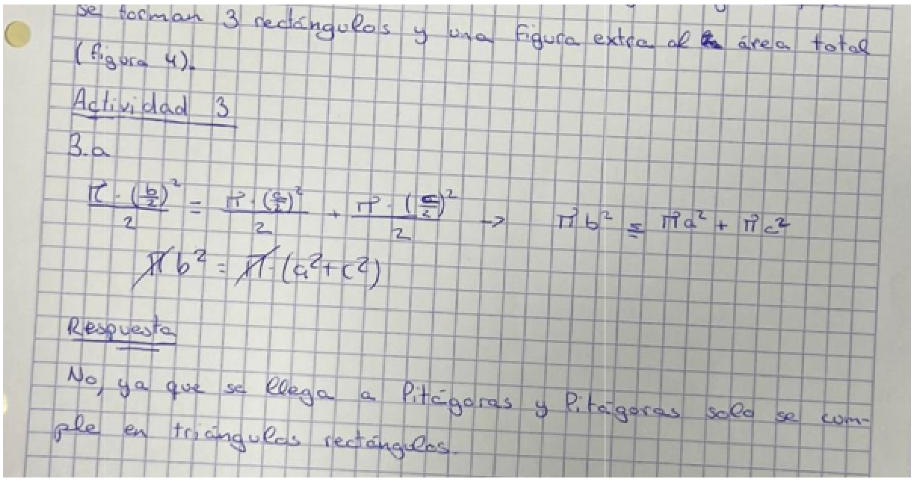


(a) Ejemplo de producción que cumple CE.4 en 4ºA

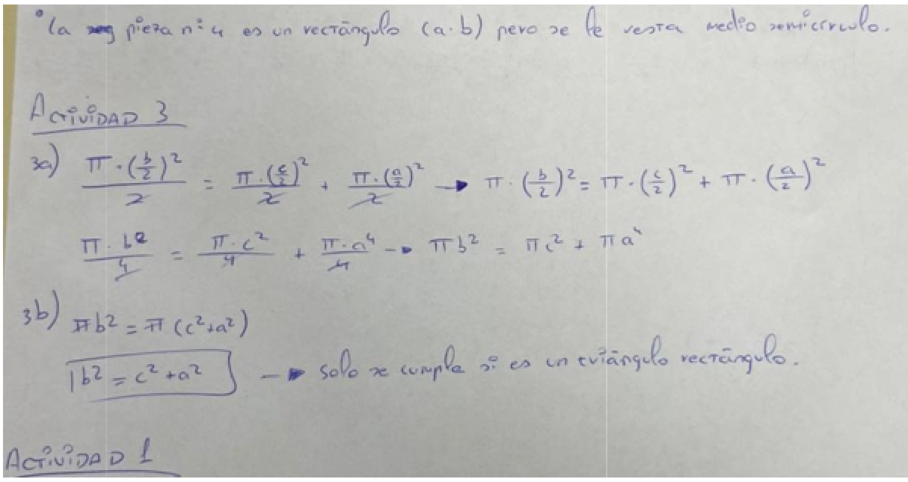


(b) Ejemplo de producción no válida en 4ºA

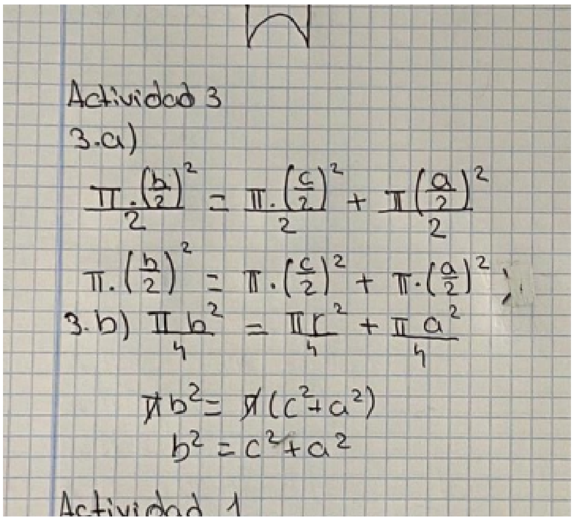
Figura 20: Ejemplos de producciones de 4ºA



(a) Ejemplo de producción que cumple CE.4 en 4ºB



(b) Ejemplo de producción que cumple CE.6 en 4ºB



(c) Ejemplo de producción no válida en 4ºB, en donde el sujeto ha abandonado a mitad el ejercicio.

Figura 21: Ejemplos de producciones de 4ºB

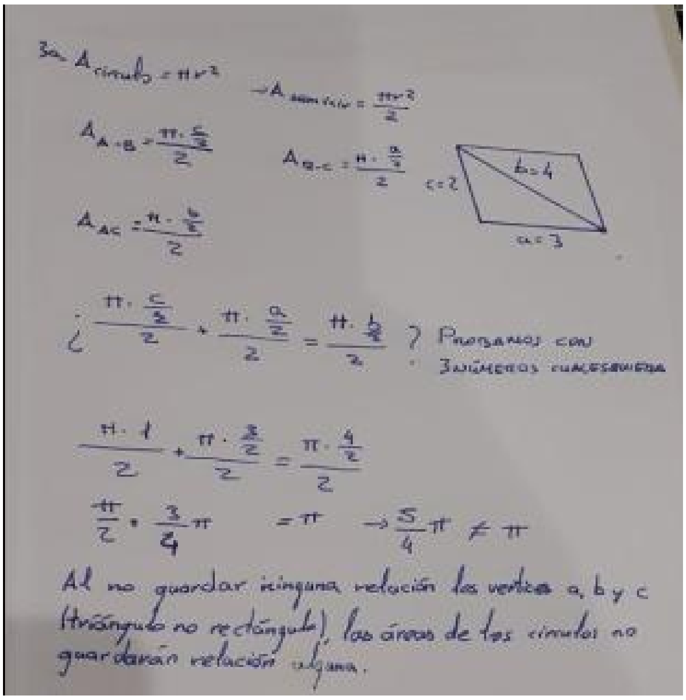


Figura 22: Ejemplo de producción que cumple CE.4 en 1ºI aunque la verificación siembra dudas.

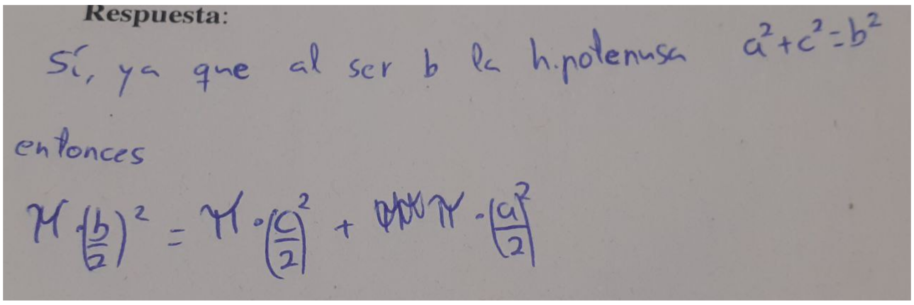


Figura 23: Ejemplo de producción que cumple CE.6 en 1ºI

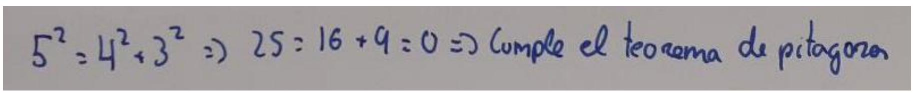


Figura 24: Ejemplo de producción que cumple CE.8 en 1ºI

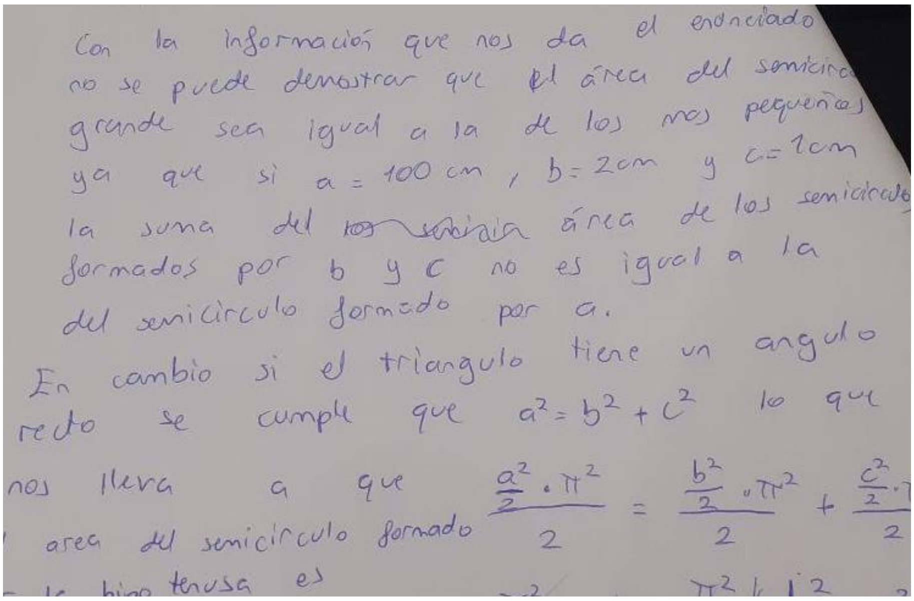

Con la información que nos da el enunciado no se puede demostrar que el área del semicírc[ulo] grande sea igual a la de los mas pequeños ya que si $a = 100$ cm, $b = 2$cm y $c = 1$cm la suma del ~~los semicirc~~ área de los semicírculos formados por b y c no es igual a la del semicírculo formado por a.
En cambio si el triangulo tiene un angulo recto se cumple que $a^2 = b^2 + c^2$ lo que nos lleva a que $\frac{\frac{a^2}{2}\cdot\pi^2}{2} = \frac{\frac{b^2}{2}\cdot\pi^2}{2} + \frac{\frac{c^2}{2}\cdot}{2}$
área del semicírculo formado [por] la hipotenusa es

Figura 25: Ejemplo de producción que cumple CE.9 en 1ºI

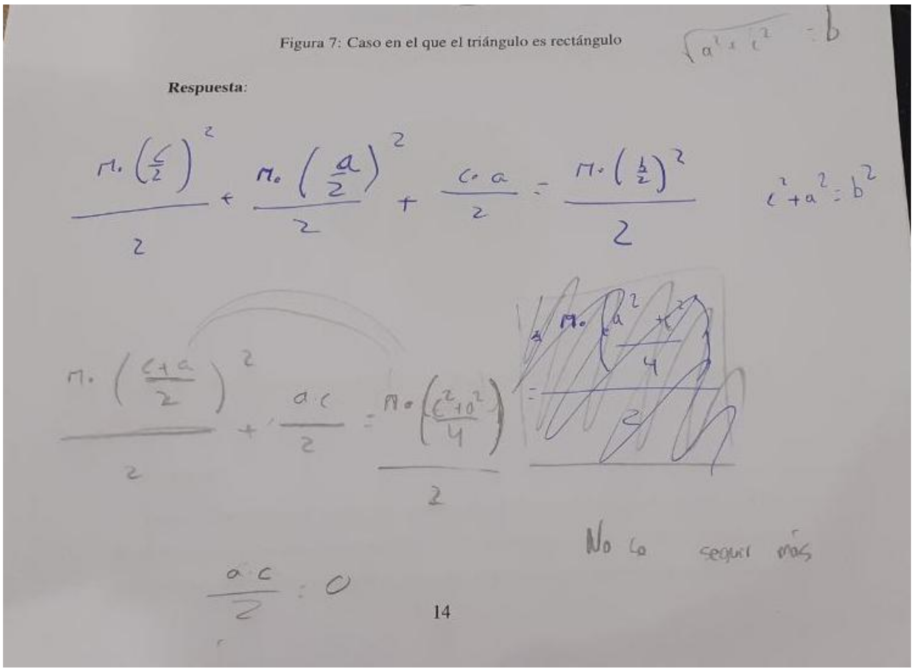


Figura 7: Caso en el que el triángulo es rectángulo

Respuesta:

$$\frac{\pi\cdot\left(\frac{c}{2}\right)^2}{2} + \frac{\pi\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} + \frac{c\cdot a}{2} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{b}{2}\right)^2}{2} \qquad c^2+a^2=b^2$$

$$\frac{\pi\cdot\left(\frac{c+a}{2}\right)^2}{2} + \frac{a\cdot c}{2} = \frac{\pi\cdot\left(\frac{c^2+a^2}{4}\right)}{2}$$

No lo seguí más

$$\frac{a\cdot c}{2} = 0$$

14

Figura 26: Ejemplo de producción no válida en 1ºI

6. Discusión de los resultados, y conclusiones

Los resultados obtenidos, aun proveniendo de una muestra pequeña, sugieren una reflexión interesante. Del total de sujetos de la muestra, incluyento al grupo de expertos, solo el 60,89 % ha sabido identificar la condición necesaria que debe cumplir el triángulo para que la relación de las áreas se cumpla.

El porcentaje de resultados evaluados como no válidos ha sido del 17,62 %. Por etapas educativas: 9,09 % en 4ºESO A, 37,04 % en 4ºESO B, 35,29 % en 1º Bachillerato CCSS, y el 6,67 % en 1º Ingeniería. En esta categoría se han agrupado tanto las producciones que no estaban terminadas como aquellas en las que se mostraban algunos resultados pero no daban ninguna explicación, como por ejemplo, escribir la relación del enunciado pero sin indicar que entienden que eso solo se cumple en triángulos rectángulos. Este análisis sugiere profundizar más en esta categoría para identificar posibles falsos negativos en el análisis, proponiendo, por ejemplo, cambios en la metodología de captura de datos para que no pasen desapercibidas esas explicaciones.

Un dato interesante es que 1º Ingeniería ha sido el único grupo en el que se han encontrado evidencias de carencias en cuanto a atributos relevantes de los triángulos, siendo el porcentaje de las producciones nada desdeñable (46,67 %). Por ejemplo, un sujeto intenta demostrar que un triángulo cualquiera no cumple el teorema de pitágoras, dando para ello un contraejemplo de un triángulo con lados imposibles, u otro ejemplo, un sujeto que después de muchas cuentas acaba demostrando que se cumple para cualquier triángulo.

En casi todas las producciones, incluyendo las que analizan rasgos relacionados con el nivel 5, se ha detectado un lenguaje informal a la hora de demostrar o reformular la proposición. Esto sugiere que habría que reforzar esta competencia para que los alumnos mejoren su capacidad de dar explicaciones.

Los malos resultados de los alumnos de ingeniería podría ser un indicador de la falta de persistencia en el aprendizaje de los alumnos así avanzan en las etapas educativas, dado que los contenidos del test son propios de la etapa de la ESO, y los alumnos de esta etapa los tienen más presentes. Los resultados de este estudio son preliminares pero sugieren una investigación más exhaustiva para determinar qué factores pueden influir en esto. Este trabajo es un buen ejemplo de cómo la investigación en didáctica en etapas de ESO y Bachillerato puede ayudar a mejorar el proceso de aprendizaje en etapas superiores. Para poder detectar estas carencias, y dado que las carreras técnicas son las que están relacionadas con el perfil de salida de los alumnos de 4ºESO que cursan Matemáticas B, se ha diseñado una situación de aprendizaje que ayude a detectar estos fallos en la etapa de la ESO para poder intervenir y que no se propaguen a etapas superiores.

En este trabajo exploratorio, se ha presentado un test cuyo contenido ha sido validado por dos profesores de didáctica de las matemáticas con experiencia contrastada en investigación sobre el modelo de Van Hiele, y se han obtenido y analizado los datos correspondientes a un subconjunto de preguntas del instrumento, comprobando que el marco teórico del modelo de Van Hiele es útil para categorizar las respuestas y coherente con las evidencias encontradas. Uno de los puntos que los expertos en didáctica sugirieron en la etapa de valicación del test, es que no está claro que las preguntas 1b y 1c del test midan los indicadores correspondientes a rasgos de nivel 4 y nivel 3, respectivamente, aunque si es verdad que la complejidad cambia. Sugirieron que, para determinarlo, habría que hacer un estudio profundo en la literatura sobre las diferencias existentes entre lo que se considera una demostracón y una comprobación. Como trabajo futuro se deberá realizar ese estudio, y en paralelo también se analizarán el resto de actividades, con vistas de proponer cambios o mejoras para un posterior análisis de la confiabilidad del test de manera rigurosa, seleccionando una muestra más grande para evitar sesgos, y aplicando las técnicas estadísticas correspondientes para determinar la fiabilidad del test.

7. Situación de aprendizaje: Áreas aparentemente iguales

El nombre de esta situación de aprendizaje hace un guiño al actual currículo aragonés de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria, en donde aparece una situación de aprendizaje enmarcada en la teoría de razonamiento geométrico de Van Hiele. Esta actividad está basada en ella y puede encontrarse en la orden ECD/1172/2022, de 2 de agosto, por la que se aprueban el currículo y las características de la evaluación de la Educación Secundaria Obligatoria y se autoriza su aplicación en los centros docentes de la Comunidad Autónoma de Aragón, dentro del currículo de la asignatura de Matemáticas.

7.1. Introducción y contextualización

Se plantea una situación de aprendizaje para trabajar en 4º de ESO (B) la relación entre el teorema de pitágoras y conceptos físicos como densidad, volumen y peso orientado a la medición de áreas en figuras geométricas. Esta actividad se plantea para establecer una relación entre las asignaturas de Matemáticas y Física y Química. El proceso de aprendizaje se guiará a través de la resolución de problemas sobre la verificación de ciertas condiciones físicas que algunos objetos con una geometría particular deben cumplir para que sus áreas sean iguales, para después indagar sobre cómo pueden hacer uso de magnitudes secundarias para medir áreas que a priori no se pueden medir empíricamente.

7.2. Objetivos didácticos

- Hacer uso de las propiedades de los triángulos y sólidos rígidos para la resolución de problemas.
- Utilizar y reflexionar sobre las relaciones entre área, densidad, peso y volumen.

7.3. Elementos curriculares involucrados

- (Matemáticas) Sentido de la medida: Capacidad de contabilizar, comparar y estimar una cantidad de magnitud.
- (Matemáticas) Sentido espacial: Propiedades geométricas de objetos matemáticos y de la vida cotidiana.

- (Matemáticas) Sentido socioafectivo: Mediante el trabajo cooperativo se favorece el apoyo entre los integrantes del equipo, promoviendo la ayuda mutua y comprensión frente a la frustración que puede aparecer a la hora de resolver problemas de Matemáticas y Física.
- (Física y Química) La materia: Cuantificación de la cantidad de materia: cálculo de la cantidad de sustancia de sistemas materiales de diferente naturaleza, manejando con soltura las diferentes formas de medida y expresión de la misma en el entorno científico.

Es una actividad que se trabaja mediante la resolución de problemas (Beltrán-Pellicer y Martínez-Juste, 2021) desde un punto de vista transversal a diferentes materias, lo que favorece la argumentación y el razonamiento, así como la comunicación, por lo que se trabajan especialmente las competencias CE.M.1, CE.M2, CE.M3, CE.M5, CE.M.6, CE.M.7, CE.M8, CE.M9, CE.M.10, CE.FQ.2, CE.FQ.3, CE.FQ.5.

7.4. Descripción de la actividad

La actividad se organiza tratando de seguir las 5 fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele. Estas fases están descritas en las orientaciones didácticas del sentido espacial de la ESO.

7.4.1. Fase de información

Se pide considerar un triángulo con vértices A, B, C y lados de longitudes a, b, c cualesquiera, así como los semicírculos de diámetros a, b, c tal y como figura en la imagen:

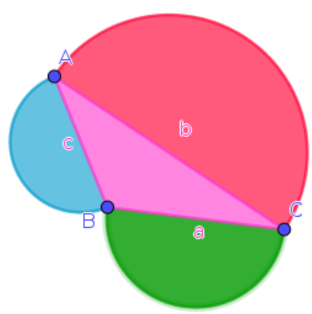


Figura 27: Contruimos tres semicírculos cuyas longitudes de los diámetros son a,b y c respectivamente

Al alumnado se le pide que trate de demostrar que el área del semicírculo de diámetro b es igual a la suma de las áreas de los otros semicírculos. Y si no se puede, que indiquen bajo qué condiciones eso se cumple.

7.4.2. Fase de orientación dirigida

En esta fase, al alumnado se le proporciona unas láminas de caucho y se les pide que piensen en un triángulo de lados cualesquiera, y haciendo uso de regla, compás y tijeras, construyan tres semicirculos de diámetros los lados de dicho triángulo.

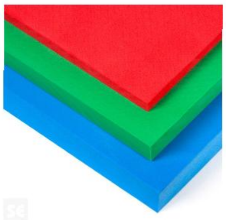


Figura 28: Láminas de caucho y compás

Con esto se espera solventar los problemas encontrados en el análisis de los resultados del estudio anterior, en el que veíamos que algunos alumnos, para verificar que cualquier triángulo no cumplía con la proposición indicada, contruian un triángulo ”virtualçon lados imposibles. Realizando esta actividad con recortables, se podrá detectar si el alumnado entiende que los tres lados de un triángulo están relacionados y que no cualquier configuración de valores es válida.

Una vez construidos, se les pide que indiquen si creen que las áreas de los semicírculos que han contruido, cumplen la propiedad que se ha indicado en el apartado anterior, y se les pide también que piensen cómo podrían comprobarlo.

7.4.3. Fase de explicitación

Una vez han tenido tiempo para pensar en el problema, en esta fase se pretende que el alumnado verbalice las ideas que han ido surgiendo, en este caso sobre cómo medir áreas de semicírculos y comprobar si cumplen las propiedades indicadas. Para ayudar, se pueden proponer algunas preguntas como por ejemplo:

- ¿Qué magnitudes conocemos de los objetos que hemos construido?
- ¿Qué tienen todos en común?

7.4.4. Fase de orientación libre

En esta fase, se proporciona al alumnado una hoja con dos triángulos, uno en cada cara de la hoja. Uno de ellos rectángulo de lados 13, 12 y 5, y el otro no rectángulo de lados 7, 8 y 10.

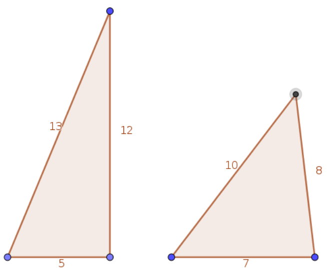


Figura 29: Triángulos que aparecen en la hoja

Además, se proporciona a cada grupo de trabajo seis semicírculos de madera de los mismos diámetros que los lados de los triángulos anteriores, y una báscula de cocina.

Una vez repartido el material, se pide que piensen sobre cómo podrian utilizar esos elementos para comprobar si esos semicírculos cumplen las propiedades indicadas.


Figura 30: Semicírculos de madera y báscula de cocina

7.4.5. Fase de integración

En esta fase, el profesorado debe revisar el procedimiento seguido y poner en orden las ideas geométricas y físicas que han aparecido a lo largo de la actividad, y las relaciones entre las mismas. En particular, la relación entre densidad, volumen, área y peso, y que a igualdad de densidad y altura de las figuras, el área es directamente proporcional al peso.

7.5. Metodología y estrategias didácticas

Se trata de poner en juego las cinco fases de aprendizaje de Van Hiele con la idea de afianzar el progreso del alumnado hasta el nivel 3. Se propone utilizar alguna de las técnicas de trabajo cooperativo descritas en (Torrego et al., 2011), como por ejemplo, la técnica ”Situación Problema”, y que la intervención del profesorado se adapte a lo que cada fase requiere:

- Fase de información: El profesorado presenta el problema, en este caso un triángulo con sus semicírculos correspondientes a cada lado, y guia el pensamiento del alumnado a que incidan en las propiedades geométricas de esos elementos.
- Fase de orientación dirigida: Dado que en esta fase las tareas que se proponen son manipulativas, el profesorado atenderá las dudas o dificultades que el alumno muestre en el desarrollo de la actividad.
- Fase de explicitación: El profesorado tratará en esta fase de guiar la puesta en común de ideas, moderando el debate y guiando la discusión hacia aquellos argumentos o preguntas más constructivas.
- Fase de orientación libre: En esta fase el trabajo cooperativo se vuelve fundamental para el correcto desarrollo del proceso de aprendizaje, por lo que el profesorado

deberá procurar fomentar el trabajo en equipo y la buena dinámica de los grupos de trabajo.

- Fase de integración: En esta última fase, el profesorado, pudiendo hacer partícipe también al alumnado, tratará de poner las ideas en común y estructurar todos los contenidos y conclusiones a las que se han llegado, como la relación entre peso, área, densidad, volumen y geometría de los objetos que han estado manipulando.

Por último, la duración de la situación de aprendizaje no tiene por qué ser de una única sesión, ya que se requiere tiempo para que el alumnado incida en los conceptos e ideas que está manejando, pudiéndose distribuir esta actividad en diferentes sesiones.

7.6. Atención a las diferencias individuales

El trabajo cooperativo permite que las diferencias individuales sean solventadas en parte por la ayuda de los compañeros, pero esto no debe distraer al profesorado en su tarea de identificar aquellos obstáculos o dificultades que algunos alumnos pueden encontrar en el desarrollo de la tarea, interviniendo en caso de que sea necesario. Además, será imprescindible que el profesorado esté atento a que la participación de todo el alumnado sea significativa, en todas las fases de la actividad, así como asegurarse de que todos los alumnos entienden lo que están haciendo en cada momento.

7.7. Recomendaciones para la evaluación formativa

- Las fases del modelo de van Hiele promueven la evaluación formativa vía la comunicación de resultados en la fase de explicación.

- También el momento de la resolución de problemas, fase de orientación libre, es un punto interesante para realizar una evaluación formativa ya que es el punto en el que surgen las conexiones entre ideas matemáticas y físicas que no suelen tratarse de forma conjunta.

8. Referencias

Arnal-Bailera, A. y Manero, V. (2023). A Characterization of Van Hiele's Level 5 of Geometric Reasoning Using the Delphi Methodology. *International Journal of Science and Mathematics Education*, págs. 1–24. Publisher: Springer.

Beltrán-Pellicer, P. y Martínez-Juste, S. (2021). Enseñar a través de la resolución de problemas. Technical report.

Blair, S. D. (2004). *Describing undergraduates' reasoning within and across Euclidean, taxicab, and spherical geometries*. Portland State University.

Burger, W. F. y Shaughnessy, J. M. (1986). Characterizing the van Hiele levels of development in geometry. *Journal for research in mathematics education*, 17(1):31–48. Publisher: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. (1992). Elaboraciones sobre los niveles de pensamiento geométrico. In *Memorias del tercer Simposio Internacional Sobre Investigación en Educación Matemática*, págs. 16–43, México.

Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. *Learning and teaching geometry, K-12*, 1:1–16. Publisher: Citeseer.

Gómez, P. (2012). La elección del estudio de caso en investigación educativa.

González-Meneses J, T. J. (2008). *Geometría, Notas de Teoría*. Universidad de Sevilla.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1998). On the assessment of the van hiele levels of reasoning. *Focus on learning problems in mathematics*, 20:27–46.

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (1995). Towards the design of a standard test for the assessment of the students' reasoning in Geometry. volume 3, págs. 11–18, Recife, Brasil.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano: la evaluación del nivel de razonamiento*. tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia.

Jaime, A. (1995). ¿ Por qué los estudiantes no comprenden la geometría. *Geometría y algunos aspectos generales de la Educación Matemática*, págs. 23–43.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1994). A model of test design to assess the Van Hiele levels. volume 3, págs. 41–48.

Linstone, H. A. y Turoff, M. (1975). *The Delphi Method: Techniques and Applications*. Addison-Wesley.

Mayberry, J. (1983). The van hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1):58–69.

Pandiscio, E. y Knight, K. (2010). An investigation into the van hiele levels of understanding geometry of preservice mathematics teachers. *Journal of Research in Education*, 20(1):45–53.

Pérez Serrano, G. (1994). *Investigacion cualitativa: retos e interrogantes. Dos: tecnicas y analisis de datos.* La muralla.

Reidl Martínez, L. M. (2012). El diseño de investigación en educación: conceptos actuales. *Investigación en educación médica*, 1(1):35–39.

Stake, R. E. (2020). Investigación con estudio de casos. *Investigación con estudio de casos*, págs. 1–156.

Torrego, J. C., Boal, M., Bueno, A., Calvo, E., Expósito, M., Maillo, I., Miguel, A., Moruno, P., Moya, A., y Rodríguez, A. (2011). Alumnos con altas capacidades y aprendizaje cooperativo. *Un modelo de respuesta educativa*, págs. 89–124.

Usiskin, Z. (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. CDASSG Project. Publisher: ERIC.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(3):293–305. Publisher: Taylor & Francis.